

## 摘 要

金融风险测量 VaR 方法广泛应用于银行等金融机构, Copula 技术以其处理非正态联合分布函数所具有的良好性质逐渐成为国内外研究的热点. Copula 函数可以理解为“相依函数”或“连接函数”,它是把多维随机变量的联合分布用其一维边际分布连接起来的函数,它不仅是构建多维分布的工具,同时也是在随机变量之间探索相依结构的工具.目前它已被广泛的应用于金融领域,并且成为解决金融问题的一个有力的工具.

首先,在理论方面,本文对风险管理进行了概述,介绍了 VaR 风险价值的定义、计算方法和存在的问题.接着深入介绍了 Copula 的理论及在金融分析上的应用,并提出了运用 Copula 方法计算开放式基金投资组合的 VaR.我们发现运用 Copula 模型计算投资组合的 VaR 时, VaR 的解析式一般不容易求出,因此常常运用 Monte Carlo 模拟法来计算 VaR 的值.运用 Monte Carlo 模拟法计算资产投资组合 VaR 值的关键在 Copula 函数的仿真技术上.

其次,在实证方面,本文以南方高增长基金的前 10 支股票为例,建立了投资组合风险分析的 Copula-GARCH 模型.结合 Monte Carlo 模拟技术,利用 Copula 理论计算投资组合的 VaR,并与传统的 VaR 方法进行比较.通过比较度量基金投资组合的三种方法,结果表明传统的 VaR 计算方法和 Kendall 相关系数法低估了风险.这是因为相比之下,传统的方法由于其基于正态分布与线性相关的假设,存在不可避免的缺陷,从而低估了 VaR.特别是当极端事件发生时,资产组合的 VaR 计算与实际情况有偏差.因此基于 Copula 的 VaR 方法能够更加有效地测量开放式基金投资组合的风险.

最后提出了 VaR 理论应用于我国金融市场中的风险管理等金融领域的意义和建议,并对其进行了总结,提出了需要进一步解决和研究的问题.

**关键词:** Copula 方法; 开放式基金; VaR

## Abstract

VaR is widely applied to bank and other banking institutions. As Copula has fine character for handling the abnormal joint distribution function it is gradually become the hot studying problem at home and abroad. Copula function can be understudied by "correlative function "or "linking up function" which connect the multidimensional random variable with one dimension boundary distribution. It is not only the tool for constructing distribution but also the tool for exploring the relative construction between the random variable. What's more, Copula method has widely used in the finance area so far and became the good tool for solving the finance problem.

First in the theory aspect, this paper overview the risk management and introduce the definition、 calculational methods、 existed problem about VaR. In the following deeply introduce the Copula theory and how to use the Copula methods to calculate the VaR of China's open-end funds. We found it is difficult for us to solute the analytical formula when use the Copula model to calculate the Portfolio's VaR. So we use the Mento Carlo simulate method calculate VaR.The key of using Mento Carlo method is the emulational technology in the Copula function.

Secondly , in the empirical aspect, we use southern high-growth fund shares before 10 as an example, establishing the Copula-GARCH model of the investment portfolio risk analysis. Combinating Monte Carlo simulation techniques, we employ Copula theory to calculate portfolio VaR, and compare with the traditional VaR methods. Empirical results shows that the traditional VaR and Kendall method underestimate the risk value. The reason is tha the traditioal method exist the unavoidable defect based on the assumption that the varible must belongs to normal school and linear correlation.Expecially as extreme events happened,the caculated VaR has warp compared with actual situation.So the VaR method based on the Copula can more effectively measure the open-end funds' portfolio risk.

At last we forward the meaning and advice of VaR which is used in the risk management of finance marketing etc.We also forward the problem that needed to be solve in future.

**Key Words:** Copula method; Open-end fund; VaR

# 湖南大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：夏宇

日期：2009年6月1日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湖南大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

- 1、保密□，在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。
- 2、不保密。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：夏宇

日期：2009年6月1日

导师签名：杨相宇

日期：2009年6月2日

# 第 1 章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

自 2001 年 9 月 11 日, 开放式基金无论在数量上还是在资产总值上都得到了迅速发展, 大大超过封闭式基金. 07 年前三季度, 开放式基金的规模持续壮大, 股票型、配置型以及债券型基金均呈现净申购, 只有保本型基金呈现净赎回. 据统计, 截至 3 季度末, 所有公布数据的开放式基金的资产管理规模达到 27951 亿元, 比年初的规模增长了近 4 倍. 开放式基金规模大幅膨胀一方面取决于巨型新产品发行, 一方面取决于净值的大幅增长, 一部分股民转基民以及新基金队伍的壮大也是非常重要的因素. 前三季度, 共有 232 只开放式基金出现净申购, 份额高达 14487 亿份; 78 只基金出现净赎回, 赎回份额约为 966 亿份. 呈现净申购的基金多为最近半年或一个季度业绩表现较好的基金; 或者是期间采取了拆分等营销策略的基金; 一些管理实力较强, 规模较大的基金公司旗下的产品也是投资者竞相追逐的目标. 截至 2007 年 9 月 30 日, 开放式基金中规模超过 400 亿的已经有 3 只, 其中规模最大的是嘉实理财稳健基金, 该基金的 3 季度末资产净值已达 447 亿元. 但是我们也发现, 在一些基金规模迅速膨胀的同时, 不足 1 个亿的小基金仍然存在, 两极分化现象日趋严重. 截至 2008 年底, 我国投资基金共有 464 只, 其中开放式基金 433 只, 资产净值合计 18179.08 亿元, 占全部基金资产净值的 97.37%.

我国已具备了股市进一步发展的政治, 经济和社会条件, 《证券法》的出台对股市发展走向规范成熟奠定了良好的法律基础, 股票市场在国企改革中的地位与作用已得到普遍认可. 有效地防范, 监控股市风险, 引导我国股市健康发展是当今证券监管部门, 也是广大投资者关注的热门话题. VaR 模型可以使个人、机构投资者控制风险, 凡是持有存在市场风险的金融资产的投资者都可以使用 VaR 进行风险管理. 并且 VaR 的应用不仅仅局限于证券投资者本身, VaR 技术对我国股市的风险控制也有普遍意义的借鉴作用.

自 1959 年 Copula 理论被提出以来, 随着计算机技术、信息技术的迅猛发展和边缘分布建模问题的不断发展并日趋完善, Copula 理论在 90 年代后期得以迅速发展并运用到金融领域. 通过 Copula 函数, 可以将风险分解为单个金融资产的风险和由投资组合产生的风险两部分. 其中, 单个金融资产的风险可以完全由它们各自的边缘分布来描述, 而投资组合产生的风险则完全由连接它们的 Copula 函数来描述. 若投资组合中的金融资产已经确定, 那么市场风险就相当于投资组合中资产结构的风险, 可以完全由一个相应的 Copula 函数来描述. 因此 Copula 从结构上能较好的拟合联合分布从而得到组合收益的 VaR.

## 1.2 相关问题的研究现状

### 1.2.1 Copula 方法的研究现状

Copula 函数可以理解为“相依函数”或者“连接函数”, 他是把多为随机变量的联合分布用其一维边际分布连接起来的函数. 最早介绍 Copula 的是 Sklar

(1959)<sup>[1]</sup>的一篇文章,但是在金融领域中的应用还是近几年的事情.随后 Genest 和 MacKay(1986)<sup>[2]</sup>、Joe. H. (1993)<sup>[3]</sup>等进一步发展,使 Copula 成为构造多元联合分布和分析随机变量间相关结构的重要工具.

自 Embrecht 等 (1999)<sup>[4]</sup>把 Copula 引入到金融数量分析以来,已经取得了许多有意义的成果. Bouye E<sup>[5]</sup>系统介绍了 Copula 理论在金融领域的各项用途. Durrleman et al. <sup>[6]</sup>提出了如何正确选择一个 Copula 和如何在应用中变换 Copula 函数族的问题. Claudio Romano<sup>[7]</sup>对意大利股市收益率进行了 Copula 分析, Roberto<sup>[8]</sup>对 Copula,特别是对 Archimedean Copula 做了较好的总结. Beatriz<sup>[9]</sup>再次用 Copula 函数度量了金融风险,并比较了几种不同的 Copula. Stefano Demarta<sup>[10]</sup>介绍了 t-Copula 函数的一些性质,提出了 t-Copula 函数的应用优势. Davide. M. etc(2004)<sup>[11]</sup>用 Copula 对一些信用衍生品(如 CDO 和 BDS)的定价和风险分析进行了研究,发现 t-Copula 较适合于金融数据分析; Jean-David. F. (2004)<sup>[12]</sup>提出了两种 Copula 的拟合优度检验; Hull, White(2004)<sup>[13]</sup>用 Copula 建立了多标的资产的信用衍生品定价模型.

目前, Copula 已成为风险分析的重要工具由 CSFB(Credit Suisse First Boston)开发的 Creditrisk 和 JP Morgan 开发的 Creditmetrics 都直接或间接的汲取了 Copula 的思想. Goorbergh, Genest 和 Werker (2005)<sup>[14]</sup>在 Patton 的基础上设计出新的动态演进方程并用时变 Copula 中对期权定价进行了研究. Jing Zhang, Dominique Guegan(2006)<sup>[15]</sup>开始构造拟合优度的统计检验量来判断样本数据在进行动态 Copula 建模时适用的模型结构,也就是时变相关 Copula 模型与变结构的 Copula 模型的统计推断 Copula 是用来描述多个随机变量间相依结构的统计方法. 利用随机向量的边缘分布, Copula 还可以用来确定随机向量的联合分布.

国内学者从 2002 年开始 Copula 在金融数据分析中的研究. 最早的张尧庭 (2002a, 2002b)<sup>[16][17]</sup>从理论上探讨了 Copula 在金融上应用的可行性. 韦艳华等 (2003)<sup>[18]</sup>对 Copula 在金融中的应用作了总结. 吴振翔等(2004)<sup>[19]</sup>探讨了 Copula 相依结构下两资产的组合投资问题. 缪柏其等人(2004)用 Archimedean Copula 分析了外汇市场中最小风险的投资组合.

在方法创新方面, 韦艳华、张世英(2004)<sup>[20]</sup>把 Copula 应用于 GARCH 模型来度量金融时间序列的自相关结构. 史道济(2004)<sup>[21]</sup>改进了 Copula 对数据拟合的一种方法; 李平(2005)<sup>[22]</sup>则探讨了二元数字期权定价与 Copula 函数的关系. 吴振翔, 陈敏, 叶五一, 缪柏<sup>[23]</sup>其结合 Copula 及 GARCH 模型的预报功能, 建立了投资组合风险分析的 Copula-GARCH 模型. 利用这个模型, 对我国股票市场实际组合投资问题进行了风险分析, 并给出了最小风险组合的具体形式. 孔繁利, 段素芬, 华志强<sup>[24]</sup>研究 Copula 理论在投资组合风险管理中的应用.

## 1.2.2 VaR 的研究现状

早在九十年代初, 国外学者就开始了 VaR 的研究, 探讨的内容涉及对 VaR 自身的分析与评价和 VaR 在各个领域内的应用两大方面. 1994 年, J. P. morgan 银行首先推出了基于 VaR 的风险度量系统—RiskMetrics, 在正态分布的假设下, RiskMetrics 给出了计算 VaR 的方法. 其后许多学者针对不同的市场特点在不同的假设下提出了各种不同的计算方法, 如混合正态分布法(Venkataraman)<sup>[25]</sup>、核函数估计法(Butler, J. S)<sup>[26]</sup>、异常值理论(Daneilsson、Embrehts 和 Frye 等)、平方根法(Iacono, Frank)以及模拟仿真法(Jamshidian, Jauri 等), Kwiatkowsk 和 Shimko 还对非线性衍生证券资产的 VaR 计算加以了研究. 后续的研究重点比较

一些度量方法和根据实际情况如何选择方法等（见表 1. 1）

表 1. 1 VaR 方法的比较

学者或机构	度量 VaR 方法的比较
Hendrics(1996) <sup>[27]</sup>	对参数化方法、历史模拟法、蒙特卡罗模拟法进行了实证研究比较
David X. Li(1999) <sup>[28]</sup>	提出在不对资产组合收益率分布作任何假定的条件下用三阶中心矩和四阶中心矩统计量来计算资产组合值 VaR 的半参数模型，并分别用 RiskMetrics 模型和半参数模型对货币汇率的时序数据进行分析，得出半参数模型较 RiskMetrics 模型更为稳健的结论
RachelCampbell , RonaldHuisman , KeesKodeijk(2001) <sup>[29]</sup>	通过实证分析对基于历史模拟、VaR 风险管理模型的资产组合选择结果同基于收益率正态分布假设的均值一方差模型资产组合选择结果进行对比，并指出传统的均值一方差模型存在低估风险资产组合所面临的风险
Chu-Hsiung Lin和 Shan-Shan Shen(2006)	通过实证分析得出运用T分布假设可以提高VaR的估计并使之更加准确，特别是当尾部指数技术被用来决定自由度和当置信水平超过 98. 5%时.
范英（2000） <sup>[30]</sup>	系统地讨论了计算 VaR 的指数加权移动平均方法，结合我国深沪两市综合指数的实际数据，分别计算了深沪两市的最优衰减因子，并在此基础上估计了大盘的风险值
吴琼，薛红，王露珠 （2007） <sup>[31]</sup>	比较了基于 T 分布和正态分布的 GARCH 模型，发现基于 T 分布的 GARCH 模型更能捕捉金融市场的“尖峰厚尾”的特征，从而计算出的 VaR 更能够有效地反映金融市场的风险水平.

### 1.2.3 利用 Copula 方法计算 VaR 的研究现状

基于 Copula 理论的 VaR 算法与实证研究方面的文章还很少，国外关于利用 Copula 方法度量 VaR 的研究基本上开始于 20 世纪末。早期的文献有 Embrech(2003)<sup>[32]</sup>和 Durrleman(2001)<sup>[33]</sup>用 Copula 进行了风险分析。

其中很多学者都是使用 Monte Carlo 模拟方法来计算 VaR 的。Rockinger. M(2001)<sup>[34]</sup>把在金融风险管理中刻画金融资产收益的联合分布这样一个很重要的问题进行了说明。一般来说金融资产的收益的分布都是厚尾分布，其联合分布函数可以通过 Copula 函数来刻画。对于一个特定组合风险 (VaR) 值，可以从合适的联合分布通过使用 Monte Carlo 模拟来计算 VaR 的。Romano C(2002)<sup>[35]</sup>用 Copula 进行了风险分析，计算了投资组合的风险值，同时用多元函数值通过使用 Monte Carlo 方法来刻画市场风险。Clemente 和 Romano(2003)<sup>[36]</sup>结合极值理论和 Copula 技术研究了意大利的资本市场，并运用 Monte Carlo 仿真方法计算了对多个资本进行投资组合得到的 VaR 值，后验检验结果表明基于极值理论的 Copula 模型优于多元条件正态分布假设下的传统的 VaR 模型。

后来一些学者使用了不同的 Copula 方法计算投资组合的 VaR 值。Forbes K(2002)<sup>[37]</sup>通过对固定的 Copula 模型来描述 Copula 的各种相关模式，并把这一方法广泛的应用在金融市场上的风险管理，投资组合的选择，资产定价等。Rosenberg 和 Schuermann(2004)<sup>[38]</sup>采用 VaR 作为风险测度，运用 Copula 技术研究了市场风险、信用风险和运作风险的风险聚合问题，并与其他模型进行了

对比, 结果表明由 Copula 模型计算得到的 VaR 值最接近经验 VaR.

Dean Fantazzini<sup>[39]</sup>用边缘分布和 Copula 方法研究了多元投资组合的 VaR. 考虑到每种边缘分布和 Copula 的多元参数向量和单个参数向量的分离, 于是在实际操作中将最优化问题分解成几个小的最优化问题. Gang Cheng, Ping Li, Peng Shi(2007)<sup>[40]</sup>运用一种新的混合 Copula 方法计算了多元资产的 VaR 和一些相关性测量.

近年来国内一些学者也用 Copula 函数对投资组合的 VaR 进行了分析. 如张杰等(2003)<sup>[41]</sup>探讨了 Copula 函数在投资组合风险值中的应用. 张明恒(2004)<sup>[42]</sup>研究了多资产 VaR 的 Copula 计算方法; 刘国光、许世刚利用 Copula 方法实证研究了深圳 A 股、B 股投资组合风险值. 结果表明, 基于 Copula 方法估计的投资组合风险值比方差协方差方法估计的投资组合风险值更接近实际数据; 吴振翔, 叶无一, 缪柏其(2004)<sup>[19]</sup>运用阿基米德 Copula 给出了确定两种最小风险 (VaR) 投资组合的方法. 对欧元和日元的投资组合做了相应的风险分析. 曹辉<sup>[43]</sup>等(2006)用 Copula 函数对股票资产组合的 VaR 进行了分析.

陈守东<sup>[44]</sup>等选取了三种具有代表性的 Copula 函数对金融时间序列建模, 以描述不同金融数据间的相依关系, 并将其应用于证券市场的风险度量, 进行 Monte Carlo 模拟计算投资组合的 VaR. 将 Copula 方法的计算结果与传统的正态假设模拟结果比较表明, Copula 方法对金融风险的度量要明显优于正态方法.

## 1.3 论文研究的问题及创新点

### 1.3.1 论文研究的问题

本文基于近年来学术界对 Copula 在股票市场上的运用, 讨论 Copula 方法对开放式基金投资组合 VaR 的有效性.

Copula 是在 20 世纪 70 年代中期研究多变量分布过程中发展的一个概念. Copula 是一个联合分布函数, 联合分布函数可由随机变量的边际和相关性来确定, 通过将每一个变量的边界转化成标准统一的形式得到 Copula. 因此联合随机变量的 Copula 函数可通过两个步骤来构建: (1) 确定每个随机变量的边际分布; (2) 进行适当转换. 构建 Copula 较为复杂, 有两种可供选择的基本方法:

(1) 参数方法 (2) 非参数方法. 第一种方法事先定义 Copula 的类型 (如高斯分布、t 分布、Gubel 分布等), 并试图使参数符合数据, 第二种方法以 Deheuvels(1981)提出的方法为基础, 从数据中推导出经验的 Copula. 由于 Copula 能全面描述随机变量的联合性质即一个分布中的每一点随机变量的相关性, 使得我们可以借此研究与线性相关或 VaR 不能描述特征的相关极端事件相联系的一些问题. Copula 方法深受重视还因为目前还没有比它更好的相关性标量测度方法.

本文的目的是提出使用 Copula 函数去完成开放式基金资产组合的 VaR 的分析及去证实在与传统的 VaR 计算的比较的方面的改进的意义. 本文研究的问题如下:

1. 概述了 VaR 的概念和基本原理
2. 详细介绍 VaR 方法的理论与建模方法, 并对个方法进行比较, 指出存在的问题
3. 介绍 Copula 相关理论及其研究方法

4. 通过实证研究开放式基金投资组合的 VaR, 比较 Copula 方法与传统方法的精确性.

### 1.3.2 论文创新点

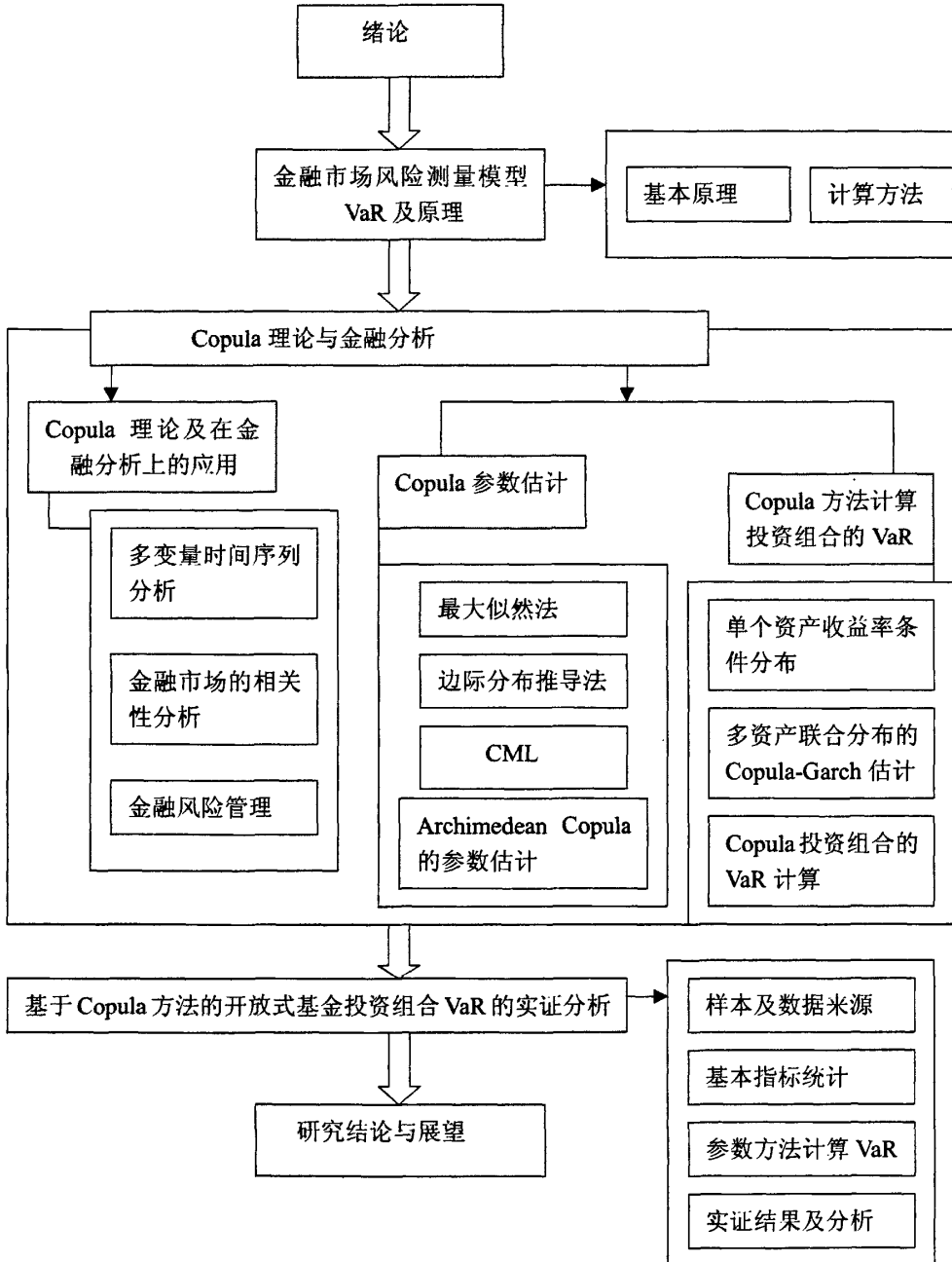
1、实证方面, 论文首次比较了利用 Copula 方法计算开放式基金投资组合的 VaR 与传统计算方法的区别.

2、理论方面, 随着金融产品的日益复杂和金融全球化、一体化的发展, 金融市场之间的相关关系变得日趋复杂. 过去对金融市场或金融资产相关性的研究主要通过传统的线性相关系数来体现, 关注的只是资产间的相关程度, 对相关模式根本无法体现. 由于这种情况的存在, 导致基于线性相关关系的大多数风险管理模型无法精确度量资产间的组合风险. 因此本文着重分析了 Copula 方法在金融分析上应用的优势.

3、金融风险管理是 Copula 模型的重要应用领域. 论文不仅深入的研究了可用于投资组合 VaR 分析的 Monte Carlo 仿真技术. 对这 10 支股票的实证研究表明, 结合具有不同边缘分布的 Copula-GARCH 模型和 Monte Carlo 模拟法来计算资产投资组合的 VaR 是可行、有效的.



## 1.4 研究框架



## 第 2 章 金融市场风险测量模型 VaR 及原理

### 2.1 VaR 的概念

所谓 VaR, 就是试图回答这样一个问题: “在所考虑的时间期限内, 一项给定的交易或头寸的最大预期损失是多少?”, 这也可以更确切的表达为: “在一个选定的时期内, 一项资产或者投资组合的价值下跌, 在一定的概率意义下不会超过的水平是多少?” [45][46]

VaR(Value at Risk)风险价值是指: 在一定持有期  $\Delta t$  内, 一定置信水平  $\alpha$  下, 投资组合  $P$  的最大损失值, 具体用数学公式表示为:

$$\text{prob}(\Delta p > -\text{VaR}) = 1 - \alpha \quad (2.1)$$

其中,  $\Delta p$  表示组合  $p$  在持有期内的价值变动量. VaR 即为在置信水平  $\alpha$  下处于风险中的价值

例如, J. P. Morgan 公司 1994 年年报披露, 1994 年该公司一天的 95% VaR 值为 1500 万美元. 其含义是指, 该公司可以以 95% 的可能性保证, 1994 年每一特定时点上的证券组合在未来 24 小时之内, 由于市场价格变动而带来的损失不会超过 1500 万美元

同时 VaR 的出现促使了 JP Morgan 公司成立了独立的风险管理专业机构 RiskMetrics, 并不断研究开发 VaR 的方法. VaR 最大的优势在于, 它能够将金融机构面临的各种风险敞口综合在一起, 成为一个直观的数字, 以便于理解和比较. 因此, VaR 已经成为风险管理的行业标准, 并且适用的范围超越了市场风险的领域, 成为信用风险、操作风险衡量的重要手段之一.

### 2.2 VaR 计算的基本原理

#### 2.2.1 收益率的度量

在计算分析 VaR 的时候, 通常会用到收益 (收益率).

一个组合 (资产) 额收益  $\Delta P$  表示为  $\Delta P = P_{t+1} - P_t$ , 这里  $P_{t+1}$  和  $P_t$  分别表示该组合  $(t+1)$  时刻和时刻的价值 (价格). 组合的收益通常采用收益率来描述. 收益率有两种类型: 算术收益率  $R_a$  和几何收益率  $R_g$ . 算术收益率为两个时刻的价值

之差除以前一个时刻的价值, 即为  $R_a = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ . 几何收益率等于两个价值之比

的对数值, 即

$$R_g = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (2.2)$$

几何收益率  $R_g$  可以用算术收益率  $R_a$  来表示, 即

$$R_g = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \frac{P_{t-1} + (P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} = \ln(1 + R_a) \quad (2.3)$$

如果时间窗口很短, 比如一天, 则每日的算术收益率  $R_a$  在 0 的附件. 对上式进行泰勒展开得到

$$R_g = R_a - \frac{R_a^2}{2} + \frac{R_a^3}{3} - \dots, \quad (2.4)$$

上式从第二项起逐渐趋于 0, 因此  $R_g$  和  $R_a$  近似相等, 即  $R_g \approx R_a$ . 于是我们同样看待几何收益率  $R_g$  和算术收益率  $R_a$ , 并都用  $R$  来表示.

## 2.2.2 VaR 计算的基本表达式

假设一个资产或者投资组合的初始价值为  $P_0$ , 在  $\Delta t$  这一期间内, 其收益率为  $R$ , 期末价值为  $P = P_0(1 + R)$ , 其中,  $R$  的期望为  $\mu$ , 标准差为  $\sigma$  的随机变量. 在给定的置信水平  $c$  下, 投资组合的最小价值为  $P^* = P_0(1 + R^*)$ , 其中,  $R^*$  是最小收益率. VaR 可以分为相对 VaR 和绝对 VaR. 期望价值和最小价值之差称为相对 VaR; 期初价值与最小价值之差称为绝对 VaR, 即

$$\text{相对 VaR: } VaR = E(P) - P^* = E[P_0(1 + R)] - P_0(1 + R^*) = -P_0(R^* - \mu)$$

$$\text{绝对 VaR: } VaR = P_0 - P^* = -P_0 R^*$$

由上看出, 求 VaR 的值实际就是求资产或者投资组合在一定置信水平下的最小值  $P^*$  或最小收益率  $R^*$ .

对最小价值  $P^*$  或最小收益率  $R^*$  的求解, 如果采用的是历史法或者是蒙特卡罗模拟法可以直接根据分位数获得; 如果运用参数法则通常需要假定收益率的分布.

## 2.3 VaR 的计算方法

VaR 的计算包括 5 个基本要素: 持有期、置信水平、数据的频度、资产组合的价值函数和分布函数. 这 5 个要素中, 前三个要素是主观确定的参数, 是 VaR

模型的外生变量。其中，持有期的长短可依据金融产品的不同特点加以选择；置信水平反映了不同决策主体对风险承担的不同程度，可在 95%-99%之间选择；VaR 的计算往往需要大规模历史样本数据，数据频度越长，所需的历史时间跨度越大。资产组合的价值函数是证券组合的估值模型，需要根据证券组合价值与市场因子的关系确定。而分布函数则取决于市场因子未来的分布，即市场因子的波动性模型。后两个要素是计算 VaR 模型的核心和难点。

VaR 计算的关键在于如何准确描述投资组合在持有期内的概率分布，目前常见的有两大类方法：参数化方法和模拟方法。参数化方法着重于直接计算模型中的参数，因此也称为协方差矩阵法；而模拟方法用历史模拟法或者蒙特卡罗模拟法则直接模拟出我们所需要的风险值。下面对于这几种常用方法做一简单介绍：

### 2.3.1 历史模拟法

历史模拟法的基本思路是给定历史时期所观测到的市场因子的变化来表示市场因子的未来变化。它首先确定标的风险因素，获取这些风险因素过去一段时间的历史变化的百分比，接着用这些可能变化值对组合进行估价，最后在一个给定的置信度下用这些组合价值的可能来估计其 VaR。这种方法首先必须假设资产的未来收益是对过去收益状况的重现，利用经验分布和非参数统计的方法，将过去已经实现的回报率分布或者市场变量分布应用于当前的投资组合，以模拟下一时期投资组合可能面临的回报率分布，计算风险值。

假设一个包含  $n$  项资产的投资组合，取其过去  $n+1$  天内的历史损益，则这个投资组合的损益为：

$$V_t^p = \sum_{i=1}^n \omega_i V_{it}, t = 0, 1, \dots, T$$

其中， $V_{it}$  为第  $i$  项资产在  $t$  时刻的损益， $\omega_i$  为资产权重。这样，在每一个时刻  $t$  上，组合都有一个损益值  $V_t^p$ 。通过历史的样本数据，可以得到一个序列，将序列按从小到大的顺序排列，并给出经验分布，就可以求出不同置信水平下的分位数，即 VaR 值。

在实践中除了直接通过资产价格计算资产回报之外，还使用市场变量如利率、汇率等变化来计算资产的价格变化，并进一步求出资产回报。由于组合中每一种资产都有可能受到几种风险因子的影响，所以资产的回报率就不像公式中简单一个序列可以表示，而是需要一个向量矩阵来表示。如果风险因子的个数为  $k$ ，历史时间跨度为  $m$ ，那么可以写成一个  $m \times k$  的收益矩阵：

$$R = \begin{pmatrix} r_t^1 & r_t^2 & \dots & r_t^k \\ r_{t-1}^1 & r_{t-1}^2 & \dots & r_{t-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{t-m}^1 & r_{t-m}^2 & \dots & r_{t-m}^k \end{pmatrix}$$

假设组合中有  $n$  项资产，其中每一项资产的现值  $V_j(P)$  是  $k$  个风险因子价格

$P$  的函数, 其中  $P=(p^1, p^2, \dots, p^n)$ . 根据 RiskMetrics 方法, 模拟日收益的损益情景可以分为四个步骤:

第一步, 从  $R$  中选择第  $r$  行, 该行对应着某个历史时间上各风险因子的回报情景;

第二步, 基于回报率计算每一个风险因子 1 天之后的价格;

第三步, 使用目前的价格向量  $P_0$  和第二日的情景价格向量  $P_1$  为每一个工具定价;

第四步, 计算组合的损益  $\sum_j (V_j(P_T) - V_j(P_0))$

历史模拟法的优点: 第一、如果能够及时完整地收集到数据, 运用这个方法是相当简单的. 第二、该方法计算的是投资组合的全部价值, 而非价格发生微小变化的局部近似. 而且此方法使用实际数据, 所以可以引入非线性的因素 (如 gamma, vega 风险和相关性). 由于它不需对定价模型和基本市场结构作特定的假设, 所以它也适用与非正态分布的情况, 能够很好地解决“粗尾”问题.

但这些历史信息提供了模拟的优势的同时, 也具有一定程度的缺陷. 第一, 它假定市场因子的历史能反映不久的将来, 但是实际金融市场不是这样, 当短期内市场因子有着较大的变化时, 历史模拟法就估计不准了. 第二, 它的结果的准确性依赖于样本的容量大小, 如果没有大量的历史数据, 也会估计不准. 第三, 它赋予所有的观测值以相同的权重, 也与现实不相符合. 一般而言, 较现在远的观测值的权重应该相应较小.

### 2.3.2 蒙特卡罗模拟方法

Monte Carlo 模拟法与历史模拟法十分类似, 它们的区别在于前者利用统计方法估计历史上市场因子运动的参数, 然后模拟市场因子未来的变化情景, 而后者则直接根据历史数据来模拟市场因子的未来变化情景. 计算步骤如下:

第一步, 选择合适的随机模型, 模拟出价格变化的时间路径;

第二步, 产生随机数  $x \in U[0,1]$ , 通过逆积分概率分布函数, 将均匀随机数

转换为合适的分布, 得到价格序列  $S_1, S_2, \dots, S_N$ ;

第三步, 将第二步重复  $K$  次, 比如得到  $K$  个某一指定时刻的价格, 进而求得损益分布. 在一定的置信水平下, 根据这个损益分布就可以估算出相应的 VaR 值.

由于 Monte Carlo 方法的全值估计、无需总体分布的假设、可以处理非线性、非正态分布等较复杂的问题, 以及计算方法易实现等优点, 使该方法得到了非常广泛的应用. 有很多研究者也正致力于该方法的改进和提高. 当然, 该方法也有特定的缺点如产生的是伪随机数可能会导致错误, 计算量大及计算时间长等.

优点: 蒙特卡罗分析是计算 VaR 最有效的方法, 它能说明广泛的风险, 包括非线性价格风险、波动风险、甚至模型风险, 它也考虑了波动时间变化、较粗的尾部以及极端情景等因素.

缺点: 最大的缺陷就是成本太高, 其次, 模型的稳健性有待考察. 它不仅依赖于基础风险因素下的特定的随机模型, 而且也依赖于诸如期权或抵押担保之类

的证券定价模型<sup>[75]</sup>。

### 2.3.3 方差—协方差方法

这种方法是通过计算组合内各资产的方差—协方差矩阵，从而求出资产组合的标准差，因此被称为方差—协方差法。方差—协方差方法是计算 VaR 中最为常用的方法，是参数法的一种。它假定风险因子收益的变化服从特定的分布通常是正态分布，然后通过历史数据分析和估计该风险因子收益分布的参数值，如方差、相关系数等，再通过估计出的参数值得出在给定置信水下整个投资组合的 VaR 值。

$$\text{计算公式的基本形式为： } VaR = Z_{\alpha} \sigma_p \sqrt{\Delta t}$$

其中  $\sigma_p$  为资产的标准差， $Z_{\alpha}$  为水平  $\alpha$  的分位数， $\Delta t$  是用来调节不同时期的参数，即持有期。例如：当我们使用日收益率方差来计算 10 天期的 VaR 时， $\Delta t = 10$ 。

常用的方差预测方法有 RiskMetric 方法和 GARCH 类方法。

#### ① RiskMetric 方法

RiskMetric 风险控制模型是 1994 年 10 月由 JP Morgan 公司风险管理部门推出，是世界上第一个定量计算的 VaR 模型。它的主要思想来自指数移动平均方法。指数移动平均方法对时间序列中的数据采取不等权重。它根据历史数据距当前时刻的远近，分别赋予不同的权重，距离现在越近，赋予的权重越大，距离现在越远的历史信息所起的作用越小。为了使赋予的权重简单化，指数移动平均方法引入一个参数  $\lambda$  决定权重的分配。 $\lambda$  称为衰减因子，它的取值在 0-1 之间。对于  $\lambda$  的估计通常都采用均方根误差原则(RMSE)，即选取使预测的均方根误差达到最小的  $\lambda$  值。

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2$$

指数移动平均方法估计收益的标准差还有一个显著的特点，就是可以将方差的估计公式写成迭代形式，这将有助于利用计算机处理庞大的数据。迭代公式如下所示：

$$\sigma_{t+\Delta t}^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2 = (1 - \lambda) r_t^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \quad (2.5)$$

在反复计算的基础上，JP 摩根集团的 RiskMetric 系统在对日回报数据波动性的估计中都取衰减因子  $\lambda$  为 0.94。目标期为一个月的金融资产衰减因子  $\lambda$  为 .97，迭代计算的起点为：

$$\sigma_{t0}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M r_i^2 \quad (2.6)$$

在 RiskMetric 系统中， $M$  取 74

基于正态法的 RiskMetric 系统存在一些缺陷它依赖于头寸收益率的正态性，并且是一种局部的方法和彻底的线性方法，同时运算繁琐。

#### ② GARCH 类模型法

为了捕获金融时间序列波动的特性,多年来经济学家们一直在努力构建适当的模型.针对波动的聚集性,即方差的时变性,2003年诺贝尔经济学奖获得者 Robert Engle 在 1982 年首先提出了 ARCH(自回归条件异方差)模型对方差进行建模.

在大多数回归分析中我们主要对变量的均值建立模型,然而 ARCH 模型中我们关注于对方差的建模.而在 VaR 计算过程中,就引入了这种 ARCH 模型来计算. ARCH 模型的结构取决于移动平均的阶数  $p$ ,要很好地捕捉股市异方差现象,

必须用到高阶 ARCH 模型,但如果  $p$  很大时,参数估计的效率就会降低,

而且还会引发诸如解释变量多重共线性等其他问题.为了弥补这一弱点,1986年 Bollerslev 将 ARCH 模型推广,发展成为广义的 ARCH 模型,即 GARCH(一般自回归条件异方差)模型.随后的十几年中,计量经济学家们对基本的 GARCH 模型进行了许多变形,现已发展成为一个包含众多方法的模型类别.

大量实证研究表明,GARCH 类模型特别适合对金融时间序列进行建模,估计或预测波动性.这是因为该类模型具有良好描述金融时间序列的特性,即处理方差的时变性和厚尾分布的能力.方差—协方差法运用比较方便,计算相对来说比较简单,还可进行参数对结果影响的敏感性分析,因而应用广泛.但是结果以来假设的正确与否,如果假设不正确,结果可能会有较大的误差.

### 2.3.4 多变量的蒙特卡罗模拟

对于投资组合来说,模拟单一资产的风险是不够的,变量之间的相关性对于投资组合的风险来说,是很重要的一个因素.传统的 VaR 方法对于多变量的蒙特卡罗模拟借助于矩阵的 Cholesky 分解技术来实现.

假设有一个由  $N$  个  $\varepsilon$  值构成的向量,并且其具有某种相关性结构:

$$\text{Cov}(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = R$$

其中  $R$  是一个对称的实矩阵,可以分解为它自己的 Cholesky 因子, $R = TT'$  ( $T$  为左下三角矩阵,右上侧的元素为 0).

然后从一个  $N$  维向量  $\eta$  开始,该向量由方差为 1 的独立变量组成,即

$\text{Cov}(\eta) = I$  ( $I$  为主对角线元素为 1,其余元素为 0 的单位阵).接着构造变量

$\varepsilon = T\eta$ , 它的协方差矩阵为:

$$\text{Cov}(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = E(T\eta\eta'T') = TE(\eta\eta')T' = TIT' = TT' = R$$

由此证实了  $\varepsilon$  值具有我们所希望的相关性结构.

以二元为例,矩阵可以分解为:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

由于 Cholesky 矩阵是三角矩阵,通过连续替代可以求得各个元素:

$$a_{11}^2 = 1$$

$$a_{11}a_{22} = \rho$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$

产生:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & (1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & (1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

再根据  $\varepsilon = \eta T$ ，可以得到:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & (1-\rho^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

这样就产生了需要的多元随机变量序列。

因此，对于多变量的模拟，首先产生一个独立的标准正态变量，然后利用 Cholesky 的三角矩阵连续替代，生成具有一定相关性的新的多元随机变量序列，根据新的多元序列计算持有期内的资产组合价值，模拟其分布，最后得到风险 VaR 值。

### 2.3.5 VaR 方法的比较分析

前面分析了 VaR 的几种典型的计算方法，这些方法都有各自的优缺点，具体分析见下表：

表 2.1 VaR 方法优缺点比较

方法	优点	缺点
历史模拟法	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 计算方法简单直接</li> <li>2. 属于无参数方法，不需要假设各种分布</li> <li>3. 适用于线性与非线性资产</li> <li>4. 没有模型风险的全面评价法</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 可能存在资料不足的问题</li> <li>2. 完全依赖于该特定历史期间可能忽略为纳入考虑的风险</li> <li>3. 历史窗口难以决定</li> <li>4. 面对市场结构性变动时，无法预测未知的改变</li> </ol>
蒙特卡罗模拟法	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 功能强大且具有弹性</li> <li>2. 可处理非线性、非正态数据</li> <li>3. 可以弥补历史数据不足的缺陷</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 计算时间长，投入的人工、电脑成本高</li> <li>2. 需要假设随机过程，可能造成模型风险</li> </ol>
方差-协方差法	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 计算方法简单直接</li> <li>2. 适合计算回报为线性的资产风险值</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 需要假设报酬率为正态，若假设不合适，则会造成极大的误差</li> </ol>



	<p>3. 历史数据多时, 因中央极限定理而更适合运用此法</p>	<p>2. 不适合处理非线性资产 3. 可能会有协方差矩阵计算的困难</p>
--	-----------------------------------	--

## 2.4 传统 VaR 计算中存在的问题

### 2.4.1 模型设定的偏差

从以上 VaR 的计算和蒙特卡罗模拟方法的介绍中我们可以看出, 除了历史模拟法以外, VaR 计算在很大程度上依赖于对于价格模型的假设, 如果模型设定有偏误, 将会引起整个风险值的估计结果的偏差. 对于投资组合 VaR 的蒙特卡罗模拟, 过去由于技术上的限制, 基本上都是假设服从多元正态联合分布. 然而事实上, 金融资产的收益率并不总是服从于多元分布, 即单一资产的收益率或各种资产间的相依结构并不都服从多元分布.

由于金融资产更倾向于呈现尖峰厚尾的分布, 因此用错误的正态分布去拟合时, 容易忽略尾部的极值, 而正是这些极值就是风险发生的可能. 因此, 我们将 Copula 函数引入 VaR, 能够很好地解决模型假设偏误的问题, 特别是资产之间的相关结构.

### 2.4.2 相关系数的缺陷

另一个方面, 过去我们最常用的线性相关系数, 即 Pearson 相关系数是衡量椭圆世界相依结构的最佳度量工具. 然而, Pearson 相关系数在使用的时候也有局限性. 如果我们对变量进行线性的变换, Pearson 相关系数能够准确衡量新变量间的相关程度. 但是当对变量进行非线性的变换, 比如对变量进行 log 变换, 那么这种情况下 Pearson 相关系数就不能用来衡量相关程度了, 或者说 Pearson 相关系数只能衡量新变量间很有限的一部份相依关系, 而对于其结构相关的其他方面就无能为力了.

此外, 我们都知道, 如果两个随机变量是独立的, 那么它们是不相关的, 即相关系数为 0, 但是如果两个相关系数为 0 的随机变量并不意味着独立. 只有在多元正态联合分布的情况下, 才有特例的存在, 即相关系数为 0 的两个随机变量可以推导出它们相互独立. 但是对于其他方式的联合分布, 比如它们的边际分布是正态分布, 而相依结构不是正态的, 就不能认为它们是独立的. 因此, 相关系数在这里作为衡量的工具就具有一定的缺陷.

并且, 在实际应用中, 我们发现在椭圆世界内构造风险衡量的模型已不能满足需要, 我们在建立相依模型的时候, 时常是超越了椭圆分布来构建, 而这时候如果再用线性相关系数来衡量变量之间的相依结构, 就会出现问题的. 例如, 对于两个资产  $X_1, X_2$ , 我们假设它们的边际分布是确定的, 为正态分布, 他们的线性相关系数为 0.5. 那么在椭圆世界里, 我们可以构造出唯一的联合分布来衡量. 但在椭圆世界之外, 我们发现有无数个联合分布的模型可以构建, 于是这个线性相关系数不再是衡量相依关系的工具.

而对于非参数统计的相关度量, 目前常用的 Kendall  $\tau$  和 Spearman  $\rho$ . 它们

比 Pearson 线性相关系数更优异的地方在于，它们对原始变量的分布不需要做假定，适用范围较广，可以在非椭圆分布世界进行相关性度量。但仍旧存在一定缺陷，比如无法完整衡量包括结构相依的所有相关关系。

过去的研究领域存在的这些问题，需要用一个新的方法才能解决。于是本文引入 Copula 函数，作为解决相依结构度量的重要工具。

## 2.5 本章小结

本章主要介绍了 VaR 的相关概念及其原理。并着重介绍了 VaR 的计算方法，对他们的优缺点进行了比较分析，我们发现蒙特卡罗模拟法功能强大且具有弹性，可处理非线性、非正态数据还可以弥补历史数据不足的缺陷是目前比较常用的计算方法。传统的 VaR 计算存在着一些问题：(1) 对于投资组合 VaR 的蒙特卡罗模拟，过去由于技术上的限制，基本上都是假设服从多元正态联合分布。然而事实上，金融资产的收益率并不总是服从于多元分布，即单一资产的收益率或各种资产间的相依结构并不都服从多元分布。(2) 另一个方面，过去我们最常用的线性相关系数，即 Pearson 相关系数是衡量椭圆世界相依结构的最佳度量工具。然而，Pearson 相关系数在使用的时候也有局限性。

## 第 3 章 Copula 理论与金融分析

### 3.1 Copula 理论简介

#### 3.1.1 Copula 的定义及其性质

随机向量的联合分布函数是刻画随机向量概率性质的最好工具之一,它包含了两方面的信息,一是变量的边缘分布信息,另一是变量间相关结构的信息.设随机向量  $X = (X_1, \dots, X_d)$  的联合分布函数为  $F(x_1, \dots, x_d)$ , 由联合分布函数容易得到变量的边缘分布函数,在联合分布中除去边缘分布的信息后,就剩下相关结构的信息了. 如果存在函数  $C$ , 使

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (3.1)$$

其中  $F_j(\cdot), j=1, \dots, d$  为边缘分布函数, 则称  $C$  是联合分布函数的  $F$  的 Copula, 有时也称  $C$  为随机向量  $(X_1, \dots, X_d)$  的 Copula, 且记为  $C_X$ .

反过来, 如果  $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$  为连续分布函数, 令  $U_1 = F_1(X_1), \dots, U_d = F_d(X_d)$ , 他们都服从  $[0, 1]$  上均匀分布, 则  $(U_1, \dots, U_d)$  的联合分布函数为

$$P_r(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) = C(u_1, \dots, u_d),$$

其中  $F_j^{-1}(\cdot)$  是  $F_j(\cdot)$  的反函数. 因此 Copula  $C$  可以看作是边缘分布为区间  $[0, 1]$  上均匀分布的随机向量  $(U_1, \dots, U_d)$  的联合分布函数.  $C$  反映了随机向量  $(X_1, \dots, X_d)$  之间的关联, 且这种关联与边缘分布无关. Copula 是由随机变量间相关结构决定的函数, 作为连接边缘分布函数的工具, Copula 在形式上也是边缘分布为区间  $[0, 1]$  上均匀分布的联合分布函数.

定理 2. 1 (Sklar 定理<sup>[80]</sup>) 设  $F$  是随机向量  $(X_1, \dots, X_d)$  的联合分布函数, 边缘分布函数分别为  $F_1, \dots, F_d$ , 则存在一个 Copula 函数  $C$ , 使得

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad -\infty \leq x_1, \dots, x_d \leq +\infty \quad (3.2)$$

成立. 如果  $F_1, \dots, F_d$  都是连续分布函数, 则  $C$  是唯一的; 否则,  $C$  在  $Ran(F_1) \times \dots \times Ran(F_d)$  上唯一确定  $Ran(F)$  表示函数  $F$  的值域. 反之, 如果  $C$  是一个 Copula 函数,  $F_1, \dots, F_d$  都是一元分布函数, 则由公式 (3.1) 定义的函数  $F(x_1, \dots, x_d)$  是一个边缘分布为  $F_1, \dots, F_d$  的  $d$  元联合分布函数.

定理 2. 1 不仅是 Copula 函数的存在性定理, 而且还给出如何利用联合分布函数求 Copula 函数的方法, 即通过公式 (3. 2) 利用联合分布函数和边缘分布的反函数来求 Copula 函数

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)). \quad (3.3)$$

从金融市场建模的角度看, 定理 2. 1 具有更重要的作用. 该定理允许用边缘分布函数和 Copula 函数构造更多联合分布函数, 而不是仅仅局限于多元正态分布或多元  $t$  分布. 因此对金融市场联合分布的建模可以从两方面进行边缘分布和相关结构, 可以将市场间包含的相关性的信息分离出来, 用 Copula 函数进行深入研究.

对于一些 Copula 函数, 可以将它看作一个多元分布函数, 而且具有显示表达对应的 Copula 密度函数  $C$  存在 (Copula 为绝对连续的情形), 且可有下式得到:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1, \dots, \partial u_d}.$$

利用 Copula 函数与联合分布函数  $F$ 、边缘分布函数的关系式 (2.2), 可以将联合密度函数重新记为:

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_j(x_j), \dots, F_d(x_d)) \prod_{j=1}^d f_j(x_j) \quad (3.4)$$

$d$  元 Copula 函数具有如下基本性质:

1. 对任意  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ , 如果至少有一个元素  $u_k$  为零, 则  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ ;
2. 对任意  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ , 如果除  $u_k$  外, 其余元素都为 1, 则  $C(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$ ;
3. 对任意  $a, b \in [0, 1]^d$ , 如果  $a \leq b$ , 则  $V_c([a, b]) \geq 0$ , 其中  $V_c$  表示量 ( $C$ -measure, 见). 这里  $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d)$ , 且  $a \leq b$  是分量意义下的不等式, 即  $a \leq b$ , 当且仅当  $a_i \leq b_i, i = 1, \dots, d$ .
4. 对任意  $u \in [0, 1]^d$ , 有

$$W^d(u) \leq C(u) \leq M^d(u),$$

其中  $M^d(u) = \min\{u_1, \dots, u_d\}, W^d(u) = \max\{u_1 + \dots + u_d - d + 1, 0\}$ . 当  $d = 2$  时,  $M^2$  和  $W^2$  均是 Copula 函数, 当  $d > 2$  时  $M^d(u)$  是  $d$  维 Copula 函数, 但  $W^d(u)$  却不一定是 Copula 函数.

5. 设连续随机变量  $(X_1, \dots, X_d)$  的 Copula 函数为  $C_{X_1, \dots, X_d}$ , 如果  $\alpha_1(X), \dots, \alpha_d(X_d)$  都是严格单增函数, 则

$$C_{X_1, \dots, X_d}(u_1, \dots, u_d) = C_{\alpha_1(X), \dots, \alpha_d(X_d)}(u_1, \dots, u_d)$$

即在严格单增变换下, 随机变量间的 Copula 函数保持不变.

### 3.1.2 Copula 分类

金融相关性分析中常用的 Copula 主要有两大类椭圆 Copula 类和阿基米德 Copula 类. 椭圆 Copula 可以由椭圆分布得到, 很容易从二元情形推广到多元情形, 二元阿基米德 Copula 类包含许多参数族, 各个阿基米德族 Copula 可以由相应的生成元函数得到. 并且当生成元函数满足一定条件时, 可以得到多元阿基米德 Copula. 另外, 极值 Copula 函数和混合 Copula 函数是理论研究和应用研究中的常用 Copula 函数.

#### 1 椭圆 Copula

##### A、正态 Copula (Guass Copula)

正态 Copula 函数即是多元正态分布相应的 Copula 函数. 随机向量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  具有正态 Copula, 当且仅当:

- (1) 边际分布  $F_1, F_2, \dots, F_n$  为标准一元正态分布, 记为  $\phi$ ;
- (2) 边际分布的相依结构由下式唯一确定:

$$C_R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_R(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n)).$$

其中  $\Phi_R$  是标准多元正态分布函数，其线性相关矩阵为  $R$ ， $\phi^{-1}$  是一元标准正态分布函数的逆函数。

当  $n=2$  时，二元正态 Copula 函数的表达式为：

$$C_R(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)}\right\} ds dt$$

其中  $R_{12}$  是两个随机变量之间的线性相关系数。

### B、t-Copula(Student's Copula)

假设  $X$  服从自由度为  $\nu$  的  $t$ -分布，其均值向量  $\mu$ （对于  $\nu > 1$ ），协方差矩阵为  $\frac{\nu}{\nu-1}\Sigma$ （对于  $\nu > 2$ ），则有：

$$X = \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Z$$

其中  $\mu \in R^n, S \sim \chi_{\nu}^2, Z \sim N_n(0, \Sigma)$ ， $S$  与  $Z$  独立； $X$  的 Copula 函数为：

$$C_{\nu, R}^n(u) = t_{\nu, R}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)).$$

其中， $R_{ij} = \frac{\sum_{ii}}{\sqrt{\sum_{ii} \sum_{jj}}}, 1 \leq i, j \leq n$ ， $t_{\nu, R}^n$  是随机变量  $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Y$  的多元分布函数。

$S \sim \chi_{\nu}^2, Y \sim N_n(0, R)$ ， $S$  与  $Y$  相互独立。

当  $n=2$  时，t-Copula 为：

### 2 阿基米德 Copula

Genest 和 Mackay(1986)给出了阿基米德 Copula 函数的定义：

设  $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  为连续、严格递减的凸函数， $\phi(1) = 0$ ，则函数  $C$ ：

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$$

其中，伪逆  $\phi^{[-1]}$  定义如下：

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

称为由  $\phi(\bullet)$  生成的 Archimedean Copula， $\phi(\bullet)$  称为该 Copula 的生成函数。它满足以下条件：

$$\phi(u) + \phi(v) \leq \phi(0).$$

对任意  $0 \leq u, v \leq 1$ , 有  $\phi(1) = 0, \phi'(u) < 0, \phi''(u) > 0, \phi'(v) < 0, \phi''(v) > 0$ , 即  $\phi(\bullet)$  是一个凸的减函数. 由此可见, 阿基米德 Copula 函数由它们的生成函数唯一确定.

阿基米德 Copula 函数具有许多优良的性质.

假设  $C$  是一个具有生成函数  $\phi(\cdot)$  的, 则:

- (1)  $C$  是对称的, 即  $C(u, v) = C(v, u), \forall u, v \in [0, 1]$ ;
- (2)  $C$  满足结合律:  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)), \forall u, v, w \in [0, 1]$ ;
- (3)  $\alpha$  为大于 0 的常数, 则  $\alpha\phi$  也是它的生成函数
- (4) 令  $K_c(t)$  表示集合  $\{(u, v) \in I^2 \mid C(u, v) \leq t\}$  上的  $C$ -测度, 则:

$$K_c(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}, \forall t \in I$$

若令  $U$  和  $V$  为均匀分布随机变量, 其联合分布为由  $\phi$  生成的 Archimedean Copula, 则  $K_c(t)$  为的分布函数

- (5) 令  $U$  和  $V$  为均匀分布随机变量, 其联合分布为由  $\phi$  生成的 Archimedean

Copula, 则有随机变量  $S = \frac{\phi(U)}{\phi(U) + \phi(V)}$  和  $T = C(U, V)$  的联合分布为:

$$H(s, t) = sK_c(t), \forall (s, t) \in I^2$$

Genest、Frees 和 Valdez (1998) 等对几种重要的二元阿基米德 Copula 函数及其生成函数  $\phi(\bullet)$  作了详细介绍. 下面列出几种常用的而变量的 Archimedean Copula:

- (1) Clayton Copula

$$\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1), \theta \in [-1, \infty) - \{0\}.$$

$$C(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0)$$

- (2) Gumbel Copula

$$\phi(t) = (-\ln t)^\theta, \theta \in [1, \infty)$$

$$C(u, v) = \exp(-[(\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$$

(3) Morgen Copula

$$\phi(t) = (1-t)^\theta, \theta \in [1, \infty)$$

$$C(u, v) = \max(1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta]^{1/\theta}, 0)$$

(4) Frank Copula

$$\phi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}, \theta \in (-\infty, +\infty) - \{0\}.$$

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right)$$

(5) Joe Copula

$$\phi(t) = -\ln[1 - (1-t)^\theta], \theta \in (1, \infty)$$

$$C(u, v) = 1 - [u^{-\theta} + v^{-\theta} - u^{-\theta}v^{-\theta}]^{1/\theta}$$

### 3.2 Copula 的参数估计

#### 3.2.1 最大似然法 (the maximum likelihood(ML)method)

假设  $f$  为联合分布函数  $F$  的密度函数:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

其中,  $c(\dots)$  和  $f_i(\bullet)$  分别是 Copula 函数和边际分布的密度函数, 则 Copula 函数的密度函数可以表示为:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n}$$

如果已知  $T$  时期内  $n$  种资产的对数收益率, 设为  $X = \{(x'_1, \dots, x'_n)\}_{i=1}^T$ . 假设待估计参数向量  $V = (v_1, \dots, v_n, \alpha)$ , 其中  $v_i, i = 1, \dots, n$  为边际分布  $F_i$  中的参数向量,  $\alpha$  为 Copula 函数中的参数向量.

则最大似然方程为:

$$l(V) = \sum_{i=1}^T \ln c((x'_1; v_1), \dots, F_n(x'_n; v_n); \alpha) + \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x'_j; v_j)$$

求得参数  $\hat{V}$  使得各向量  $v$  最大化似然方程. 这样就可以同时估计出边际分布

和 Copula 函数中的参数.

### 3.2.2 边际分布推导法 (the method of Inference Functions for Margins(IFM))

IFM 方法与 ML 方法不同, 它是将边际分布的参数和 Copula 函数的参数分开估计, 具体有两个步骤:

1、用最大似然 (ML) 方法估计边际分布  $F_i$  的参数  $v_i, i=1, \dots, n$

$$\hat{v}_i = \arg \max l'(v_i) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_i(x'_t; v_i)$$

其中  $l'$  为边际分布函数  $F_i$  的对数形式.

2、估计 Copula 函数的参数  $\alpha$

$$\hat{\alpha} = \arg \max l^c(\alpha) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x'_t; \hat{v}_1), \dots, F_n(x'_t; \hat{v}_n); \alpha)$$

其中  $l^c$  是 Copula 函数的对数形式.

这样, 分两个步骤求出边际分布的参数和 Copula 函数的参数.

### 3.2.3 CML (the Canonical Maximum Likelihood method) 方法

CML 方法与 IFM 方法的最大的不同就在于, 对边际分布的参数形式不做任何假定, CML 的估计步骤也是分两步:

1、首先, 利用经验分布, 将数据集  $(x'_t, \dots, x'_n), t=1, \dots, T$  转换成统一的变量  $(\hat{u}'_1, \dots, \hat{u}'_n)$ ;

2、估计 Copula 函数的参数:

$$\hat{\alpha} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}'_1, \dots, \hat{u}'_n; \alpha)$$

### 3.2.4 对于 Archimedean Copula 的参数估计

若确定 Copula 函数是 Archimedean Copula 中的一类, 则有一类更简便的方法可以直接估计 Archimedean Copula 函数中的参数  $\theta$ . 利用 Kendall  $\tau$  等相依系数的相互关系, 可以直接运用一些已有的结论.

由于每个 Archimedean Copula 都有其唯一的生成函数  $\psi$ . 以二元 Copula 函数为例, 定义一个函数  $K_c(t)$ , 它代表了数据对  $\{(u, v) \in I \mid C(u, v) \leq t\}$ , 或者等价于  $\{(u, v) \in I \mid \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}$ . 那么对任意  $t \in I$ , 有唯一的:



$$K_c(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$$

根据 Genes 和 Rivest 的研究, Kendall  $\tau$  与 Archimedean Copula 函数的生成元有以下关系成立:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

然后在此基础上构建  $\theta$  的估计. 对于一些特别的 Archimedean Copula, 经过求解可以得到更便捷的公式. 例如:

对于 Gumbel Copula, 有:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1-\tau}$$

对于正态 Copula 函数, 也可以直接得到:

$$R_{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau\right)$$

### 3.3 Copula 理论在金融分析上的应用

在许多应用中, 为了便于计算, 都事先假设变量服从特定的分布如正态分布, 但在很多情况下, 这种假设是不成立的. 例如: 研究表明, 汇率的日收益率服从学生  $-t$  分布, 而且不同汇率的分布函数具有不同的自由度参数, 所以除非它们的自由度非常接近, 否则很难用一个现有的分布如二元学生  $-t$  分布来描述两个汇率的联合分布, 因为二元学生  $-t$  分布要求它的两个边缘分布都具有相同的自由度. 在实际应用中, 如果我们要研究两个具有完全不同边缘分布的变量的联合分布, 如股票指数与汇率的联合分布, 显然很难在现有的二元分布中找到一个合适的分布. 然而在许多金融问题, 如期权定价、投资组合的 VaR 计算等中, 我们又需要知道联合分布的密度函数, 可见很多在金融应用方面的问题不在于如何去使用一个给定的分布, 而在于寻找一个能很好描述某些金融现象的实用分布. 运用 Copula 技术, 可以将多元分布分解为单个变量的边缘分布和一个描述变量之间相关结构的 Copula 函数, 这使建模问题大大简化同时提高了模型的实用性, 所以 Copula 技术可以成为构建金融模型的有效工具.

#### 3.3.1 多变量时间序列分析

Copula 函数很容易扩展到条件分布的情形, 因此可用于分析时变的条件相关. 很多学者如 Rockinger 和 Jondeau、Patton 都提出可以运用条件 Copula 理论建立具有时变、偏斜、尖峰、厚尾等特性的多变量金融时间序列模型, 以处理非对称相关、投资组合、资产定价等问题.

众所周知, ARCH 类模型和 SV 模型能很好的描述金融时间序列的波动特性, 因此被广泛应用并得到迅速发展, 但其模型的参数估计等问题同时又限制了向量 ARCH 类模型和向量 SV 模型的应用和发展, 为此 Rockinger 和 Jondeau 提出可以运用 Copula 技术来建立多变量时间序列模型以替代向量 GARCH 模型

[75],用以描述随机变量间的时变的条件相关关系.与面向条件均值、条件方差和线性相关的建模方法不同,Copula模型是对整个条件联合分布建模,因此不仅可以得到条件联合分布函数及条件均值、条件方差和相关系数,还可以求出一些应用更广泛的相关性测度,如描述非线性相关的秩相关系数、描述尾部相关的尾部相关系数以及动态的相关性测度. Patton构造了马克-美元和日元-美元汇率的对数收益的二元 Copula 模型,实证表明 Copula 模型可以很好的描述两个汇率之间时变的条件相关且均通过了相应的检验.为了进行比较,Patton同时还建立了相应的 BEKK 模型,分别假定残差服从二元正态分布和二元学生-t分布,但它们都未能完全通过检验.这说明运用 Copula 技术建立的金融时间序列模型更为灵活,事实上 Copula 函数可以提供很多有用的信息,如时变的正态 Copula 函数的相关系数  $\rho_t$  可以反映随机变量之间时变的相关关系,Joe-Clayton Copula 函数中的相关参数则可以捕捉到尾部相关的时变和非对称特性<sup>[88]</sup>,而通过 Copula 函数还可以求出其它一些非线性相关测度.另外由变量的边缘分布和它们的 Copula 函数,可以确定条件联合分布的密度函数,并且还可以计算出条件均值、方差以及高阶协阶矩(co-moments)如协方差、协偏度(co-skewness)和协峰度(co-kurtosis)等统计量.

以二元情况为例,令变量  $x, y$  的边缘分布函数分别为  $F(x)$  和  $G(y)$ , 相应的密度函数为  $f(x)$  和  $g(y)$ , 它们的相关结构可由一个密度函数为的 Copula 函数  $C(\bullet)$  来描述,则变量  $x, y$  的高阶协矩为:

$$m_{i,j} = \int \int_{x \in R, y \in R} x^i y^j c(F(x), G(y)) f(x) g(y) dx dy$$

令  $u = F(x), v = G(y)$ , 则有:

$$m_{i,j} = \int \int_{u \in [0,1], v \in [0,1]} (F^{-1}(u))^i (G^{-1}(v))^j c(u, v) du dv$$

这些参数、密度函数和统计量在实际的金融分析中经常要用到,如投资组合的选择、资产定价、VaR 的计算以及波动溢出的分析等等.可见与面向条件二阶矩建模的多变量时间序列模型——向量 GARCH 模型相比, Copula 模型所包涵的信息更多,而需要估计的参数却更少.

在实际应用中,一些传统的估计方法如矩估计、极大似然估计等都可用于 Copula 函数的参数估计.当然,我们还可以选择其它一些模型和分布来描述随机变量的边缘分布,或是运用其它方法构造 Copula 函数以拟合不同的数据,但应当认识到 Copula 函数的选取、参数的估计方法等都会影响模型对数据的拟合程度,为此 Nelson(1998)、Frees(1998)、Patton(2001)<sup>[1]</sup>、Klugman(1999)等都对相关问题做了有益地探讨.

### 3.3.2 金融市场的相关性分析

受经济全球化和金融一体化、金融创新、信息技术和竞争等因素的影响,全球金融市场正发生着根本性的结构变化,金融市场间的相互依赖、相互影响与日俱增,这促使了对金融市场间的相关性如相关程度、协同运动、波动的传导和溢

出等的研究。Copula 理论用于金融市场间的相关性分析具有其独特的优势，首先应用 Copula 理论可以直接对相关结构建模，相关结构与边缘分布无关，因此一元收益分布可以是任意的分布；其次，如果对变量作非线性的单调增变换，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度的值不会改变，因此可以捕获随机变量间非线性的相关关系；此外 Copula 函数还可以迅速而有效地捕捉到非正态、非对称分布的尾部信息，这对尾部相关性分析是极为有用的。

在实际的金融分析中，有很多涉及尾部相关性的问题，如金融风险管理中 VaR 的估计问题，再保险的定价问题等等，但简单用线性相关系数或是单纯用尾部相关系数来描述变量的尾部相关性显然是不充分的，因为线性相关系数只能度量变量间的线性相关程度，而尾部相关系数虽然可以作为单调相关程度的度量，但它也只能对变量间的相关性做出简单的描述。为此 Juri 提出了尾部事件的 Copula 收敛理论，指出可以用 Copula 函数来描述尾部相关的分布，特别地对阿基米德 Copula 函数，当它的母函数为特定形式时，上尾相关 Copula 函数 (UTDC) 和下尾相关 Copula 函数 (LTDC) 将各自收敛于一个易于计算的 Copula 函数，这个 Copula 函数包涵了尾部相关的全部信息，因此它可以更全面、更深入的刻画变量之间的尾部相关关系，这为它们在实际中的应用提供了有利的理论基础。设想如果研究对象是多个股市的股指收益序列，那么 UTDC 和 LTDC 实际上可以分别描述处于牛市和熊市时多个股票市场的关联情况。而如果研究对象是金融市场的波动，那么通过研究 UTDC 和 LTDC，我们可以分析联合波动对市场的影响，并借此分析它与波动溢出的关系。

事实上，一个金融市场中的小波动一般不会对整个市场产生很大的影响，但一旦波动达到或超过一定程度，其影响便会显现并可能迅速蔓延，即产生波动溢出 (Volatility Spillover) 效应。尾部相关性分析可以有效的捕获这种波动信息，这对波动溢出分析是极为有用的。波动溢出的检验一直是人们关注的问题，它是研究波动协同持续的前提，而波动的协同持续则是研究长期投资组合问题的

关键。向量 GARCH 模型、向量 SV 模型可用于波动溢出的检验，但它在理论上还存在许多有待解决的问题，而且难以捕捉到尾部相关性，因此存在一定的局限性。Copula 模型可以很好的描述具有时变、非对称、非线性相关特性的多个变量的相关性，特别是还可以刻画出分布尾部的相关结构，因此可以捕获波动溢出信息，将 Copula 理论进一步用于波动溢出的检验仍有待研究。

### 3.3.3 金融风险的管理

金融市场充满了风险，自从马克维茨创造性地提出多样化投资可在一定的收益下降低风险水平，多样化投资策略即成为一种主要的风险管理与规避手段。投资者从根本上讲是回避风险的，这从投资者通常持有多样化的投资组合或个人购买各种类型的保险说明其合理性，投资者对每种证券的期望回报率、回报率的方差和每一证券与其它证券之间回报率的相互关系(用协方差来度量)这三类信息进行适当分析，以辨别出有效投资组合。一般地，投资者会选择相关性小的资产进行组合，以降低投资风险。可见相关性分析对投资组合的风险分析至关重要，正如前面提到的，Copula 理论对相关性分析特别是尾部的相关性分析有特殊优势，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度可以更广泛、更有效的捕获各种金融资产的相关信息。

另外，大多数风险管理模型都假设多个资产收益序列或风险因子的联合分布服从多元正态分布，但大量的实证表明，这种假设经常与客观事实相违背，特

别是当极端事件发生时，因此在正态分布假设下进行的资产组合的风险分析及其 VaR 计算与实际情况偏差较大。运用 Copula 理论，由边缘分布和一个连接它们的 Copula 函数，可以得到一个与实际数据更为接近的联合分布，从而可以建立起更为有效的风险管理模型。而且通过 Copula 函数，可以将风险分解成两部分：单个金融资产的风险和由投资组合产生的风险。其中单个金融资产的风险可以完全由它们各自的边缘分布来描述，而由投资组合产生的风险则完全由连接它们的 Copula 函数来描述。这使建模问题大大简化，同时也有助于我们对很多金融问题的分析和理解。例如，若投资组合中的金融资产已经确定，那么市场风险就相当于投资组合中资产结构的风险，可以完全由一个相应的 Copula 函数来描述。假定随机变量  $X$  和  $Y$  分别代表两种金融资产的损失，它们的边缘分布分别为  $F(x)$  和  $G(y)$ ，具有 Copula 函数  $C(F(x), G(y))$ ，则投资组合超过一定域值的概率进而投资组合的 VaR 很容易求出：

$$P\{\delta X + (1-\delta)Y > \gamma\} = \int_{\delta x + (1-\delta)y > \gamma} dC(F(x), G(y))$$

其中  $\delta$  代表资产  $X$  在投资组合中的权重， $\gamma$  为限定值，它与置信水平  $\alpha$  对应关系。当然若 Copula 函数已知，但 VaR 的解析式很难求出，这可以通过仿真的方法来求取 VaR 的值。可见，运用 Copula 理论可以方便的进行投资组合的风险分析从而达到风险防范和规避的目的。

### 3.4 Copula 方法计算投资组合的 VaR

#### 3.4.1 单个资产收益率条件分布估计

大量的研究表明金融资产收益率的波动性可以用 GARCH 模型描述，它能捕捉到金融资产收益序列的波动聚积趋势，我们采用 GARCH (1, 1) 模型来对收益率序列的条件分布进行估计。

考虑如下的 GARCH(1, 1) 模型：

$$\begin{cases} r_t = \mu + a_t \\ a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

其中， $r_t$  为收益率序列， $\mu$  为  $r_t$  的样本均值； $a_t$  为  $r_t$  的波动项，用来反映收益率的波动性， $a_t$  的形式使得 GARCH 模型能够较好描述收益率序列的各种特性(如异方差性和波动集聚效应)。这里  $\varepsilon_t$  为 i. i. d. 的标准正态分布，其中  $\alpha_0$ 、 $\alpha_1$  和  $\beta$  为待估计的参数。

$$\begin{aligned}
 P(R_{T+1} \leq r | \Omega_T) &= P(a_{T+1} \leq (r - \mu) | \Omega_T) = P(\sigma_{T+1} \varepsilon_{T+1} \leq (r - \mu) | \Omega_T) \\
 &= P(\varepsilon_{T+1} \leq \frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}}) = N\left(\frac{r - \mu}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}}\right)
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中,  $\Omega_T$  为到时刻  $T$  为止的信息集。(2) 式即下一观测时刻收益率  $R_{T+1}$  的条件分布。

### 3.4.2 多资产联合分布的 Copula-GARCH 估计

对于下一时刻投资组合风险的分析, 在联合分布非正态假设下, 仅仅知道每个资产的边缘分布是不够的, 还应该充分考虑每个资产间的相依结构。Copula 在描述相依结构上是很好的一个工具, 其与 GARCH 模型的结合, 可以较好的估计出组合资产的风险大小。考虑  $N$  个资产的投资组合, 设资产  $i$  的等间隔收益率观测样本为  $\{r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{Ti}\}$ ,  $i=1, \dots, N$ 。根据前面的 GARCH 模型, 可以得到  $R_i = R_{T+1,i}$

的条件分布  $F_i(\cdot)$ 。

在假设相依结构不随时间变化的前提下, 本文选取了正态 Copula 来估计  $N$  维随机向量  $R = \{R_{T+1,1}, R_{T+1,2}, \dots, R_{T+1,N}\}$  的相依结构。按照 Copula 理论有:

$$N \text{ 维正态 Copula: } C_{\Sigma}(u_1, \dots, u_N) = \Phi_{\Sigma}(\varphi^{-1}(u_1), \dots, \varphi^{-1}(u_N)) \quad (3.8)$$

这里  $\Sigma$  表示多维正态分布中的相关系数矩阵, 也是正态 Copula 的参数。  $\Phi_{\Sigma}$  为相关系数矩阵为  $\Sigma$  的  $N$  维正态分布函数,  $\varphi^{-1}$  为标准正态分布函数的反函数。

由于  $r_i$  的边缘分布为  $F_i(\cdot)$ , 则由观测样本  $\{r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{Ti}\}$ ,  $i=1, \dots, N$ 。令:

$$u_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{Ni}) = (F_1(r_{1i}), F_2(r_{2i}), \dots, F_N(r_{Ni})) \quad (3.9)$$

$$\xi_i = (\varphi^{-1}(u_{1i}), \dots, \varphi^{-1}(u_{Ni})), \quad i=1, \dots, N. \quad (3.10)$$

把(4)式中的  $u_i$  代人(3)式中, 得到  $C_{\Sigma}(u_i) = \Phi_{\Sigma}(\xi_i)$ ,  $\xi_i$  就是相关系数矩阵为  $\Sigma$  的  $N$  维正态分布样本, 由此得到  $\Sigma$  的最小二乘估计为:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \xi_i' \xi_i. \quad (3.11)$$

假定得到的 Copula 估计为  $C_{\Sigma}(u_1, \dots, u_N)$ , 则  $r$  的联合分布为:

$$F(R_1, \dots, R_N) = C(F_1(R_1), \dots, F_N(R_N)) \quad (3.12)$$

### 3.4.3 基于 Copula 投资组合的 VaR 计算

在运用 Copula 模型计算投资组合的 VaR 时, VaR 的解析式一般不容易求出, 因此常常运用 Monte Carlo 模拟法来计算 VaR 的值. 运用 Monte Carlo 模拟法计算资产投资组合 VaR 值的关键在 Copula 函数的仿真技术上. 设估计的多维正态 Copula 分布的相关矩阵为  $\Sigma$ . 下面对  $N$  种股票进行 Monte Carlo 模拟, 进而计算 VaR:

(1) 对  $\Sigma$  进行 Cholesky 分解  $R=AA'$

(2) 生成一  $N \times 1$  的独立标准正态分布的随机向量

$$Z = (z_1, \dots, z_N)' \sim N \left( 0, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

(3) 令  $X = AZ$ , 产生  $N \times 1$  维向量  $X$ .

(4) 计算  $u_i = F(x_i)$ ,  $i=1, \dots, N$  得到  $(u_1, \dots, u_N) \sim C_{\Sigma}$

(5) 用边际分布函数的反函数把  $(u_1, \dots, u_N) \sim C_{\Sigma}$  映射到收益率

$$z = (z_1, \dots, z_N)' = (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_N^{-1}(u_N))'$$

根据大量模拟收益率情景, 计算资产损失率, 进而估计出 VaR.

### 3.5 本章小结

本章详细介绍了 Copula 函数的相关性质和定理, 论述了 Copula 理论在金融分析中的应用, 并介绍了利用 Copula 计算投资组合 VaR 的一些方法. Copula 理论用于金融市场间的相关性分析具有其独特的优势, 首先应用 Copula 理论可以直接对相关结构建模, 相关结构与边缘分布无关, 因此一元收益分布可以是任意的分布; 其次, 如果对变量作非线性的单调增变换, 由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度的值不会改变, 因此可以捕获随机变量间非线性的相关关系; 此外 Copula 函数还可以迅速而有效地捕捉到非正态、非对称分布的尾部信息, 这对尾部相关性分析是极为有用的.

我们发现在运用 Copula 模型计算投资组合的 VaR 时, VaR 的解析式一般不容易求出, 因此常常运用 Monte Carlo 模拟法来计算 VaR 的值. 运用 Monte Carlo 模拟法计算资产投资组合 VaR 值的关键在 Copula 函数的仿真技术上.

## 第 4 章 基于 Copula 方法的开放式基金投资组合 VaR 的实证分析

### 4.1 样本及数据来源

本文中我们采用南方高增长基金的前 10 支股票作为观测样本，根据南方高增长基金 2008 年前期报告，现取其投资组合前 10 名股票为研究对象，样本区间：2008-01-01~2008-03-31(周末及节假日除外)共 59 个数据。其投资比例如表 4.1 所示：

表 4.1 2008 年第一季度该基金的股票投资组合

证券名称	市值(元)	绝对比例(%)	相对比例(%)
招商银行	794182237.65	8.66	0.1763
万科 A	681532057.60	7.43	0.1513
中国中铁	440824758.72	4.81	0.0979
辽宁成大	423410000.00	4.62	0.0941
攀钢钢钒	417486417.14	4.55	0.0926
福耀玻璃	405000000.00	4.42	0.09
浦发银行	404498383.20	4.41	0.0898
云南铜业	325890850.00	3.55	0.0723
贵州茅台	314244935.58	3.43	0.0698
中国船舶	295995475.18	3.23	0.0658

### 4.2 基本统计指标

#### 4.2.1 描述统计

根据如上查到的数据，以这 10 只股票 2008 年 1 月 1 日至 2008 年 3 月 31 日的日收盘价为基础，计算这些股票的日收益率，计算公式如下：

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \quad (4.1)$$

其中， $P_t$  是每只股票的日收盘价

同时，根据处理后的收益率数据，运用 EVIEWS5.1 统计软件得到样本的收益率序列，其描述统计量如表 4.2：

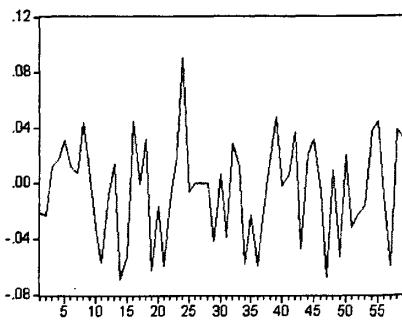
表 4.2 日收益率序列的描述统计量

证券名称	均值	标准差	偏度	峰度
招商银行	-0.00336	0.036052	-0.00602	-0.39602
万科 A	-0.00192	0.038591	0.115763	-0.18938
中国中铁	-0.00781	0.03546	0.32265	1.304464
辽宁成大	-0.00687	0.047193	-0.54796	-0.09363
攀钢钢钒	-0.00387	0.036616	-0.16931	0.449683
福耀玻璃	-0.00465	0.034781	0.136804	0.265202
浦发银行	-0.00655	0.044749	-0.22998	-0.15104
云南铜业	-0.00896	0.051734	-0.20611	-0.5658
贵州茅台	-0.00328	0.025045	1.009991	2.989775
中国船舶	-0.0118	0.039716	-0.16215	-0.00541

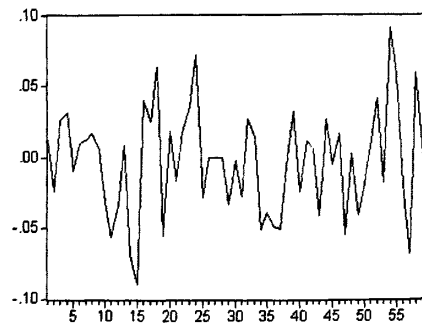
根据表 4.2 的相关统计量我们可以看到平均收益率衡量股票的盈利能力，是负指标，这说明 2008 年第一季度股票成下跌的状态。

#### 4.2.2 收益率波动图

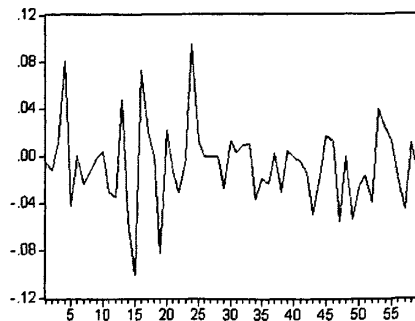
下面我们给出这 10 支股票收益率数据不同时期的波动图，可以使更加直观的对它们有一个大致的认识。



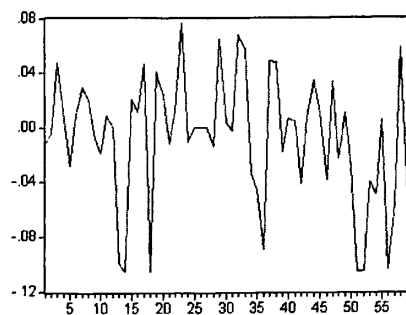
招商银行



万科 A



中国中铁



辽宁成大



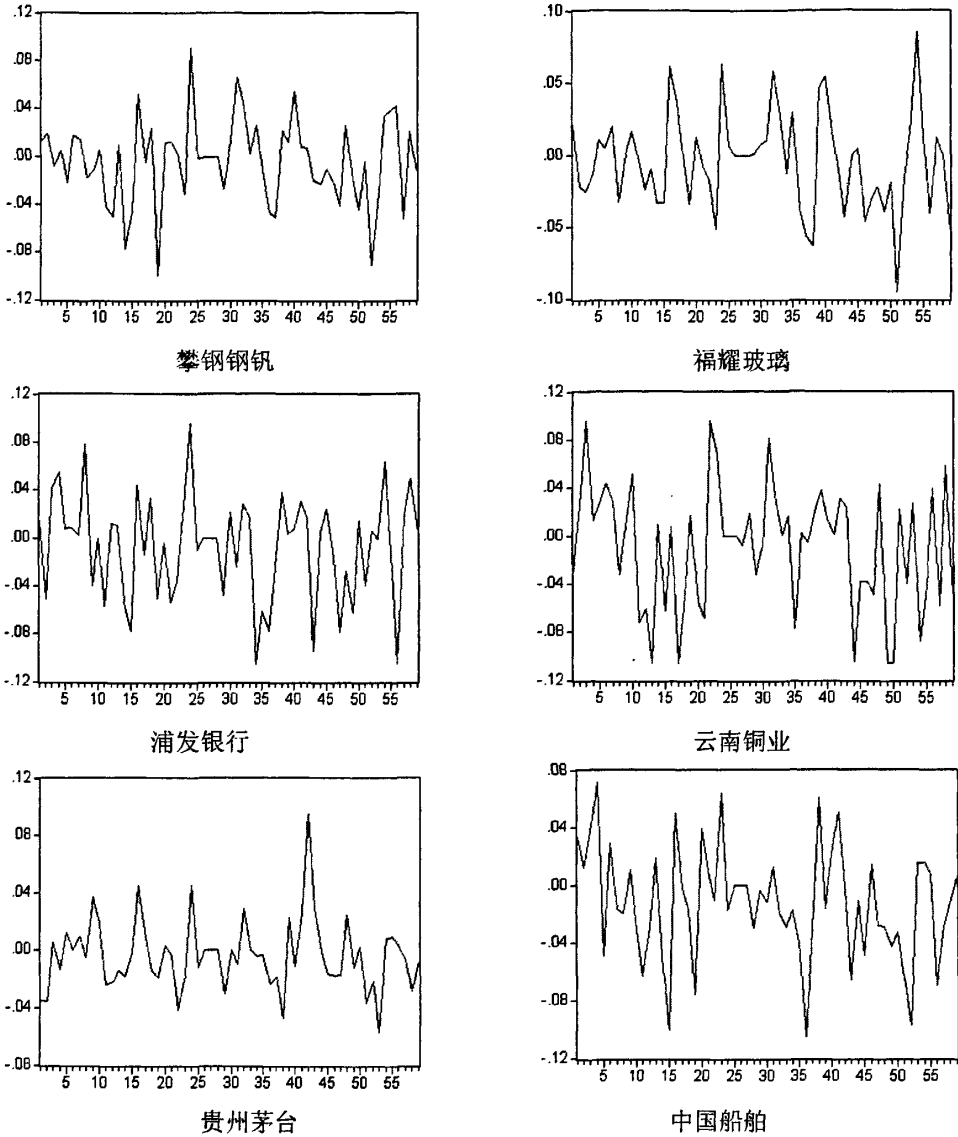
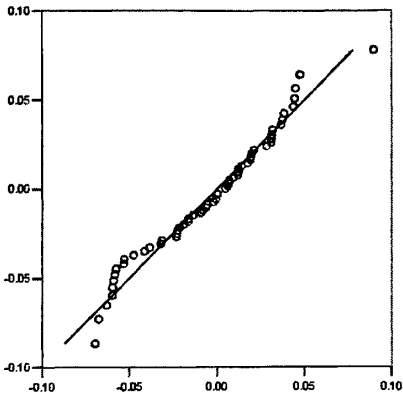


图 4.1 收益率数据波动图

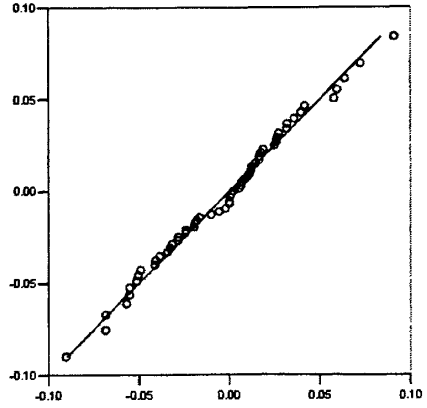
从图中我们可以看出这 10 支股票的收益率这个季度一直有着几乎相同的变换趋势, 这说明这些股票之间有着很强的关联程度, 它们之间的相依性研究就显得更加重要. 通过对一个市场波动的描述理解, 我们可以推测另一个市场的可能波动变化. 而 Copula 函数是用来描述相依性关系的极佳统计方法, 用它来描述我国基金投资组合的相依性关系有着深远的意义.

#### 4.2.3 收益率 Q-Q 分布图

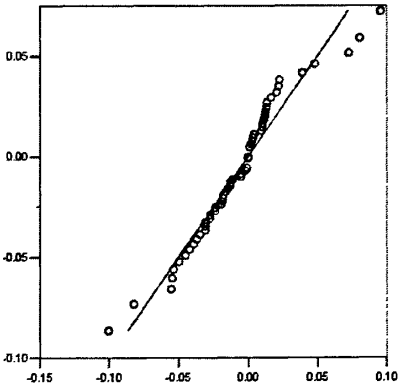
我们 Q-Q 图来检验序列的边缘分布是否服从正态分布以及两序列的边缘分布是否服从同一分布. 见下图:



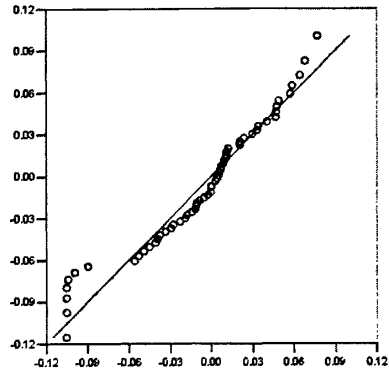
招商银行



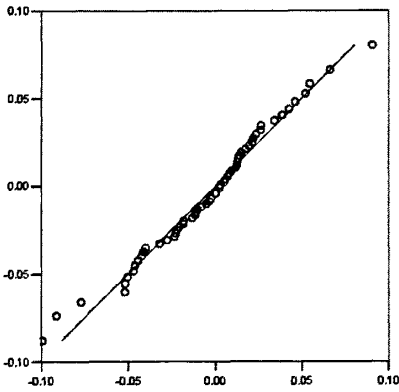
万科 A



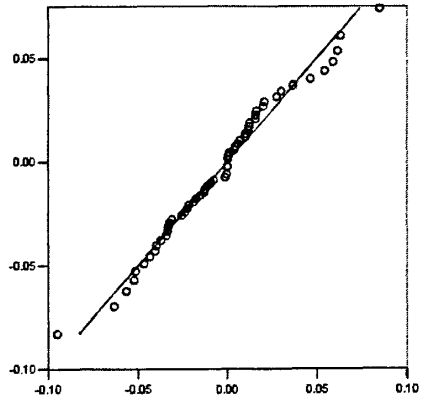
中国中铁



辽宁成大



攀钢钢钒



福耀玻璃

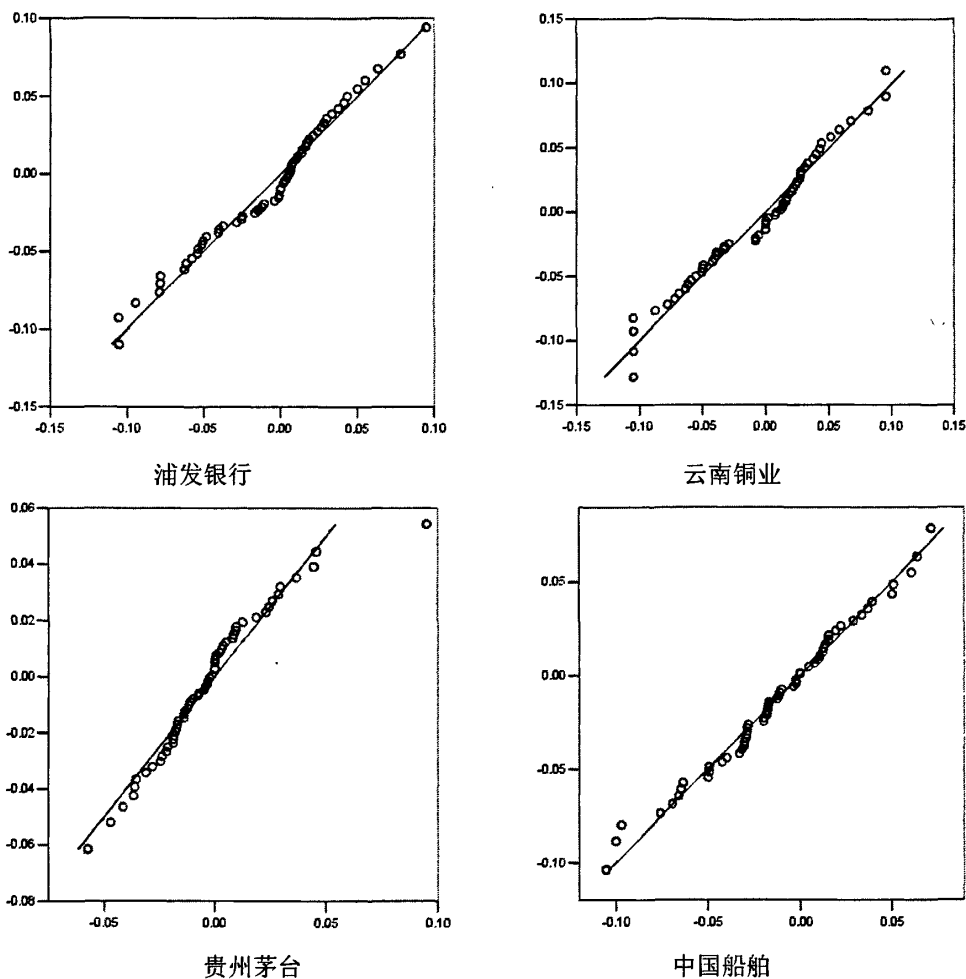


图 4.2 收益率 Q-Q 分布图

从图中我们可以看出，每支股票收益率的圆点排列近似一条直线，这说明这些观测值近似于标准正态分布。

#### 4.2.4 自相关与偏自相关检验

自相关衡量的是随着时间的变动，同一个序列的观测值与其滞后项之间的相互关联程度。进一步，如果时间序列存在一阶自相关时，还必须对二阶自相关系数进行检验。这就需要进行偏自相关检验。具体说，偏自相关检验就是在消除了低阶自相关影响后的相关性。

















































自相关和偏自相关的检验对于建立时间序列模型有十分重要的作用。因此，在建立模型之前，我们采用 Eviews 软件对这些基金的收益率进行自相关与偏自相关检验，最大滞后阶数为 24。结果如下图所示：

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.051	0.051	0.1608	0.688
		2	-0.092	-0.095	0.6967	0.706
		3	-0.175	-0.167	2.6570	0.448
		4	0.036	0.046	2.7432	0.602
		5	-0.131	-0.172	3.8811	0.567
		6	0.006	-0.001	3.8835	0.692
		7	-0.136	-0.162	5.1644	0.640
		8	0.033	-0.007	5.2431	0.731
		9	-0.041	-0.071	5.3666	0.801
		10	-0.043	-0.122	5.5008	0.855
		11	-0.136	-0.144	6.8919	0.808
		12	-0.095	-0.202	7.5813	0.817
		13	-0.071	-0.160	7.9763	0.845
		14	0.062	-0.105	8.2802	0.874
		15	0.164	0.040	10.488	0.788
		16	0.109	-0.020	11.486	0.779
		17	0.076	0.027	11.977	0.802
		18	-0.019	-0.063	12.008	0.847
		19	-0.055	-0.101	12.279	0.873
		20	0.105	0.115	13.296	0.864
		21	0.066	0.023	13.708	0.882
		22	0.073	0.138	14.227	0.893
		23	-0.106	-0.084	15.344	0.882
		24	-0.061	-0.027	15.723	0.898















































招商银行

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.060	0.060	0.2222	0.637
		2	-0.026	-0.030	0.2664	0.875
		3	-0.075	-0.072	0.6297	0.890
		4	0.131	0.140	1.7455	0.782
		5	-0.178	-0.205	3.8549	0.570
		6	0.078	0.119	4.2691	0.640
		7	-0.101	-0.122	4.9802	0.662
		8	-0.072	-0.096	5.3447	0.720
		9	-0.086	-0.007	5.8765	0.752
		10	0.033	-0.055	5.9568	0.819
		11	-0.198	-0.161	8.8862	0.632
		12	-0.077	-0.083	9.3410	0.674
		13	-0.070	-0.089	9.7248	0.716
		14	0.062	0.023	10.032	0.760
		15	0.065	0.084	10.374	0.796
		16	0.046	-0.053	10.549	0.836
		17	-0.049	-0.024	10.751	0.869
		18	-0.184	-0.269	13.716	0.747
		19	-0.035	-0.054	13.824	0.794
		20	0.059	0.004	14.150	0.823
		21	0.049	-0.024	14.377	0.853
		22	0.135	0.194	16.137	0.809
		23	0.023	-0.105	16.188	0.847
		24	-0.023	-0.035	16.243	0.879

万科 A

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.086	-0.086	0.4560	0.500
		2	-0.219	-0.228	3.4958	0.174
		3	-0.013	-0.059	3.5066	0.320
		4	0.118	0.063	4.4115	0.353
		5	-0.148	-0.154	5.8759	0.318
		6	-0.106	-0.108	6.6364	0.356
		7	0.214	0.148	9.7974	0.200
		8	0.146	0.137	11.306	0.185
		9	-0.038	0.089	11.409	0.249
		10	-0.122	-0.054	12.500	0.253
		11	-0.204	-0.297	15.634	0.155
		12	-0.003	-0.102	15.635	0.209
		13	0.023	-0.022	15.676	0.267
		14	0.117	0.132	16.761	0.269
		15	-0.035	-0.030	16.859	0.327
		16	0.006	-0.089	16.862	0.395
		17	-0.033	-0.108	16.958	0.457
		18	-0.141	-0.093	18.701	0.410
		19	-0.128	-0.058	20.170	0.384
		20	0.109	0.089	21.268	0.382
		21	0.116	0.010	22.546	0.369
		22	0.017	-0.046	22.572	0.426
		23	0.000	-0.015	22.572	0.486
		24	0.045	0.049	22.778	0.533

中国中铁

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.141	0.141	1.2254	0.268
		2	-0.073	-0.095	1.5614	0.458
		3	0.068	0.095	1.8590	0.602
		4	0.151	0.124	3.3604	0.499
		5	0.089	0.064	3.8829	0.566
		6	0.049	0.048	4.0466	0.670
		7	-0.122	-0.151	5.0744	0.651
		8	0.067	0.092	5.3892	0.715
		9	-0.011	-0.093	5.3985	0.798
		10	-0.040	-0.009	5.5138	0.854
		11	-0.076	-0.065	5.9458	0.877
		12	0.009	0.029	5.9520	0.918
		13	-0.074	-0.075	6.3772	0.931
		14	-0.005	0.019	6.3793	0.956
		15	-0.004	0.029	6.3806	0.973
		16	0.045	0.046	6.5499	0.981
		17	0.111	0.140	7.6132	0.974
		18	0.034	-0.011	7.7159	0.983
		19	-0.361	-0.370	19.417	0.430
		20	-0.012	0.051	19.429	0.494
		21	0.136	0.052	21.193	0.447
		22	0.025	0.034	21.255	0.505
		23	-0.076	0.018	21.826	0.531
		24	-0.116	-0.085	23.219	0.507

辽宁成大

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.046	0.046	0.1316	0.717
		2	-0.022	-0.024	0.1609	0.923
		3	-0.066	-0.064	0.4412	0.932
		4	-0.058	-0.053	0.6602	0.956
		5	-0.170	-0.169	2.5778	0.765
		6	0.022	0.030	2.6121	0.856
		7	0.156	0.143	4.2886	0.746
		8	0.210	0.187	7.3896	0.495
		9	-0.037	-0.060	7.4886	0.586
		10	0.013	0.011	7.5010	0.677
		11	-0.067	-0.033	7.8375	0.728
		12	-0.326	-0.291	15.969	0.193
		13	-0.253	-0.230	20.960	0.074
		14	0.163	0.133	23.075	0.059
		15	0.064	-0.004	23.407	0.076
		16	0.122	0.074	24.658	0.076
		17	-0.035	-0.108	24.761	0.100
		18	-0.011	-0.058	24.772	0.131
		19	-0.292	-0.206	32.463	0.028
		20	-0.153	-0.017	34.633	0.022
		21	-0.159	-0.168	37.024	0.017
		22	0.047	-0.075	37.239	0.022
		23	0.035	-0.013	37.364	0.030
		24	0.209	0.056	41.876	0.013

攀钢钢钒

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.196	0.196	2.3939	0.122
		2	-0.170	-0.217	4.2266	0.121
		3	-0.195	-0.122	6.6711	0.083
		4	-0.012	0.024	6.6800	0.154
		5	-0.069	-0.143	7.0014	0.221
		6	-0.095	-0.084	7.6116	0.268
		7	-0.015	-0.009	7.6262	0.367
		8	0.188	0.141	10.112	0.257
		9	0.065	-0.040	10.419	0.318
		10	-0.010	0.033	10.427	0.404
		11	-0.072	-0.032	10.817	0.459
		12	-0.111	-0.115	11.757	0.465
		13	0.084	0.163	12.310	0.502
		14	0.078	0.006	12.794	0.543
		15	0.267	0.314	18.616	0.232
		16	-0.108	-0.267	19.587	0.239
		17	-0.167	0.006	21.982	0.185
		18	-0.160	-0.144	24.232	0.148
		19	-0.070	-0.095	24.670	0.172
		20	-0.128	-0.078	26.180	0.160
		21	-0.067	-0.159	26.608	0.184
		22	0.063	0.073	26.998	0.211
		23	0.188	-0.123	30.530	0.135
		24	0.054	0.098	30.826	0.159

福耀玻璃

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.033	0.033	0.0665	0.797
		2	-0.110	-0.112	0.8371	0.658
		3	-0.144	-0.138	2.1701	0.538
		4	0.084	0.082	2.6289	0.622
		5	-0.086	-0.126	3.1218	0.681
		6	-0.027	-0.023	3.1711	0.787
		7	-0.063	-0.064	3.4497	0.841
		8	0.131	0.097	4.6517	0.794
		9	-0.012	-0.027	4.6615	0.863
		10	-0.146	-0.155	6.2288	0.796
		11	-0.316	-0.296	13.706	0.250
		12	0.082	0.032	14.221	0.287
		13	0.121	0.042	15.368	0.285
		14	0.102	0.053	16.196	0.302
		15	0.054	0.119	16.435	0.354
		16	0.025	-0.039	16.486	0.420
		17	0.018	0.030	16.515	0.488
		18	-0.115	-0.124	17.684	0.477
		19	-0.074	-0.008	18.179	0.510
		20	0.180	0.191	21.171	0.387
		21	0.080	-0.038	21.783	0.412
		22	0.113	0.117	23.028	0.400
		23	-0.167	-0.133	25.821	0.309
		24	-0.069	-0.013	26.307	0.338

浦发银行

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.069	0.069	0.2971	0.586
		2	0.053	0.049	0.4769	0.788
		3	0.143	0.137	1.7929	0.616
		4	0.022	0.002	1.8235	0.768
		5	0.152	0.142	3.3727	0.643
		6	-0.048	-0.089	3.5274	0.740
		7	-0.100	-0.109	4.2156	0.755
		8	-0.011	-0.037	4.2244	0.836
		9	0.005	0.033	4.2261	0.896
		10	-0.094	-0.091	4.8783	0.899
		11	-0.220	-0.195	8.5173	0.666
		12	-0.099	-0.053	9.2628	0.680
		13	-0.148	-0.120	10.978	0.613
		14	-0.134	-0.093	12.424	0.572
		15	-0.030	0.033	12.499	0.641
		16	-0.016	0.092	12.521	0.707
		17	0.068	0.091	12.912	0.742
		18	-0.122	-0.159	14.217	0.715
		19	-0.023	-0.026	14.265	0.768
		20	0.114	0.085	15.454	0.750
		21	-0.117	-0.174	16.741	0.727
		22	-0.062	-0.150	17.119	0.757
		23	-0.103	-0.120	18.170	0.748
		24	0.028	0.012	18.248	0.791

云南铜业

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.213	0.213	2.8238	0.093
		2	-0.014	-0.063	2.8365	0.242
		3	-0.161	-0.152	4.5061	0.212
		4	-0.191	-0.134	6.8992	0.141
		5	-0.258	-0.218	11.350	0.045
		6	-0.025	0.036	11.394	0.077
		7	0.135	0.088	12.655	0.081
		8	0.060	-0.074	12.906	0.115
		9	-0.011	-0.076	12.914	0.167
		10	-0.100	-0.129	13.652	0.189
		11	-0.029	0.037	13.715	0.249
		12	-0.094	-0.072	14.398	0.276
		13	-0.085	-0.122	14.956	0.310
		14	-0.081	-0.143	15.484	0.346
		15	0.142	0.115	17.122	0.312
		16	0.036	-0.051	17.229	0.371
		17	0.030	-0.038	17.304	0.434
		18	0.140	0.105	19.016	0.391
		19	-0.094	-0.202	19.814	0.406
		20	-0.152	-0.060	21.938	0.344
		21	-0.073	-0.000	22.437	0.375
		22	-0.017	-0.099	22.464	0.433
		23	0.013	0.001	22.482	0.491
		24	0.064	-0.044	23.211	0.507

贵州茅台

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.071	0.071	0.3127	0.576
		2	-0.080	-0.086	0.7204	0.698
		3	0.094	0.108	1.2871	0.732
		4	0.095	0.074	1.8804	0.758
		5	-0.123	-0.123	2.8861	0.718
		6	-0.089	-0.067	3.4217	0.754
		7	0.110	0.092	4.2571	0.750
		8	-0.065	-0.082	4.5589	0.804
		9	-0.015	0.048	4.5753	0.870
		10	-0.137	-0.179	5.9454	0.820
		11	-0.207	-0.218	9.1515	0.608
		12	-0.103	-0.073	9.9676	0.619
		13	-0.035	-0.036	10.061	0.689
		14	0.008	0.046	10.066	0.757
		15	0.078	0.123	10.565	0.783
		16	0.010	-0.075	10.573	0.835
		17	0.169	0.194	13.016	0.735
		18	0.011	-0.039	13.027	0.790
		19	0.036	0.058	13.141	0.831
		20	0.022	0.007	13.185	0.869
		21	0.164	0.095	15.740	0.784
		22	0.067	-0.009	16.172	0.807
		23	-0.084	-0.084	16.874	0.815
		24	0.054	-0.026	17.174	0.841

中国船舶

图 4.3 自相关与偏相关检验



从图 4.3 中可以看出, 在 95%或者 99%的置信度下, 这 10 支股票的收益率都不存在自相关或偏自相关.因此在使用这两组数据建立模型的时候, 可以忽略滞后项的影响因素.

### 4.3 参数方法计算 VaR

#### 4.3.1 历史模拟法计算 VaR

利用历史数据作为收益变量未来交易日的分布模拟数据, 分别给定 90%、95%、97.5%的置信区间, 可以直接算出不同置信水平下股票投资组合组合未来交易日的 VaR 为  $1.55 \times 10^{-2}$ ,  $1.11 \times 10^{-2}$ ,  $0.42 \times 10^{-2}$ .

#### 4.3.2 Kendall 相关系数法计算 VaR

传统的 RiskMetrics 方法采用的  $\rho_{ij}$  是基于正态性假设的线性相关系数.我们知道, 线性相关系数不能准确地描述非正态分布的相关性, 因此从这一角度出发, 可以将线性相关系数替换为性质更好的秩相关系数(如 Kendall 的  $\tau$ )来计算. $\tau$  的定义为: 概率差  $\tau = P\{(X_j - X_i)(Y_j - Y_i) > 0\} - P\{(X_j - X_i)(Y_j - Y_i) < 0\}$ , 容易看出  $-1 \leq \tau \leq 1$ .

采用改进的 JP Morgan 的方差-协方差方法计算 VaR, 计算公式如下:

$$VaR = E(r_p) - z_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^n (\omega_i \sigma_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \tau_{ij} \sigma_i \sigma_j} \quad (4.2)$$

其中  $\omega_i$  为各股票投资的相对比例

(1) 95%置信水平下, 运用 R 软件算得投资组合的秩相关系数矩阵  $\tau_{ij}$  为:

1	0.5878	0.3948	0.0937	0.3255	0.2033	0.5761	0.0855	0.3345	0.1897
0.5878	1	0.4301	0.089	0.3443	0.2315	0.4824	0.0808	0.1897	0.3349
0.3948	0.43	1	0.0682	0.369	0.3593	0.3561	0.0623	0.1821	0.4031
0.0937	0.089	0.0682	1	0.007	0.0393	0.103	0.0767	0.007	0.1546
0.3255	0.344	0.369	0.007	1	0.3194	0.2131	0.2143	0.274	0.3044
0.2033	0.232	0.3593	0.0393	0.3194	1	0.2455	-0.021	0.3264	0.201
0.5761	0.482	0.3561	0.103	0.2131	0.2455	1	0.0387	0.1194	0.3045
0.0855	0.081	0.0623	0.0767	0.2143	-0.0205	0.0387	1	0.0363	0.0884
0.2927	0.19	0.1821	0.007	0.274	0.3264	0.1194	0.0363	1	0.0422
0.2459	0.335	0.4031	0.1546	0.3044	0.201	0.3045	0.0884	0.0422	1

根据公式(4.2)我们可以算得这 10 支股票在 95%置信水平下投资组合的 VaR 值为  $1.56 \times 10^{-2}$ .

(2) 同理算出 90%置信水平下, 运用 R 软件算得投资组合的秩相关系数矩阵  $\tau_{ij}$  为:

1	0.5668	0.4948	0.0937	0.3315	0.2049	0.4512	0.0722	0.2927	0.2459
---	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

0.5668	1	0.3956	0.0637	0.2987	0.3215	0.3266	0.1025	0.2046	0.3356
0.4948	0.3956	1	0.0598	0.2679	0.3822	0.3461	0.0587	0.2033	0.4128
0.0937	0.0637	0.0598	1	0.013	0.0285	0.124	0.0853	0.0217	0.1323
0.3315	0.2987	0.2679	0.013	1	0.3122	0.2076	0.3051	0.185	0.2985
0.2049	0.3215	0.3822	0.0285	0.3122	1	0.2132	0.014	0.3185	0.214
0.4512	0.3266	0.3461	0.124	0.2076	0.2132	1	0.0387	0.1194	0.3045
0.0722	0.1025	0.0587	0.0853	0.3051	0.014	0.0387	1	0.0328	0.0765
0.2927	0.2046	0.2033	0.0217	0.185	0.3185	0.1194	0.0328	1	0.0386
0.2459	0.3356	0.4128	0.1323	0.2985	0.214	0.3045	0.0765	0.0386	1

根据公式(4.2)我们可以算得这 10 支股票在 90%置信水平下投资组合的 VaR 值为  $1.68 \times 10^{-2}$ 。

(3)97.5%置信水平下, 运用 R 软件算得投资组合的秩相关系数矩阵  $\tau_{ij}$  为:

1	0.6213	0.3219	0.3032	0.0698	0.2162	0.4986	0.0855	0.2862	0.3215
0.6213	1	0.2596	0.0659	0.3568	0.1786	0.3499	0.0765	0.2053	0.4231
0.3219	0.2596	1	0.0258	0.2639	0.3288	0.2598	0.0865	0.2131	0.4125
0.3032	0.0659	0.0258	1	0.017	0.0258	0.0298	0.0632	0.0321	0.0968
0.0698	0.3568	0.2639	0.017	1	0.3211	0.1986	0.2039	0.3261	0.4025
0.2162	0.1786	0.3288	0.0258	0.3211	1	0.2388	-0.123	0.3262	0.321
0.4986	0.3499	0.2598	0.0298	0.1986	0.2388	1	0.0298	0.1059	0.2867
0.0855	0.0765	0.0865	0.0632	0.2039	-0.123	0.0298	1	0.0561	0.0765
0.2862	0.2053	0.2131	0.0321	0.3261	0.3262	0.1059	0.0561	1	0.0385
0.3215	0.4231	0.4125	0.0968	0.4025	0.321	0.2867	0.0765	0.0385	1

根据公式 (4.2) 我们可以算得这 10 支股票在 97.5%置信水平下投资组合的 VaR 值为  $0.83 \times 10^{-2}$ 。

### 4.3.3 Copula 方法 Monte Carlo 模拟计算 VaR

我们将运用 Copula 方法模拟计算组合投资的 VaR, 同时与前面两种模拟方法的计算结果做比较, 更加进一步的了解 Copula 函数的统计特性。

在第 3 章中我们已经给出了几种 Copula 函数的定义和它们的一些统计特性, Copula 函数与传统的多元正态分布和多元 T 分布的最大一点不同在于其不对边际分布做任何强制性的要求, 这就为金融序列边际分布的选取提供了极大的灵活性. 这样我们可以从众多不同分布中来选取最能描述金融序列统计特性的分布作为边际分布, 而且多元序列的各个边际分布可以各不相同, 我们通过 Copula 函数将最能反映各个金融序列的边际分布来连接起来. 这时选取准确的边际分布就变得尤为重要. 边际分布的确定有很多种方法, 由于 Copula 函数的自变量都是服从  $[0, 1]$  上的均匀分布, 所以可以应用非参数法对 Copula 函数的边际分布进行估计. 我们也可以直接对金融收益率序列进行分布拟合, 在众多不同分布中选择拟合的最好、最能反映收益率序列的真实分布的分布来进行建模。

在做 Copula 之前, 这里需要声明的是, 我们所选的 10 支股票构成的投资组合的交易情况可能存在这样的情况: 某些股票有交易数据, 而另外一些没有交易数据. 我们最终将这些时间点的数据全部剔除了。

(1) 用GARCH (1, 1) 模型来对样本序列的边缘分布进行估计, 同时给出了K-S的相伴概率, 发现对原序列做概率积分变换, 对各序列均没有充分的理由拒绝零假设: 变换后的序列均服从[0, 1]的均匀分布. 说明GARCH (1, 1) 模型可以较好的描述各序列的边缘分布. 令  $\alpha = 0.05$ :

表4.3 样本边缘分布函数的参数估计结果

样本	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	Log	K-s
招商银行	-0.005761	0.000553	-0.141425	0.646707	123.3481	0.896
万科 A	-0.001810	0.000214	0.093416	0.777222	115.6258	0.686
中国中铁	-0.007571	0.000273	0.081631	0.702522	120.0804	0.897
辽宁成大	-0.002128	0.000116	-0.115276	1.086683	105.2612	1.404
攀钢钢钒	-0.001781	0.000128	-0.153480	1.073536	124.0709	0.767
福耀玻璃	-0.003764	1.64E-05	-0.043087	1.050843	123.3090	0.987
浦发银行	-0.009003	0.000579	-0.270237	0.969538	109.0230	1.226
云南铜业	-0.010138	0.000167	-0.125381	1.068240	94.47164	0.674
贵州茅台	-0.004271	5.76E-05	-0.041791	0.947828	142.3200	1.059
中国船舶	-0.013877	0.000196	-0.163811	1.034333	115.8550	0.822

根据得到的各样本收益序列的边缘分布, 利用正态分布函数与正态Copula函数的关系, 容易估计得到多元正态Copula函数的相关系数矩阵, 见表4.4:

表4.4 正态Copula函数的相关系数矩阵的估计

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.000	0.459	0.310	0.038	0.376	0.252	0.512	0.362	0.385	0.263
2	0.459	1.000	0.389	0.222	0.325	0.240	0.376	0.563	0.487	0.382
3	0.310	0.389	1.000	0.072	0.033	0.063	0.276	0.489	0.636	0.488
4	0.038	0.222	0.072	1.000	0.196	0.282	0.333	0.109	0.006	-0.178
5	0.376	0.325	0.033	0.196	1.000	0.323	0.468	0.272	0.367	0.088
6	0.252	0.240	0.063	0.282	0.323	1.000	0.430	0.414	0.520	0.266
7	0.512	0.376	0.276	0.333	0.468	0.430	1.000	0.439	0.682	0.279
8	0.362	0.563	0.489	0.109	0.367	0.414	0.439	1.000	0.475	0.452
9	0.385	0.487	0.636	0.006	0.356	0.520	0.682	0.475	1.000	0.468
10	0.263	0.382	0.488	-0.178	0.088	0.266	0.279	0.452	0.468	1.000

按表 4.1 的投资比例, 假定投资者处于  $t$  时刻, 这里选取  $t$  时刻为所选样本时间段的最后一天, 即 2008 年 03 月 31 日,  $t$  时刻的投资组合的价格为:

$$P = \sum_{i=1}^{10} w_i P_{it} = 20.85 \text{ 元. 给定资产持有期 } (t, t+1] \text{ 和置信度 } \alpha = 0.05, \text{ 根据估计得到}$$

的 Copula-GARCH 模型, 运用正态 Copula 函数的 Monte Carlo 仿真技术, 令仿真次数  $K=1000$  次, 可以仿真得到  $t+1$  时刻投资组合中  $i$  支股票的收益率序列, 进而可以计算得到  $t+1$  时刻 10 支股票的损失序列, 由仿真得到的投资组合损失的经验分布, 给定置信水平, 容易预测得到  $(t, t+1]$  持有期内相应的投资组合的 VaR

值为 $1.737 \times 10^{-2}$ 。

(2) 同理令 $\alpha = 0.1$ ，得到样本边缘分布函数的参数估计结果：

表4.5 样本边缘分布函数的参数估计结果

样本	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	Log	K-s
招商银行	-0.005759	0.000552	-0.142021	0.638889	124.2513	0.992
万科 A	-0.002005	0.000215	0.089541	0.776845	115.7390	0.86
中国中铁	-0.010006	0.000309	0.082123	0.710038	120.0912	0.956
辽宁成大	-0.0030234	0.000112	-0.105276	1.092031	105.2783	1.008
攀钢钢钒	-0.001860	0.000132	-0.153522	1.073530	124.1132	0.821
福耀玻璃	-0.00368	1.64E-05	-0.044021	1.050854	123.4231	0.906
浦发银行	-0.009109	0.000582	-0.270241	0.96840	108.9116	1.489
云南铜业	-0.011052	0.000173	-0.125391	1.068311	94.58631	0.703
贵州茅台	-0.004283	5.73-05	-0.041852	0.947913	142.3856	1.573
中国船舶	-0.013690	0.000189	-0.163942	1.034343	116.4561	0.940

根据得到的各样本收益序列的边缘分布，利用正态分布函数与正态Copula函数的关系，容易估计得到多元正态Copula函数的相关系数矩阵，见表4.6：

表4.6 正态Copula函数的相关系数矩阵的估计

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.000	0.436	0.325	0.039	0.375	0.260	0.589	0.388	0.397	0.258
2	0.436	1.000	0.368	0.278	0.324	0.265	0.393	0.578	0.452	0.392
3	0.325	0.368	1.000	0.081	0.041	0.076	0.248	0.493	0.638	0.502
4	0.039	0.278	0.081	1.000	0.201	0.279	0.328	0.112	0.008	-0.162
5	0.375	0.324	0.041	0.201	1.000	0.335	0.476	0.276	0.328	0.095
6	0.26	0.265	0.076	0.279	0.335	1.000	0.441	0.421	0.536	0.272
7	0.589	0.393	0.248	0.328	0.476	0.441	1.000	0.481	0.691	0.283
8	0.388	0.578	0.493	0.112	0.276	0.421	0.481	1.000	0.487	0.463
9	0.397	0.452	0.638	0.008	0.328	0.536	0.691	0.487	1.000	0.473
10	0.258	0.392	0.502	-0.162	0.095	0.272	0.283	0.463	0.473	1.000

在给定置信水平下，容易预测得到 $(t, t+1]$ 持有期内相应的投资组合的 VaR 值为 $1.85 \times 10^{-2}$ 。

(3) 令 $\alpha = 0.025$ ，得到样本边缘分布函数的参数估计结果：

表4.7 样本边缘分布函数的参数估计结果

样本	$\mu$	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	Log	K-s
招商银行	-0.005396	0.000567	-0.141567	0.651236	124.1305	0.93
万科 A	-0.001922	0.000305	0.093521	0.778036	115.6987	0.757

中国中铁	-0.008213	0.000286	0.082034	0.702525	120.0639	0.856
辽宁成大	-0.002306	0.000125	-0.11306	1.086821	105.2325	1.132
攀钢钢钒	-0.002011	0.000135	-0.153562	1.073545	124.0863	0.808
福耀玻璃	-0.003812	1.64E-05	-0.043045	1.050920	123.4868	0.991
浦发银行	-0.009321	0.000582	-0.271301	0.968329	109.1253	1.431
云南铜业	-0.010256	0.000164	-0.125392	1.068256	94.93215	0.653
贵州茅台	-0.004294	5.76E-05	-0.041736	0.947818	143.2375	1.456
中国船舶	-0.0138247	0.000203	-0.162986	1.034343	115.8632	0.903

根据得到的各样本收益序列的边缘分布, 利用正态分布函数与正态Copula函数的关系, 容易估计得到多元正态Copula函数的相关系数矩阵, 见表4.8:

表4.8 正态Copula函数的相关系数矩阵的估计

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.000	0.502	0.331	0.037	0.384	0.262	0.603	0.369	0.391	0.265
2	0.502	1.000	0.387	0.229	0.346	0.287	0.326	0.496	0.493	0.364
3	0.331	0.387	1.000	0.081	0.034	0.066	0.295	0.446	0.679	0.495
4	0.037	0.229	0.081	1.000	0.195	0.288	0.347	0.115	0.007	-0.169
5	0.384	0.346	0.034	0.195	1.000	0.341	0.476	0.257	0.378	0.092
6	0.262	0.287	0.066	0.288	0.341	1.000	0.445	0.426	0.537	0.286
7	0.603	0.326	0.295	0.347	0.476	0.445	1.000	0.475	0.696	0.282
8	0.369	0.496	0.446	0.115	0.257	0.426	0.475	1.000	0.443	0.461
9	0.391	0.493	0.679	0.007	0.378	0.537	0.696	0.443	1.000	0.469
10	0.265	0.364	0.495	-0.169	0.092	0.286	0.282	0.461	0.469	1.000

在给定置信水平下, 容易预测得到  $(t, t+1]$  持有期内相应的投资组合的 VaR 值为  $0.96 \times 10^{-2}$ .

#### 4.4 实证结果及分析

综合以上三种方法在不同置信水平下计算出来的 VaR 值, 我们得出下表的结论:

表4.9 Copula-VaR 方法与传统 VaR 方法计算结果的比较 ( $\times 10^{-2}$ )

	历史模拟法	Kendall 相关系数法	Copula 方法
投资组合的 VaR (90%)	$1.55 \times 10^{-2}$	$1.68 \times 10^{-2}$	$1.85 \times 10^{-2}$
投资组合的 VaR (95%)	$1.11 \times 10^{-2}$	$1.56 \times 10^{-2}$	$1.737 \times 10^{-2}$
投资组合的 VaR (97.5%)	$0.42 \times 10^{-2}$	$0.83 \times 10^{-2}$	$0.96 \times 10^{-2}$

通过表 4.9 可以看出, 在 90%、95%、97.5% 的置信水平下, 基于 Copula 算法计算 VaR 的绝对值都大于传统算法计算的结果, 说明传统的 VaR 计算方法低

估了风险.Copula 函数由于更加充分地考虑了变量之间的相关性,而且不囿于正态性假设,所以能更大程度地考虑风险.

随着金融产品的日益复杂和金融全球化、一体化的发展,金融市场之间的相关关系变得日趋复杂.过去对金融市场或金融资产相关性的研究主要通过传统的线性相关系数来体现,关注的只是资产间的相关程度,对相关模式根本无法体现.由于这种情况的存在,导致基于线性相关关系的大多数风险管理模型无法精确度量资产间的组合风险.

## 4.5 本章小结

作为一种新的研究内容,Copula 有着很好的发展前景,当前对 Copula 的研究也在不断地发展.本章以南方高增长基金的前 10 支股票为例,比较了度量基金投资组合的三种方法,结果表明传统的 VaR 计算方法和 Kendall 相关系数法低估了风险.这是因为相比之下,传统的方法由于其基于正态分布与线性相关的假设,存在不可避免的缺陷,从而低估了 VaR.特别是当极端事件发生时,资产组合的 VaR 计算与实际情况有偏差.

## 第 5 章 研究结论与展望

### 5.1 研究结论

本文通过理论分析与实证分析相结合的方式,研究了南方高增长型基金的前 10 只股票日收益率序列的特征,运用其均值、标准差、偏度及峰度等描述性统计量,对收益率波动的基本特征进行分析,检验了收益率序列的正态性,自相关性,得到这 10 支股票服从正态分布、不存在自相关等特征.并通过计算不同置信水平下的 VaR 值,试图找到适合我国开放式股票型基金市场风险度量的可行的、有效的方法.通过前文的理论与实证分析,得到如下结论:

(1) Copula 理论与线性相关的建模方法不同, Copula 模型是对整个联合分布建模,因此可以提供更多有用信息,特别是可以捕捉到非正态、非对称分布的尾部信息.运用 Copula 理论可广泛应用于金融市场的相关性分析、资产定价和风险管理等金融领域.而以前传统的方法低估了投资组合的 VaR 值.

(2) 实证分析表明,我国开放式股票型基金收益率序列服从正态分布,存在尖峰厚尾特性.对数收益率序列是平稳的,且前后没有明显的相关性,因此利用 GARCH(1, 1)模型计算开放式基金投资组合的 VaR 值是合理的选择.并且蒙特卡罗模拟方法比参数方法更有优势,二者都可以作为很好的模型来度量我国开放式股票型基金的市场风险.

(3) 由于 GARCH 类模型能更好的描述金融收益序列的时变波动、偏斜、高峰、厚尾等分布特性;另外, Copula 函数不仅具有比现有多元分布更为灵活的形式并且易于计算、仿真,还容易捕捉到金融序列间非线性、非对称的相关关系,特别是尾部的相关关系.因而 Copula—GARCH 具有更强的刻画现实金融序列分布的能力和更强的适应性,用它来分析开放式基金投资组合的风险值更加实用.作为一种新兴的统计方法, Copula 技术灵活多变的建模方式为分析金融问题提供了一种崭新的思路.毫无疑问, Copula 技术将会成为金融风险分析的有力工具,也可以为我国基金管理公司评估和管理个别基金或资产组合的市场风险.

### 5.2 VaR 在我国应用的意义

我国已具备了股市进一步发展的政治、经济和社会条件,《证券法》的出台对股市发展走向规范成熟奠定了良好的法律基础,股票市场在国企改革中的地位与作用已得到普遍认可.有效地防范,监控股市风险,引导我国股市健康发展是当今证券监管部门,也是广大投资者关注的热门话题. VaR 模型可以使个人,机构投资者控制风险,凡是持有存在市场风险的金融资产的投资者都可以使用 VaR 进行风险管理.但 VaR 的应用不仅仅局限于证券投资者本身, VaR 技术对我国股市的风险控制也有普遍意义的借鉴作用<sup>[10]</sup>.

1. 利用 VaR 方法进行风险控制. VaR 可以使证券投资者或操盘手明确他们在进行多大风险的金融交易,以 VaR 限额防止过度投机行为.投资组合的 VaR 值可以设立市场风险控制上限的尺度,即:实际损失  $\leq$  VaR  $\leq$  控制上限.一旦所计算的风险价值超过控制上限,投资者就要对投资进行调整.投资者进行投资的风险上

限的大小最终取决于其资本实力,而资本水平又决定了所能承担的 VaR.通过风险价值管理,投资者可及时了解投资组合的收益与风险,对未来现金流状况作出合理安排.此外,实际的 VaR 水平也可反馈给投资者,以说明为承担某些水平的风险,需要准备多大的资金量以备损失.因此,VaR 指标是连接投资者资本水平与风险控制上限的桥梁.在投资公司集团内部,总公司可以按统一的 VaR 尺度来分配子公司的授权额度和可以承担的风险上限.既为每个子公司交易员保留了更多的灵活性,又可以有效地控制金融交易的市场风险,使得一些巨额金融亏损得以避免.

2.VaR 方法可以用以衡量交易业绩,有助于建立合理的激励机制.对一个交易员的业绩评价时不再仅根据其赢利的大小,而是根据收益与 VaR 的比率.如果交易员从事高风险的投资项目,那么即使利润很高,由于 VaR 值过高,其业绩评价也不会很高.这样有助于抑制交易员过度投机的内在冲动,使其在合理的风险范围为公司谋取最大的收益.

3.VaR 方法可以检验内部风险控制系统的准确性.在股票投资风险管理中,对风险监测系统经常性的检测和维护是十分重要的.比如,定期比较风险监测系统估计的市场风险和实际的损益结果,一旦发生系统性偏差,就应对系统参数进行调整和修改.例如,在比较一段时间某只股票或某一股票投资组合每日损益 VaR 值和每日实际损益的偏差时,可将两条关于 X 轴对称的折线作为日损益 95%VaR 值,然后将每日实际的损益值用“点”打在坐标图上.根据定义, VaR 值以 95%的置信度来预测实际损益,那么,折线内部应包含 95%的“点”,如果总有多于 5%的“点”在折线以外,说明该模型低估了风险;相反,如果折线之外总是没有“点”,或里面的“点”距离折线较远,说明该模型高估了风险,应进行适当调整,修改.

随着社会主义市场经济体制下的金融市场的建立和完善,股票市场上的行政干预会逐步让位于市场调节,市场风险的重要性会日益突出.另外,一方面,中国经济国际化程度正逐步提高,我国在境外上市的公司将会不可避免地被要求执行国际风险管理标准.另一方面,我国已经加入世界贸易组织,而世界贸易组织正加快开放其成员国的服务贸易,金融服务业的国际一体化将是大势所趋.所以,将 VaR 引入中国,有利于我国在投资领域风险控制手段上与国际接轨,为金融机构和投资者提供一种行之有效的市场风险管理工具,也为证监会提供了一个风险管理的标准.

需要说明的是, VaR 方法虽然应用广泛,优点突出,但也并非风险管理的灵丹妙药,它也有其自身的局限性:首先, VaR 方法衡量的是市场风险,如果单纯依靠 VaR 方法,投资者就有可能忽视其它种类的风险;其次,从技术上讲, VaR 值表述的是在一定置信度下的最大潜在损失,但不能排除高于 VaR 值损失发生的可能性,而这种极端情况一旦发生,给投资者带来的损失往往是巨大的;再次, VaR 方法通常对交易频繁,成交量大的金融品种风险测量比较准确,但对不活跃,成交量小的金融品种风险测量的准确性就要低一些.因此, VaR 方法在为证券投资风险管理提供一种标准化框架的同时,投资者仍需结合其他一些定性、定量方法,才能使证券投资风险衡量更准确,风险控制更有效.

### 5.3 本文研究的局限与展望

1、本章以南方高增长基金的前10支股票为例,比较了度量基金投资组合的三



种方法，结果表明传统的VaR计算方法和Kendall相关系数法低估了风险。这是因为相比之下，传统的方法由于其基于正态分布与线性相关的假设，存在不可避免的缺陷，从而低估了VaR。然而仍旧不能确定具体哪一种Copula函数可以准确运用，或者很难单用一种Copula函数来更准确的度量基金投资组合的VaR。后续的研究可以进一步展开。

2、Copula函数虽然前景很好，但在具体应用上还是存在一些缺陷，而且在计算机软件的实现上也还有一些困难，希望能够随着这些问题的不断解决，让Copula函数将成为风险管理领域中最有力的工具。

## 参考文献

- [1] Sklar A. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges [J]. Publication de insitut de Statistique de Universite de Paris. 1959, 8: 229-231
- [2] Genest C, Mackay J. The Joy of Copulas: BiVaRiate distributions with uniform marginals[J]. American Statistician. 1986(40): 280-283
- [3] Joe H. Parametric families of multiVaRiate distributions with given marginals [J]. Journal of MultiVaRiate Analysis. 1993(46): 262-282.
- [4] Embrechts P, Mcneil A J, Straumann D. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls[A]. Dempster M. Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press. 1999, 176-223
- [5] Bouy E. Copulas for Finance. A Reading Guide and Some Appliacations. City University Business School. London. 2002, 156-167
- [6] Durrleman Finance'. Kluwer Academic Publishers. Amsterdam. 1999: 55-89
- [7] Claudio Romano. Calibrating and Simulating Copula Functions: an Application to the Italian Stock Market[R]. 2002: 256-278
- [8] Robert C, Blattberg, Nicholas J, Gonedes. A comparison of student and stable distribution as statistical models of stock prices. Journal of business. 1965(47): 67-89
- [9] Beatriz Vaz de Melo Mendes, Rafael Martins de Souza. Measuing finanial risks with Copulas. International Review of Financial Analysis [J]. 2004: 126-154
- [10] Stefano M, Iacus e, David La Torre. On fratal distribution funtion estimation and applications. Working Paper. 2002: 203-235
- [11] Davide M, Walter V. Copula Sensitivity in Collateralized Debt Obligations and Basket Default Swaps Pricing and Risk Monitoring[R]. 2004: 35-39.
- [12] Jean-David F. Goodness-of-t tests for Copulas[J]. Journal of MultiVaRiate Analysis. 2003: 66-84
- [13] Hull J. White A. Valuation of a CDO and annth to Default CDS without Monte Carlo Simulation[R]. 2004: 25-29.
- [14] Goorbergh, Genest, Werker. BiVaRiate option pricing using dynamic Copula models[J]. Insurance: Mathematics and Economics. 2005, 1(37): 101-114
- [15] Jing Zhang, Dominique Guegan. Change analysis of dynamic Copula for Measuring dependence in multiVaRiate financial data[J]. Workpaper. 2006: 55-90

- [16] 张尧庭. 连接函数(Copula)技术与金融风险分析[J]. 统计研究. 2002(4): 48-51
- [17] 张尧庭. 我们应该选用什么样的相关性指标[J]. 统计研究. 2002(9): 41-44.
- [18] 韦艳华, 张世英, 孟利锋. Copula 理论在金融上的应用[J]. 西北农林科技大学学报, 2003, 3(5): 97-101.
- [19] 吴振翔, 叶五一, 缪柏其. 基于的外汇投资组合风险分析[J]. 中国管理科学, 2004, 12(4): 1-5
- [20] 韦艳华, 张世英. 金融市场的相关性分析—Copula-GARCH 模型及其应用[J]. 系统工程, 2004(4): 41-49
- [21] 史道济, 姚庆祝. 改进印对数据拟合的方法[J]. 系统理论与实践, 2004(4):
- [22] 李平, 黄光东. 二元数字期权定价与 Copula 的关系. 数学的实践与认识, 2005(3):
- [23] 吴振翔, 陈敏, 叶五一, 缪柏其. 基于Copula-GARCH 的投资组合风险分析. 系统工程理论与实践[J], 2006年第3期.
- [24] 孔繁利, 段素芬, 华志强. Copula 度量投资组合VaR 的应用研究. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2006(12).
- [25] Venkataraman, Subu. Value at risk for a mixture of normal distributions: The use of quasi-Bayesian estimation techniques. Economic Perspectives (Federal Reserve Bbank of Chicago), 1997: 78-95.
- [26] Butler J S, Barry Schachter. Estimating Value at Risk With a precision Measure By Combining Kernel. Estimation With Historical simulation. Review of Derivatives Research, 1998(1): 55-62.
- [27] Darryll, Hengeics. Evaluation of Value-at-Risk modeles using Historical Date [J]. Economic policy review. Federal Reserve Bank of New York, 1996, 2(4): 35-41
- [28] David Li . Value at Risk Based on the Volatility . Skewness and kurtosis. www.gloriamundi.org
- [29] Rachel Campbell, Ronald Huisman, Kees Koedijk. Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework[J]. Journal of Banking & Finance, 2001(25): 88-92.
- [30] 范英. VAR 方法及其在股市风险分析中的应用初探[J]. 中国管理科学, 2000, 8(3): 26-32.
- [31] 吴琼, 薛红, 王露琰. GARCH 模型在我国深市风险度量中的应用研究[J]. 广西财经学院学报, 2007 (2): 37-45
- [32] Embrechts P, Hoeing A, Juri A. Using Copulae to bound the value-at-Risk for

- functions of dependent risks[J]. *Finance and Stochastics*, 2003, 7: 145-167.
- [33] Durrleman VA, Nikeghbali G, Riboulet T, Roncalli. Copulas: An open field for risk management[R], 2001: 38-45
- [34] Rokinger M, E Jondeau. Conditional Dependency of Financial Series: an Application of Copulas[M]. Groupe HEC-Department Finance et Economie and Banque de France-Economic Study and Research Division, 2001: 46-57.
- [35] Romano C. Applying Copula function to risk management[R]. Rome: University of Rome "La Sapienza", 2002: 221-232.
- [36] Clemente A D, Romano C. Measuring portfolio Value-at-Risk by a Copula-EVT based approach[I]. Working Paper of University of Rome "La Sapienza", 2003: 453-463
- [37] Forbes K, Rigobon R. No contagion, only inter dependence: measuring stock market Co-movements[J]. *Journal of Finance*, 2002, 57(5): 2223-2261.
- [38] Rosenberg J, Schuermann T A. General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-tailed Risks[I]. Working Paper of Federal Reserve Bank of New York, 2004: 645-653.
- [39] Fantazzini D. The effects of misspecified marginals and Copulas on computing the value at risk: A Monte Carlo study. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2008(2): 101-120.
- [40] Gang Cheng, Ping Li, Peng Shi. A new algorithm based on Copulas for VaR valuation with empirical calculations. *Theoretical Computer Science*, 2007(387): 190-197
- [41] 张杰, 杨振海. 连接函数在投资组合风险值计算中的应用. 中国现场统计研究会第十一届学术年会, 2003.
- [42] 张明恒. 多金融资产风险价值的 Copula 计量方法研究[J]. *数量经济技术研究*. 2004, (4): 67-70
- [43] 曹辉, 李忠民. 基于 Copula 理论的 VaR 算法与实证分析. *辽宁工程技术大学学报*, 2006(1): 58-64.
- [44] 陈守东, 胡铮洋, 孔繁利. Copula 函数度量风险价值的 Monte Carlo 模拟. *吉林大学社会科学学报*, 2006(3): 101-108
- [45] Wiener, Zvi. Introduction to VaR. <http://www.glorimundi.org>, 1997

## 附录 A

攻读硕士学位期间发表的学术论文：

- [1] 杨湘豫，夏宇. 基于 Copula 方法的开放式基金投资组合的 VaR 研究. 系统工程, 2008. 12:40-44

## 致 谢

三年的研究生生活很快就要结束了，这段时间是我人生中最宝贵的时光，永远值得我去回味和思索。值此毕业论文完稿之际，衷心地向一直以来教诲和帮助我的师长、同学和亲人们表示感谢！

本论文从论文的选题、资料收集、方法设计、研究修正直至最终定稿，其间无一不凝聚着杨老师的智慧与辛劳，杨湘豫教授渊博的知识、严谨的治学作风以及诲人不倦的为师风范给我留下深刻的印象并使我受益非浅。三年来，杨老师时刻鼓励和鞭策我不断努力，令我终生难忘。不管在生活上、学习上还是为人处事上，杨老师严格的要求促使我有了很大的进步，对杨老师的感激之情无法用语言来表达。

其次要感谢湖南大学数学与计量经济学院的老师们。感谢你们在我的研究生学习期间给予我的诸多关怀与帮助。在论文资料的收集与查证过程中，数学院图书资料阅览室和学校数据库在图书、杂志和资料方面提供了大量的帮助和支持，在此一并表示感谢。

感谢我的父亲、母亲及所有的家人，他们给予我的永远是无私的支持和关怀。

感谢我的朋友、同学们，你们真诚的关心和热心的帮助成为我完成论文的最佳动力。

感谢所有关心和帮助过我的人。