



Y1717268

A Dissertation in Control Theory and Control Engineering

**LMI-based Approaches to Model Reduction
and Static Output Feedback Controller Design
for Linear Systems**

By Du Xin

Supervisor: Professor Yang Guanghong

Northeastern University

December 2009



独创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是在导师的指导下完成的。论文中取得的研究成果除加以标注和致谢的地方外，不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包括本人为获得其他学位而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：杜鑫

日期：2010.1.10

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者和指导教师完全了解东北大学有关保留、使用学位论文的规定：即学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人同意东北大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索、交流。

作者和导师同意网上交流的时间为作者获得学位后：

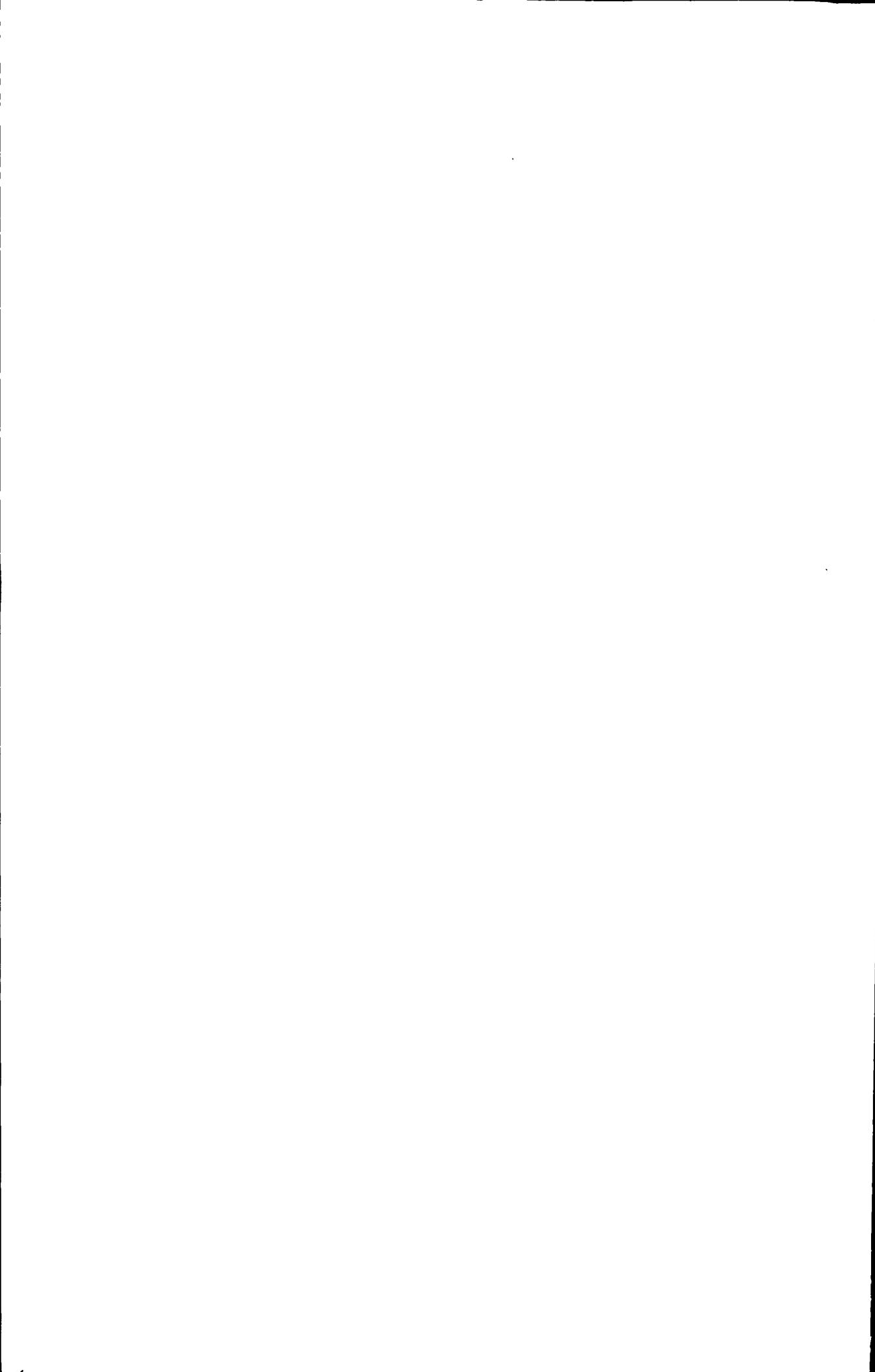
半年 一年 一年半 两年

学位论文作者签名：杜鑫

签字日期：2010.1.10

导师签名：杨光红

签字日期：2010.1.10



基于LMI技术的线性系统模型降阶与静态输出反馈控制器设计

摘 要

随着现代社会信息化、系统化的发展,人类面临的各种控制系统的规模越来越大,由此导致系统模型以及控制器的阶数也越来越高,相应的对系统分析计算和综合实现的复杂度也越来越大。为此,模型降阶和降阶控制器的设计一直都是控制理论中的热门研究领域,并在过去的几十年里取得了长足的发展和广泛的应用。然而,其中的一些问题通过现有的方法中仍不能得到很好的解决,如在模型降阶的研究中,针对系统工作频率范围已知的情况,现有的如基于加权矩阵的平衡截断等方法会带来一定的不准确性和不可靠性,而且无法给出降阶模型和高阶模型在已知频率范围内的逼近性能。此外现有的一些基于线性矩阵不等式的模型降阶和降阶控制器(如静态输出反馈控制器)的设计条件存在着一定的保守性,如何给出保守性更少的设计条件也是一个非常重要的问题。

本论文在前人工作的基础上,给出了新的基于线性矩阵不等式(LMI)技术的模型降阶和静态输出反馈控制器设计方法。针对已知输入信号频率范围情况下的模型降阶问题,通过结合广义KYP引理给出了可以准确刻画有限频逼近误差的设计条件,解决了现有方法如频率加权法等带来的不准确性问题。对全频范围考虑的模型降阶问题以及离散时间系统的静态输出反馈问题,均给出了相对于现有结果保守性更少的设计条件。另外,针对实际系统中存在不确定性和时滞的情况,研究了系统中含有多胞不确定性和时不变状态时滞情况下的静态输出反馈控制问题。本文的一些结果用到了对RLC电路系统的模型降阶中,数值算例与仿真验证了本文提出方法的优越性和有效性。

第一、二章系统地分析和总结了模型降阶与静态输出反馈控制这两个控制理论中的热门研究领域的发展现状及研究方法,并给出了与本文相关的一些预备知识。

第三、四章分别就连续线性系统和离散线性系统的 H_∞ 、 H_2 模型降阶问题给出了新的基于线性矩阵不等式的设计条件。在考虑 H_∞ 模型降阶时,通过结合新提出的广义KYP引理,根据输入信号不同的频率范围分别给出在低频,中频,高频和全频时的 H_∞ 模型降阶结果,这样就避免了过去方法处理有限频模型降阶时的不确定性和不可靠性。此外对全频 H_∞ 模型降阶问题,本章的方法也比现有文献中的一些同类方法具有更少的保守性。数值算例和仿真进一步说明了本章提出方法的有效性和优越性。

第五章研究了离散时间系统的静态输出反馈控制问题。基于LMI技术,分别给出了一组针对镇定控制, H_∞ 控制, 以及正实控制的静态输出反馈控制设计条件。和现有文献中的同类方法相比, 本章的设计方法结合了鲁棒控制领域中的参数依赖Lyapunov函数方法, 引入了更多的辅助变量, 进而具有更少的保守性。此外, 本章中的设计条件都借助于Finsler引理在一个统一的框架得出, 可以清楚的说明现有结果之间以及本章结果与现有结果之间的区别与联系。数值算例进一步说明了本章方法的有效性与优越性。

第六章考虑了具有多胞不确定性的离散线性系统的静态输出反馈控制问题。首先给出了基于参数依赖Lyapunov函数方法的鲁棒正实性分析结果, 并从理论上证明了这些结果与现有文献中的同类结果之间的关系。然后根据第五章中的设计方法, 并结合不确定系统中的一些放缩技巧, 分别就 H_∞ 控制, 正实控制问题给出了一组不确定系统的鲁棒静态输出反馈控制器设计方法。数值例子说明了方法的有效性。

第七章研究了带有时不变状态时滞的线性离散时间系统的静态输出反馈控制问题。根据第五章中的设计方法, 并结合处理时滞项的Jensen不等式方法, 给出了时滞依赖的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计方法。最后通过数值例子进一步表明本章方法的有效性。

最后对全文所做的工作进行了总结, 并指出了下一步研究的方向。

关键词: 模型降阶, 降阶控制, 静态输出反馈, 线性系统, 线性不确定系统, 线性时延系统, 有限频, 参数依赖Lyapunov函数, 线性矩阵不等式, H_∞ 控制, 正实控制。

LMI-Based Approaches to Model Reduction and Static Output Feedback Controller Design for Linear Systems

Abstract

Due to the increasing development of informationization, systematization of the modern society, the dimensions of various control systems are becoming larger and larger, and the resulting complexity for system analysis and synthesis are also increased because the increasing order of the system model and the corresponding controller. Therefore, the reduction theory (i.e. model reduction and reduced-order controller design) is always a burgeoning research area. Great developments and wide applications have been made during the last several decades. However, there are still some problems that cannot be properly solved via the existing methods. For example, to some extent there exists inaccuracy and unreliability while using the existing method to cope with the known operating frequency information of the system, and there exists no approximation performance information over the known frequency interval. Besides, how to reduce the conservatism of the existing LMI-based design methods for model reduction and static output feedback control is also an important problem.

This thesis, based on previous works of others, presents new methods for model reduction and static output feedback control problems via LMI-based approach. For the model reduction problem that with known frequency information about the input signal, the design conditions are developed with the aid of the generalized KYP lemma, which can deal with the approximation error over finite frequency directly. Therefore, the inaccuracy resulted by the existing methods such as frequency-weighted method can be avoided. For model reduction problems over entire frequency interval and static output feedback control problems for discrete-time systems, design methods with less conservatism compared with the counterpart ones in the literatures are developed. Besides, static output feedback controller design methods for systems with polytopic uncertainties and time-invariant delay are also presented respectively. Parts of the developed methods are applied to the model reduction of RLC circuit systems. Numerical examples and

simulations illustrate the advantages and effectiveness of our approaches.

Chapters 1-2 summarize the development and main research methods in the burgeoning research areas: model reduction and static output feedback control. Preliminaries about the considered problems are also given.

Chapters 3-4 present new LMI-based design methods for H_∞ and H_2 model reduction problems for linear continuous-time systems and discrete-time systems, respectively. Based on the recently developed generalized KYP lemma, design methods of H_∞ model reduction are developed under low-frequency, middle frequency, high frequency, and entire frequency interval considerations according to the frequency information about input signal. Consequently, the uncertainty and unreliability of the existing methods for finite frequency model reduction problems are avoided. For the entire frequency H_∞ model reduction problems, it is also pointed out that the conservativeness of the proposed methods in this chapter is less than the existing ones. Numerical examples and simulations illustrate the effectiveness and advantages of the proposed approach.

Chapter 5 investigates the static output feedback control problem for linear discrete-time systems. Stabilization, H_∞ and positive real static output feedback control design methods are presented based on LMI technique respectively. By utilizing the parameter-dependent Lyapunov function method which originated in the research area of robust control and introducing more auxiliary variables, the conservativeness of the proposed methods is further reduced compared with the existing ones. Besides, the differences and relationships between the proposed methods and the existing methods can be clearly demonstrated due to those methods are presented in a unified framework in terms of the Finsler lemma. Numerical examples illustrate the effectiveness and advantages of the proposed approach.

Chapter 6 focuses on the static output feedback control problem for linear discrete-time systems with polytopic uncertainties. Firstly, robust positive realness analysis results are given based on the parameter-dependent Lyapunov function method and the relationship between the proposed result and the existing one is clarified theoretically. Combining some relaxation techniques, H_∞ and positive realness static output feedback controller design methods are presented. Numerical examples illustrate the effectiveness and advantages of the proposed approach.

Chapter 7 investigates the static output feedback control problem for linear discrete-time systems with time-invariant state delay. Combining the Jensen inequality approach that dealing with the delay items, H_∞ static output feedback controller design methods are

presented. Numerical examples illustrate the effectiveness and advantages of the proposed approach.

Finally, the results of the dissertation are summarized and further research topics are pointed out.

Keywords: Model reduction, static output feedback control, linear systems, linear uncertain systems, linear delay systems, finite frequency, parameter dependent Lyapunov function, linear matrix inequality(LMI), H_∞ control, positive real control.

目 录

独创性声明.....	I
摘 要.....	III
Abstract.....	V
第一章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 模型降阶理论概述.....	3
1.2.1 线性系统模型降阶的问题, 方法及发展.....	3
1.2.2 有限频模型降阶的研究意义与发展现状.....	7
1.3 降阶控制器设计方法概述.....	9
1.4 本文的主要工作.....	10
第二章 预备知识.....	13
2.1 一些定义.....	13
2.2 一些引理.....	15
2.3 本文使用的符号.....	18
第三章 连续线性系统的模型降阶.....	19
3.1 引言.....	19
3.2 连续线性系统的 H_∞ 模型降阶.....	20
3.2.1 问题描述.....	20
3.2.2 连续线性系统低频范围内的 H_∞ 模型降阶.....	21
3.2.3 连续线性系统中频范围内的 H_∞ 模型降阶.....	26
3.2.4 连续线性系统高频范围内的 H_∞ 模型降阶.....	27
3.2.5 连续线性系统全频范围内的 H_∞ 模型降阶.....	29
3.2.6 数值算例与应用.....	32
3.3 连续线性系统的 H_2 模型降阶.....	42
3.3.1 问题描述.....	42
3.3.2 连续线性系统的 H_2 模型降阶.....	42
3.3.3 数值算例.....	44
3.4 本章小结.....	45
第四章 离散线性系统的模型降阶.....	47
4.1 引言.....	47

4.2 离散线性系统的 H_∞ 模型降阶	47
4.2.1 问题描述	47
4.2.2 离散线性系统低频范围的 H_∞ 模型降阶	49
4.2.3 离散线性系统中频范围的 H_∞ 模型降阶	50
4.2.4 离散线性系统高频范围的 H_∞ 模型降阶	52
4.2.5 离散线性系统全频范围的 H_∞ 模型降阶	53
4.2.6 数值算例与应用	56
4.3 离散线性系统的 H_2 模型降阶	57
4.3.1 问题描述	57
4.3.2 离散线性系统的 H_2 模型降阶	57
4.3.3 数值算例与仿真	61
4.4 本章小结	63
第五章 离散线性系统的静态输出反馈控制	65
5.1 引言	65
5.2 离散线性系统的镇定静态输出反馈控制	65
5.2.1 问题描述	65
5.2.2 离散线性系统的镇定静态输出反馈控制器设计	66
5.2.3 数值算例	73
5.3 离散线性系统的 H_∞ 静态输出反馈控制	75
5.3.1 问题描述	75
5.3.2 离散线性系统的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计	75
5.3.3 数值算例	79
5.4 离散线性系统的正实静态输出反馈控制	80
5.4.1 问题描述	80
5.4.2 离散线性系统的正实静态输出反馈控制器设计	81
5.4.3 数值算例	83
5.5 本章小结	84
第六章 离散线性不确定系统的静态输出反馈控制	85
6.1 引言	85
6.2 离散不确定系统的性能分析	86
6.2.1 问题描述	86
6.2.2 离散不确定系统的有界实判据	86
6.2.3 离散不确定系统的正实判据	88
6.2.4 数值算例	91
6.3 离散不确定系统的静态输出反馈控制器设计	93
6.3.1 问题描述	93

6.3.2 离散不确定系统的 H_∞ 静态输出反馈控制	94
6.3.3 离散不确定系统的正实静态输出反馈控制	98
6.3.4 数值算例	100
6.4 本章小结	101
第七章 一类离散时延系统的静态输出反馈	103
7.1 引言	103
7.2 问题描述	103
7.3 离散时不变时延系统的 H_∞ 静态输出反馈	104
7.4 数值算例	108
7.5 本章小结	110
第八章 结论与展望	111
参考文献	113
致谢	133
攻读博士学位期间所做的主要工作	135

第一章 绪论

1.1 引言

控制理论作为一门科学从上个世纪40年代开始起得到了极大发展,并成功的应用在几乎所有的工业生产部门,如产品质量、自动装配线、机床控制、空间技术与武器系统、计算机控制、交通运输、动力系统、机器人、微机系统、纳米技术等以及航空航天核工业等领域。控制理论的一个重要思想就是首先对被控对象建立一个用微分方程来描述的数学模型,然后根据这个数学模型来对其做进一步的分析和综合。但这种基于模型的处理方法不可避免的会带来如下两方面之间的矛盾。

一方面,被控对象的数学模型一般是根据基本的物理原理如电路系统中的Kirchoff电压电流定理,机械系统中的牛顿运动学定理等对系统分析建模获得,或者由参数辨识等方法得到。随着现代控制系统的不断复杂化,大型化,系统数学模型的维数也越来越高,如精馏塔、发电机、RLC电路、VLSI超大型集成电路、柔性结构系统、航天器、空间站、弹性飞机等的精确数学模型可能达到几十,几百甚至上千,由此导致的后续的分析和设计所需的计算复杂度也越来越大,以至于普通计算机的计算能力的增长跟不上由于系统维数增长带来的计算需求。另一方面,在应用现代控制理论如 H_∞ , H_2 , μ 分析等对系统进行综合设计时,得到的控制器/滤波器常常是与被控系统同阶,这就给其在工程实践上带来了困难,因为阶数越高意味着所需的成本越高,复杂度越大。

而另一方面,对一个实际的系统而言,许多情况下并不需要十分精确的数学模型就可以得到想要的分析结果,如太阳系行星运动方程数是1024个,但牛顿仅用了9个方程就足够精确地描述了太阳系行星的运动规律。在对被控对象的控制中,有时候对控制的精度和性能(如系统的干扰抑制性能)的要求并非十分苛刻,此时在一个最优但是阶数较高的控制器/滤波器和一个次优但是阶数较低的控制滤波器间,后者往往更容易受到控制工程领域的青睐。因为较低的控制滤波器阶数意味着较简单的模拟程序、较少的计算机时间、较省的动力学元件、较易实现的控制律、较低的噪声灵敏度和较高的可靠性来设计、模拟和实现系统。正因为此,降阶控制器在实际中有着广泛的需求和应用,如控制工程领域常用到的静态输出反馈控制器就是一个阶数为零的降阶控制器,还有PID控制器也是一种阶数为二的降阶控制器。

基于上述考虑,控制理论中迫切需要建立一套方法来平衡这两个方面间的矛

盾。具体来说，就是在对系统分析时，要在模型对系统描述的精度和与之相应的计算复杂度之间寻找一个平衡；在对系统控制时，要在控制系统的性能和实现控制所需的成本之间做一个平衡。因此，降阶理论做为控制理论的一个重要分支从上60年代末便应运而生，并得到了极大发展。做为平衡(tradeoff)的艺术，降阶理论中的一些成果可以说是赏心悦目的，并使得人们对控制理论本身产生更深层次的认识。从哲学的角度来讲，降阶理论可以看成一种如何处理主要矛盾和次要矛盾的方法论。

因为降阶理论在工业以及军事、航空、航天等领域都有着相当广泛的背景和应用，其理论方面的研究长期以来一直受到国际自动控制界的高度重视，并已发展成为自动控制研究的一个重要分支。IEEE控制与决策国际会议，美国控制会议等多年来一直有模型降阶以及降阶控制器设计的讨论专题，并有多次以此为主题的大会报告。控制领域的所有国际杂志几乎常年都有许多以降阶为主题的研究论文，并有一些综述文章^[15, 16, 38, 150]及学术专著^[1-5]对降阶理论给出了系统详细的介绍。一般地，可将降阶问题分为模型降阶和降阶控制器设计两大类，见下图。其中模型降阶方法主要用于系统的建模与分析，而降阶控制器则属于系统综合的研究范畴。

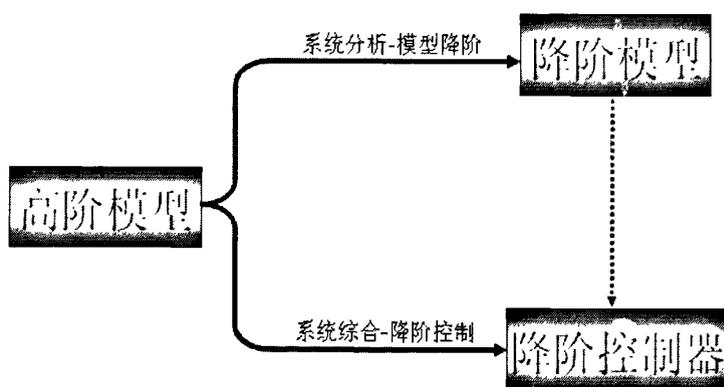


图 1.1 模型降阶与降阶控制器设计

Fig. 1.1 Model reduction and reduced-order controller design

做为一个发展较早，相关文献数量庞大，相对成熟的研究领域，很难对其作一个详尽的全景描述。下面作者根据自己对降阶理论研究领域的理解，分别就模型降阶和静态输出反馈控制两个研究方向给出简单的介绍，其中将侧重讨论与本文研究问题相关的方向，不足和疏漏之处在所难免。

1.2 模型降阶理论概述

模型降阶(Model Reduction) 在文献中又称为模型简化(Model Simplification)^[127], 模型逼近(Model Approximation)^[73]等。模型降阶问题起源于对控制系统尤其是RCL无源电路网络系统^[6]的建模与实现问题, 此后开始广泛的用于包括电力系统^[19, 20, 23], VLSI大规模集成电路^[4], 大型空间柔性结构^[18, 125], 飞机控制系统^[13, 21], 化工过程^[22], FIR/IIR滤波器的^[17, 25-29]在内的许多控制系统中。一个大型电路的模型降阶可用下图来形象的表示。

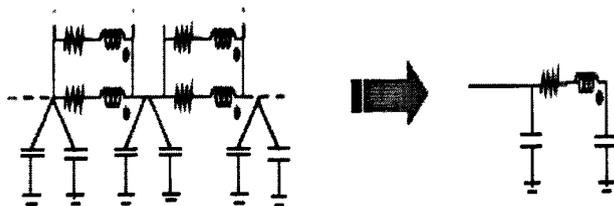


图 1.2 大型电路系统的模型降阶

Fig. 1.2 Model reduction for large-scale circuit system.

模型降阶发展到今天, 其影响已远远超出了控制领域, 其中的一些思想和方法还被大量用于图像处理, 数值分析等领域。本文中只考虑控制领域中尤其侧重于线性系统框架下的模型降阶问题。

1.2.1 线性系统模型降阶的问题, 方法及发展

为了对线性系统进行分析, 一般的做法是首先根据系统的结构, 运行原理或由参数辨识得到一个描述其特征的 n 维(阶)模型, 如果用状态空间方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

当然也可以用传递函数的形式来表示, 即:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{1.2}$$

模型降阶的任务是通过数学方法寻找一个 $r(r < n)$ 阶的低级模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

来替代给定的高阶模型(1.1)来描述控制系统, 同时尽可能的保留原来系统的主要特征, 其传递函数形式为: $G_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r$ 。

一个好的降阶模型应该需要下列两个基本要求

(1): $G_r(s) \in \mathcal{S}$

这里的 \mathcal{S} 表示原来系统的一些特性, 如稳定性, 正实性/无源性^[40-44], 对称性^[46, 49, 87]以及一些别的结构性质^[45, 47]等, 即要求降阶后的模型 $G_r(s)$ 应同样具有这样的特性。

(2): $\min \|G(s) - G_r(s)\|_*$

这里的 $*$ 表示某种范数, 常见的有 H_∞ 范数^[30, 41, 46, 47, 111, 113-119]; H_2 范数^[18, 37, 50, 110, 112, 126]; Hankel范数^[31, 55, 59, 60]; 以及峰峰增益诱导范数^[132]等。即要求降阶模型(1.3)和给定的高阶模型(1.1)之间的误差在某种意义上尽可能的小。

模型降阶早期的研究方法主要有模态降阶法, 连分式降阶法, 传递函数拟合法, Padé逼近法等^[16], 这些方法在当时得到了广泛的关注和应用。

里程碑似的成果来自于1981年, Moore在美国电子电气工程师学会自动控制汇刊(IEEE Transactions on Automatic Control)上发表的题为《线性系统的主元分析, 可控性, 可观性, 以及模型降阶》^[30](Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction)一文。该文中提出的一种称为平衡截断的模型降阶方法, 我们这里简单的给出此方法的主要平衡截断方法的描述对给定的高阶系统模型(1.1)可通过一个坐标变换得到它的一个平衡实现 $G := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right]$, 其中非奇异变化阵 T 可使如下定义的可控格拉姆矩阵 P 和可观格拉姆矩阵 Q

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega I - A)^{-1} B B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} d\omega \\ Q &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega I - A^T)^{-1} C^T C (j\omega I - A)^{-1} d\omega \end{aligned}$$

实现同时对角化, 即 $TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = \Sigma$. 其中

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2) \\ \Sigma_1 &= \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r}) \\ \Sigma_2 &= \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N I_{s_N}) \\ \sigma_1 &> \sigma_1 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \sigma_{r+2} > \dots > \sigma_N \end{aligned}$$

其中 s_i 为特征值 σ_i 的重数, $s_1 + s_2 + \dots + s_N = n$. 将系统的平衡实现分块为:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{D} \end{array} \right] \quad (1.4)$$

那么降阶系统便可从中截断而得, 即

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D} \end{array} \right]$$

且该降阶模型满足下面两个优良的性质:

- G_r 保持系统的稳定性
- 在 H_∞ 范数意义下 G_r 对 G 满足如下的模型逼近性能

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_N)$$

随后在1984年, Glover在国际控制杂志(International Journal of Control)上发表题为《线性多变量系统的最优Hankel范数估计及其 l_∞ 误差界》^[31] (All optimal Hankel-norm approximations of linear multi-variable systems and their l_∞ error bounds)一文, 给出了在Hankel范数意义下的平衡截断模型降阶结果, 进一步完善和发展了平衡截断理论。从上面的介绍可以看到平衡截断算法简单, 物理意义清晰, 且降阶模型和高阶模型之间的误差在一个合理的范围内, 集中的体现了平衡之美。正因为这些优雅的性质, 所以平衡截断法从问世以来, 就倍受控制界的学者和工程师所推崇, 截止目前为止文献[30]的google文献引用率1789次, [31]的google文献引用为1362次, 在控制工程实践中尤其对电路系统等的建模等领域平衡截断法取得了广泛的成功应用。随着控制系统在横向及纵向的进一步发展, 模型降阶理论在平衡截断法提出之后也在不断的前进着并取得了丰

硕的研究成果,但是也有一些问题仍未能得到很好的解决。

从模型降阶理论的横向发展来讲,在后平衡截断法时代,许多学者致力于将该方法推广到更为复杂的系统上,并取得了大量的研究结果,如针对对称系统[87],双线性系统[86]不确定系统[81][82],广义系统[83][84][85],线性参变系统[88][89]线性时变系统[90][91][92],周期系统[93][94],Markov跳变系统[95][96][97]等都得了基于平衡截断法的相应的模型降阶方法。模型降阶理论纵向的发展则主要集中在下面给出的几个方面:

(1).由于平衡截断法中需要求解系统的Lyapunov方程以得到可控/可观格拉姆矩阵,进而得到求取平衡实现所需的坐标变换矩阵,而这个过程的计算复杂度为 $O(n^3)$,当系统维数超高时,就会导致数值上的求解困难。于是,研究人员提出了提出了基于混合Krylov子空间的降阶方法^[6,32-37],对这种方法的研究已成为模型降阶领域的一个热门方向,取得了许多研究成果,并成功的运用在如大规模集成电路(VLSI)系统的建模以及图像处理等控制理论意外的领域。

(2).对许多实际系统而言,系统的工作频率范围通常是一个已知的区间,因此如何使得降阶模型对给定的高阶模型在这个已知的频率范围上的取得更好的逼近性能就成为一个非常重要的课题。而在平衡截断法中无法将已知的频率信息考虑在内,这就催生了有限频模型降阶这个研究方向,许多研究人员在此方向做了大量的工作,提出了一些方法,但这些方法未能完善的解决有限频模型降阶问题,在下小节中将对对该问题做详细的阐述。

(3).平衡截断法给出了在 H_∞ 范数和Hankel范数意义下的误差界,但是却无法给出在 H_2 范数以及峰峰诱导增益范数等意义下的相应结果。另外在对 H_∞ 逼近性能要求较高的情况下,平衡截断法给出的次优解有时无法满足要求,对此已经有许多研究人员致力于发展合适的算法以得到在 H_2 范数, H_∞ 范数等意义下的最优降阶模型。这个方向的研究工作起步也非常早,如在文[109]中给出了一种基于频域相应的优化算法;文[110]中提出了一种基于梯度流(gradient flow)的算法来优化降阶模型对高阶系统逼近的 H_2 性能。

做为一个对控制系统进行分析和设计的强大工具,线性矩阵不等式(LMI)从上世纪60年代起就开始吸引了控制领域专家的注意,在1988年Nesterov和Nemirovskii[7]提出求解凸优化问题的内点法后,基于线性矩阵不等式的系统分析和综合方法更是得到了迅速的发展。就模型降阶问题而言,Grigoriadis等在文[113][114]中首先通过投影引理(Projection Lemma)来尝试给出最优 H_∞ 降阶模型的线性矩阵不等式条件,并指出了模型降阶问题同降阶控制器设计问题一样,可以归结为一组线性矩阵不等式外加一个非凸的关于矩阵变量秩的约束条件。这个非凸的秩的约束问题可通过锥补线性化(cone complementarity

linearization)等方法^[174]进而得到一个基于迭代线性矩阵不等式的处理方法。同样的方法还进一步发展到对时延系统^[115, 119, 120], 奇异系统^[116], 随机系统^[117], 不确定离散系统^[121]以及Markov跳变系统^[118]的模型降阶问题上。在这类方法中应用较广, 但其中用到的迭代算法的收敛性及可靠性有待进一步研究。

另一个以线性矩阵不等式为工具的研究方向是以算法的保守性为代价, 来寻找一个的充分性的线性矩阵不等式设计条件。文[131]针对离散时间系统给出了在平衡截断法基础进一步优化 H_∞ 降阶性能的设计条件; 文[132]就峰峰增益诱导范数意义下给出了模型降阶设计条件; Ebihara等在文[123][124]中通过固定Lyapunov矩阵变量的某些子块得到了关于连续/离散时间系统的 H_∞ 模型降阶线性矩阵不等式条件, 同时指出模型降阶问题可以归结为一类静态输出反馈问题; 在文[125][126]中, Geromel等给出一种两步算法, 具体来讲就是首先通过一个SVD分解, 得到一个初始矩阵, 然后将连续/离散时间下的 H_∞ 模型降阶问题以及离散时间的 H_2 模型降阶问题转化为了一个简单线性矩阵不等式设计条件; 在文[127]中, Gao等针对离散时间系统的 H_∞ 模型降阶问题, 通过引入一个带有结构限制的辅助变量, 从而使Lyapunov矩阵变量和系统矩阵之间的耦合关系得以解除, 这样就放松了文献[123][124]中对Lyapunov矩阵变量的结构限制, 进而减少了设计中的保守性。该技术还被用于离散切换线性系统[128]以及离散Markov系统[129]的 H_∞ 模型降阶。这类方法的优点是不需要迭代, 计算简单, 但其最大的问题是结果的保守性可能会比较大, 因此如何减少这类设计方法中的保守性就成为一个至关重要的问题, 这也正是本文的动机之一。

1.2.2 有限频模型降阶的研究意义与发展现状

早在对模型降阶问题研究伊始, 研究人员就注意到, 对许多控制系统而言, 其工作频率即输入信号的频率往往是在一个已知的区间内^[1, 54, 74, 109], 比如一个以电源为输入信号的电路系统, 若其采用直流电源供电, 输入电压就是一个零频信号。当采用交流电源时, 其频率往往也是已知的, 如我国和世界上大多数欧洲国家电力系统的额定频率为50Hz, 美洲地区多数是60Hz, 而且大多数国家规定频率偏差 $\pm 1 \sim 0.3\text{Hz}$ 之间。而随着现代电子工艺发展起来的集成芯片, 则往往是工作在一个很高的频率范围内, 如大家熟知的Intel第7代x86微处理器Pentium4, 其工作频率为2.4GHz到3.0GHz。还有在文献[23]中指出, 在许多电力系统中, 输入信号通常为频率非常低(小于2Hz)的外部干扰。另一个典型的与工作频率范围相关的系统就是数字/模拟滤波器, 在工程实际中, 滤波器通常会根据实际需要由巴特沃思(Butterworth)法或切比雪夫(Chebyshev)法设计为高通/带通/低通滤波器^[17, 25-29]。因此对这些系统做(滤波器)模型降阶的时候, 只需考虑降阶模型在给定输入频率

范围内对给定高阶模型的逼近性能即可，这样便可以以牺牲在给定频率范围以外的逼近性能(实际中不需要的)为代价换取在给定频率范围内的更好的逼近性能。从上节中的介绍中可以看出，平衡截断方法没有将系统的输入频率范围考虑在内，因此对实际中知道系统工作频率范围的情况而言，平衡截断法得到的结果就会显得保守，基于这样的考虑，许多研究人员在平衡截断法的基础了做了大量的研究工作，给出了一些相应的方法^[54-79]。现有的这些关于有限频模型降阶问题的处理方法主要可分为以下两类：

(1)基于加权函数的平衡截断法^[54-72]，这种方法的大体思路是根据给定的频率范围选择输入输出加权函数

$$W_i(s) := C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D_i$$

$$W_o(s) := C_o(sI - A_o)^{-1}B_o + D_o$$

并定义一组加权可控/可观格拉姆矩阵 (\hat{P}, \hat{Q})

$$\hat{P}_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega I - \hat{A}_i)^{-1} \hat{B}_i \hat{B}_i^T (-j\omega I - \hat{A}_i^T)^{-1} d\omega$$

$$\hat{Q}_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega I - \hat{A}_o^T)^{-1} \hat{C}_o^T \hat{C}_o (j\omega I - \hat{A}_o)^{-1} d\omega$$

其中

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hline \hat{A}_o & \hat{C}_o^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & BC_i & BD_i \\ 0 & A_i & B_i \\ \hline A & 0 & C^T D_o^T \\ B_o C & A_o & C_o^T \end{array} \right]$$

然后由变换阵 T_F 以得到加权的平衡实现，其中 T_F 为使得 (\hat{P}, \hat{Q}) 实现同时对角化的变换矩阵。其中 (\hat{P}, \hat{Q}) 可通过对 (\hat{P}_i, \hat{Q}_o) 按下列方式分块得来

$$(\hat{P}_i, \hat{Q}_o) = \left(\left[\begin{array}{cc} \hat{P} & \hat{P}_{i21}^T \\ \hat{P}_{i21} & \hat{P}_{i22} \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \hat{Q} & \hat{Q}_{o21}^T \\ \hat{Q}_{o21} & \hat{Q}_{o22} \end{array} \right] \right)$$

这种方法得到了广泛的应用，但是注意到选择一个合适的加权函数是一个非常难的过程，常常需要设计者根据经验做大量的尝试才能得到，而且最重要的是该方法无法提供降阶模型与给定高阶模型在指定频率范围内的误差信息，注意到有些文献中给出了采用该方法得到的逼近误差界，但也依然是全频范围的误差估计。

(2)基于有限频格拉姆矩阵的平衡截断法^[73-79]。和上面借助辅助的加权函数的

思路不同, 这种方法直接根据给定的频率范围 $[\omega_1, \omega_2]$ 将可控/可观格拉姆矩阵重新定义为

$$P_{\Theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} (j\omega I - A)^{-1} B B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} d\omega$$

$$Q_{\Theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} (-j\omega I - A^T)^{-1} C^T C (j\omega I - A)^{-1} d\omega$$

然后用使得这两个有限频格拉姆矩阵 (P_{Θ}, Q_{Θ}) 同时对角化的坐标变换矩阵来求得系统相应的一个平衡实现。该方法也得到了一些成功的应用, 但同上面的基于加权函数的平衡截断法一样, 该方法同样无法给出所生成的降阶模型与高阶模型在指定频率范围内的逼近误差信息, 而且在有些情况下用该方法得到的逼近效果甚至要比标准的平衡截断法还要差, 在本文中我们将给出一个数值例子来说明这一点。另外当已知输入信号为单一频率信号(如直流电压)时, 此方法中的有限频格拉姆矩阵 (P_{Θ}, Q_{Θ}) 均等于零, 也会导致该方法无法使用。

综上所述, 现有的这两种方法均不能很好的解决有限频模型降阶问题, 这也是本文的主要的动机之一。

1.3 降阶控制器设计方法概述

上节中介绍的模型降阶多用于对系统的分析, 而在系统综合范畴下的降阶则主要是指降阶控制器的设计。降阶控制器(Reduced-order Controller)在文献中又称为固定阶控制器(Fixed-order Controller)^[165, 173], 低阶控制器(Low-order Controller)^[172]。这里的降阶是相对于全阶控制器即与系统同阶的控制器而言的。当采用现代控制理论的一些优化设计方法如 H_2 、 H_{∞} 、 μ 分析等对系统综合时, 得到的控制器的阶数一般与系统阶数相同, 这时若系统的阶数很高如哈勃空间望远镜的数学模型为42阶^[150], 标准的全阶控制器的实现过于复杂, 很多时候受硬件上的限制而无法实现。所以在允许的控制性能范围内, 一个降阶控制器要比全阶控制器更受控制工程上的青睐。当降阶控制器的阶数为零就是静态输出反馈(Static Output Feedback)控制器, 由于其意味着最简单的控制器结构, 最小的实现复杂度, 所以静态输出反馈控制器在自动水下机器人^[160], 化学反应器^[168], VTOL直升机^[168]等许多控制工程实践中得到了非常广泛的应用。另外, 一个任意阶数的降阶控制器设计问题均可转化为对一个增广系统的静态输出反馈控制器设计问题^[150, 189]。所以静态输出反馈控制问题具有极为重要的实际背景和理论意义, 与之相关的研究成果层出不穷。

考虑到本文的研究内容, 这里我们主要介绍在线性矩阵不等式框架下的静态输出反馈控制器设计结果。1997年, Gahinet等通过投影定理(Projection Lemma)找

到了一组设计全阶控制器的LMI条件^[107]，很快，Scherer又通过一组非线性变量替换，得到了另一种形式的设计全阶控制器的线性矩阵不等式条件^[156]。但是很遗憾，对更一般性的包括静态输出反馈控制器在内的降阶控制器却无法得到一个同样的充分必要的设计条件。之后研究人员逐渐认识到了完全解决静态输出反馈控制问题是一个非常困难的事情^[157]。

为尽可能的解决静态输出反馈控制器设计问题，一种思路是沿着文^[107]中的方法，从投影引理出发，将其转化为一组矩阵不等式设计条件，外加一个非凸的关于矩阵变量秩的约束。针对这个非凸的秩的约束问题，研究人员给出了许多处理方法如文^[172]中提出的投影变换法(alternating projection); 文^[173]中提出的XY中心法; 文^[174]中提出的锥补线性化法(cone complementarity linearization); 文^[175]中提出的Newton法等，最后通过一个迭代线性矩阵不等式算法^[177, 176, 171]来给出静态输出反馈控制器增益的求解。

另一个以线性矩阵不等式为工具的研究方向就是寻找一个凸的设计条件，以保守性为代价来换取算法上的简单。如通过对Lyapunov变量做一个特殊的结构限制，文^[181] ^[182] ^[183]中给出了一类静态输出反馈控制器的设计条件。通过一个特殊的同余变换，文^[181] ^[182] ^[183]中的方法又进一步放宽了对Lyapunov变量的限制。文^[184] ^[185]给出的设计条件则是通过对Lyapunov变量附加一个线性等式约束得到。为了去掉了Lyapunov的结构限制，在文^[179] ^[180] ^[188] ^[189] ^[190] ^[191]中的设计方法中，通过引入一个结构受限的辅助变量使得系统参数矩阵与Lyapunov变量之间的耦合关系得以消除，但是这些方法依然存在着保守性，为此如何进一步得到保守性更少的设计条件就成为一个非常有价值的研究课题，这也是本文的主要研究方向之一。

由于静态输出反馈控制以及降阶控制问题在现代控制理论中的重要地位，有许多研究人员为此做着不懈的努力，在线性矩阵不等式的框架之外还提出了许多有效的算法，如代数黎卡提方程(algebraic Riccati equation)方法^[161]，Youla - Kucera参数化方法^[162]，基于BMI的优化算法^[163, 164]，基于混合确定/随机(Mixed Deterministic/Randomized)算法的方法^[170]，基于多项式优化(SOS)的方法^[165, 166]等，在近期Apkarian等还提出一种基于非光滑(non-smooth)优化算法^[167-169]来设计静态输出反馈控制器，并可以得到一个局部最优解。

1.4 本文的主要工作

上面对模型降阶和静态输出反馈控制两个控制理论中的传统热门领域做了简单的介绍，从中可以看出，尽管国内外专家学者在这一方面已经取得了很多成果，

并成功应用到了实际中去,但是已有技术中还是存在着一些相对不足之处。

本文的主要工作是针对上面提到的问题做了进一步的研究。

在模型降阶问题上,基于线性矩阵不等式并结合能直接处理有限频性能指标的广义KYP引理,给出了低频,中频,高频以及全频范围内的 H_∞ 模型降阶设计条件。这些设计条件一方面避免了现有的针对有限频模型降阶方法的不准确性和不可靠性,另一方面减少了已有的在全频范围内模型降阶设计条件的保守性。此外还给出了基于LMI技术的 H_2 模型降阶设计条件。

在静态输出反馈控制器设计方面,通过运用参数依赖Lyapunov方法,针对离散时间系统给出了一组包括镇定控制, H_∞ 控制,正实控制在内的静态输出反馈设计条件。和现有文献中同类方法相比,本文给出的设计条件保守性具有更少的保守性。此外本文结合系统中常常存在不确定性以及时延的特征,还研究了离散时间系统中含有多胞不确定性以及含有状态时延时的静态输出反馈问题,并给出了相应的设计条件。文中的主要结果均给出了相应的数值算例,其中部分结果应用到RLC电路系统,以及机械系统的设计仿真中,这也从直观的角度表明文中结论的可行性和优越性。

论文的后续部分具体安排如下:

第二章为预备知识,给出了论文中将要涉及的一些定义,以及要使用到的几个引理和一些常用的符号。

第三、四章分别就了连续线性系统和离散线性系统的 H_∞, H_2 模型降阶问题给出了新的基于线性矩阵不等式的设计条件。在考虑 H_∞ 模型降阶时,通过结合新提出的GKYP引理,根据输入信号不同的频率范围分别给出在低频,中频,高频和全频时的 H_∞ 模型降阶结果,这样就避免了过去方法处理有限频模型降阶时的不确定性和不可靠性。此外指出了对全频 H_∞ 模型降阶问题,本章的方法也比现有文献中的一些同类方法具有更少的保守性。数值算例和仿真进一步说明了本章提出方法的有效性和优越性。

第五章研究了离散时间系统的静态输出反馈控制问题。基于LMI技术,分别给出了一组针对镇定控制, H_∞ 控制,以及正实控制的静态输出反馈控制设计条件。和现有文献中的同类方法相比,本章的设计方法结合了鲁棒控制领域中的参数依赖Lyapunov函数方法,引入了更多的辅助变量,进而具有更少的保守性。此外,本章中的设计条件都借助于Finsler引理在一个统一的框架得出,可以清楚的说明现有结果之间以及本章结果与现有结果之间的区别与联系。数值算例进一步说明了本章方法的有效性与优越性。

第六章考虑了具有多胞不确定性的离散线性系统的静态输出反馈控制问题。首先给出了基于参数依赖Lyapunov函数方法的鲁棒正实性分析结果,并从理论上

证明了这些结果与现有文献中的同类结果之间的关系。然后根据第五章中的设计方法,并结合不确定系统中的一些放缩技巧,分别就 H_∞ 控制,正实控制问题给出了一组不确定系统的鲁棒静态输出反馈控制器设计方法。数值例子说明了方法的有效性。

第七章研究了带有时不变状态时滞的线性离散时间系统的静态输出反馈控制问题。根据第五章中的设计方法,并结合处理时滞项的Jensen不等式方法,给出了时滞依赖的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计方法。最后通过数值例子进一步表明本章方法的有效性。

第八总结了本文的主要工作,并展望了下一步的研究工作。

第二章 预备知识

2.1 一些定义

考虑下式给出的线性时不变连续时间系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\omega(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D\omega(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是系统的状态, $\omega \in L_2[0, \infty)$ 为能量有界的外部扰动, 即 $\|\omega(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t) < \infty$, $z(t) \in R^r$ 是系统的被调输出. A, B, C, D 是已知的适维常数矩阵, 在下文中用 $G(j\omega)$ 表示系统(2.1)的传递函数矩阵, 这里 $G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$.

定义 2.1: 【连续系统的稳定性】 令 $\omega(t) = 0$, 如果连续系统(2.1)满足下列条件之一:

- (a): 系统(2.1)的状态矩阵 A 的所有特征值均具有负实部, 即 $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$
- (b): 系统(2.1)的状态向量在任给初值 $x(0)$ 下均趋近于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$
- (c): 存在 Lyapunov 函数 $V(x(t))$, 满足 $\dot{V}(x(t)) < 0$

则系统(2.1)是(渐近)稳定的。

定义 2.2: 【连续系统的 H_∞ 性能】 令 $x(0) = 0$, 如果连续系统(2.1)满足下列条件之一:

- (a): 系统(2.1)满足频域不等式: $G(j\omega)G^*(j\omega) < \gamma^2 I$.
- (b): 系统(2.1)满足时域不等式 $\int_0^\infty z^T(t)z(t) < \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)$.
- (c): 存在 Lyapunov 函数 $V(x(t))$ 满足 $\int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t) < 0$

则系统(2.1)具有 H_∞ 性能 γ

定义 2.3: 【连续系统的正实性】 令 $x(0) = 0$, 如果连续系统(2.1)满足下列条件之一:

- (a): 系统(2.1)满足频域不等式: $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0$.
- (b): 系统(2.1)满足时域不等式: $\int_0^\infty z^T(t)\omega(t) + \omega^T(t)z(t) > 0$
- (c): 存在 Lyapunov 函数 $V(x(t))$ 满足 $\int_0^\infty z^T(t)\omega(t) + \omega^T(t)z(t) + \dot{V}(t) > 0$

则系统(2.1)是严格正实的。

考虑下式给出的线性时不变连续时间系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) \\ z(k) &= Cx(k) + Dw(k) \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是系统的状态, $w \in L_2[0, \infty)$ 为能量有界的外部扰动, 即 $\|w(k)\|_2^2 = \sum_0^\infty w^T(k)\omega(k) < \infty$, $z(t) \in R^r$ 是系统的被调输出. A, B, C, D 是已知的适维常数矩阵, 在下文中用 $G(e^{j\theta})$ 表示系统(2.1)的传递函数矩阵, 这里 $G(e^{j\theta}) = C(e^{j\theta}I - A)^{-1}B + D$

定义 2.4: 【离散系统的稳定性】 令 $w(k) = 0$, 如果离散系统(2.2)满足下列条件之一:

- (a): 系统(2.2)的状态矩阵 A 的所有特征值在单位圆内, 即 $|\lambda_i(A)| < 1$
- (b): 系统(2.2)的状态向量在任给初值 $x(0)$ 下均趋近于零, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \rightarrow 0$
- (c): 存在 Lyapunov 函数 $V(x(k))$ 满足 $\Delta V(x(k)) < 0$

则系统(2.2)是(渐近)稳定的。

定义 2.5: 【离散系统的 H_∞ 性能】 令 $x(0) = 0$, 如果离散系统(2.2)满足下列条件之一:

- (a): 系统(2.2)满足频域不等式: $G(e^{j\theta})G^*(e^{j\theta}) < \gamma^2 I_n$ 。
- (b): 系统(2.2)满足时域不等式 $\sum_0^\infty z^T(k)z(k) < \gamma^2 \sum_0^\infty w^T(k)\omega(k)$ 。
- (c): 存在 Lyapunov 函数 $V(x(k))$ 满足 $\sum_0^\infty z^T(k)z(k) - \gamma^2 \sum_0^\infty w^T(k)\omega(k) + \Delta V(k) < 0$

则系统(2.2)具有 H_∞ 性能 γ

定义 2.6: 【离散系统的正实性】 令 $x(0) = 0$, 如果离散系统(2.2)满足下列条件之一:

- (a): 系统(2.2)满足频域不等式: $G(e^{j\theta}) + G^*(e^{j\theta}) > 0$ 。
- (b): 系统(2.2)满足时域不等式: $\sum_0^\infty z^T(k)\omega(k) + \omega^T(k)z(k) > 0$
- (c): 存在 Lyapunov 函数 $V(x(k))$ 满足 $\sum_0^\infty z^T(k)\omega(k) + \omega^T(k)z(k) + \Delta V(k) > 0$

则系统(2.2)是严格正实的。

2.2 一些引理

引理 2.1: ^[11] (Schur补定理) 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 S_{11} 是 $r \times r$ 维的。以下三个条件是等价的:

- (i) $S < 0$
- (ii) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$
- (ii) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

引理 2.2: (Finsler引理): 假设 $x \in \mathbf{R}^n, Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, U \in \mathbf{R}^{n \times m}$. U^\perp 是任意矩阵使得 $U^\perp U = 0$ 。下面的命题是等价的:

- (i) $x^T Q x < 0, \forall U^T x = 0, x \neq 0$
- (ii) $U^\perp Q U^\perp < 0$
- (iii) $\exists Y \in \mathbf{R}^{m \times n} : Q + U Y + Y^T U^T < 0$

引理 2.3: (投影引理): 给定 Γ, Λ, Θ , 存在矩阵 F 满足 $\Gamma F \Lambda^T + (\Gamma F \Lambda^T)^T + \Theta < 0$ 的充分必要条件是下面两个条件成立:

$$\Gamma^\perp \Theta \Gamma^{\perp T} < 0, \quad \Lambda^\perp \Theta \Lambda^{\perp T} < 0$$

引理 2.4: ^[141]. 如果存在对称矩阵 $V_{ij} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足下列不等式

$$\begin{aligned} V_{ij} + V_{ji} &\geq 0, & 1 \leq j < i \leq N \\ \sum_{i=1}^N (V_{ij} + V_{ji}) &\leq 0, & j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

那么 $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j V_{ij} < 0$, 其中 $\alpha \in \mathbf{R}^N : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$

引理 2.5: ^[194] (Jensen不等式引理). 给定对称正定矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 向量 $v \in \mathbf{R}^n$, 以及常数 $\gamma_1 \leq \gamma_2$, 下列不等式成立

$$\left(\sum_{k=\gamma_2}^{\gamma_2} v^T(k) \right) M \left(\sum_{k=\gamma_2}^{\gamma_2} v(k) \right) \leq (\gamma_2 - \gamma_1 + 1) \left(\sum_{k=\gamma_2}^{\gamma_2} v^T(k) M v(k) \right)$$

引理 2.6: (广义KYP引理(连续系统))^[103] 考虑系统传递函数系统 $G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} B + D$, 给定对称矩阵 Π , 下面的两个结论是等价的:

i)有限频不等式

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \omega \in \Omega \quad (2.3)$$

其中, Ω 定义在表4.1. ii) 存在 $n \times n$ 厄密共轭矩阵 P 和 Q , 满足 $Q > 0$ 和

表 2.1 不同的有限频率范围(连续情况)

Table 2.1 Different finite frequency ranges (Continuous-time)

	低频	中频	高频	全频
Ω	$ \omega \leq \varpi_l$	$\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$	$ \omega \geq \varpi_h$	$\omega \in [-\infty, +\infty]$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4)$$

其中在低频范围 $|\omega| \leq \varpi_l$ 时,

$$\Xi = \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \varpi_l^2 Q \end{bmatrix}$$

在中频范围 $\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$ 时

$$\Xi = \begin{bmatrix} -Q & P + j\varpi_c Q \\ P - j\varpi_c Q & -\varpi_1 \varpi_2 Q \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\varpi_c = (\varpi_1 + \varpi_2)/2$$

在高频范围 $|\omega| \geq \varpi_h$ 时

$$\Xi = \begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\varpi_h^2 Q \end{bmatrix}$$

在全频范围 $\omega \in [-\infty, +\infty]$ 时

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$$

引理 2.7: (广义KYP引理(离散系统)^[103])考虑系统传递函数 $G(e^{j\theta}) = C(e^{j\theta}I - A)^{-1}B + D$, 给定对称矩阵 Π , 下面的结论是等价的:

i)有限频不等式

$$\begin{bmatrix} G(e^{j\theta}) & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} G^T(e^{j\theta}) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \theta \in \Theta \quad (2.6)$$

成立, 其中 Θ 表示不同的有限频范围, 详见表2.2

表 2.2 不同的有限频率范围(离散情况)

Table 2.2 Different finite frequency ranges (Discrete-time)

	低频	中频	高频	全频
Θ	$ \theta \leq \vartheta_1$	$\vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2$	$ \theta \geq \vartheta_2$	$ \theta \leq \pi$

ii)存在合适维数的厄密共轭矩阵变量 P 和 Q 满足 $Q > 0$ 和

$$\begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix}^T < 0 \quad (2.7)$$

其中在低频范围 $|\theta| \leq \vartheta_1$ 时,

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - (2\cos\vartheta_1)Q \end{bmatrix}$$

在中频范围 $\vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2$ 时,

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & e^{j\vartheta_c}Q \\ e^{-j\vartheta_c}Q & P - 2(\cos\vartheta_\omega)Q \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_c = (\vartheta_1 + \vartheta_2)/2, \vartheta_\omega = (\vartheta_2 - \vartheta_1)/2$$

在高频范围 $|\theta| \geq \vartheta_2$ 时,

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & -Q \\ -Q & P + (2\cos\vartheta_2)Q \end{bmatrix}$$

在全频范围 $|\theta| \leq \pi$ 时,

$$\Xi = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

。

2.3 本文使用的符号

对于矩阵 A , A^T , A^* , A^\perp 分别表示它的转置, 复共轭转置和正交补。 $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$ 表示 A 的摩尔-彭罗斯逆。 I 表示具有合适维数的单位矩阵。对于一个对称矩阵 A , $A > (\geq) 0$ 和 $A < (\leq) 0$ 分别表示正定(半正定)和负定(半负定)。方阵 M 的厄密特部分表示为 $\text{He}(M) := M + M^*$ 。符号 \mathbf{H}_n 表示 $n \times n$ 厄密特矩阵。一个矩阵中的符号 $*$ 表示可以通过对称得到的元素。 $\sigma_{\max}(G)$ 表示传递函数 G 的最大奇异值。

第三章 连续线性系统的模型降阶

3.1 引言

模型降阶做为控制理论中一个发展较早的领域,在过去的几十年里已经取得了巨大的发展,其中一个经典的方法是Moore提出的平衡截断法^[30]。该方法广泛的用在了许多实际系统如RCL电路系统等建模上。但是随着控制系统的发展,工程实践上对模型降阶提出了越来越高的要求,在某些情况下,平衡截断法无法给出一个特别满意的降阶模型。我们主要关注以下两个方面的问题。

(1) 对许多实际系统,其工作频率通常为一个已知的区间,最常见的如以电源电压为输入信号的电路系统,无论其采用直流电源还是交流电源,它的工作频率总是在一个很窄的范围内。研究人员在很早的时候就意识到了经典的平衡截断法无法将这个重要的因素考虑在内,进而给出了一些改进的方法,如基于加权函数的平衡截断法以及基于有限频格拉姆矩阵的平衡截断法^[54-79]等,但是这些方法都不能够很好的解决有限频模型降阶问题。

(2) 平衡截断法给出了在 H_∞ 范数和Hankel范数意义下的误差界,但是却无法给出在 H_2 范数以及峰峰诱导增益范数等意义下的相应结果。另外在对 H_∞ 逼近性能要求较高的情况下,平衡截断法给出的次优解有时无法满足要求,对此已经有许多研究人员致力于发展合适的算法以得到在 H_2 范数, H_∞ 范数等意义下的最优降阶模型。在以LMI为工具对最优模型降阶问题的研究结果可以分为两类:一类是将其归结为一个迭代线性矩阵不等式的求解问题^[113-122],这类方法得到了较广的应用,但其算法的收敛性以及可靠性有待进一步研究。另一类方法是寻找一个的充分性的凸的线性矩阵不等式设计条件^[123-129],这类方法的优点是不需要迭代,计算简单,但现有文献中给出的都是充分条件,具有一定的保守性,如何减小保守性就成为这类方法研究中一个非常重要的问题。

基于以上两个方面的考虑,本章针对连续时间系统给出了在 H_∞ 、 H_2 范数意义下的模型降阶设计条件。其中在 H_∞ 模型降阶中,通过借助于文献[103]中新提出的广义KYP引理来处理给定的输入信号的频率信息,避免了现有方法如基于加权函数方法的不准确性,以及基于有限频格拉姆矩阵方法的不可靠性。此外,在全频情况下考虑时,和现有的同类 H_∞ 模型降阶方法相比,本章中给出的设计条件由于引入更多的辅助变量,进而具有更少的保守性。数值算例和仿真验证了本章提出方法的有效性和优越性。

3.2 连续线性系统的 H_∞ 模型降阶

3.2.1 问题描述

考虑下面给出的一个 n 维的连续时间系统, 其状态空间方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $y(t) \in R^p$ 为输出向量, $u(t) \in R^m$ 为输入向量, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$ 为已知实矩阵。系统(3.1)可以下面的 n 阶传递函数:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.2)$$

来表示, 其中 $s = j\omega$ 。

本节的目的是寻找一个 n_r ($n_r < n$) 维的降阶模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

来逼近给定的高阶系统模型(3.1)。其中 $A_r \in R^{n_r \times n_r}$, $B_r \in R^{n_r \times m}$, $C_r \in R^{p \times n_r}$, $D_r \in R^{p \times m}$ 为待定实矩阵。降阶系统模型(3.3)的传递函数为:

$$G_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r \quad (3.4)$$

其中 $s = j\omega$ 。这里要求降阶模型(3.3)满足

(1): 保持系统的稳定性。

(2): 满足在给定频率范围 Θ 内的 H_∞ 逼近性能 γ , 即: $\|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty < \gamma, \forall \omega \in \Omega$ 其中 Ω 表示不同的频率范围。见表3.1。

结合给定的高阶模型(3.1)和降阶模型(3.3)的动态方程, 可得逼近误差系统的状态空间方程:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \bar{A}\xi(t) + \bar{B}u(t) \\ e(t) &= \bar{C}\xi(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

表 3.1 不同的有限频率范围(连续情况)

Table 3.1 Different finite frequency ranges (Continuous-time)

	低频	中频	高频	全频
Ω	$ \omega \leq \varpi_l$	$\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$	$ \omega \geq \varpi_h$	$\omega \in [-\infty, +\infty]$

其中 $e(t) = y_r(t) - y(t)$ 为逼近误差信号, $\xi(t) = [x_r(t)^T \ x(t)^T]^T$, 以及

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_r & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \middle| \begin{array}{c} B_r \\ B \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -C_r & C \\ \hline -D_r & D \end{array} \right]$$

3.2.2 连续线性系统低频范围内的 H_∞ 模型降阶

下面给出在低频范围内考虑的 H_∞ 模型降阶的充分性设计条件。

定理 3.1: 给定系统模型(3.1) 以及模型逼近误差系统方程(3.5), 如果存在厄米特共轭矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} > 0, \quad P_s = \begin{bmatrix} P_{s1} & P_{s2}^T \\ P_{s2} & P_{s3} \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & * & * & * & * & * \\ -Q_2 & -Q_3 & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \omega_l^2 Q_3 - AG_3 - G_3^T A^T & * & * \\ 0 & 0 & \Phi_{53} & \tilde{C}_r [I \ 0] - CG_3 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & 0 & \tilde{B}_r^T & B^T & D^T - \tilde{D}_r^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{41} & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{41} & -pA_r - pA_r^T & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{41} & -pAG_2 - p[I \ 0]^T A_r^T & -pAG_3 - pG_3 A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

其中 p, q 是满足 $qp + pq < 0$ 的任意固定实数,

$$\begin{aligned}
 \Phi_{31} &= P_1 + G_1^T \\
 \Phi_{41} &= P_2 + [I \ 0]^T G_1^T \\
 \Phi_{32} &= P_2^T + G_2^T \\
 \Phi_{42} &= P_3 + G_3^T \\
 \Phi_{33} &= \omega_l^2 Q_1 - \tilde{A}_r - \tilde{A}_r^T \\
 \Phi_{43} &= \omega_l^2 Q_2 - AG_2 - [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\
 \Phi_{53} &= \tilde{C}_r - CG_2 \\
 \Psi_{11} &= -qG_1 - qG_1^T \\
 \Psi_{21} &= -qG_2 - q[I \ 0]^T G_1^T \\
 \Psi_{31} &= P_{s1} + pG_1^T + qA_r \\
 \Psi_{41} &= P_{s2} + p[I \ 0]^T G_1^T + qAG_2 \\
 \Psi_{22} &= -qG_3 - qG_3^T \\
 \Psi_{32} &= P_{s2}^T + pG_2^T + qA_r[I \ 0] \\
 \Psi_{42} &= P_{s3} + pG_3^T + qAG_3
 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (3.8)$$

满足下列低频范围内的 H_∞ 模型逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma \quad \forall |\omega| \leq \omega_l \quad (3.9)$$

证明: 将关系式(3.8)带入(3.6)可得:

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 -Q_1 & * & * & * & * & * \\
 -Q_2 & -Q_3 & * & * & * & * \\
 \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & * & * & * \\
 \Theta_{41} & \Theta_{42} & \Theta_{43} & \omega_l^2 Q_3 - AG_3 - G_3^T A^T & * & * \\
 0 & 0 & \Theta_{53} & C_r G_1 [I \ 0] - CG_3 & -\gamma^2 I & * \\
 0 & 0 & B_r^T & B^T & D^T - D_r^T & -I
 \end{array} \right] < 0 \quad (3.10)$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta_{31} &= P_1 + G_1^T \\ \Theta_{41} &= P_2 + [I \ 0]^T G_1^T \\ \Theta_{32} &= P_2^T + G_2^T \\ \Theta_{42} &= P_3 + G_3^T \\ \Theta_{33} &= \omega_1^2 Q_1 - A_r G_1 - G_1 A_r^T \\ \Theta_{43} &= \omega_1^2 Q_2 - A G_2 - [I \ 0]^T G_1^T A_r^T \\ \Theta_{53} &= C_r G_1 - C G_2\end{aligned}$$

根据逼近误差系统方程(3.5),可将上式整理为:

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * & * \\ P^T + G^T & \omega_1^2 Q - \bar{A}G - (\bar{A}G)^T & * & * \\ 0 & -\bar{C}G & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \bar{B}^T & \bar{D}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & [G_1 \ 0] \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

由Schur补引理,可知上式等价于:

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ P + G & \omega_1^2 Q - \bar{A}G - G^T \bar{A}^T & * \\ 0 & -\bar{C}G & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{bmatrix}^T < 0 \quad (3.13)$$

经整理得:

$$\mathcal{M} - \mathcal{H}G\mathcal{R}^T - \mathcal{R}G\mathcal{H}^T < 0 \quad (3.14)$$

其中

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -Q & P & 0 \\ P & \omega_1^2 Q + \bar{B}\bar{B}^T & \bar{B}\bar{D}^T \\ 0 & \bar{D}\bar{B}^T & \bar{D}\bar{D}^T - \gamma^2 I \end{bmatrix}, \mathcal{H} = \begin{bmatrix} -I \\ \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

通过简单的矩阵运算可得 \mathcal{H}, \mathcal{R} 的零空间为:

$$\mathcal{H}^\perp = \begin{bmatrix} -I \\ \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} & I & 0 \\ \bar{C} & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

根据投影引理可知, 不等式(3.14)成立说明下列两个不等式成立

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\perp \mathcal{M} \mathcal{H}^{\perp T} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & I & 0 \\ \bar{C} & 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} \bar{A} & I & 0 \\ \bar{C} & 0 & I \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A} & I \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \omega^2 Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & I \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \begin{bmatrix} \bar{B} & 0 \\ \bar{D} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B} & 0 \\ \bar{D} & I \end{bmatrix}^T < 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\perp \mathcal{M} \mathcal{R}^{\perp T} &= \begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & \bar{D}\bar{D}^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

由(3.15)以及广义KYP引理可知下列低频范围内的不等式

$$\begin{bmatrix} G_{eu}(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{eu}(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall |\omega| \leq \omega_l \quad (3.17)$$

成立, 也就意味着降阶模型对给定模型的逼近性能满足式(3.9)。

接下来我们来证明降阶模型的稳定性, 通过矩阵代换可将不等式(3.7)整理为:

$$\begin{bmatrix} 0 & P_s \\ P_s & 0 \end{bmatrix} < He \left(\begin{bmatrix} -I \\ \bar{A} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \right) \quad (3.18)$$

通过计算可得

$$\begin{bmatrix} -I \\ \bar{A} \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -qI \\ pI \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} pI & qI \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

再次使用投影引理, 可知如果不等式(3.18)成立, 则下列两个不等式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{A} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_s \\ P_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & I \end{bmatrix}^T &= \bar{A}P + P\bar{A}^T < 0 \\ \begin{bmatrix} pI & qI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_s \\ P_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI & qI \end{bmatrix}^T &= (qp + pq)P_s < 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

成立. (3.20)正好是 \bar{A} 矩阵Lyapunov稳定的条件, 因 A_r 为 \bar{A} 对角线上元素, 故 \bar{A} 稳定说明 A_r 稳定. 证毕.

注 3.1: 定理3.1给出了连续线性系统在低频范围内的 H_∞ 模型降阶设计条件. 那么降阶模型的求解可转化为一个相应的凸优化问题, 可以方便的通过Matlab的LMI工具箱得以解决.

注 3.2: 在上面的证明过程中, 我们将式(3.14)中定义的矩阵 \mathcal{R} 称为凸性乘子矩阵, 把矩阵 G 称为松弛变量. 此外为了得到定理3.1中给出的凸的设计条件, 我们对松弛变量 G 做了结构上的限制, 这个限制无可避免的引入了保守性. 一个减小保守性的方法就是将 G 规定为如下的结构

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & \begin{bmatrix} \lambda G_1 & 0 \end{bmatrix} \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

其中 λ 为一个常数, 以 λ 为变量做线性搜索便可进一步优化的 H_∞ 降阶逼近性能指标, 当然这样做的代价是增加了计算量. 需要指出的是, 由于 G 的引入, 定理3.2.1中的Lyapunov变量(P, Q)和系统矩阵之间不存在耦合关系, 这样一方面说明整个设计条件的保守性处于一个相对来说可以接受的范围, 另一方面也可以很容易的结合别的设计条件, 如下面几节中在别的频率范围内考虑模型降阶条件, 来实现多目标要求下的模型降阶问题.

3.2.3 连续线性系统中频范围内的 H_∞ 模型降阶

下面给出在中频范围内考虑的连续时间系统 H_∞ 模型降阶的充分性设计条件。

定理 3.2: 给定系统模型(3.1) 以及模型逼近误差系统方程(3.5), 如果存在厄米特共轭矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} > 0, P_s = \begin{bmatrix} P_{s1} & P_{s2}^T \\ P_{s2} & P_{s3} \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & * & * & * & * & * \\ -Q_2 & -Q_3 & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & -\omega_1\omega_2Q_3 - He(AG_3) & * & * \\ 0 & 0 & \Phi_{53} & \tilde{C}_r[I \ 0] - CG_3 & -\gamma^2I & * \\ 0 & 0 & \tilde{B}_r^T & B^T & -D_r^T + D^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{41} & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{41} & -pA_r - pA_r^T & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{41} & -pAG_2 - p[I \ 0]^T A_r^T & -pAG_3 - pG_3 A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

其中 p, q 是满足 $qp + pq < 0$ 的任意固定实数,

$$\begin{aligned} \Phi_{31} &= P_1 + G_1^T - j\omega_c Q_1 \\ \Phi_{41} &= P_2 + [I \ 0]^T G_1^T - j\omega_c Q_2^T \\ \Phi_{32} &= P_2^T + G_2^T - j\omega_c Q_2 \\ \Phi_{42} &= P_3 + G_3^T - j\omega_c Q_3 \\ \Phi_{33} &= -\omega_1\omega_2 Q_1 - \tilde{A}_r - \tilde{A}_r^T \\ \Phi_{43} &= -\omega_1\omega_2 Q_2 - AG_2 - [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\ \Phi_{53} &= \tilde{C}_r - CG_2 \\ \Psi_{11} &= -qG_1 - qG_1^T \\ \Psi_{21} &= -qG_2 - q[I \ 0]^T G_1^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{31} &= P_{s1} + pG_1^T + qA_r \\ \Psi_{41} &= P_{s2} + p[I \ 0]^T G_1^T + qAG_2 \\ \Psi_{22} &= -qG_3 - qG_3^T \\ \Psi_{32} &= P_{s2}^T + pG_2^T + qA_r[I \ 0] \\ \Psi_{42} &= P_{s3} + pG_3^T + qAG_3\end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (3.24)$$

满足下面中频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma \quad \forall \varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2 \quad (3.25)$$

证明: 同上节中对定理3.1的证明类似, 其中这里选取的凸性乘子 \mathcal{R} (见注3.2)为 $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T$, 详细过程不再赘述。证毕。

3.2.4 连续线性系统高频范围内的 H_∞ 模型降阶

下面给出在高频范围内考虑的 H_∞ 模型降阶的充分性设计条件。

定理 3.3: 给定系统模型(3.1)以及模型逼近误差系统方程(3.5), 如果存在厄米特共轭矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} > 0, \quad P_s = \begin{bmatrix} P_{s1} & P_{s2}^T \\ P_{s2} & P_{s3} \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & -\omega_h^2 Q_3 + AG_3 + G_3 A^T & * & * \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & -\tilde{C}_r[I \ 0] + CG_3 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & 0 & \tilde{B}_r^T & B^T & -D_r^T + D^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{41} & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{41} & -pA_r - pA_r^T & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{41} & -pAG_2 - p[I \ 0]^T A_r^T & -pAG_3 - pG_3 A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

成立, 其中 p, q 是满足 $qp + pq < 0$ 的任意固定实数,

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= Q_1 + G_1 + G_1^T \\ \Phi_{21} &= Q_2 + G_2 + [I \ 0]^T G_1^T \\ \Phi_{31} &= P_1 - G_1^T - A_r \\ \Phi_{41} &= P_2 - [I \ 0]^T G_1^T - AG_2 \\ \Phi_{51} &= \tilde{C}_r - CG_2 \\ \Phi_{22} &= Q_3 + G_3 + G_3^T \\ \Phi_{32} &= P_2^T - G_2^T - A_r [I \ 0] \\ \Phi_{42} &= P_3 - G_3^T - AG_3 \\ \Phi_{52} &= \tilde{C}_r [I \ 0] - CG_3 \\ \Phi_{33} &= -\omega_h^2 Q_1 + \tilde{A}_r + \tilde{A}_r^T \\ \Phi_{43} &= -\omega_h^2 Q_2 + AG_2 + [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\ \Phi_{53} &= -\tilde{C}_r + CG_2 \\ \Psi_{11} &= -qG_1 - qG_1^T \\ \Psi_{21} &= -qG_2 - q[I \ 0]^T G_1^T \\ \Psi_{31} &= P_{s1} + pG_1^T + qA_r \\ \Psi_{41} &= P_{s2} + p[I \ 0]^T G_1^T + qAG_2 \\ \Psi_{22} &= -qG_3 - qG_3^T \\ \Psi_{32} &= P_{s2}^T + pG_2^T + qA_r [I \ 0] \\ \Psi_{42} &= P_{s3} + pG_3^T + qAG_3 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (3.28)$$

满足下列高频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma \quad \forall |\omega| \geq \omega_h \quad (3.29)$$

证明: 同3.2.2节中对定理3.1的证明类似, 其中这里选取的凸性乘子 \mathcal{R} (见注3.1)为: $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \end{bmatrix}^T$, 详细过程不再赘述。证毕。

3.2.5 连续线性系统全频范围内的 H_∞ 模型降阶

本节中将给出全频范围内的 H_∞ 模型降阶的设计条件

定理 3.4: 给定模型逼近误差系统方程(3.5), 原始系统矩阵 (A, B, C, D) 具有合适维数, 如果存在矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, F_2, F_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 以及常数 λ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & * & \\ 0 & 0 & -\tilde{B}_r^T & B^T & -I & * \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{51} & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= -G_1 - G_1^T \\ \Psi_{21} &= -G_2 - G_1[I \ 0]^T \\ \Psi_{22} &= -G_3 - G_3^T \\ \Psi_{31} &= P_1 + \tilde{A}_r - \lambda G_1^T \\ \Psi_{32} &= P_2^T + \tilde{A}_r[I \ 0] - F_2^T \\ \Psi_{33} &= \lambda \tilde{A}_r + \lambda \tilde{A}_r^T \\ \Psi_{41} &= P_2 + AG_2 - \lambda G_1^T[I \ 0]^T \\ \Psi_{42} &= P_3 + AG_3 - F_3^T \\ \Psi_{43} &= AF_2 + \lambda G_1^T[I \ 0]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{44} &= AF_3 + F_3A \\ \Psi_{61} &= -\tilde{C}_r + CG_2 \\ \Psi_{62} &= -\tilde{C}_r[I \ 0]^T + CG_3 \\ \Psi_{63} &= -\lambda\tilde{C}_r + CF_2 \\ \Psi_{64} &= -\lambda\tilde{C}_r + CF_3 \\ \Psi_{65} &= -\tilde{D}_r + D\end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (3.31)$$

满足下列全频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty] \quad (3.32)$$

证明: 由等式(3.31), 可将不等式(3.30) 写为:

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * & * \\ P + \tilde{A}G - F^T & \tilde{A}F + F^T \tilde{A}^T & * & * \\ 0 & \tilde{B}^T & -I & * \\ \tilde{C}G & \tilde{C}F & \tilde{D} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & [G_1 \ 0] \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \lambda G_1 & [\lambda G_1 \ 0] \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

上两式又等价于

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_P + He \left(\underbrace{\begin{bmatrix} G^T & 0 \\ F^T & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} -I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{C} \\ 0 & -I \\ \tilde{B} & \tilde{D} \end{bmatrix}^T}_H \right) < 0 \quad (3.34)$$

现在考虑增广误差系统(3.5)的对偶系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}'(t) &= A^T x'(t) + C^T x'(t) \\ e'(t) &= B^T x'(t) + D^T u'(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

由这个对偶系统的状态方程可知:

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ \bar{A} & \bar{C} \\ 0 & -I \\ \bar{B} & \bar{D} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}'(t) \\ \hat{x}'(t) \\ e'(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

根据不等式(3.34)和等式(3.36)并应用Finsler引理可得:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ \hat{z}(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ \hat{z}(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

选取一个Lyapunov函数为

$$V(\hat{x}(t)) = \hat{x}^T(t) P \hat{x}(t) \quad (3.38)$$

其中 P 为(3.30)中关于矩阵变量 P 的一个可行解, 则由式(3.30) (3.37)可得

$$\begin{aligned} & \dot{V}(t) + \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) \\ &= \dot{\hat{x}}^T(t) P \hat{x}(t) + \hat{x}^T(t) \dot{P} \hat{x}(t) + \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \gamma^2 \hat{\omega}^T(t) \hat{\omega}(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

对上式两边从0到 ∞ 积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \dot{V}(t) + \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \gamma^2 \hat{\omega}^T(t) \hat{\omega}(t) < 0 \\ &= V(\infty) - V(0) + \int_0^\infty \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \gamma^2 \int_0^\infty \hat{\omega}^T(t) \hat{\omega}(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

由Lyapunov函数(3.38)及式(3.37)可知对偶系统(3.35)稳定, 即 $V_\infty = 0$, 则在零初始条件($V(0) = 0$)下可得 $\int_0^\infty \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \int_0^\infty \gamma^2 \hat{\omega}^T(t) \hat{\omega}(t)$, 这就说明对偶系统(3.35)满足全频范围内的 H_∞ 性能 γ . 由线性系统的对偶性质可知误差系统(3.5)同样稳定(降阶模型稳定), 且满足全频范围内的 H_∞ 指标 γ . 证毕.

注 3.3: 在定理3.4中存在常数 λ , 这可以通过一个简单的线性搜索算法来得以解决, 当然这么做会增加计算量, 但好处是可以得到保守性更小的结果。证明中式(3.34) 定义的三个矩阵 P, M, \mathbb{M} 分别为系统的性能要求矩阵, 凸性乘子矩阵, 参数矩阵矩阵。这里由于在凸性乘子矩阵 M 中引入了两个辅助变量 G, F 而使得系统参数矩阵 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 与Lyapunov变量 P 之间的耦合关系得以消除。注意到如果取定理3.4中的Lyapunov函数 P 以及乘子 M 中的辅助变量 G, F 为

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = P = \begin{bmatrix} Q_{22}^{-1} & M \\ M^T & P_{11} \end{bmatrix}$$

则定理3.4可以经过简单的初等变换退化为Ebihara等在文[124]中的结果, 我们这里以下面这个推论的形式给出:

推论 3.1: ^[123]给定模型逼近误差系统方程(3.5), 如果存在矩阵变量 $Q_{22}, P_{11}, \bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_{11}A + A^T P_{11} & A^T M^T Q_{22} + M & P_{11}B + M\bar{B}_r & C^T \\ * & \bar{A}_r + \bar{A}_r^T & Q_{22}M\bar{B} + \bar{B}_r & -\bar{C}_r^T \\ * & * & -\gamma^2 I & * \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Q_{22}^{-1} \bar{A}_r & Q_{22}^{-1} \bar{B}_r \\ \hline \bar{C}_r & \bar{D}_r \end{array} \right] \quad (3.42)$$

满足下面全频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) < \gamma \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty] \quad (3.43)$$

3.2.6 数值算例与应用

在本小节中, 我们给出几个有限频模型降阶的例子来说明本节给出的基于LMI的有限频 H_∞ 模型降阶方法的优越性。

例3.1: 这里我们考虑一个在文献[60] [61]中采用的例子, 考虑下面一个用传递函数形式给出的四阶系统:

$$G_4(s) = \frac{(s^2 + 0.2s + 1.01)(s^2 + 3s + 9.01)}{(s^2 + 0.8s + 4.01)(s^2 + s + 16.02)} \quad (3.44)$$

现在要求一个二阶的传递函数模型来逼近这个四阶模型, 其中希望优化的是在频率范围为0.1 rad/s 到2 rad/s 之间的 H_∞ 逼近性能。

对此例, 采用标准的平衡截断方法给出的降阶模型为:

$$G_2^B(s) = \frac{1.051s^2 + 2.771s + 2.086}{s^2 + 1.091s + 14.78} \quad (3.45)$$

在文献[61]中, Scroletti等采用基于加权函数的平衡截断方法来设计降阶模型, 并根据给定的频率范围 $\omega \in [0.1, 2]$ 选取加权函数为: $W_o(s) = \frac{4(s+26.5)(s+0.03774)}{(s+2)^2(s^2+0.02653s+1)}$, $W_i(s) = 1$, 同时相应的降阶模型为:

$$G_2^W(s) = \frac{s^2 + 0.2813s + 0.9568}{s^2 + 0.6191s + 8.72} \quad (3.46)$$

由本章中给出的基于线性矩阵不等式的方法优化出的降阶模型为:

$$G_2^L(s) = \frac{1.028s^2 + 1.906s - 3.207}{s^2 + 1.317s + 13} \quad (3.47)$$

现在我们来比较这几个降阶模型 $G_2^B(s)$, $G_2^W(s)$, $G_2^L(s)$ 对给定模型 $G_4(s)$ 在指定频率范围($\omega \in [0.1, 2]$)内的 H_∞ 逼近性能, 计算结果如下表所示:

表 3.2 例3.1中采用不同方法得到的有限频 H_∞ 模型逼近性能指标。

Table 3.2 Finite frequency H_∞ model approximation performance index via different methods in Example 3.1.

降阶方法	$G_2(s)$	$\ G(j\omega) - G_2^i(j\omega)\ _\infty$ $\omega \in [0.1, 2], i = B, W, L$
平衡截断	$G_2^B(s)$	0.7542
基于加权函数的平衡截断	$G_2^W(s)$	0.7319
本文方法	$G_2^L(s)$	0.3874

从在这个例子可以看出, 相对于标准的平衡截断方法, 基于加权函数的平衡

截断方法所给出的逼近性能并没有得到显著的提高,当然可以重新尝试选择更加合适的加权矩阵来进一步提高逼近性能,但是如何选取合适的加权矩阵式一个非常难做的事情。于此同时,本章中给出的线性矩阵不等式方法避免了加权矩阵的选择,只需求解一个凸优化问题即可得到一个满意的降阶模型。为了更清楚的比较上面给出的几个降阶模型 G_2^B, G_2^W, G_2^L 的优劣,我们给出了逼近误差系统在所考虑频率范围内的奇异值曲线,如下图所示

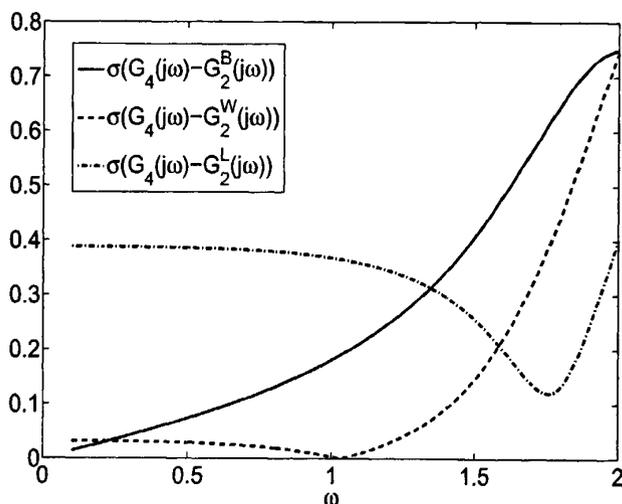


图 3.1 例3.1中采用不同方法得到的误差传递函数在指定频率范围内的最大奇异值曲线。

Fig. 3.1 Maximum singular value curves of the error transfer functions obtained via different methods over the pre-specified frequency interval in Example 3.1.

例3.2: 考虑一个数值例子, 给定一个状态空间描述的正则四阶系统(3.1) 其参数矩阵为:

$$G_4 := \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} -2.218 & -1.974 & 0.306 & -1.287 & -1.712 \\ -1.529 & -2.809 & 0.909 & -1.141 & -0.089 \\ -1.049 & -0.050 & -2.144 & -1.210 & -0.671 \\ -1.299 & 1.745 & 0.345 & -2.141 & -1.800 \\ \hline -0.877 & -1.252 & 0.774 & -0.111 & \end{array} \right] \quad (3.48)$$

现在需要求一个二阶的正则系统模型来逼近这个四阶模型。考虑的逼近性能为低频范围为 $|\omega| \leq 2$ 之间的 H_∞ 范数。

对于该系统，采用标准的平衡截断给出的降阶模型参数矩阵为：

$$G_2^B := \left[\begin{array}{c|c} A_2^B & B_2^B \\ \hline C_2^B & D_2^B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.4956 & -1.2894 & 0.6120 \\ -1.2894 & -5.9626 & 0.9584 \\ \hline 0.6120 & 0.9584 & \end{array} \right] \quad (3.49)$$

如果采用[74-79]等文献中提出的基于有限频格拉姆矩阵的平衡截断方法，给出的降阶模型参数矩阵为：

$$G_2^G := \left[\begin{array}{c|c} A_2^G & B_2^G \\ \hline C_2^G & D_2^G \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.3714 & -0.2700 & 0.5448 \\ 0.2700 & -0.1707 & -0.0629 \\ \hline 0.5448 & 0.0629 & \end{array} \right] \quad (3.50)$$

现在我们采用本章中给出的基于线性矩阵不等式的降阶方法(定理3.1), 优化出的降阶模型参数矩阵为：

$$G_2^L := \left[\begin{array}{c|c} A_2^L & B_2^L \\ \hline C_2^L & D_2^L \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.2598 & -2.6063 & -0.9093 \\ -1.0435 & -3.2756 & 0.1476 \\ \hline -0.8036 & -1.4141 & \end{array} \right] \quad (3.51)$$

现在我们来比较这几个降阶模型 $G_2^B(s), G_2^G(s), G_2^L(s)$ 对给定模型 $G_4(s)$ 在指定频率范围($\omega \in [0.1, 2]$)的 H_∞ 逼近性能，计算结果如下表所示：

表 3.3 例3.2中采用不同方法得到的有限频 H_∞ 模型逼近性能指标。

Table 3.3 Finite frequency H_∞ model approximation performance index via different methods in Example 3.2.

降阶方法	$G_2(s)$	$\ G(j\omega) - G_2^i(j\omega)\ _\infty$ $ \omega \leq 2, i = B, G, L$
平衡截断	$G_2^B(s)$	0.1533
基于有限频格拉姆矩阵的平衡截断	$G_2^G(s)$	0.2597
本文方法	$G_2^L(s)$	0.0998

从表3.3中的计算结果可以看出，在本例中，基于有限频格拉姆矩阵的平衡截断方法给出的逼近性能居然要比标准的平衡截断方法给出的逼近性能差，这就说明了基于有限频格拉姆矩阵的平衡截断方法并不是一个可靠的有限频降阶方法。同时，采用本章中的基于线性矩阵不等式的降阶方法，在指定的频率范围内，降

阶模型对给定模型的逼近性能有了大幅提高。为了更清楚的比较上面给出的几个降阶模型 G_2^B, G_2^G, G_2^L 的优劣, 我们给出了逼近误差系统在所考虑频率范围内的奇异值曲线, 如下图所示

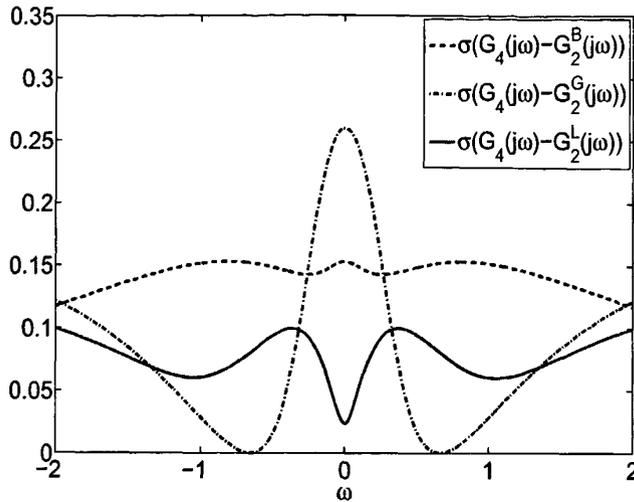


图 3.2 例3.2中采用不同方法得到的误差传递函数在指定频率范围内的最大奇异值曲线。

Fig. 3.2 Maximum singular value curves of the error transfer functions obtained via different methods over the pre-specified frequency interval in Example 3.2.

为了进一步全面的说明本文方法的有效性, 现在我们考虑几个不同的频率范围上的 H_∞ 模型降阶问题, 包括中频, 高频, 和低频的几种情况, 得到的计算结果如下表所示, 这里为节省空间, 只给出了性能指标, 相应的降阶模型的参数矩阵略去。

表 3.4 例3.2中考虑不同的频率范围内的 H_∞ 模型降阶计算结果。

Table 3.4 H_∞ model reduction results under different frequency interval considerations in Example 3.2.

低频模型降阶	$ \omega \leq 0.5$	$ \omega \leq 1.0$	$ \omega \leq 1.5$
$\ G(j\omega) - G_r(j\omega)\ _\infty, \omega \in \Theta_L$	0.0438	0.0593	0.0801
中频模型降阶	$1 \leq \omega \leq 3$	$1 \leq \omega \leq 5$	$3 \leq \omega \leq 5$
$\ G(j\omega) - G_r(j\omega)\ _\infty, \omega \in \Theta_M$	0.1112	0.1201	0.1115
高频模型降阶	$ \omega \geq 30$	$ \omega \geq 50$	$ \omega \geq 100$
$\ G(j\omega) - G_r(j\omega)\ _\infty, \omega \in \Theta_H$	0.0023	0.0013	0.0007

从上表可以看出, 对不同频段下模型降阶问题, 本文的方法都给出了满意的 H_∞ 逼近性能, 充分的说明了本文方法对有限频 H_∞ 模型降阶问题是有效的。

例3.3: 考虑下面一个带有互感的RLC电路的建模与模型降阶问题

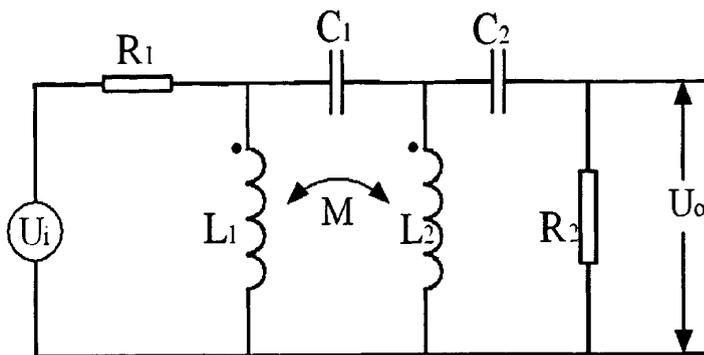


图 3.3 一个带有互感的RLC电路系统。

Fig. 3.3 A RLC circuit system with mutual inductance.

其中电容 C_1, C_2 , 电感 L_1, L_2 , 电阻 R_1, R_2 , 以及两个电感间的互感 M 的参数为:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.12C & C_2 &= 1.8C \\ L_1 &= 4.0H & L_2 &= 5.8H & M &= 0.1H \\ R_1 &= 22\Omega & R_2 &= 86\Omega \end{aligned} \tag{3.52}$$

在该电路中有四个储能元件 C_1, C_2, L_1, L_2 , 关于它们的方程为:

$$\begin{aligned} i_{C_1}(t) &= C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} \\ i_{C_2}(t) &= C_2 \frac{dv_{C_2}(t)}{dt} \\ v_{L_1}(t) &= L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + M \frac{di_{L_2}(t)}{dt} \\ v_{L_2}(t) &= L_2 \frac{di_{L_2}(t)}{dt} + M \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \end{aligned} \tag{3.53}$$

由Kirchoff电压与电流定理, 可得下面回路电压和电流方程

$$\begin{aligned} i_{C_1}(t) - i_{L_2}(t) - i_{C_2}(t) &= 0 \\ U_i(t) - R_1(i_{L_1}(t) + i_{C_1}(t)) - v_{C_1}(t) &= 0 \\ v_{L_1}(t) - v_{C_1}(t) - v_{L_2}(t) &= 0 \\ v_{L_2}(t) - v_{C_2}(t) - R_2 i_{C_2}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

通过定义下列向量:

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ i_{L_1}(t) \\ i_{L_2}(t) \end{bmatrix} \quad p(t) = \begin{bmatrix} i_{C_1}(t) \\ i_{C_2}(t) \\ v_{L_1}(t) \\ v_{L_2}(t) \end{bmatrix}$$

可将方程式(3.53)(3.54)写为:

$$\begin{aligned} P_1 \dot{x}(t) &= p(t) \\ P_2 p(t) + P_3 x(t) + P_4 U_i(t) & \end{aligned} \quad (3.55)$$

其中

$$P_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & M \\ 0 & 0 & M & L_2 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -R_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -R_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同时, 系统的输出即电阻 R_2 两端电压 $U_o(t)$ 满足下列关系

$$U_o(t) + v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t) + R_1 \left(\frac{1}{R_2} U_o(t) + i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) \right) = U_i(t) \quad (3.56)$$

结合式(3.55)(3.56)可得该电路系统的四维状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_4 x(t) + B_4 U_i(t) \\ U_o(t) &= C_4 x(t) + D_4 U_i(t) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_4 &= P_1^{-1} P_2^{-1} P_3, & B_4 &= P_1^{-1} P_2^{-1} P_4 \\ C_4 &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & R_1 & R_2 \end{bmatrix}, & D_4 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i(t) \end{aligned}$$

带入该电路中各元件的参数(3.52)可得:

$$G_4 := \left[\begin{array}{c|c} A_4 & B_4 \\ \hline C_4 & D_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -0.0772 & -0.0772 & -1.6975 & 6.6358 & 0.0772 \\ -0.0051 & -0.0051 & -0.1132 & -0.1132 & 0.0051 \\ 0.0544 & 0.0501 & -4.3060 & -4.3060 & 0.1957 \\ -0.1382 & 0.0343 & -2.9462 & -2.9462 & 0.1339 \\ \hline -0.7963 & -0.7963 & -17.5185 & -17.5185 & 0.7963 \end{array} \right] \quad (3.57)$$

现在我们考虑系统的输入 $u(t)$ 为直流电压(即 $\omega(u(t)) = 0$)的情况,注意到由于此时考虑为一个单一的频率点,所以文献[74-79]等中提出的基于有限频格拉姆矩阵的方法不再适用,原因是当此时按这类方法定义的格拉姆矩阵为:

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^0 (j\omega I - A)^{-1} B B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} d\omega = 0$$

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^0 (-j\omega I - A^T)^{-1} C^T C (j\omega I - A)^{-1} d\omega = 0$$

导致使用该方法无法求出一个系统模型的平衡实现。另一方法,如果采用基于加权函数的平衡阶段方法,我们很难找出一个合理的零频情况下的加权函数,现有文献中也没有什么有效的方法来寻找这样的加权函数。故这里我们只比较本文提出的方法与采用标准的平衡截断方法对该电路系统的降阶效果。

采用标准的平衡截断方法得到的二阶降阶模型为:

$$G_2^b := \left[\begin{array}{c|c} A_2^0 & B_2^0 \\ \hline C_2^0 & D_2^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2.3504 & 0.8283 & -1.5955 \\ -0.8283 & -0.0013 & -0.0348 \\ \hline 1.5955 & -0.0348 & 0.7963 \end{array} \right] \quad (3.58)$$

该二阶模型 $G_2^b(s)$ 对四阶模型 G_4 在 $\omega = 0$ 处的 H_∞ 逼近性能为:

$$\|G_4(j0) - G_2^b(j0)\|_\infty = \sigma_{max}(G_4(j0) - G_2^b(j0)) = 0.6623 \quad (3.59)$$

此时采用本文方法得到的二阶降阶模型为

$$G_2^0 := \left[\begin{array}{c|c} A_2^0 & B_2^0 \\ \hline C_2^0 & D_2^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.6745 & 0.0562 & 0.1978 \\ -0.0558 & -0.0021 & 0.0051 \\ \hline -4.4003 & -0.6545 & 0.4198 \end{array} \right] \quad (3.60)$$

该二阶模型 $G_2^0(s)$ 对四阶模型 G_4 在 $\omega = 0$ 处的 H_∞ 逼近性能为:

$$\|G_4(j0) - G_2^0(j0)\|_\infty = \sigma_{max}(G_4(j0) - G_2^0(j0)) = 0.1896 \quad (3.61)$$

很显然比起标准的平衡截断方法, 本文方法给出降阶模型 $G_2^0(j\omega)$ 在零频处对原始模型 $G_4(j\omega)$ 的逼近性能有了大幅提高。为了更清楚的说明, 下面我们给出当输入为直流电压 $U_i(t) = 2$ 时, 输出信号 $U_o(t)$ 在原始模型 $G_4(j\omega)$ 和两个降阶模型 $G_2^b(j\omega), G_2^0(j\omega)$ 下响应曲线。

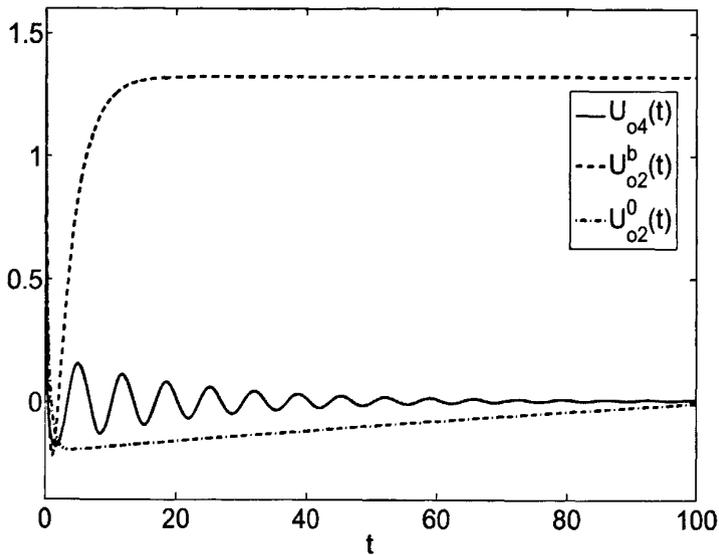


图 3.4 $U_i(t) = 2$ 时输出信号 $U_o(t)$ 分别在传递函数: $G_4(j\omega), G_2^b(j\omega), G_2^0(j\omega)$ 下的响应曲线。

Fig. 3.4 Response curves of output signal $U_o(t)$ of the transfer functions: $G_4(j\omega), G_2^b(j\omega), G_2^0(j\omega)$ with input signal $U_i(t) = 2$.

从上图3.4中可以清楚的看出, 当输入为直流电压时, 采用本文的方法得到的降阶模型 $G_2^0(j\omega)$ 对四阶模型 $G_4(j\omega)$ 的逼近效果要远好于采用平衡截断方法得到的降阶模型 $G_2^b(j\omega)$ 。

现在我们考虑当输入为频率为0.5Hz的交流电压的情况, 此时采用标准的平衡截断方法得到的二阶降阶模型仍然为(3.58), 二阶模型 $G_2^b(s)$ 对四阶模型 $G_4(s)$ 在 $\omega = 0.5$ 处的 H_∞ 逼近性能为:

$$\|G_4(0.5j) - G_2^b(0.5j)\|_\infty = \sigma_{max}(G_4(0.5j) - G_2^b(0.5j)) = 0.3199 \quad (3.62)$$

采用本文方法得到的二阶降阶模型为

$$G_2^{0.5} := \left[\begin{array}{c|c} A_2^0 & B_2^0 \\ \hline C_2^0 & D_2^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.9895 & 0.1378 & 0.1821 \\ -0.0626 & 0.0002 & 0.0044 \\ \hline -6.1971 & -0.3790 & 0.3940 \end{array} \right] \quad (3.63)$$

二阶模型 $G_2^{0.5}(s)$ 对四阶模型 G_4 在 $\omega = 0.5$ 时的 H_∞ 逼近性能为:

$$\|G_4(0.5j) - G_2^{0.5}(0.5j)\|_\infty = \sigma_{max}(G_4(0.5j) - G_2^{0.5}(0.5j)) = 0.2058 \quad (3.64)$$

显然降阶模型 $G_2^{0.5}(j\omega)$ 比 $G_2^b(j\omega)$ 在 $\omega = 0.5$ 时对原始模型 $G_4(j\omega)$ 的逼近性能有了大幅提高。为了更清楚的说明,下面我们给出当输入为交流电压 $U_i(t) = (2 + 0.1e^{-2t})\sin(\pi t)$ 时,输出信号 $U_o(t)$ 在原始模型 $G_4(j\omega)$ 和两个降阶模型 $G_2^b(j\omega), G_2^{0.5}(j\omega)$ 下响应曲线。

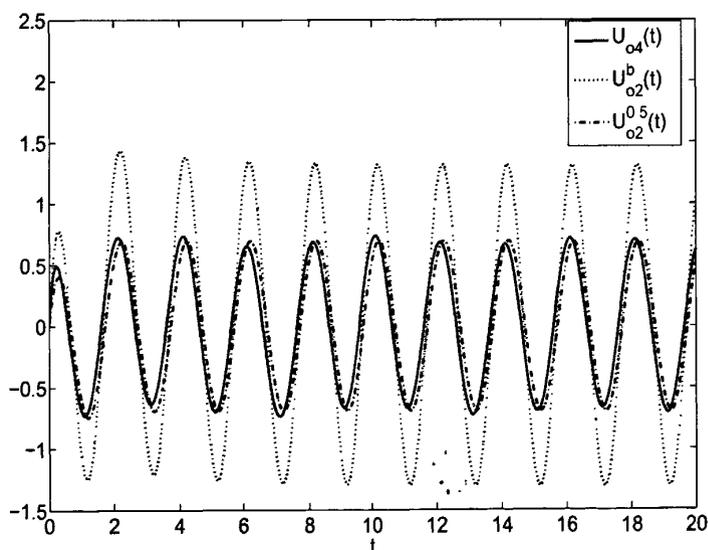


图 3.5 $U_i(t) = (2 + 0.1e^{-2t})\sin(\pi t)$ 时输出信号 $U_o(t)$ 分别在传递函数: $G_4(j\omega), G_2^b(j\omega), G_2^{0.5}(j\omega)$ 下的响应曲线。

Fig. 3.5 Response curves of output signal $U_o(t)$ of the transfer functions: $G_4(j\omega), G_2^b(j\omega), G_2^{0.5}(j\omega)$ with input signal $U_i(t) = (2 + 0.1e^{-2t})\sin(\pi t)$.

从图3.5中可以看出,当输入为频率为0.5Hz的交流电压时,采用本文的方法得到的模型 $G_2^{0.5}(j\omega)$ 对模型 $G_4(j\omega)$ 的逼近效果要好于采用平衡截断方法得到的降阶模型 $G_2^b(j\omega)$ 。本例充分说明了本文方法的优越性和其在实际应用上的价值。

3.3 连续线性系统的 H_2 模型降阶

上节中在 H_∞ 范数意义下研究了线性系统的模型降阶问题,在本节中将考虑在 H_2 范数意义下的模型降阶问题。现有文献中针对 H_2 模型降阶问题已有一些相关的研究成果^[18, 37, 50, 110, 112, 126]但使用LMI技术来求解该问题的结果则非常少见^[126]。

3.3.1 问题描述

本节的目的是对给定的高阶模型(3.1)求取一个降阶模型(3.3)满足

- (1). 降阶模型(3.3)保持高阶模型的稳定性(3.1)
- (2). 降阶模型(3.3)对高阶模型(3.1)的逼近性能满足 H_2 性能指标 γ ,即:

$$\min \|G_r(s) - G(s)\|_2 < \gamma$$

3.3.2 连续线性系统的 H_2 模型降阶

引理 3.1: ^[146]考虑系统(3.1),那么下列说法等价。

- (1). 系统(3.1)稳定且满足 H_2 性能指标 γ
- (2). 存在对称正定矩阵 P 以及矩阵 G, Z 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * & * \\ P - F^T + AG & AF + F^T A^T & * & * \\ CG & 0 & CF & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Z & * & * \\ B^T & -P & * \\ D^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma^2$$

下面在引理3.1的基础上我们给出连续系统的 H_2 模型降阶设计条件

定理 3.5: 如果存在矩阵 $G_1, G_2, G_3, F_2, F_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r, Z$,常数 λ 以及对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} > 0$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & * & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & * & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} & * \\ \Psi_{51} & \Psi_{52} & \Psi_{53} & \Psi_{54} & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} -Z & * & * & * \\ B_r & -P_1 & * & * \\ B & -P_2 & -P_3 & * \\ -D_r + D & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \text{Trace}(Z) < \gamma^2
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Psi_{11} &= -G_1 - G_1^T \\
 \Psi_{21} &= -G_2 - [I \ 0]^T G_1^T \\
 \Psi_{22} &= -G_3 - G_3^T \\
 \Psi_{31} &= \tilde{A}_r + P_1 - \lambda G_1 \\
 \Psi_{32} &= \tilde{A}_r [I \ 0]^T + P_2^T - F_2^T \\
 \Psi_{33} &= \lambda \tilde{A}_r + \lambda \tilde{A}_r^T \\
 \Psi_{41} &= A G_2 + P_2 - \lambda [I \ 0]^T G_1^T \\
 \Psi_{42} &= A G_3 + P_3 - F_3^T \\
 \Psi_{43} &= A F_2 + \lambda [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\
 \Psi_{44} &= A F_3 + F_3^T A^T \\
 \Psi_{51} &= -\tilde{C}_r + C G_2 \\
 \Psi_{52} &= -\tilde{C}_r [I \ 0] + C G_3 \\
 \Psi_{53} &= -\lambda \tilde{C}_r + C F_2 \\
 \Psi_{54} &= -\lambda \tilde{C}_r [I \ 0] + C F_3
 \end{aligned}$$

那么可按下式

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \tag{3.66}$$

构造一个稳定的降阶模型(3.3)并满足 H_2 逼近性能指标 γ ,
 即: $\|G(s) - G_r(s)\|_2 < \gamma$

证明 根据等式关系(3.66)以及误差系统状态方程(3.5)可将不等式(3.65)写为:

$$\begin{bmatrix} -G - G^T & * & * & * \\ P - F^T + \bar{A}G & \bar{A}F + F^T \bar{A}^T & * & * \\ \bar{C}G & 0 & \bar{C}F & -I \\ -Z & * & * \\ \bar{B} & -P & * \\ \bar{D} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma^2$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & \begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix} \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \lambda G_1 & \begin{bmatrix} \lambda G_1 & 0 \end{bmatrix} \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

由引理3.1可知, 逼近误差系统(3.5)满足 H_2 性能指标且误差系统稳定, 既矩阵 \bar{A} 为Hurwitz稳定矩阵, 也就是说明其对角线的子矩阵 A_r 同样为Hurwitz稳定矩阵。定理得证。

3.3.3 数值算例

例3.4: 考虑下面一个正则四阶系统模型:

$$G_4 := \left[\begin{array}{c|c} A_4 & B_4 \\ \hline C_4 & D_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -0.0029 & -0.9986 & 0.3454 & -0.9610 & -0.2422 \\ 0.3812 & -2.3491 & -0.3086 & 0.6255 & 0.4931 \\ 0.9221 & 0.0882 & -2.0388 & 0.9656 & -0.1143 \\ 0.5510 & -0.3870 & -0.2921 & -4.3763 & -0.8002 \\ \hline 0.9852 & 0.0725 & -0.7309 & -0.7374 & \end{array} \right] \quad (3.67)$$

这里我们考虑 H_2 逼近性能下的模型, 由定理3.3.1, 可以得到一个二阶模型如下:

$$G_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.3771 & -0.7242 & 0.3995 \\ -3.5085 & -1.9145 & 1.7801 \\ \hline 1.0507 & 0.0628 & \end{array} \right] \quad (3.68)$$

容易验证, 该降阶模型稳定且满足 $\|G_4(s) - G_2(s)\|_2^2 < 0.0012$ 。

3.4 本章小结

本章针对连续时间线性系统, 研究了 H_∞ 和 H_2 范数意义下的模型降阶问题。这里我们重点考虑了有限频范围内的 H_∞ 模型降阶问题, 对该问题我们采用了不同于以往的处理方法, 即借助近期提出的广义KYP引理^[103], 得到了可以优化有限频范围内 H_∞ 逼近性能指标的线性矩阵不等式条件。对全频范围的 H_∞ 模型降阶问题, 结合参数依赖Lyapunov方法引入了具有结构限制的辅助变量, 得到了相比现有的同类方法保守性更小的设计条件, 同时我们还给出了 H_2 模型降阶的线性矩阵不等式设计条件。特别指出的是在本章给出的所有设计条件中, 系统矩阵与Lyapunov矩阵间都没有耦合, 所以本文的方法可以很方便的推广以解决考虑 H_2/H_∞ 的多目标模型降阶问题。数值例子证明了本章提出的方法的有效性与优越性, 同时还给出了一个RCL电路系统建模的仿真算例, 指出了本方法在实际应用中的前景。

第四章 离散线性系统的模型降阶

4.1 引言

早在20世纪50年代, 由于数字计算机在工程和科学上应用的增加, 离散系统的研究就引起了研究人们的关注。尤其近几十年来, 随着系统理论研究领域的扩大和计算机技术的广泛普及应用, 离散控制系统得到了进一步的发展。由于数字计算机进行计算时在时间上是离散的, 因此当一个系统用数字计算机进行控制或者用数字计算机进行模拟, 分析和设计时, 需要将时间变量考虑为离散变量, 这时所研究的系统即为离散系统。

对离散系统的模型降阶在实际中也有着大量的工程背景与应用, 常见的如数字滤波器的降阶^[17, 25-29]。同连续的情况类似, 平衡截断法在离散系统的模型降阶问题上同样有着广泛的成功应用, 但其同样无法很好的处理上章中提出的一些问题, 如有限频范围内的模型降阶, 而在实际中如数字滤波器常常根据需要由巴特沃思(Butterworth)法或切比雪夫(Chebyshev)法设计为高通/带通/低通滤波器因此对这些滤波器降阶的时候, 有限的频率范围也是一个很重要的考虑因素。

本章在上一章的基础上, 针对离散时间线性系统的 H_∞ 、 H_2 模型降阶问题给出了基于线性矩阵不等式方法的设计条件。得到这些方法的主要工具依然是广义KYP引理和投影引理以及Finsler引理等, 另外导出这些设计条件的技术手段和上一章中连续的情况类似, 估本章中只给出相应的结果而省略去其具体的证明过程。仿真算例说明了本章中方法的有效性与优越性。

4.2 离散线性系统的 H_∞ 模型降阶

4.2.1 问题描述

考虑下面给出的一个稳定的 n 维离散时间线性系统, 其状态空间模型为:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $u(k) \in R^m$ 为系统输入, $y(k) \in R^p$ 为系统输出, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in$

$R^{p \times n}, D \in R^{p \times m}$, 系统模型(4.1)还可以用下面的传递函数

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (4.2)$$

来表示, 其中 $z = e^{j\theta}$ 。

本节的目标是寻找一个 $n_r (n_r < n)$ 维的系统模型

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) + D_r u(k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

来逼近上面的 n 维模型, 其中 $A_r \in R^{n_r \times n_r}, B_r \in R^{n_r \times m}, C_r \in R^{p \times n_r}, D_r \in R^{p \times m}$ 为待定实矩阵, 该降阶模型的传递函数形式为:

$$G_r(z) = C_r(zI - A_r)^{-1}B_r + D_r \quad (4.4)$$

其中 $z = e^{j\theta}$ 。

降阶模型(4.3)需满足如下要求:

- (1) 保持系统的稳定性
- (2) 满足在给定频率范围 Θ 内的 H_∞ 逼近性能 γ , 即: $\|G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})\|_\infty < \gamma, \forall \theta \in \Theta$, 其中 Θ 表示不同的频率范围, 见表4.1。

表 4.1 不同的有限频率范围(离散情况)

Table 4.1 Different finite frequency ranges (Discrete-time)

	低频	中频	高频	全频
Θ	$ \theta \leq \vartheta_1$	$\vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2$	$ \theta \geq \vartheta_2$	$ \theta \leq \pi$

结合给定高阶模型(4.1)和降阶模型(4.3)的动态方程, 可得逼近误差系统的状态空间方程:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \bar{A}\xi(k) + \bar{B}u(k) \\ e(k) &= \bar{C}\xi(k) + \bar{D}u(k) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{42} &= Q_3 + G_3^T \\
 \Phi_{33} &= P_1 - (2\cos\vartheta_1)Q_1 - \tilde{A}_r - \tilde{A}_r^T \\
 \Phi_{43} &= P_2 - (2\cos\vartheta_1)Q_2 - AG_2 - [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\
 \Phi_{53} &= \tilde{C}_r - CG_2 \\
 \Phi_{44} &= P_3 - (2\cos\vartheta_1)Q_3 - AG_3 - G_3^T A^T \\
 \Phi_{54} &= \tilde{C}_r [I \ 0] - CG_3 \\
 \Psi_{11} &= P_{s1} - qG_1 - qG_1^T \\
 \Psi_{21} &= P_{s2} - qG_2 - q[G_1 \ 0]^T \\
 \Psi_{31} &= q\tilde{A}_r + pG_1 \\
 \Psi_{41} &= qAG_2 + p[G_1 \ 0]^T \\
 \Psi_{22} &= P_{s3} - qG_3 - qG_3^T \\
 \Psi_{32} &= q[\tilde{A}_r \ 0] + pG_2^T \\
 \Psi_{42} &= qAG_3 + pG_3 \\
 \Psi_{33} &= -P_{s1} - p\tilde{A}_r - p\tilde{A}_r^T \\
 \Psi_{43} &= -P_{s2} - pAG_2 - p[\tilde{A}_r \ 0]^T
 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (4.8)$$

满足下面低频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) < \gamma \quad \forall |\theta| \leq \vartheta_1 \quad (4.9)$$

4.2.3 离散线性系统中频范围的 H_∞ 模型降阶

下面给出在中频范围内考虑的离散时间系统 H_∞ 模型降阶的充分性设计条件。

定理 4.2: 给定模型逼近误差系统方程(4.5), 原始系统矩阵 (A, B, C, D) 具有合适维数, 如果存在厄米特共轭矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} > 0, \quad P_s = \begin{bmatrix} P_{s1} & P_{s2}^T \\ P_{s2} & P_{s3} \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -P_1 & * & * & * & * & * & * \\ -P_2 & -P_3 & * & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & P_3 - (2\cos\vartheta_\omega)Q_3 - AG_3 - G_3^T A^T & * & * & * \\ 0 & 0 & \Phi_{53} & \tilde{C}_r [I \ 0] - CG_3 & -\gamma^2 I & * & * \\ 0 & 0 & \tilde{B}_r^T & B^T & D^T - \tilde{D}_r^T & -I & * \end{bmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & -P_{s1} - p\tilde{A}_r - p\tilde{A}_r^T & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & -P_{s2} - pAG_2 - p[\tilde{A}_r \ 0]^T & -P_{s1} - pAG_3 - pG_3 A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

成立, 其中 p, q 是满足 $p^2 - q^2 < 0$ 的任意固定实数,

$$\begin{aligned} \Phi_{31} &= e^{-j\vartheta_c} Q_1 + G_1^T \\ \Phi_{41} &= e^{-j\vartheta_c} Q_2 + [I \ 0]^T G_1^T \\ \Phi_{32} &= e^{-j\vartheta_c} Q_2^T + G_2^T \\ \Phi_{42} &= e^{-j\vartheta_c} Q_3 + G_3^T \\ \Phi_{33} &= P_1 - (2\cos\vartheta_\omega)Q_1 - \tilde{A}_r - \tilde{A}_r^T \\ \Phi_{43} &= P_2 - (2\cos\vartheta_\omega)Q_2 - AG_2 - [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\ \Phi_{53} &= \tilde{C}_r - CG_2 \\ \Psi_{11} &= P_{s1} - qG_1 - qG_1^T \\ \Psi_{21} &= P_{s2} - qG_2 - q[G_1 \ 0]^T \\ \Psi_{31} &= q\tilde{A}_r + pG_1 \\ \Psi_{41} &= qAG_2 + p[G_1 \ 0]^T \\ \Psi_{22} &= P_{s3} - qG_3 - qG_3^T \\ \Psi_{32} &= q[\tilde{A}_r \ 0] + pG_2^T \\ \Psi_{42} &= qAG_3 + pG_3 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (4.12)$$

满足下面中频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) < \gamma, \quad \forall \vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2 \quad (4.13)$$

4.2.4 离散线性系统高频范围的 H_∞ 模型降阶

下面给出在高频范围内考虑的离散时间系统 H_∞ 模型降阶的充分性设计条件。

定理 4.3: 给定模型逼近误差系统方程(4.5), 原始系统矩阵 (A, B, C, D) 具有合适维数, 如果存在厄米特共轭矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} > 0, \quad P_s = \begin{bmatrix} P_{s1} & P_{s2}^T \\ P_{s2} & P_{s3} \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & P_3 + (2\cos\vartheta_\omega)Q_3 + AG_3 + G_3^T A^T & * & * \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & -\tilde{C}_r[I \ 0] + CG_3 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & 0 & \tilde{B}_r^T & B^T & D^T - \tilde{D}_r^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & -P_{s1} - p\tilde{A}_r - p\tilde{A}_r^T & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & -P_{s2} - pAG_2 - p[\tilde{A}_r \ 0]^T & -P_{s1} - pAG_3 - pG_3 A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

成立, 其中 p, q 是满足 $p^2 - q^2 < 0$ 的任意固定实数,

$$\begin{aligned}
 \Phi_{11} &= -P_1 + G_1 + G_1^T \\
 \Phi_{21} &= -P_2 + G_2 + [I \ 0]^T G_1^T \\
 \Phi_{22} &= -P_3 + G_3 + G_3^T \\
 \Phi_{31} &= -Q_1 - G_1^T - \tilde{A}_r \\
 \Phi_{41} &= -Q_2 - [I \ 0]^T G_1^T - AG_2 \\
 \Phi_{32} &= -Q_2^T - G_2^T - \tilde{A}_r [I \ 0] \\
 \Phi_{42} &= -Q_3 - G_3^T - AG_3 \\
 \Phi_{33} &= P_1 + (2\cos\vartheta_h)Q_1 + \tilde{A}_r + \tilde{A}_r^T \\
 \Phi_{43} &= P_2 + (2\cos\vartheta_h)Q_2 + AG_2 + [I \ 0]^T \tilde{A}_r^T \\
 \Phi_{51} &= \tilde{C}_r - CG_2 \\
 \Phi_{52} &= \tilde{C}_r [I \ 0] - CG_3 \\
 \Phi_{53} &= -\tilde{C}_r + CG_2 \\
 \\
 \Psi_{11} &= P_{s1} - qG_1 - qG_1^T \\
 \Psi_{21} &= P_{s2} - qG_2 - q[G_1 \ 0]^T \\
 \Psi_{31} &= q\tilde{A}_r + pG_1 \\
 \Psi_{41} &= qAG_2 + p[G_1 \ 0]^T \\
 \Psi_{22} &= P_{s3} - qG_3 - qG_3^T \\
 \Psi_{32} &= q[\tilde{A}_r \ 0] + pG_2^T \\
 \Psi_{42} &= qAG_3 + pG_3
 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (4.16)$$

满足下面中频范围内的逼近性能指标

$$\sigma_{\max}(G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})) < \gamma, \quad \forall \theta \geq \vartheta_h \quad (4.17)$$

4.2.5 离散线性系统全频范围的 H_∞ 模型降阶

下面给出在全频范围内考虑的离散时间系统 H_∞ 模型降阶的充分性设计条件。

定理 4.4: 给定模型逼近误差系统方程(4.5), 原始系统矩阵 (A, B, C, D) 具有合适维数, 如果存在矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} > 0$$

以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, F_2, F_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 以及常数 λ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & * & * \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & * & \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{65} & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= P_1 - G_1 - G_1^T \\ \Psi_{21} &= P_2 - G_2 - G_1[I \ 0]^T \\ \Psi_{22} &= P_3 - G_3 - G_3^T \\ \Psi_{41} &= \tilde{A}_r - \lambda G_1^T \\ \Psi_{42} &= \tilde{A}_r[I \ 0] - F_2^T \\ \Psi_{43} &= \tilde{B}_r \\ \Psi_{44} &= -P_1 + \lambda \tilde{A}_r + \lambda \tilde{A}_r^T \\ \Psi_{51} &= AG_2 - \lambda G_1^T[I \ 0]^T \\ \Psi_{52} &= AG_3 - F_3^T \\ \Psi_{53} &= B \\ \Psi_{54} &= -P_2 + AF_2 + \lambda G_1^T[I \ 0]^T \\ \Psi_{55} &= -P_3 + AF_3 + F_3A \\ \Psi_{61} &= -\tilde{C}_r + CG_2 \\ \Psi_{62} &= -\tilde{C}_r[I \ 0]^T + CG_3 \\ \Psi_{63} &= -\tilde{D}_r + D \\ \Psi_{64} &= -\lambda \tilde{C}_r + CF_2 \\ \Psi_{65} &= -\lambda \tilde{C}_r + CF_3 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (4.19)$$

满足下面全频范围内的逼近性能指标

$$\|G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})\|_\infty < \gamma, \forall \pi \leq \theta \leq \pi \quad (4.20)$$

此外如果令定理4.4中的 λ , F_2 , F_3 等于零, 则可得到文献[127]中的结果, 下面以推论的形式给出。

推论 4.1: [127] 给定模型逼近误差系统方程(4.5), 如果存在矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} > 0$ 以及矩阵变量 $G_1, G_2, G_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & P_3 - G_3 - G_3^T & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * & * \\ \tilde{A}_r & \tilde{A}_r [I \ 0] & \tilde{B}_r & -P_1 & * & * \\ AG_2 & AG_3 & B & -P_2 & -P_3 & * \\ -\tilde{C}_r + CG_2 & -\tilde{C}_r [I \ 0]^T + CG_3 & -\tilde{D}_r - D & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= P_1 - G_1 - G_1^T \\ \Psi_{21} &= P_2 - G_2 - G_1 [I \ 0]^T \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (4.22)$$

满足下面全频范围内的逼近性能指标

$$\|G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})\|_\infty < \gamma, \forall \pi \leq \theta \leq \pi \quad (4.23)$$

4.2.6 数值算例与应用

在上一章, 针对连续系统 H_∞ 模型降阶中, 我们给出了几个考虑有限频输入情况下的例子。在本小节中, 我们不再给出离散系统有限频 H_∞ 的模型降阶算例, 这里只给出一个在全频范围考虑内的 H_∞ 模型降阶算例。

例4.1: 考虑一个离散时间四阶正则系统(4.1), 其状态空间模型参数矩阵为:

$$G_4(e^{j\theta}) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -0.4781 & 0.2154 & -0.6716 & 0.1071 & 0.4067 \\ -0.0021 & -0.6599 & -0.6914 & -0.5995 & -0.7377 \\ -0.2863 & -0.0394 & -0.5029 & -0.3190 & -0.6137 \\ -0.7367 & -0.0703 & -0.2059 & -0.3213 & 0.4155 \\ \hline 0.0732 & -0.2321 & -0.6026 & 0.4550 & \end{array} \right]$$

在本例中, 我们假设不知道输入信号频率的相关信息, 即考虑输入属于整个 $[-\pi, \pi]$ 区间的情况。根据本章中给出的全频 H_∞ 模型降阶方法以及离散系统平衡截断方法, 我们可以得到如下表所示的降阶模型计算结果。

表 4.2 例4.1中全频范围内 H_∞ 模型降阶的计算结果。

Table 4.2 H_∞ model reduction results over entire frequency interval in Example 4.1.

降阶方法	$G_{ri}(e^{j\theta}) :$	$\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & \end{array}$	$\ G(e^{j\theta}) - G_{ri}(e^{j\theta})\ _\infty$	λ
定理4.2.4	$G_{r1}(s) :$	$\begin{array}{cc c} -1.1935 & 0.1504 & -0.2244 \\ -0.8612 & -0.5943 & -0.8928 \end{array}$	0.6357	-0.12
		$\begin{array}{cc c} 0.3832 & -0.5243 & \end{array}$		
		$\begin{array}{cc c} -1.2049 & 0.1592 & -0.2266 \\ -0.9080 & -0.5236 & -0.9162 \end{array}$		
推论4.2.4	$G_{r2}(s) :$	$\begin{array}{cc c} -1.2049 & 0.1592 & -0.2266 \\ -0.9080 & -0.5236 & -0.9162 \end{array}$	0.6752	
		$\begin{array}{cc c} 0.5183 & -0.6694 & \end{array}$		
		$\begin{array}{cc c} -0.7390 & 0.1816 & -0.7090 \\ -0.1816 & -0.9745 & 0.0235 \end{array}$		
平衡截断	$G_{r3}(s) :$	$\begin{array}{cc c} -0.7390 & 0.1816 & -0.7090 \\ -0.1816 & -0.9745 & 0.0235 \end{array}$	0.8487	
		$\begin{array}{cc c} -0.7090 & -0.0235 & \end{array}$		

为了更进一步的比较上面给出的几个降阶模型 G_{r1}, G_{r2}, G_{r3} 的逼近性能, 我们给出了相应的误差系统在全频范围内的奇异值曲线, 如下图所示

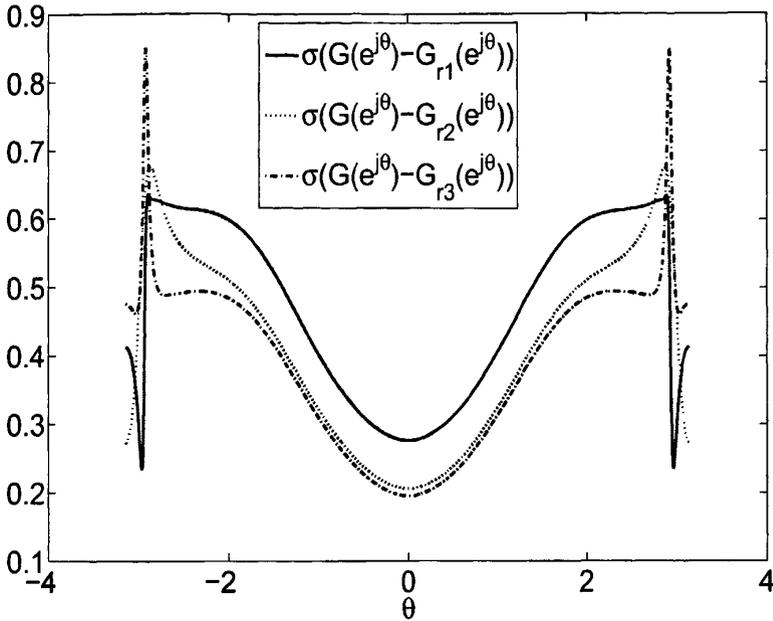


图 4.1 例4.1中误差传递函数在全频范围内的奇异值分析

Fig. 4.1 Singular value analysis of the error transfer functions over entire frequency interval in Example 4.1.

从这个例子看出，对全频范围的 H_∞ 模型降阶问题，本章中的方法要明显好于采用平衡截断法得到的逼近效果，并可以进一步减小现有方法^[127]中的保守性。

4.3 离散线性系统的 H_2 模型降阶

4.3.1 问题描述

本节的目的是对给定的高阶模型(4.1)求取一个降阶模型(4.3)满足

- (1). 降阶模型(4.3)保持高阶模型的稳定性(4.1)
- (2). 降阶模型(4.3)对高阶模型(4.1)的逼近性能满足 H_2 性能指标 γ , 即:

$$\min \|G_r(e^{j\theta}) - G(e^{j\theta})\|_2 < \gamma$$

4.3.2 离散线性系统的 H_2 模型降阶

引理 4.1: ^[146]考虑离散线性系统(4.1), 下列说法等价:

- (1). 离散系统(4.1)稳定且满足 H_2 性能指标 γ

(2). 存在矩阵 $P = P^T > 0, G, F, Z$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P - G - G^T & * & * \\ AG - F^T & -P + AF + F^T A^T & * \\ CG & -CF & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ B & -P & * \\ D & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma^2$$
(4.24)

定理 4.5: 如果存在矩阵 $G_1, G_2, G_3, F_2, F_3, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r, Z = Z^T > 0$, 常数 λ , 以及矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} > 0$$

满足下列矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * & * \\ B_r & -P_1 & * & * \\ B & -P_2 & -P_3 & * \\ -D_r + D & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma^2$$
(4.25)

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= P_1 - G_1 - G_1^T \\ \Phi_{21} &= P_2 - G_2 - \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T G_1^T \\ \Phi_{31} &= A_r - \lambda G_1^T \\ \Phi_{41} &= AG_2 - \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \end{bmatrix}^T G_1^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{51} &= -Cr + CG_2 \\
 \Phi_{22} &= P_3 - G_3 - G_3^T \\
 \Phi_{32} &= A_r \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} - F_2^T \\
 \Phi_{42} &= AG_3 - F_3^T \\
 \Phi_{52} &= -C_r \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + CG_3 \\
 \Phi_{33} &= -P_1 + \lambda A_r + \lambda A_r^T \\
 \Phi_{43} &= -P_2 + AF_2 + \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \end{bmatrix} A_r^T \\
 \Phi_{44} &= -P_3 + AF_3 + F_3^T A^T
 \end{aligned}$$

则可如下式所示构造一个的稳定的降阶系统模型

$$G_r(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_r G_1^{-1} & \tilde{B}_r \\ \hline \tilde{C}_r G_1^{-1} & \tilde{D}_r \end{array} \right] \quad (4.26)$$

满足下面的 H_2 逼近性能指标

$$\|G(e^{j\theta}) - G_r(e^{j\theta})\|_2 < \gamma \quad (4.27)$$

证明: 根据关系式(4.26)可将(4.29)写为:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} P - G - G^T & * & * & & & \\ \bar{A}G - F^T & -P + \bar{A}F + F^T \bar{A}^T & * & & & \\ \bar{C}G & -\bar{C}F & -I & & & \\ \hline -Z & * & * & & & \\ \bar{B} & -P & * & & & \\ \bar{D} & 0 & -I & & & \end{array} \right] < 0 \\
 & \text{Trace}(Z) < \gamma^2
 \end{aligned}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & \begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix} \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \lambda G_1 & \begin{bmatrix} \lambda G_1 & 0 \end{bmatrix} \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

结合引理4.3.1可知误差系统(4.5)稳定且满足 H_2 性能指标 γ 。证毕。

如果令定理4.5中的 λ, F_2, F_3 等于零, 则可得到下面的推论。

4.3.3 数值算例与仿真

例4.2: 考虑下图所示的一个带有弹簧-挡板-质量体(Spring-Damper-Mass)的机械系统, 该例子来源于文献[126],

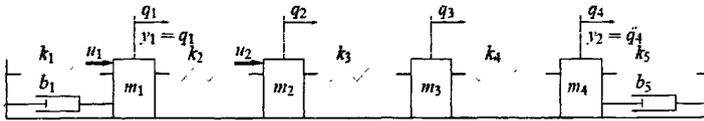


图 4.2 带有四个弹簧-挡板-质量体的机械系统。

Fig. 4.2 A four Spring-Damper-Mass mechanical system.

该机械系统的运动方程为:

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = Du$$

$$y = Pq + Q\dot{q}$$

其中

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_5/m_4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4/m_4 & -(k_4 + k_5)/m_4 \end{bmatrix}$$

$m_1 = m_2 = m_4 = 1, m_3 = 2, k_1 = k_3 = k_4 = 1, k_2 = 2, k_5 = 4, b_1 = 2, b_5 = 1$

定义状态向量为 $x = [q \quad \dot{q}]$, 则该系统可以用如下一个8维的状态空间来描述:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

现在我们按照文献[126]的做法, 考虑该系统在零阶采样保持下的离散模型, 并取采样周期为 $T = 0.25s$, 可得系统的离散模型为:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_8 x(k) + B_8 u(k) \\ y(k) &= C_8 x(k) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_8 &= \begin{bmatrix} 0.9219 & 0.0516 & 0.0003 & 0.0000 & 0.1907 & 0.0045 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0607 & 0.9084 & 0.0306 & 0.0001 & 0.0045 & 0.2423 & 0.0026 & 0.0000 \\ 0.0002 & 0.0153 & 0.9691 & 0.0152 & 0.0000 & 0.0013 & 0.2474 & 0.0012 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0279 & 0.8597 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0024 & 0.2099 \\ -0.5630 & 0.3678 & 0.0045 & 0.0000 & 0.5405 & 0.0516 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.4710 & -0.7165 & 0.2397 & 0.0013 & 0.0516 & 0.9084 & 0.0306 & 0.0001 \\ 0.0025 & 0.1199 & -0.2449 & 0.1177 & 0.0001 & 0.0153 & 0.9691 & 0.0140 \\ 0.0000 & 0.0012 & 0.2075 & -1.0482 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0279 & 0.6498 \end{bmatrix} \\ B_8 &= \begin{bmatrix} 0.0262 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1907 & 0.0045 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0003 & 0.0308 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0045 & 0.2423 & 0.0013 & 0.0000 \end{bmatrix}^T \\ C_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这里我们的目标是求一个 H_2 逼近性能下的降阶模型, 当选择降阶模型阶数为2时, 根据本章中的 H_2 模型降阶方法(推论4.2)可得降阶模型为:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.8466 & 0.1274 \\ 0.1162 & 0.6639 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.0730 & 0.0574 \\ 0.0348 & 0.0274 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0.7598 & 0.1441 \\ -0.0934 & 0.4286 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当选择降阶模型阶数为4时, 得到:

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \begin{bmatrix} 0.9317 & -0.0198 & -0.0684 & -0.0632 \\ -0.0396 & 0.9686 & -0.2258 & 1.3016 \\ 0.0232 & 0.0423 & 0.8703 & -0.6052 \\ 0.1048 & -0.1339 & 0.0561 & 0.2025 \end{bmatrix} \\
 B_4 &= \begin{bmatrix} 0.0771 & 0.0376 & 0.0163 & 0.0036 \\ 0.0586 & 0.0322 & 0.0089 & 0.0037 \end{bmatrix}^T \\
 C_4 &= \begin{bmatrix} 0.7576 & 0.0545 & 0.9944 & -0.6888 \\ 0.9922 & -0.4943 & -0.8160 & -9.9249 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

为了说明本节中 H_2 模型降阶方法的优越性, 我们给出了下表, 以供比较。

表 4.3 例4.2中 H_2 模型降阶计算结果与比较。

表 4.4 H_2 model reduction results and comparison for example 4.2.

	本文方法(推论4.2)	平衡截断	[126]
$\ G_8(z) - G_4(z)\ _2$	0.0513	0.1595	0.1623
$\ G_8(z) - G_2(z)\ _2$	0.0565	0.1899	0.1936

4.4 本章小结

本章在上一章的基础上, 针对离散时间线性系统的 H_∞ 、 H_2 模型降阶问题给出了基于线性矩阵不等式方法的处理结果。得到这些方法的主要工具依然是广义KYP引理和投影引理(Finsler引理), 导出这些结果的技术手段和上一章中使用的类似, 故本章中没有给出详细的证明结果。仿真算例说明了本章中方法的有效性与优越性。

第五章 离散线性系统的静态输出反馈控制

5.1 引言

上两章针对系统分析中的模型降阶问题,给出了基于线性矩阵不等式的处理方法。本章起开始考虑一类重要的降阶控制器,即静态输出反馈控制器的设计问题。从工程实践上来说,静态输出反馈控制器做为阶数最低,结构最为简单,最易实现的控制器而倍受工程师的青睐;从理论上讲,任意阶数的控制器设计问题都可以转化为一个增广系统的静态输出反馈问题^[150,189]。遗憾的是静态输出反馈控制问题目前为止仍是控制界的一个难题^[150,157],大量的研究人员致力通过各种数学工具来尽可能的解决此问题^[161-191]。

在以线性矩阵不等式为工具的静态输出反馈控制研究中有两个不同的研究方向。一种是找出一个合适的迭代方式,进而将其转换为一个迭代的线性矩阵不等式求解问题^[171-177],该方法取得了广泛的应用,但其算法的收敛性,可靠性有待进一步的研究。另一个方向是寻找一个充分性的线性矩阵不等式条件^[178-191],这种方法算法简单,但其保守性有时会比较大会比较大,因此如何进一步减少这类方法中设计条件的保守性就成为是一个非常最要的问题。

本章针对线性离散时间系统,考虑了包括镇定控制、 H_∞ 控制、正实控制在内的的各种静态输出反馈控制问题。首先针对镇定控制,给出了一组基于线性矩阵不等式的设计条件。这些条件通过Finsler引理以一种简洁统一的方式导出,从中可以清楚的看到它们之间的区别与联系,也可以清楚的看出这些结果在现有方法^[188,190]基础上的改进之处,并通过数值例子说明了文[188]中结果与文[190]中结果的互不包含性,这也是过去文献中未指明之处。然后将镇定控制的设计思想应用于 H_∞ 以及正实静态输出反馈控制器的设计上,并给出了相应的设计条件。数值仿真例子进一步表明本章中方法的有效性和优越性。

5.2 离散线性系统的镇定静态输出反馈控制

5.2.1 问题描述

考虑下面的离散线性系统:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\quad (5.1)$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $y(k) \in R^q$ 是可测输出向量, $u(k) \in R^m$ 是控制输入向量。这里假设系统为开环不稳定的。

这里考虑系统(5.1)的镇定控制, 即设计静态输出反馈控制器

$$u(k) = Ky(k) \quad (5.2)$$

使得闭环系统

$$x(k+1) = (A + BKC)x(k) \quad (5.3)$$

渐近稳定。

注 5.1: 不失一般性, B/C 可假定为列满秩/行满秩, 设可逆矩阵 T_b, T_c 满足:

$$T_b B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$C T_c = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

对于给定的 B/C , 这个对应的 T_b/T_c 一般不是唯一的。一个特殊的 T_b/T_c 可以通过下面的公式求得:

$$T_b = \begin{bmatrix} (B^T B)^{-1} B^T \\ (B^{T\perp})^T \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$T_c = \begin{bmatrix} C^T (C C^T)^{-1} & C^\perp \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

其中 $B^{T\perp}, C^\perp$ 表示由 B, C 核空间正交基所构成的矩阵。

5.2.2 离散线性系统的镇定静态输出反馈控制器设计

基于上小节中给出的系统输出矩阵 C 及输入矩阵 B 的零空间的性质, 下面给出了新的镇定静态设计控制器设计方法。为了下面研究以及表述的方便, 首先给出如下引理

引理 5.1: 下面说法成立

(i): 如果矩阵 G 是方阵并满足 $G + G^T > 0$, 那么 G 可逆。

(ii): 如果矩阵 T 可逆并且矩阵 $G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ 且满足

$$TG + G^T T^T > 0 \quad (5.8)$$

那么 G_{11} 可逆。

(iii): 如果矩阵 T 可逆并且矩阵 $G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ 且满足

$$TGT^T + TG^T T^T > 0 \quad (5.9)$$

那么 G_{11} 可逆。

证明: (i): 因为 $G + G^T > 0$, 所以对于任意的非零向量 x 都有: $x^T G x = x^T (G + G^T) x / 2 > 0$, 于是 $x^T G x \neq 0$, 进而 G 可逆。

(ii): 从(5.8)和(i)中的结论, 我们有 TG 可逆。因 T 可逆, 所以 G 可逆, 进而 G_{11} 可逆。

(iii): 从(5.9)和(i)中的结论, 我们有 TGT^T 可逆。因 T 可逆, 所以 G 可逆, 进而 G_{11} 可逆。证毕。

定理 5.1: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 以及带矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} P - He(T_c G) & * \\ (AT_c G + BY) - (T_c F)^T & He(AT_c F + \lambda BY) - P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为:

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.12)$$

证明: 由矩阵 G, F, Y 的特殊结构以及 $K = Y_1 G_{11}^{-1}$ 可得:

$$\begin{aligned} KC_2 TG &= K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} T^{-1} TG = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} KG_{11} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} = Y \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} KC_2 TF &= K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} T^{-1} TF = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda KG_{11} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda Y_1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda Y \end{aligned} \quad (5.14)$$

根据上式(5.13)和(5.14), 不等式(5.11)等价于:

$$\begin{bmatrix} P - He(T_c G) & * \\ ((A + BKC)T_c G - (T_c F)^T & He((A + BKC)T_c F) - P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.15)$$

注意到上式(5.15)又可整理为:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}} + He \left(\underbrace{\begin{bmatrix} G^T T_c^T \\ F^T T_c^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_{TS,1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -I \\ (A + BKC) \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \right)^T \quad (5.16)$$

现在考虑闭环系统(5.16)的对偶系统, 如下所示:

$$\hat{x}(k+1) = (A + BKC)^T \hat{x}(k) \quad (5.17)$$

从这个对偶系统状态方程(5.3)可知下列等式成立

$$\begin{bmatrix} -I \\ (A + BKC) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.18)$$

根据不等式(5.15)及等式(5.19)并应用Finsler引理可得:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

为系统(5.17)选择一个Lyapunov函数

$$V(k) = x^T(k)Px(k)$$

其中 P 为式(5.19)中矩阵变量 P 的一个可行解, 则从式(5.19)容易得知

$$\Delta V(k) = \hat{x}^T(k+1)P\hat{x}(k+1) - \hat{x}^T(k)P\hat{x}(k) < 0 \quad (5.20)$$

这就说明系统(5.17)稳定, 此外,从(5.11)和引理5.1, 我们有 G_{11} 可逆, 于是 $Y_1 = KG_{11}$ 保证(5.12)式成立。证毕。

注 5.2: 在定理5.1中给出了一个新的离散线性系统的静态输出反馈镇定控制器的设计条件, 其中用到一个常数 λ , 对此可以通过一个简单的线性搜索算法来进行处理。为方便后面的叙述, 我们称式(5.16)中的三个矩阵 $\mathcal{P}, \mathcal{M}_{T5.1}, \mathcal{H}$ 为别为系统性能矩阵、乘子矩阵、系统参数矩阵、并称乘子矩阵中的变量 G 和 F 为辅助变量。这里可以通过选取合适的乘子矩阵 $\mathcal{M}_{T5.1}$ 来实现系统参数矩阵 \mathcal{H} 与系统性能矩阵 \mathcal{P} 之间的解耦, 并通过限制乘子矩阵中的矩阵变量 G, F 为特殊三角结构形式进而得到凸的控制器设计条件。如果令其中的辅助变量 $F = 0$, 即采用乘子矩阵: $\mathcal{M}_{C5.1} = \begin{bmatrix} G^T T_c^T \\ 0 \end{bmatrix}$, 便可以得到文献[190]中给出设计方法, 这里我们以一个推论的形式给出。

推论 5.1: ^[190]如果存在对称正定阵 P , 和矩阵 G, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} P - He(T_c G) & * \\ (AT_c G + BY) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.22)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为:

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.23)$$

注 5.3: 与推论5.1相比, 定理5.1中引入了一个额外的辅助变量 F , 这样就为控制器的设计提供了更大的解空间, 进而减小了推论5.1^[190]设计条件中的保守性。

现在我们给出一个不同于定理5.1的设计方法。

定理 5.2: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} P - He(T_c G T_c^T) & * \\ (A T_c G T_c^T + B Y T_c^T) - (T_c F T_c^T)^T & He(A T_c F T_c^T + \lambda B Y T_c^T) - P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.25)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为:

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.26)$$

证明: 证明过程同定理5.1的证明类似, 此处不再赘述, 不同之处在于选取乘子矩阵为 $M_{T5.2} = \begin{bmatrix} T_c G^T T_c^T \\ T_c F^T T_c^T \end{bmatrix}$ 。证毕

从定理5.2出发, 还可以通过令乘子矩阵为: $M_{C5.2} = \begin{bmatrix} T_c G^T T_c^T \\ 0 \end{bmatrix}$ 得到文[188]中的设计结果, 这里以推论的形式给出。

推论 5.2: ^[188] 如果存在对称正定阵 P 和矩阵 G, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

满足下列不等式: 满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} P - He(T_c G T_c^T) & * \\ (A T_c G T_c^T + B Y T_c^T) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.28)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为:

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.29)$$

注 5.4:

(1): 同样的, 由于定理5.2在推论5.2的基础上引入了额外的辅助变量 F , 因此定理5.2具有更少的保守性。另外推论5.2 和文[188] 中的设计条件等价, 只是形式有所不同, 通过对(5.28)式做一个等价的变换便可得到文[188]中的形式。

(2): 注意到当系统的输出矩阵 C 为特殊形式即 $C = [I \ 0]$ 时, 定理5.1(推论5.1)和定理5.2(推论5.2) 中的设计条件是完全相同的。当系统输出矩阵 C 为任意给定时, 定理5.1(推论5.1) 和定理5.2(推论5.2)之间并不存在包含关系, 在本节后面给出的数值例子中我们可以清楚的看到对有些例子定理5.1(推论5.1) 有解而定理5.2(推论5.2) 无解, 反之亦然, 也就是说它们是平行的两个结果。在实际应用中, 可以同时考虑采用这两个定理的设计条件, 以减少无法设计出控制器的情况出现。

注 5.5: 上面给出的静态输出反馈控制器结果均是在基于系统输出矩阵 C 的零空间的一些性质, 但由于这些设计条件仍然为充分条件, 因此不可避免的具有一定的保守性。当使用上面的两个定理(定理5.1和定理5.2)均无法找到可行解时, 一个办法就是考虑系统(5.1)的对偶系统

$$\begin{aligned} x'(k+1) &= A^T x'(k) + C^T u'(k) \\ y'(k) &= B^T x'(k) \end{aligned} \quad (5.30)$$

然后对该对偶系统(5.30)利用上面的结果求解, 若存在可行的控制器增益 K^* , 则出线性系统的对偶性质可知对给定系统的(5.1)而言, 存在静态输出反馈控制器(5.2) $u(t) = K^{*T} y(t)$ 使得闭环系统(5.3)稳定, 这样就可以进一步减少无法求解的情况出现。当然这样的方法也可以直接从系统(5.1)中输入矩阵 B 的零空间性质出发, 得到与上面的结果类似的设计条件。为完整起见, 下面我们不加证明的给出从系统输入矩阵 B 零空间性质考虑的一组设计结果

定理 5.3: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

满足下列不等式

$$\begin{bmatrix} P - He(GT_b) & GT_bA + LC - (FT_b)^T \\ * & He(FT_bA + \lambda LC) - P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.32)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为: $K = G_{11}^{-1}L_1$ 。

推论 5.3: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

满足下列不等式

$$\begin{bmatrix} P - He(GT_b) & GT_bA + LC \\ * & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.34)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为: $K = G_{11}^{-1}L_1$ 。

定理 5.4: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

满足下列不等式

$$\begin{bmatrix} P - He(T_b^T GT_b) & T_b^T GT_bA + T_b^T LC - (T_b^T FT_b)^T \\ * & He(T_b^T FT_bA + \lambda T_b^T LC) - P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.36)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为: $K = G_{11}^{-1}L_1$ 。

推论 5.4: 如果存在对称正定阵 P 和矩阵 G, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

满足下列不等式

$$\begin{bmatrix} P - He(T_b^T GT_b) & T_b^T GT_bA + T_b^T LC \\ * & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (5.38)$$

那么闭环系统(5.3)渐近稳定, 其中控制器(5.2)的增益矩阵为: $K = G_{11}^{-1}L_1$ 。

5.2.3 数值算例

例5.1: 考虑下面给出的一个离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.1677 & 1.3218 \\ -1.0199 & -0.7873 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.9336 \\ 0.9751 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

在本例中, 由于这里输出矩阵 C 为特殊的 $[I \ 0]$ 结构, 因此对本例而言, 定理5.1和定理5.2是完全等价的, 同样推论5.1^[190]和推论5.2^[188]也是等价的。本例中的系统开环不稳定, 应用定理5.1(定理5.2)和推论5.1^[190](推论5.2^[188])来对其进行静态输出控制器设计得到的计算结果如下表所示

表 5.1 例5.1中的静态输出反馈控制器设计结果。

Table 5.1 Static output feedback control design results in Example 5.1.

方法	可行性	控制器增益 K	λ
定理5.1			
定理5.2	可行	0.9374	0.23
推论5.1 ^[190]			
推论5.2 ^[188]	不可行	—	

从上面的计算结果可以看出, 定理5.1(定理5.2)由于添加了一个额外的辅助变量 F , 从而减小了推论5.1^[190](推论5.2^[188])中设计条件的保守性, 进而说明了本文方法的优越性。

例5.2: 考虑下面给出的两个离散系统

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \quad x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.2719 & -0.6321 \\ 0.6409 & -0.8411 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -2.9528 \\ -1.7955 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 3.3627 & 0.8557 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2: \quad x(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.9076 & 1.4624 \\ -0.9809 & -1.0706 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1708 \\ 0.4504 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0.3914 & 0.4359 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

在本节中我们曾指出推论5.1和推论5.2 是两个平行的结果，同理定理5.1和定理5.2 也是平行的结果，见注5.4。下面针对这两个系统的静态输出反馈控制器设计来说明这个结论的正确性。应用推论5.1和推论5.2对系统 (Σ_1, Σ_2) 设计静态输出反馈控制器的计算结果如下表所示

表 5.2 例5.2中对系统 Σ_1, Σ_2 的静态输出反馈控制器设计结果。

Table 5.2 Static output feedback control design results for systems Σ_1, Σ_2 in Example 5.1.

	推论5.2 ^[190]	推论5.2 ^[188]
Σ_1	不可行	$K = 0.0526$
Σ_2	$K = 4.5027$	不可行

从上表可以看出，对 Σ_1 而言，推论5.2可以找到一个可行解，而推论5.1此时的设计条件不可行，对 Σ_2 则有相反的结果，这就充分说明了推论5.1和推论5.2之间的平行性。同理，定理5.1和定理5.2也是平行的结果。

现在我们考虑下面的这个离散系统

$$\Sigma_3: \begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9108 & 0.2151 \\ 1.6523 & -0.2127 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.0312 \\ 0.7659 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0.4082 & -1.5107 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

对该系统而言，推论5.1和推论5.2均无法找到可行解，而此时利用对偶关系，也就是使用推论5.3和推论5.4却可以找到一个合适的控制器增益，见下表

表 5.3 例5.2中对系统 Σ_3 的静态输出反馈控制器设计结果。

Table 5.3 Static output feedback control design results for systems Σ_3 in Example 5.1.

	推论5.1 ^[190]	推论5.2 ^[188]	推论5.3	推论5.4
Σ_3	不可行	不可行	$K = 0.3865$	$K = 0.3713$

从对 Σ_3 的设计结果中可以看出，从系统的输入矩阵 B 的零空间性质出发，即采用(推论5.3和推论5.4)可以减小只采用(推论5.1和推论5.2)无法求解的可能性。同理，四个定理之间也有类似的关系。所以在实际应用中，为尽可能的找到一个可

镇定开环系统(5.1)的静态输出反馈控制器(5.2), 可逐个尝试本章中的四个定理。

5.3 离散线性系统的 H_∞ 静态输出反馈控制

5.3.1 问题描述

考虑下面的离散线性系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k) \\ z(k) &= C_1x(k) + D_{11}\omega(k) + D_{12}u(k) \\ y(k) &= C_2x(k) \end{aligned} \quad (5.39)$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $y(k) \in R^q$ 是可测输出向量; $z(k) \in R^p$ 是被控输出向量, $w(k) \in R^p$ 是能量有界的干扰输入向量, $u(k) \in R^m$ 是控制输入向量。

本节的设计任务是设计静态输出反馈控制器(5.2)使得闭环系统

$$\begin{aligned} x_{cl}(k+1) &= A_{cl}x_{cl}(k) + B_{cl}\omega(k) \\ z(k) &= C_{cl}x_{cl}(k) + D_{cl}\omega(k) \end{aligned} \quad (5.40)$$

渐近稳定且满足满足 H_∞ 性能指标 γ , 其中

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2KC_2 & B_1 \\ \hline C_1 + D_{12}KC_2 & D_{11} \end{array} \right] \quad (5.41)$$

5.3.2 离散线性系统的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计

在本小节中我们将给出对离散系统(5.39)的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计方法。

定理 5.5: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

满足下列不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ \Phi_{31} & B_1 & He(AT_c F + \lambda B_2 Y) - P & * \\ \Phi_{41} & D_{11} & (C_1 T_c F + \lambda D_{12} Y) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.43)$$

其中

$$\begin{aligned} T_c &= \left[C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} \quad C_2^\perp \right] \\ \Phi_{11} &= P - He(T_c G) \\ \Phi_{31} &= (A T_c G + B_2 Y) - (T_c F)^T \\ \Phi_{41} &= C_1 T_c G + D_{12} Y \end{aligned}$$

那么闭环系统(5.40)稳定且满足 H_∞ 指标 γ ，其中控制器(5.2)的增益矩阵为：

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.44)$$

证明：根据(5.42)可将不等式(5.43)可整理为：

$$\begin{bmatrix} P - He(T_c G) & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ A_{cl} T_c G - (T_c F)^T & B_{cl} & He(A_{cl} T_c F) - P & * \\ C_{cl} T_c G & D_{cl} & C_{cl} T_c F & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.45)$$

注意到上式(5.45)又等价于

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_P + He \left(\underbrace{\begin{bmatrix} G^T T_c^T & 0 \\ F^T T_c^T & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{75.3.1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -I & 0 \\ A_{cl} & B_{cl} \\ 0 & -I \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix}^T}_H \right) < 0 \quad (5.46)$$

考虑(5.40)的对偶系统

$$\begin{aligned}\hat{x}_d(k+1) &= A_d^T \hat{x}_d(k) + C_d^T \hat{\omega}(k) \\ \hat{z}(k) &= B_d^T \hat{x}_d(k) + D_d^T \hat{\omega}(k)\end{aligned}\tag{5.47}$$

则由该对偶系统的状态方程(5.47)可知下列等式成立

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ A_d & B_d \\ 0 & -I \\ C_d & D_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ \hat{z}(k) \\ \hat{\omega}(k) \end{bmatrix} = 0\tag{5.48}$$

根据不等式(5.46)及等式(5.48)并应用Finsler引理可得:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ \hat{z}(k) \\ \hat{\omega}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ \hat{z}(k) \\ \hat{\omega}(k) \end{bmatrix} < 0\tag{5.49}$$

选取下面的Lyapunov函数

$$V(k) = \hat{x}^T(k) P \hat{x}(k)$$

其中 P 为不等式(5.43)中的对称正定矩阵 P , 由不等式(5.49)可得

$$V(\hat{x}(k+1)) - V(\hat{x}(k)) + \hat{z}^T(k) \hat{z}(k) - \gamma^2 \hat{\omega}^T(k) \hat{\omega}(k) < 0\tag{5.50}$$

对上式两边从0到 ∞ 求和得:

$$V(\infty) - V(0) + \sum_{i=0}^k (\hat{z}^T(i) \hat{z}(i) - \gamma^2 \hat{\omega}^T(i) \hat{\omega}(i)) < 0\tag{5.51}$$

注意到不等式(5.43)中已包含了对偶系统(5.47)稳定的条件, 所以 $V(\infty) = 0$, 进而在零初始条件下有 $\sum_0^{\infty} \hat{z}^T(k) \hat{z}(k) < \gamma^2 \sum_0^{\infty} \hat{\omega}^T(k) \hat{\omega}(k)$, 也就说明对偶系统(5.47)的 H_{∞} 性能小于 γ 。由线性系统的对偶原理, 可知闭环系统(5.40)和系

统(5.47) 具有相同的 H_∞ 性能。此外,从不等式(5.43)和引理5.1,我们有 G_{11} 可逆, 于是 $Y_1 = KG_{11}$ 保证(5.44)式成立。证毕。

定理 5.6: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

满足下列不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ \Phi_{31} & B_1 & He(AT_cFT_c^T + \lambda B_2YT_c^T) - P & * \\ \Phi_{41} & D_{11} & (C_1T_cFT_c^T + \lambda D_{12}YT_c^T) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.53)$$

其中

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{bmatrix} C_2^T(C_2C_2^T)^{-1} & C_2^\perp \end{bmatrix} \\ \Phi_{11} &= P - He(T_cGT_c^T) \\ \Phi_{31} &= (AT_cGT_c^T + B_2YT_c^T) - (T_cFT_c^T)^T \\ \Phi_{41} &= C_1T_cGT_c^T + D_{12}YT_c^T \end{aligned}$$

那么闭环系统(5.40)稳定且满足 H_∞ 指标 γ , 其中控制器(5.2)的增益矩阵为:

$$K = Y_1G_{11}^{-1} \quad (5.54)$$

证明: 其证明过程与定理5.5类似, 只需将式(5.46)中的乘子矩阵选为:

$$M_{T5.6} = \begin{bmatrix} T_cG^TT_c^T & 0 \\ 0 & I \\ T_cF^TT_c^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.55)$$

其余证明部分此处不再赘述。

注 5.6:

(1): 定理5.5和定理5.6给出了 H_∞ 静态输出反馈控制器的设计条件, 其中的常

数 λ 可以通过简单的线性搜索处理。和上一节一样，这里也可以令上面两个定理中用到的辅助变量 F 等于零从而得到保守性较大但更为简单的设计条件。特别需要指出的是，如果将定理5.6中用到的乘子矩阵和辅助变量选择为：

$$M_{T5.3.1} = \begin{bmatrix} G^T T_c^T & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.56)$$

那么定理5.6便可退化为文[189]中给出的结果。

(2): 对一个线性离散系统而言其一般性的描述为下式^[1, 11]

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{11} \omega(k) + D_{12} u(k) \\ y(k) &= C_2 x(k) + D_{21} \omega(k) \end{aligned} \quad (5.57)$$

在上面给出的两个定理均是针对 $D_{21} = 0$ 这种情形下给出的 H_∞ 设计结果。这个 $D_{21} = 0$ 的假设显然会限制上面方法的应用范围，如何移除这个限制将是我们下一步工作的重点，需要指出的是在现有的一些文献^[189]中也常考虑 $D_{21} = 0$ 这个假设。和上节一样，我们也可以容易的给出以输入矩阵 B_2 的零空间为基础的设计结果，这种情况下不需假设 $D_{21} = 0$ 但同时要给出另一个假设即 $D_{12} = 0$ ，具体的相应结果此处不再赘述。

5.3.3 数值算例

例5.3: ^[189]考虑一个离散时间系统(5.39), 其参数为:

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0.3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.6 & -0.6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

其中 α 为一个大于零的常数，下面我们就 α 取不同值的情况下应用本节中的结果对其设计 H_∞ 静态输出反馈控制器，为方便比较，这里将文[189]中方法给出的设计

结果也一并给出, 详见下表

表 5.4 例5.3中 H_∞ 静态输出反馈控制器的设计结果。

Table 5.4 H_∞ static output feedback controller design results in Example 5.3.

		定理5.6	[189]
$\alpha = 3.0$	K	-0.9866 -0.1907	-1.0192 -0.3760
	γ	10.1240	33.5548
	$\ H_{zw}\ _\infty$	9.1140	23.9512
	λ	-0.28	—
$\alpha = 3.1$	K	-1.0097 -0.1564	-1.0442 -0.3441
	γ	13.0519	97.3011
	$\ H_{zw}\ _\infty$	11.1999	48.2416
	λ	-0.29	—
$\alpha = 3.2$	K	-1.0318 -0.1224	×
	γ	17.5058	×
	$\ H_{zw}\ _\infty$	13.9340	×
	λ	-0.30	—
$\alpha = 3.3$	K	-1.0530 -0.0891	×
	γ	25.2006	×
	$\ H_{zw}\ _\infty$	17.6014	×
	λ	-0.31	—

表5.4中 $\|H_{zw}\|_\infty$ 为闭环系统的 H_∞ 范数, 从表5.4中容易看出, 文中的方法要明显优于文献[189]中给出的同类方法。这是由于一方面我们采用了三角结构的辅助变量 G , 而非文献[189]中的对角结构; 另一方面是由于新引入的辅助变量 F 。

5.4 离散线性系统的正实静态输出反馈控制

做为许多实际系统如无源电路网络等中的一个重要特性, 正实性以及正实分析长期以来受到了许多研究人员的关注^[102, 148]。对一些开环不满足正实性的系统, 有时候需要设计控制器使得闭环系统正实, 如[153], 但正实控制的相关结果相对较少[147], 而考虑静态输出反馈正实控制的结果更为少见。

5.4.1 问题描述

本节的目的依然是为系统(5.39)设计一个静态输出反馈控制器(5.2), 使得闭环系统(5.40)稳定且具有严格正实性。

5.4.2 离散线性系统的正实静态输出反馈控制器设计

定理 5.7: 如果存在对称正定阵 P , 常数 λ 和矩阵 G, F, Y , 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * \\ \Phi_{21} & He(AT_c F + \lambda B_2 Y) - P & * \\ \Phi_{31} & -B_1^T + C_1 T_c G + \lambda D_{12} Y & -He(D_{11}) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.60)$$

其中

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{bmatrix} C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} & C_2^\perp \end{bmatrix} \\ \Phi_{11} &= P - He(T_c G) \\ \Phi_{31} &= (AT_c G + B_2 Y) - (T_c F)^T \\ \Phi_{41} &= C_1 T_c G + D_{12} Y \end{aligned}$$

那么闭环系统稳定且是严格正实的, 此时控制器(5.2)的增益矩阵可取为:

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.61)$$

证明: 证明方法同上一章中定理5.5的证明类似, 这里只给出一个简略的说明。不等式(5.60)可经简单的变换整理为:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix}}_P + He \left(\underbrace{\begin{bmatrix} G^T T_c^T & 0 \\ F^T T_c^T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}}_{M_{T5.4.1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -I & 0 \\ A_{cl} & B_{cl} \\ 0 & -I \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix}^T}_{\Xi} \right) < 0 \quad (5.62)$$

类似的由定理5.5的证明方法和并应用Finlser引理可知不等式(5.60)成立意味着存在一个Lyapunov函数

$$V(k) = x^T(k) P x(k) \quad (5.63)$$

其中 P 为不等式(5.60)中 P 的一个可行解。同样的，可以证明

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) - z^T(k)\omega(k) - \omega^T(k)z(k) < 0 \quad (5.64)$$

证明的其余部分可参考定理5.5的证明过程，此处不再赘述。得证。

如果将定理5.7中的乘子矩阵选择为：

$$M_{T5.4.2} = \begin{bmatrix} T_c G^T T_c^T & 0 \\ T_c F^T T_c^T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

则可以得到下面的一个与定理5.7平行的正实静态输出反馈控制器设计的结果。

定理 5.8: 如果存在对称正定阵 P ，常数 λ 和矩阵 G, F, Y ，其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \lambda G_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

满足下列不等式：

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * \\ \Psi_{21} & He(AT_c F T_c^T + \lambda B_2 Y T_c^T) - P & * \\ \Psi_{31} & -B_1^T + C_1 T_c G T_c^T + \lambda D_{12} Y T_c^T & -He(D_{11}) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.66)$$

其中

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{bmatrix} C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} & C_2^\perp \end{bmatrix} \\ \Psi_{11} &= P - He(T_c G T_c^T) \\ \Psi_{21} &= (A T_c G T_c^T + B_2 Y T_c^T) - (T_c F T_c^T)^T \\ \Psi_{31} &= C_1 T_c G T_c^T + D_{12} Y T_c^T \end{aligned}$$

那么闭环系统稳定且是严格正实的，此时控制器(5.2)的增益矩阵可取为：

$$K = Y_1 G_{11}^{-1} \quad (5.67)$$

5.4.3 数值算例

例5.4: 考虑下面一个离散系统(5.39), 其参数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6176 & -0.3298 & -0.4373 & -0.3107 & 0.7515 \\ 0.5473 & -0.0607 & -0.5942 & -0.1344 & -0.4492 \\ -0.1606 & 0.1825 & 0.6208 & 0.4217 & -0.2636 \\ 0.9758 & 0.4382 & 0.2300 & 0.5051 & 0.8437 \\ -0.6483 & 0.3178 & 0.3022 & & \end{bmatrix}$$

该系统稳定, 但通过正实引理分析可知该系统开环情况下不具有正实性, 此时我们通过本节给出的正实控制器设计条件可以给出一个静态输出反馈控制器

$$u(k) = 1.4001y(k)$$

使得闭环系统为严格正实的。为进一步说明, 我们给出 $\sum_0^k u(i)y(i)$ 在开环和闭环情况下的响应曲线。

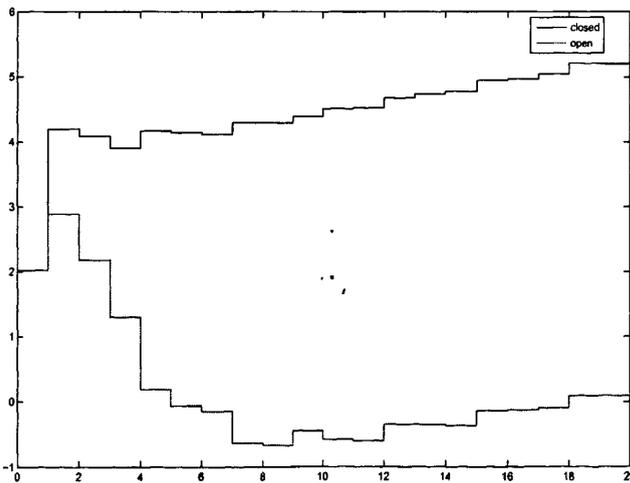


图 5.1 $\sum_0^k u(i)y(i)$ 在开环和闭环情况下的响应曲线。

Fig. 5.1 Response curves of $\sum_0^k u(i)y(i)$ under open-loop and closed-loop circumstances .

从上图可以清楚的看出,系统在开环情形下不具有正实性,而通过本节方法设计出的静态输出反馈控制器可以使得闭环系统具有正实性,这就说明了本节中给出的设计方法是有效的。

5.5 本章小结

本章针对线性离散时间系统,考虑了包括镇定控制、 H_∞ 控制、正实控制在内的各种静态输出反馈控制问题。首先针对镇定控制,给出了一组基于线性矩阵不等式的设计条件。这些条件通过Finsler引理以一种简洁统一的方式导出,从中可以清楚的看到它们之间的区别与联系,也可以清楚的看出这些结果在现有方法^[188, 190]基础上的改进之处,并通过数值例子说明了文[188]中结果与文[190]中结果的互不包含性,这也是过去文献中未指明之处。然后将镇定控制的设计思想应用于 H_∞ 以及正实静态输出反馈控制器的设计上,并给出了相应的设计条件。最后通过数值仿真例子进一步表明本章中方法的有效性和优越性。

第六章 离散线性不确定系统的静态输出反馈控制

6.1 引言

在实际控制系统中,由于工作状况变动、元器件的老化、物理参数的漂移、以及建模误差的缘故,被控对象的精确模型往往很难得到。以此为背景,鲁棒控制做为一个处理用不确定模型描述的控制系统分析和综合的方向在过去30年取得了巨大的发展。常见的不确定模型有范数有界不确定性^[11],仿射参数不确定性^[136],以及本文研究的对象即多胞不确定模型

对多胞不确定系统的分析,最早是采用共同Lyapunov函数,但是由此产生的保守性往往比较大。突破性的结果来自于Oliveira等在文[137]中给出的鲁棒稳定性分析结果,通过引入一个辅助变量,使得对每一个顶点均可对应选取一个Lyapunov变量,这种方法也常被称作参数依赖Lyapunov函数方法。该方法在此之后得到了进一步的发展和应用,文[138-141]中给出了保守性更少的鲁棒稳定性判据,文[142][188][146]给出了基于参数依赖Lyapunov函数方法的鲁棒 H_2 、鲁棒 H_∞ 性能分析结果。另外鲁棒正实性^[143,144]做为不确定系统分析中的一个重要概念也受到了一些学者的关注,Duan等在文[148]中给出连续时间系统的鲁棒正实判据,Zhou等在文[147]中还通过投影引理给出了一种对离散系统的使用参数依赖Lyapunov函数方法的鲁棒正实判据。

基于这些分析结果,一些控制器/滤波器的设计结果也发展了起来。文[145][146]中给出了鲁棒 H_2 和 H_∞ 滤波器设计结果;文[149][188][190]中给出了一些的鲁棒镇定静态输出反馈控制器设计结果。文[147]给出了鲁棒状态反馈正实控制器设计方法。但是相应的考虑 H_∞ 、正实性的鲁棒静态输出反馈控制设计条件在现有文献中并不多见。

本章针对带有多胞不确定性的离散系统,首先给出了其 H_∞ 、正实性的分析条件,并就对本章给出的鲁棒正实判据和现有文献^[147]中的鲁棒正实判据之间的关系进行了理论上的比较,证明了他们之间的关系。然后在上一章的基础上,给出了一组考虑 H_∞ 性能以及正实性的鲁棒静态输出反馈控制器设计条件,最后在此基础上通过引入参数依赖的松弛变量,进一步的减少了设计中的保守性。数值仿真例子进一步表明了本章中鲁棒正实分析条件的优越性以及设计条件的有效性。

6.2 离散不确定系统的性能分析

6.2.1 问题描述

考虑下面给出的线性不确定离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}\omega(k) \\ z(k) &= \mathcal{C}x(k) + \mathcal{D}\omega(k) \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $y(k) \in R^q$ 是可测输出向量; $z(k) \in R^p$ 是被控输出向量, $w(k) \in R^p$ 是能量有界的干扰输入向量, $u(k) \in R^m$ 是控制输入向量, 不确定矩阵 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ 属于下面给出的凸多面体:

$$P = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right], \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (6.2)$$

本节的目的是对不确定系统(6.1)的鲁棒有界实(即 H_∞ 性能)以及鲁棒正实性进行分析。现有文献中已有一些相应的分析结果, 这里将给出新的基于参数依赖Lyapunov函数方法的鲁棒正实判据, 并给出了其与现有结果之间的理论关系。另外为了完整起见, 还以引理的形式给出了文[146]等中出现的鲁棒有界实判据。

6.2.2 离散不确定系统的有界实判据

引理 6.1: ^[146] 如果存在矩阵 $P_i = P_i^T > 0, G, F$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_i - G - G^T & GA_i - F & 0 & GB_i \\ * & FA_i + A_i^T F^T - P_i & C_i^T & FB_i \\ * & * & -I & D_i \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6.3)$$

那么不确定系统(6.1)满足 H_∞ 性能指标 γ 。

证明: 这里我们简单的给出引理6.1的一种证明方式, 同样是采用上一章中使用的基于Finsler引理的方法。对上式(6.3)乘以 α_i 并求和可整理为:

$$\mathbb{P} + He(MH) < 0 \quad (6.4)$$

其中

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad \mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$$

$$\mathbb{M}_{L6.1} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ F & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -I \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.5)$$

证明的其余部分与上章中定理5.5的证明方法类似，此处不再赘述。证毕。

注 6.1: 这里我们称式(6.5)中的矩阵 \mathbb{P} , $\mathbb{M}_{L6.1}$, \mathbb{H} 分别为鲁棒性能矩阵, 乘子矩阵和系统参数矩阵。注意到在鲁棒性能矩阵 \mathbb{P} 中用到的Lyapunov变量 \mathcal{P} 依赖于不确定系统(6.1)中的参数 α_i , 所以这种引入辅助变量使得Lyapunov变量与系统参数矩阵解除耦合关系的方法也常被称为参数依赖Lyapunov函数方法, 这种方法可以非常显著的减小采用共同Lyapunov函数对不确定系统分析时的保守性。此外, 如果重新定义式(6.5)中的乘子矩阵为:

$$\mathbb{M}_{C6.1} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则可以得到同样采用参数依赖Lyapunov函数方法的一个推论。

推论 6.1: 如果存在矩阵 $P_i = P_i^T > 0, G$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_i - G - G^T & GA_i & 0 & GB_i \\ * & -P_i & C_i^T & \\ * & * & -I & D_i \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6.6)$$

那么不确定系统(6.1)满足 H_∞ 性能指标 γ 。

6.2.3 离散不确定系统的正实判据

下面给出针对不确定系统(6.17)的一个新的鲁棒正实判据。

定理 6.1: 如果存在矩阵 $P_i = P_i^T > 0$, G 和 F 使得下列不等式

$$\begin{bmatrix} P_i - G - G^T & G^T A_i^T - F & G^T C^T \\ * & He(A_i F) - P_i & F^T C_i^T - B_i \\ * & * & -D_i - D_i^T \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6.7)$$

那么不确定系统(6.1)鲁棒稳定且具有严格正实性。

证明: 对上式(6.7)乘以 α_i 并求和可整理为:

$$\mathbb{P} + He(\mathbb{M}\mathbb{H}) < 0 \quad (6.8)$$

其中

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$$

$$\mathbb{M}_{T6.1} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -I \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.9)$$

证明的其余部分与上章中定理5.3.3的证明方法类似, 此处不再赘述。证毕。

注 6.2: 和上小节中有界实分析的结果类似, 如果重新定义式(6.9)中的乘子 $\mathbb{M}_{T6.1}$ 为:

$$\mathbb{M}_{C6.2} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则可以得到同样采用参数依赖Lyapunov函数方法的一个推论。

推论 6.2: 如果存在矩阵 $P_i = P_i^T > 0, G$ 使得下列不等式

$$\begin{bmatrix} P_i - G - G^T & G^T A_i^T & G^T C_i^T \\ * & -P_i & -B_i \\ * & * & -D_i - D_i^T \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6.10)$$

那么不确定系统(6.1)鲁棒稳定且具有严格正实性。

在文献[147]中, Zhou等通过投影引理, 给出了另外一种使用参数Lyapunov函数的鲁棒正实性判据, 这里以引理的形式给出:

引理 6.2: ^[147]如果存在矩阵 $P_i = P_i^T > 0, G$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -\frac{G+G^T}{2} & * & * & * \\ A_i G & -P_i & * & * \\ C_i G & -B_i^T & -He(D_i) & * \\ \frac{G^T+2G-2P_i}{2} & -G^T A_i^T & -G^T C_i^T & -He(G) \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6.11)$$

那么不确定系统(6.1)鲁棒稳定且具有严格正实性。

注意到在引理6.2和推论6.2中, 同样都只引入一个了辅助变量 G 来实现Lyapunov变量与系统矩阵变量的解耦, 那么一个自然的问题就是它们之间具有什么样的关系, 或者说那个判据的保守性更少。为说明引理6.2和推论6.2之间的关系, 我们首先给出下面的引理。

引理 6.3: 对任意给定的适维矩阵 A, B, C, D , 如果存在矩阵 $P = P^T > 0, G$ 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -\frac{G+G^T}{2} & G^T A^T & G^T C^T & \frac{G+2G^T-2P}{2} \\ * & -P & -B & -AG \\ * & * & -He(D) & -CG \\ * & * & * & -He(G) \end{bmatrix} < 0 \quad (6.12)$$

那么一定存在矩阵 $\hat{P} = \hat{P}^T > 0$, \hat{G} 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \hat{P} - \hat{G} - \hat{G}^T & \hat{G}^T A^T & \hat{G}^T C^T \\ * & -\hat{P} & -B \\ * & * & -D - D^T \end{bmatrix} < 0 \quad (6.13)$$

证明: 首先可将式(6.12)表示为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -P \\ 0 & -P & -B & 0 \\ 0 & -B^T & -(D + D^T) & 0 \\ -P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + He \left(\begin{bmatrix} I/2 \\ -A \\ -C \\ -I \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \right) < 0 \quad (6.14)$$

通过对矩阵零空间的计算可知:

$$\begin{bmatrix} I/2 \\ -A^T \\ -C^T \\ -I^T \end{bmatrix}^{T\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I/2 & -A^T & -C^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^{T\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由投影引理, 可知如果不等式(6.14)成立, 则说明下列两个不等式成立,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I/2 & -A^T & -C^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -P \\ 0 & -P & -B & 0 \\ 0 & -B^T & -(D + D^T) & 0 \\ -P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I/2 & -A^T & -C^T \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -P & PA^T & PC^T \\ AP & -P & -B \\ CP & -B^T & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -P \\ 0 & -P & -B & 0 \\ 0 & -B^T & -(D+D^T) & 0 \\ -P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} -2P & 0 & 0 \\ 0 & -P & -B \\ 0 & -B^T & -(D+D^T) \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

令 $\hat{P} = \hat{G} = P$, 则可出不等式(6.15)成立得知(6.13)成立, 证毕。

由上面的这个引理6.3, 可以给出引理6.2和推论6.2这两个鲁棒正实判据之间的关系。

定理 6.2: 考虑不确定系统(6.1)的正实性分析问题, 如果引理6.2中给出的不等式(6.11)成立, 则推论(6.10)中的不等式也成立。

证明: 根据引理6.3可容易得知定理中的结论成立。证毕。

6.2.4 数值算例

例6.1: 考虑一个形如(6.18)的有两个顶点的多胞不确定离散系统 Σ_{Δ}^1 : 其顶点矩阵的参数给定如下:

$$\Sigma_{\Delta}^1 : \begin{cases} \left[\begin{array}{c|c} A_1^1 & B_1^1 \\ \hline C_1^1 & D_1^1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -0.5776 & -0.1874 & -0.3287 \\ 0.4297 & 0.3855 & 0.0970 \\ \hline 0.8456 & -0.6702 & 0.4613 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_2^1 & B_2^1 \\ \hline C_2^1 & D_2^1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -0.1174 & 0.6299 & 0.7434 \\ 0.1815 & -0.7937 & -0.5528 \\ \hline 0.2592 & 0.8012 & 0.3409 \end{bmatrix} \end{cases} .$$

这里我们考虑该不确定系统的正实性判定问题, 对此我们分别用本节中给出的鲁棒正实判据(定理6.1和推论6.2)以及文[147]中给出的鲁棒正实判据(引理6.2)对其进行分析, 分析结果如下表所示

表 6.1 例6.1中对不确定系统 Σ_{Δ}^1 的鲁棒正实分析结果。

Table 6.1 Robust positive realness analysis results for uncertain system Σ_{Δ}^1 in Example 6.1.

方法	可行性
定理6.1	可行
推论6.2	可行
引理6.2 ^[147]	不可行

现在我们来考虑另一个带有两个顶点的多胞不确定离散系统，其参数矩阵为：

$$\Sigma_{\Delta}^2 : \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c|c} A_1^2 & B_1^2 \\ \hline C_1^2 & D_1^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.0245 & -0.2248 & -0.2061 \\ -0.4988 & 0.2404 & -0.0829 \\ \hline -0.2931 & 0.3310 & 0.0976 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} A_2^2 & B_2^2 \\ \hline C_2^2 & D_2^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.1241 & -0.1916 & 0.1142 \\ 0.4887 & 0.4778 & -0.2963 \\ \hline -0.1084 & -0.1096 & 0.0204 \end{array} \right] \end{array} \right.$$

该系统相应的鲁棒正实分析结果如下：

表 6.2 例6.1中对不确定系统 Σ_{Δ}^2 的鲁棒正实分析结果。

Table 6.2 Robust positive realness analysis results for uncertain system Σ_{Δ}^2 in Example 6.1.

方法	可行性
定理6.1	可行
推论6.2	不可行
引理6.2 ^[147]	不可行

本例中的数值例子清晰的说明了定理6.1、推论6.2以及引理6.2,这三个鲁棒正实判据之间的关系，即定理6.1的保守性要小于推论6.2，这是由于定理6.1由于在推论6.2的基础上添加了额外的辅助变量 F ；而就只引入一个辅助变量 G 的推论6.2和引理6.2相比，推论6.2的保守性又要小于引理6.2。

6.3 离散不确定系统的静态输出反馈控制器设计

6.3.1 问题描述

考虑下面给出的线性不确定离散系统

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Delta}: \quad & x(k+1) = \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}_1\omega(k) + \mathcal{B}_2u(k) \\ & z(k) = \mathcal{C}_1x(k) + \mathcal{D}_{11}\omega(k) + \mathcal{D}_{12}u(k) \\ & y(k) = \mathcal{C}_2x(k) \end{aligned} \quad (6.17)$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $y(k) \in R^q$ 是可测输出向量; $z(k) \in R^p$ 是被控输出向量, $w(k) \in R^p$ 是能量有界的干扰输入向量, $u(k) \in R^m$ 是控制输入向量, 不确定矩阵 $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{C}_2$ 属于下面给出的凸多面体:

$$\mathcal{P} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ \hline \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \hline \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} & \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\begin{array}{c|c|c} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ \hline C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ \hline C_{2i} & & \end{array} \right] \quad \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (6.18)$$

本节目的是求一个静态输出反馈控制器

$$u(k) = Ky(k) \quad (6.19)$$

使得闭环系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathcal{A}_{cl}x(k) + \mathcal{B}_{cl}\omega(k) \\ z(k) &= \mathcal{C}_{cl}x(k) + \mathcal{D}_{cl}\omega(k) \end{aligned} \quad (6.20)$$

其中

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} + \mathcal{B}_2K\mathcal{C}_2 & \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2K\mathcal{D}_{21} \\ \hline \mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_{12}K\mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{12}K\mathcal{D}_{21} \end{array} \right] \quad (6.21)$$

满足下面两个要求:

- (1): 闭环系统鲁棒稳定
- (2): 满足鲁棒 H_{∞} 性能指标 γ , 即在零初始状态条件下满足 $\|z(k)\|_2^2 < \gamma \|\omega(k)\|_2^2$, 其中 $\omega(k) \in L_2$

6.3.2 离散不确定系统的 H_∞ 静态输出反馈控制

从上章中标称系统的 H_∞ 静态输出反馈控制设计的结果出发, 容易推广得到下面两个定理。

定理 6.3: 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, \dots, N$ 和矩阵 $Y, G_i, i = 1, \dots, N$, 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_i^{11} & 0 \\ G_i^{21} & G_i^{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} P_i - He(T_i G_i) & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ A_i T_i G_i + B_{2i} Y & B_{1i} & -P_i & * \\ C_{1i} T_i G_i + D_{12i} Y & D_{11i} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (6.23)$$

其中 $T_i = [C_{2i}^T (C_{2i} C_{2i}^T)^{-1} C_{2i}^+]$, $i = 1, \dots, N$, 那么闭环系统(6.20)鲁棒稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ , 此时控制器(6.19)的参数可取为: $K = Y_1 G_{11}^{-1}$ 。

定理 6.4: 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, \dots, N$, 矩阵 $Y, G_i, i = 1, \dots, N$, 其中

$$G = \begin{bmatrix} G_i^{11} & 0 \\ G_i^{21} & G_i^{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} P_i - He(T_i G_i T_i^T) & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ A_i T_i G_i T_i^T + B_{2i} Y T_i^T & B_{1i} & -P_i & * \\ C_{1i} T_i G_i T_i^T + D_{12i} Y T_i^T & D_{11i} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (6.25)$$

其中 $T_i = [C_{2i}^T (C_{2i} C_{2i}^T)^{-1} C_{2i}^+]$, $i = 1, \dots, N$, 那么闭环系统(6.20)鲁棒稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ , 此时控制器(6.19)的参数可取为: $K = Y_1 G_{11}^{-1}$ 。

注 6.3: 定理6.3和6.4可以很容易的从上章中标称系统的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计结果(定理5.5和定理5.6)推广得来, 估证明过程此处略去。同定理5.5和定

理5.6相比, 定理6.3和6.4中只用到了一个辅助变量 G , 当然可以通过引入辅助变量 F 来进一步减少保守性, 但是在不确定系统(6.17)的顶点个数较多时, 处理变量 F 中的 λ 所需的线性搜索过程计算量会比较大。下面给出一个不引入变量 F , 但是可以进一步减小定理6.3的设计保守性的结果。

定理 6.5: 如果存在对称矩阵 $P_i, V_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$ 矩阵 $G_i, i = 1, 2, \dots, N$ 以及矩阵 Y , 其中

$$G_i = \begin{bmatrix} G_i^{11} & 0 \\ G_i^{21} & G_i^{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix}, V_{ij} = \begin{bmatrix} V_{ij}^{11} & * & * & * \\ V_{ij}^{21} & V_{ij}^{22} & * & * \\ V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & V_{ij}^{33} & * \\ V_{ij}^{41} & V_{ij}^{42} & V_{ij}^{43} & V_{ij}^{44} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & * & * & * & * \\ 0 & -I + V_{ij}^{11} & * & * & * \\ \Theta_{31} & B_{1i} + V_{ij}^{21} & -P_i + V_{ij}^{22} & * & * \\ \Theta_{41} & D_{11i} + V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & -\gamma^2 I + V_{ij}^{33} & * \\ P_j & V_{ij}^{41} & V_{ij}^{42} & V_{ij}^{43} & -P_j + V_{ij}^{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.27)$$

$1 \leq i, j \leq N$

$$V_{ij} + V_{ji} \geq 0, 1 \leq j < i \leq N \quad (6.28)$$

$$\sum_{i=1}^N (V_{ij} + V_{ji}) \leq 0, j = 1, \dots, N \quad (6.29)$$

其中

$$\begin{aligned} T_i &= \begin{bmatrix} C_{2i}^T (C_{2i} C_{2i}^T)^{-1} & C_{2i}^\perp \end{bmatrix} \\ \Theta_{11} &= -T_i G_i - G_i^T T_i^T \\ \Theta_{31} &= A_i T_i G_i + B_{2i} Y \\ \Theta_{41} &= C_{1i} T_i G_i + D_{12i} Y \\ &i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

那么闭环系统(6.20)鲁棒稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ , 此时控制器(6.19)的参数可取为: $K = Y_1 G_{11}^{-1}$ 。

证明: 从矩阵变量 $G_i, Y(6.26)$ 的结构可知:

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} KG^{11} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^{11} & 0 \\ G_i^{21} & G_i^{22} \end{bmatrix} \\
 &= K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} T_i^{-1} T_i G_i = KC_{2i} T_i G_i
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

将上式带入(6.27), 可将(6.27)写为:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * \\ 0 & -I + V_{ij}^{11} & * & * & * \\ \Phi_{31} & B_{1i} + V_{ij}^{21} & -P_i + V_{ij}^{22} & * & * \\ \Phi_{41} & D_{11i} + V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & -\gamma^2 I + V_{ij}^{33} & * \\ P_j & V_{ij}^{41} & V_{ij}^{42} & V_{ij}^{43} & -P_j + V_{ij}^{44} \end{bmatrix} < 0 \tag{6.31}$$

$1 \leq i, j \leq N$

其中

$$\begin{aligned}
 \Phi_{11} &= -T_i G_i - G_i^T T_i^T \\
 \Phi_{31} &= (A_i + B_{2i} K C_{2i}) T_i G_i \\
 \Phi_{41} &= (C_{1i} + D_{12i} K C_{2i}) T_i G_i
 \end{aligned}$$

定义 $W_i = (T_i G_i)^{-1}$ 并对式(6.31)分别左乘矩阵 $\text{diag}\{W_i, I, I, I\}$ 以及右乘其转秩, 可得:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * & * \\ 0 & -I + V_{ij}^{11} & * & * & * \\ \Psi_{31} & B_{1i} + V_{ij}^{21} & -P_i + V_{ij}^{22} & * & * \\ \Psi_{41} & D_{11i} + V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & -\gamma^2 I + V_{ij}^{33} & * \\ P_j & V_{ij}^{41} & V_{ij}^{42} & V_{ij}^{43} & -P_j + V_{ij}^{44} \end{bmatrix} < 0 \tag{6.32}$$

$1 \leq i, j \leq N$

其中

$$\begin{aligned}
 \Psi_{11} &= -W_i - W_i^T \\
 \Psi_{31} &= A_i + B_{2i} K C_{2i} \\
 \Psi_{41} &= C_{1i} + D_{12i} K C_{2i}
 \end{aligned}$$

对式(6.32)乘以 $\alpha_i\alpha_j$ 并求和, 可得:

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{W}^T - \mathcal{W} & * & * & * & * \\ 0 & -I & * & * & * \\ \mathcal{A} + \mathcal{B}_2 K \mathcal{C}_2 & \mathcal{B}_1 & -\mathcal{P} & * & * \\ \mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_{12} K \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{11} & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ \mathcal{P} \mathcal{W} & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & & & & \\ 0 & \mathcal{V} & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} < 0 \quad (6.33)$$

其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_{12}$ 和定义(6.18)中相同,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \begin{bmatrix} V_{ij}^{11} & * & * & * \\ V_{ij}^{21} & V_{ij}^{22} & * & * \\ V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & V_{ij}^{33} & * \\ V_{ij}^{41} & V_{ij}^{42} & V_{ij}^{43} & V_{ij}^{44} \end{bmatrix} \\ \mathcal{P} &= \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j \\ \mathcal{W} &= \sum_{j=1}^N \alpha_j T_j G_j \end{aligned}$$

现在对(6.33)左乘矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

并右乘其转秩可得:

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{W}^{-T} - \mathcal{W}^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & -I & * & * & * \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}_2 K \mathcal{C}_2) \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{B}_1 & -\mathcal{P} & * & * \\ (\mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_{12} K \mathcal{C}_2) \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{D}_{11} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & & & & \\ 0 & \mathcal{V} & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} < 0 \quad (6.34)$$

由不等式(6.28)(6.28)并根据第二章中给出的引理2.4,可得

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{W}^{-T} - \mathcal{W}^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & -I & * & * & * \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}_2 K \mathcal{C}_2) \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{B}_1 & -\mathcal{P} & * & * \\ (\mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_{12} K \mathcal{C}_2) \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{D}_{11} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.35)$$

对上式应用Schur补引理,可得

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} - \mathcal{W}^{-T} - \mathcal{W}^{-1} & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}_2 K \mathcal{C}_2) \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{B}_1 & -\mathcal{P} & * \\ (\mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_{12} K \mathcal{C}_2) \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{D}_{11} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.36)$$

式(6.36)又可整理为:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} + He \left(\begin{bmatrix} \mathcal{W}^{-T} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mathcal{A}_d & \mathcal{B}_d \\ 0 & -I \\ \mathcal{C}_d & \mathcal{D}_d \end{bmatrix}^T \right) < 0 \quad (6.37)$$

证明的其余部分可以参考定理5.5的证明过程来完成,此处不再赘述。证毕。

注 6.4: 在定理6.5中 V_{ij} 的引入考虑到了不确定参数 α_i 的性质(即 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$),可以进一步减少设计条件的保守性。当然,由于引入了更多的矩阵变量,所以相对于定理6.3而言,定理6.5的需要更大的计算量。这里为了给出凸的设计条件,所以 V_{ij} 只是运用于整个线性矩阵不等式(6.27)中的一部分。

6.3.3 离散不确定系统的正实静态输出反馈控制

根据上小节中给出的鲁棒 H_∞ 静态输出反馈控制器设计方法,以及上一章中针对标称系统给出的正实静态反馈控制器设计结果(定理5.7和5.8),下面我们给出对不确定系统(6.17)的设计方法。

定理 6.6: 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, \dots, N$ 和矩阵 $Y, G_i, i = 1, \dots, N$, 其中

$$G = \begin{bmatrix} G^{11} & 0 \\ G^{21} & G^{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} P_i - He(T_i G_i) & * & * \\ A_i T_i G_i + B_{2i} Y & -P_i & * \\ C_{1i} T_i G_i + D_{12i} Y & -B_{1i}^T & -He(D_{11i}) \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (6.39)$$

其中 $T_i = [C_{2i}^T (C_{2i} C_{2i}^T)^{-1} C_{2i}^{\perp}]$, $i = 1, \dots, N$, 那么闭环系统(6.20)鲁棒稳定且是严格正实的, 此时控制器(6.19)的参数可取为: $K = Y_1 G_{11}^{-1}$.

证明: 由定理5.7容易得知定理成立, 详细过程不再赘述。证毕。

定理 6.7: 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, \dots, N$ 和矩阵 $Y, G_i, i = 1, \dots, N$, 其中

$$G = \begin{bmatrix} G^{11} & 0 \\ G^{21} & G^{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} P_i - He(T_i G_i T_i^T) & * & * \\ A_i T_i G_i T_i^T + B_{2i} Y T_i^T & -P_i & * \\ C_{1i} T_i G_i T_i^T + D_{12i} Y T_i^T & -B_{1i}^T & -He(D_{11i}) \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (6.41)$$

其中 $T_i = [C_{2i}^T (\tilde{C}_{2i} C_{2i}^T)^{-1} C_{2i}^{\perp}]$, $i = 1, \dots, N$, 那么闭环系统(6.20)鲁棒稳定且是严格正实的, 此时控制器(6.19)的参数可取为: $K = Y_1 G_{11}^{-1}$.

证明: 由定理5.8容易得知定理成立, 详细过程不再赘述。证毕。

定理 6.8: 如果存在对称矩阵 $P_i, V_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$ 矩阵 $G_i, i = 1, 2, \dots, N$ 以及矩阵 Y , 其中

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} G^{11} & 0 \\ G_{ij}^{21} & G_{ij}^{22} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \end{bmatrix}, V_{ij} = \begin{bmatrix} V_{ij}^{11} & * & * \\ V_{ij}^{21} & V_{ij}^{22} & * \\ V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & V_{ij}^{33} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -T_i G_i - G_i^T T_i^T & * & * & * \\ A_i T_i G_i + B_{2i} Y & -P_i + V_{ij}^{11} & * & * \\ C_{1i} T_i G_i + D_{12i} Y & -B_i^T + V_{ij}^{21} & -He(D_{11i}) + V_{ij}^{22} & * \\ P_j & V_{ij}^{31} & V_{ij}^{32} & -P_j + V_{ij}^{33} \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (6.43)$$

$$V_{ij} + V_{ji} \geq 0, \quad 1 \leq j < i \leq N \quad (6.44)$$

$$\sum_{i=1}^N (V_{ij} + V_{ji}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (6.45)$$

其中 $T_i = [C_{2i}^T (C_{2i} C_{2i}^T)^{-1} C_{2i}^T]$, $i = 1, \dots, N$, 那么闭环系统(6.20)鲁棒稳定且是严格正实的, 此时控制器(6.19)的参数可取为: $K = Y_1 G_{11}^{-1}$.

证明: 由定理5.7并结合上小节中的定理6.5容易得知定理成立, 详细过程不再赘述。证毕。

6.3.4 数值算例

例6.2: 考虑下面给出的一个带有两个顶点的多胞不确定系统(6.17), 参数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_{11} & B_{21} \\ C_{11} & D_{111} & D_{121} \\ C_{21} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2398 & 0.2299 & 0.2177 & -0.1367 \\ -0.0485 & -0.1184 & 0.2948 & 0.2393 \\ 0.3783 & 0.2178 & 0.0630 & 0.3881 \\ -0.3718 & -0.1114 & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_{12} & B_{22} \\ C_{12} & D_{112} & D_{122} \\ C_{22} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1629 & 0.3667 & -0.1834 & 0.3397 \\ -0.3112 & 0.3290 & -0.3048 & -0.3581 \\ -0.3859 & 0.3529 & 0.3843 & 0.0454 \\ -0.3750 & -0.1124 & & \end{bmatrix}$$

首先我们通过上节中给出的鲁棒正实性判别结果来判定该系统在开环情况($u(k) = 0$)下的正实性, 结果显示, 即使采用保守性最小的定理6.1也无法确认其是

否具有正实性，故此，这里希望设计一个静态输出反馈正实控制器使得闭环系统具有正实性。这里我们重点比较定理6.6以及在定理6.6基础上引入了参数依赖松弛变量 V_{ij} 而得到的定理6.8，计算结果显示采用定理6.6无法给出相应的解，采用定理6.8，可得到一个可行解为：

$$u(k) = 2.5424y(k)$$

这个例子的计算结果说明，由于定理6.8相对于定理6.6引入参数依赖的松弛变量 V_{ij} ，进而减少了定理6.6的保守性。

6.4 本章小结

本章针对带有多胞不确定性的离散系统，首先给出了其 H_∞ 、正实性的分析条件，并就对本章给出的鲁棒正实判据和现有文献^[147]中的鲁棒正实判据之间的关系进行了理论上的比较，给出了他们之间的关系。然后在上一章的基础上，给出了一组考虑 H_∞ 性能以及正实性的鲁棒静态输出反馈控制器设计条件，最后在此基础上通过引入参数依赖的松弛变量，进一步的减少了设计中的保守性。数值仿真例子进一步表明了本章中鲁棒正实分析条件的优越性以及设计条件的有效性。

；
；

第七章 一类离散时延系统的静态输出反馈

7.1 引言

许多实际物理过程的内部动态系统中都存在滞后现象。在专著[192]和综述[193]中给出了许多控制工程以及生物学, 化学, 经济学, 力学等别的领域中存在的大量实例。时滞的存在往往使得系统稳定性和性能变差, 也使得系统的分析和综合变得更加复杂, 因为时滞系统有着大量的控制工程背景, 所以近些年关于时滞系统的分析与综合一直是一个非常热门的研究方向。

随着网络控制系统的发展, 离散时滞系统近年来也吸引了众多研究人员的关注。对离散时滞系统进行分析的一个重要的方法就是通过Lyapunov-Krasovskii理论以及结合一些放缩技巧如Park-moon不等式, 自由加权矩阵^[195], Jensen不等式^[194]等, 进而得到时滞无关/相关的稳定性判别条件。时滞系统的控制综合问题也得到了许多学者的关注^[194, 196-198, 201-203], 但现有的这些研究工作中多关注于状态反馈控制器的设计。时滞系统的静态输出反馈控制设计的研究结果相对则较为少见, 在文[199][200]中通过采用锥补线性化方法, 进而得到一个基于迭代线性矩阵不等式算法的镇定静态输出反馈控制器设计方法, 但这种算法的收敛性和可靠性有待进一步研究。

本章研究了带有时不变状态时滞的线性离散时间系统的静态输出反馈控制问题。从第五章中不带有时延项的标称系统的设计方法出发, 并结合处理时滞项的Jensen不等式方法^[194], 给出了一组凸的时滞依赖的 H_∞ 静态输出反馈控制器设计方法。最后通过数值例子进一步表明本章方法的有效性。

7.2 问题描述

考虑下面给出带有时不变状态时延的离散时间系统:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-d) + B_1 \omega(k) + B_2 u(k) \\
 z(k) &= Lx(k) + L_d x(k-d) \\
 y(k) &= Cx(k) + C_d x(k-d) + D\omega(k) \\
 x(k) &= \phi(k) \quad k = -d, -d+1, \dots, 0
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $y(k) \in R^q$ 是可测输出向量; $z(k) \in R^p$ 是被控输出向量, $w(k) \in R^p$ 是能量有界的干扰输入向量, $u(k) \in R^m$ 是控制输入向量. $d > 0$ 为一个常数代表时延的大小. 本节中希望求一个静态输出反馈控制器

$$u(k) = Ky(k) \tag{7.2}$$

使得闭环系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{cl}x(k) + A_{cld}x(k-d) + B_{cl1}\omega(k) \\ z(k) &= Lx(k) + L_dx(k-d) \end{aligned} \tag{7.3}$$

其中 $A_{cl} = A + B_2KC_2$, $A_{cld} = A_d + B_2KC_d$, $B_{cl1} = B_1 + B_2KD$, 满足下面两个要求:

(1): 闭环系统稳定

(2): 在零初始状态下 $x(k) = 0, k = 0$ 条件下满足 $\|z(k)\|_2^2 < \gamma\|\omega(k)\|_2^2$, 其中 $\omega(k) \in L_2$

7.3 离散时不变时延系统的 H_∞ 静态输出反馈

定理6.1 如果存在对称正定矩阵 P, Q, U , 以及如下结构受限的分块矩阵

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & G_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

满足下列矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Psi & 0 & -d^2U + GTA + YC_2 & GTA_d + YC_{2d} & GTB_1 + YD \\ * & -I & L & L_d & 0 \\ * & * & -P + Q + (d^2 - 1)U & U & 0 \\ * & * & * & -Q - U & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{7.5}$$

其中 $\Psi = P + d^2U - GT - T^T G^T$, 那么闭环系统(7.3)稳定并且其 H_∞ 范数小于 γ , 其中控制器(7.2) 参数为:

$$K = G_{11}^{-1}Y_1$$

证明. 根据矩阵变量 G, Y 的特殊结构可得:

$$\begin{aligned}
 GT_b B_2 K &= G \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} G_{11} K \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Y
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

由上式(7.6)可将不等式(7.5)写为:

$$\mathbb{P} + He(\mathbb{M}\mathbb{H}) < 0 \tag{7.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} &= \begin{bmatrix} P + d^2 U & 0 & -d^2 U & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -P + Q + (d^2 - 1)U & U & 0 \\ * & * & * & -Q - U & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \\
 \mathbb{M} &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \\ A_{cd}^T & L^T \\ A_{cd}^T & L_d^T \\ B_{cd1}^T & 0 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

由闭环系统方程式(7.3)可得

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \\ A_{cd}^T & L^T \\ A_{cd}^T & L_d^T \\ B_{cd1}^T & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ x(k) \\ x(k-d) \\ \omega(k) \end{bmatrix} = 0 \tag{7.9}$$

由不等式(7.6)和等式(7.9)并应用Finsler引理,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ x(k) \\ x(k-d) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \mathbb{P} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \\ x(k) \\ x(k-d) \\ \omega(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (7.10)$$

现在我们选取如下所示的Lyapunov-Krasovskii函数

$$\begin{aligned} V(k) = & x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(k)Qx(k) \\ & + d \sum_{i=-d}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} (x(k) - x(k+i))^T U (x(k) - x(k+i)) \end{aligned} \quad (7.11)$$

其中 P, Q, U 均为对称正定矩阵, 可选用不等式(7.5)中相应矩阵变量的可行解。结合Jensen不等式引理(即引理2.5)可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) + x^T(k)Qx(k) - x^T(k-d)Qx(k-d) \\ &\quad + d \sum_{i=-d}^{-1} (\eta(k))^T U (\eta(k)) - d \sum_{i=-d}^{-1} (\eta(k))^T U (\eta(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) + x^T(k)Qx(k) - x^T(k-d)Qx(k-d) \\ &\quad + d^2 (\eta(k))^T U (\eta(k)) - d \sum_{m=k-d}^{k-1} (\eta(k))^T U (\eta(k)) \\ &\leq x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) + x^T(k)Qx(k) - x^T(k-d)Qx(k-d) \\ &\quad + d^2 (\eta(k))^T U (\eta(k)) - x(k) - \left(\sum_{m=k-d}^{k-1} (\eta(m))^T \right)^T U \left(\sum_{m=k-d}^{k-1} (\eta(m))^T \right) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) + x^T(k)Qx(k) - x^T(k-d)Qx(k-d) \\ &\quad + d^2 (\eta(k))^T U (\eta(k)) - (x(k) - x(k-d))^T U (x(k) - x(k-d)) \\ &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P + d^2 U & 0 & -d^2 U \\ * & -P + Q + (d^2 - 1)U & U \\ * & * & -Q - U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.12)$$

其中 $\eta(k) = x(k+1) - x(k)$ 。结合定理7.1中不等式(7.5)可得:

$$\Delta V(k) + z^T(k)z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) < 0 \quad (7.13)$$

对上式从0到 ∞ 求和可得

$$V(\infty) - V(\xi(0)) + \sum_{i=0}^k (z^T(i)z(i) - \gamma^2 \omega^T(i)\omega(i)) < 0 \quad (7.14)$$

由Lyapunov-Krasovskii函数(7.11)和不等式(7.12)可知闭环系统稳定即 $V(\infty) = 0$, 则由式(7.14)可知系统满足 H_∞ 性能 γ 。由引理5.1以及不等式(7.5)可知 G_{11} 可逆, 于是 $Y_1 = G_{11}K$ 保证控制器增益矩阵 K 有解。证毕。

同前两章一样, 如果将定理7.1中用到的乘子矩阵 M 选为: $M = \begin{bmatrix} (T^T G T)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, 我们还可得到一个平行于定理7.1的结果。

定理7.2 如果存在对称正定矩阵 P, Q, U , 以及如下结构受限的分块矩阵

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & G_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

满足下列矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{15} \\ * & -I & L & L_d & 0 \\ * & * & -P + Q + (d^2 - 1)U & U & 0 \\ * & * & * & -Q - U & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.16)$$

其中

$$\Psi_{11} = P + d^2 U - T^T G T - T^T G^T T$$

$$\Psi_{13} = -d^2 U + T^T G T A + T^T Y C_2$$

$$\Psi_{14} = T^T G T A_d + T^T Y C_{2d}$$

$$\Psi_{15} = T^T G T B_1 + T^T Y D$$

那么闭环系统(7.3)稳定并且其 H_∞ 范数小于 γ , 其中控制器(7.2)参数为: $K = G_{11}^{-1}Y_1$.

7.4 数值算例

考虑一个带有时不变状态时延的离散时间系统(7.1), 其参数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A & A_d & B_1 & B_2 \\ L & L_d & & \\ C & C_d & D & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.20 & 0.32 & -0.07 & 0.50 & -0.90 & -0.32 \\ -0.80 & -0.04 & 0.09 & 0.18 & 0.22 & 0.16 \\ 0.82 & 0.01 & -0.16 & 0.59 & & \\ 0.78 & 0.02 & -0.22 & 0.86 & -0.43 & \end{bmatrix}$$

该系统的时延为 $d = 5$ 。该系统开环不稳定, 事实上从仿真中可知该系统在 $d = 2$ 时就已经不再稳定。设系统的干扰输入 ω 为

$$\omega(k) = \begin{cases} 2e^{-0.3k} + 0.5\sin(2k) & 20 < k \leq 40 \\ 0 & k \notin (20, 40] \end{cases}$$

系统在开环情况下($u(k) = 0$)时的状态相应曲线

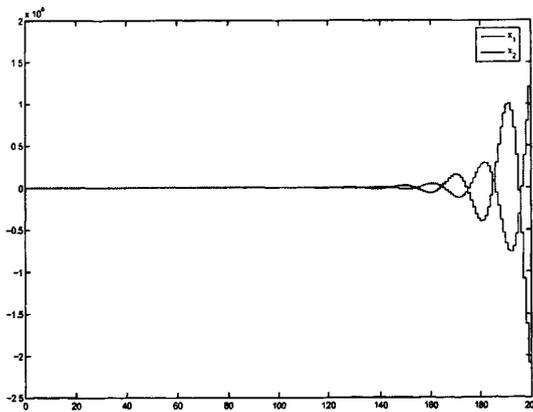


图 7.1 当 $d = 5$ 时, 开环系统的相应曲线

Fig. 7.1 State response curves of the open-loop system with $d = 5$

显然, 系统开环不稳定, 由定理7.1可得一个 H_∞ 静态输出反馈控制器

$$u(k) = 2.8969y(k)$$

并得到一个闭环系统的 H_∞ 性能界为 $\gamma = 0.9181$ 。现在我们给出系统闭环的状态相应曲线：

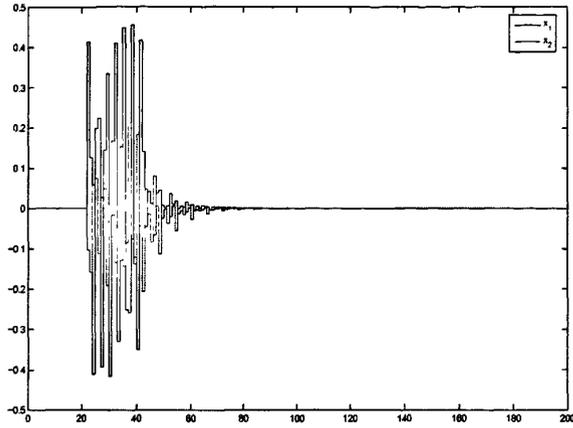


图 7.2 当 $d = 5$ 时，闭环系统的相应曲线

Fig. 7.2 State response curves of the closed-loop system with $d = 5$

系统此时的被调输出和控制输入为：

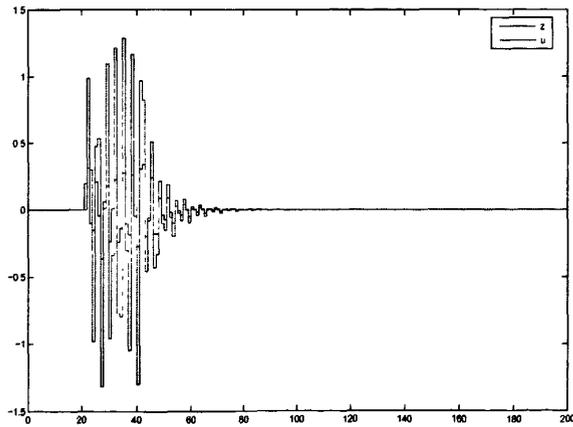


图 7.3 当 $d = 5$ 时，闭环系统的被调输出和控制输入的相应曲线

Fig. 7.3 Regulated output and control input response curves of the closed-loop system with $d = 5$

7.5 本章小结

本章研究了带有时不变状态时延的离散系统的静态输出反馈问题。结合时延的性质以及第五章中给出的静态输出反馈控制设计方法,得到了相应的设计条件。在本章中通过运用在[194]中采用的Jensen不等式技巧来处理由于时延项带来的复杂性,并得到了时滞依赖的线性矩阵不等式设计条件。仿真算例表明,这种简单的基于LMI的设计方法可以有效的求解带有时不变时延系统的静态输出反馈控制器。

第八章 结论与展望

线性系统的模型降阶问题与静态输出反馈控制问题由于其强烈的需求以及广泛的应用背景,从而在过去的几十年里一直是控制理论研究中的一个非常热门的领域。各种研究成果层出不穷,但是其中仍有一些问题通过现有的方法还不能得到很好的解决。例如,在模型降阶的研究中,针对系统工作频率范围已知的情况,现有的如基于加权矩阵的平衡截断等方法会带来一定的不准确性和不可靠性,而且无法给出降阶模型和高阶模型在已知频率范围内的逼近性能。此外现有的一些基于线性矩阵不等式的模型降阶和降阶控制器(如静态输出反馈控制器)的设计条件存在着一定的保守性,如何给出保守性更少的设计条件也是一个非常重要的问题。本论文在总结前人工作的基础上,针对模型降阶和静态输出反馈控制中存在的这些问题做了相关研究,给出了新的基于线性矩阵不等式的设计方法。本文的贡献具体总结如下:

1. 在线性系统的模型降阶方面,分别就连续时间和离散时间下的 H_∞, H_2 模型降阶问题给出新的基于线性矩阵不等式技术的设计方法。特别在考虑有限频 H_∞ 模型降阶时,通过结合新提出的GKYP引理,分别给出了在低频,中频,高频范围内考虑的 H_∞ 模型降阶设计条件,从而可以直接的,准确的处理已知的输入信号的频率信息,这样就避免了过去方法在处理该问题时的不确定性和不可靠性。此外本文中给出的全频范围内的 H_∞ 模型降阶设计进一步的减少了现有文献中同类方法的保守性。数值算例和仿真进一步说明了本章提出方法的有效性和优越性。

2. 在线性系统的静态输出反馈方法,基于LMI技术和参数依赖Lyapunov函数方法,针对离散时间系统给出了一组在现有同类方法基础上进一步减少保守性的静态输出反馈控制器设计条件。而且文中给出的设计条件都从Finsler引理出发,在一个统一的框架给出,可以清楚的看出现有结果之间以及本文方法与现有方法之间的区别与联系。此外还针对具有多胞不确定性的离散不确定系统和带有时不变状态时滞的离散时滞系统给出了静态输出反馈控制器设计方法。

作为控制理论领域内传统热门课题之的模型降阶和静态输出反馈控制仍存在很多问题有待于进一步解决。下面是作者认为在今后需要继续深入研究的若干问题:

1. 线性系统的次优有限频模型降阶问题

由于模型降阶的问题起源于对复杂电路网络的建模,而电路网络通常是工作在一个非常窄的频率范围内的,所以研究有限频模型降阶问题意义重大,而本论文中给出的线性矩阵不等式条件为充分条件,这就使得这种基于LMI的降阶方法对一

些具体情况无解。而另一方法,在模型降阶中的原始系统模型常常是稳定的(如无源电路系统),这就是对所有稳定的系统模型找到一个次优的降阶模型总是可能的。本文作者在此问题上已做了长时间的考虑和尝试,已经形成初步的解决方案,但仍有待于进一步研究。

2. 如何通过凸优化方法来解决模型降阶中一些特殊要求,例如在有些系统中,系统本身具有一定的结构特性如对称性,还有一些系统如电路系统常具有(有限频)正实性/无源性,如果得到相应的满足这些要求的设计条件有待进一步的研究。

3. 寻找在可以在本文基础上进一步减少保守性的静态输出反馈控制器设计条件。虽然本文中给出的设计条件可以有效的减小现有文献中同类方法的保守性,但其依然是充分条件,所以如何在此基础上而进一步仍是一个值得探讨的问题。此外本文只考虑了离散系统的静态输出反馈控制问题,而对连续系统而言,如何得到相类似的设计条件也是一个值得考虑和补充的研究方向。

参考文献

1. Zhou K, Doyle J C, Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
2. Obinata G, Anderson B D O. Model Reduction for Control System Design, London, UK: Springer-Verlag, 2001.
3. Jamshidi M. Large-Scale Systems: Modelling and Control, North-Holland, Amsterdam, 1983.
4. Tan S, He L. Advanced Model Order Reduction Techniques in VLSI Design[M], Cambridge University Press, 2007.
5. Benner P, Mehrmann V, Sorensen D C. Dimension Reduction of Large-Scale Systems[M], Springer, 2003 Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
6. Schilders W H A, van der Vorst H A, Rommes J. Model order reduction: theory research aspects and applications, Mathematics in Industry Series vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
7. Nesterov Y, Nemirovsky A. Interior point polynomial methods in convex programming[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
8. Boyd S, Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
9. Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, Chilali M, LMI Control Toolbox, Natick, MA: The Mathworks, 1995.
10. 郑大钟. 线性系统理论(第二版)[M], 北京: 清华大学出版社, 2003.
11. 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M], 北京: 清华大学出版社, 2002.
12. 郭雷, 忻欣, 冯纯伯. 基于LMI的一种统一的降阶控制器设计方法[J], 中国科学(E辑), 1997, 27(4): 353-361.
13. 王欣, 史忠科. 模型降阶 H_∞ 方法在阵风干扰着陆控制中的应用[J], 飞行力学, 2000, 12(4): 35-37.

14. 曾建平, 程鹏. 降阶正实控制器设计[J], 控制理论与应用, 2002, 19(1): 117-120.
15. 胡寿松, 林道垣, 谢义成. 经典模型降阶方法述评[J], 南京航空航天大学学报, 1989-04-016
16. 张启人. 大系统模型降阶理论. 信息与控制, 1980-04-001
17. 张勇. 基于模型降阶的线性相位IIR滤波器设计, 北京交通大学学报, 1993-S1-014
18. 张青斌, 秦子增. 大型空间柔性结构基于 H_2 范数的模型降阶, 振动与冲击, 2002,01-01.
19. 王佩, 刘永强. 无刷双馈风力发电机模型降阶研究: 第1部分 - 无刷双馈风力发电机多时间尺度模型[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(1): 135-138.
20. 刘永强, 徐鹏. 一类多时间尺度机电耦合系统的模型降阶[J], 控制理论与应用, 2008, 25(1): 139 - 140.
21. 刘宝, 章卫国, 李广文, 宁东方. 弹性飞机的建模与模型降阶方法研究[J], 计算机仿真, 2008-05-010
22. Petzold L, Zhu W. Model reduction for chemical kinetics: An optimization approach[J], AIChE Journal. 2004, 45(4): 869-886.
23. Chaniotis D, Pai M A. Model reduction in power systems using Krylov subspace methods[J], IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20(2): 888-894.
24. Freitas F D, Rommes J, Martins N. Gramian-Based Reduction Method Applied to Large Sparse Power System Descriptor Models[J], IEEE Transactions on Power Systems, 2008, 23(3): 1258-1270.
25. Kale I, Gryka J, Cain G D. FIR filter order reduction: balanced model truncation and Hankel-norm optimal approximation[J], IEE Proceedings Image and Signal Processing, 1994, 141(3): 168-174.
26. Li L, Xie L, Yan W Y, Soh Y C. Design of low-order linear-phase IIR filters via orthogonal projection[J], IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(2): 448-457.

27. Mohamad A A. Linear Phase Low-Pass IIR Digital Differentiators[J], , IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(3): 697-706.
28. Wong N, Lei C U. IIR Approximation of FIR Filters Via Discrete-Time Vector Fitting[J], IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(3): 1296-1302.
29. Dehkordi V R, Aghdam A G. A Model Reduction Technique for IIR Filters using Balanced Realization[C], Proceeding of American Control Conference, New York, USA, 2007, 2899-2904.
30. Moore B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(1): 17-32.
31. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multi-variable systems and their l_∞ error bounds[J], International Journal of Control, 1984, 39(6): 1115-1195.
32. Jaimoukha I M, Kasenally E M. Krylov Subspace Methods for Solving Large Lyapunov Equations[J], SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(1): 227-251.
33. Gugercin S, Willcox K. Krylov projection framework for Fourier model reduction[J], Automatica, 2008, 44(1): 209-215.
34. Beattie C, Gugercin S. Interpolatory projection methods for structure-preserving model reduction[J], Systems & Control Letters, 2009, 58(3): 225-232.
35. Bai Z. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems[J], Applied Numerical Mathematics, 2002, 43(1-2): 9-44.
36. Freund R W. Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation[J], Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 123(1-2), 395-421.
37. Beattie C A, Gugercin S. Krylov-based minimization for optimal H_2 model reduction[C], Proceeding of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, USA, 2007, 4385-4390.
38. Gugercin S, Antoulas A C. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results[J], International Journal of Control, 2004, 77(8): 748 - 766.

39. Unneland K, Van Dooren P, Egeland O. A Novel Scheme for Positive Real Balanced Truncation[C], Proceeding of American Control Conference, New York, USA, 2007, 947-952.
40. Fanizza G, Karlsson J, Lindquist A, Nagamune R. A Global Analysis Approach to Passivity Preserving Model Reduction[C], Proceeding of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 2006, 3399-3404.
41. Chen X, Wen J T. Positive realness preserving model reduction with H_∞ norm error bounds[J], IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1995, 42(1): 23-29.
42. Fanizza G, Karlsson J, Lindquist A, Nagamune R. Passivity-preserving model reduction by analytic interpolation[J], Linear Algebra and its Applications, 2007, 425(2-3): 608-633.
43. Sorensen D C. Passivity preserving model reduction via interpolation of spectral zeros[J], Systems & Control Letters, 2005, 54(4): 347-360.
44. Antoulas A C. A new result on passivity preserving model reduction[J], Systems & Control Letters, 2005, 54(4): 361-374.
45. Beattie C A, Gugercin S. Interpolation theory for structure-preserving model reduction[C], Proceeding of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008, 4204-4208.
46. Bai Y Q, Grigoriadis K M. H_∞ Model Reduction of Symmetric Systems Using LMIs[C], Proceeding of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, 2006, 3412-3417.
47. Lee K H, Huang B. H_∞ structured model reduction algorithms for linear discrete systems via LMI-based optimisation[J], International Journal of Systems Science, 2009, 40(7): 685 - 693.
48. Liu W Q, Sreeram V, Teo K L. Model reduction for state-space symmetric systems[J], Systems & Control Letters, 1998, 34(4): 209-215.

49. Goncalves E N, Palhares R M, Takahashi R H C, Chasin A N V. Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure[J], International Journal of Control, 2009, 82(11): 2158- 2168.
50. Dooren P V, Gallivan K A, Absil P A. H_2 -optimal model reduction of MIMO systems[J], Applied Mathematics Letters, 2008, 21(12): 1267-1273.
51. Zhang L, Huang B, Chen T. Model reduction of uncertain systems with multiplicative noise based on balancing[J], SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 45(5): 1541-1560.
52. Sootla A, Rantzer A, Kotsalis G. Multivariable Optimization-Based Model Reduction[J], IEEE Transactions on Automatic Control. 2009, 54(10): 2477 - 2480.
53. Phillips J R, Daniel L, Silveira L M. Guaranteed passive balancing transformations for model order reduction[J], IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2003, 22(8): 1027- 1041.
54. Enns D F. Model reduction with balanced realizations: An error bound and a frequency weighted generalization[C], Proceeding of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, USA, 1984, 127-132.
55. Hung Y S, Glover K. Optimal Hankel-norm approximation of stable systems with first-order stable weighting functions[J], Systems & Control Letters, 1986, 7(3): 165-172.
56. Zhou K. Frequency-weighted model reduction with l_∞ error bounds[J], Systems & Control Letters, 1993, 21(2): 115-125.
57. Al-saggaf U F, Franklin G F. Model reduction via balanced realization: An extension and frequency weighted techniques[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 33(7): 687-692.
58. Wang G, Sreeram V, Liu W Q. A new frequency-weighted balanced truncation method and an error bound[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(9): 1734-1737.
59. Anderson B D O. Weighted Hankel-norm approximation: Calculation of bounds[J], Systems & Control Letters, 1986, 7(4): 247-255.

60. Zhou K. Frequency-weighted L_∞ norm and optimal Hankel norm model reduction[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(10): 1687-1699.
61. Scorletti G, Rossignol L, Fromion V. Frequency dependent model phase reduction using convex optimization[C], Proceeding of IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Bahamas, USA, 2004, 3090-3095.
62. Ghafoor A, Sreeram V. A Survey/Review of Frequency-Weighted Balanced Model Reduction Techniques[J], ASME Transactions on Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2008, 130(6): 0610041-061004-16.
63. Zhou P, Chai T, Liu Q, Wang H, Su C Y. Frequency-Domain Weighted RLS Model Reduction for Complex SISO Linear System[C], Proceeding of American Control Conference, St. Louis, Missouri, USA, 2009, 5719-5724.
64. Ghafoor A, Sreeram V. Frequency Weighted Balanced Model Reduction: A Survey[C], Proceeding of the 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, 2006, 1-6.
65. Houllis P, Sreeram V. A Parametrized Controller Reduction Technique via a New Frequency Weighted Model Reduction Formulation[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(5): 1087-1093.
66. Oh D C, Kim J H. A simple frequency weighted model reduction using structurally balanced truncation: existence of solutions[J], International Journal of Control, 2002, 75(15): 1190 - 1195.
67. Diab M, Sreeram V, Liu W Q. Frequency weighted identification and model reduction via extended impulse response Gramian[J], International Journal of Control, 1998, 70(1): 103 - 122.
68. Gawronski W, Juang J N. Model reduction in limited time and frequency intervals[J], International Journal of Systems Science, 1990, 21(2): 349-376.
69. Sandberg H, Murray R M. Frequency-Weighted Model Reduction with Applications to Structured Models[C], Proceeding of American Control Conference, New York, USA, 2007, 941-946.

70. Sreeram V, Agathoklis P. Model reduction using balanced realizations with improved low frequency behaviour[J], *Systems & Control Letters*, 1989, 12(1): 33-38.
71. Sreeram V, Ghafoor A. Frequency weighted model reduction technique with error bounds[C], *Proceeding of American Control Conference*, Portland, OR, USA, 2005, 2584-2589.
72. Oh D, Kim J. A simple frequency weighted model reduction using structurally balanced truncation: existence of solution[J], *International Journal of Control*, 2002, 75(15): 1190-1195.
73. Sandberg H, Lanzon A, Anderson B D O. Model approximation using magnitude and phase criteria: Implication for model reduction and system identification[J], *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(5-6): 435-461.
74. Gawronski W, Juang J N. Model reduction in limited time and frequency intervals[J], *International Journal of Systems Science*, 1990, 21(2): 349 - 376.
75. Wang D, Zilouchian A. Model reduction of discrete linear systems via frequency-domain balanced structure[J], *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 2000, 47(6): 830-837.
76. Aghaee P K, Zilouchian A, Nike-Ravesh S, Zadegan A H. Principle of frequency-domain balanced structure in linear systems and model reduction[J], *Computers & Electrical Engineering*, 2003, 29(3): 463-477.
77. Zadegan A H, Zilouchian A. Model reduction of large-scale discrete plants with specified frequency domain balanced structure[J], *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2005, 127(3): 486-798.
78. Ghafoor A, Sreeram V. Model reduction via limited frequency interval Gramians[J], *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2008, 55(9): 2806-2812.
79. Aldhaferi R W. Frequency-domain model reduction approach to design IIR digital filters using orthonormal bases[J], *International Journal of Electronics and Communications*, 2006, 60(6):413-420.

80. Zhou K. Relative/multiplicative model reduction for unstable and non-minimum-phase systems[J], *Automatica*, 1995, 31(8): 1087-1098.
81. Beck C L, Doyle J, Glover K. Model reduction of multidimensional and uncertain systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(10): 1466-1477.
82. Beck C L, Doyle J. A necessary and sufficient minimality condition for uncertain systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(10): 1802-1813.
83. Perv K, Shafai B. Balanced realization and model reduction of singular systems[J], *International Journal of System Science*, 1994, 25(6): 1039-1052.
84. Liu W Q, Sreeram V. Model reduction of singular systems[J], *International Journal of System Science*, 2001, 32(10): 1205-1215.
85. Stykel T. Gramian-based model reduction for descriptor systems[J], *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2004, 16(4): 297-319.
86. Zhang L, Lam J, Huang B, Yang G H. On gramians and balanced truncation of discrete-time bilinear systems[J], 2003, *International Journal of Control*, 76(4): 414-427.
87. Lam J, Yang G H. Balanced model reduction of symmetric composite systems[J], *International Journal of Control*, 1996, 65(6): 1031 - 1043.
88. Farhood M, Dullerud G E. Model Reduction of Nonstationary LPV Systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 181-196.
89. Li L. Model Reduction for Linear Parameter-Dependent Systems[C], *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008, 4048-4053.
90. Sandberg H. Balanced truncation of linear time-varying systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(2): 217-229.
91. Sandberg H. A case study in model reduction of linear time-varying systems[J], *Automatica*, 2006, 42(3): 467-472.
92. Farhood M, Dullerud G E. On the balanced truncation of LTV systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(2): 315-320.

93. Farhood M, Beck C L, Dullerud G E. Model reduction of periodic systems: a lifting approach[J], *Automatica*, 2005, 41(6): 1085-1090.
94. Liu H, Ho D W C, Sun F. A Constructive Approach to Approximate Linear Periodic Systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(3): 541-546.
95. White L B, Mahony R, Brushe G D. Lumpable hidden Markov models-model reduction and reduced complexity filtering[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2297-2306.
96. Dey S, Mareels I. Reduced-complexity estimation for large-scale hidden Markov models[J], *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(5), 1242-1249.
97. Kotsalis G, Megretski A, Dahleh M A. Balanced Truncation for a Class of Stochastic Jump Linear Systems and Model Reduction for Hidden Markov Models[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(11): 2543-2557.
98. Dorneanu B, Bildea C S, Grievink J. On the application of model reduction to plantwide control[J], *Computers & Chemical Engineering*, 2009, 33(3): 699-711.
99. Safonov M G, Chiang R Y, Limebeer D J N. Optimal Hankel model reduction for nonminimal systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(4): 496-502.
100. Varga A, Anderson B D O. Accuracy-enhancing methods for balancing-related frequency-weighted model and controller reduction[J], *Automatica*, 2003, 39(5): 919-927.
101. Diab M, Liu W Q, Sreeram V. A new approach for frequency weighted L_2 model reduction of discrete-time systems[J], *Optimal Control Applications and Methods*, 1998, 19(3): 147-167.
102. Iwasaki T, Hara S, Yamauchi H. Dynamical system design from a control perspective: finite frequency positive-realness approach[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1337- 1354.
103. Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41-59.

104. Iwasaki T, Hara S, Fradkov A L. Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi)finite ranges[J], *Systems & Control Letters*, 2005, 54(7): 681-691.
105. Iwasaki T, Hara S. Robust control synthesis with general frequency domain specifications: static gain feedback case[C], *Proceeding of American Control Conference*, Boston, Massachusetts, USA, 2004, 4613-4618.
106. Iwasaki T, Hara S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma[J], *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(5-6): 415-434.
107. Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control[J], *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421-448.
108. Wang H, Yang G H. A finite frequency approach to filter design for uncertain discrete-time systems[J], *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, 22(6): 533-550.
109. Luus R. Optimization in model reduction[J], *International Journal of Control*, 1980, 32(5): 741-747.
110. Yan W Y, Lam J. An approximate approach to H_2 optimal model reduction[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*[J], 1999, 44(7): 1341-1358.
111. Assuncao E, Marchesi H F, Teixeira P C M, Peres P L D. Global optimization for the H_∞ -norm model reduction problem[J], *International Journal of Systems Science*, 2007, 38(2): 125 - 138. . .
112. Herjolfsson G, Evarsson B, Hauksdottir A S, Sigursson S. Closed form L_2/H_2 -optimising of zeros for model reduction of linear continuous time systems[J], *International Journal of Control*, 2009, 82(3): 555 - 570.
113. Grigoriadis K M. Optimal H_∞ model reduction via linear matrix inequalities: continuous- and discrete-time cases[J], *Systems & Control Letters*, 1995, 26(5): 321-333.
114. Grigoriadis K M. L_2 and L_2-L_∞ model reduction via linear matrix inequalities[J], *International Journal of Control*, 1997, 68(3): 485-498.

115. Xu S, Lam J, Huang S, Yang C. H_∞ model reduction for linear time-delay systems: continuous-time case[J], International Journal of Control[J], 2001, 74(1): 1062 - 1074.
116. Xu S, Lam J. H_∞ model reduction for discrete-time singular systems[J], Systems and Control Letters, 2003, 48(2): 121-133. SIAM
117. Xu S, Chen T. H_∞ Model Reduction in the Stochastic Framework [J], SIAM Journal on Control and Optimization, 2003, 42(4): 1293-1309.
118. Zhang L, Huang B, Lam J. H_∞ model reduction of Markovian jump linear systems[J], Systems & Control Letters, 2003, 50(2): 103-118.
119. Gao H, Lam J, Wang C, Xu S. H_∞ model reduction for discrete time-delay systems: delay-independent and dependent approaches[J], International Journal of Control, 2004, 77(4): 321-335.
120. Gao H, Lam J, Wang C, Wang Q. Hankel norm approximation of linear systems with time-varying delay: continuous and discrete cases[J], International Journal of Control, 2004, 77(17): 1503-1520.
121. Zhang L, Huang B, Chen T. Model Reduction of Uncertain Systems with Multiplicative Noise Based on Balancing[J], SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 45(5): 1541-1560.
122. Wu L, Zheng W X. Weighted H_∞ model reduction for linear switched systems with time-varying delay[J], Automatica, 2009, 45(1): 186-193.
123. Ebihara Y, Hirai Y, Hagiwara T. On model reduction for discrete-time linear time-invariant systems using linear matrix inequalities[J], Asian Journal of Control, 2008, 10(3): 291-300.
124. Ebihara Y, Hagiwara T. On H_∞ model reduction using LMIs[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(7): 1187- 1191.
125. Geromel J C, Egas R G, Kawaoka F R R. H_∞ model reduction with application to flexible systems[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(3): 402-406.

126. Geromel J C, Kawaoka F R R, Egas R G. Model reduction of discrete time systems through linear matrix inequalities[J], *International Journal of Control*, 2004, 77(10): 978-984.
127. Gao H, Lam J, Wang C. Model simplification for switched hybrid systems[J], *Systems & Control Letters*, 2006, 55(12): 1015-1021.
128. Zhang L, Shi P, Boukas E K, Wang C. H_∞ model reduction for uncertain switched linear discrete-time systems[J], *Automatica*, 2008, 44(11): 2944-2949.
129. Zhang L, Boukas E K, Shi P. H_∞ model reduction for discrete-time Markov jump linear systems with partially known transition probabilities[J], *International Journal of Control*, 2009, 82(2): 343-351.
130. Lee K H, Huang B. H_∞ structured model reduction algorithms for linear discrete systems via LMI-based optimisation[J], *International Journal of Systems Science*, 2009, 40(7): 1464-5319.
131. Sandberg H. Model reduction of linear systems using extended balanced truncation[C], *Proceeding of American Control Conference*, Seattle, Washington, USA, 2008, 4654-4659.
132. Schuler S, Allgower F. l_∞ -gain model reduction for discrete-time systems via LMIs[C], *Proceeding of American Control Conference*, St. Louis, Missouri, USA, 2009, 5701-5706.
133. Lall S, Krysl P, Marsden J E. Structure-preserving model reduction for mechanical systems[J], *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, 84(1-4): 304-318.
134. Tjärnström F, Ljung L. L_2 Model reduction and variance reduction[J], *Automatica*, 2002, 38(9): 2002.
135. Li L, Paganini F. Structured coprime factor model reduction based on LMIs[J], *Automatica*, 2005, 41(1): 145-151.
136. Yang G H, Lum K Y. Comparisons among robust stability criteria for linear systems with affine parameter uncertainties[J], *Automatica*, 2007, 43(3): 491-498.
137. Oliveira M C de, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition[J], *Systems & Control Letters*, 1999, 37(4): 261-265.

138. Peaucelle D, Arzelier D, Bachelier O, Bernussou J. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty[J], Systems & Control Letters, 2000, 40(1): 21-30.
139. Ebihara Y, Hagiwara T. A dilated LMI approach to robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems[J], Automatica, 2005, 41(11): 1933-1941.
140. Oliveira Ricardo C L F, Peres P L D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions[J], Systems & Control Letters, 2006, 55(1): 52-61.
141. Geromel J C, Korogui R H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent lyapunov functions[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(12): 1984-1989.
142. Apkarian P, Tuan H D, Bernussou J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(12): 1941-1946.
143. Mahmoud M S, Xie L. Positive real analysis and synthesis of uncertain discrete time systems[J], IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 2000, 47(3): 403-406.
144. Duan Z, Huang L, Wang L. Multiplier design for extended strict positive realness and its applications[J], International Journal of Control, 2004, 77(17): 1493-1502.
145. Xie L, Lu L, Zhang D, Zhang H. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems[J], Automatica, 2004, 40(5): 873-880.
146. Duan Z, Zhang J, Zhang C, Mosca E. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems[J], Automatica, 2006, 42(11): 1919-1926.
147. Zhou S, Lam J, Feng G. New characterization of positive realness and control of a class of uncertain polytopic discrete-time systems[J], Systems & Control Letters, 2005, 54(5): 417-427.

148. Duan Z, Wang J, Huang L. Parameter-dependent Lyapunov function method for a class of uncertain nonlinear systems with multiple equilibria[J], *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2007, 26(2): 147-164.
149. Mehdi D, Boukas E K, Bachelier O. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems[J], *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2004, 21(1): 1-13.
150. Syrmos V L, Abdallah C T, Grigoriadis K. "Static output feedback-a survey[J], *Automatica*, 2007, 33(2): 125-137. 1997.
151. Brunner U A. New method for the design of a reduced-order controller[J], *International Journal of Control*, 1990, 52(5): 1366-5820.
152. Zeng J, Lin D, Cheng P. Reduced-order controller design for the general H_∞ control problem[J], *International Journal of Systems Science*, 2006, 37(5): 1464-5319.
153. Papageorgiou C, Smith M C. Positive real synthesis using matrix inequalities for mechanical networks: application to vehicle suspension[J], *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(3): 423-435.
154. Blanchini F, Szaiaer M. A convex optimization approach to fixed-order controller design for disturbance rejection in SISO systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(4): 784-789.
155. Byrns Jr E V, Sweriduk G D, Calise A J. Optimal H_2 and H_∞ fixed-order dynamic compensation using canonical forms[J], *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 1992, 2(4): 243-260.
156. Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896-911.
157. Blondel V, Tsitsiklis J N. NP-hardness of some linear control design problems[J], *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, 35(6): 1237-1248.
158. Ang K H, Chong G, Li Y. PID control system analysis, design, and technology[J], *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, 13(4): 559-576.
159. Visioli A. *Practical PID Control*, Springer, London, UK, 2006.

160. Feng Z, Allen R. Reduced order H_∞ control of an autonomous underwater vehicle[J], Control Engineering Practice, 2004, 12(12): 1511-1520.
161. Yung C F. Reduced-order H_∞ controller design—an algebraic Riccati equation approach[J], Automatica, 2000, 36(6): 923-926.
162. Gadewadikar J, Lewis Frank L, Xie L, Kucera V, Abu-Khalaf M. Parameterization of all stabilizing H_∞ static state-feedback gains: Application to output-feedback design[J], Automatica, 2007, 43(9): 1597-1604.
163. Lee K H, Lee J H, Kwon W H. A global BMI algorithm based on multiobjective and structured controls for discrete-time systems[J], International Journal of Robust Nonlinear Control, 2004, 14(16): 1327-1343.
164. Kanev S, Scherer C, Verhaegen M, De Schutter B. Robust output-feedback controller design via local BMI optimization[J], Automatica, 2004, 40(7): 1115-1127.
165. Henrion D, Sebek M, Kucera V. Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(7): 1178-1186.
166. Henrion D, Lasserre J B. Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(2): 192-202.
167. Apkarian P, Noll D, Tuan H D. Fixed-order H_∞ control design via a partially augmented Lagrangian method[J], International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(12): 1137 - 1148.
168. Apkarian P, Noll D. Nonsmooth H_∞ synthesis[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(1): 71-86.
169. Gumussoy S, Overton M L. Fixed-order H_∞ controller design via HIFOO, a specialized nonsmooth optimization package[J], Proceeding of 2008 American Control Conference, 2008, 2750-2754.
170. Fujisaki Y, Oishi Y, Tempo R. Mixed Deterministic/Randomized Methods for Fixed Order Controller Design[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2033-2047.

171. Kim S J, Moon Y H, Kwon S. Solving Rank-Constrained LMI Problems With Application to Reduced-Order Output Feedback Stabilization[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1737-1741.
172. Grigoriadis K M, Skelton R E. Low order control design for LMI problems using alternating projection methods[J], Automatica, 1996, 32(8): 1117-1125.
173. Iwasaki T, Skelton R E. The XY -centering algorithm for the dual LMI problems: A new approach to fixed order control design[J], International Journal of Control, 1995, 62(6): 1257-1272.
174. El Ghaoui L, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(8): 1171 - 1176.
175. Orsi R, Helmke U, Moore J B. A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities[J], Automatica, 2006, 42(11): 1875-1882.
176. He Y, Wang Q G. An Improved ILMI Method for Static Output Feedback Control With Application to Multivariable PID Control[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(10): 1678-1683.
177. Cao Y Y, Lam J, Sun Y X. Static output feedback stabilization: An ILMI approach[J], Automatica, 1998, 34(6): 1641 - 1645.
178. Leibfritz F. An LMI-based algorithm for designing suboptimal static H_2/H_∞ output feedback controllers[J], SIAM Journal of Control and Optimization, 2001, 39(6): 1711-1735.
179. Shaked U. An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(5): 866-872.
180. Suplin V, Shaked U. Robust H_∞ output-feedback control of linear discrete-time systems[J], Systems & Control Letter, 2005, 54(8): 799-808.
181. Mattei M. Sufficient conditions for the synthesis of H_∞ fixed-order controllers[J], International Journal of Robust Nonlinear Control, 2000, 10(15): 1237-1248.

182. Lo J C, Lin M L. Robust H_∞ nonlinear control via fuzzy static output feedback[J], IEEE Transactions on circuits systems I: Fundamental Theory and Applications, 2003, 50(11): 1494-1502.
183. Ho D W C, Lu G P. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach[J], International Journal of Control, 2003, 76(2): 105-115.
184. Cesar A.R. Crusius, and Trofino A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(5): 1053-1057.
185. Da Souza C E, Trofino A, An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems[J], International Journal of Control, 2000, 73(8): 696-703.
186. Prempain E, Postlethwaite I. Static output feedback stabilization with H_∞ performance for a class of plants[J], System & Control Letter, 2001, 43(3): 159-1665.
187. Bara G I, Boutayeb M. Static output feedback stabilization with H_∞ performance for linear discrete-time systems[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2): 250-254.
188. De Oliveira M C, Geromel J C, Bernussou J. Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems[J], International Journal of Control, 2002, 75(9): 666 - 679.
189. Lee K H, Lee J H, Kwon W H. Sufficient LMI conditions for H_∞ output feedback stabilization of linear discrete-time systems[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(4): 675-680.
190. Dong J, Yang G H. Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(10): 1930-1936.
191. Dong J, Yang G H. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties[J], Systems & Control Letters, 2008, 57(2): 123-131.
192. Niculescu S I. Delay Effects on Stability[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

193. Richard J P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems[J], *Automatica*, 2003, 39(10), 1667-1694.
194. 朱训林. 基于LMI技术的时滞系统稳定性分析与综合[D]. 沈阳, 东北大学, 2008.
195. Gao H, Chen T W. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay[J], *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 896-911.
196. Song S H, Kim J K, Yim C H, Kim H C. H_∞ control of discrete-time linear systems with time-varying delays in state[J], *Automatica*, 1999, 35(9): 1587-1591.
197. Esfahani S H, Petersen I R. An LMI approach to output-feedback-guaranteed cost control for uncertain time-delay systems[J], *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(3): 157-174.
198. Xu S, Chen T W. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers[J], *Systems & Control Letters*, 2004, 51(3-4): 171-183.
199. Gao H, Lam J, Wang C, Wang Y. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay[J], *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2004, 151(6): 691-698.
200. He Y, Wu M, Liu G, She J. Output Feedback Stabilization for Discrete-time Systems with A Time-varying Delay[C], *Proceeding of Chinese Control Conference, Zhangjiajie*, 2007, 64-70.
201. Zhang X M, Han Q L. A new finite sum inequality approach to delay-dependent H_∞ control of discrete-time systems with time-varying delay[J], *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(6): 630-647.
202. Leite V J S. Robust state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach[J], *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2009, Published online, doi:10.1093/imamci/dnp018
203. Hong J L. An H_∞ Output Feedback Control for Discrete-Time State-Delayed Systems[J], *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2004, 23(4): 255 - 272.

204. Montestruque L A, Antsaklis P. Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1562-1572.
205. Wang Y L, Yang G H. H_∞ control of networked control systems with time delay and packet disordering[J], IET Control Theory and Applications, 2007, 1(5): 1344-1354.
206. Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays[J], International Journal of Control, 2003, 76(1): 48-60.

致 谢

本文的工作是在导师杨光红教授的悉心教诲和指导下完成的。从论文的选题、资料的收集到内容的整理成文，或者说这四年来我所取得的每一份成绩都凝聚着导师的辛勤汗水。杨老师严谨的态度、渊博的学识、开拓创新的精神和大师的风范，永远都是我学习的榜样。值此论文完成之际，我在此特向杨老师表示深深的敬意和衷心的感谢，道一声：老师，谢谢您！导师的培育之恩我将永远铭记在心。

特别感谢我的硕士导师石海彬副教授，在我读硕士和博士期间，石老师在学术上给予我细心的指导，在生活上给予无微不至的关怀，为我学业的顺利完成铺平了道路，在此谨向石老师表示诚挚的谢意。同时特别感谢井元伟教授、高立群教授、赵军教授等东北大学控制理论与导航技术研究所老师的支持。

感谢实验室的师兄董久祥、常晓恒、朱训林、王玉龙、王恒、关威和师姐叶丹、沈喆。感谢与我并肩奋战的博士丁大伟、金小峥、李平、马宏军、张晓妮、以及沈谋全、刘英英、温丹丽、孟宪吉、李霄剑、顾影、郭祥贵、郑伯超、龙跃李健、郝立颖等对我学习和生活上的关心与帮助，他们的支持与帮助伴我度过了难忘的博士学习生涯。感谢他们构建了具有浓郁学术氛围、充满团结与协作精神的伟大集体。我从他们身上感受到了集体的温暖，从他们身上学到的东西使我受益匪浅，我会怀着一个感恩的心投入到今后的学习和生活中。

尤其感谢父母亲的养育之恩，春夏秋冬、日日夜夜，你们在千里之外的思念与期盼是我前进的动力，感谢我的爱人王建英默默地承受与分担我的压力，在此论文完成之际，愿你们永远健康快乐！

攻读博士学位期间所做的主要工作

已发表和已录用的论文

1. Xin Du and Guang-Hong Yang. New characterisations of positive realness and static output feedback control of discrete-time systems[J], International Journal of Control, (2009, 82(8), 1485-1495. SCI & EI 检索).
2. Xin Du and Guang-Hong Yang. H_∞ Model Reduction of Linear Continuous-time Systems over Finite Frequency Interval[J], IET Control Theory and Applications, 已接受. (SCI & EI 检索源).
3. Xin Du and Guang-Hong Yang. Improved LMI Conditions for H_∞ Output Feedback Stabilization of Linear Discrete-Time Systems [J], International Journal of Control, Automation, and Systems 已接受. (SCI & EI 检索源).
4. Xin Du and Guang-Hong Yang. H_∞ model reduction of linear continuous-time systems over finite frequency interval-LMI based approach [C], Proceedings of American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 2009, 5725-5730. (EI & ISTP 检索).
5. Xin Du and Guang-Hong Yang. LMI characterizations of positive realness and static output feedback positive real control of discrete-time systems[C], Proceedings of American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 2009, 5132-5137. (EI & ISTP 检索).
6. Xin Du and Guang-Hong Yang. Switched system based approach to analysis and synthesis of discrete-time linear systems with time-varying state delay[C], Proceedings of American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 2009, 3033-3038. (EI & ISTP 检索).
7. Xin Du and Guang-Hong Yang. LMI conditions for H_∞ static output feedback control of discrete-time systems[C], Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008, 5450-5455. (EI & ISTP 检索).
8. Xin Du and Guang-Hong Yang. Reliable static output control for a class of uncertain systems via high-order sampled-data hold controller [C], Proceedings of American Control Conference, Washington, USA, 2008, 4344-4349. 2008. (EI & ISTP 检索).
9. Xin Du and Guang-Hong Yang. Switching Control in Adaptive State Feedback Tracking of Systems with Actuator Failures [C], Proceedings of the 16th IEEE In-

ternational Conference on Control Applications, Singapore, 2007, 622 - 627. 2007.
(EI & ISTP 检索).

10. Xin Du and Guang-Hong Yang. An Adaptive Approach to State Feedback Tracking Control of Systems with Actuator Failures [C], Proceedings of American Control Conference, New York City, USA, 2007, 3987-4002. (EI & ISTP 检索).

参加的科研项目:

1. 国家自然科学基金项目“线性系统容错量化反馈控制方法研究”(60674021), 主要参与者
2. 国家自然科学基金项目“非脆弱线性控制系统设计”(60674021), 主要参与者
3. 教育部新世纪优秀人才支持计划“容错控制系统的多目标优化设计”(NCET-04-0283), 主要参与者
4. 教育部博士点专项基金“离散时间系统非脆弱控制器设计”(20060145019), 主要参与者。

获奖情况:

1. 2006-2007年度东北大学优秀博士生奖学金
2. 2007-2008年度东北大学优秀博士生奖学金
3. 2007-2008年度东北大学优秀团员