摘　要

本文主要研究求解线性代数方程组 $Ax = b$ 的整体松弛 (非定常) 并行多分裂 (多参数) 迭代法. 通过选用多个松弛因子，我们的方法覆盖了已有的许多并行多分裂迭代法，具有很强的普遍性. 本文详细地比较了并行多分裂之间的敛散速度，并用数值试验验证了方法的高效性.

第一章　引言部分. 介绍与本文内容有关的背景知识和本文的研究内容.

第二章　本文研究了局部松弛并行多分裂 TOR 迭代法和整体松弛并行多分裂 SOR, AOR 和 TOR 迭代法，并详细地比较了并行多分裂之间的敛散速度. 数值试验验证了整体松弛并行多分裂方法的高效性.

第三章　本文研究了非定常多分裂多参数 TOR 迭代法和整体松弛非定常多分裂多参数 TOR 迭代法，并对非定常多分裂多参数 TOR, AOR, SOR, G-S, 外插 Jacobi 以及 Jacobi 迭代法的敛散速度做了细致地比较. 数值试验验证了我们方法的高效性.

第四章　本文研究了求解线性代数方程组 $Ax = b$ 的并行多分裂对称 TOR 迭代法 (STOR) 和并行多分裂非对称 TOR 迭代法 (USTOR)，并给出了这些方法与并行多分裂 JOR 迭代法之间敛散速度的比较.

第五章　本文将整体松弛并行多分裂法应用于非线性方程组的求解，构造并研究了非线性方程组的牛顿 - 整体松弛并行多分裂 TOR 法，建立了局部收敛性定理，估计了收敛速度.

第六章　本文总结了本文所取得的成果，并对方法的未来发展进行了展望.

关键词: 线性代数方程组，并行多分裂，整体松弛法，收敛性，敛散速度， TOR 迭代法，非线性方程组.

Abstract

In this paper, we consider the global relaxed (nonstationary) parallel multisplitting (multi-parameter) TOR iterative methods for solving linear systems of algebraic equations Ax=b, Our methods use several relaxed factors, cover with many parallel multisplitting iterative methods in the literature, and have all-right universality. The paper compares the convergent and divergent rates of parallel multisplitting relaxed methods in detail. Furthermore, efficiency of the global relaxed method are shown by numerical experiment in MPP.

In chapter one, we give a detailed review for the previous work on the subject, including background and development situation.

In chapter two, local relaxed parallel multisplitting TOR iterative method and global relaxed parallel multisplitting AOR, SOR and TOR iterative method are studied, Comparisons of convergent and divergent rates of parallel multisplitting relaxed methods are given in detail. Numerical experiment illustrates the efficiency of our methods.

In chapter three, we study nonstationary multisplitting multi-parameter TOR iterative method and global relaxed nonstationary multisplitting multi-parameter TOR iterative method, and compare the convergent and divergent rates of nonstationary multisplitting multi-parameter TOR, AOR, SOR, Gauss-Seidel, extrapolated Jacobi as well as Jacobi iterative methods in detail.Numerical experiment illustrates the efficiency of our methods.

In chapter four, we study parallel multisplitting symmetric TOR iterative mehtod (STOR) and parallel multisplitting unsymmetric TOR iterative mehtod(USTOR) for solving linear systems of algebraic equations Ax=b, compare the convergent and divergent rates of these methods and parallel multisplitting JOR iterative method.

In chapter five, we apply global relaxed parallel multisplitting iterative method to nonlinear equations, construct and study the newton-global relaxed parallel multisplit-

ting TOR iterative methods for solving systems of nonlinear equations. The convergent theorems is set up and the rate of convergent is estimated.

In chapter six, we summarize the obtained results in this paper, and prospect future development of our methods.

Key words: linear systems of algebraic equations, parallel multisplitting, global relaxed method, convergent, convergent and divergent rate, TOR iterative method, system of nonlinear equations.

第一章 引言

近年来，世界上和我国高性能并行计算机的发展取得长足进展，每秒数万亿次、数十万亿次乃至数百万亿次浮点运算计算能力的超级并行机已相继研制成功，使得以前许多无法求解和研究的问题现在进行研究已经成为可能. 随着计算技术和计算方法的飞速发展，当今几乎所有学科均趋向定量化和精确化，从而产生了诸如计算物理学、计算化学、计算材料学、计算力学、计算生物学、计算气象学和计算电子学等新兴学科，在世界上逐渐形成了所谓计算科学与工程 CSE(Computational Science and Engineering) 的计算性学科分支. 计算，增强了人们从事科学研究的能力，拓宽了人们洞察自然的视野，加速了科学化为生产力的过程，深刻地改变着人类认识世界和改造世界的方法和途径. 计算科学 (Computational Science), 已经和传统的理论科学与实验科学并列成为三种科学研究的手段，它们彼此相辅相成地推动着人类科技发展和社会进步.

许多大型科学与工程计算问题都归结为大型和超大型稀疏线性代数方程组的求解. 其求解时间在整个问题求解时间中占有很大的比重，有的甚至达到 80% . 由于现今科学研究和大型项目中各种复杂的课题对计算精度和计算速度的要求越来越高，因此，作为大规模科学计算基础的数值线性代数方程组的高效并行求解引起了人们的普遍关注，而高性能并行计算机为大型稀疏线性方程组的求解提供了计算工具，但如何充分发挥并行计算机的潜在性能、研究大型稀疏线性方程组高效并行求解，是当前急待解决的问题，已成为研究的热点.

求解线性方程组的方法一般可分为直接法和迭代法两类. 直接法的工作主要集中在六、七十年代. 直接法是通过对系数矩阵进行变换，如 Gauss 消元、 Cholesky 分解、 QR 分解等，将原方程组化为三角或三对角等容易求解的形式，然后通过回代或追赶等方法得到方程组的解. 在精确运算下，直接法能精确地求解任何非奇异方程组. 方法对适度规模 (如 A 的阶数不超过 1000) 的稠密系统是有效的. 然而，当 A 是稀疏的，即当 A 的大多数元素为零时，在一些特殊情况下 (如 A 的稀疏结构不规则)，矩阵的许多零元素会产生“填充”(也可用稀疏技术改进之). 当 n 较大时，这使得直接法相对于其它方法是更费时的. 目前，并行直接法主要是研究三对角、块三对角、带状方程组的并行求解，以及一般稀疏线性方程组的多前点 (Multifrontal) 方法和超节点 (Supernodal) 技术等；迭代法基于算子 A

对某些向量的重复作用，在线性解法器的众多方法中，这些方法扮演着重要的角色. 因为它们既避免了填充的问题，也避免了需要对物理问题有深入的了解. 从迭代法的发展看，五十年代到七十年代，由于电子计算机的发展，人们开始考虑和研究在计算机上用迭代法求线性方程组的近似解，并发展了许多非常有效的方法，如 Jacobi 方法、 Gauss-Seidel 方法、SOR 方法、AOR 方法、SSOR 方法等以及这些方法的改进和加速形式. 目前这些方法又有新的发展，作为预条件子和其它方法 (如 Krylov 子空间方法) 结合使用来直接求解大型稀疏线性方程组. 最早给出非定常迭代法 (Nonstationary Iterative Method) 的定义及基本概念的是 Young. 第一个以非定常迭代法是非定常 Richardson 迭代法，由此方法可直接推广而得最速下降法、Chebyshev 半迭代法、预条件共轭梯度 (PCG: Preconditioned Conjugate Gradient) 方法和广义共轭梯度 (GCG: Generalized CG) 方法等. 然而，早在五十年代早期， Hestenes 和 Stiefel 就提出了共轭梯度 (CG) 方法，只是起初它一直被视为直接方法，又由于 CG 方法在实际计算中很快便失去了理论上的正交性而使人们将研究重点放在了 Gauss 消去法和经典迭代法上，直到 1971 年 Reid 的文章才使 CG 方法被视为迭代法而开始了广泛的研究. 非定常迭代法的发展一直沿着两个方向在发展. 其一是以 CG 方法为典型代表的 Krylov 子空间迭代法，其二是基于矩阵分裂的分裂迭代法，如非定常 Richardson 迭代法、内外迭代法以及最近的非定常多分裂迭代法等.

大型稀疏线性方程组的并行计算研究主要集中在两个方面：其一是开发传统算法的并行性，使之适应并行计算机计算，如 Gauss 消去法、共轭梯度法、 Jacobi 方法等；其二是致力于研制新的有效的并行解法，如三对角方程组的分裂法、循环约化法、多分裂并行迭代法、异步迭代算法、并行 krylov 子空间迭代法等. 本文主要研究的是针对系数矩阵为大型稀疏时的线性方程组的并行多分裂迭代法.

为了在并行机上计算线性代数方程组 $Ax = b$ 的解， 1985 年， O'Leary 和 White[1] 基于矩阵的多分裂提出了并行多分裂迭代法. 目前，许多文章都对该方法进行研究并给出其收敛性定理： Yuan[2] 、 Frommer 和 Mayer[3-4] 、 Wang[5] 和 Chang[6] 分别研究并分析了当 A 是 H 矩阵时 (局部松弛的)JOR 、SOR 、AOR 和 TOR 法；Song[7-8] 对不同的 (并行) 多分裂进行了比较； Climent[9] 分析了并行多分裂交错迭代法的收敛性； Yun[10] 等研究了 ILU 分解下的并行多分裂，并给出了数值试验； Bai[11] 给出了 SOR 、 AOR 和 JOR 松弛法敛散速度的比较： Cao[12] 、Gu[13] 分析了不同权矩阵的收敛性；其他作者也对 A 分别是 L 矩阵、 M 矩阵及 p- 正规矩阵时的松弛法进行了研究； Gu[14-15] 、 Cao[12, 16] 等对二级多分裂也进行了深入的研究； Li[17] 构造和研究了解非线性方程组的牛顿 - 并行矩阵多分裂算法，建立了收敛性定理，估计了收敛速度．总之，关于多分裂的研究及结果如雨后春笋般出现．本文研究的是求解线性代数方程组 $Ax = b$ 的整体松弛 (非定常) 并行多分裂 (多参数) 迭代法，通过选用多个松弛因子，我们的方法覆盖了许多文献中已见的并行多分裂迭代法，具有很强的普遍性．本文详细地比较了并行多分裂之间的敛散速度，并在一台 MPP 并行机上进行多次试验．大量的数值试验表明：我们的方法确实对文献的方法进行了有效的改进．

第二章　整体松弛并行多分裂 TOR 法及敛散速度的比较

§2.1　整体松弛 SOR 方法

许多大型科学与工程计算问题最终归结为求解线性代数方程组

$$Ax = b, \tag{2.1.1}$$

其中 $A \in R^{N\times N}$ 是非奇异矩阵，$x \in R^N$ 为待求解向量，且设 $x^* \in R^N$ 为 (2.1.1) 的解.

定义 2.1.1　令 M_k, N_k, E_k 均是 $N\times N$ 矩阵，$k=1,2,...,\alpha$, 若满足

$a)$ $A = M_k - N_k, M_k^{-1}$ 存在.

$b)$ $\sum\limits_{k=1}^{\alpha} E_k = I$($I$ 为 $N\times N$ 单位矩阵), E_k 是非负对角矩阵.

则称三元组 $(M_k, N_k, E_k)(k=1,2,...,\alpha)$ 为矩阵 A 的一个 **多分裂**.

方程组 (2.1.1) 可以写成

$$x = M_k^{-1}N_k x + M_k^{-1}b, k=1,2,...,\alpha.$$

用权矩阵 E_k 组合这 α 个方程，得到

$$x = \sum_{k=1}^{\alpha} E_k x = \sum_{k=1}^{\alpha} E_k M_k^{-1}N_k x + \sum_{k=1}^{\alpha} E_k M_k^{-1} b = Hx + Gb,$$

其中 $H = \sum\limits_{k=1}^{\alpha} E_k M_k^{-1} N_k, G = \sum\limits_{k=1}^{\alpha} E_k M_k^{-1}$.

迭代格式

$$x^{(m+1)} = Hx^{(m)} + Gb, m = 0,1,...,$$

称为 **多分裂迭代格式**, H 称为多分裂迭代法的迭代矩阵，其算法如下：

算法 1 (并行多分裂方法).

任取初始近似 $x^{(0)} \in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k=1,2,...,\alpha$, (并行) 求解 y_k.

i) 对 $k=1,2,...,\alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$M_k y_k = N_k x^{(m)} + b. \tag{2.1.2}$$

ii) 计算

$$x^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{\alpha} E_k y_k. \tag{2.1.3}$$

我们看到，在 (2.1.2) 中每个 y_k 的计算是相互独立的．因此，若有一台具有一个主机与 α 个处理机的并行机，则算法 1 可这样实现：每台处理机处理一个局部迭代 (2.1.2), 在每一步，将局部迭代值 $y_k(k=1,2,...,\alpha)$ 送到主机进行加权平均而得到整体迭代值 $x^{(m+1)}$, 即 (2.1.3) 的计算．然后将 $x^{(m+1)}$ 送回各处理机以开始下一步局部迭代．注意到如果 E_k 的某些对角元素为零，则 y_k 的相应分量无需计算，从而大大节省工作量．由此可见 E_k 也起到调配各处理机上工作量的作用．我们应尽量选择 E_k 使得各处理机间大致做到负载平衡，从而减少同步等待的开销．可见，算法 1 具有自然的并行性.

定义 2.1.2　$A=(a_{ij})\in R^{N\times N}, Z^{N\times N}=\{A\in R^{N\times N}|a_{ij}\le 0, \forall i\ne j\}$.

(1) 若 $a_{ij}\ge 0, i,j=1,2,...,n$, 则称 A 为非负矩阵，并表示为 $A\ge 0$; 记 $|A|=(|a_{ij}|)$; 若 $A-B\ge 0$, 则表示为 $A\ge B$;

(2) A 的比较矩阵为 $\langle A\rangle=(a_{ij})$, 其中 $i\ne j$ 时，$a_{ij}=-|a_{ij}|; i=j$ 时 $a_{ij}=|a_{ij}|$;

(3) 若 $A\in Z^{N\times N}$ 且 $A^{-1}\ge 0$, 称 A 为 M 矩阵;

(4) 若 $\langle A\rangle$ 为 M 矩阵，称 A 为 H 矩阵.

引理 2.1.3[18]　若 $A,B\in R^{N\times N}, D=diag(A)$.

(a) 若 A 是 M 矩阵，则 $D\ge 0$, 且 D 非奇异;

(b) 若 A 是 M 矩阵，$B\in Z^{N\times N}$, 且 $A\le B$, 则 B 是 M 矩阵;

(c) 若 A 是 H 矩阵，则 A 非奇异，且 $|A|^{-1}\le\langle A\rangle^{-1}$;

(d) 已知 A,B 均是 M 矩阵，若 $A\le B$, 则 $A^{-1}\ge B^{-1}$;

(e) 若 A 是 H 矩阵，且 $A=D-B$, 则 D 非奇异，且 $\rho(|D|^{-1}|B|)<1$.

为了提高算法的收敛速度，与传统的 G-S 迭代法引入松弛因子而得 SOR 迭代法类似，通过对算法 1 引入松弛因子，[3] 给出了两种松弛型多分裂迭代法：其一是局部松弛法，即各处理机用 SOR 方法求解 (2.1.2), 而 (2.1.3) 的计算依旧；其二是系统松弛法，即 (2.1.2) 的计算依旧，而对 (2.1.3) 进行松弛外推．适当选取松弛因子，两种松弛型多分裂方法都比原方法 (算法 1) 具有更好的收敛速度．本节考虑将两者进行结合，即对 (2.1.2) 和 (2.1.3) 均进行松弛，所得方法称为 **整体松弛并行多分裂法**, 下面给出两种权方案下的

整体松弛 SOR 方法. 由多分裂格式可得

$$H = I - GA.$$

从而，算法 1 也可写为

$$x^{(m+1)} = (I - GA)x^{(m)} + Gb, m = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1.4}$$

对此迭代格式加以推广，引进

$$G_\lambda = \sum_{k=1}^{\alpha} E_k^\lambda M_k^{-1} E_k^{1-\lambda}, H_\lambda = I - G_\lambda A, \tag{2.1.5}$$

其中 $0 \le \lambda \le 1$, 相应的迭代格式为:

$$x^{(m+1)} = H_\lambda x^{(m)} + G_\lambda b, k = 0, 1, 2, ... \tag{2.1.6}$$

迭代格式 (2.1.6) 称为具有任意权方案的多分裂迭代格式，其中 $\lambda = 1$ 时，称为 **左权格式**, 即原来的迭代格式； $\lambda = 0$ 时，称为 **右权格式**； $\lambda = 1/2$ 时，称为 **对称权格式**. 令

$$A = D - L_k - U_k, k = 1, 2, ..., \alpha,$$

其中 $D = diag(A)$, L_k 为严格下三角矩阵，则 $(D - L_k, U_k, E_k)$ 为 A 的一个多分裂.

算法 2　(**左权整体松弛并行多分裂** SOR **方法** (Left Global Relaxed Multisplitting SOR), **简记为** LGRM-SOR **方法**).

任取初始近似 $x^{(0)} \in R^N$.

对 $m = 0, 1, ...$ 重复做下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k = 1, 2, ..., \alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$(D - \omega_1 L_k)y_k = [(1 - \omega_1)D + \omega_1 U_k]x^{(m)} + \omega_1 b. \tag{局部松弛}$$

ii) 计算

$$x^{(m+1)} = \omega_2 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k y_k + (1 - \omega_2)x^{(m)}. \tag{系统松弛}$$

此算法可写成下面的形式

$$x^{m+1} = H_\omega x^{(m)} + G_\omega b, m = 0, 1, ..., \tag{2.1.7}$$

其中

$$
\begin{aligned}
H_\omega &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k(D-\omega_1 L_k)^{-1}\{(1-\omega_2)(D-\omega_1 L_k)+\omega_2[(1-\omega_1)D+\omega_1 U_k]\}.\\
G_\omega &= \omega_1\omega_2 \sum_{K=1}^{\alpha} E_k(D-\omega_1 L_k)^{-1}.
\end{aligned}
$$

当 $\omega_2=1$ 时，即得 [3] 的局部松弛并行多分裂 SOR 方法：当 $\omega_1=1$ 时得 [3] 的系统松弛并行多分裂方法. 可见， LGRM-SOR 方法是局部松弛并行多分裂 SOR 法和系统松弛并行多分裂方法的推广，其中我们选用了两个松弛因子. 可以期望通过适当的选择松弛因子，能得到更快的收敛速度.

关于 LGRM-SOR 方法，我们证明如下的收敛性定理.

定理 2.1.4　设 A 为 H 矩阵, 对 $k=1,2,...,\alpha$, L_k 为严格下三角阵， $A=D-L_k-U_k$, 且 $|A|=|D|-|L_k|-|U_k|$. 如果

$$0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0<\omega_2<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}, \tag{2.1.8}$$

则 LGRM-SOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\omega_1\rho, \rho=\rho(J)$, 而 $J=|D|^{-1}|B|, B=D-A$.

证明: 因为 $\rho(H_\omega)\le\rho(|H_\omega|)$, 故只需在定理条件下证明 $\rho(|H_\omega|)<1$.

由于

$$H_\omega=\sum_{k=1}^{\alpha} E_k(D-\omega_1 L_k)^{-1}\{(1-\omega_2)(D-\omega_1 L_k)+\omega_2[(1-\omega_1)D+\omega_1 U_k]\}.$$

从而

$$|H_\omega|\le|1-\omega_2|I+\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha} E_k|(D-\omega_1 L_k)^{-1}|(|1-\omega_1||D|+\omega_1|U_k|).$$

因为 $D-\omega_1 L_k$ 是 H 矩阵，由引理 2.1.3(c) 知 $|(D-\omega_1 L_k)^{-1}|\le\langle D-\omega_1 L_k\rangle^{-1}$, 所以

$$|H_\omega|\le|1-\omega_2|I+\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha} E_k\langle D-\omega_1 L_k\rangle^{-1}(|1-\omega_1||D|+\omega_1|U_k|).$$

而 $A=D-L_k-U_k=D-B$, 故

$$|D|J=|L_k|+|U_k|.$$

由比较矩阵定义知 $\langle D-\omega_1 L_k\rangle=|D|-\omega_1|L_k|$, 所以有

$$\begin{aligned}|H_\omega| &\leq |1-\omega_2|I+\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}E_k|D-\omega_1 L_k|^{-1}[|D-\omega_1 L_k|+(|1-\omega_1|-1)|D|+\omega_1|D|J|\\ &= |1-\omega_2|I+\omega_2 I-\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\langle D-\omega_1 L_k\rangle^{-1}|D|[(1-|1-\omega_1|)I-\omega_1 J].\end{aligned}$$

设 $e=(1,1,...,1)^T\in R^N$, 因为矩阵 J 是非负的，所以对任意 $\epsilon>0$, 矩阵 $J+\epsilon ee^T$ 是不可约的且所有元素均大于 0. 由 $Perron-Frobenius$ 定理可得：存在向量 $x_\epsilon>0$, 使得 $(J+\epsilon ee^T)x_\epsilon=\rho_\epsilon x_\epsilon$, 其中 $\rho_\epsilon=\rho(J+\epsilon ee^T)$. 由于 $0<\omega_1<2/(1+\rho)$, 所以

$$\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\omega_1\rho(|D|^{-1}|B|)<1.$$

由谱半径的连续性得 $|1-\omega_1|+\omega_1\rho_\epsilon<1$, 且

$$|H_\omega|\leq|1-\omega_2|I+\omega_2 I-\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\langle D-\omega_1 L_k\rangle^{-1}|D|[(1-|1-\omega_1|)I-\omega_1(J+\epsilon ee^T)].$$

两边同时乘以 x_ϵ, 并注意到 $|D|^{-1}\leq\langle D-\omega_1 L_k\rangle^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned}|H_\omega|x_\epsilon &\leq |1-\omega_2 x_\epsilon+\omega_2 x_\epsilon-\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}E_k|D|^{-1}|D|(1-|1-\omega_1|-\omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon\\ &= |1-\omega_2|x_\epsilon+\omega_2(|1-\omega_1|+\omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon.\end{aligned}$$

从而当 $0<\omega_2<2/(1+\rho_{\omega_1})$ 时，有 $|H_\omega|x_\epsilon<x_\epsilon$, 故

$$\rho(|H_\omega|)<1.$$

定理得证. □

当取 $\lambda=0$ 时，可得右权整体松弛并行多分裂 SOR 法，简记为 RGRM-SOR 方法. 类似于定理 2.1.4 的证明过程，也有相应的推论.

推论 2.1.5　设 A 是 H 矩阵, 对 $k=1,2,...,\alpha$, L_k 为严格下三角矩阵, $U_k=D-L_k-A$, 且 $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-|U_k|$, 如果 $\omega_1\in(0,2/(1+\rho)),\omega_2=1$, 则右权局部松弛并行多分裂 SOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $D=diag(A),\rho=\rho(|D|^{-1}|B|)$, 而 $B=D-A$.

推论 2.1.6　设 A 是 H 矩阵，$(D-L_k,U_k,E_k)$ 为 A 的一个多分裂，$\langle A\rangle=|D|-|L_k|-|U_k|,k=1,2,...,\alpha$, 如果 $\omega_1=1,\omega_2\in(0,2/(1+\rho))$, 则右权系统松弛并行多分裂方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $D=diag(A),\rho=\rho(|D|^{-1}|B|)$, 而 $B=D-A$.

定理 2.1.7　设 A 为 H 矩阵, 对 $k=1,2,...,\alpha$, L_k 为严格下三角矩阵, $A=D-L_k-U_k$, 且 $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-|U_k|$. 如果

$$0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0<\omega_2<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}},$$

则 RGRM-SOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\omega_1\rho, \rho=\rho(J)$, 而 $J=|D|^{-1}|B|, B=D-A$.

证明: 由算法 2 知 RGRM-SOR 方法的迭代矩阵为

$$\hat{H}_\omega=\sum_{k=1}^{\alpha}(D-\omega_1L_k)^{-1}\{(1-\omega_2)(D-\omega_1L_k)+\omega_2[(1-\omega_1)D+\omega_1U_k]\}E_k.$$

因为 $\rho(\hat{H}_\omega)\le\rho(|\hat{H}_\omega|)$, 故只需在定理条件下证明 $\rho(|\hat{H}_\omega|)<1$.
类似定理 2.1.4 的证明有

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_\omega| &\le |1-\omega_2|I+\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}|(D-\omega_1L_k)^{-1}|(|1-\omega_1||D|+\omega_1|U_k|)E_k\\
&\le |1-\omega_2|I+\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}\langle D-\omega_1L_k\rangle^{-1}(|1-\omega_1||D|+\omega_1|U_k|)E_k\\
&\le |1-\omega_2|I+\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}|D-\omega_1L_k|^{-1}[|D-\omega_1L_k|+(|1-\omega_1|-1)|D|+\omega_1|D|J|E_k\\
&= |1-\omega_2|I+\omega_2I-\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}\langle D-\omega_1L_k\rangle^{-1}|D|[(1-|1-\omega_1|)I-\omega_1J]E_k\\
&\le |1-\omega_2|I+\omega_2I-\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}\langle D-\omega_1L_k\rangle^{-1}|D|[(1-|1-\omega_1|)I-\omega_1(J+\epsilon ee^T)]E_k.
\end{aligned}$$

两边同时乘以 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_\omega|x_\epsilon &\le |1-\omega_2x_\epsilon+\omega_2x_\epsilon-\omega_2\sum_{k=1}^{\alpha}|D|^{-1}|D|(1-|1-\omega_1|-\omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon E_k\\
&= |1-\omega_2|x_\epsilon+\omega_2(|1-\omega_1|+\omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon.
\end{aligned}$$

从而当满足定理条件时，就有 $|\hat{H}_\omega|x_\epsilon<x_\epsilon$, 故

$$\rho(|\hat{H}_\omega|)<1.$$

定理得证. □

§2.2　整体松弛 TOR 方法

为了进一步提高方法的收敛速度，我们给出多分裂 TOR 方法 (见 [6]) 的整体松弛形式，简记为 LGRM-TOR 方法．令

$$A = D - L_k - F_k - U_k, k = 1, 2, ..., \alpha,$$

其中 $D = diag(A), L_k$ 和 F_k 是严格下三角矩阵， U_k 是严格上三角矩阵，使得 $U_k = D - L_k - F_k - A$, 则 $(D - L_k - F_k, U_k, E_k)$ 为 A 的一个多分裂.

算法 3 (**左权整体松弛并行多分裂** TOR **方法** (Left Global Relaxed Multisplitting TOR), **简记为** LGRM-TOR **方法**).

任取初始近似 $x^{(0)} \in R^{N\times N}$.

对 $m = 0, 1, ...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k = 1, 2, ..., \alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$[D - (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k)]y_k = [(1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)L_k + (\omega_1 - \omega_3)F_k + \omega_1 U_k]x^{(m)} + \omega_1 b.$$

i) 计算

$$x^{(m+1)} = \omega_4 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k y_k + (1-\omega_4)x^{(m)}.$$

该算法可写成下面的形式

$$x^{(m+1)} = H_{LGRM-TOR}x^{(m)} + G_{LGRM-TOR}b, \tag{2.2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_{LGRM-TOR} &= \omega_4 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k M_k^{-1} N_k + (1-\omega_4)I. \\
G_{LGRM-TOR} &= \omega_1\omega_4 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k M_k^{-1} b. \\
N_k &= (1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)L_k + (\omega_1 - \omega_3)F_k + \omega_1 U_k. \\
M_k &= D - (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k).
\end{aligned}$$

选取不同的 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$, 我们将得到下面不同的并行多分裂迭代格式.

$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$	方法	文献	$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$	方法	文献
1, 0, 0, 1	General Multisplitting	[1]	$1,0,0,\omega_4$	LGRM-Jacobi	本文
1, 1, 1, 1	Multisplitting G-S	[1]	$1,1,1,\omega_4$	LGRM-G-S	本文
$\omega_1,0,0,1$	Multisplitting JOR	[3]	$\omega_1,0,0,\omega_4$	LGRM-JOR	本文
$\omega_1,\omega_1,\omega_1,1$	Local Multisplitting SOR	[3]	$\omega_1,\omega_1,\omega_1,\omega_4$	LGRM-SOR	本文
$\omega_1,\omega_2,\omega_2,1$	Local Multisplitting AOR	[11]	$\omega_1,\omega_2,\omega_2,\omega_4$	LGRM-AOR	本文
$\omega_1,\omega_2,\omega_3,1$	Local Multisplitting TOR	[6]	$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$	LGRM-TOR	本文

LGRM-TOR 方法选用 4 个松弛因子，是以上各种多分裂迭代格式的一般形式. 大型和超大型稀疏线性代数方程组的求解时间在整个问题中占有很大的比重，有的甚至达到 80% . 对于 LGRM-TOR 方法，可选用适当的 E_k, 以使每台处理机达到负载平衡，避免同步等待，而且每台处理机若能选用适当的松弛因子，可使收敛速度加快，从而使求解时间大大缩减，这些在本章第四节都用 MATLAB 进行了验证.

关于 LGRM-TOR 方法的收敛性，我们有下面的定理.

定理 2.2.1 设 A 是 H 矩阵, $A=D-L_k-F_k-U_k, k=1,2,...,\alpha$, 其中 L_k,F_k 为严格下三角矩阵, U_k 为严格上三角矩阵, 且 $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-F_k-|U_k|=|D|-|B|$. 如果

$$0\le\omega_2\le\omega_1, 0\le\omega_3\le\omega_1, 0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}, \tag{2.2.2}$$

则 LGRM-TOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\omega_1\rho, \rho=\rho(J)$, 而 $J=|D|^{-1}|B|, B=D-A$.

证明: 因为 $\rho(H_{LGRM-TOR})\le\rho(|H_{LGRM-TOR}|)$, 所以只需在定理条件下证明 $\rho(|H_{LGRM-TOR}|)<1$, 由假设条件易知 $D-\omega_2L_k-\omega_3F_k$ 是 H 矩阵, $k=1,2,...,\alpha$. 由引理 2.1.3(c) 及比较矩阵定义知

$$|(D-\omega_2L_k-\omega_3F_k)^{-1}|\le\langle D-\omega_2L_k-\omega_3F_k\rangle^{-1}=(|D|-\omega_2|L_k|-\omega_3|F_k|)^{-1}.$$

i) 当 $0\le\omega_2\le\omega_1, 0\le\omega_3\le\omega_1, 0<\omega_1\le1, \le1, 0<\omega_4<2/(1+\rho_{\omega_1}), \rho_{\omega_1}=1-\omega_1+\omega_1\rho$

时，定义

$$\begin{aligned}\tilde{M}_k &= |D| - \omega_2|L_k| - \omega_3|F_k|.\\ \tilde{N}_k &= (1-\omega_1)|D| + (\omega_1-\omega_2)|L_k| + (\omega_1-\omega_3)|F_k| + \omega_1|U_k|.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|H_{LGRM-TOR}| &\le \sum_{k=1}^{\alpha} E_k(\tilde{M}_k)^{-1}(\omega_4\tilde{N}_k + |1-\omega_4|\tilde{M}_k)\\ &= |1-\omega_4|I + \omega_4 I - \omega_1\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha} E_k(\tilde{M}_k)^{-1}|D|(I-|D|^{-1}|B|).\end{aligned}$$

由 $\tilde{M}_k$ 定义易知: $\tilde{M}_k$ 是 H 矩阵，再由引理 2.1.3(c) 得到

$$(\tilde{M}_k)^{-1} \ge |D|^{-1}.$$

由前面定理 2.1.4 的证明可知

$$|H_{LGRM-TOR}| \le |1-\omega_4|I + \omega_4 I - \omega_1\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha} E_k|D|^{-1}|D|[I-(|D|^{-1}|B| + \epsilon ee^T)].$$

两边同乘以 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned}|H_{LGRM-TOR}|x_\epsilon &\le [|1-\omega_4|I + \omega_4 I - \omega_1\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha} E_k(1-\rho_\epsilon)]x_\epsilon\\ &= [|\omega_4-1| + \omega_4(\omega_1 - 1 + \omega_1\rho_\epsilon)]x_\epsilon.\end{aligned}$$

当满足 (2.2.2) 式时，就有

$$|H_{LGRM-TOR}|x_\epsilon < x_\epsilon.$$

故

$$\rho(|H_{LGRM-TOR}|) < 1.$$

ii) 当 $1 < \omega_1 < 2/(1+\rho), 0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_4 < 2/(1+\rho_{\omega_1}), \rho_{\omega_1} = \omega_1 - 1 + \omega_1\rho$ 时，定义

$$\begin{aligned}\tilde{N}_k &= (\omega_1-1)|D| + (\omega_1-\omega_2)|L_k| + (\omega_1-\omega_3)|F_k| + \omega_1|U_k|\\ &= \tilde{M}_k - [(2-\omega_1)|D| - \omega_1|B|].\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
|H_{LGRM-TOR}| &\le \sum_{k=1}^{\alpha} E_k(\tilde{M}_k)^{-1}[\omega_4\tilde{N}_k + |\omega_4 - 1|\tilde{M}_k] \\
&\le |\omega_4 - 1|I + \omega_4 I - \omega_4 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k|D|^{-1}|D|[(2-\omega_1)I - \omega_1].
\end{aligned}
$$

由前面定理 2.1.4 的证明可知

$$
|H_{LGRM-TOR}| \le |\omega_4 - 1|I + \omega_4 I - \omega_4 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[(2-\omega_1)I - \omega_1(J + \epsilon e e^T)].
$$

两边同乘 x_ϵ 可得

$$
\begin{aligned}
|H_{LGRM-TOR}|x_\epsilon &\le |\omega_4 - 1|x_\epsilon + \omega_4 x_\epsilon - \omega_4 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k(2 - \omega_1 - \omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon \\
&= [|\omega_4 - 1| + \omega_4(\omega_1 - 1 + \omega_1\rho_\epsilon)]x_\epsilon \\
&= [|\omega_4 - 1| + \omega_4\rho_{\omega_1}]x_\epsilon.
\end{aligned}
$$

当满足 (2.2.2) 式时，就有

$$
|H_{LGRM-TOR}|x_\epsilon < x_\epsilon.
$$

故

$$
\rho(|H_{LGRM-TOR}|) < 1.
$$

定理得证. □

对于 RGRM-TOR 方法，仿照 RGRM-SOR 的推论，也可得到相应的推论.

推论 2.2.2　设 A 是 H 矩阵，$A = D - L_k - F_k - U_k, k = 1, 2, ..., \alpha$, 其中 L_k, F_k 为严格下三角矩阵，U_k 为严格上三角矩阵，且 $\langle A\rangle = |D| - |L_k| - F_k - |U_k| = |D| - |B|$. 如果 $0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, \omega_4 = 1$, 则右权局部松弛 TOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho_{\omega_1} = |1 - \omega_1| + \omega_1\rho, \rho = \rho(J)$, 而 $J = |D|^{-1}|B|, B = D - A$.

定理 2.2.3　设 A 是 H 矩阵，$A = D - L_k - F_k - U_k, k = 1, 2, ..., \alpha$, 其中 L_k, F_k 为严格下三角矩阵，U_k 为严格上三角矩阵，且 $\langle A\rangle = |D| - |L_k| - F_k - |U_k| = |D| - |B|$. 如果

$$
0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}},
$$

则 RGRM-TOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho_{\omega_1} = |1-\omega_1| + \omega_1\rho, \rho = \rho(J)$, 而 $J = |D|^{-1}|B|, B = D - A$.

证明：由算法 3 知 RGRM-TOR 方法的迭代矩阵为

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{RGRM-TOR} &= \omega_4\sum_{k=1}^{\alpha} M_k^{-1}N_kE_k+(1-\omega_4)I.\\
N_k &= (1-\omega_1)D+(\omega_1-\omega_2)L_k+(\omega_1-\omega_3)F_k+\omega_1U_k.\\
M_k &= D-(\omega_2L_k+\omega_3F_k).
\end{aligned}$$

因为 $\rho(\hat{H}_{RGRM-TOR})\le\rho(|\hat{H}_{RGRM-TOR}|)$，所以只需在定理条件下证明 $\rho(|\hat{H}_{RGRM-TOR}|)<1$.

类似定理 2.2.1 的证明.

i) 当 $0\le\omega_2\le\omega_1, 0\le\omega_3\le\omega_1, 0<\omega_1\le1, \le 1, 0<\omega_4<2/(1+\rho_{\omega_1}), \rho_{\omega_1}=1-\omega_1+\omega_1\rho$ 时.

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{RGRM-TOR} &\le \sum_{k=1}^{\alpha}(\tilde{M}_k)^{-1}(\omega_4\tilde{N}_k+|1-\omega_4|\tilde{M}_k)E_k\\
&= |1-\omega_4|I+\omega_4I-\omega_1\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}(\tilde{M}_k)^{-1}|D|(I-|D|^{-1}|B|)E_k\\
&\le |1-\omega_4|I+\omega_4I-\omega_1\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}|D|^{-1}|D|[I-(|D|^{-1}|B|+\epsilon ee^T)]E_k.
\end{aligned}$$

两边同乘以 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_{RGRM-TOR}|x_\epsilon &\le [|1-\omega_4|I+\omega_4I-\omega_1\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}(1-\rho_\epsilon)]x_\epsilon E_k\\
&= [|\omega_4-1|+\omega_4(\omega_1-1+\omega_1\rho_\epsilon)]x_\epsilon.
\end{aligned}$$

当满足定理条件时就有

$$|\hat{H}_{RGRM-TOR}|x_\epsilon<x_\epsilon.$$

故

$$\rho(|\hat{H}_{RGRM-TOR}|)<1.$$

ii) 当 $1<\omega_1<2/(1+\rho), 0\le\omega_2\le\omega_1, 0\le\omega_3\le\omega_1, 0<\omega_4<2/(1+\rho_{\omega_1}), \rho_{\omega_1}=\omega_1-1+\omega_1\rho$ 时.

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_{RGRM-TOR}| &\le \sum_{k=1}^{\alpha}(\tilde{M}_k)^{-1}[\omega_4\bar{N}_k+|\omega_4-1|\tilde{M}_k]E_k\\
&\le |\omega_4-1|I+\omega_4I-\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}|D|^{-1}|D|[(2-\omega_1)I-\omega_1]E_k\\
&\le |\omega_4-1|I+\omega_4I-\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}[(2-\omega_1)I-\omega_1(J+\epsilon ee^T)]E_k.
\end{aligned}$$

两边同乘 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned}|\hat{H}_{RGRM-TOR}|x_\epsilon &\le |\omega_4-1|x_\epsilon+\omega_4x_\epsilon-\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}(2-\omega_1-\omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon E_k\\ &= [|\omega_4-1|+\omega_4(\omega_1-1+\omega_1\rho_\epsilon)]x_\epsilon\\ &= [|\omega_4-1|+\omega_4\rho_{\omega_1}]x_\epsilon.\end{aligned}$$

当满足定理条件时，就有

$$|\hat{H}_{RGRM-TOR}|x_\epsilon < x_\epsilon.$$

故

$$\rho(|\hat{H}_{RGRM-TOR}|) < 1.$$

定理得证. □

由于矩阵 A 是 H 阵包含下面推论中的三种情况，则也立即有下面的推论.

推论 2.2.4　让矩阵 $A\in R^{N\times N}$ 满足以下条件之一.

i) A 是 M 阵.

ii) A 是严格或不可约对角占优阵.

iii) A 是对称正定 L 阵.

且 $A=D-L_k-F_k-U_k, k=1,2,...,\alpha$, 其中 L_k,F_k 为严格下三角矩阵， U_k 为严格上三角矩阵， $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-F_k-|U_k|=|D|-|B|$. 如果

$$0\le\omega_2\le\omega_1, 0\le\omega_3\le\omega_1, 0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}},$$

则 LGRM-TOR 和 RGRM-TOR 方法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\omega_1\rho, \rho=\rho(J)$, 而 $J=|D|^{-1}|B|, B=D-A$.

§2.3　矩阵实例

§2.3.1　矩阵实例一

令

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-\theta_1\\0&1&\theta_2\\-\theta_2&\theta_1&1\end{bmatrix}=D-B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&\theta_1\\0&0&-\theta_2\\\theta_2&-\theta_1&0\end{bmatrix},$$

其中 $\rho(|D|^{-1}|B|)=\sqrt{2\theta_1\theta_2},\theta_1>0,\theta_2>0$ 均为实数，满足 $|\theta_1|+|\theta_2|<1$.

定理 2.1.4 和推论 2.1.7 中，只要 $0<\omega_1<2/(1+\sqrt{2\theta_1\theta_2}),0<\omega_2<2/(1+\rho_{\omega_1})$ 时即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\sqrt{2\theta_1\theta_2}\omega_1$；定理 2.2.1, 推论 2.2.3 和推论 2.2.4 中，只要 $0\le\omega_2\le\omega_1,0\le\omega_3\le\omega_1,0<\omega_1<\frac{2}{1+\sqrt{2\theta_1\theta_2}},0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}$ 时即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\sqrt{2\theta_1\theta_2}\omega_1$.

当 $\theta_1=1/2,\theta_2=1/3$ 时，定理 2.1.4 和推论 2.1.7 中，只要 $0<\omega_1<3-\sqrt{3},0<\omega_2<2/(1+\rho_{\omega_1})$ 时即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1$；定理 2.2.1, 推论 2.2.3 和推论 2.2.4 中，只要 $0\le\omega_2\le\omega_1,0\le\omega_3\le\omega_1,0<\omega_1<3-\sqrt{3},0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}$ 时即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1$.

§2.3.2 矩阵实例二

令

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&-\nu\\-\nu&1&0&\cdots&0&0\\0&-\nu&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&-\nu&1\end{bmatrix}=D-B=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&\nu\\\nu&0&0&\cdots&0&0\\0&\nu&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&\nu&0\end{bmatrix},$$

其中 $\rho(|D|^{-1}|B|)=\nu,\nu$ 为实数，满足 $|\nu|<1$.

定理 2.1.4 和推论 2.1.7 中，只要 $0<\omega_1<2/(1+\nu),0<\omega_2<2/(1+\rho_{\omega_1})$ 时即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\nu\omega_1$；定理 2.2.1, 推论 2.2.3 和推论 2.2.4 中，只要 $0\le\omega_2\le\omega_1,0\le\omega_3\le\omega_1,0<\omega_1<\frac{2}{1+\nu},0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}$ 即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\nu\omega_1$.

当 $\nu=\frac{1}{5}$ 时，定理 2.1.4 和推论 2.1.7 中，只要 $0<\omega_1<\frac{5}{3},0<\omega_2<2/(1+\rho_{\omega_1})$ 时即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\frac{1}{5}\omega_1$；定理 2.2.1, 推论 2.2.3 和推论 2.2.4 中，只要 $0\le\omega_2\le\omega_1,0\le\omega_3\le\omega_1,0<\omega_1<\frac{5}{3},0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}$ 即可收敛，其中 $\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\frac{1}{5}\omega_1$.

§2.4 数值试验

§2.4.1 数值试验一

考虑如下二维非线性非稳态扩散方程

$$q\frac{\partial u}{\partial t}=c_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_x\frac{\partial u}{\partial x}+b_y\frac{\partial u}{\partial y}+eu+g,\qquad t\geq 0,\quad 0\leq x,y\leq 1.$$

初始条件为 $u(x,y,0)=f(x,y)$, 边界上取零 Dirichelet 边界，其中

$$q=c_v+a_0u^3/\rho,\ c_x=a_1u^{m_x}/\rho,\ c_y=a_2u^{m_y}/\rho,$$

$$b_x=c_1\sin(2\pi x)+c_2,\ b_y=d_1\sin(2\pi y)+d_2,$$

而 $c_v,a_0,a_1,a_2,\rho,m_x,m_y,c_1,c_2,d_1,d_2,e,g$ 为常数.

我们考虑模型：取 $c_v=a_0=m_x=m_y=e=g=0.0, a_1=a_2=1512.733, \rho=0.79, c_1=d_1=1, c_2=d_2=0.001$. 区域分解方式依处理机台数而定，如有 16 台处理机，则我们可用 4*4 方式 (如下图) . 子区域由左向右，自下而上编号，每个子区域内按自然顺序编号，并由 MPI 并行程序设计平台将其映到相应处理机上.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

我们用凝固系数法及五点差分格式离散上述方程，所得线性代数方程组是块五对角形式. 如网格划分为 16*16 的，区域分解为 4*4 方式，用五点差分格式离散，则所得的线性

代数方程组系数矩阵形式如下：

$$A=\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & & & A_{15} & & & & & & & & & & & \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & A_{26} & & & & & & & & & & \\
& A_{32} & A_{33} & A_{34} & & & A_{37} & & & & & & & & & \\
& & A_{43} & A_{44} & & & & A_{48} & & & & & & & & \\
A_{51} & & & & A_{55} & A_{56} & & & A_{59} & & & & & & & \\
& A_{62} & & & A_{65} & A_{66} & A_{67} & & & A_{610} & & & & & & \\
& & A_{73} & & & A_{76} & A_{77} & A_{78} & & & A_{711} & & & & & \\
& & & A_{84} & & & A_{87} & A_{88} & & & & A_{812} & & & & \\
& & & & A_{95} & & & & A_{99} & A_{910} & & & A_{913} & & & \\
& & & & & A_{106} & & & A_{109} & A_{1010} & A_{1011} & & & A_{1014} & & \\
& & & & & & A_{117} & & & A_{1110} & A_{1111} & A_{1112} & & & A_{1115} & \\
& & & & & & & A_{128} & & & A_{1211} & A_{1212} & & & & A_{1216} \\
& & & & & & & & A_{139} & & & & A_{1313} & A_{1314} & & \\
& & & & & & & & & A_{1410} & & & A_{1413} & A_{1414} & A_{1415} & \\
& & & & & & & & & & A_{1511} & & & A_{1514} & A_{1515} & A_{1516} \\
& & & & & & & & & & & A_{1612} & & & A_{1615} & A_{1616}
\end{bmatrix},$$

其中主对角块 A_{ii} 是五对角的且其非零元模式与 A 之非零块模式相同，其他块为对角的．

我们在一台 MPP 并行机上进行数值试验，取多分裂是相同的，即 $M_k=M$，权矩阵取为 I．通过大量试验，我们得到：用 16 台处理机时，整体松弛并行多分裂 (LGRM-TOR) 方法近似最优参数为

$$\omega_1=0.5,\ \omega_2=0.9,\ \omega_3=1.2,\ \omega_4=1.3,$$

局部并行多分裂 (LM-SOR) 方法的近似最优参数为

$$\omega_1=0.8,\ \omega_2=1.$$

我们比较了 LGRM-TOR 方法和 LM-SOR 方法的墙上时间、收敛性和加速比等．

当节点是 400×400，误差是 $\epsilon=10^{-3}$ 时， LGRM-TOR 方法和 LM-SOR 方法比较结果在表 2.1 中给出，改进性能 (%) 是用分式 $1-\frac{T_{TOR}}{T_{SOR}}$ 计算得到的．

图形 Fig 1,Fig 2 和 Fig 3 给出了两种方法在各处理机规模上残差范数下降情况的具体比较．

表 2.1: 并行性能比较

处理器台数	LM-SOR		LGRM-TOR		性能改进
	墙上时间	迭代步	墙上时间	迭代步	
1	2.9307	74	2.3084	61	21.23
2	7.0693	228	4.0849	132	42.22
4	1.9658	270	1.1679	168	40.59
8	0.9912	298	0.6281	201	36.63
16	0.7105	313	0.3705	218	47.96
32	0.5212	334	0.2739	235	47.46

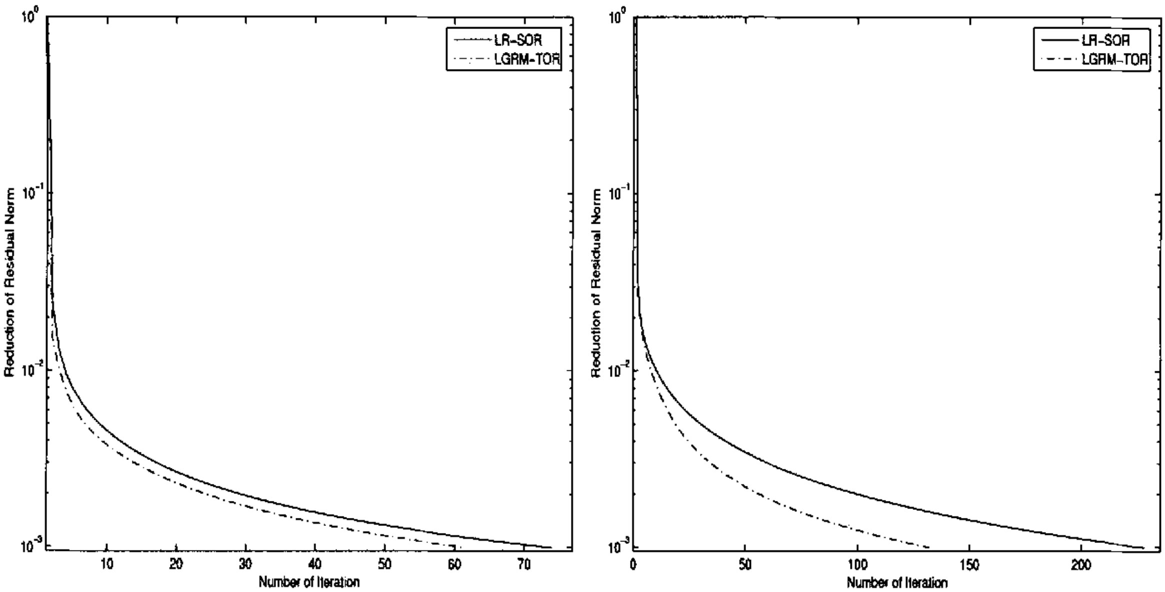


Fig 1： Comparison of LM-SOR and LGRM-TOR on 1 Processor and 2 Processors

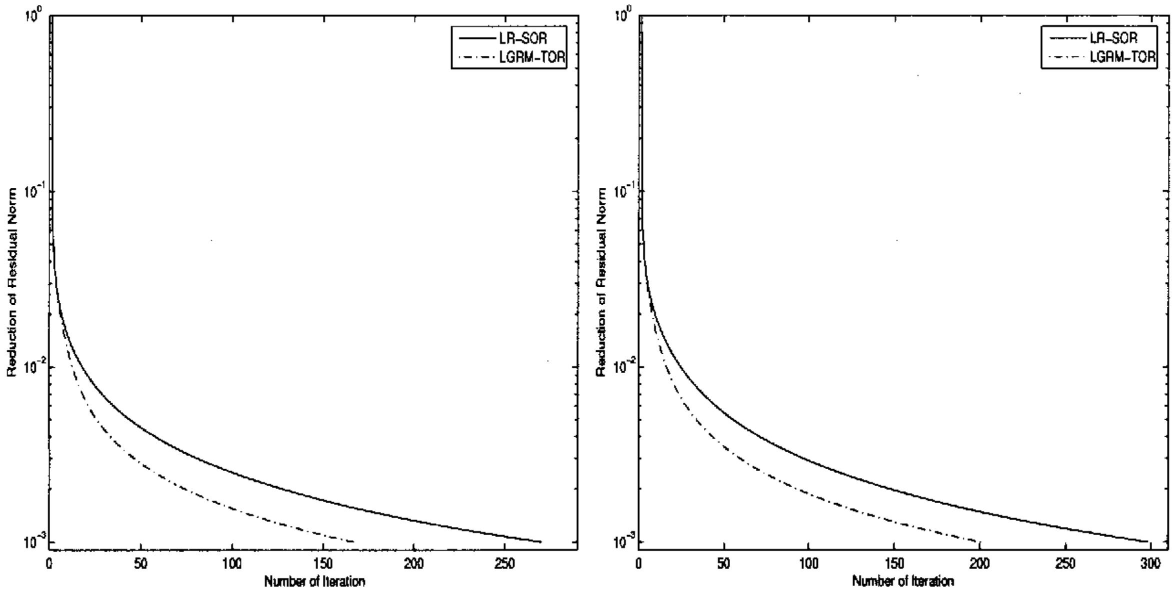


Fig 2： Comparison of LM-SOR and LGRM-TOR on 4 Processors and 8 Processors

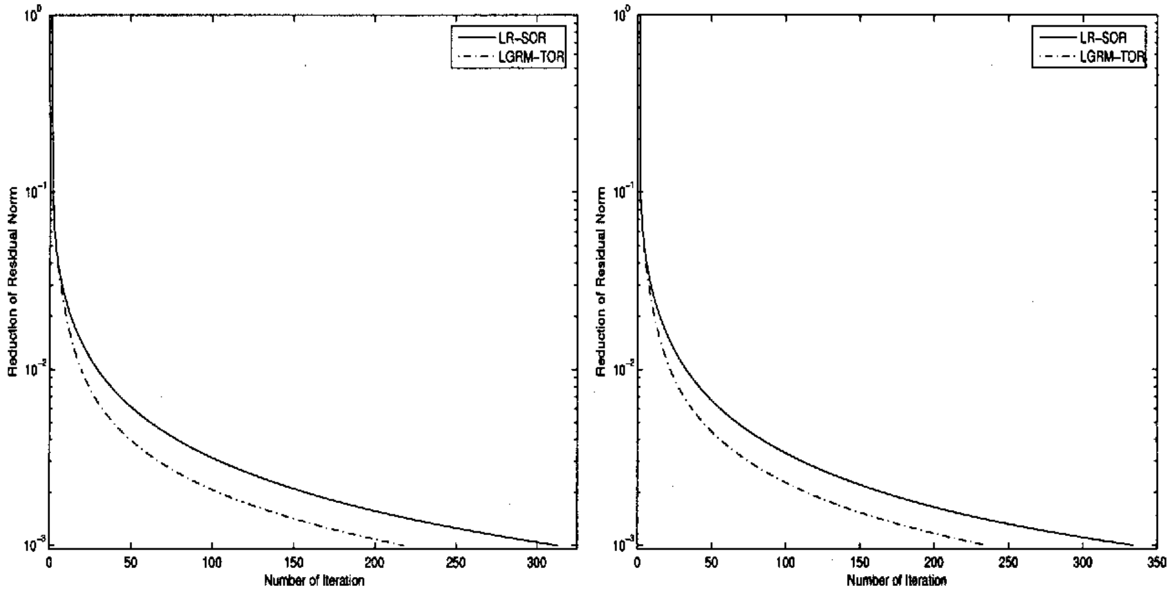


Fig 3： Comparison of LM-SOR and LGRM-TOR on 16 Processor and 32 Processors

由图形 Fig 1,Fig 2 和 Fig 3 易知：(我们的)LGRM-TOR 方法确实比 (文献中的)LM-SOR 方法收敛速度快，且随着处理器的增加收敛速度越来越明显.

我们也将 (本文)LGRM-TOR 方法和 (文献)LM-SOR 方法的并行加速比进行了比较，加速比是利用在一台处理器的串行时间比上在 P 台处理器上的并行时间得到的．为了公平，我们将两种方法都运行 500 步迭代，问题规模仍为 $N = 400 \times 400$，结果见表 2.2.

表 2.2: 并行加速比比较， $N = 400 \times 400$

处理器台数	LM-SOR		LGRM-TOR	
	墙上时间	加速比	墙上时间	加速比
1	20.9887	1	19.4212	1
2	16.6521	1.26	16.2167	1.20
4	4.3436	4.83	3.7570	5.17
8	1.8130	11.58	1.7423	11.15
16	1.0673	19.67	0.9297	20.89
32	0.5520	38.02	0.5823	33.35

表 2.3: 并行加速比比较， $N = 800 \times 800$

处理器台数	LM-SOR		LGRM-TOR	
	墙上时间	加速比	墙上时间	加速比
1	86.2329	1	85.3572	1
2	75.6675	1.14	73.8087	1.16
4	39.2460	2.20	37.3988	2.28
8	18.5895	4.64	17.2567	4.95
16	4.7863	18.02	4.3201	19.76
32	2.2772	37.87	2.0849	37.48

由表 2.2 易知，当分别用 4， 8， 16， 32 台处理机时，均出现了超线性加速，这说明随着处理机台数的增加，各处理机分担的未知量减少，从而 cache 命中率会增加，计算时间相应减少，表 2.3 用 16， 32 台处理机时也出现了超线性加速.

当问题规模是 $N = 800 \times 800$ 时，进行 500 次迭代，我们同样比较了 (我们的)LGRM-TOR 方法和 (文献中的)LM-SOR 方法的并行加速比，结果见表 2.3.

以上试验表明：我们的方法确实对文献方法进行了有效的改进，最高可达 47.96%, 且处理机台数越多，改进越来越显著. 方法良好的并行加速比表明，我们的方法具有好的并行可扩展性.

§2.4.2　数值试验二

我们举一个微分方程差分离散后的线性方程组求解的实例，以比较松弛型并行多分裂 SOR 方法，LGR-TOR 和 LGR-SOR 方法，验证我们方法的有效性，为方便起见取 $n = 6$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5.5 \\ 3 \\ 5.5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = diag(1,1,0,0,0,0), E_2 = diag(0,0,1,1,0,0), E_3 = diag(0,0,0,0,1,1).$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$L_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0.6&0&0&0&0&0\\0&1.5&0&0&0&0\\0&0&-1.2&0&0&0\\0&0&0&0.3&0&0\\0&0&0&0&0.8&0\end{bmatrix},U_k=D-L_k-A,k=1,2,3.$$

$$L_1=\hat{L}_k+\hat{F}_k=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0.3&0&0&0&0&0\\0&0.7&0&0&0&0\\0&0&0.1&0&0&0\\0&0&0&0.9&0&0\\0&0&0&0&-0.5&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0.7&0&0&0&0&0\\0&0.3&0&0&0&0\\0&0&0.2&0&0&0\\0&0&0&0.1&0&0\\0&0&0&0&-0.3&0\end{bmatrix}.$$

$$L_2=\hat{L}_k+\hat{F}_k=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\-0.7&0&0&0&0&0\\0&0.3&0&0&0&0\\0&0&0.2&0&0&0\\0&0&0&0.4&0&0\\0&0&0&0&0.2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\-0.8&0&0&0&0&0\\0&0.2&0&0&0&0\\0&0&0.5&0&0&0\\0&0&0&0.1&0&0\\0&0&0&0&02&0\end{bmatrix}.$$

$$L_3=\hat{L}_k+\hat{F}_k=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0.2&0&0&0&0&0\\0&0.8&0&0&0&0\\0&0&-0.5&0&0&0\\0&0&0&0.2&0&0\\0&0&0&0&-0.5&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0.4&0&0&0&0&0\\0&0.7&0&0&0&0\\0&0&-0.7&0&0&0\\0&0&0&0.1&0&0\\0&0&0&0&0.4&0\end{bmatrix}.$$

先取初始值 $x^{(0)}=(10,30,-20,-40,-8,9)^T$, 误差精度为 $\epsilon=10^{10}$ ，经实验知，我们的方法和文献 [3 、 6 、 11] 中的方法进行了比较，我们的方法较系统松弛法改进性能如

下表所示。

方法	近似最优参数选取	迭代步数	性能改进	文献
System Relaxed	$\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.94$	70	0	[3]
LGRM-SOR	$\omega_1 = 0.62, \omega_2 = 1.52$	59	15.71%	本文
LGRM-TOR	$\omega_1 = 0.66, \omega_2 = 0.01, \omega_3 = 0.00, \omega_4 = 1.51$	49	30.00%	本文

此时，我们的方法较局部松弛 SOR 法改进性能如下表所示.

方法	近似最优参数选取	迭代步数	性能改进	文献
LM-SOR	$\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.94$	67	0	[6]
LGRM-SOR	$\omega_1 = 0.62, \omega_2 = 1.52$	59	11.94%	本文
LGRM-TOR	$\omega_1 = 0.66, \omega_2 = 0.01, \omega_3 = 0.00, \omega_4 = 1.51$	49	26.87%	本文

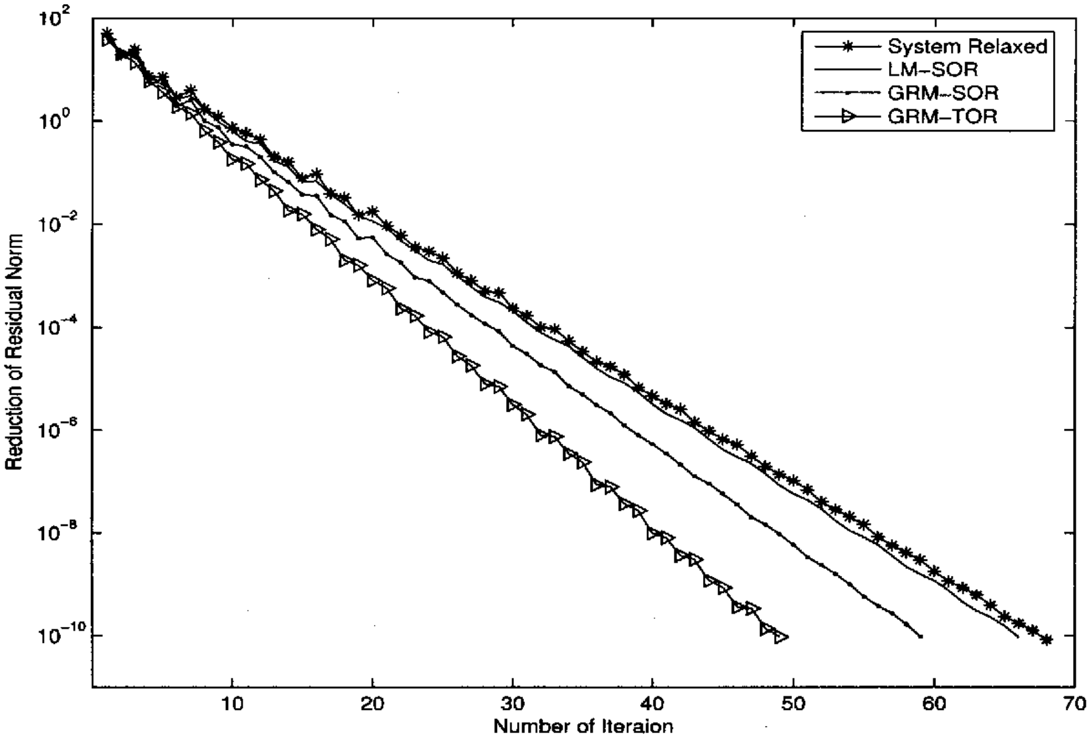
再取初始值 $x^{(0)} = (0, 10, -20, 20, 30, -30)^T$, 误差精度仍为 $\epsilon = 10^{10}$ ，我们的方法较系统松弛法改进性能如下表所示。

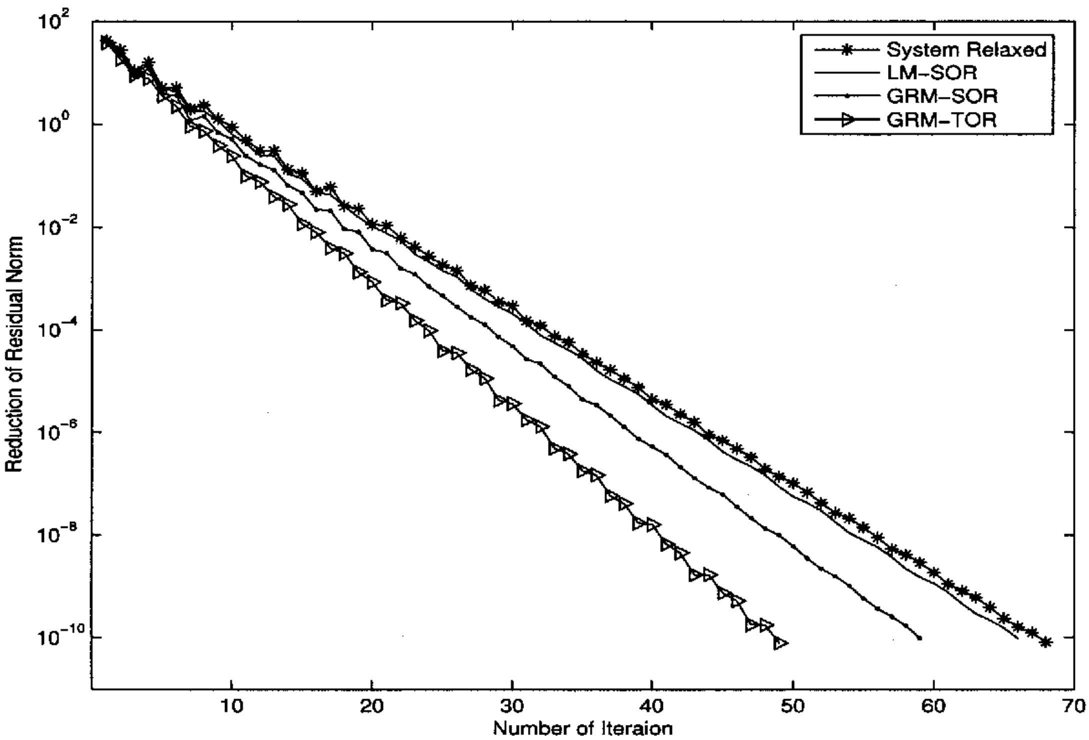
方法	近似最优参数选取	迭代步数	性能改进	文献
System Relaxed	$\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.94$	69	0	[3]
LGRM-SOR	$\omega_1 = 0.62, \omega_2 = 1.52$	60	13.04%	本文
LGRM-TOR	$\omega_1 = 0.66, \omega_2 = 0.01, \omega_3 = 0.00, \omega_4 = 1.51$	50	27.54%	本文

此时，我们的方法较局部松弛 SOR 法改进性能如下表所示。

方法	近似最优参数选取	迭代步数	性能改进	文献
LM-SOR	$\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.94$	67	0	[6]
LGRM-SOR	$\omega_1 = 0.62, \omega_2 = 1.52$	60	10.14%	本文
LGRM-TOR	$\omega_1 = 0.66, \omega_2 = 0.01, \omega_3 = 0.00, \omega_4 = 1.51$	50	25.37%	本文

我们的方法和文献 [3 、 6 、 11] 中的方法误差曲线比较分别如下图所示.





由上面几个试验得到：我们的方法较文献中的方法误差曲线下降快，两个松弛参数的 LGRM-SOR 法比局部松弛 SOR 法较优，收敛速度提高近 16%；四个松弛参数的 LGRM-

TOR 法比以往任何松弛型多分裂都较优，收敛速度较局部松弛 SOR 法提高近 30%．由此可见，我们的方法确实对文献中的方法进行了有效的改进.

§2.5　敛散速度的比较

基于矩阵 A 的多分裂而提出的求解大型线性代数方程组 $Ax=b(x,b\in R^N)$ 的并行矩阵多分裂 TOR 迭代算法以及相应于其松弛参数的特殊选取而产生的并行矩阵多分裂 Jacobi, G-S, JOR, SOR, AOR 迭代算法，不仅具有广泛的实用性质，而且具有很高的理论研究价值. 因而，吸引着许多作者致力于这类算法的研究. 本节，在文献 [19] 的基础上，我们通过进一步细致地讨论上述算法迭代矩阵的谱半径之间的相互关系，比较了它们的收敛速度和发散速度.

为方便起见，在以下的讨论中我们不防约定 $diag(A)=I$. 我们熟知，矩阵多分裂 TOR 迭代矩阵为

$$H_{TOR}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k[I-(\omega_2\hat{L}_k+\omega_3\hat{F}_k)]^{-1}[(1-\omega_1)I+(\omega_1-\omega_2)\hat{L}_k+(\omega_1-\omega_3)\hat{F}_k+\omega_1 U_k].$$

选用不同的 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$, 我们将得到下面不同的并行多分裂迭代格式.

$\omega_2=\omega_3$, 则得到矩阵多分裂 AOR 迭代矩阵

$$H_{AOR}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k[I-\omega_2 L_k]^{-1}[(1-\omega_1)I+(\omega_1-\omega_2)L_k+\omega_1 U_k],$$

其中 $L_k=\hat{L}_k+\hat{F}_k$.

$\omega_1=\omega_2=\omega_3$, 则得到矩阵多分裂 SOR 迭代矩阵

$$H_{SOR}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k(I-\omega_1 L_k)^{-1}[(I-\omega_1)I+\omega_1 U_k].$$

$\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$, 则得到矩阵多分裂 G-S 迭代矩阵

$$H_{G-S}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k(I-L_k)^{-1}U_k.$$

$\omega_2=\omega_3=0$, 则得到矩阵多分裂外插 Jacobi(JOR) 迭代矩阵

$$H_{JOR}=(1-\omega_1)I+\omega_1 B.$$

$\omega_1 = 1, \omega_2 = \omega_3 = 0$, 则得到矩阵多分裂 Jacobi(J) 迭代矩阵

$H_J = B.$

定理 2.5.1 设 $A \in R^{N\times N}$ 为 L- 矩阵, $(I - \hat{L}_k - \hat{F}_k, U_k, E_k), k = 1,2,...,\alpha$ 为 A 的一个多分裂, 且 $L_k \geq 0, F_k \geq 0, U_k \geq 0, k = 1,2,...,\alpha$. 则当 $0 \leq \omega_2, \omega_3 \leq \omega_1 \leq 1 (\omega_1 \neq 0)$ 时.

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{TOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{TOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

证明: 由题设条件可知 H_{TOR} 与 H_{JOR} 均为非负矩阵. 且对每个 $k = 1,2,...,\alpha$, 由于 $\hat{L}_k$ 和 $\hat{F}_k$ 均为严格下三角矩阵, 则 $L_k^m \geq 0, F_k^m \geq 0$, $(m \geq n$ 为整数).

令

$$H(\omega_2,\omega_3) = \sum_{k=1}^{\alpha}[I + (\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k) + ... + (\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k)^{n-2}](\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k).$$

故

$$H(\omega_2,\omega_3) \geq 0.$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} H_{TOR} &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[I - (\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k)]^{-1}[(1-\omega_1)I + (\omega_1 - \omega_2)\hat{L}_k + (\omega_1 - \omega_3)\hat{F}_k + \omega_1 U_k] \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[I - (\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k)]^{-1}[H_{JOR} - (\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k)] \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k \sum_{m=0}^{n-1}(\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k)^m[H_{JOR} - (\omega_2\hat{L}_k + \omega_3\hat{F}_k)] \\ &= H_{JOR} + H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR} - I). \end{aligned}$$

若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则对充分小的 $\epsilon > 0$, 由谱半径的连续性以及 Perron-Frobenius 定理知: $\rho_\epsilon = \rho(H_{JOR} + \epsilon ee^T) < 1$, 且存在正向量 $x_\epsilon \in R^N$, 使得 $(H_{JOR} + \epsilon ee^T)x_\epsilon = \rho_\epsilon x_\epsilon$, 其中 $e = (1,1,...,1)^T \in R^N$, 上式两边同乘 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned} H_{TOR}x_\epsilon &\leq H_{JOR} + \epsilon ee^T) + H(\omega_2,\omega_3)[(H_{JOR} + \epsilon ee^T) - I]x_\epsilon \\ &= \rho_\epsilon x_\epsilon + (\rho_\epsilon - 1)H(\omega_2,\omega_3)x_\epsilon \\ &\leq \rho_\epsilon x_\epsilon. \end{aligned}$$

由此, 根据 [20](46 页练习 2) 可得

$$\rho(H_{TOR}) \leq \rho_\epsilon.$$

再由 ϵ 的任意性知 $i)$ 成立.

若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则由 [20] 中定理 2.7 知：存在非负向量 $x \in R^N(x \neq 0)$, 使得 $H_{JOR}x = \rho(H_{JOR})x$, 上式两边同乘 x 可得

$$\begin{aligned} H_{TOR}x &= \rho(H_{JOR})x + (\rho(H_{JOR}) - 1)H(\omega_2, \omega_3)x \\ &\geq \rho(H_{JOR})x. \end{aligned}$$

令 $H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H_{TOR}/\rho(H_{JOR})$, 则有 $H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \geq x$. 从而对所有的非负整数 m, 均有 $(H(\omega_1, \omega_2, \omega_3))^m x \geq x$. 由于 $x \neq 0$, 则当 $m \to \infty$ 时，$(H(\omega_1, \omega_2, \omega_3))^m$ 不收敛于 0. 因此 $\rho(H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)) \geq 1$. 故

$$\rho(H_{TOR}) = \rho(H_{JOR})\rho(H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)) \geq \rho(H_{JOR}).$$

定理得证. □

推论 2.5.2[19]　设定理 2.5.1 的条件成立，则当 $0 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq 1(\omega_1 \neq 0)$ 时.

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{AOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{AOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

推论 2.5.3[19]　设定理 2.5.1 的条件成立，则当 $0 < \omega_1 \leq 1$ 时.

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{SOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{SOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

推论 2.5.4(Stein-Rosenberg **型定理**)[19]　设定理 2.5.1 的条件成立，则

i) 若 $\rho(H_J) < 1$, 则 $\rho(H_{G-S}) \leq \rho(H_J)$.

ii) 若 $\rho(H_J) \geq 1$, 则 $\rho(H_{G-S}) \geq \rho(H_J)$.

由定理 2.5.1, 推论 2.5.2, 推论 2.5.3 和推论 2.5.4 立即得到.

推论 2.5.5　设定理 2.5.1 的条件成立，则

i) 若 $0 \leq \omega_2, \omega_3 \leq \omega_1 \leq 1(\omega_1 \neq 0)$, H_{TOR} 收敛当且仅当 H_{JOR} 收敛.

ii) 若 $0 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq 1(\omega_1 \neq 0)$, H_{AOR} 收敛当且仅当 H_{JOR} 收敛.

iii) 若 $0 < \omega_1 \leq 1$, H_{SOR} 收敛当且仅当 H_{JOR} 收敛.

iv) H_{G-S} 收敛当且仅当 H_J 收敛.

又由于 $\rho(H_{JOR}) < 1(0 < \omega_1 \leq 1)$ 当且仅当 $H_J < 1$, 所以，我们又有

定理 2.5.6　设定理 2.5.1 的条件成立，则 $H_J < 1$ 当且仅当以下条件之一满足：

i) $0 \le \omega_2, \omega_3 \le \omega_1 \le 1(\omega_1 \ne 0)$, 且 H_{TOR} 收敛.

ii) $0 \le \omega_2 \le \omega_1 \le 1(\omega_1 \ne 0)$, 且 H_{AOR} 收敛.

iii) $0 < \omega_1 \le 1$, H_{SOR}, 且 H_{SOR} 收敛.

iv) $0 < \omega_1 \le 1$, 且 H_{JOR} 收敛.

v) H_{G-S} 收敛.

第三章　整体松弛非定常多分裂 TOR 法及敛散速度的比较

§3.1　整体松弛非定常多分裂 TOR 方法

我们应用松弛多分裂方法研究大型线性方程组 (2.1.1) 的并行解. 关于松弛并行多分裂方法, Frommer 和 Mayer 在 [3] 文中研究了外推的松弛并行多分裂方法和并行的多分裂 SOR 方法; Mas 等人在 [21] 文中研究了非定常外推松弛和异步松弛方法; Xu 在 [22] 文中研究了非定常并行多分裂 SOR 方法的收敛性; Gu 在 [14-15] 中研究了松弛型非定常二级多分裂方法及其异步形式. 本节主要研究非定常并行多分裂 TOR 方法及其推广.

下面我们考虑非定常多分裂 TOR 方法.

假设 A 有 α 个分裂 $A=D-L_k-F_k-U_k, k=1,2,...,\alpha$. 这里 $D=diag(A)$, 即 A 的对角部分, L_k, F_k 是严格下三角矩阵, U_k 满足 $U_k=D-L_k-F_k-A$, 则 **非定常多分裂 TOR 算法** 定义如下:

算法 4 (**非定常多分裂** TOR **法** (Nonstationary Multisplitting TOR), **简记为** NM-TOR **法**).

任取初始近似 $x^{(0)}\in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步, 直到收敛.

在 k 台处理机上, $k=1,...,\alpha$, 置 $y_k^0=x^m$.

i) 对 $i=1,2,...,q(m,k)$, (并行) 求解 y_k^i.

$$[D-(\alpha L_k+\beta F_k)]y_k^{(i)}=[(1-\gamma)D+(\gamma-\alpha)L_k+(\gamma-\beta)F_k+\gamma U_k]y_k^{(i-1)}+\gamma b.$$

ii) 计算.

$$x^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k y_k^{(q(m,k))}.$$

此算法可写成下面的形式

$$x^{(m+1)}=H^{(m)}(\alpha,\beta,\gamma)x^{(m)}+G^{(m)}(\alpha,\beta,\gamma)b, m=0,1,...,$$

其中

$$\begin{aligned} H^{(m)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\{[D-(\alpha L_k+\beta F_k)]^{-1} \\ &\quad [(1-\gamma)D+(\gamma-\alpha)L_k+(\gamma-\beta)F_k+\gamma U_k]\}^{q(m,k)}. \\ G^{(m)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \gamma\sum_{k=1}^{\alpha} E_k\{\sum_{k=1}^{q(m,k)-1}[D-(\alpha L_k+\beta F_k)]^{-1} \\ &\quad [(1-\gamma)D+(\gamma-\alpha)L_k+(\gamma-\beta)F_k+\gamma U_k]^i\}[D-(\alpha L_k+\beta F_k)]^{-1}. \end{aligned}$$

注：与第二章中的方法不同，这里算法 4 的第 i) 步中局部迭代的次数设为 $q(m,k)$ (即不同处理机在不同的整体迭代步可执行不同次数的局部迭代). 若将算法 4 中的 α,β,γ 换成 $\alpha_k,\beta_k,\gamma_k$(即在不同的处理机上使用不同的松弛因子), 就可得到 **非定常多分裂多参数 TOR 法**, 其算法如下：

算法 5 (**非定常多分裂多参数** TOR **法** (Nonstationary Multisplitting Multi-parameter TOR), **简记为** NMM-TOR **方法**).

任取初始近似 $x^{(0)}\in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

在 k 台处理机上， $k=1,...,\alpha$, 置 $y_k^0=x^m$.

i) 对 $i=1,2,...,q(m,k)$, (并行) 求解 y_k^i.

$$[D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]y_k^{(i)}=[(1-\gamma_k)D+(\gamma_k-\alpha_k)L_k+(\gamma_k-\beta_k)F_k+\gamma_k U_k]y_k^{(i-1)}+\gamma_k b.$$

ii) 计算.

$$x^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{\alpha} E_k y_k^{(q(m,k))}.$$

此算法可写成下面的形式

$$x^{(m+1)}=H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)x^{(m)}+G^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)b, m=0,1,...,$$

其中

$$
\begin{aligned}
H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k) &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\{[D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]^{-1} \\
&\quad [(1-\gamma_k)D+(\gamma_k-\alpha_k)L_k+(\gamma_k-\beta_k)F_k+\gamma_k U_k]\}^{q(m,k)}. \\
G^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k) &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\{\sum_{k=1}^{q(m,k)-1}[D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]^{-1} \\
&\quad [(1-\gamma_k)D+(\gamma_k-\alpha_k)L_k+(\gamma_k-\beta_k)F_k+\gamma_k U_k]^{i}\} \\
&\quad [D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]^{-1}\gamma_k.
\end{aligned}
$$

通过对算法 5 的整体迭代 (即步 ii)) 进行外推，可得到 **整体松弛非定常多分裂多参数 TOR 法**, 其算法如下：

算法 6 (**整体松弛非定常多分裂多参数** TOR **法** (Global Relaxed Nonstationary Multisplitting Multi-parameter TOR), **简记为** GRNMM-TOR **方法**).

任取初始近似 $x^{(0)}\in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步直到收敛.

在 k 台处理机上， $k=1,...,\alpha$, 置 $y_k^0=x^m$.

i) 对 $i=1,2,...,q(m,k)$, (并行) 求解 y_k^i.

$$[D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]y_k^{(i)}=[(1-\gamma_k)D+(\gamma_k-\alpha_k)L_k+(\gamma_k-\beta_k)F_k+\gamma_k U_k]y_k^{(i-1)}+\gamma_k b.$$

ii) 计算.

$$x^{(m+1)}=\omega\sum_{k=1}^{\alpha}E_k y_k^{(q(m,k))}+(1-\omega)x^{(m)}.$$

此算法可写成下面的形式

$$x^{(m+1)}=H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)x^{(m)}+G^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)b, m=0,1,...,$$

其中

$$
\begin{aligned}
H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega) &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\{[D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]^{-1} \\
&\quad [(1-\gamma_k)D+(\gamma_k-\alpha_k)L_k+(\gamma_k-\beta_k)F_k+\gamma_k U_k]\}^{q(m,k)}+(1-\omega)I. \\
G^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k) &= \omega\sum_{k=1}^{\alpha} E_k\{\sum_{k=1}^{q(m,k)-1}[D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]^{-1} \\
&\quad [(1-\gamma_k)D+(\gamma_k-\alpha_k)L_k+(\gamma_k-\beta_k)F_k+\gamma_k U_k]^{i}\} \\
&\quad [D-(\alpha_k L_k+\beta_k F_k)]^{-1}\gamma_k.
\end{aligned}
$$

选取不同的 $\gamma_k, \alpha_k, \beta_k, \omega$, 我们将得到不同的非定常多分裂多参数迭代格式.

$\gamma_k, \alpha_k, \beta_k, \omega$	方法	文献	$\gamma_k, \alpha_k, \beta_k, \omega$	方法	文献
$\gamma_k, 0, 0, 1$	RMM-JOR	[23]	$\gamma_k, 0, 0, \omega$	GRNMM-JOR	本文
$\gamma_k, \gamma_k, \gamma_k, 1$	L(local)RNMM-SOR	[22]	$\gamma_k, \gamma_k, \gamma_k, \omega$	GRNMM-SOR	本文
$\gamma_k, \alpha_k, \alpha_k, 1$	L(local)RNMM-AOR	[23]	$\gamma_k, \alpha_k, \alpha_k, \omega$	GRNMM-AOR	本文
$\gamma_k, \alpha_k, \beta_k, 1$	L(local)RNMM-TOR	本文	$\gamma_k, \alpha_k, \beta_k, \omega$	GRNMM-TOR	本文

显然，算法 6 中若 $\alpha_k = \alpha, \beta_k = \beta, \gamma_k = \gamma$, 则整体松弛非定常多分裂多参数 TOR 法就退化为算法 5；若再有 $\omega = 1$, 就退化为算法 4. 大型和超大型稀疏线性代数方程组的求解时间在整个问题中占有很大的比重，有的甚至达到 80% . 对于 GRNMM-TOR 方法，可选用适当的内迭代步数以使每台处理机达到负载平衡，避免同步等待，而且每台处理机上参数的选取更加灵活，若能选用适当的松弛因子，可使收敛速度加快，从而使求解时间大大缩减.

关于非定常多分裂 TOR 方法我们有下列的收敛性定理.

定理 3.1.1　设 A 是 H 矩阵，对 $k = 1, 1, ..., \alpha, L_k, F_k$ 为下三角矩阵，定义 U_k 满足 $A = D - L_k - F_k - U_k$, 且 $\langle A \rangle = \mid D \mid - \mid L_k \mid - \mid F_k \mid - \mid U_k \mid$, 如果

$$0 \leq \beta \leq \gamma, 0 \leq \alpha \leq \gamma, 0 < \gamma < \frac{2}{1+\rho},$$

则 NM-TOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $A = D - B, \rho = \rho(J), J = |D|^{-1}|B|, q(m,k) \geq 1, m = 0, 1, ..., k = 1, 2, ..., \alpha$.

证明: 由引理知：只需证明 $\mid H^{(m)}(\alpha, \beta, \gamma) \mid x \leq \theta x (m = 0, 1, ..., 0 \leq \theta < 1)$ 即可. 因为 $D - (\alpha L_k + \beta F_k)$ 是 H 矩阵，由引理 2.1.3(c) 知

$$\mid (D - \alpha L_k - \beta F_k)^{-1} \mid \leq \langle D - \alpha L_k - \beta F_k \rangle^{-1} = (\mid D \mid - \alpha \mid L_k \mid - \beta \mid F_k \mid)^{-1}.$$

i) 若 $0 \leq \beta \leq \gamma, 0 \leq \alpha \leq \gamma, 0 < \gamma \leq 1$ 时.
定义如下

$$\begin{aligned} M_k &= \mid D \mid - \alpha \mid L_k \mid - \beta \mid F_k \mid . \\ N_k^1 &= (1-\gamma) \mid D \mid + (\gamma - \alpha) \mid L_k \mid + (\gamma - \beta) \mid F_k \mid + \gamma \mid U_k \mid . \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

由 (3.1.1) 可得： $T_k = M_k^{-1}N_k^1, N_k^1 = M_k - \gamma \mid D \mid -\gamma \mid B \mid = M_k - \gamma(\mid D \mid - \mid B \mid)$. 而

$$\begin{aligned} \mid T_k \mid &\leq M_k^{-1}[M_k - \gamma(\mid D \mid - \mid B \mid)] \\ &\leq I - \gamma M_k^{-1} \mid D \mid (I - \mid D \mid^{-1} \mid B \mid). \end{aligned}$$

记 $e = (1, 1, ..., 1)^T$, 因为 $\mid D \mid^{-1} \mid B \mid$ 非负，则矩阵 $J + \epsilon ee^T > 0$ 且不可约 $(\epsilon > 0)$. 由 Perron-Frobenius 定理可知，存在一向量 $x_\epsilon > 0$ 满足 $(J + \epsilon ee^T)x_\epsilon = \rho_\epsilon x_\epsilon$, 这里 $\rho_\epsilon = \rho(J + \epsilon ee^T) = \rho(J_\epsilon)$. 如果 $\epsilon > 0$ 充分小，由谱半径的连续性，有 $\rho_\epsilon < 1$, 又因为 $0 < \gamma \leq 1$, 我们有 $\mid 1 - \gamma \mid + \gamma\rho < 1$, 这样就有 $\mid 1 - \gamma \mid + \gamma\rho_\epsilon < 1$. 从而有

$$\begin{aligned} \mid T_k \mid &\leq I - \gamma M_k^{-1} \mid D \mid [I - (\mid D \mid^{-1} \mid B \mid + \epsilon ee^T)] \\ &= I - \gamma M_k^{-1} \mid D \mid [I - J_\epsilon]. \end{aligned}$$

两边同乘 x_ϵ, 且 $M_k^{-1} \geq \mid D \mid^{-1}$ 可得

$$\begin{aligned} \mid T_k \mid x_\epsilon &\leq x_\epsilon - \gamma M_k^{-1} \mid D \mid (1 - \rho(J_\epsilon))x_\epsilon \\ &\leq x_\epsilon - \gamma \mid D \mid^{-1} \mid D \mid (I - \rho(J_\epsilon))x_\epsilon \\ &= (1 - \gamma + \gamma\rho(J_\epsilon))x_\epsilon. \end{aligned}$$

这样就有

$$\begin{aligned} \mid H^{(m)}(\alpha, \beta, \gamma) \mid x_\epsilon &\leq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k \mid T_k \mid^{q(m,k)} x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k(1 - \gamma + \gamma\rho_\epsilon)^{q(m,k)} x_\epsilon \\ &\leq (1 - \gamma + \gamma\rho_\epsilon)x_\epsilon \\ &= \theta_\epsilon x_\epsilon(\epsilon \to 0), \end{aligned}$$

这里 $\theta_\epsilon = 1 - \gamma + \gamma\rho_\epsilon < 1$.

ii) 若 $0 \leq \beta \leq \gamma, 0 \leq \alpha \leq \gamma, 1 < \gamma < 2/(1 + \rho)$ 时.

定义

$$N_k^2 = (\gamma - 1) \mid D \mid + (\gamma - \alpha) \mid L_k \mid + (\gamma - \beta) \mid F_k \mid + \gamma \mid U_k \mid .$$

则

$$N_k^2 = M_K - [(2 - \gamma) \mid D \mid - \gamma \mid B \mid].$$

故

$$\begin{aligned} |T_k| &\le M_k^{-1}[M_k - ((2-\gamma)|D| - \gamma|B|)] \\ &\le I - M_k^{-1}|D|[(2-\gamma)I - \gamma|D|^{-1}|B|]. \end{aligned}$$

如前面 i) 的证明过程，仍记 $e=(1,1,...,1)^T \in R^N$，让 $x_\epsilon > 0$ 满足 $J_\epsilon x_\epsilon = (J+\epsilon ee^T)x_\epsilon = \rho(J_\epsilon)x_\epsilon$，如果 $\epsilon > 0$ 充分小，由谱半径的连续性，有 $\rho_\epsilon < 1$，又因为 $1 < \gamma \le 2/(1+\rho)$，我们有 $\gamma - 1 + \gamma\rho < 1$. 这样就有 $\gamma - 1 + \gamma\rho_\epsilon < 1$. 从而有

$$|T_k| \le I - M_k^{-1}|D|[(2-\gamma)I - \gamma J_\epsilon].$$

两边同乘 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned} |T_k|x_\epsilon &\le x_\epsilon - |D|^{-1}|D|[2-\gamma-\gamma\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\ &= x_\epsilon - [2-\gamma-\gamma\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\ &= [\gamma - 1 + \gamma\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon. \end{aligned}$$

这样又有

$$\begin{aligned} |H^{(m)}(\alpha,\beta,\gamma)x_\epsilon &\le \sum_{k=1}^{\alpha} E_k |T_k|^{q(m,k)} x_\epsilon \\ &\le \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[\gamma - 1 + \gamma\rho(J_\epsilon)]^{q(m,k)} x_\epsilon \\ &\le [\gamma - 1 + \gamma\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\ &= \theta_\epsilon x_\epsilon, \end{aligned}$$

这里 $\theta_\epsilon = \gamma - 1 + \gamma\rho_\epsilon < 1$.

定理得证. □

关于非定常多分裂多参数 TOR 法我们同样有下面的收敛性定理.

定理 3.1.2 设 A 是 H 矩阵，对 $k=1,...,\alpha, L_k, F_k$ 为下三角矩阵，定义 U_k 满足 $A = D - L_k - F_k - U_k$，且 $\langle A\rangle = |D| - |L_k| - |F_k| - |U_k|$. 如果

$$0 < \beta_k \le \gamma_k, 0 < \alpha_k \le \gamma_k, 0 < \gamma_k < \frac{2}{1+\rho},$$

则 NMM-TOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*，其中 $A = D - B, \rho = \rho(J), J = |D|^{-1}|B|, q(m,k) \ge 1, m = 0,1,..., k = 1,2,...,\alpha$.

证明：与前面的定理证明类似：只需证明 $|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)|x\leq\theta x(m=0,1,...,0\leq\theta<1)$ 即可.

i) 若 $0\leq\alpha_k\leq\gamma_k,0\leq\beta_k\leq\gamma_k,0<\gamma_k<1$ 时.

$$\begin{aligned}|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)|x_\epsilon &\leq \sum_{k=1}^{\alpha}E_k(1-\gamma_k+\gamma_k\rho(J_\epsilon))^{q(m,k)}x_\epsilon\\ &\leq \sum_{k=1}^{\alpha}E_k(1-\gamma_k+\gamma_k\rho(J_\epsilon))x_\epsilon\\ &= \theta_\epsilon x_\epsilon,\end{aligned}$$

这里 $\theta_\epsilon=\max\limits_{1\leq k\leq\alpha}(1-\gamma_k+\gamma_k\rho(J_\epsilon))$.

ii) 若 $0\leq\alpha_k\leq\gamma_k,0\leq\beta_k\leq\gamma_k,1<\gamma_k<2/(1+\rho)$ 时

$$\begin{aligned}|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)|x_\epsilon &\leq \sum_{k=1}^{\alpha}E_k(\gamma_k-1+\gamma_k\rho(J_\epsilon))^{q(m,k)}x_\epsilon\\ &\leq \sum_{k=1}^{\alpha}E_k(\gamma_k-1+\gamma_k\rho(J_\epsilon))x_\epsilon\\ &= \theta_\epsilon x_\epsilon,\end{aligned}$$

这里 $\theta_\epsilon=\max\limits_{1\leq k\leq\alpha}(\gamma_k-1+\gamma_k\rho(J_\epsilon))$.

定理得证. □

关于整体松弛非定常多分裂多参数 TOR 法我们也有下面的收敛性定理.

定理 3.1.3 设 A 是 H 矩阵，对 $k=1,1,...,\alpha,L_k,F_k$ 为下三角矩阵，定义 U_k 满足 $A=D-L_k-F_k-U_k$，且 $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-|F_k|-|U_k|$. 如果

$$0\leq\beta_k\leq\gamma_k,0\leq\alpha_k\leq\gamma_k,0<\gamma_k<\frac{2}{1+\rho},0<\omega<\frac{2}{1+\rho_{\theta_\epsilon}},$$

则 GRNMM-TOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*，其中 $A=D-B,\rho=\rho(J),J=|D|^{-1}|B|,\rho_{\theta_\epsilon}=\max\limits_{1\leq k\leq\alpha}\{|1-\gamma_k|+\gamma_k\rho(J_\epsilon)\},q(m,k)\geq1,m=0,1,...,k=1,2,...,\alpha$.

证明：与前面的定理证明类似：只需证明 $|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)|x\leq\theta x(m=0,1,...,0\leq\theta<1)$ 即可.

i) 若 $0\leq\beta_k\leq\gamma_k,0\leq\alpha_k\leq\gamma_k,0<\gamma_k\leq1,0<\omega<\frac{2}{1+\rho_{\theta_\epsilon}}$ 时

$$\begin{aligned}|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)|x_\epsilon &\leq \omega\sum_{k=1}^{\alpha}E_k(1-\gamma_k+\gamma_k\rho(J_\epsilon))^{q(m,k)}x_\epsilon+|1-\omega|x_\epsilon\\ &\leq \omega\theta_\epsilon x_\epsilon+|1-\omega|x_\epsilon\\ &= (\omega\theta_\epsilon+|1-\omega|)x_\epsilon.\end{aligned}$$

当 $0<\omega<2/(1+\rho_{\theta_\epsilon})$ 时，就有

$$|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)|x_\epsilon<\theta x_\epsilon,$$

这里 $\theta=\omega\theta_\epsilon+|1-\omega|,\theta_\epsilon=\max\limits_{1\leq k\leq\alpha}\{1-\gamma_k+\gamma_k\rho(J_\epsilon)\}$.

ii) 若 $0\leq\beta_k\leq\gamma_k,0\leq\alpha_k\leq\gamma_k,1<\gamma_k\leq 2/(1+\rho),0<\omega<\frac{2}{1+\rho_{\theta_\epsilon}}$ 时.

$$\begin{aligned}|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)|x_\epsilon &\leq \omega\sum_{k=1}^{\alpha}E_k(\gamma_k-1+\gamma_k\rho(J_\epsilon))^{q(m,k)}x_\epsilon+|1-\omega|x_\epsilon\\ &\leq \omega\theta_\epsilon x_\epsilon+|1-\omega|x_\epsilon\\ &= (\omega\theta_\epsilon+|1-\omega|)x_\epsilon.\end{aligned}$$

当 $0<\omega<2/(1+\rho_{\theta_\epsilon})$ 时，仍有

$$|H^{(m)}(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,\omega)|x_\epsilon<\theta x_\epsilon,$$

这里 $\theta=\omega\theta_\epsilon+|1-\omega|,\theta_\epsilon=\max\limits_{1\leq k\leq\alpha}\{\gamma_k-1+\gamma_k\rho(J_\epsilon)\}$.

定理得证. □

由于矩阵 A 是 H 阵包含下面推论中的三种情况，则也立即有下面的推论.

推论 3.1.4 让矩阵 $A\in R^{N\times N}$ 满足以下条件之一.

i) A 是 M 阵.

ii) A 是严格或不可约对角占优阵.

iii) A 是对称正定 L 阵.

且 $A=D-L_k-F_k-U_k,k=1,2,...,\alpha$, 其中 L_k,F_k 为严格下三角矩阵， U_k 为严格上三角矩阵， $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-F_k-|U_k|=|D|-|B|$. 如果

$$0\leq\beta_k\leq\gamma_k,0\leq\alpha_k\leq\gamma_k,0<\gamma_k<\frac{2}{1+\rho},0<\omega<\frac{2}{1+\rho_{\theta_\epsilon}},$$

则 GRNMM-TOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $A=D-B,\rho=\rho(J),J=|D|^{-1}|B|,\rho_{\theta_\epsilon}=\max\limits_{1\leq k\leq\alpha}\{|1-\gamma_k|+\gamma_k\rho(J_\epsilon)\},q(m,k)\geq 1,m=0,1,...,k=1,2,...,\alpha$.

§3.2 数值试验

我们仍然以 §2.4.2 中微分方程差分离散后的线性方程组的求解为实例，以比较整体松弛非定常多分裂多参数 TOR 法，局部松弛非定常多分裂多参数 AOR 法和局部松弛非定常多分裂多参数 SOR 法，验证我们方法的有效性.

先取初始值 $x^{(0)} = (10, 30, -20, -40, -8, 9)^T$, 误差精度为 $\epsilon = 10^{10}$ ，经试验知，我们的方法和文献 [22 、 23] 中的方法进行了比较，我们的方法较局部松弛非定常多分裂多参数 SOR 法改进性能如下表所示。

方法	近似最优的谱半径	近似最优的迭代步数	改进性能 %	文献
LRNMM-SOR	0.6433	62	0	[22]
GRNMM-TOR	0.5705	49	20.97%	本文

此时，我们的方法较局部松弛非定常多分裂多参数 AOR 法改进性能如下表所示.

方法	近似最优的谱半径	近似最优的迭代步数	改进性能 %	文献
LRNMM-AOR	0.6066	53	0	[23]
GRNMM-TOR	0.5705	49	7.55%	本文

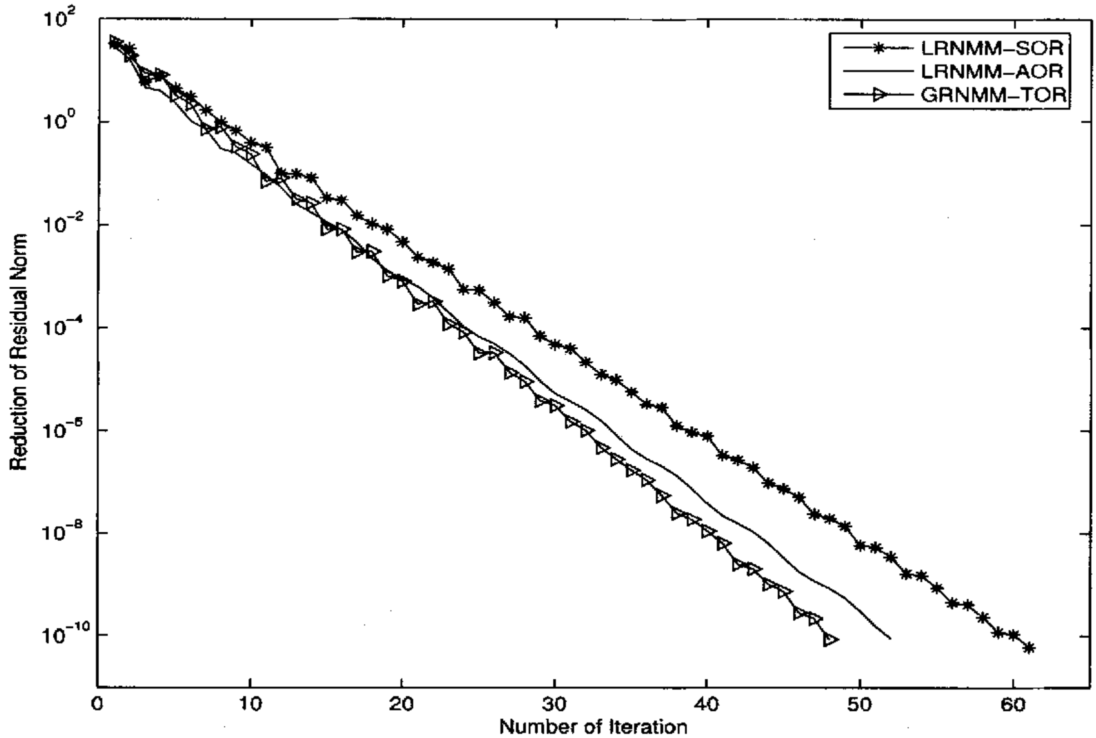
再取初始值 $x^{(0)} = (0, 10, -20, 20, 30, -30)^T$, 误差精度仍为 $\epsilon = 10^{10}$ ，我们的方法较局部松弛非定常多分裂多参数 SOR 法改进性能如下表所示.

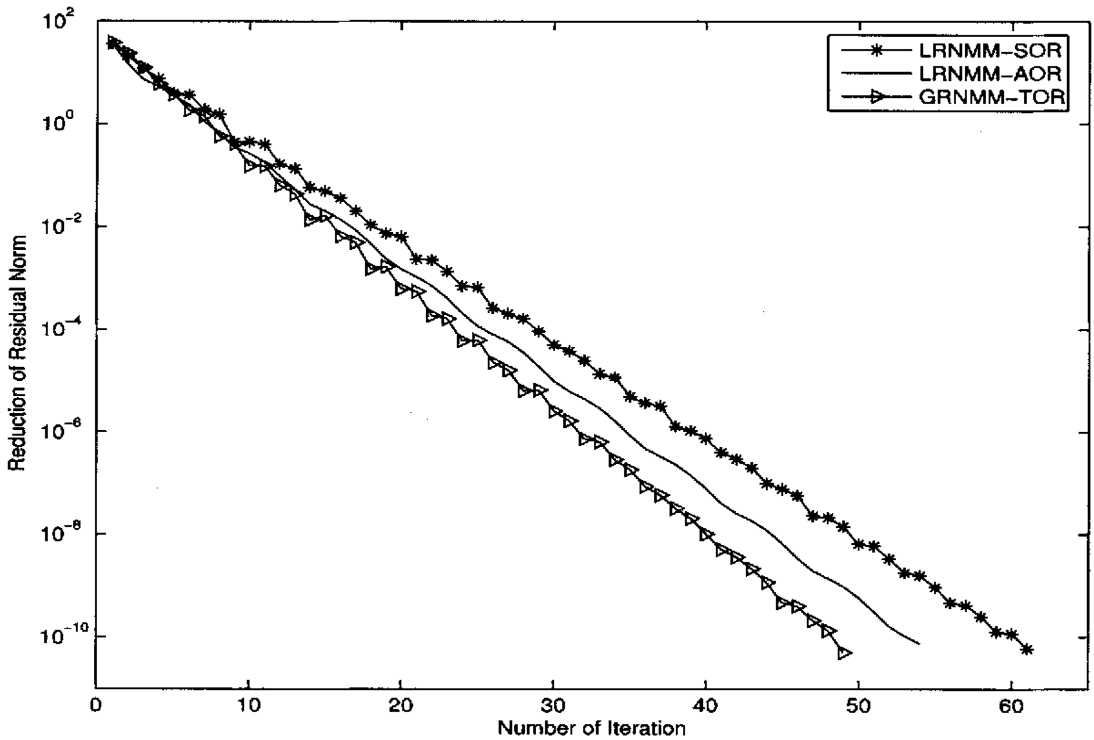
方法	近似最优的谱半径	近似最优的迭代步数	改进性能 %	文献
LRNMM-SOR	0.6433	62	0	[22]
GRNMM-TOR	0.5705	50	19.35%	本文

此时，我们的方法较局部松弛非定常多分裂多参数 AOR 法改进性能如下表所示.

方法	近似最优的谱半径	近似最优的迭代步数	改进性能 %	文献
LRNMM-AOR	0.6066	55	0	[23]
GRNMM-TOR	0.5705	50	9.09%	本文

我们的方法和文献 [22 、 23] 中的方法误差曲线比较分别如下图所示.





由上面几个试验可得：我们的方法较文献中的方法误差曲线下降快，(我们的)GRNMM-TOR 方法比 (文献中的)LRNMM-SOR 法收敛速度提高近 20% ；比 LRNMM-AOR 法收

敛速度提高近 10% .

§3.3 敛散速度的比较

在本节，我们通过进一步细致地讨论上述算法迭代矩阵的谱半径之间的相互关系，比较了它们的收敛速度和发散速度.

为了方便起见，在以下的讨论中，不失一般性我们仍然约定 $diag(A)=I$. 则

$$H_{NM-TOR}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\{[I-(\alpha L_k+\beta F_k)]^{-1}[(1-\gamma)I+(\gamma-\alpha)L_k+(\gamma-\beta)F_k+\gamma U_k]\}^{q(m,k)}.$$

$\alpha=\beta$, 得到非定常多分裂 AOR 迭代矩阵.

$$H_{NM-AOR}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\{(I-\alpha\tilde{L}_k)^{-1}[(1-\gamma)I+(\gamma-\alpha)L_k+(\gamma-\beta)F_k+\gamma U_k]\}^{q(m,k)}.$$

$\alpha=\beta=\gamma$, 得到非定常多分裂 SOR 迭代矩阵.

$$H_{NM-SOR}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\{(I-\alpha\tilde{L}_k)^{-1}[(1-\alpha)I+\alpha U_k]\}^{q(m,k)}.$$

$\alpha=\beta=\gamma=1$, 得到非定常多分裂 G-S 迭代矩阵.

$$H_{NM-GS}=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k[(I-\tilde{L}_k)^{-1}U_k]^{q(m,k)}$$

$\alpha=\beta=0, q(m,k)=1$, 得到并行多分裂外插 Jacobi 迭代矩阵.

$$H_{JOR}=[(1-\gamma)I+\gamma B].$$

$\alpha=\beta=0, \gamma=1, q(m,k)=1$, 得到并行多分裂 Jacobi 迭代矩阵.

$$H_{MJ}=B.$$

定理 3.3.1 设 $A\in R^N$ 为 L 矩阵，$(I-L_k-F_k,U_k,E_k,k=1,2,...,\alpha$ 为 A 的一个多分裂，且 $L_k\geq 0,F_k\geq 0,U_k\geq 0,k=1,2,...,\alpha$, 则当 $0\leq\alpha,\beta\leq 1(\gamma\neq 0)$ 时.

i) 若 $\rho(H_{JOR})<1$, 则 $\rho(H_{NM-TOR})\leq\rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR})\geq 1$, 则 $\rho(H_{NM-TOR})\geq\rho(H_{JOR})$.

证明: 显然, 此时 H_{NM-TOR}, H_{JOR} 均为非负矩阵, 对每个 $k \in \{1, 2, ..., \alpha\}$, 由于 L_k, F_k 为严格下三角矩阵, 则 $L_k^m = 0, F_k^m = 0 (m \geq \text{n}$ 为整数), 令

$$L(\alpha,\beta) = [I + (\alpha L_k + \beta F_k) + (\alpha L_k + \beta F_k)^2 + ... + (\alpha L_k + \beta F_k)^{n-1}](\alpha L_k + \beta F_k).$$

则

$$L(\alpha,\beta) \geq 0.$$

再令

$$T_{NM-TOR} = [I - (\alpha L_k + \beta F_k)]^{-1}[(1-\gamma)I + (\gamma - \alpha)L_k + (\gamma - \beta)F_k + \gamma U_k].$$

则

$$\begin{aligned} T_{NM-TOR} &= [I - (\alpha L_k + \beta F_k)]^{-1}[H_{JOR} - (\alpha L_k + \beta F_k)] \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} (\alpha L_k + \beta F_k)^m (H_{JOR} - (\alpha L_k + \beta F_k)] \\ &= H_{JOR} + L(\alpha,\beta)(H_{JOR} - I). \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

若 $\rho(H_{JOR} < 1$, 则对充分小的 $\epsilon > 0$, 由谱半径的连续性及 Perron-Frobenius 定理知 $\rho_\epsilon = \rho(H_{JOR} + \epsilon ee^T) < 1$, 且存在正向量 $x_\epsilon \in R^N$, 使得 $(H_{JOR} + \epsilon ee^T)x_\epsilon = \rho_\epsilon x_\epsilon$, 其中 $e = (1, 1, ..., 1)^T \in R^N$, 现利用 (3.3.1) 式可得:

$$\begin{aligned} T_{NM-TOR}x_\epsilon &\leq \{(H_{MEJ} + \epsilon ee^T) + L(\alpha,\beta)[(H_{MEJ} + \epsilon ee^T) - I]\}x_\epsilon \\ &= \rho_\epsilon x_\epsilon + (\rho_\epsilon - 1)L(\alpha,\beta)x_\epsilon \\ &\leq \rho_\epsilon x_\epsilon. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} H_{NM-TOR}x_\epsilon &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k T_{NM-TOR}^{q(m,k)} x_\epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k \rho_\epsilon^{q(m,k)} x_\epsilon \\ &\leq \rho_\epsilon x_\epsilon. \\ \rho(H_{NM-TOR}) &\leq \rho_\epsilon. \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性知 i) 成立.

若 $\rho(H_{JOR} \geq 1$, 则由 [20] 中定理 2.7 知：存在非负向量 $x \in R^N(x \neq 0)$, 使得 $H_{JOR}x = \rho(H_{JOR})x$. 再利用 (3.3.1) 可得：

$$\begin{aligned} T_{NM-TOR}x &= \rho(H_{MEJ})x + (\rho(H_{MEJ}) - 1)L(\alpha,\beta)x \\ &\geq \rho(H_{JOR})x. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} H_{NM-TOR}x &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k T_{NM-TOR}^{q(m,k)} x \\ &\geq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k \rho_{H_{JOR}}^{q(m,k)} x \\ &\geq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k \rho(H_{JOR})^{q(m,k)} x \\ &\geq \rho_{H_{JOR}} x. \end{aligned}$$

令 $H = \frac{H_{NM-TOR}}{\rho(H_{JOR})}$, 则有 $Hx \geq x$, 从而对所有的非负整数 m, 有 $(H)^m x \geq x$. 由于 $x \neq 0$, 这说明当 $m \to 0$ 时 $H^m \nrightarrow 0$. 因此 $\rho(H) \geq 1$, 故

$$\begin{aligned} \rho(H_{NMTOR}) &= \rho(H_{JOR})\rho(H) \\ &\geq \rho(H_{JOR}). \end{aligned}$$

定理得证. □

推论 3.3.2　设定理 3.3.1 的条件成立，则当 $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq 1(\gamma \neq 0)$ 时.

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{NM-AOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{NM-AOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

推论 3.2.3　设定理 3.3.1 的条件成立，则当 $0 < \alpha \leq 1$ 时.

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{NM-SOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{NM-SOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

推论 3.3.4(Stein-Rosenberg **型定理**)　设定理 3.3.1 的条件成立，则

i) 若 $\rho(H_{MJ}) < 1$, 则 $\rho(H_{NM-GS}) \leq \rho(H_{MJ})$.

ii) 若 $\rho(H_{MJ}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{NM-GS}) \geq \rho(H_{MJ})$.

由上面的定理及推论立即可得：

定理 3.3.5　设定理 3.3.1 的条件成立，则

i) 若 $0 \leq \alpha, \beta \leq \gamma \leq 1(\gamma \neq 0)$, H_{NM-TOR} 收敛当且仅当 H_{JOR} 收敛.

ii) 若 $0 \le \alpha \le \gamma \le 1(\gamma \ne 0)$, H_{NM-AOR} 收敛当且仅当 H_{JOR} 收敛.

iii) 若 $0 < \alpha \le 1$, H_{NM-SOR} 收敛当且仅当 H_{JOR} 收敛.

iv) H_{NM-GS} 收敛当且仅当 H_{MJ} 收敛.

v) H_{JOR} 收敛当且仅当 H_{MJ} 收敛.

又由于 $\rho(H_{JOR}) < 1(0 < \gamma \le 1)$ 当且仅当 $H_{MJ} < 1$, 所以，我们又有.

定理 3.3.6　设定理 3.3.1 的条件成立，则 $\rho(H_{MJ}) < 1$ 当且仅当以下之一条件成立.

i) $0 \le \alpha, \beta \le \gamma \le 1(\gamma \ne 0)$, 且 H_{NM-TOR} 收敛.

ii) $0 \le \alpha \le \gamma \le 1(\gamma \ne 0)$, 且 H_{NM-AOR} 收敛.

iii) $0 < \alpha \le 1$, 且 H_{NM-SOR} 收敛.

iv) $0 < \alpha \le 1$, 且 H_{JOR} 收敛.

v) H_{NM-GS} 收敛.

第四章 并行多分裂对称和非对称 TOR 法及敛散速度的比较

§4.1 并行多分裂对称 TOR 和非对称 TOR 法

与对称 SOR(SSOR) 和非对称 SOR(USSOR) 法类似，我们本节重点讨论并行多分裂对称 TOR(LGRM-STOR) 和非对称 TOR(LGRM-USTOR) 法. LGRM-STOR 和 LGRM-USTOR 分别引入多个松弛因子，适当选择这些参量，可使收敛速度加快.

令

$$A = D - \tilde{L}_k - \tilde{U}_k,$$

其中 $\tilde{L}_k, \tilde{U}$ 分别为 A 的严格下三角和严格上三角矩阵，且 $\tilde{L}_k = L_k + F_k, \tilde{U}_k = U_k + N_k$ 分别是其上三角和下三角部分的分解. 所谓对称 TOR 法就是分两步求解 $x^{(m+1)}$, 其格式如下

$$[D - (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k)]x^{(m+\frac{1}{2})} = [(1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)L_k + (\omega_1 - \omega_3)F_k + \omega_1 \tilde{U}_k]x^{(m)} + \omega_1 b.$$

$$[D - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)]x^{(m+1)} = [(1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)U_k + (\omega_1 - \omega_3)N_k + \omega_1 \tilde{L}_k]x^{(m+\frac{1}{2})} + \omega_1 b.$$

则两式合起来就是

$$x^{(m+1)} = H_\omega x^{(m)} + C_\omega, m = 0, 1, 2, ..., \forall x^{(0)} \in R^N,$$

此格式称为 **对称** TOR **法**(STOR).

其中

$$\begin{aligned} H_\omega &= [D - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)U_k + (\omega_1 - \omega_3)N_k + \omega_1 \tilde{L}_k] \\ &\quad [D - (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)L_k + (\omega_1 - \omega_3)F_k + \omega_1 \tilde{U}_k]. \\ C_\omega &= \omega_1[D - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D + (\omega_1 - \omega_2)U_k + (\omega_1 - \omega_3)N_k + \omega_1 \tilde{L}_k] \\ &\quad [D - (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k)]^{-1} + \omega_1[D - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)]^{-1}. \end{aligned}$$

算法 7 (**左权局部松弛** STOR **法**).

任取初始近似 $x^{(0)} \in R^N$.

对 $m = 0, 1, ...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k=1,2,...,\alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$y_k = H_\omega x_{(m)} + C_\omega. \tag{4.1.1}$$

ii) 计算

$$x^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{\alpha} E_k y_k. \tag{4.1.2}$$

此算法可写成下面的形式

$$\begin{aligned} x^{(m+1)} &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k H_\omega x^{(m)} + \sum_{k=1}^{\alpha} E_k C_\omega \\ &= H_{MSTOR} x^{(m)} + G_{MSTOR}. \end{aligned}$$

关于左权局部松弛 STOR 法，我们证明如下的收敛性定理.

定理 4.1.1 设 A 是 H 矩阵， $A = D - \tilde{L}_k - \tilde{U}_k, \tilde{L}_k = L_k + F_k, \tilde{U}_k = U_k + N_k, k = 1,2,...,\alpha$, 其中 L_k, F_k 为 A 的严格下三角矩阵， U_k, N_k 为严格上三角矩阵，且 $\langle A\rangle = |D| - |L_k| - |F_k| - |U_k| - |N_k| = |D| - |B|$. 如果

$$0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho},$$

则左权局部松弛 STOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho = \rho(J)$, 而 $J = |D|^{-1}|B|, B = D - A$.

证明: 因为 $\rho(H_{MSTOR}) \le \rho(|H_{MSTOR}|)$, 所以只需在定理条件下证明 $\rho(|H_{MSTOR}|) < 1$.

由假设条件易知 $D - \omega_2 U_k - \omega_3 N_k$ 是 H 阵， $k = 1,2,...,\alpha$. 又有引理 2.1.3(c) 及比较定理知

$$(D - \omega_2 U_k - \omega_3 N_k)^{-1}| \le \langle D - \omega_2 U_k - \omega_3 N_k\rangle^{-1} = (|D| - \omega_2|U_k| - \omega_3|N_k|)^{-1}.$$

i) 当 $0 < \omega_1 \le 1, 0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1$ 时. 定义如下

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{MSTOR} &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[D - (\omega_2 U_k - \omega_3 N_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D + (\omega_1-\omega_2)U_k + (\omega_1-\omega_3)N_k + \omega_1\tilde{L}_k]. \\ \tilde{H}_{MSTOR} &= [D - (\omega_2 L_k - \omega_3 F_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D + (\omega_1-\omega_2)L_k + (\omega_1-\omega_3)F_k + \omega_1\tilde{U}_k]. \\ \tilde{M}_k &= |D| - \omega_2|U_k| - \omega_3|N_k|. \\ \tilde{N}_k &= (1-\omega_1)|D| + (\omega_1-\omega_2)|U_k| + (\omega_1-\omega_3)|N_k| + |\tilde{L}_k| \\ &= \tilde{M}_k - (\omega_1|D| - \omega_1|B|). \end{aligned}$$

故

$$H_{MSTOR} = \tilde{H}_{MSTOR}\bar{H}_{MSTOR}.$$

而

$$\begin{aligned}
|\tilde{H}_{MSTOR}| &\leq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\tilde{M}_k^{-1}\tilde{N}_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\tilde{M}_k^{-1}[\tilde{M}_k^{-1} - \omega_1(|D| - |B|)] \\
&\leq 1 - \omega_1 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|(I - |D|^{-1}|B|).
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

设 $e = (1, 1, ..., 1)^T \in R^N$, 因为矩阵 J 时非负的，所以对任意的 $\epsilon > 0$, 矩阵 $J_\epsilon = J + \epsilon ee^T$ 时不可约的，且所有元素均大于 0. 由 $Perron - Frobenius$ 定理可得：存在向量 $x_\epsilon > 0$, 使得 $(J + \epsilon ee^T)x_\epsilon = \rho_\epsilon x_\epsilon$, 其中 $\rho_\epsilon = \rho(J + \epsilon ee^T)$. 由于 $0 < \omega_1 \leq 1$, 所以

$$1 - \omega_1 + \omega_1\rho(|D|^{-1}|B|) < 1.$$

又由谱半径的连续性得 $1 - \omega_1 + \omega_1\rho(J_\epsilon) < 1$, 从而由 (4.1.3) 可知

$$\begin{aligned}
|\tilde{H}_{MSTOR}| &\leq I - \omega_1 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|[I - (|D|^{-1}|B| + \epsilon ee^T)] \\
&= I - \omega_1 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|(I - J_\epsilon).
\end{aligned}$$

再定义

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k &= |D| - \omega_2|L_k| - \omega_3|F_k|. \\
\tilde{Q}_k &= (1 - \omega_1)|D| + (\omega_1 - \omega_2)|L_k| + (\omega_1 - \omega_3)|F_k| + \omega_1|\tilde{U}_k| \\
&= \tilde{P}_k - (\omega_1|D| - \omega_1|B|).
\end{aligned}$$

由以上证明也可知

$$|\bar{H}_{MSTOR} \leq I - \omega_1\tilde{P}_k|D|(I - J_k).$$

故

$$\begin{aligned}
|H_{MSTOR}| &\leq |\tilde{H}_{MSTOR}||\bar{H}_{MSTOR}| \\
&\leq [I - \omega_1 \sum_{k=1}^{\alpha} E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|(I - J_\epsilon)][I - \omega_1\tilde{P}_k|D|(I - J_\epsilon)].
\end{aligned}$$

两边同乘 x_ϵ 并注意到 $\tilde{M}_k \le |D|, \tilde{M}_k^{-1} \ge |D|^{-1}, \tilde{P}_k \le |D|, \tilde{P}_k^{-1} \ge |D|^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned}
|H_{MSTOR}|x_\epsilon &\le [I-\omega_1\sum_{k=1}^{\alpha}E_k|D|^{-1}|D|(I-J_\epsilon)][I-\omega_1|D|^{-1}|D|(I-J_\epsilon)]x_\epsilon \\
&= [I-\omega_1\sum_{k=1}^{\alpha}E_k(I-J_\epsilon)][I-\omega_1(1-\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\
&= [1-\omega_1(1-\rho(J_\epsilon))][I-\omega_1\sum_{k=1}^{\alpha}E_k(I-J_\epsilon)]x_\epsilon \\
&= [1-\omega_1(1-\rho(J_\epsilon))][1-\omega_1(1-\rho(J_\epsilon))]x_\epsilon \\
&< [1-\omega_1+\omega_1\rho(J_\epsilon)][1-\omega_1+\omega_1\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\
&< x_\epsilon.
\end{aligned}$$

故

$$\rho(|H_{MSTOR}|) < 1.$$

ii) 当 $1 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1$ 时. 定义

$$\begin{aligned}
\bar{N}_k &= (\omega_1-1)|D|+(\omega_1-\omega_2)|U_k|+(\omega_1-\omega_3)|N_k|+\omega_1|\tilde{L}_k| \\
&= \tilde{M}_k-[(2-\omega_1)|D|-\omega_1|B|].
\end{aligned}$$

所以又有

$$\begin{aligned}
|\tilde{H}_{MSTOR}| &\le \sum_{k=1}^{\alpha}E_k\tilde{M}_k^{-1}\bar{N}_k \\
&\le \sum_{k=1}^{\alpha}\tilde{M}_k^{-1}[\tilde{M}-(2-\omega_1)|D|-\omega_1|B|] \\
&\le I-\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|[(2-\omega_1)I-\omega_1|D|^{-1}|B|].
\end{aligned}$$

与 i) 的证明类似, 同样存在 x_ϵ 使得 $J_\epsilon x_\epsilon = \rho_\epsilon x_\epsilon$, 只要 $1 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}$, 就有 $\omega_1 - 1 + \omega_1\rho(J_\epsilon) < 1$. 从而有

$$|\tilde{H}_{MSTOR}| \le I-\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|[(2-\omega_1)I-\omega_1 J_\epsilon].$$

若再定义

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_k &= (\omega_1-1)|D|+(\omega_1-\omega_2)|F_k|+(\omega_1-\omega_3)|F_k|+\omega_1|\tilde{U}_k| \\
&= \tilde{P}_k-[(2-\omega_1)|D|-\omega_1|B|].
\end{aligned}$$

同理也有

$$|\bar{H}_{MSTOR}| \le I-\tilde{P}_k^{-1}|D|[(2-_1)I-\omega_1 J_\epsilon].$$

故

$$\begin{aligned}|H_{MSTOR}| &\le |\bar{H}_{MSTOR}||\bar{H}_{MSTOR}| \\ &\le [I-\sum_{k=1}^{\alpha}E_k\tilde{M}_k^{-1}|D|((2-\omega_1)I-\omega_1 J_\epsilon)] \\ &\quad \times[I-\tilde{P}_k^{-1}|D|((2-\omega_1)I-\omega_1 J_\epsilon)].\end{aligned}$$

两边同乘 x_ϵ, 并注意到 $\tilde{M}_k^{-1}\ge|D|^{-1},\tilde{P}_k^{-1}\ge|D|^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned}|H_{MSTOR}|x_\epsilon &\le [I-\sum_{k=1}^{\alpha}E_k|D|^{-1}|D|((2-\omega_1)I-\omega_1 J_\epsilon)][1-|D|^{-1}|D|(2-\omega_1-\omega_1 J_\epsilon)] \\ &= [\omega_1-1+\omega_1\rho(J_\epsilon)][I-\sum_{k=1}^{\alpha}E_k((2-\omega_1)I-\omega_1 J_\epsilon)]x_\epsilon \\ &\le [\omega_1-1+\omega_1\rho(J_\epsilon)][1-(2-\omega_1-\omega_1\rho(J_\epsilon))]x_\epsilon \\ &= [\omega_1-1+\omega_1\rho(J_\epsilon)][\omega_1-1+\omega_1\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\ &< x_\epsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\rho(|H_{MSTOR}|)<1.$$

定理得证. □

算法 8 (**左权整体松弛** STOR **法，简记为** LGRM-STOR).

任取初始近似 $x^{(0)}\in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k=1,2,...,\alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$y_k=H_\omega x^{(m)}+C_\omega. \tag{4.1.4}$$

ii) 计算.

$$x^{(m+1)}=\omega_4\sum_{k=1}^{\alpha}E_k y_k+(1-\omega_4)x^{(m)}. \tag{4.1.5}$$

此算法可写成下面的形式

$$x^{(m+1)}=H_{LGRM-STOR}x^{(m)}+G_{LGRM-STOR}b,$$

其中 $H_{LGRM-STOR}=\omega_4 H_{MSTOR}+(1-\omega_4)I$.

关于 LGRM-STOR 法，我们证明如下的收敛性定理.

定理 4.1.2 设 A 是 H 矩阵， $A = D - \tilde{L}_k - \tilde{U}_k, \tilde{L}_k = L_k + F_k, \tilde{U}_k = U_k + N_k, k = 1, 2, ..., \alpha$, 其中 L_k, F_k 为 A 的严格下三角矩阵， U_k, N_k 为严格上三角矩阵，且 $\langle A \rangle = |D| - |L_k| - |F_k| - |U_k| - |N_k| = |D| - |B|$. 如果

$$0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}, \tag{4.1.6}$$

则左权整体松弛 STOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho = \rho(J)$, 而 $J = |D|^{-1}|B|, B = D - A$.

证明：因为 $\rho(H_{LGRM-STOR}) \le \rho(|H_{LGRM-STOR}|)$, 所以只需在定理条件下证明 $\rho(|H_{LGRM-STOR}|) < 1$ 即可．由前面定理的证明可知：

i) 当 $0 < \omega_1 \le 1, 0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}, \rho_{\omega_1} = 1 - \omega_1 + \omega_1\rho$ 时.

$$\begin{aligned} |H_{LGRM-STOR}|x_\epsilon &\le [|\omega_4 - 1| + \omega_4(1 - \omega_1 + \omega_1\rho(J_\epsilon))] \\ &\quad \times [|\omega_4 - 1| + \omega_4(1 - \omega_1 + \omega_1\rho(J_\epsilon))]x_\epsilon \\ &= [|\omega_4 - 1| + \omega_4\rho_{\omega_1}][|\omega_4 - 1| + \omega_4\rho_{\omega_1}]x_\epsilon. \end{aligned}$$

当满足 (4.1.6) 式时就有 $|H_{LGR-STOR}|x_\epsilon < x_\epsilon$. 故

$$\rho(|H_{LGRM-STOR}|) < 1.$$

ii) 当 $1 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}, \rho_{\omega_1} = \omega_1 - 1 + \omega_1\rho$ 时.

$$\begin{aligned} |H_{LGRM-STOR}|x_\epsilon &\le [|\omega_4 - 1| + \omega_4(\omega_1 - 1 + \omega_1\rho(J_\epsilon))] \\ &\quad \times [|\omega_4 - 1| + \omega_4(\omega_1 - 1 + \omega_1\rho(J_\epsilon))]x_\epsilon \\ &= [|\omega_4 - 1| + \omega_4\rho_{\omega_1}][|\omega_4 - 1| + \omega_4\rho_{\omega_1}]x_\epsilon. \end{aligned}$$

当满足定理条件时同样也有 $|H_{LGRM-STOR}|x_\epsilon < x_\epsilon$. 故

$$\rho(|H_{LGRM-STOR}|) < 1.$$

结论得证. □

对于右权局部松弛 TOR 法和 RGRM-STOR 法，仿照上面两个定理可得到相应的推论，这里不再赘述．所谓非对称 TOR 法也是分两步求解 $x^{(m+1)}$, 其格式如下

$[D-(\gamma_2 L_k+\gamma_3 F_k)]x^{(m+\frac{1}{2})}=[(1-\gamma_1)D+(\gamma_1-\gamma_2)L_k+(\gamma_1-\gamma_3)F_k+\gamma_1\tilde{U}_k]x^{(m)}+\gamma_1 b.$

$[D-(\omega_2 U_k+\omega_3 N_k)]x^{(m+1)}=[(1-\omega_1)D+(\omega_1-\omega_2)U_k+(\omega_1-\omega_3)N_k+\omega_1\tilde{L}_k]x^{(m+\frac{1}{2})}+\omega_1 b.$

则两式合起来就是

$$x^{(m+1)}=L_\omega x^{(m)}+S_\omega, m=0,1,2,...,\forall x^{(0)}\in R^N,$$

此格式称为 **非对称** TOR **法** (USTOR).

其中 $T_\omega=[D-(\omega_2 U_k+\omega_3 N_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D+(\omega_1-\omega_2)U_k+(\omega_1-\omega_3)N_k+\omega_1\tilde{L}_k][D-(\gamma_2 L_k+\gamma_3 F_k)]^{-1}[(1-\gamma_1)D+(\gamma_1-\gamma_2)L_k+(\gamma_1-\gamma_3)F_k+\gamma_1\tilde{U}_k]$.

算法 9 (**左权局部松弛** USTOR **法**).

任取初始近似 $x^{(0)}\in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k=1,2,...,\alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$y_k=L_\omega x^{(m)}+S_\omega. \tag{4.1.7}$$

ii) 计算.

(4.1.8).

该算法可写成下面的形式

$$\begin{aligned}x^{(m+1)}&=\sum_{k=1}^{\alpha}E_k L_\omega x^{(m)}+\sum_{k=1}^{\alpha}E_k S_\omega\\&=H_{MUSTOR}x^{(m)}+G_{MUSTOR}.\end{aligned}$$

关于左权局部松弛 USTOR 法，我们证明如下的收敛性定理.

定理 4.1.3　设 A 是 H 矩阵， $A=D-\tilde{L}_k-\tilde{U}_k, \tilde{L}_k=L_k+F_k, \tilde{U}_k=U_k+N_k, k=1,2,...,\alpha$, 其中 L_k, F_k 为 A 的严格下三角矩阵， U_k, N_k 为严格上三角矩阵，且 $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-|F_k|-|U_k|-|N_k|=|D|-|B|$. 如果

$$0\le\omega_i\le\omega_1, 0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0\le\gamma_i\le\gamma_1, 0<\gamma_1<\frac{2}{1+\rho}, i=2,3, \tag{4.1.9}$$

则左权局部松弛 USTOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho=\rho(J)$, 而 $J=|D|^{-1}|B|, B=D-A$.

证明: 因为 $\rho(H_{MUSTOR}) \le \rho(|H_{MUSTOR}|)$, 所以只需在定理条件下证明 $\rho(|H_{MUSTOR}|) < 1$ 即可.

由假设条件易知: $D-\omega_2U_k-\omega_3N_k, D-\gamma_2U_k-\gamma_3N_k$ 均是 H 阵, $k=1,2,...,\alpha$. 由引理 2.1.3(c) 及比较定理知

$|(D-\omega_2U_k-\omega_3N_k)^{-1}| \le \langle D-\omega_2U_k-\omega_3N_k\rangle^{-1} = (|D|-\omega_2|U_k|-\omega_3|N_k|)^{-1}$.

$|(D-\gamma_2U_k-\gamma_3N_k)^{-1}| \le \langle D-\gamma_2U_k-\gamma_3N_k\rangle^{-1} = (|D|-\gamma_2|U_k|-\gamma_3|N_k|)^{-1}$.

由前面的定理证明过程可知

i) 当 $0<\omega_1\le 1, 0\le\omega_i\le\omega_1, 0\gamma_1\le 1, 0\le\gamma_i\le\gamma_1, i=2,3$ 时.

定义

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_{MUSTOR} &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[D-(\omega_2U_k+\omega_3N_k)]^{-1}[(1-\omega_1)D+(\omega_1-\omega_2)U_k+(\omega_1-\omega_3)N_k+\omega_1\tilde{L}_k].\\
\bar{H}_{MUSTOR} &= [D-(\gamma_2L_k+\gamma_3F_k)]^{-1}[(1-\gamma_1)D+(\gamma_1-\gamma_2)L_k+(\gamma_1-\gamma_3)F_k+\gamma_1\tilde{U}_k].\\
\tilde{M}_k &= |D|-\omega_2|U_k|-\omega_3|N_k|.\\
\tilde{N}_k &= (1-\omega_1)|D|+(\omega_1-\omega_2)|U_k|+(\omega_1-\omega_3)|N_k|+\omega_1|\tilde{L}_k|\\
&= \tilde{M}_k-(\omega_1|D|+\omega_1|B|).\\
\tilde{R}_k &= |D|-\gamma_2|L_k|-\gamma_3|F_k|.\\
\bar{T}_k &= (1-\gamma_1)|D|+(\gamma_1-\gamma_2)|L_k|+(\gamma_1-\gamma_3)|F_k|+\gamma_1|\tilde{U}_k|\\
&= \tilde{R}_k-(\gamma_1|D|+\gamma_1|B|).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|H_{MUSTOR}|x_\epsilon &\le |\tilde{H}_{MUSTOR}||\bar{H}_{MUSTOR}|x_\epsilon\\
&\le [1-\omega_1+\omega_1\rho(J_\epsilon)][1-\gamma_1+\gamma_1\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon\\
&< x_\epsilon.
\end{aligned}
$$

故有

$$\rho(|H_{MUSTOR}|)<1.$$

ii) 当 $1<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0\le\omega_i\le\omega_1, 0<\gamma_1<\frac{2}{1+\rho}, 0\le\gamma_i\le\gamma_1, i=2,3$ 时

同样定义

$$\begin{aligned}\bar{N}_k &= (\omega_1-1)|D|+(\omega_1-\omega_2)|U_k|+(\omega_1-\omega_3)|N_k|+\omega_1|\tilde{L}_k| \\ &= \tilde{M}_k-[(2-\omega_1)|D|-\omega_1|B|]. \\ \bar{T}_k &= (\gamma_1-1)|D|+(\gamma_1-\gamma_2)|L_k|+(\gamma_1-\gamma_3)|F_k|+\gamma_1|\tilde{U}_k| \\ &= \tilde{R}_k-[(2-\gamma_1)|D|-\gamma_1|B|].\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|H_{MUSTOR}|x_\epsilon &\le [\omega_1-1+\omega_1\rho(J_\epsilon)][\gamma_1-1+\gamma_1\rho(J_\epsilon)]x_\epsilon \\ &< x_\epsilon.\end{aligned}$$

故有

$$\rho(|H_{MUSTOR}|)<1.$$

结论得证. □

算法 10 (**左权整体松弛** USTOR **法，简记为** LGRM-USTOR).

任取初始近似 $x^{(0)}\in R^N$.

对 $m=0,1,...$ 重复下面的 i) ii) 两步，直到收敛.

i) 对 $k=1,2,...,\alpha$, (并行) 求解 y_k.

$$y_k=L_\omega x^{(m)}+S_\omega. \tag{4.1.10}$$

ii) 计算.

$$x^{(m+1)}=\beta\sum_{k=1}^{\alpha}E_k y_k+(1-\beta)x^{(m)}. \tag{4.1.11}$$

该算法可写成下面的形式

$$x^{(m+1)}=H_{LGRM-USTOR}x^{(m)}+G_{LGRM-USTOR}b,$$

其中 $H_{LGRM-USTOR}=\beta H_{MUSTOR}+(1-\beta)I$.

定理 4.1.4 设 A 是 H 矩阵， $A=D-\tilde{L}_k-\tilde{U}_k, \tilde{L}_k=L_k+F_k, \tilde{U}_k=U_k+N_k, k=1,2,...,\alpha$, 其中 L_k,F_k 为 A 的严格下三角矩阵， U_k,N_k 为严格上三角矩阵，且 $\langle A\rangle=|D|-|L_k|-|F_k|-|U_k|-|N_k|=|D|-|B|$. 如果

$$0\le\omega_i\le\omega_1, 0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho}, 0\le\gamma_i\le\gamma_1, 0<\gamma_1<\frac{2}{1+\rho}, 0<\beta<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1,\gamma_1}}, i=2,3,$$

则左权整体松弛 USTOR 法对任意初始近似 $x^{(0)}$ 均收敛到 x^*, 其中 $\rho = \rho(J), \rho_{\omega_1,\gamma_1} = min\{|1-\omega_1| + \omega_1\rho(J_\epsilon), |1-\gamma_1| + \gamma_1\rho(J_\epsilon)\}$, 而 $J = |D|^{-1}|B|, B = D - A$.

证明: 因为 $\rho(H_{LGRM-USTOR}) \le \rho(|H_{LGRM-USTOR}|)$, 所以只需在定理条件下证明 $\rho(|H_{LGRM-USTOR}|) < 1$ 即可.

由前面定理证明过程可知

i) 当 $0 \le \omega_i \le \omega_1, 0 < \omega_1 < 1, 0 \le \gamma_i \le \gamma_1, 0 < \gamma_1 < 1, 0 < \beta < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1,\gamma_1}}, \rho_{\omega_1,\gamma_1} = min\{|1-\omega_1| + \omega_1\rho(J_\epsilon), |1-\gamma_1| + \gamma_1\rho(J_\epsilon)\}, i = 2, 3$ 时.

$$\begin{aligned} |H_{LGRM-USTOR}|x_\epsilon &\le [|\beta-1| + \beta(1-\omega_1+\omega_1\rho(J_\epsilon))] \\ &\quad \times[|\beta-1| + \beta(1-\gamma_1+\gamma_1\rho(J_\epsilon))]x_\epsilon \\ &\le [|\beta-1| + \beta\rho_{\omega_1,\gamma_1}][|\beta-1| + \beta\rho_{\omega_1,\gamma_1}]x_\epsilon \\ &< x_\epsilon. \end{aligned}$$

故

$$\rho(|H_{LGRM-USTOR}|) < 1.$$

ii) 当 $0 \le \omega_i \le \omega_1, 1 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 \le \gamma_i \le \gamma_1, 1 < \gamma_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 < \beta < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1,\gamma_1}}, \rho_{\omega_1,\gamma_1} = min\{|1-\omega_1| + \omega_1\rho(J_\epsilon), |1-\gamma_1| + \gamma_1\rho(J_\epsilon)\}, i = 2, 3$ 时.

$$\begin{aligned} |H_{LGRM-USTOR}|x_\epsilon &\le [|\beta-1| + \beta(\omega_1-1+\omega_1\rho(J_\epsilon))] \\ &\quad \times[|\beta-1| + \beta(\gamma_1-1+\gamma_1\rho(J_\epsilon))]x_\epsilon \\ &= [|\beta-1| + \beta\rho_{\omega_1,\gamma_1}][|\beta-1| + \beta\rho_{\omega_1,\gamma_1}]x_\epsilon \\ &< x_\epsilon. \end{aligned}$$

故也有

$$\rho(|H_{LGRM-USTOR}|) < 1.$$

结论得证. □

§4.2 敛散速度的比较

为了方便起见, 在以下的讨论中我们不妨约定 $diag(A) = I$, JOR 与 STOR, USTOR 敛散速度有下面的比较定理.

定理 4.2.1 设 $A \in R^{N\times N}$ 为 L 矩阵，$A = D - \tilde{L}_k - \tilde{U}_k, \tilde{L}_k = L_k + F_k, \tilde{U}_k = U_k + N_k, (I - \tilde{L}_k, \tilde{U}_k, E_k), k = 1, 2, ..., \alpha$ 为 A 的一个多分裂，且 $L_k, F_k, U_k, N_k \geq 0, k = 1, 2, ..., \alpha$, 则当 $0 \leq \omega_i \leq \omega_1 \leq 1(\omega_1 \neq 0), i = 2, 3$ 时

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{MSTOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{MSTOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

证明：由题意知：$H_{STOR} \geq 0, H_{STOR} \geq 0$, 而对每个 $k = 1, 2, ..., \alpha$, L_k, F_k 为严格下三角矩阵，则 $L_k^m = 0(m \geq n)$. 同理 $U_k^m = 0, N_k^m = 0(m \geq n)$.

令 $H(\omega_2, \omega_3) = \sum\limits_{k=1}^{\alpha} E_k[I + (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k) + (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)^2 + ... + (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)^{n-2}](\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)$. 故

$$H(\omega_2, \omega_3) \geq 0.$$

则有

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{MSTOR} &= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[I - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)]^{-1} \\
&\quad \times[(1-\omega_1)I + (\omega_1 - \omega_2)U_k + (\omega_1 - \omega_3)N_k + \omega_1 \tilde{L}_k] \\
&= \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[I - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)]^{-1}[H_{JOR} + (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{\alpha} \textstyle\sum_{m=0}^{n-1} (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)^m [H_{JOR} - (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)] \\
&= H_{JOR} + H(\omega_2, \omega_3)(H_{JOR} - I).
\end{aligned}$$

若定义

$$\tilde{H}(\omega_2, \omega_3) = [I + (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k) + (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k)^2 + ... + (\omega_2 L_k + \omega_3 F_k)^{n-2}](\omega_2 L_k + \omega_3 F_k).$$

此时就有

$$\tilde{H}(\omega_2, \omega_3) \geq 0.$$

同理可得到

$$\bar{H}_{MSTOR} = H_{JOR} + \tilde{H}(\omega_2, \omega_3)(H_{JOR} - I). \tag{4.2.1}$$

若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则对充分小的 $\epsilon > 0$, 由谱半径的连续性及 Perron-Frobenius 定理知 $\rho_\epsilon = \rho(H_{JOR} + \epsilon e e^T) < 1$ 且存在正的向量 $x_\epsilon \in R^N$, 使得 $(H_{JOR} + \epsilon e e^T)x_\epsilon = \rho_\epsilon x \epsilon$, 其中 $e = (1, 1, ..., 1)^T \in R^N$, 而

$$H_{MSTOR} = \tilde{H}_{MSTOR}\bar{H}_{MSTOR}. \tag{4.2.2}$$

上式两边同乘 x_ϵ 并应用前面推导的结论可得

$$\begin{aligned} H_{MSTOR}x_\epsilon &= [H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)][H_{JOR}+\tilde{H}(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)]x_\epsilon \\ &\le [H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)][H_{JOR}+\epsilon ee^T+\tilde{H}(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}+\epsilon ee^T-I)]x_\epsilon \\ &= [H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)][\rho_\epsilon+(\rho_\epsilon-1)\tilde{H}(\omega_2,\omega_3)]x_\epsilon \\ &\le \rho_\epsilon[\rho_\epsilon+(\rho_\epsilon-1)H\omega_2,\omega_3)(\rho_\epsilon-1)]x_\epsilon \\ &\le \rho_\epsilon^2 x_\epsilon \\ &\le \rho_\epsilon x_\epsilon. \end{aligned}$$

从而根据 [20](46 页练习 2) 得

$$\rho(H_{MSTOR})<\rho_\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性知 i) 成立.

若 $\rho(H_{JOR})\ge 1$, 由 [20] 中定理 2.7 知：存在非负向量 $x\in R^N(x\neq 0)$ 使得 $H_{JOR}x=\rho(H_{JOR})x$.

上式两边同乘 x 并应用前面推导的结论可得

$$\begin{aligned} H_{MSTOR}x &= [H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)][H_{JOR}+\tilde{H}(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)]x \\ &\ge [H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)][\rho_\epsilon+(\rho_\epsilon-1)\tilde{H}(\omega_2,\omega_3)]x \\ &\ge \rho_\epsilon[H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)]x \\ &\ge [H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)][\rho(H_{JOR})+(\rho(H_{JOR})-1)\tilde{H}(\omega_2,\omega_3)]x \\ &\ge \rho(H_{JOR})[H_{JOR}+H(\omega_2,\omega_3)(H_{JOR}-I)]x \\ &\ge \rho(H_{JOR})[\rho(H_{JOR})+(\rho(H_{JOR})-1)H(\omega_2,\omega_3)]x \\ &\ge \rho^2(H_{JOR})x \\ &\ge \rho(H_{JOR})x. \end{aligned}$$

令 $L=\frac{H_{MSTOR}}{\rho(H_{JOR})}$, 则有 $Lx\ge x$, 故对所有的非负整数 m, 均有 $(L)^m x\ge x$. 而 $x\neq 0$, 故又有 $\lim\limits_{m\to\infty}L^m\neq 0$, 由此可得 $\rho(L)\ge 1$. 所以

$$\begin{aligned} \rho(H_{MSTOR}) &= \rho(H_{JOR})L \\ &\ge \rho(H_{JOR}). \end{aligned}$$

故 ii) 成立，定理得证. □

定理 4.2.2　设 $A \in R^{N\times N}$ 为 L 矩阵, $A = D - \tilde{L}_k - \tilde{U}_k, \tilde{L}_k = L_k + F_k, \tilde{U}_k = U_k + N_k, (I-\tilde{L}_k, \tilde{U}_k, E_k), k = 1, 2, ..., \alpha$ 为 A 的一个多分裂, 且 $L_k, F_k, U_k, N_k \geq 0, k = 1, 2, ..., \alpha$, 则当 $0 \leq \omega_i \leq \omega_1 \leq 1, 0 \leq \gamma_i \leq \gamma_1 \leq 1 (\omega_1 = \gamma_1 \neq 0), i = 2, 3$ 时

i) 若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则 $\rho(H_{MUSTOR}) \leq \rho(H_{JOR})$.

ii) 若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则 $\rho(H_{MUSTOR}) \geq \rho(H_{JOR})$.

证明: 由题意知:　$H_{MUSTOR} \geq 0, H_{JOR} \geq 0$. 对每个 $k = 1, 2, ..., \alpha, L_k, F_k$ 为严格下三角矩阵, 则 $L_k^m = 0, F_k^m = 0 (m \geq n)$, 同理有 $U_k^m, N_k^m = 0 (m \geq n)$.
令

$$H(\omega_2, \omega_3) = \sum_{k=1}^{\alpha} E_k[I + (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k) + ... + (\omega_2 U_k + \omega_3 N_k)^{n-2}](\omega_2 U_k + \omega_3 N_k).$$

$$\bar{H}(\omega_2, \omega_3) = [I + (\gamma_2 L_k + \gamma_3 F_k) + ... + (\gamma_2 L_k + \gamma_3 F_k)^{n-2}](\gamma_2 L_k + \gamma_3 F_k).$$

故 $H(\omega_2, \omega_3) \geq 0, \bar{H}(\omega_2, \omega_3) \geq 0$. 与前面定理的证明过程类似:

若 $\rho(H_{JOR}) < 1$, 则

$$\begin{aligned}
H_{MUSTOR} x_\epsilon &= \tilde{H}_{MUSTOR} \bar{H}_{MUSTOR} x_\epsilon \\
&= [H_{JOR}(\omega_1) + H(\omega_2, \omega_3)(H_{JOR}(\omega_1) - I)] \\
&\quad \times [H_{JOR}(\gamma_1) + \bar{H}(\omega_2, \omega_3)(H_{JOR}(\gamma_1) - I)] x_\epsilon \\
&\leq [\rho_\epsilon + H(\omega_2, \omega_3)(\rho_\epsilon - 1)][\rho_\epsilon + \bar{H}(\omega_2, \omega_3)(\rho_\epsilon - 1)] x_\epsilon \\
&\leq \rho_\epsilon^2 x_\epsilon \\
&\leq \rho_\epsilon x_\epsilon.
\end{aligned}$$

从而根据 [20](46 页练习 2) 得

$$\rho(H_{MUTOR}) \leq \rho_\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性知 i) 成立.

若 $\rho(H_{JOR}) \geq 1$, 则

$$\begin{aligned}
H_{MUSTOR} x &= [\rho(H_{JOR}(\omega_1)) + (\rho(H_{JOR}(\omega_1)) - 1) H(\omega_2, \omega_3)] \\
&\quad \times [\rho(H_{JOR}(\gamma_1)) + (\rho(H_{JOR}(\gamma_1)) - 1) \bar{H}(\omega_2, \omega_3)] x \\
&\geq \rho^2(H_{JOR}) x \\
&\geq \rho(H_{JOR}) x.
\end{aligned}$$

令 $T=\frac{H_{MUSTOR}}{\rho(H_{JOR})}$, 则有 $Tx \geq x$, 故对所有的非负整数 m, 均有 $(T)^m x \geq x$. 而 $x \neq 0$, 故又有 $\lim\limits_{m\to\infty} T^m \neq 0$, 由此可得 $\rho(T) \geq 1$. 所以

$$\begin{aligned}\rho(H_{MUSTOR}) &= \rho(H_{JOR})\rho(T)\\ &\geq \rho(H_{JOR}).\end{aligned}$$

故 ii) 成立，定理得证. □

第五章　应用：非线性方程组的牛顿 - 整体松弛并行多分裂法

§5.1　整体松弛 TOR 方法

众所周知，解线性方程组的并行多分裂算法，具有广泛的实用性和很高的理论价值，因而吸引着许多作者致力于这类算法的研究 [1-16]，文献 [17] 将这类方法推广去解非线性方程组，构造和研究了牛顿 - 并行多分裂算法．本章在此基础上，通过引入多个松弛因子，提出了整体松弛的概念和方法，进一步研究了牛顿 - 整体松弛并行多分裂法，并建立了局部收敛性定理，估计了收敛速度．

考虑非线性方程组

$$F(x)=0, F:\Omega\subset R^N\to R^N, \tag{5.1.1}$$

其中 F 是非线性映象， Ω 是 R^N 中任一有界集， x 是 Ω 的一个向量，解方程组 (5.1.1) 的牛顿法为

$$x^{k+1}=x^k-F'(x^k)^{-1}F(x^k), k=0,1,...,$$

其牛顿方程组是

$$F'(x^k)x=F'(x^k)x^k-F(x^k). \tag{5.1.2}$$

为方便起见，设

$$A(x^k)=F'(x^k), b(x^k)=F'(x^k)x^k-F(x^k),$$

则 (5.1.2) 式可表示为

$$A(x^k)x=b(x^k), k=0,1,... \tag{5.1.3}$$

令 $M_t(x^k), N_t(x^k), E_t$ 均是 $N\times N$ 矩阵， $t=1,2,...,\alpha$，若满足

a) $A(x^k)=M_t(x^k)-N_t(x^k), M_t(x^k)^{-1}$ 存在．

b) $\sum\limits_{t=1}^{\alpha}=I$($I$ 为 $N\times N$ 单位矩阵)，E_t 是非负对角矩阵．

则称三元组 $(M_t(x^k), N_t(x^k), E_t)(t=1,2,...,\alpha)$ 为矩阵 $A(x^k)$ 的一个多分裂．

方程组 (5.1.3) 可以写成

$$x^{m+1}=M_t(x^k)^{-1}N_t(x^k)x^m+M_t(x^k)^{-1}b(x^k), t=1,2,...,\alpha.$$

用权矩阵 E_t 组合这 α 个方程，得到

$$x^{m+1} = H(x^k)x^m + G(x^k)b(x^k), m = 0, 1, ..., \tag{5.1.4}$$

其中 $H(x^k) = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} E_t M_t(x^k)^{-1} N_t(x^k), G(x^k) = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} M_t(x^k)^{-1}$.
为方便，将 (5.1.4) 式记为

$$x^{k,m} = H(x^k)x^{k,m-1} + G(x^k)b(x^k), m = 1, 2, ... \tag{5.1.5}$$

让迭代步 (5.1.5) 停止在第 l 步，经计算可得

$$x^{k,l} = x^{k,0} + [H(x^k)^l - I] + [H(x^k)^{l-1} + ... + I]G(x^k)b(x^k). \tag{5.1.6}$$

而

$$\begin{aligned} G(x^k)A(x^k) &= \sum_{t=1}^{\alpha} E_t M_t(x^k)^{-1}[M_t(x^k) - N_t(x^k)] \\ &= I - \sum_{t=1}^{\alpha} E_t M_t(x^k)^{-1} N_t(x^k) \\ &= I - H(x^k). \end{aligned}$$

$$[H(x^k)^{l-1} + ... + I][I - H(x^k)] = I - H(x^k)^l.$$

故

$$H(x^k)^l - I = -[H(x^k)^{l-1} + ... + I]G(x^k)A(x^k).$$

将其代入 (5.1.6) 式可得

$$x^{k,l} = x^{k,0} - [H(x^k)^{l-1} + ... + I]G(x^k)[F'(x^k)x^{k,0} - F'(x^k)x^k + F(x^k)].$$

取 $x^{k,0} = x^k$, 记 $x^{k,l} = x^{k+1}$, 则得

$$\xi : x^{k+1} = x^k - [H(x^k)^{l-1} + ... + I]G(x^k)F(x^k), \tag{5.1.7}$$

此迭代格式称为 **牛顿 - 并行矩阵多分裂算法**.

若对 $A(x^k)x = b(x^k)$ 应用第二章的局部松弛并行多分裂与整体松弛并行多分裂法，则得到 **牛顿 - 局部松弛并行多分裂法** (Newton-Local Relaxed Multisplitting), **简记为** NLRM 法和 **牛顿 - 整体松弛并行多分裂法** (Newton-Global Relaxed Multisplitting), **简记为** NGRM 法.

用左权整体松弛并行多分裂 TOR 算法去近似求解牛顿方程组 (5.1.3) 所得到的迭代格式 (5.1.8), 我们称为 **牛顿 - 左权整体松弛并行多分裂** TOR **法** (Newton-Left Global Relaxed Multisplitting TOR), **简记为** NLGRM-TOR **法**, 即为

$$\xi^{(1)}: x^{k+1} = x^k - [H_{NLGRM-TOR}(x^k)^{l-1} + ... + I]G_{NLGRM-TOR}(x^k)F(x^k), \qquad (5.1.8)$$

其中

$$\begin{aligned} G_{NLGRM-TOR} &= \omega_1\omega_4 \sum_{t=1}^{\alpha} E_t M_t(x^k)^{-1}. \\ H_{NLGRM-TOR} &= \sum_{t=1}^{\alpha} E_t M_t(x^k)^{-1} N_t(x^k) + (1-\omega_4)I. \\ M_t(x^k) &= D(x^k) - (\omega_2 L_t(x^k) + \omega_3 F_t(x^k)). \\ N_t(x^k) &= (1-\omega_1)D(x^k) + (\omega_1-\omega_2)L_t(x^k) + (\omega_1-\omega_3)F_t(x^k) + \omega_1 U_t(x^k). \end{aligned}$$

对上式选取不同的 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, 我们将得到下面不同的牛顿 - 并行多分裂迭代格式.

$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$	方法	文献	$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$	方法	文献
1, 0, 0, 1	General NM	[24]	$1,0,0,\omega_4$	NLGRM-Jacobi	本文
1, 1, 1, 1	NM-G-S	[24]	$1,1,1,\omega_4$	NLGRM-G-S	本文
$\omega_1,0,0,1$	NM-JOR	[24]	$\omega_1,0,0,\omega_4$	NLGRM-JOR	本文
$\omega_1,\omega_1,\omega_1,1$	NL(obal)RM-SOR	[17]	$\omega_1,\omega_1,\omega_1,\omega_4$	NLGRM-SOR	本文
$\omega_1,\omega_2,\omega_2,1$	NL(obal)RM-AOR	[17]	$\omega_1,\omega_2,\omega_2,\omega_4$	NLGRM-AOR	本文
$\omega_1,\omega_2,\omega_3,1$	NL(obal)RM-TOR	本文	$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$	NLGRM-TOR	本文

NLGRM-TOR 方法选用 4 个松弛因子，是以上各种多分裂迭代格式的一般形式. 对于 NLGRM-TOR 方法作为求解大型稀疏线性方程组的应用，可同样选用适当的 E_K, 以使每台处理机达到负载平衡，避免同步等待，而且每台处理机若能选用适当的松弛因子，可使收敛速度加快，从而使求解时间大大缩减.

§5.2　局部收敛性定理

本节将主要证明非线性方程组的牛顿 - 整体松弛并行多分裂 TOR 方法的局部收敛性，估计收敛速度.

引理 5.2.1[17] 设 F 在 $x^* \in int(\Omega)$ 的一个开邻域 $\Omega_0 \subset \Omega$ 内是 G- 可微的，F' 在 x^* 是连续的，$F'(x^*)$ 非奇异，$F(x^*) = 0; (M_t(x^*), N_t(x^*), E_t)(t = 1, 2, ..., \alpha)$ 是 $F'(x^*)$ 的一个多分裂. 又设 $M_t : \Omega_0 \to R^{N\times N}$ 在 x^* 连续，$t = 1, 2, ..., \alpha$, 且 $\rho[H(x^*)] < 1$, 其中 $H(x^*) = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} E_t M_t(x^*)^{-1} N_t(x^*)$, 则对任意正整数 $l \geq 1, x^*$ 是迭代 ξ 的吸引点 [24], 且 $R_1(\xi, x^*) = \rho[H(x^*)^l]$, 这里 $R_1(\xi, x^*)$ 是迭代 ξ 在 x^* 的 R- 因子 [24], $\rho(G)$ 是矩阵 G 的谱半径.

定理 5.2.2 设 F 在 $x^* \in int(\Omega)$ 的一个开邻域 $\Omega_0 \subset \Omega$ 内是 G- 可微的，F' 在 x^* 是连续的，$F'(x^*)$ 非奇异，$F(x^*) = 0$, 令 $F'(x) = D(x) - L_t(x) - F_t(x) - U_t(x), t = 1, 2, ..., \alpha$ 是形如算法 2 的分解，$L_t(x)$ 和 $F_t(x)$ 在 x^* 连续，$D(x^*) = diag(F'(x^*))$ 非奇异，$\sum\limits_{t=1}^{\alpha} E_t = I, E_t$ 是对角非负矩阵. 考虑牛顿 - 左权整体松弛并行多分裂 TOR 法

$$x^{k+1} = x^k - [H_{NLGRM-TOR}(x^k)^{l-1} + ... + I]G_{NLGRM-TOR}(x^k)F(x^k), k = 0, 1, ...,$$

其中 $H_{NLGRM-TOR}, G_{NLGRM-TOR}$ 为前面定义. 若 $\rho[H_{NLGRM-TOR}(x^k)] < 1$, 则 x^* 是迭代格式 $\xi^{(1)}$ 的吸引点 [24], 且 $R_1(\xi^{(1)}, x^*) = \rho[H_{NLGRM-TOR}(x^*)]$, 这里 $R_1(\xi^{(1)}, x^*)$ 是迭代格式 $\xi^{(1)}$ 在 x^* 的 R- 因子 [24].

证明：从假设知：$F'(x) = M_t(x) - N_t(x), t = 1, 2, ..., \alpha$. 由 $F', L_t(x)$ 和 $F_t(x)$ 在 x^* 连续可得 $M_t(x)$ 在 x^* 是连续的，$t = 1, 2, ..., \alpha$. 又由 $L_t(x^*), F_t(x^*)$ 是严格下三角矩阵和 $D(x^*)$ 非奇异知 $M_t(x^*)$ 是非奇异的，$t = 1, 2, ..., \alpha$. 则易知引理 5.2.1 的条件全部满足，由引理 5.2.1 得本定理成立，证毕. □

定理 5.2.3 设定理 5.2.2 中关于 F 和 x^* 的条件成立. $F'(x^*) = D(x^*) - L_t(x^*) - F_t(x^*) - U_t(x^*)(t = 1, 2, ..., \alpha)$ 是 H- 矩阵，$(D(x^*) - L_t(x^*) - F_t(x^*), U_t(x^*), E_t)(t = 1, 2, ..., \alpha)$ 是矩阵 $F'(x^*)$ 的一个多分裂，又设 $\langle F'(x^*)\rangle = |D(x^*)| - |L_t(x^*)| - |F_t(x^*)| - |U_t(x^*)| = |D(x^*)| - |B(x^*)|, t = 1, 2, ..., \alpha$, 则当

$$0 \leq \omega_2 < \omega_1, 0 \leq \omega_3 < \omega_1, 0 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}},$$

时，x^* 是迭代 $\xi^{(1)}$ 的吸引点，且 $R_1(\xi^{(1)}, x^*) = \rho[H_{NLGRM-TOR}(x^*)^l], \rho = \rho(|D(x^*)|^{-1}|B(x^*)|) = \rho(J), \rho_{\omega_1} = |1-\omega_1| + \omega_1\rho$.

证明：因为 $\rho[H_{NLGRM-TOR}(x^*)] \leq \rho[|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|]$, 所以只需先在定理条件下证明 $\rho[|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|] < 1$, 进而有 $\rho[H_{NLGRM-TOR}(x^*)] < 1$, 再由定理 5.2.2 就可知

本定理成立.

由假设条件易知 $D(x^*)-\omega_2L_t(x^*)-\omega_3F_t(x^*)$ 是 H 矩阵， $t=1,2,...,\alpha$. 由引理 2.1.3(c) 及比较矩阵定义知：

$$\begin{aligned}|(D(x^*)-\omega_2L_t(x^*)-\omega_3F_t(x^*))^{-1}| &\le \langle D(x^*)-\omega_2L_t(x^*)-\omega_3F_t(x^*)\rangle^{-1}\\ &= (|D(x^*)|-\omega_2|L_t(x^*)|-\omega_3|F_t(x^*)|)^{-1}.\end{aligned}$$

i) 当 $0\le\omega_2\le\omega_1, 0\le\omega_3\le\omega_1, 0<\omega_1\le 1, \le 1, 0<\omega_4<2/(1+\rho_{\omega_1}), \rho_{\omega_1}=1-\omega_1+\omega_1\rho$ 时，定义

$$\begin{aligned}\tilde{M}_t(x^*) &= |D(x^*)|-\omega_2|L_t(x^*)|-\omega_3|F_t(x^*)|.\\ \tilde{N}_t(x^*) &= (1-\omega_1)|D(x^*)|+(\omega_1-\omega_2)|L_t(x^*)|+(\omega_1-\omega_3)|F_t(x^*)|+\omega_1|U_t(x^*)|.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|H_{NLGRM-TOR}(x^*)| &\le \sum_{t=1}^{\alpha}E_t(\tilde{M}_t(x^*)^{-1}(\omega_4\tilde{N}_t(x^*)+|1-\omega_4|\tilde{M}_t(x^*))\\ &= |1-\omega_4|I+\omega_4I-\omega_1\omega_4\textstyle\sum_{t=1}^{\alpha}E_t(\tilde{M}_t(x^*))^{-1}\\ &\quad |D(x^*)|(I-|D(x^*)|^{-1}|B(x^*)|).\end{aligned}$$

由 $\tilde{M}_t(x^*)$ 定义易知： $\tilde{M}_t(x^*)$ 是 H 矩阵，再由引理 2.1.3(c) 得到

$$(\tilde{M}_t(x^*))^{-1}\ge|D(x^*)|^{-1}.$$

设 $e=(1,1,...,1)^T\in R^N$, 因为矩阵 J 是非负的，所以对任意 $\epsilon>0$, 矩阵 $J+\epsilon ee^T$ 是不可约的且所有元素均大于 0. 由 $Perron-Frobenius$ 定理可得：存在向量 $x_\epsilon>0$, 使得 $(J+\epsilon ee^T)x_\epsilon=\rho_\epsilon x_\epsilon$, 其中 $\rho_\epsilon=\rho(J+\epsilon ee^T)$. 由于 $0<\omega_1\le 1$, 所以

$$1-\omega_1+\omega_1\rho(|D(x^*)|^{-1}|B(x^*)|)<1.$$

又由谱半径的连续性得 $1-\omega_1+\omega_1\rho_\epsilon<1$, 且

$$|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|\le|1-\omega_4|I+\omega_4I-\omega_1\omega_4\sum_{t=1}^{\alpha}E_t|D(x^*)|^{-1}|D(x^*)|[I-(|D(x^*)|^{-1}|B(x^*)|+\epsilon ee^T)].$$

两边同乘以 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned}|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|x_\epsilon &\le [|1-\omega_4|I+\omega_4I-\omega_1\omega_4\textstyle\sum_{t=1}^{\alpha}E_t(1-\rho_\epsilon)]x_\epsilon\\ &= [|\omega_4-1|+\omega_4(\omega_1-1+\omega_1\rho_\epsilon)]x_\epsilon.\end{aligned}$$

当 $0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}$ 时，就有

$$|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|x_\epsilon < x_\epsilon.$$

故

$$\rho(|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|) < 1.$$

ii) 当 $1 < \omega_1 < 2/(1+\rho), 0 \le \omega_2 \le \omega_1, 0 \le \omega_3 \le \omega_1, 0 < \omega_4 < 2/(1+\rho_{\omega_1}), \rho_{\omega_1} = \omega_1 - 1 + \omega_1\rho$ 时，定义

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_t(x^*) &= (\omega_1 - 1)|D(x^*)| + (\omega_1 - \omega_2)|L_t(x^*)| + (\omega_1 - \omega_3)|F_t(x^*)| + \omega_1|U_t(x^*)| \\
&= \tilde{M}_t(x^*) - [(2-\omega_1)|D(x^*)| - \omega_1|B(x^*)|].
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
|H_{NLGRM-TOR}(x^*)| &\le \sum_{t=1}^{\alpha} E_t(\tilde{M}_t(x^*))^{-1}[\omega_4\tilde{N}_t(x^*) + |\omega_4 - 1|\tilde{M}_t(x^*)] \\
&\le |\omega_4 - 1|I + \omega_4 I - \omega_4 \textstyle\sum_{t=1}^{\alpha} E_t|D(x^*)|^{-1}|D(x^*)|[(2-\omega_1)I - \omega_1].
\end{aligned}$$

由前面 i) 的证明可知

$$|H_{NLGRM-TOR}(x^*)| \le |\omega_4 - 1|I + \omega_4 I - \omega_4 \sum_{t=1}^{\alpha} E_t[(2-\omega_1)I - \omega_1(J + \epsilon ee^T)].$$

两边同乘 x_ϵ 可得

$$\begin{aligned}
|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|x_\epsilon &\le |\omega_4 - 1|x_\epsilon + \omega_4 x_\epsilon - \omega_4 \textstyle\sum_{t=1}^{\alpha} E_t(2 - \omega_1 - \omega_1\rho_\epsilon)x_\epsilon \\
&= [|\omega_4 - 1| + \omega_4(\omega_1 - 1 + \omega_1\rho_\epsilon)]x_\epsilon \\
&= [|\omega_4 - 1| + \omega_4\rho_{\omega_1}]x_\epsilon.
\end{aligned}$$

当 $0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}}$ 时，就有

$$|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|x_\epsilon < x_\epsilon.$$

故

$$\rho(|H_{NLGRM-TOR}(x^*)|) < 1.$$

定理得证. □

若牛顿 - 右权整体松弛并行多分裂 TOR 法 (Newton-Right Global Relaxed Multisplitting TOR) 变为

$$\xi^{(2)}: x^{k+1} = x^k - [H_{NRGRM-TOR}(x^k)^{l-1} + ... + I]G_{NRGRM-TOR}(x^k)F(x^k).$$

其中

$$\begin{aligned}
G_{NRGRM-TOR} &= \omega_1\omega_4 \sum_{t=1}^{\alpha} M_t(x^k)^{-1}E_t. \\
H_{NRGRM-TOR} &= \sum_{t=1}^{\alpha} M_t(x^k)^{-1}N_t(x^k)E_t + (1-\omega_4)I. \\
M_t(x^k) &= D(x^k) - (\omega_2 L_t(x^k) + \omega_3 F_t(x^k)). \\
N_t(x^k) &= (1-\omega_1)D(x^k) + (\omega_1-\omega_2)L_t(x^k) + (\omega_1-\omega_3)F_t(x^k) + \omega_1 U_t(x^k).
\end{aligned}$$

此迭代格式就称为 **牛顿 - 右权整体松弛并行多分裂** TOR **法** (Newton-Right Global Relaxed Multisplitting TOR), **简记为** NRGRM-TOR **法**.

类似于定理 5.2.3 的证明过程，也有相应的推论.

推论 5.2.4　设定理 1 中关于 F 和 x^* 的条件成立. $F'(x^*) = D(x^*) - L_t(x^*) - F_t(x^*) - U_t(x^*)(t = 1, 2, ..., \alpha)$ 是 H- 矩阵，$(D(x^*) - L_t(x^*) - F_t(x^*), U_t(x^*), E_t)(t = 1, 2, ..., \alpha)$ 是矩阵 $F'(x^*)$ 的一个多分裂，又设 $\langle F'(x^*)\rangle = |D(x^*)| - |L_t(x^*)| - |F_t(x^*)| - |U_t(x^*)| = |D(x^*)| - |B(x^*)|, t = 1, 2, ..., \alpha$ ，则当

$$0 \le \omega_2 < \omega_1, 0 \le \omega_3 < \omega_1, 0 < \omega_1 < \frac{2}{1+\rho}, 0 < \omega_4 < \frac{2}{1+\rho_{\omega_1}},$$

时, x^* 是迭代 $\xi^{(2)}$ 的吸引点, 且 $R_1(\xi^{(2)}, x^*) = \rho[H_{NRGRM-TOR}(x^*)^l], \rho = \rho(|D(x^*)|^{-1}|B(x^*)|), \rho_{\omega_1}$ $|1-\omega_1| + \omega_1\rho$.

引理 5.2.5[24]　设 $A \in R^{N\times N}$ 满足下列四条件之一.

i) A 是 M 阵.

ii) A 是严格或不可约对角占优阵.

iii) A 是对称正定 L 阵.

iv) $\langle A\rangle$ 是对称正定矩阵.

则 A 是 H- 矩阵.

定理 5.2.6　设定理 1 中关于 F 和 x^* 条件成立. $F'(x^*)$ 满足下列四条件之一.

i) A 是 M 阵.

ii) A 是严格或不可约对角占优阵.

iii) A 是对称正定 L 阵.

iv) $\langle A\rangle$ 是对称正定矩阵.

$(D(x^*)-L_t(x^*)-F_t(x^*),U_t(x^*),E_t)(t=1,2,...,\alpha)$ 是矩阵 $F'(x^*)$ 的一个多分裂，又设 $\langle F'(x^*)\rangle=|D(x^*)|-|L_t(x^*)|-|F_t(x^*)|-|U_t(x^*)|=|D(x^*)|-|B(x^*)|,t=1,2,...,\alpha$，则当

$$0\leq\omega_2<\omega_1,0\leq\omega_3<\omega_1,0<\omega_1<\frac{2}{1+\rho},0<\omega_4<\frac{2}{1+\rho_{\omega_1}},$$

时，x^* 是迭代 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 的吸引点，且 $R_1(\xi^{(1)},x^*)=\rho[H_{NLGRM-TOR}(x^*)^l]$ 和 $R_1(\xi^{(2)},x^*)=\rho[H_{NRGRM-TOR}(x^*)^l],\rho=\rho(|D(x^*)|^{-1}|B(x^*)|),\rho_{\omega_1}=|1-\omega_1|+\omega_1\rho$.

证明：由引理 5.2.5 及定理 5.2.2 立即可得本定理. □

第六章　总结和展望

从迭代法的发展看，上世纪五十到七十年代，由于电子计算机的发展，人们开始考虑和研究在计算机上用迭代法求线性方程组的近似解，并发展了许多非常有效的方法，如 Jacobi 方法、 Gauss-Seidel 方法、 SOR 方法、 AOR 方法、 SSOR 方法等．八十年代中期，随着并行计算机的出现和使用，O'Leary 和 White[1] 基于矩阵的多分裂提出了并行多分裂迭代法，随后许多作者改进了现有的多分裂迭代法并提出了许多新的方法，如松弛型多分裂方法、非定常多分裂方法，二级多分裂方法、异步多分裂方法以及这些方法的混合型方法等．已见到的数值例子表明，对共享式并行计算机可以达到令人满意的加速效果．但如何更大地减少同步和通讯量，如何做到各处理机之间的负载平衡或基本平衡仍是有待研究的问题，非定常并行多分裂迭代法就是一种很好的解决方案．

本文推广了已有的许多并行多分裂迭代法，引入多个松弛因子；本文方法对于参数的选取更加灵活，更适合于在并行机上计算，而且当选择了最佳的松弛因子时，能使求解时间大大缩减，收敛速度提高了近 47.96%, 这些都用数值试验进行了验证．但是随着科学技术的发展，越来越多的非结构化的、特殊的、大型的、稀疏的问题摆在了计算数学工作者面前，这些方法的优劣往往依赖于最优参数的选择．一般方程组无法直接得到最优参数，从而限制了方法的高效使用．因此这些方法可作为预条件子和其它方法 (如 Krylov 子空间方法) 结合使用来求解大型稀疏线性方程组．

并行预条件的研究一直处于起浮不定之中．对一个给定的问题，通常难于构造一个有效的预条件子，若它们还必须是并行的则更难．起初为了并行性，试图对已有的有效预条件子 (如 ILU) 进行最小的改变，或利用矩阵 A 本身 (如多项式预条件子)．这些努力有时已得到可向量化的预条件子，但对并行性而言，它们是太细粒度的．多项式预条件降低了内积和向量运算的比例，但代价是迭代步数的增加．因此它通常对富含内积并在内积类运算比矩阵向量积运算相比更昂贵的平台上是有用的．最近注意力已经转向提供更粗粒度并行性的方法上：区域分解法和稀疏近似逆方法．除了某些方面的成功，稀疏近似逆技术仍处在刚起步时期．区域分解技术已被证明对大多数与 PDEs 相关问题是成功的．并行多分裂迭代法由于采用了“分而治之”的思想，具有自然的并行性，已有文献 [10] 表明可使用多分裂的思想来构造并行预条件子．我们预计以并行多分裂为预条件子的并行 Krylov 子空间方法，将成为今后研究的热点．

参考文献

[1] D.P. O ' Leary, R.E. White, *Multi-splittings of Matrices and Parallel Solution of Linear Systems*, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 6 (1985) 630-640.

[2] Yu-bo Yuan, Zhong-xi Gao, Ting-zhu Huang, Fu-ti Liu, *Convergence for JOR Iterative Method*, Journal of UEST of China, 32(6) (2003) 790-792.

[3] A. Frommer, G. Mayer, *Convergence of Relaxed Parallel Multisplitting Methods*, Lin. Alg. Appl., 119 (1989) 141-152.

[4] A.Frommer, G.Mayer, *On the Theory and Practice of Multisplitting Methods*, Lin. Alg. Appl.119 (1989) 141-152.

[5] De-rén Wang, *On the Convergence of Parallel Multisplitting AOR Algorithm*, Lin. Alg. Appl. 154/156 (1991) 473-486.

[6] Da-wei Chang, *Convergence Analysis of the Parallel Multisplitting TOR Methods*, J. Comput. Appl. Math., 72(1996) 169-177.

[7] yong-zhong song, *Convergence of Paralle Multisplitting Methods*, Lin.Alg.App. , 50 (1999) 213-232.

[8] yong-zhong song, *Comparison for Splittings of Matrices*, Numer,Math., 93(2) (2002) 563-591.

[9] Joan-Josep Climent, Carmen Perea, Leandro Tortosa, Antonio Zamora, *Convergence Theorems for Parallel Alternating Iterative Methods*, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004) 497-517.

[10] JAE Heon Yun, Seyoung Oh and Eun Heri Kim, *Convergence of Parallel Multispliting Methods using ILU Factorizations*. J.AppL.Math.Comput, 15 (2004) 77-90.

[11] Zhong-zhi Bai, *On the Convergence Domains of the Matrix Multisplitting Relaxed Methods for Linear Systems*, Applied Math. JCU, 13b(1) (1998) 45-52.

[12] Zhi-hao Cao, Zhong-Yun Lin, *Convergence of Relaxed parallel Multisplitting Methods with Different Weighting Schemes* Applied Mathematics and Computation, 106 (1996) 181-196.

[13] Tong-xiang Gu, Jiu-zhong Li, *Relaxed Parallel Multispliting Iterative Methods with Arbitrary Weighting Schemes*, Journal of Xinyang Teachers College, 7(2) (1994) 126-131.

[14] Tong-xiang Gu, Xing-ping Liu, Long-jun Shen, *Relaxed Parallel Two-Stage Multisplitting Methods*, Intern. J. Computer Math., 75 (2000) 351-363.

[15] Tong-xiang Gu, Xing-ping Liu, Xue-bin Chi, *Relaxed Parallel Two-Stage Multisplitting Methods* II *Asynchronous Version* Intern.J.Computer Math, 80(10) (2003) 1277-1287.

[16] Zhi-hao Cao, *On the Convergence of Nested Stationary Iterative Methods*, Lin.Alg. Appl., 221 (1995) 159-170.

[17] Jian-yu Li, *the Newton-parallel Matrix Multisplitting Algorithms for Solving Systems of Nonlinear Equations*, Journal of Sichuan Normal University, 18(4) (1995) 51-55.

[18] A. Berman, R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Science*, Academic Press, New York, 1979.

[19] Zhong-zhi Bai, *Comparisons of the Convergence and Divergence Rates of the parallel Matrix Multisplitting Iteration Methods*, Journal of Engineering Mathematics, 11(1) (1994) 99-102.

[20] Varga, R.S., *Matrix Iterative Analysis*, prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1962).

[21] MAs J.etal, *Nonstationary parallel Relaxed Multisplitting Methods*, Linear algebra Appl. , 241-243 (1992) 733-747.

[22] Si-xing Xu, *Convergence of Nonstationary parallel Multisplitting SOR Methods*, Mathematical Theory and Application, 20(1) (2000) 116-118.

[23] Zhong-yun Liu, He-bing Wu, Chun-chao Shi, *Convergence of Nonstationary parallel Multisplitting AOR Method*, Journal of Fudan University(Natural Science), 38(2) (1999) 228-233.

[24] 冯果忱, 非线性方程组迭代解法, 上海: 上海科学技术出版社, (1989).

致谢

本文是申请河南师范大学理学硕士学位的学位论文，于 2006 年 1 月至 2006 年 6 月完成.

我首先要感谢我的导师谷同祥教授. 在论文完成的整个过程中，处处都倾注了谷老师的心血. 从一开始论文的选题，到研究方案的确定，以及论文的撰写、修改直到最后定稿，谷老师都给予了我耐心的指导. 谷老师严谨的治学态度，脚踏实地的工作作风，耐心严格的指导和教诲使我受益匪浅，从而能使我克服各种困难，顺利完成论文. 在整个研究生学习过程中，谷老师给了我极大的帮助. 在此，我表示最忠心的感谢.

同时，我还要感谢其他所有帮助过我的老师和同学，特别是刘文安教授、申培萍教授、任宗修副教授、马明书教授等等，他们给我创造了优越的学习环境，提供了良好的生活空间，我每一分成绩的取得都与他们的关心和支持分不开.

攻读硕士学位期间所完成或已发表的论文

[1] 谷同祥，左宪禹，张理涛. 一种适合于分布式并行计算的改进双共轭残差 (*IBiCR*) 方法, SCI, 投出

[2] 谷同祥，张理涛，左宪禹. 并行多分裂整体松弛法, 工程数学学报，投出

独创性声明

本人郑重声明：所呈交的的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已发表或撰写的研究成果，也不包含为获得河南师范大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料. 与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意.

签名：张理涛 日期：06.6.26

关于论文使用授权的说明

本人完全了解河南师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅. 本人授权河南师范大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文.（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

签名：张理涛 导师签名：谷同祥 日期：06.6.26