

摘 要

本文研究了桩基承载力概率分析的方法，对于桩基的可靠性设计将起到积极的推动作用。文章首先分析了按照计算模型进行概率分析的三种不确定性因素，然后分别进行了定量分析。其中土性不确定性的定量分析方法是本文的研究重点，为此建立了有限域土性随机场的估计理论，提出了估离方差的概念与计算表达式，并在实验资料的基础上研究了变异函数的特征及其平均值的计算方法，从而正确地解决了与桩基承载力有关的土性变量的概率分析问题。对于几何尺寸的不确定性与计算模型的不确定性，文章根据实测资料的统计分析，得出了一些有实用价值的结论。文章还指出仅仅依据计算模型进行桩基承载力概率分析是不完善的，并针对桩基设计的特点提出了按照改进的贝叶斯原理进行概率分析的新方法，文章的最后介绍了一个工程实例。

关键词： 桩基承载力， 概率分析， 随机场， 变异函数， 贝叶斯原理

Research on Probabilistic Analyses Method of Pile Capacity

Abstract

The paper deals with the probabilistic analyses method of pile capacity, which will actively promote the application of reliability methodologies. Three factors of uncertainty in relation to probabilistic analyses utilizing a design model were first discussed and then quantitatively analysed one by one, among which the quantitative analysis of uncertainty of soil properties is the major point of the research. To do so, the estimation theory about random field of soil properties in finite domain was established and, the concept and a expression of estimate–dispersion variance were developed. On the basis of test information, characteristics of variogram function were studied, and a estimation program of its mean value was put forward. Therefore, the problem of probabilistic analyses of soil variable with regard to pile capacity has been correctly solved. In terms of the uncertainties of both geometric size and design model, the paper, based on statistics analyses of the observed data, came to some practical results. Moreover the paper points out that the probabilistic analyses only employing a design model is not perfect. In connection with the characteristics of pile design, a new method of probabilistic analyses according to the advanced Bayes' theorem is proposed. At the end of the paper, a engineering practice is introduced to illustrate what we achieved.

KEYWORDS: pile capacity, probabilistic analyses, random field, variogram function, Bayes' theorem

1 引言

1.1 桩基可靠性设计方法的发展

1.1.1 桩基设计历史的简要回顾

桩基础是目前广泛应用且发展迅速的基础形式，同时也是最古老的一种基础形式。人类采用桩基础建造房屋的历史可以追溯到史前时期，在地基土条件不利的河谷或沼泽地带，我们的祖先就在木桩上盖起了住所（Winterkorn, 1975）。今天，在世界各地我们可以见到不同历史时期建造的桩基建筑物。我国宋代利用桩基础的技术已达到相当高的水平，保存至今的桩基建筑物有今上海的龙华塔和山西太原的晋祠圣母殿等（周镜，1995）。

虽然人们利用桩基础建造房屋的历史很长，但直到 19 世纪末，桩基础的设计还完全凭籍工匠们的个人经验，有时甚至是借助于求神问卜（Poulos, 1980）。上个世纪 80 年代，鉴于当时的成桩工艺以锤击打入为主，人们开始应用牛顿碰撞定律，根据打桩时测得的贯入度，来推算桩基的极限承载力。1893 年在 *Engineering News* 上发表的 *Piles and Pile driving* 一文提出了著名的 EN 动力打桩公式(Poulos,1980)，首次对桩基础承载力的确定方法进行了理论上的探索，这可以视为现代桩基理论研究的开端。

从本世纪初开始，随着高层建筑的大量兴建，桩基础逐渐得到广泛的应用。桩材已从木材为主变为以型钢和钢筋混凝土为主，成桩方法也从早期的手锤打入改进为今天的机械打入(或压入)，沉管灌注及钻（挖）孔灌注等多种形式。现代的桩基一般造价很高，通常占工程总造价的 1/4 以上（徐攸在，1989），因此，研究如何合理地设计桩基，充分发挥桩的技术经济效益，是有重要的意义的。

随着可靠性设计理论研究的深入和计算手段的进步，桩基设计方法也经历了一个由定值设计到概率设计的发展过程。大体上讲，桩基设计方法可划分为三种：定值设计法，近似概率设计法及全概率设计法。

定值设计法是将荷载、抗力（桩基承载力）等设计参数看成为定值，并引

入一个确定的大于1的安全系数。显然，这一方法没有考虑荷载与抗力的不确定性，与实际情况不符，且安全系数的取值主要依靠经验，缺乏科学依据。不过在以手算为主要计算手段的时期，采用这样简化的分析方法也是很自然的事。

近似概率设计法在理论上考虑了荷载与抗力的不确定性，但为了实用上的简便和工程设计人员的习惯，采用以各基本变量的标准值和分项系数表达的极限状态设计表达式进行设计。这样，桩基设计仍按传统的方式进行，设计人员无需直接进行概率运算。但应指出的是，表达式中的荷载与抗力分项系数，荷载与抗力的标准值是以可靠指标为依据，按实测统计资料分析计算出来的，这是一个很大的进步。目前这一方法已基本上进入实用阶段，如我国编制的《建筑桩基技术规范》(JGJ94-94)已规定按概率极限状态法(荷载抗力分项系数法)设计桩基。

全概率设计法的主要特点是全面地考虑各种有关因素的不确定性，直接按目标可靠指标进行设计或校核。这种方法在近海工程桩基设计中已进行了初步的研究(Tang, 1988)，但要进入实用阶段，仍然还有许多基础理论研究工作要做。

1.1.2 结构与土工可靠性研究的发展简况

桩基础介于上部结构与地基之间，其设计方法的进展是同结构与土工可靠性研究的发展情况紧密相关的。

结构可靠性研究已经有半个世纪的历史，最早提出应用概率理论进行结构安全度分析的是 Pжаницын (1947) 和 Freudenthal (1954)。之后，Cornell (1969) 与 Ang & Tang (1975) 等人对结构可靠性进行了比较系统的理论与应用研究。70年代中期，Rackwitz (1976) 等提出了改进的验算点法，使考虑分布类型的结构可靠度计算方法进入了实用阶段。与此同时，关于结构上的荷载分析理论研究，也取得了很大的进展。80年代以来，结构构件的概率极限状态设计方法已趋向成熟并陆续进入各国的标准、规范之中。近年来，结构可靠性研究关注的重点是结构系统可靠度分析(李继华等, 1990)，模糊概率

分析与优化决策 (王光远等, 1986) 等方面。

土工可靠性研究始于 60 年代中期, 作出开创性贡献的学者有 Casagrande (1965), Lumb (1966) 和 Wu (1967) 等。70 年代是土工可靠性理论研究的大发展时期, Cornell (1971), Lumb (1971, 1975), Fredlund (1971), Lippman (1973), Wu (1974), Veneziano & Faccioli (1975), Vanmarcke (1977), Haldar & Tang (1979) 等对土性不确定性及概率模型进行了大量的理论研究, 其中最重大的成果是提出用土工随机场 (Vanmarcke, 1977) 去模拟土层剖面。自此以后, 随机场 (Random Fields) 这一概念即被广大研究者所接受与引用。

在这一时期, 土工可靠性研究的实际问题主要是土坡稳定 (Wu & Kraft, 1970; Yuceman & Tang, 1975; Alonzo, 1976; Baecher & Einstein, 1979; Veneziano & Antoniano, 1979)、地震液化 (Christian, 1975; Whitman, 1975; Yegian & Whitman, 1978; Halder & Tang, 1979) 及近海基础 (Kraft, 1975; Meyerhof, 1976; Hoeg & Tang, 1978; Ubaji & Houston, 1979) 等。

80 年代以后, 土工可靠性研究与应用进入了一个新的发展时期 (Tang, 1993)。除了在土性变量模型、土坡稳定、近海基础、地震液化等方面继续进行了大量实例研究外, 研究领域还延伸到环境岩土工程 (Bogardi, 1989; Benson & Charbeneau, 1991; Daniel, 1992)、地质异常体判别 (Baecher, 1979; Halim & Tang, 1990) 以及荷载抗力系数设计法 (LRFD) (Barker, 1991; Li, 1991; Hamilton & Murff, 1992) 等。土工可靠性设计开始进入实用阶段, 1986 年编制的《欧洲地基基础规范》已规定采用极限状态法的分项系数表达式进行设计。

我国土工可靠性研究则始于 80 年代初, 在这一领域起推动作用的研究者有高大钊 (1983)、包承纲 (1984)、刘宏梅 (1983) 等。此后, 我国学者在地基承载力与沉降概率分析 (熊兴邦等, 1985; 包承纲, 1986)、土性变量概率模型 (高大钊, 1986; 何信芳等, 1986)、土坡稳定 (祝玉学, 1993; 姚耀

武, 1994)、桩基概率分析(黄强, 1991; 李镜培等, 1992; 李同田等, 1992; 熊国伟等, 1991)以及土的微观统计性质(吴炳焜, 1993)等方面都取得了研究成果。

1.2 桩基可靠性设计的关键问题

设桩顶的荷载效应 S 和桩基承载力 R 均为服从一定分布的随机变量, 则桩基的功能函数为

$$z = g(S, R) = R - S \quad (1-1)$$

当 $z > 0$ 时, 桩基处于可靠状态;

当 $z < 0$ 时, 桩基处于失效状态;

当 $z = 0$ 时, 桩基处于极限状态。

桩基失效概率为 $P_f = P(z < 0)$

在桩基设计中应使抗力处于大于荷载效应的状态。但由于 R 和 S 都是随机变量, 桩基仍存在着失效的可能。图1-1表示随机变量 R 和 S 的概率密度函数的关系。在大多数情况下, R 都是大于 S 的, 即桩基处于可靠状态, 但在两条曲线的交叉重叠区内, 就可能出现 $R < S$ 的情况。例如对位于交叉区内某一荷载效应值 S_0 , 当抗力值位于交叉区内 S_0 以左时(如图中 R_0), 则桩基就处于失效状态。为了使失效概率 P_f 减小, 可以将 R 和 S 的概率密度曲线尽量拉开, 使交叉区减小, 这样, 出现 $R - S < 0$ 的概率也就减小。但这样也不能做到绝对安全, 而其设计的经济性将大为降低。

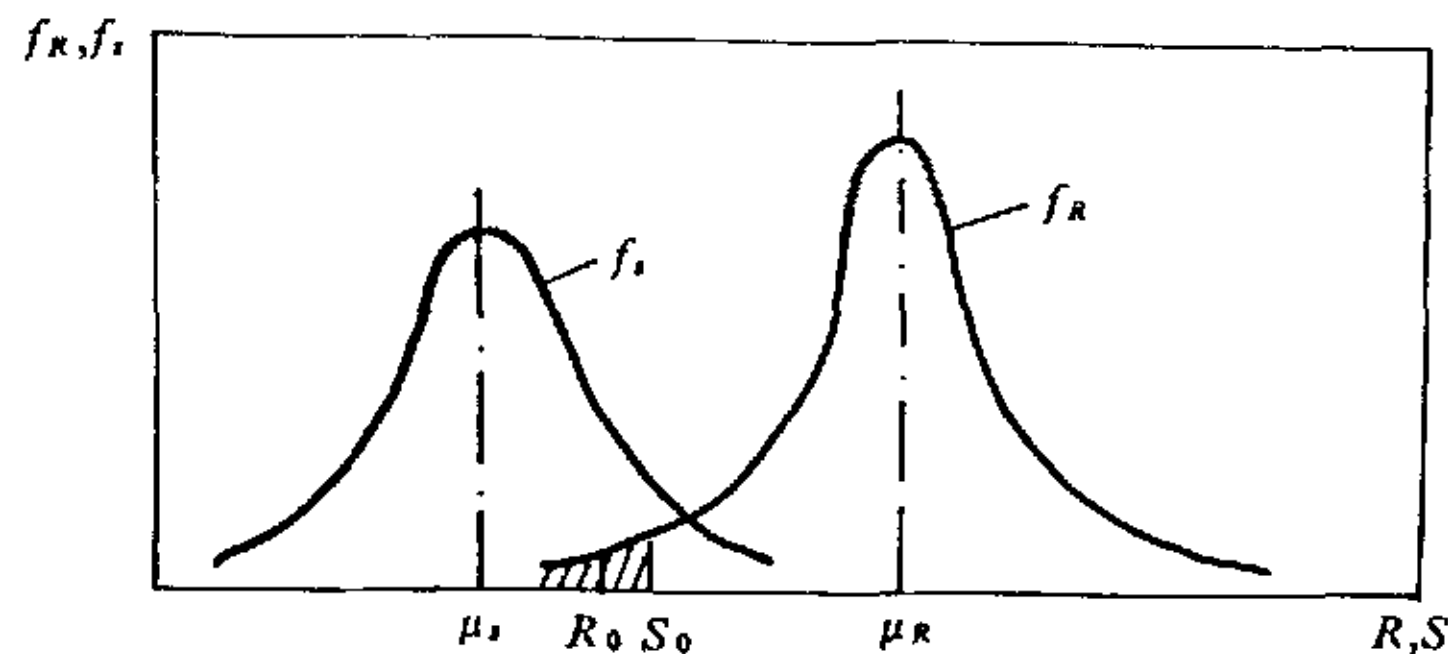


图 1-1 R 与 S 的概率密度函数

假设 R 和 S 均服从正态分布, 即 $R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$, $S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$, 由概率论可知: 功能函数 z 也必定服从正态分布, 且其均值 $\mu_z = \mu_R - \mu_S$, 标准差 $\sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ 。图 1-2 所示为功能函数 z 的概率密度函数, 桩基的失效概率 P_f 可直接通过 $z < 0$ 的概率来表达(图 1-2 中阴影部分面积)。

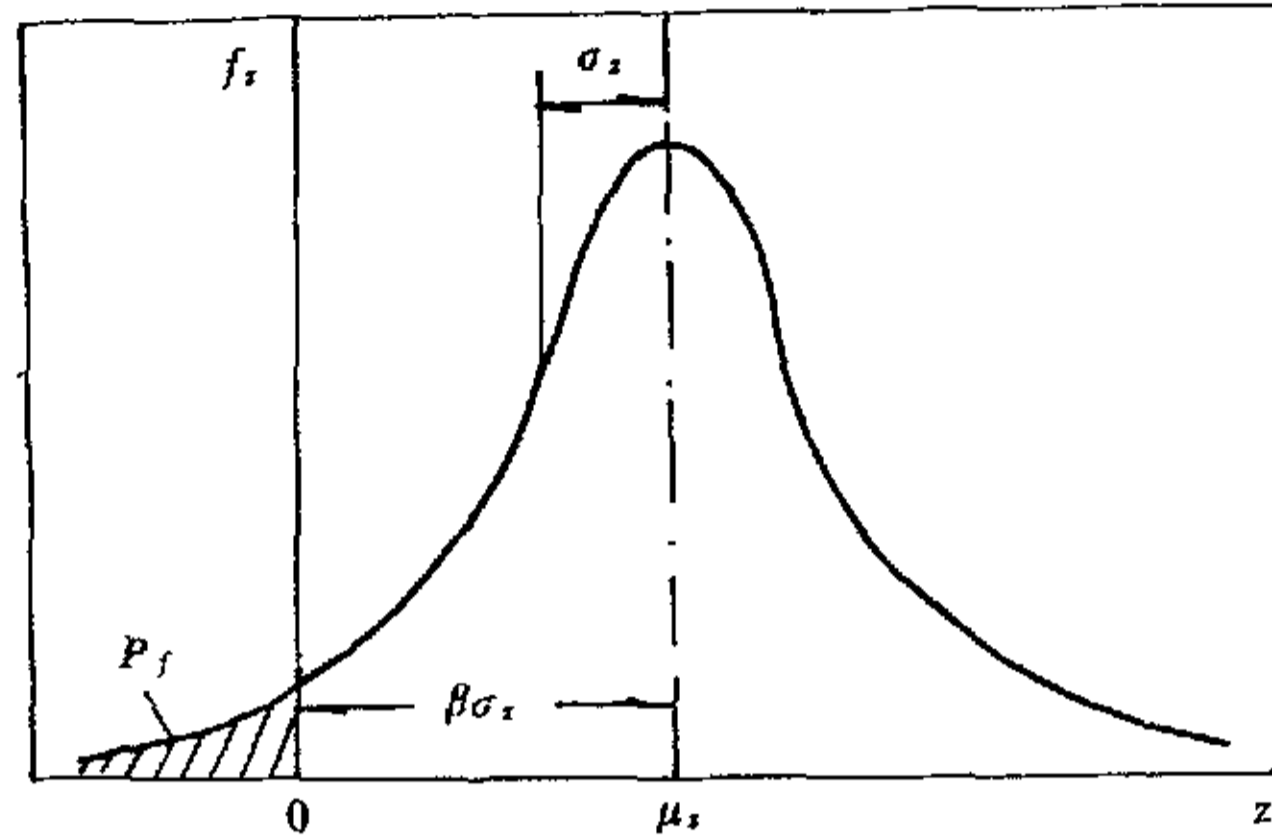


图 1-2 失效概率与可靠指标

$$\begin{aligned}
 \text{即: } P_f = P(z < 0) &= \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_z}{\sigma_z}\right)^2\right] dz \\
 &= \Phi\left(-\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \quad (1-2)
 \end{aligned}$$

式中, μ_z 和 σ_z 分别为 z 的平均值和标准差, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

$$\text{令 } \beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (1-3)$$

则式(1-2)可表示成

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (1-4)$$

式(1-4)表明, β 和 P_f 具有数值上的一一对应关系, 且 β 越大, P_f 就越小, 表示桩基越可靠, 因此 β 称为“可靠指标”。

按照概率极限状态法设计桩基时, 应按式 (1-3) 计算实际的 β 值, 看是否满足规范要求的目标可靠指标 $[\beta]$ 的要求。式 (1-3) 中, μ_z 和 σ_z 是荷载效

应的均值和标准差， μ_R 和 σ_R 是桩基承载力的均值和标准差。因此，桩基可靠性设计的关键问题是确定荷载效应 S 与桩基承载力 R 的概率分布函数或其数字特征。这就必须对荷载效应 S 和桩基承载力 R 进行概率分析。本文仅研究桩基承载力的概率分析。

1.3 桩基承载力概率分析的方法

1.3.1 桩基承载力的不确定性

不确定性是与确定性相对立的概念。一般地说，人们对于客观系统中现象的描述或预测总是在一定的基本条件下进行的。在常规理解中，若在规定的条件下，人们对现象的主观描述或预测能够与客观现象精确地吻合，则称这类现象及对应的系统具有确定性。否则，若客观现象与主观描述或预测的现象之间存在这样或那样的偏离，而所有这些偏离又表现出某种统计规律性，则称这类现象及其对应的系统具有不确定性。分析可知，不确定性表现为客观系统对于理想系统的一种不可精确预测的偏离，这种偏离的根本原因在于客观系统不能被完备观测或完全控制。也就是说，客观本原系统都是确定性系统，只有在对其进行描述，分析或预测时，才因为系统的复杂性背景而要求引入不确定性的处理方式。

桩基承载力的不确定性也正是体现在对它进行分析和预测之中。实际的桩基是确定性系统，其承载力的表现形式亦是确定的。但当人们对其进行分析和预测时，由于观测的不完备性，不可避免地会造成与实际情况的偏离，即表现为不确定性，因此必须用概率统计的方法来分析它。

1.3.2 依据现场原型试验的概率分析

目前，直接获取桩基承载力的最可靠的方法是桩基原型试验（静载荷试验）。如果在某一具体的工程场地，针对同种类型的桩基进行了足够多的静载荷试验，则我们可以将这些试验结果看作为是同种桩基承载力总体中得到的一个随机样本，并得到样本分布函数。根据格利文科（Glivenko）定理，当试桩数量很大时，样本分布函数实际上将近似地等于总体的分布函数。因此，我们就可以用样本的数字特征（如均值或方差）去估计与之相应的总体数字特征。

但是，由于桩基静载荷试验费工费时，在绝大多数实际工程中只能做少量的（几根）桩基静载荷试验，因而也就得不到可靠的统计参数。这样，获取桩基承载力概率分布函数（或其数字特征）就不得不借助于计算模型并依据有关参数来进行分析计算。

1.3.3 依据计算模型的概率分析

一般，桩基极限承载力的计算模型可表达为：

$$Q_{uz} = A_p q_{pu} + U \sum L_i q_{ui} \quad (1-5)$$

式中： Q_{uz} —— 桩基的极限承载力(kN)；
 A_p —— 桩端横截面积(m²)；
 U —— 桩身周边长度(m)；
 L_i —— 第*i*层土的分段桩长，或层厚(m)；
 q_{pu} —— 桩端土的极限端阻力(kPa)，是土性指标的函数；
 q_{ui} —— 第*i*层土的极限摩阻力(kPa)，是土性指标的函数。

传统的定值设计法中，将上述 A_p 、 U 、 L_i 、 q_{pu} 、 q_{ui} 五个变量均看成为定值，由此而计算出的 Q_{uz} 也为定值。但实际上，用式(1-5)预测单桩极限承载力具有不确定性，其原因可归结为以下三类：

(1) 土性不确定性

地基土不同于人工材料，它是自然历史的产物，其性质与位置有关。即使是在均匀的同—土层中，各点处土的性质也可能存在较大差别。从理论上讲，地基土特性是已经确实地存在于空间中的，如果能进行无限多的勘察工作，那么情况是可以确知的（包承纲，1989）。但实践上，不论勘探工作或试验工作都有限，而由少量资料去推断全部情况则是不可避免的。另一方面，对于土性的观测也存在着一定的误差，这是由于取样或测试过程中不能做到完全的控制而造成的。这样，人们对于地基土性质的估计就不可避免地与实际情况有差异，即表现为土性的不确定性。由土性指标再去计算桩的承载力，当然就将不确定性传递到计算的桩基承载力之中。

(2) 施工不确定性

桩基是人为施工形成的，由于不可能对制桩的每一个具体的细节进行完全的控制，致使实际形成的桩基与设计的理想中的桩基是有差异的。另一方面，桩与桩之间也存在着差别，具体表现在：几何尺寸的差异，施工质量的差异，边界条件的差异（如灌注桩桩底沉渣厚度、桩侧与土的接触条件等）和桩的垂直度偏差等。施工不确定性与具体的施工技术方法密切相关，例如灌注桩几何尺寸的变异系数显然要比预制桩的大。

(3) 计算模型不确定性

式(1-5)是对各种桩基承载力计算进行高度简化后得出的一个公式，严格地讲，它只适用于桩基形状为等截面直杆，荷载作用线与桩基中轴线重合且端阻力与侧阻力几乎同时发挥到极限的情况，这显然是一种理想化的情况。另一方面，模型不确定性还体现在由土性指标转换为计算参数（如侧阻力和端阻力）的转换过程之中，因为 q_{su} 和 q_{si} 都是由土性指标按照一定的经验公式推算而得的，而经验公式本身也有它自己的置信带(高大钊，1982)。

依据计算模型对桩基承载力进行概率分析时，就是要定量地研究上述三种不确定性因素，并反映到桩基承载力的预测之中。

1.4 本文的主要研究内容

1.4.1 改进土性随机场估计理论

依据计算模型对桩基承载力进行概率分析时，首先必须通过勘察资料获取土性指标的概率分布。为解决这一问题，早期的一些研究通常是沿用古典概率理论把土性看成是一个单一的随机变量而进行统计分析，这种处理方法早已有学者提出是不正确的(Cornell,1971)。70年代提出的土工随机场模型(Vanmarcke,1977)正确地模拟了土性的随机与结构的双重性，在理论上前进了一大步。特别是由此导出的空间均值方差的概念，对于解决整体失效的土工问题起到了关键的作用。土工随机场理论已经在桩基承载力概率分析方面得到了初步应用(李启信等，1989；李镜培等，1992)，但笔者认为现有的土工随机场理论应用于桩基承载力概率分析时尚有不完善之处，主要表现在：

(1) 现有的随机场理论隐含着平稳性和各态历经性的假设(闫澍旺等, 1995)。但对于桩基所涉及的多层地基来说, 土层厚度也是应当用随机场来模拟的, 但它却不满足各态历经性的假设条件。

(2) 现有随机场理论的核心概念是空间均值方差, 它是针对无限区域的数学期望而言的。但实践上, 桩基工程场地总是有限的, 我们通常关心的是土性在这个有限区域的总体平均值而非数学期望。

(3) 仅用子样方差乘以方差折减函数来表达土性参数的方差忽略了这样一个事实: 在估计阶段获得越多的有效试验资料(信息)时, 其估计的土性参数方差应当越小。亦即土性试验资料的多少是与土性参数的估计方差有关联的。

因此, 要合理地计算与桩基有关的土性变量的概率分布, 对土工随机场有进一步研究的必要。本文将针对桩基的特点, 建立有限域土工随机场的估计理论。

1.4.2 研究基本变量的概率分析方法

改进土性随机场估计理论后, 即可据此对桩基土性参数进行概率分析, 本文将针对桩基的特殊情况, 提出桩侧层厚及土性指标的概率分析方法。

关于施工不确定性分析, 本文将主要针对桩基几何尺寸的变异性, 收集大量的实测资料, 以便定量地进行概率分析。

计算模型的不确定性也是影响桩基承载力概率分析的一个重要因素, 本文将针对现行规范中的计算模型, 收集大量的实测资料, 以定量研究模型不确定性及其表征方法。

1.4.3 探讨原型试验在概率分析中的作用

在实际工程中, 由于原型试验数量较少, 不能单独据此进行概率分析。因此就不得不通过计算模型, 利用各种参数来进行概率分析。但原型试验毕竟是在实际桩上的试验结果, 其代表的信息似不应忽略。本文将根据贝叶斯原理, 探讨原型试验在概率分析中的作用。

2 有限域土性随机场的估计理论

2.1 土性变量与随机场

2.1.1 土性变量及其概率模型

从数学的观点来看，土的性质变量只是一个函数 $f(x)$ ，它在空间内的每一点取一个确定的值(为了简化记号，用一个黑体字母代表空间位置坐标或向量，下同)。但此函数的空间变异往往极不规则，以致无法用一个确定的函数来描述它并直接进行数学研究。图 2-1 表示某工程场地某一均匀地层中静探曲线 f_s 值的垂向变异和水平向变化，从静探曲线的每一个局部来看， f_s 值的变化很不规则，而对比水平向不同静探孔的曲线，其变化规律也不尽相同。图 2-2 表示一个场地的土层厚度的变化，显然，土层厚度在水平向(二维空间上)的变化亦是不规则的。因而上述土性变量 (f_s 值，土层厚度) 都不能用确定的函数来描述，而实践上，我们又不可能对每一点的土性变量值进行全面的观测，因此必须将其在空间某一点的值视为随机变量。

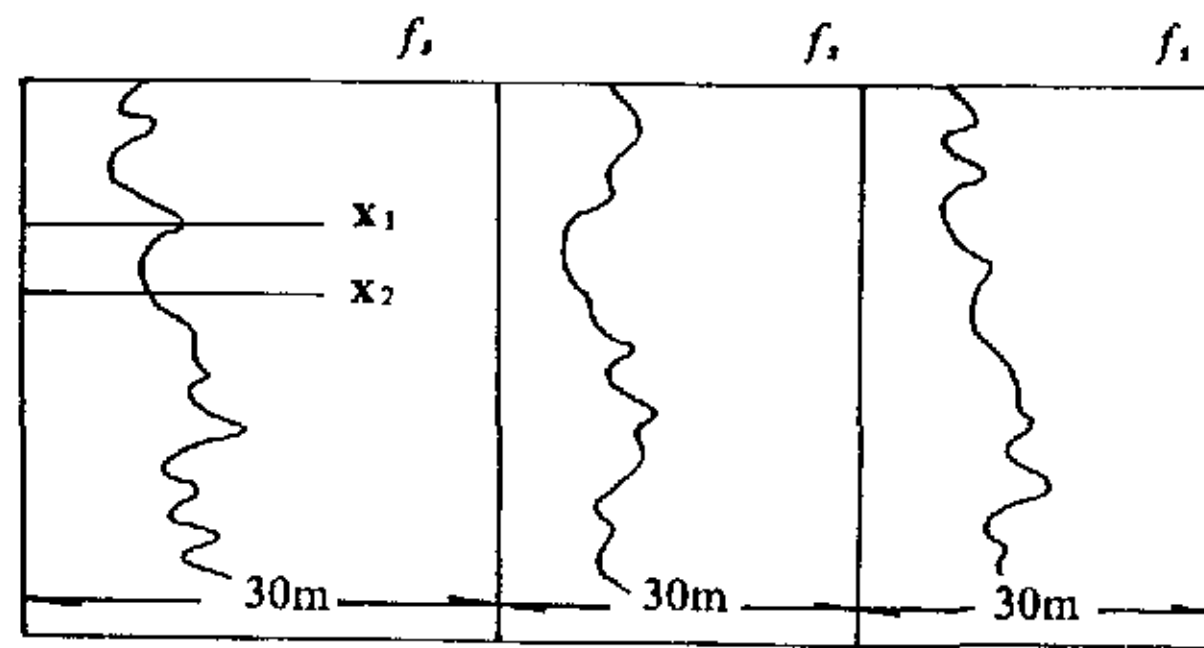


图 2-1 土层 f_s 值的变异

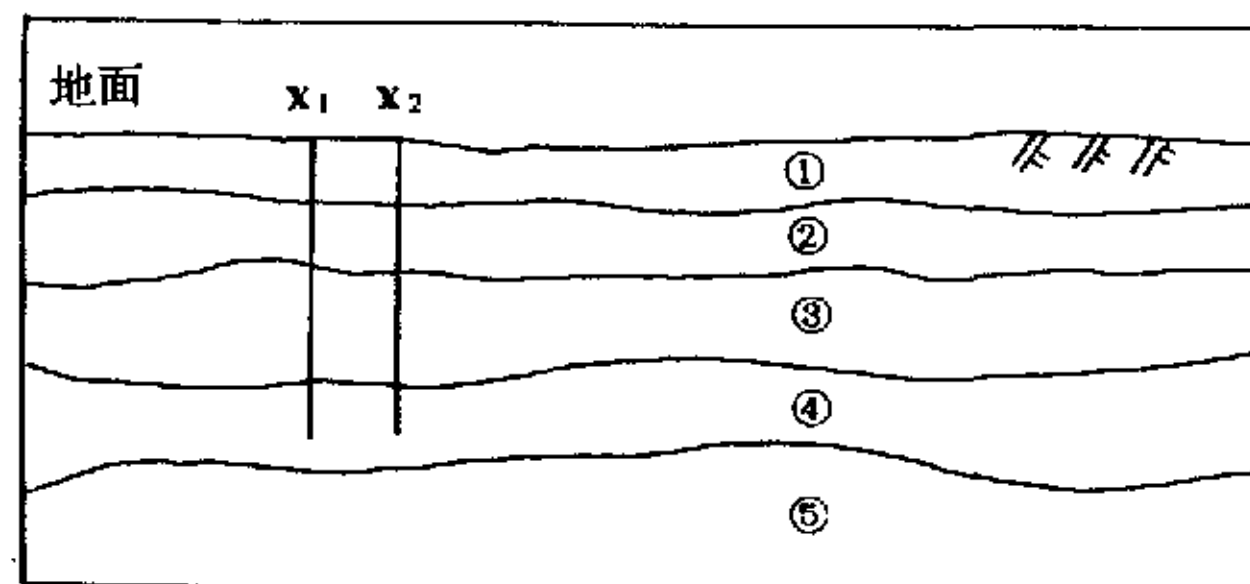


图 2-2 土层厚度的变异

进一步分析, 由于土性变量在空间上是连续的, 因而土性变量在空间上又体现出某种结构性的一面。这种结构性表现为土性变量在点 x_1 与 x_2 处的数值 $Z(x_1)$ 和 $Z(x_2)$ 具有某种程度的自相关。事实上, 当两个观测点位置充分接近时, 完全有理由断言 $Z(x_2)$ 将依赖于 $Z(x_1)$ 的统计信息。因此, 在整个空间域上, 不能用一个简单的随机变量来描述某种土性变量, 而必须用随机场来描述它。

我们知道随机变量是按照某种概率分布律取若干数值的变量。例如, 图2-1中某一特定点 x_1 的 f_s 值为 $z(x_1)$ 。我们可以把此 f_s 值看作确定在点 x_1 的某一随机变量 $Z(x_1)$ 的一个特定的实现(用大写字母表示随机变量, 小写字母表示其相应的实现, 下同)。同样, 可以把整个场地内所有各点 x 的 f_s 值 $z(x)$ 的集合, 看作随机变量集合 $\{Z(x), x \in \text{场地}\}$ 的一个特定的实现。这个随机变量的集合就称为随机场, 并记作 $Z(x)$ 。

随机场(空间变量)是随机过程(时间变量)概念的自然推广, 将它作为描述土性变量的概率模型能够表示出土性变量的随机与结构的双重性: 在某一点 x_1 , $Z(x_1)$ 是一个随机变量; 而对于每一对点 x_1 和 x_2 , 其相应的随机变量 $Z(x_1)$ 和 $Z(x_2)$ 一般并不相互独立, 而存在着空间相关。

2.1.2 随机场的数字特征

随机场的统计特性可以通过随机场的分布函数族来完善地刻划(Vanmarcke, 1983)。但是在实际应用中要确定随机场的分布函数族并加以分析往往比较困难, 甚至是不可能的。因而象引入随机变量的数值特征(数学期望和方差)那样有必要引入随机场的基本数值特征。这些数字特征应既能刻划随机场的重要特征, 又便于进行运算和观测。描述随机场的基本数字特征有:

(1) 数学期望

$$m(x) = E[Z(x)] \quad (2-1)$$

(2) 方差

$$D(x) = Var[Z(x)] = E[(Z(x) - m(x))^2] \quad (2-2)$$

(3) 协方差

$$C(x_1, x_2) = E[(Z(x_1) - m(x_1))(Z(x_2) - m(x_2))] \quad (2-3)$$

(4) 变异函数(有些文献称作“半变异函数”)

$$\gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \text{Var}[Z(\mathbf{x}_1) - Z(\mathbf{x}_2)] \quad (2-4)$$

2.1.3 平稳性假设

据定义, 协方差与变异函数均同时依赖于两个位置坐标 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 。因此, 为了进行统计推断, 就必须要有随机变量对 $\{Z(\mathbf{x}_1), Z(\mathbf{x}_2)\}$ 的许多实现。然而, 在实际的工程中只有一对这样的实现, 即在两点(\mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2)只能观测到一对数据。但若协方差与变异函数仅仅依赖于分隔这两点位置之间的距离向量 \mathbf{h} , 则可进行推断: 相隔距离 $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k'})$ 等于向量 \mathbf{h} 的每一对数据 $\{z(\mathbf{x}_k), z(\mathbf{x}_{k'})\}$ 可以看作是随机变量对 $\{Z(\mathbf{x}_1), Z(\mathbf{x}_2)\}$ 的一个不同的实现。为此, 必须对随机场加上平稳性假设的限制。

当一随机场满足以下两个条件时, 则称其为二阶平稳的随机场:

(1) 有数学期望 $E[Z(\mathbf{x})]$, 并且它并不依赖于位置坐标 \mathbf{x} , 即

$$E[Z(\mathbf{x})] = m, \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-5)$$

(2) 对于每一对随机变量 $\{Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})\}$ 有协方差, 并且它只依赖于相隔距离 \mathbf{h} , 即

$$C(\mathbf{h}) = E[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \cdot Z(\mathbf{x})] - m^2, \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-6)$$

协方差的平稳性隐含着方差和变异函数的平稳性, 据(2-6)式, 可得

$$\text{Var}[Z(\mathbf{x})] = E[(Z(\mathbf{x}) - m)^2] = C(\mathbf{o}), \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-7)$$

$$E[Z^2(\mathbf{x})] = C(\mathbf{o}) + m^2$$

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2} E[(Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x}))^2] \\ &= \frac{1}{2} E[Z^2(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - 2Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})Z(\mathbf{x}) + Z^2(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} E[Z^2(\mathbf{x} + \mathbf{h})] + \frac{1}{2} E[Z^2(\mathbf{x})] - E[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})Z(\mathbf{x})] \\ &= C(\mathbf{o}) + m^2 - C(\mathbf{h}) - m^2 \end{aligned}$$

$$= C(\mathbf{o}) - C(\mathbf{h})$$

即

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{o}) - C(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-8)$$

式(2-8)指出, 在二阶平稳假设下, 协方差和变异函数是两个等价的工具, 用来表征相隔距离为 \mathbf{h} 的两个随机变量 $Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ 和 $Z(\mathbf{x})$ 之间的相关关系, 如图2-3所示。

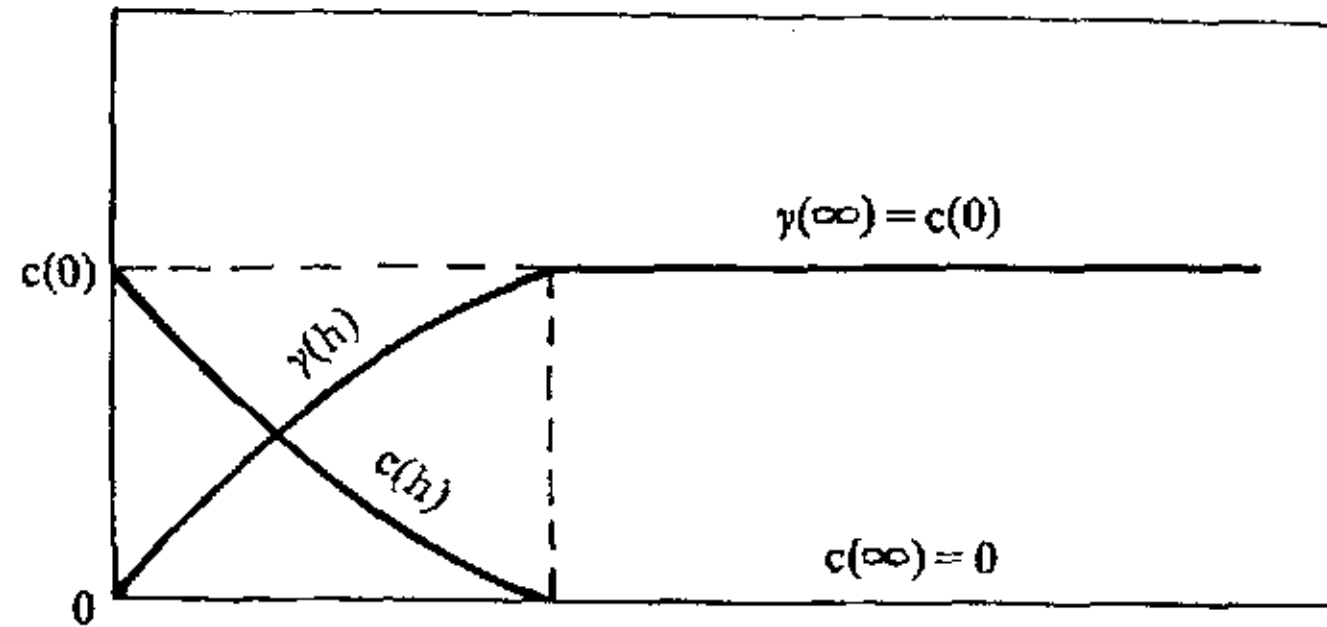


图 2-3 协方差与变异函数

2.2 有限区域的估计方差

2.2.1 估计误差

每一种估计方法都有估计误差, 因为一般说来待估量 z 总和它的估计量 z^* 有所不同, 因而就包含一个估计误差 $z - z^*$ 。如图2-4所示, 当我们用场地区域 V_i 中心的一个观测孔的某土层厚度值 $z(\mathbf{x}_i)$ 来估计该区域的真实平均厚度值 $z_V(\mathbf{x}_i)$ 时, 误差是:

$$r(\mathbf{x}_i) = z_V(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_i)$$

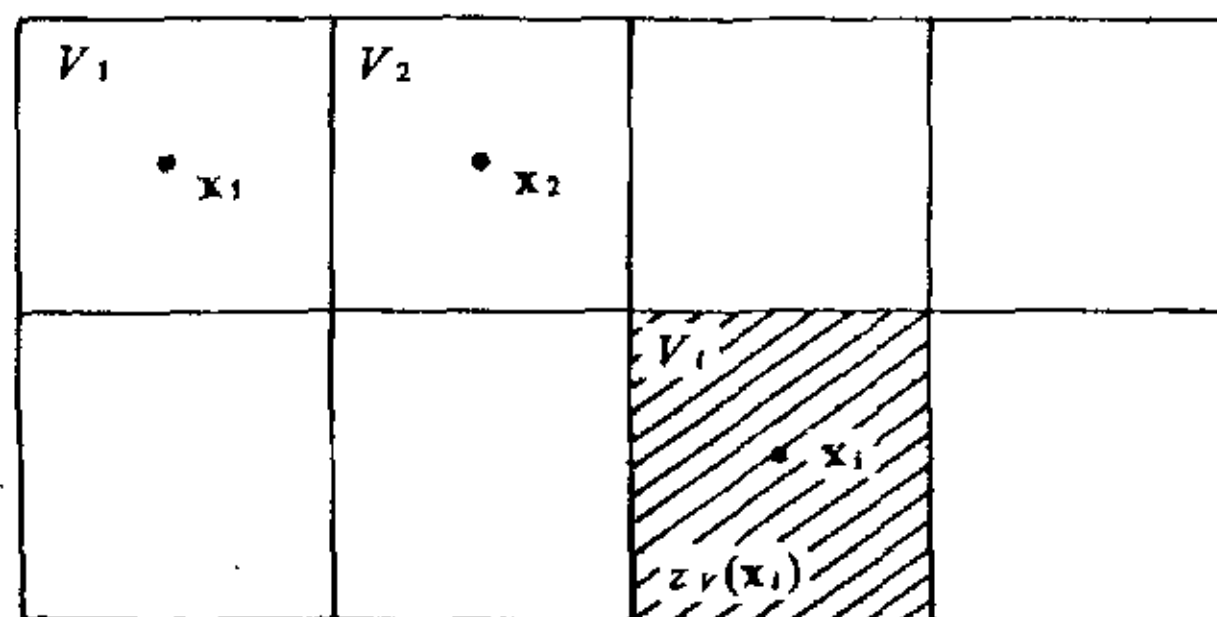


图 2-4 误差的概念

如同把土性变量 $z(\mathbf{x})$ 看作随机场 $Z(\mathbf{x})$ 的一个特定的实现, 我们也可以把误差 $r(\mathbf{x}_i)$ 看作在点 \mathbf{x}_i 的随机变量

$$R(\mathbf{x}_i) = Z_V(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_i)$$

的一个特定的实现。

假定将整个场地划分成同等大小 V 的区域, 并且在每一区域的中心均有一垂直观测孔。若随机场 $Z(\mathbf{x})$ 是平稳的, 则误差 $R(\mathbf{x})$ 亦属平稳, 且可认为两个误差 $r(\mathbf{x}_i)$ 和 $r(\mathbf{x}_j)$ 是同一平稳随机场

$$R(\mathbf{x}) = Z_V(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x})$$

的两个不同的实现。

当我们估计区域 $V(\mathbf{x}_i)$ 时, 尽管所包含的特定误差 $r(\mathbf{x}_i)$ 是未知的, 但误差的平均值和方差仍然可以作为估计质量的一种度量。

2.2.2 估计方差的概念

和所有的随机变量一样, 误差 $R(\mathbf{x})$ 也以其分布函数 $F(u) = P\{R(\mathbf{x}) < u\}$ 为特征。如果随机场 $R(\mathbf{x})$ 是平稳的, 则此分布函数并不依赖于位置坐标 \mathbf{x} 。已知函数 $F(u)$, 即可计算误差落入任一区间 $[a, b)$ 的概率:

$$P\{a \leq R(\mathbf{x}) < b\} = F(b) - F(a), \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-9)$$

由于 $R(\mathbf{x})$ 是平稳的, 则其数学期望和方差均为常数, 即

$$E[R(\mathbf{x})] = m_E, \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-10)$$

$$V_{..}[R(\mathbf{x})] = E[R^2(\mathbf{x})] - m_E^2 = \sigma_E^2, \quad \forall \mathbf{x} \quad (2-11)$$

数学期望 m_E 表征平均误差, 而方差 σ_E^2 则是误差的一种离差指标, 即估计误差的方差, 简称估计方差。

假定误差服从正态分布, 如图 2-5 所示。则置信区间 $[m_E \pm 2\sigma_E]$ 几乎包含实测误差的 95%。在无偏($m_E = 0$)条件下, 对于用 z^* 估计的真实值 z 的标准 95%置信区间可以表为 $[z^* \pm 2\sigma_E]$ 。

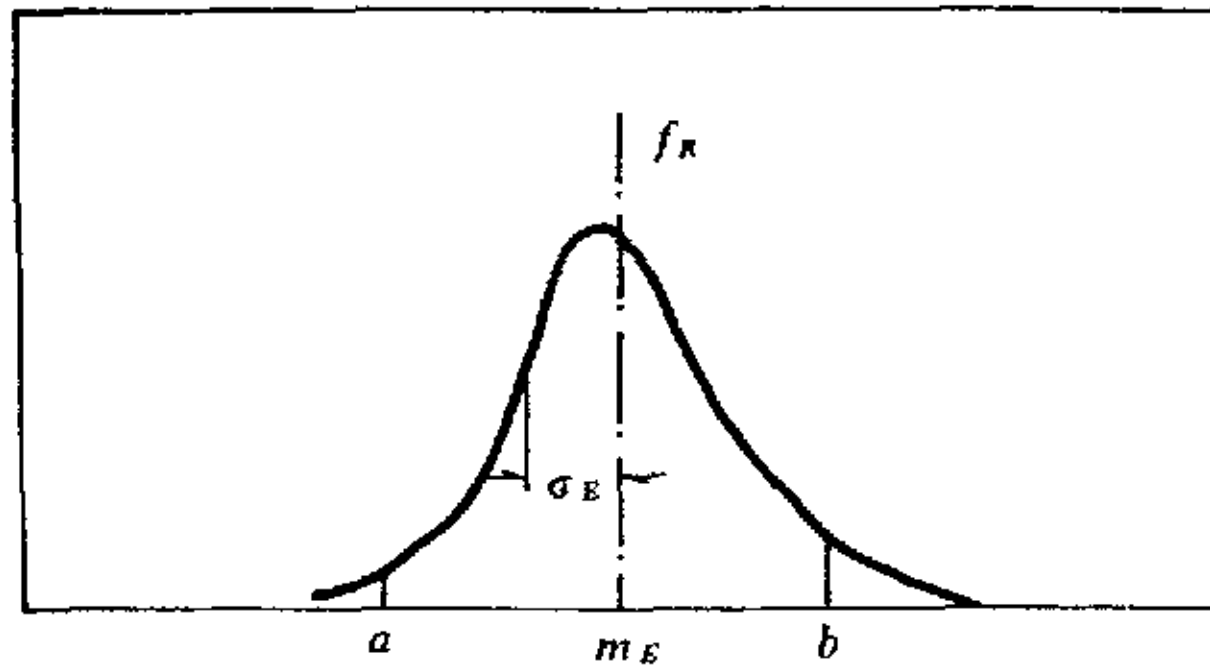


图 2-5 估计误差的方差

2.2.3 估计方差的计算

现在考虑由 n 个数值的集合 $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ 来估计未知值 Z_v (例如, 中心点位于点 \mathbf{x} 的大小为 V 的区域的平均厚度 $Z_v(\mathbf{x})$) 的问题。显然, 估计量 Z^* 将是已有数据的函数:

$$Z^* = f\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$$

但并非这些数据的任一函数, 它必须满足两个条件:

- (1) 无偏性: $E[Z_v - Z^*] = 0$
- (2) 函数表达式形式简单, 可以计算估计方差:

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= E[(Z_v - Z^*)^2] \\ &= E[Z_v^2] + E[Z^{*2}] - 2E[Z_v Z^*] \end{aligned}$$

下文仅限于讨论 n 个有效数据的算术平均值作为估计量 Z^* :

$$Z^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(x_i) \quad (2-12)$$

我们会看到, 此时无偏条件总可以得到满足, 而且可以得到相当简单的估计方差计算式。

2.2.3.1 估计方差计算式

设 $Z(\mathbf{x})$ 为二阶平稳随机场, 其数学期望为 m , 协方差为 $C(\mathbf{h})$, 变异函数为 $\gamma(\mathbf{h})$ 。此随机场已取得 n 个有效数值 $\{z(x_i), i = 1, \dots, n\}$, 现在用其算术平均值去估计 K 个未知数 $\{z(x_k), k = 1, \dots, k\}$ 的算术平均值

$$z_k = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^k z(x_k) \quad (2-13)$$

时，我们可以把 z^* 解释为随机变量 Z^* 的一个特定的实现，因而未知误差就是随机变量 $Z_k - Z^*$ 的一个特定的实现。

(1) 在二阶平稳假设下，无偏性得到了自动的核验，因为：

$$E[Z_k] = \frac{1}{k} \sum_k E[Z(x_k)] = m$$

$$E[Z^*] = \frac{1}{n} \sum_i E[Z(x_i)] = m$$

所以

$$E[Z_k - Z^*] = 0$$

(2) 估计方差可写作

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E[(Z_k - Z^*)^2] \\ &= E[Z_k^2] + E[Z^{*2}] - 2E[Z_k Z^*] \end{aligned} \quad (2-14)$$

式中

$$E[Z_k^2] = \frac{1}{k^2} E\left[\sum_k \sum_{k'} Z(x_k) Z(x_{k'})\right]$$

颠倒求和号 Σ 与数学期望算子 E 得：

$$\begin{aligned} E[Z_k^2] &= \frac{1}{k^2} \sum_k \sum_{k'} E[Z(x_k) Z(x_{k'})] \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_k \sum_{k'} (C(x_k - x_{k'}) + m^2) \end{aligned} \quad (2-15)$$

类似地，可推得

$$E[Z^{*2}] = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j (C(x_i - x_j) + m^2) \quad (2-16)$$

$$E[Z_k Z^*] = \frac{1}{kn} \sum_k \sum_i (C(x_k - x_i) + m^2) \quad (2-17)$$

将式(2-15)、(2-16)和(2-17)代入式(2-14)得：

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{k^2} \sum_k \sum_{k'} C(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k'}) + \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{2}{kn} \sum_k \sum_i C(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \quad (2-18)$$

用 $\bar{C}((k),(n))$ 表示当向量 \mathbf{h} 的一端扫过点集合 $\{\mathbf{x}_k, k=1, \dots, k\}$, 而另一端独立地扫过点集 $\{\mathbf{x}_i, i=1, \dots, n\}$ 时协方差 $C(\mathbf{h})$ 的平均值, 即

$$\bar{C}((k),(n)) = \frac{1}{kn} \sum_k \sum_i C(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \\ k=1, \dots, k; i=1, \dots, n,$$

则(2-18)式可表为

$$\sigma_E^2 = \bar{C}((k),(k)) + \bar{C}((n),(n)) - 2\bar{C}((k),(n)) \quad (2-19)$$

因

$$C(\mathbf{h}) = C(\mathbf{o}) - \gamma(\mathbf{h})$$

则 σ_E^2 又可以表为

$$\sigma_E^2 = 2\bar{\gamma}((k),(n)) - \bar{\gamma}((k),(k)) - \bar{\gamma}((n),(n)) \quad (2-20)$$

2.2.3.2 对于连续情形的推广

设有 k 个点 \mathbf{x}_k 在中心位于点 \mathbf{x} 的区域 V 之中, 有 n 个点 \mathbf{x}_0 在中心位于点 \mathbf{x}' 的另一区域 v 之中。当 k 与 $n \rightarrow \infty$ 时, 前述算术平均值 z_k 与 z^* 趋于区域 V 与 v 中点变量 $z(\mathbf{y})$ 的平均值, 即

$$z_k \rightarrow z_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{V(\mathbf{x})} z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$z^* \rightarrow z_v(\mathbf{x}') = \frac{1}{v} \int_{v(\mathbf{x}')} z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

可以将平均值 $z_v(\mathbf{x})$ 与 $z_v(\mathbf{x}')$ 解释为两个随机变量 $Z_v(\mathbf{x})$ 与 $Z_v(\mathbf{x}')$ 的特定的实现:

$$Z_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{V(\mathbf{x})} Z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$Z_v(\mathbf{x}') = \frac{1}{v} \int_{v(\mathbf{x}')} Z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

(1) 在二阶平稳的假设下, $Z_v(\mathbf{x})$ 与 $Z_v(\mathbf{x}')$ 的数学期望均等于 m , 因而满足无偏条件.

(2) 估计方差

在由 v 内的平均值估计 V 内的平均值的连续情形下, 可以推得

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 &= E[(Z_v(\mathbf{x}) - Z_v(\mathbf{x}'))^2] \\ &= \frac{1}{V^2} \int_{v(\mathbf{x})} dy \int_{v(\mathbf{x}')} dy' C(\mathbf{y} - \mathbf{y}') dy' + \frac{1}{V^2} \int_{v(\mathbf{x}')} dy \int_{v(\mathbf{x})} dy' C(\mathbf{y} - \mathbf{y}') dy' \\ &\quad - \frac{2}{V^2} \int_{v(\mathbf{x})} dy \int_{v(\mathbf{x}')} dy' C(\mathbf{y} - \mathbf{y}') dy'\end{aligned}\quad (2-21)$$

同样, 我们用 $\bar{C}(V, v)$ 表示当向量 \mathbf{h} 的一端扫过域 $V(\mathbf{x})$ 而其另一端独立地扫过域 $v(\mathbf{x}')$ 时协方差 $C(\mathbf{h})$ 的平均值. 故有

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) + \bar{C}(v, v) - 2\bar{C}(V, v) \quad (2-22)$$

当协方差 $C(\mathbf{h})$ 存在时, 变异函数 $\gamma(\mathbf{h})$ 也存在, 并且这两个函数借(2-8)式相关联:

$$C(\mathbf{h}) = C(\mathbf{o}) - \gamma(\mathbf{h})$$

于是式(2-22)也可以表为:

$$\sigma_E^2 = 2\bar{\gamma}(V, v) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (2-23)$$

2.2.3.3 用算术平均估计区域平均值

一般公式(2-22)和(2-23)也包括下列特殊情形:

用在点 $\{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n\}$ 处所取的 n 个数值 $Z(\mathbf{x}_i)$ 的算术平均值 Z^* 来估计一个区域的平均值 Z_v :

$$Z_v = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} Z(\mathbf{y}) dy$$

$$Z^* = \frac{1}{n} \sum_i Z(\mathbf{x}_i)$$

(1) 在二阶平稳的假设下, $Z_v(\mathbf{x})$ 与 Z^* 的数学期望均等于 m , 因而满足无偏条件 $E[Z_v - Z^*] = 0$.

(2) 估计方差同样可写为:

$$\sigma_E^2 = \overline{C}(V, V) + \overline{C}((n), (n)) - 2\overline{C}(V, (n)) \quad (2-24)$$

或

$$\sigma_E^2 = 2\overline{\gamma}(V, (n)) - \overline{\gamma}(V, V) - \overline{\gamma}((n), (n)) \quad (2-25)$$

其中, $\overline{C}(V, (n))$ 和 $\overline{\gamma}(V, (n))$ 分别表示当向量 \mathbf{h} 的一端扫过点集 $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ 而另一端独立地扫过域 V 时协方差和变异函数的平均值。

2.3 有限区域的离差方差

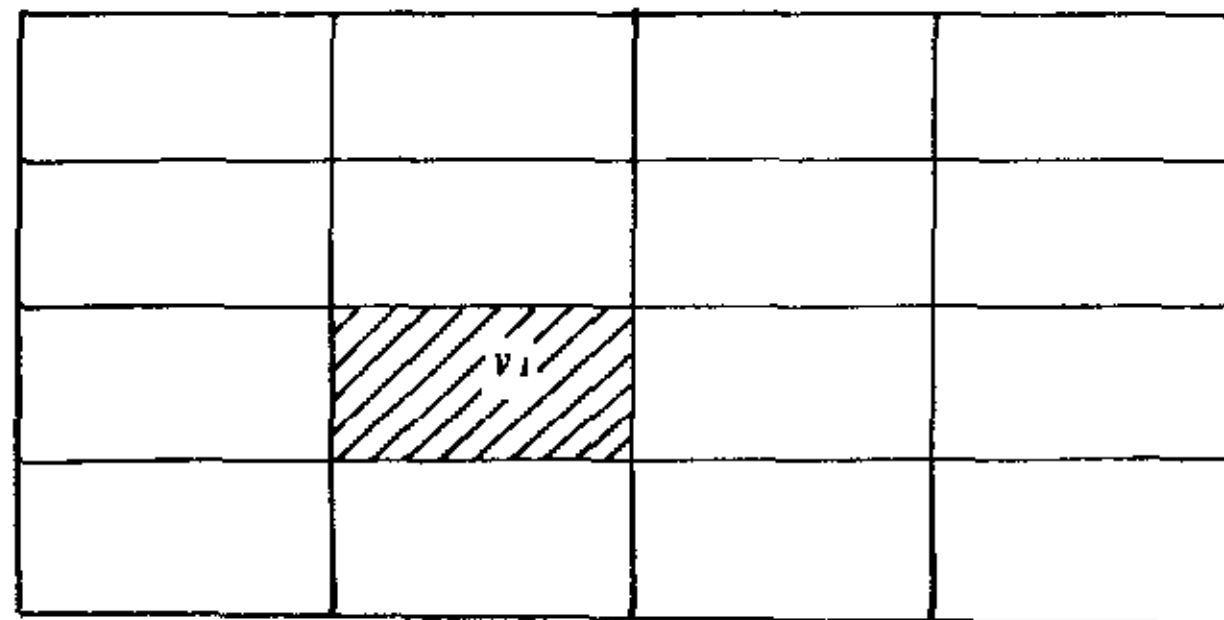
2.3.1 离差方差的定义

在工程实践中, 我们不但要知道区域 V 上土性变量的平均值, 而且还应该知道该域内土性变量的离散情况。这样就引出离差方差的概念。

2.3.1.1 离差的表示

令 V 为中心位于点 \mathbf{x} 的一个较大的区域, 它被划分为 N 个同等大小的中心位于诸点 x_i 的较小的区域 $v(x_i)$, 如图 2-6 所示:

$$V = \sum_{i=1}^n v_i = Nv$$



$$V = \sum_i v_i = Nv$$

图 2-6 离差的概念

令 $z(\mathbf{y})$ 为点 \mathbf{y} 处的土性变量值。中心位于点 x_i 的每一个单位 $v(x_i)$ 的平均值为:

$$z_v(x_i) = \frac{1}{v} \int_{v(x_i)} z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

类似地, 中心位于 \mathbf{x} 的较大区域 V 的平均值为:

$$z_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} z(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_v(\mathbf{x}_i)$$

与位于区域 V 内的较小区域 $v(\mathbf{x}_i)$ 的 N 个位置 \mathbf{x}_i 对应着 N 个离差 $(z_v(\mathbf{x}) - z_v(\mathbf{x}_i))$, N 个值 $z_v(\mathbf{x}_i)$ 对于它们的平均值 $z_v(\mathbf{x})$ 的离差可用均方离差来表征:

$$s^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_v(\mathbf{x}) - z_v(\mathbf{x}_i))^2 \quad (2-26)$$

由于点变量 $z(\mathbf{y})$ 被解释为随机场 $Z(\mathbf{y})$ 的一个特定的实现, 区域 v 的平均值 $z_v(\mathbf{x}_i)$ 和区域 V 的平均值 $z_v(\mathbf{x})$ 分别为随机场 $Z_v(\mathbf{x}_i)$ 和 $Z_v(\mathbf{x})$ 的实现, 则前述均方离差 $s^2(\mathbf{x})$ 也是确定于点 \mathbf{x} 处(即对应于中心位于点 \mathbf{x} 的区域 V) 的随机变量 $S^2(\mathbf{x})$ 的一个特定的实现:

$$S^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_i (Z_v(\mathbf{x}) - Z_v(\mathbf{x}_i))^2 \quad (2-27)$$

2.3.1.2 离差的方差

在点随机场 $Z(\mathbf{y})$ 的平稳假设下, 定义随机变量 $S^2(\mathbf{x})$ 的平稳数学期望是区域 v 在 V 中的离差方差。并且用如下的记号:

$$\begin{aligned} D^2(v/V) &= E[S^2(\mathbf{x})] \\ &= E\left[\frac{1}{N} \sum_i (Z_v(\mathbf{x}) - Z_v(\mathbf{x}_i))^2\right] \end{aligned} \quad (2-28)$$

对于 k 个形状与大小均相同的区域 $\{V_k, k=1, \dots, k\}$ 中的每一个区域, 都有一个按式(2-26)计算的实验均方离差 s_k^2 。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 这 k 个实验均方离差的算术平均值趋于 $S^2(\mathbf{x})$ 的平稳数学期望, 即离差的方差 $D^2(v/V)$ 。

针对某一个具体的区域 V , 则 $D^2(v/V)$ 将是实验均方离差 $s^2(\mathbf{x})$ 的一个估计量, 这如同随机变量的数学期望是此随机变量的特定实现的一个估计量一样。

2.3.1.3 离差方差定义的推广

定义(2-28)对应于一个域 V , 它被划分为正合个数的小单位 v 。当 $v \ll V$ 时, 则中心位于 V 内一点 \mathbf{y} 的每一小单位 v 完全看成是落在 V 内。因此, 均

方离差 $s^2(\mathbf{x})$ 是在域 V 上的积分:

$$s^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} (z_v(\mathbf{x}) - z_v(\mathbf{y}))^2 dy$$

在平稳假设下, 诸单位 v 在 V 内的离差方差定义为 $S^2(\mathbf{x})$ 的平稳数学期望:

$$D^2(v/V) = E \left[\frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} (Z_v(\mathbf{x}) - Z_v(\mathbf{y}))^2 dy \right], v \ll V \quad (2-29)$$

由此得

$$D^2(v/V) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} E[(Z_v(\mathbf{x}) - Z_v(\mathbf{y}))^2] dy$$

即

$$D^2(v/V) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} \sigma_z^2(V(\mathbf{x}), v(\mathbf{y})) dy, \quad v \ll V \quad (2-30)$$

因此, 离差方差 $D^2(v/V)$ 就是用单位 v 的平均值 $Z_v(\mathbf{y})$ 来估计 $Z_v(\mathbf{x})$ 的估计方差在 V 中的平均值。

2.3.2 离差方差的计算

设 $Z(\mathbf{x})$ 为一平稳随机场, 其数学期望为 m , 协方差为 $C(\mathbf{h})$, 变异函数为 $\gamma(\mathbf{h})$ 。则据(2-30)和(2-22)式有:

$$D^2(v/V) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} (\bar{C}(V(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})) + \bar{C}(v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y})) - 2\bar{C}(V(\mathbf{x}), v(\mathbf{y}))) dy \quad (2-31)$$

因为协方差 $C(\mathbf{h})$ 是平稳的, 因此上式右边积分号内的前两项不依赖于区域 V 和 v 的具体位置 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 而只依赖于它们的几何特征, 故有:

$$\begin{aligned} \bar{C}(V(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})) &= \bar{C}(V, V), \quad \forall \mathbf{x} \\ \bar{C}(v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y})) &= \bar{C}(v, v), \quad \forall \mathbf{y} \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} &\frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} (\bar{C}(V(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})) + \bar{C}(v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}))) dy \\ &= \bar{C}(V, V) + \bar{C}(v, v) \end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \int_{v(x)} \bar{C}(V(x), v(y)) dy &= \bar{C}(V(x), V(x)) \\ &= \bar{C}(V, V)\end{aligned}$$

因此

$$D^2(v/V) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(V, V) \quad (2-32)$$

用变异函数表示, 则有

$$D^2(v/V) = \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (2-33)$$

2.3.3 关于离差方差的讨论

2.3.3.1 离差方差与 v 和 V 大小之间的关系

(1) 当 V 固定时, v 越大, 则离差方差越小

设 $v_1 < v_2$, 则据(2-32)式有

$$D^2(v_1/V) = \bar{C}(v_1, v_1) - \bar{C}(V, V)$$

$$D^2(v_2/V) = \bar{C}(v_2, v_2) - \bar{C}(V, V)$$

$$D^2(v_1/v_2) = \bar{C}(v_1, v_1) - \bar{C}(v_2, v_2)$$

因而 $D^2(v_1/V) - D^2(v_2/V) = D^2(v_1/v_2)$

显然 $D^2(v_1/V) \geq D^2(v_2/V)$, $v_1 < v_2$ (2-34)

(2) 当 v 固定时, V 越大, 离差方差越大。

设 $V_1 < V_2$

同样有

$$D^2(v/V_1) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(V_1, V_1)$$

$$D^2(v/V_2) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(V_2, V_2)$$

$$D^2(V_1/V_2) = \bar{C}(V_1, V_1) - \bar{C}(V_2, V_2)$$

即可得到

$$D^2(v/V_2) - D^2(v/V_1) = D^2(V_1/V_2)$$

即:

$$D^2(v/V_2) \geq D^2(v/V_1), \quad V_1 < V_2 \quad (2-35)$$

式(2-34)和式(2-35)所表示的关系如图 2-7 所示。

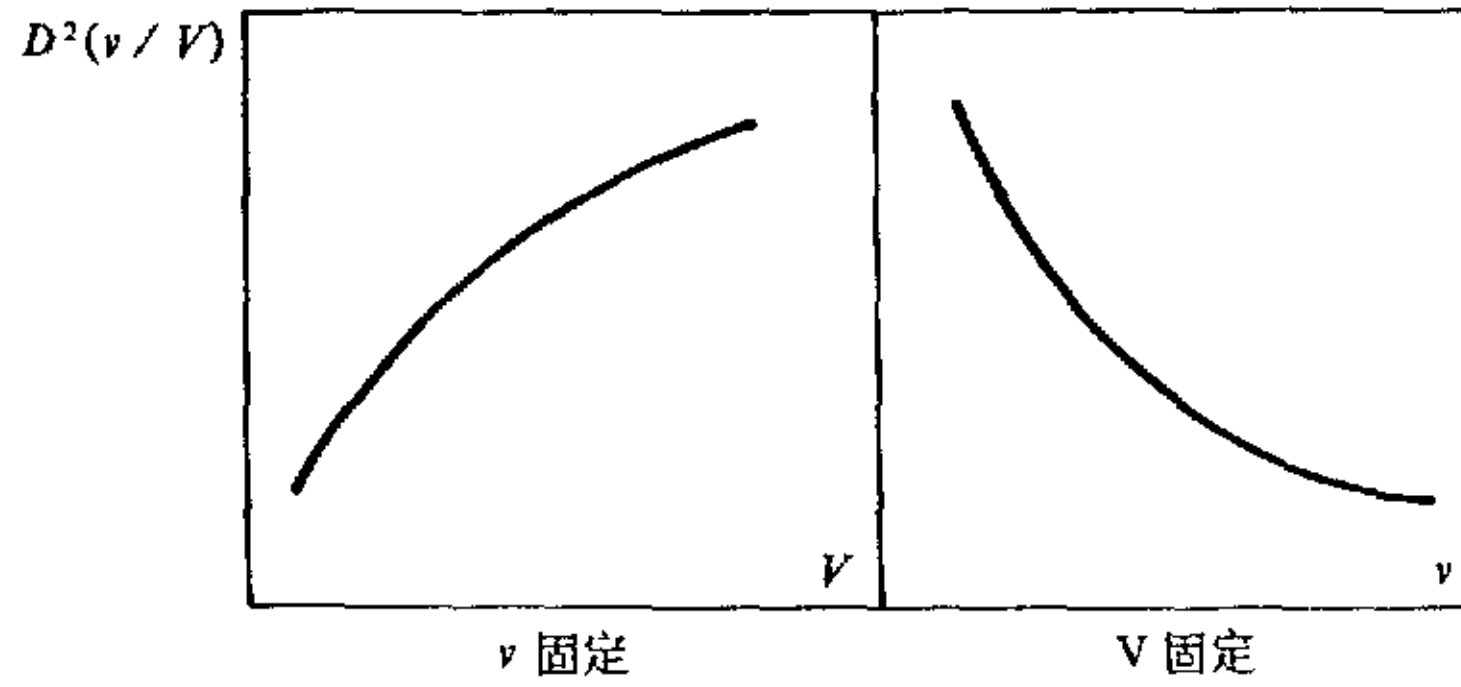


图 2-7 离差方差同 v 与 V 大小的关系

2.3.3.2 离差场趋于无穷大的情况

考虑一个极大的离差场 ($V \rightarrow \infty$), 在平稳性和各态历经性的假设下, 此场内的平均值 Z_v 趋于随机场 $Z(\mathbf{x})$ 的平稳数学期望:

$$Z_v(\mathbf{x}) \rightarrow E[Z(\mathbf{x})] = m, \quad \text{当 } V \rightarrow \infty$$

因此, 假定域 v 为一个点并据(2-30)式有

$$D^2(o/\infty) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_v E[(Z(\mathbf{y}) - m)^2] dy$$

又因

$$E[(Z(\mathbf{y}) - m)^2] = V_{\sigma} [Z(\mathbf{y})] = C(\mathbf{o})$$

则

$$D^2(o/\infty) = C(\mathbf{o}) \quad (2-36)$$

又据(2-32)和(2-33)式有

$$D^2(o/\infty) = C(\mathbf{o}) - \bar{C}(\infty, \infty)$$

$$D^2(o/\infty) = \bar{\gamma}(\infty, \infty) - \gamma(\mathbf{o}) = \bar{\gamma}(\infty, \infty) \quad (\text{因 } \gamma(\mathbf{o}) = 0)$$

因而对于平稳随机场, 我们得到

$$\bar{C}(\infty, \infty) = C(\infty) = 0 \quad (2-37)$$

$$\bar{\gamma}(\infty, \infty) = \gamma(\infty) = C(\mathbf{o}) = V_{\sigma} [Z(\mathbf{y})] \quad (2-38)$$

2.3.3.3 局部平均的方差

Vanmarcke(1983)建立了完善的随机场局部平均理论, 其核心是用方差折

减函数表示局部平均的方差, 即

$$V_{ar}[Z_v] = \sigma_v^2 = \Gamma(v) \cdot \sigma^2 \quad (2-39)$$

式中 σ_v^2 表示局部平均的方差, σ^2 为点方差(即 $C(\mathbf{o})$), 而 $\Gamma(v)$ 就是方差折减函数。

实际上, 局部平均的方差可以用离差方差来表示
因为

$$D^2(v/\infty) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(\infty, \infty) = C(v, v)$$

而 $\bar{C}(v, v) = V_{ar}[Z_v]$

所以 $V_{ar}[Z_v] = D^2(v/\infty) = \Gamma(v) \cdot \sigma^2 \quad (2-40)$

这说明局部平均的方差就是所研究的区域 V 趋于无穷大时, 局部 v 的离差方差。

又 $D^2(v/\infty) = C(\mathbf{o}) - \bar{\gamma}(v, v)$

则有

$$V_{ar}[Z_v] = D^2(v/\infty) = C(\mathbf{o}) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (2-41)$$

即

$$\Gamma(v) \cdot C(\mathbf{o}) = C(\mathbf{o}) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (2-42)$$

或

$$\Gamma(v) = 1 - \frac{\bar{\gamma}(v, v)}{C(\mathbf{o})} \quad (C(\mathbf{o}) = \sigma^2) \quad (2-43)$$

式(2-41)表明局部平均的方差一定小于点方差 $C(\mathbf{o})$, 而式(2-43)则是用变异函数计算方差折减函数的公式, 显然 $\Gamma(v)$ 函数具有两个重要的性质:

$$\Gamma(v) \geq 0 \quad (2-44)$$

$$\Gamma(o) = 1 \quad (2-45)$$

式(2-43)具有十分重要的理论意义和实用价值, 因为它说明了方差折减函数与变异函数之间的关系, 并且突破了以往计算局部平均方差需要域 v 为规则形状的限制。

2.4 有限区域的估离方差

2.4.1 估离方差的概念

设二阶平稳随机场 $Z(\mathbf{x})$ 中域 V 被划分为正合个数的单位 v , 且 $v \ll V$

$$Z_v(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{v} \int_{v(\mathbf{x}_i)} Z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$Z_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} Z(\mathbf{y}) d(\mathbf{y})$$

又设在 V 中 n 个有效数据 $\{z(\mathbf{x}_i), j = 1, \dots, n\}$ 的算术平均值为 Z_n^* , 则每一个单位 v 的真实平均值 $Z_v(\mathbf{x}_i)$ 与这个算术平均值之间的离差为 $(Z_n^* - Z_v(\mathbf{x}_i))$ 。

令

$$S_E^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} (Z_n^* - Z_v(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} \quad (2-46)$$

我们定义此随机变量 $S_E^2(\mathbf{x})$ 的平稳数学期望为区域 V 内单位 v 对于 Z_n^* 的估离方差, 用 $D_E^2(v/V_n)$ 表示, 即

$$D_E^2(v/V_n) = E[S_E^2(\mathbf{x})] \quad (2-47)$$

2.4.2 估离方差的计算

由(2-46)和(2-47)式得

$$\begin{aligned} D_E^2(v/V_n) &= E\left[\frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} (Z_n^* - Z_v(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y}\right] \\ &= \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} E[(Z_n^* - Z_v(\mathbf{y}))^2] d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{V} \int_{v(\mathbf{x})} \sigma_E^2(Z_n^*, v(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-48)$$

又据(2-24)式, 有:

$$\sigma_E^2(Z_n^*, v(\mathbf{y})) = \bar{C}(v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y})) + \bar{C}((n), (n)) - 2\bar{C}(v(\mathbf{y}), (n))$$

因为协方差 $C(\mathbf{h})$ 是平稳的, 因此上式右边的第一项不依赖于区域 v 的位置 \mathbf{y} , 而只依赖于它的几何特征, 故有

$$\bar{C}(v(\mathbf{y}), v(\mathbf{y})) = \bar{C}(v, v), \quad \forall \mathbf{y}$$

第二项 $\bar{C}((n), (n))$ 只依赖于 n 个有效数据的排列特征, 因此, 当就域 V 取平均值

时, 这两项保持不变, 即:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_{r(x)} (\bar{C}(v(y), v(y)) + \bar{C}((n), (n))) dy \\ & = \bar{C}(v, v) + \bar{C}((n), (n)) \end{aligned}$$

而第三项则变为

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{V} \int_{r(x)} \bar{C}(v(y), (n)) dy = -2\bar{C}(V(x), (n)) \\ & = -2\bar{C}(V, (n)) \end{aligned}$$

最后得出:

$$D_E^2(v / V_*) = \bar{C}(v, v) + \bar{C}((n), (n)) - 2\bar{C}(V, (n)) \quad (2-49)$$

同样可用变异函数表示, 即

$$D_E^2(v / V_*) = 2\bar{\gamma}(V, (n)) - \bar{\gamma}(v, v) - \bar{\gamma}((n), (n)) \quad (2-50)$$

2.4.3 关于估离方差的讨论

2.4.3.1 式(2-50)给出

$$D_E^2(v / V_*) = 2\bar{\gamma}(V, (n)) - \bar{\gamma}(v, v) - \bar{\gamma}((n), (n))$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 即 $Z: \rightarrow Z_v(x)$ 时

则 $\bar{\gamma}(V, (n)) \rightarrow \bar{\gamma}(V, V)$

$\bar{\gamma}((n), (n)) \rightarrow \bar{\gamma}(V, V)$

即 $D_E^2(v / V_*) \rightarrow \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) = D^2(v / V)$

说明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, V 完全已知, 不存在估计方差, 估离方差就等于离差方差。

2.4.3.2 当 $v = V$ 时, 则有

$$\begin{aligned} D_E^2(v / V_*) &= 2\bar{\gamma}(V, (n)) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}((n), (n)) \\ &= \sigma_E^2(V, (n)) \end{aligned}$$

说明, 当 v 增大到 V 时, 不存在离差方差, 估离方差就是用 $Z:$ 去估计 V 的平均值的估计方差。

2.4.3.3 当 $V \rightarrow \infty$ 时, 则有

$$D_E^2(v / V_*) = 2\bar{\gamma}(V, (n)) - \bar{\gamma}(v, v) - \bar{\gamma}((n), (n))$$

$$= 2C(o) - \bar{\gamma}(v, v) - \bar{\gamma}((n), (n)), \quad \text{当 } V \rightarrow \infty \text{ 时}$$

用协方差函数表示则有

$$\begin{aligned} D_E^2(v / V_n) &= \bar{C}(v, v) + \bar{C}((n), (n)) - 2\bar{C}(V, (n)) \\ &= \bar{C}(v, v) + \bar{C}((n), (n)), \quad \text{当 } V \rightarrow \infty \text{ 时} \end{aligned}$$

因 $\bar{C}(v, v) = \Gamma(v) \cdot \sigma^2$

则 $D_E^2(v / V_n) = \Gamma(v) \cdot \sigma^2 + \bar{C}((n), (n))$

这就是无限区域的估离方差表达式。

2.4.4 估离方差的理论意义与应用

从估离方差的定义可看出，估离方差就是用 n 个有效数据的算术平均值去估计区域 V 内每一个小单元 v 的真实平均值的离差方差。而这正是我们在解决土工问题时经常遇到的情况。例如，用 n 个钻孔的某土层厚度观测值的算术平均值去估计单桩的某土层厚度值即属于此类情况。

另一方面，比较式(2-50)与式(2-25)和式(2-33)，可以发现，估离方差就等于估计方差与离差方差的和，即

$$D_E^2(v / V_n) = \sigma_E^2 + D^2(v / V) \quad (2-51)$$

这是一个非常重要的理论公式，它完整地表述了土性参数估计中的两个不确定性来源：(1) 由离差方差表达的土性的自然变异；(2) 由估计方差表达的由于不完备观测导致的统计误差。而且从前面的讨论还可以看出，估离方差的计算式在一定的条件下可以转化为离差方差或估计方差的计算式，并可适用于无限区域的情况。因此，对于考虑自然变异和统计误差的概率分析问题，估离方差计算式具有普遍适用的意义。

再进一步分析估离方差计算式(2-49)或(2-50)，可以看到，估离方差是平均协方差函数值 \bar{C} 或平均变异函数值 $\bar{\gamma}$ 的线性组合。因此，一旦某种土性的协方差函数或变异函数已确知，则仅仅根据区域 V ，待估域 v 以及信息域 (n) 三者的几何构形就可计算出估离方差，而不必知道信息域 (n) 的具体观测值。这样，就为事先研究一个场地的最佳勘察方案提供了方便。

3 变异函数分析与计算

3.1 概述

上一章所述的估离方差运算模型只涉及到随机场的协方差函数或变异函数。因此, 要对某个土性变量进行概率分析, 首先必须构造出一种表征该变量随机场空间结构的结构函数(协方差或变异函数)。

在二阶平稳假设情况下, 协方差函数和变异函数是两个等价的工具, 其相互关系已由式(2-8)给出。此时只要构造出一种结构函数, 则另一种结构函数即可同时得到。在以往的土工随机场理论研究中, 比较重视协方差函数的研究(DeGroot, 1993), 而忽视了对于变异函数的研究。

但法国数学家 Matheron (1973) 早就指出, 很多自然地质现象作为随机函数(即随机场)并不满足二阶平稳假设, 即得不到平稳的协方差函数, 而变异函数却可能仍然是平稳的(称之为内蕴平稳)。所以, 从适用范围来说, 变异函数是一种比协方差函数更为理想的数学工具。本章通过实验资料研究土性变量随机场变异函数的基本特征和其平均值的计算。

3.2 实验变异函数及其性质

根据定义式(2-4), 变异函数是土性变量增量方差的一半, 在平稳情况下, 可以用观测的实验数据来估计变异函数 $\gamma(\mathbf{h})$ 。估计量 $\gamma^*(\mathbf{h})$ 可由式(3-1)来计算, 即:

$$\gamma^*(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{x}_i))^2 \quad (3-1)$$

其中 $N(\mathbf{h})$ 是以向量 \mathbf{h} 分隔的实验数据对 $(z(\mathbf{x}_i), z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}))$ 的数目。一般, 变异函数既是距离 h 的函数, 又是方向 α 的函数。在各向同性(或同一方向)条件下, 式(3-1)可写为:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i + h) - z(x_i))^2 \quad (3-2)$$

由此变异函数可以衡量以距离 h 分割的两点间随机变量的相关性。通常,

相近的点要比远离的点相关密切，若点是高度相关的，则变异函数值较小，反之则较大。

3.2.1 土层厚度的变异函数

图 3-1(a)为西安某场地的勘探点平面位置图。该场地按 30m × 30m 方格网共布置了 84 个勘探点。在勘探深度范围内，该场地的土层剖面可划分为 6 层，如图 3-1(b)所示。

1。	2。	3。	4。	5。	6。
7。	8。	9。	10。	11。	12。
13。	14。	15。	16。	17。	18。
19。	20。	21。	22。	23。	24。
25。	26。	27。	28。	29。	30。
31。	32。	33。	34。	35。	36。
37。	38。	39。	40。	41。	42。
43。	44。	45。	46。	47。	48。
49。	50。	51。	52。	53。	54。
55。	56。	57。	58。	59。	60。
61。	62。	63。	64。	65。	66。
67。	68。	69。	70。	71。	72。
73。	74。	75。	76。	77。	78。
79。	80。	81。	82。	83。	84。

层号	土层名称	深度 (m)
①	耕土	0
②	黄土(粉质粘土) Q ₃ ^{al}	5.0
③	黄土(粉质粘土) Q ₃ ^{al} 古土壤	10.0
④	黄土(粉质粘土) Q ₃ ^{al}	15.0
⑤	黄土(粉质粘土) Q ₃ ^{al}	20.0
⑥	黄土(粉质粘土)	25.0

(a) 勘探点平面布置

(b) 土层剖面

图 3-1 某场地的勘探点平面布置与土层剖面

各勘探点的厚度观测值列入表 3-1 中，由于只有①、②、③三层被 84 个勘探孔全部穿透，所以表中只列出②、③两层土的厚度观测值。

各勘探孔的厚度观测值

表 3-1

勘探点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
厚度值 (m)	②	9.3	9.4	9.3	9.2	9.3	9.9	9.2	9.9	9.1	9.1	9.3	9.6	9.5	9.7
	③	4.8	4.6	4.2	4.4	4.0	4.0	5.0	3.8	4.4	4.4	4.2	3.8	4.4	4.0

续表 3-1

勘探点号	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
厚度值 (m)	②	8.9	8.9	9.3	8.8	8.2	9.3	9.7	10.0	9.7	—	9.3	9.5	—	—
	③	4.3	4.6	4.4	4.6	5.3	3.8	4.3	4.0	4.0	—	4.7	4.4	—	4.6
勘探点号	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
厚度值 (m)	②	—	—	9.8	9.8	9.7	10.2	10.3	9.8	10.2	10.0	8.9	9.2	8.7	10.0
	③	4.2	3.7	4.2	5.0	4.2	3.6	3.7	4.0	4.0	4.0	4.6	4.3	4.5	4.2
勘探点号	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	
厚度值 (m)	②	8.7	9.0	9.1	9.0	—	9.8	9.9	9.5	9.7	9.5	9.4	—	9.4	9.0
	③	4.7	4.3	4.5	4.8	—	4.2	4.5	5.3	4.0	4.6	4.5	4.4	4.8	5.5
勘探点号	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
厚度值 (m)	②	8.7	8.4	8.0	8.3	7.8	7.8	9.2	8.5	9.3	9.1	8.0	8.2	9.1	8.5
	③	—	5.1	5.2	—	6.0	5.8	5.3	6.7	5.0	5.3	5.5	5.1	—	4.6
勘探点号	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	
厚度值 (m)	②	8.1	9.2	8.9	9.1	9.2	—	—	9.0	8.7	8.2	8.7	9.1	9.3	9.2
	③	4.5	3.8	5.1	4.7	4.2	—	4.0	3.8	4.6	5.1	4.7	4.6	3.9	—

经检验, 厚度变异函数在水平方向 (二维空间) 满足各向同性的条件, 于是按式 (3-2) 编制计算程序, 输入表 3-1 中的全部数据后, 可得到第②层和第③层厚度实验变异函数 $\gamma^*(h)$ 随分隔距离 h 变化的关系曲线, 如图 3-2 和图 3-3 所示。

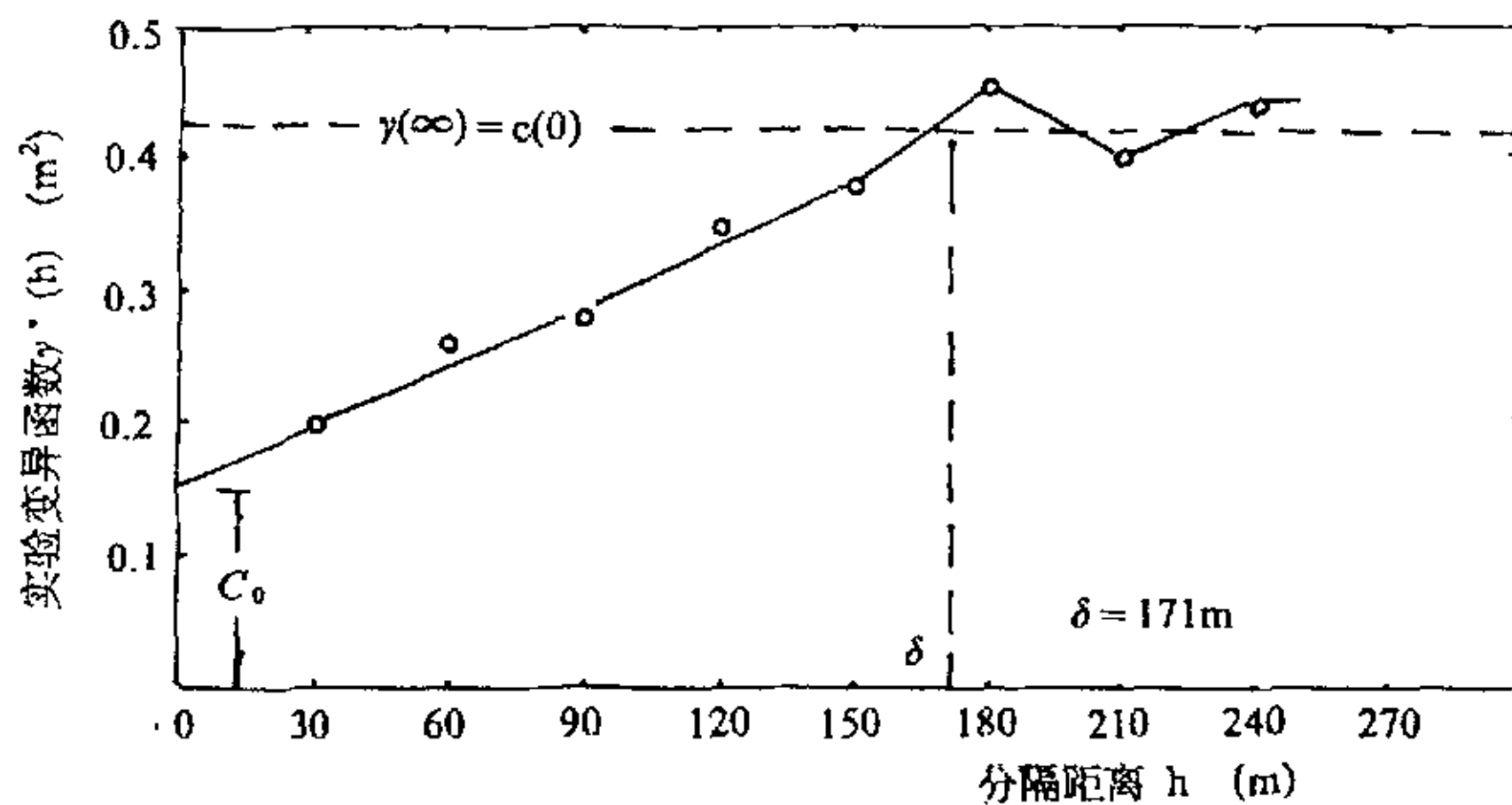


图 3-2 ②层厚度实验变异函数曲线

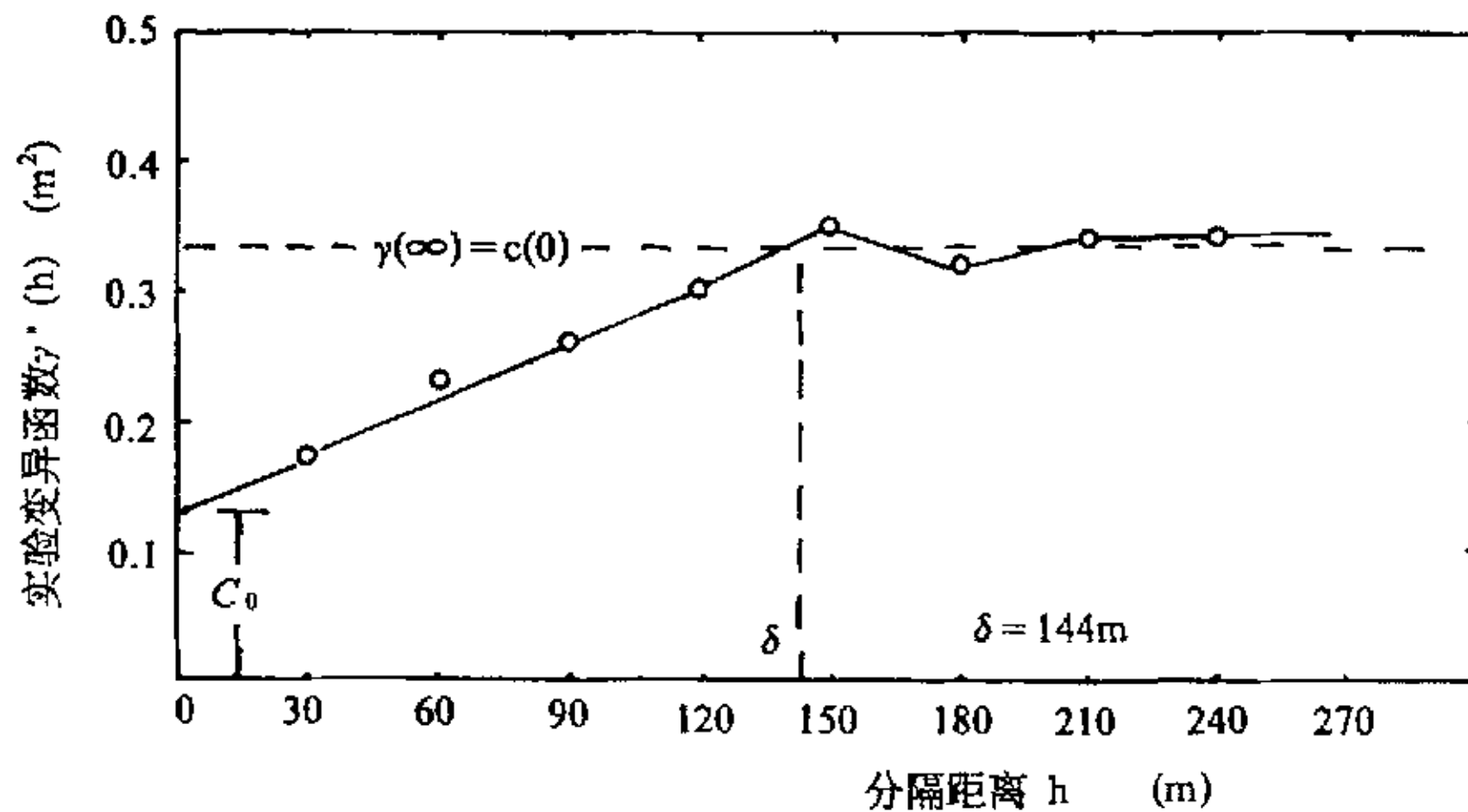


图 3-3 ③层厚度实验变异函数曲线

从图 3-2 和图 3-3 可以看出，层厚实验变异函数曲线具有下述特点：

(1) 变异函数曲线在原点处呈现不连续现象。按照变异函数的定义：当 $h=0$ 时， $\gamma(h)=0$ ，即一个观测点自身的厚度差应当等于零。但上述两条层厚变异函数曲线的初始段均显示， $\gamma^*(h)$ 曲线与垂直轴的交点不通过坐标原点。这种现象可以理解为：它是距离小于 30m 的微型变异和厚度的观测误差所致，以 C_0 表示。

(2) 曲线的起始段近似为一条直线，且随着 h 的增大， $\gamma(h)$ 相应也增大。当 h 超过某一距离 δ 以后，变异函数不再增大，而是稳定在一个极限值 $\gamma(\infty)$ 附近，这个极限值实际上就是随机场的方差，即：

$$\gamma(\infty) = V_{\mu}[Z(x)] = C(0) \quad (3-3)$$

$\gamma(\infty)$ 的大小反映变量间差异的强弱。

(3) 层厚 $Z(x)$ 与距离 $h < \delta$ 的任何其它层厚值 $Z(x+h)$ 互相关，而当 $h > \delta$ 时，层厚之间的影响即消失，因此 δ 称之为相关距离，也可以认为 δ 代表层厚变量的影响范围。

3.2.2 土性指标的变异函数

土性指标指土的物理力学性质试验指标。这里仅以双桥静力触探测得的 f_s 值为例说明土性指标变异函数的特征。

3.2.2.1 垂向变异函数

图 3-4、图 3-5 和图 3-6 分别为三个不同类型土层的静探 f_s 的变异函数曲线，它们是由同一场地 25 个静力触探试验结果按式(3-2)计算得到的。从图中可以看出：

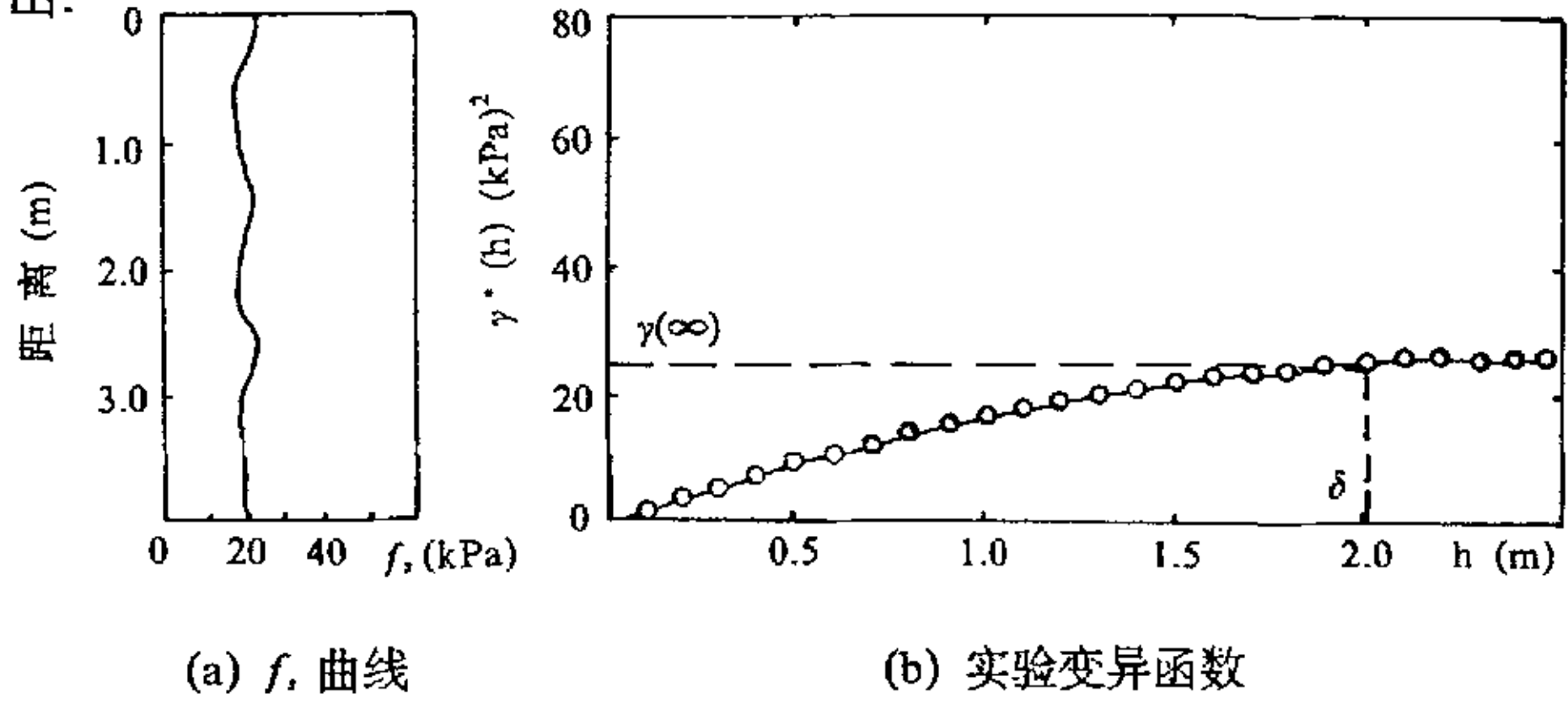


图 3-4 土性指标(f_s)实验变异函数

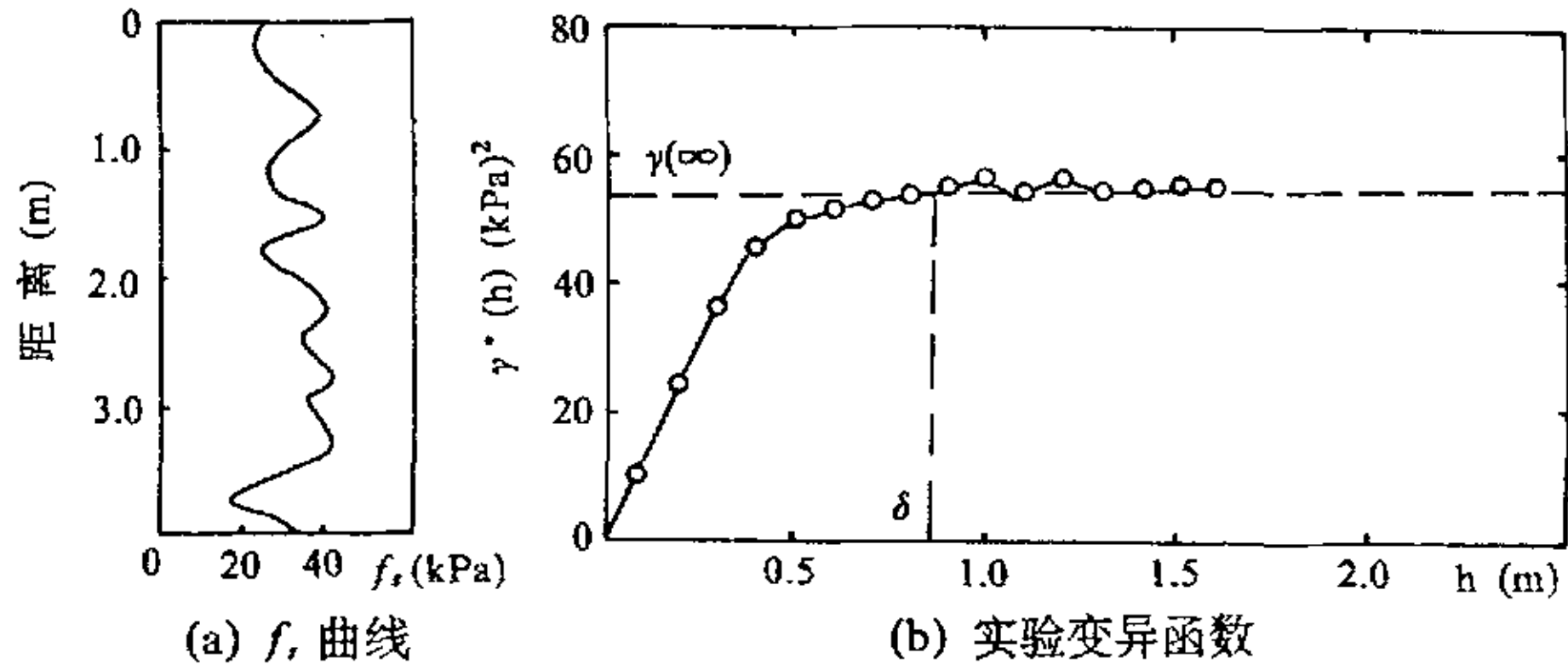


图 3-5 土性指标(f_s)实验变异函数

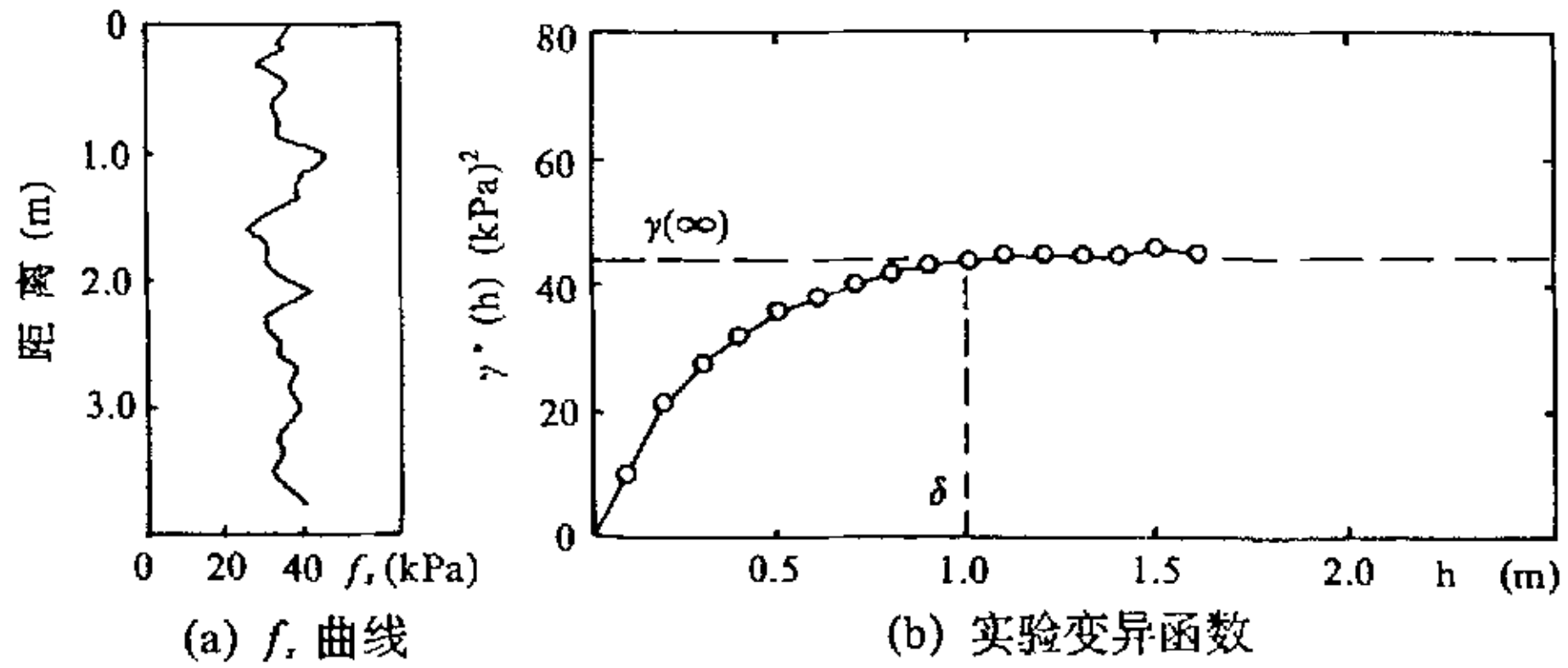


图 3-6 土性指标(f_s)实验变异函数

(1) 曲线在原点处连续。即当 $h=0$ 时, $\gamma(h)=0$ 。这是由于静探曲线为连续测试, 基本不存在观测误差所致。

(2) 曲线的起始段也近似为一条直线, 且当 $h > \delta$ 时, 曲线趋于某一极限值 $\gamma(\infty)$, 这与层厚变异函数类似, δ 称为相关距离。

(3) 比较图 3-4、图 3-5 和图 3-6 可以看出, 土性变化比较平缓时, 如图 3-4, 其相关距离较大, 反之, 则相关距离较小, 如图 3-5 所示。土性变化幅度(即极差)越大时, 其方差 $\gamma(\infty)$ 也越大, 如图 3-5 的 $\gamma(\infty)$ 要大于图 3-6 中的 $\gamma(\infty)$ 。

3.2.2.2 水平向变异函数

将各层土在各测试孔的 f_i 值进行平均, 而后在水平方向上计算各层土的 \bar{f}_i 变异函数 $\gamma_i^*(h)$, 可得到图 3-7、图 3-8 和图 3-9。从这三个水平向变异

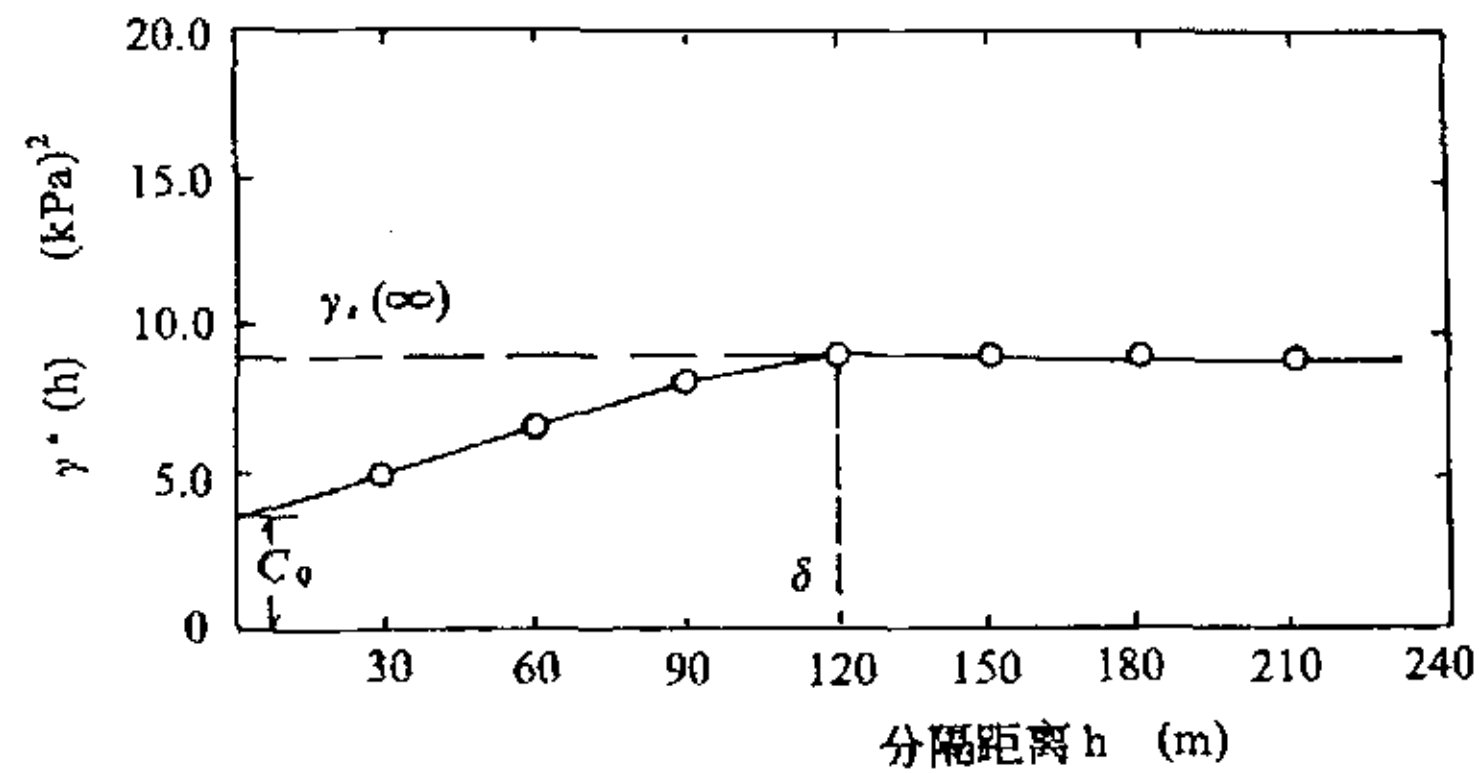


图 3-7 土性指标(\bar{f}_i)水平向实验变异函数

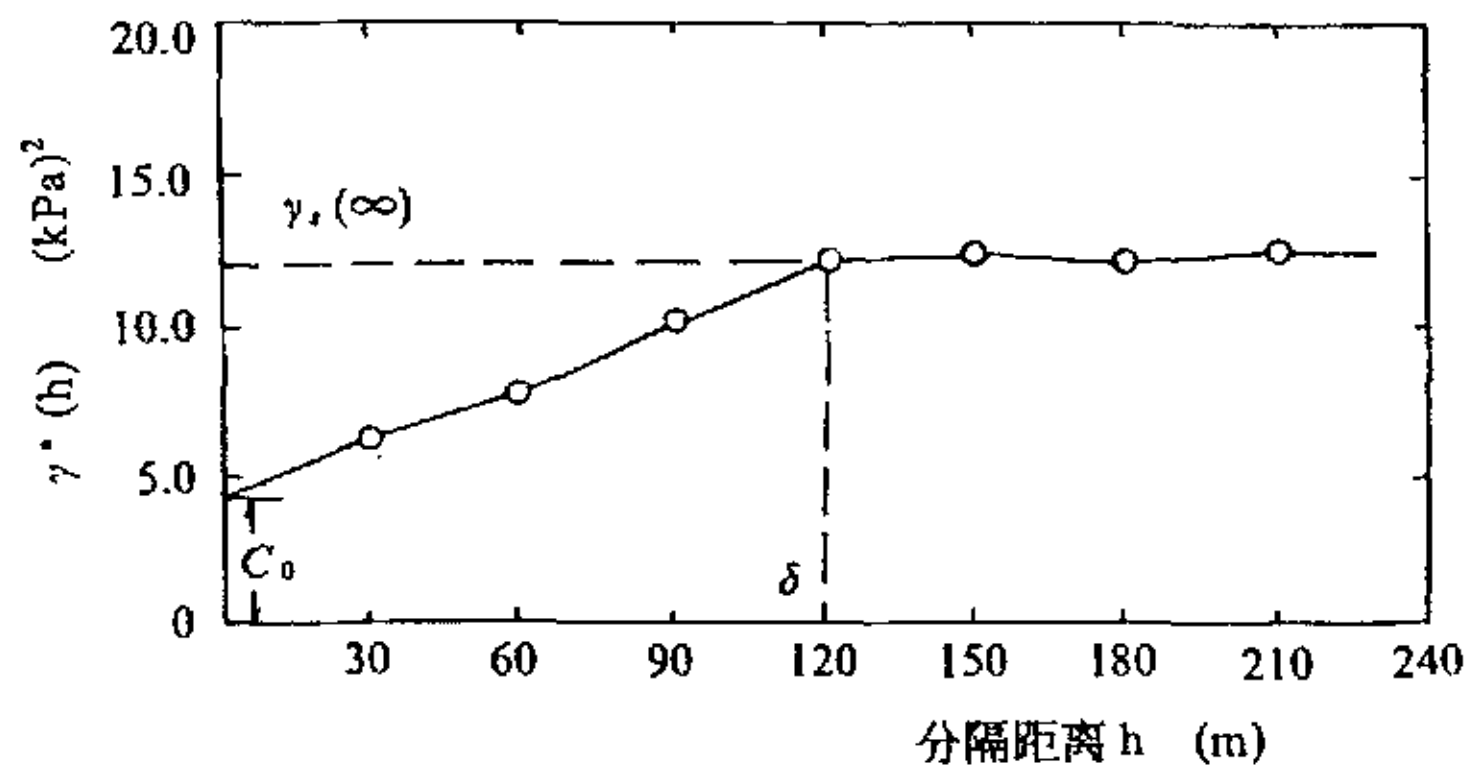


图 3-8 土性指标(\bar{f}_i)水平向实验变异函数

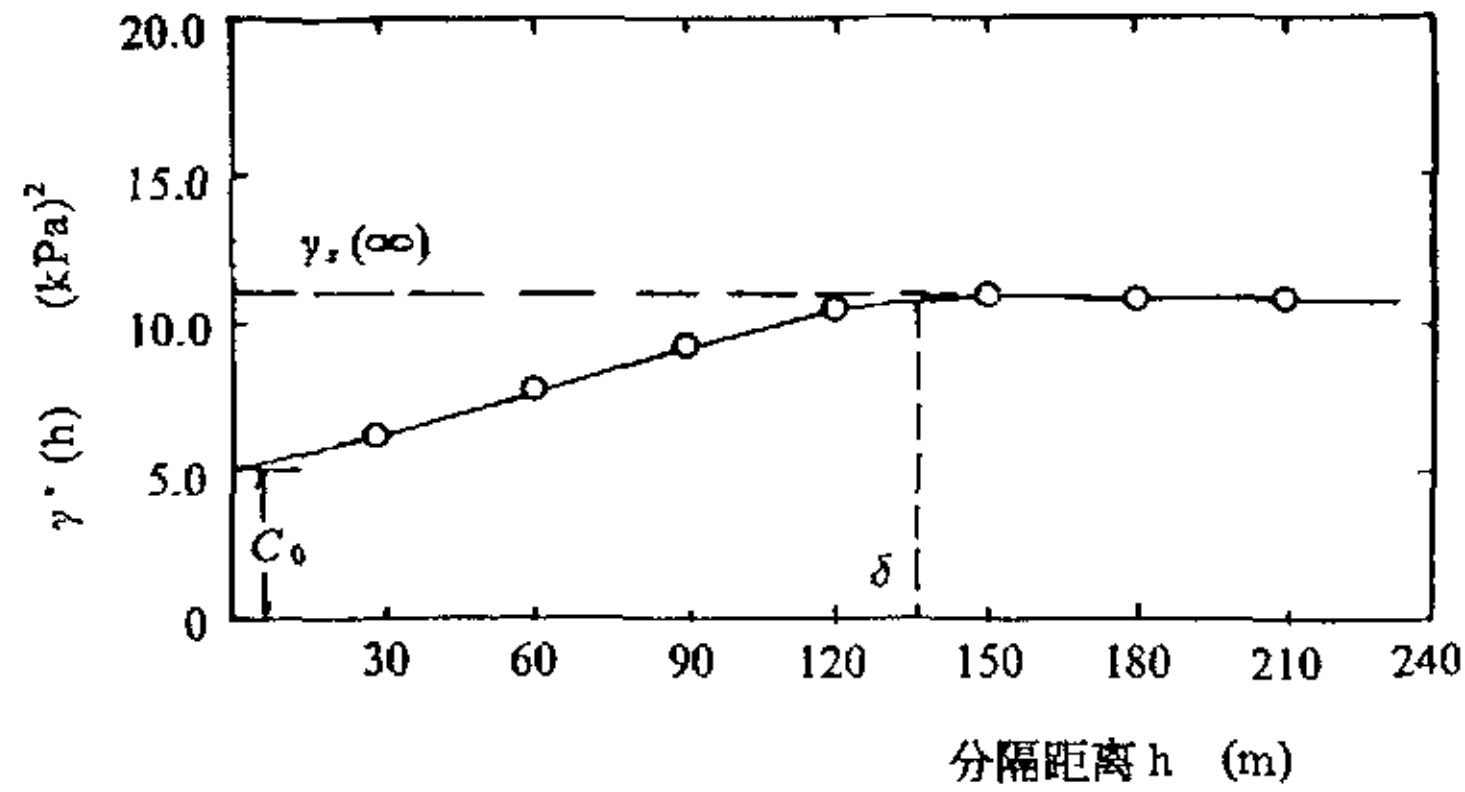


图 3-9 土性指标(\bar{f}_s)水平向实验变异函数

函数曲线可以看出，其形态特征与厚度变异函数曲线相似。从图中还可以看出，土性指标水平变异函数的相关距离比垂向变异函数的相关距离要大得多。说明，土性指标变异函数具有明显的异向性。

3.2.3 变异函数的同一性

土层是在一定的历史和环境条件下沉积生成的，在同一地区相同历史环境条件下形成的土层，其土层的变异结构规律是否相同呢？图 3-10 为西安地区 Q_3 黄土普遍存在的一层湿陷性土的实验变异函数比较，从图中可以看出，不

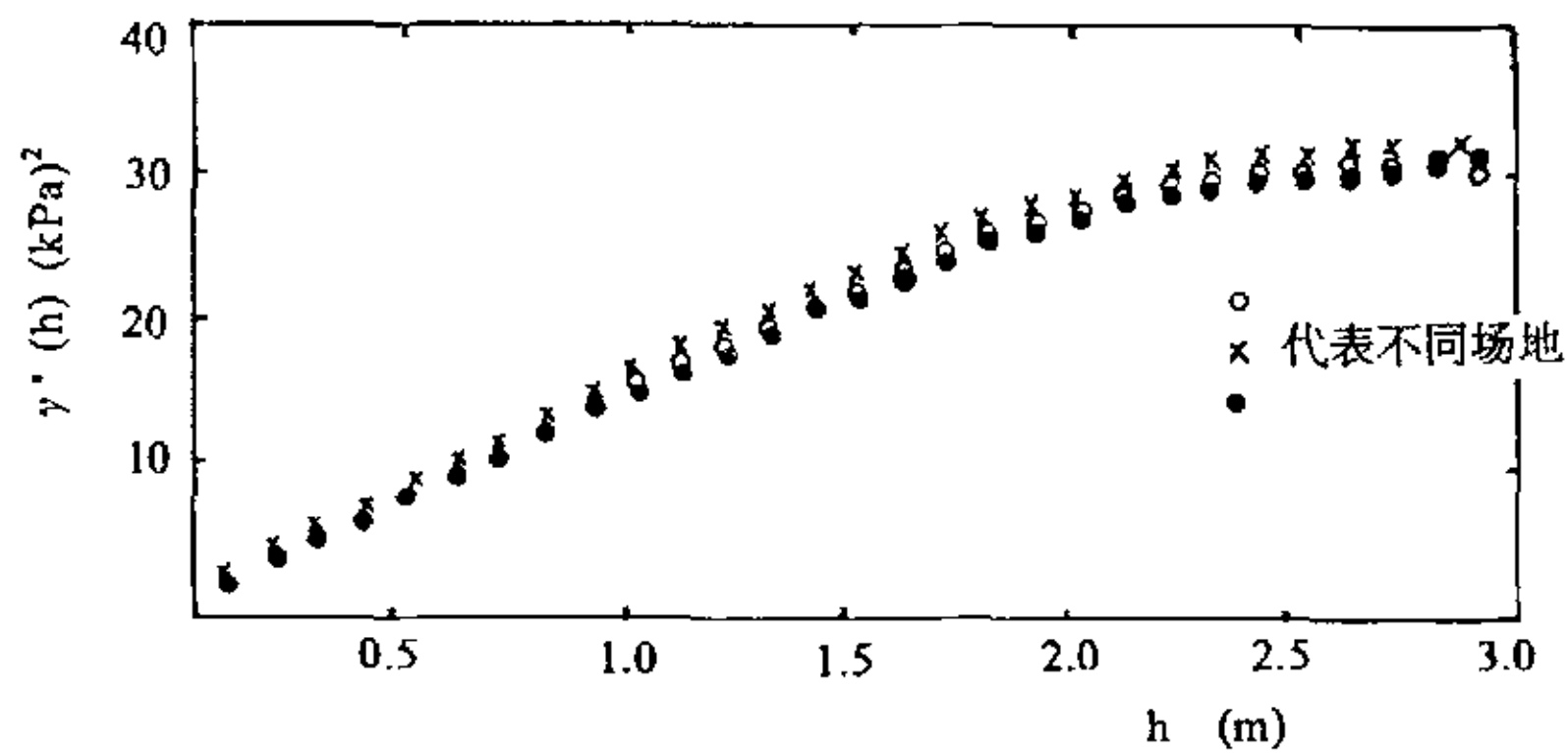


图 3-10 变异函数的同一性

同场地的变异函数基本相同。这说明，在同一地区，相同土层的土性变量变异函数具有同一性，变异函数特征反映了土的历史沉积环境，相同的沉积历史环境，其形成的土层也具有相同的变异函数。这就使变异函数的研究具有普遍适

用的意义。因而不必对每一个场地都要进行变异函数分析。

3.3 变异函数的理论模型

以上研究了土性的实验变异函数，它是由实际观测值得出的。为了进行有关统计运算，则还必须给相应的实验变异函数配制相应的理论模型。这个过程有点类似于用本构模型描述土的实验应力应变关系曲线。

根据图 3-2~图 3-9 所示的变异函数曲线特点，拟合土性变量变异函数可用球状模型或指数模型（於崇文，1980）。

(1) 球状模型

$$\gamma(h) = \begin{cases} C\left(\frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\frac{h^3}{a^3}\right) + C_0 & h \leq a \\ C + C_0 & h > a \end{cases} \quad (3-4)$$

(2) 指数模型

$$\gamma(h) = C[1 - \exp(-h/a)] + C_0 \quad (3-5)$$

式中， a ， C ， C_0 是上述两种模型的基本参数。

应当指出的是，球状模型中相关距离为 $\delta = a$ ，而指数模型中，其相关距离 $\delta = 3a$ ，此时

$$\begin{aligned} \gamma(3a) &= C(1 - e^{-3}) + C_0 \\ &= 0.95C + C_0 \approx C + C_0 \end{aligned}$$

如图 3-11 所示

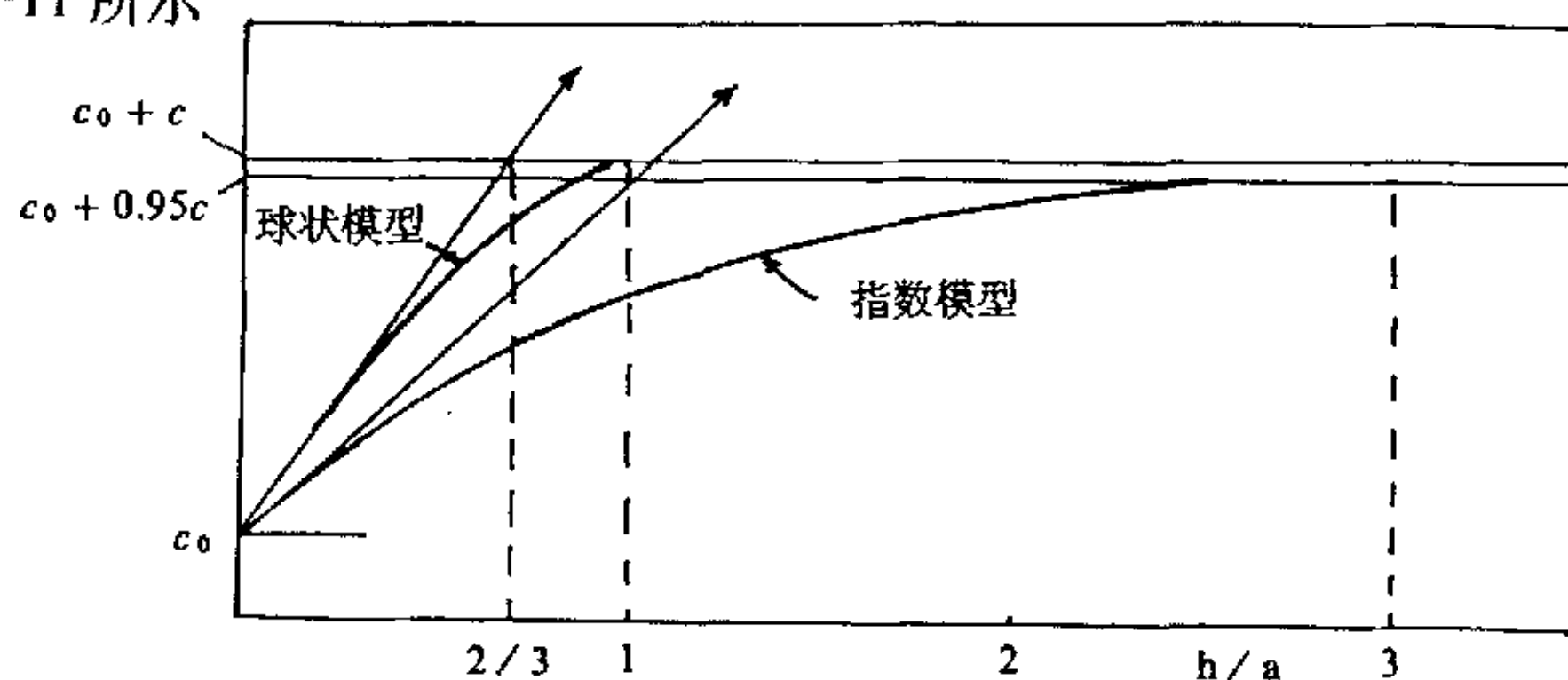


图 3-11 土性变异函数的模型

球状模型与指数模型的区别在于它们在初始段的切线与 $\gamma(\infty)$ 相交的距离 (横坐标) 不同: 对于球状模型, $h = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}\delta$, 对于指数模型 $h = a = \frac{1}{3}\delta$, 因此, 即可据此选择合适的模型来模拟实验变异函数曲线, 当实验变异函数曲线初始段的切线与 $\gamma(\infty)$ 相交的距离约为相关距离的 $1/3$ 时, 可用指数模型拟合。当相交距离约为相关距离的 $2/3$ 时, 可用球状模型拟合。若相交距离约为相关距离的 $1/2$ 时, 则既可用指数模型拟合, 也可用球状模型拟合。图 3-12 是用指数模型对图 3-5 中实验变异函数拟合的理论曲线, 图 3-13 是用球状模型对图 3-5 中实验变异函数拟合的理论曲线, 可以看出两者的拟合结果都是良好的。

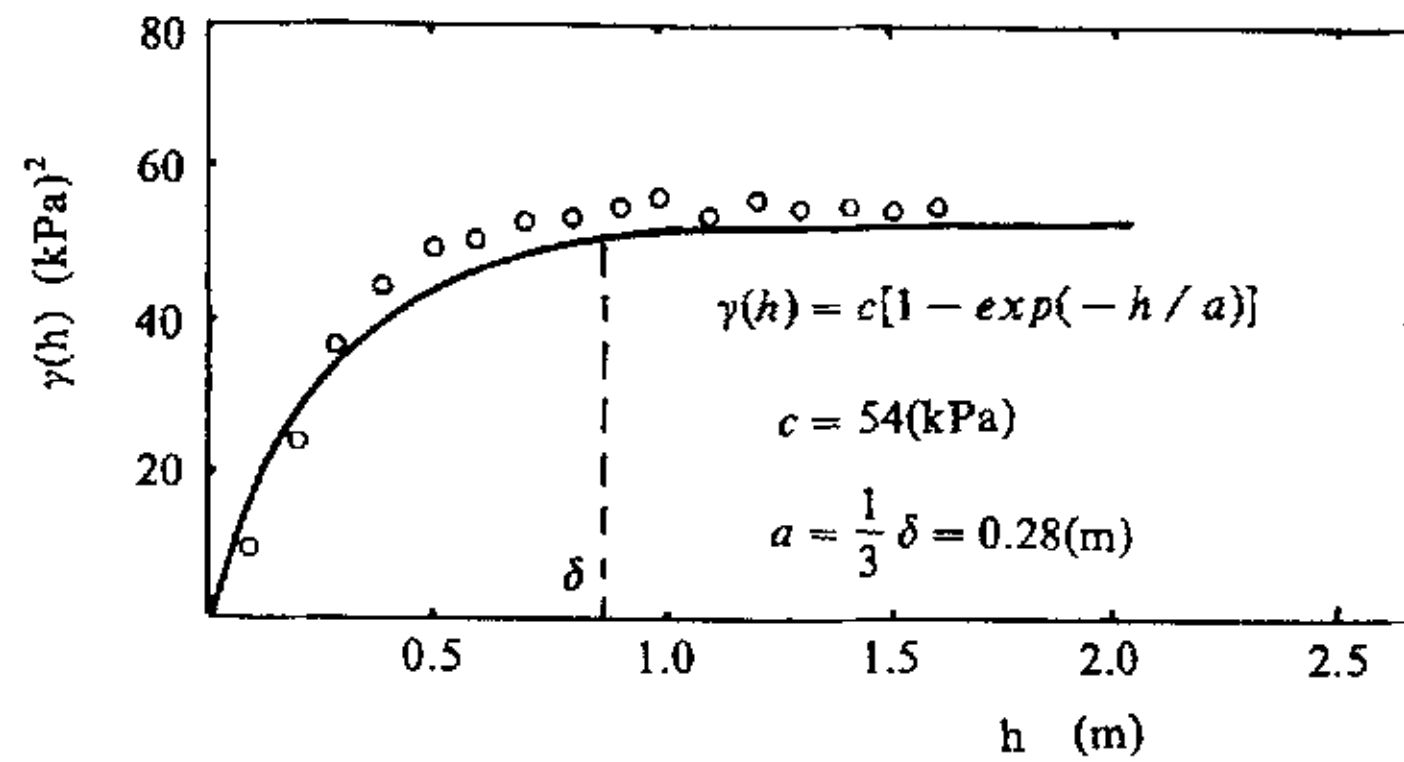


图 3-12 用指数模型拟合的结果

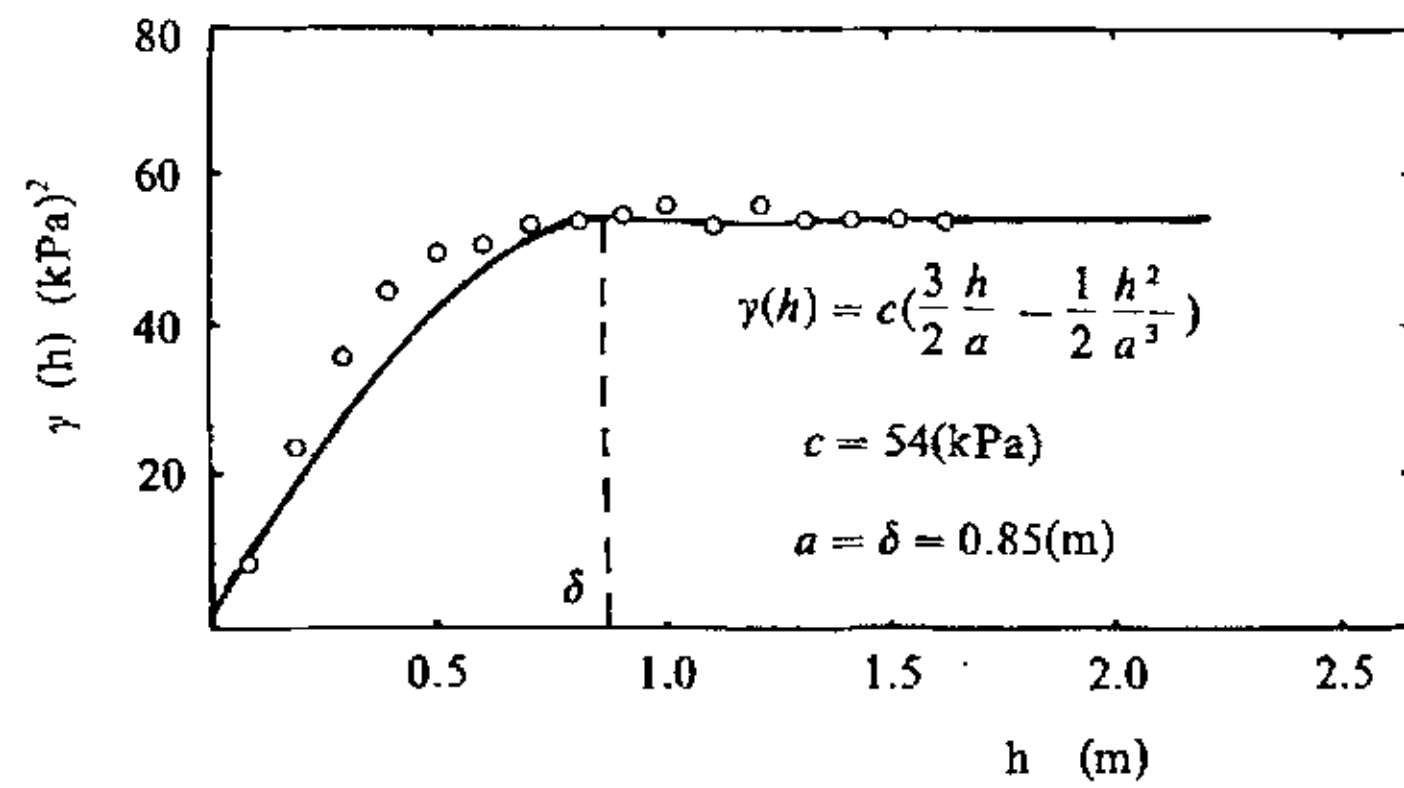


图 3-13 用球状模型拟合的结果

3.4 变异函数平均值的计算

主要的随机场统计运算(估计方差、离差方差, 估离方差)要用到变异函数 $\gamma(\mathbf{h})$ 的平均值 $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma}(v, v') = \frac{1}{v v'} \int_{v} dx \int_{v'} \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dx' \quad (3-6)$$

其中 $\bar{\gamma}(v, v')$ 表示当向量 \mathbf{h} 的一端扫过域 v 而其另一端独立地扫过域 v' 时变异函数 $\gamma(\mathbf{h})$ 的平均值。若域 v 是二维的(如层厚随机场), 则记号 $\int_{v} dx$ 代表二重积分 $\iint_{v} dx_1 dx_2$, 其中 (x_1, x_2) 是点 \mathbf{x} 的坐标。因此, 在二维空间内, 两个面积 v 和 v' 之间的平均值 $\bar{\gamma}(v, v')$ 就涉及四重积分。显然我们希望避免对这些多重积分进行直接的分析计算。

本文按照蒙特卡罗模拟法设计了一种计算变异函数平均值的方法。

3.4.1 点与线之间的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(x_0, L)$

计算点与线之间变异函数的一般数值积分方法是把线看成是由大量的小区间组成的, 如图 3-14 所示。

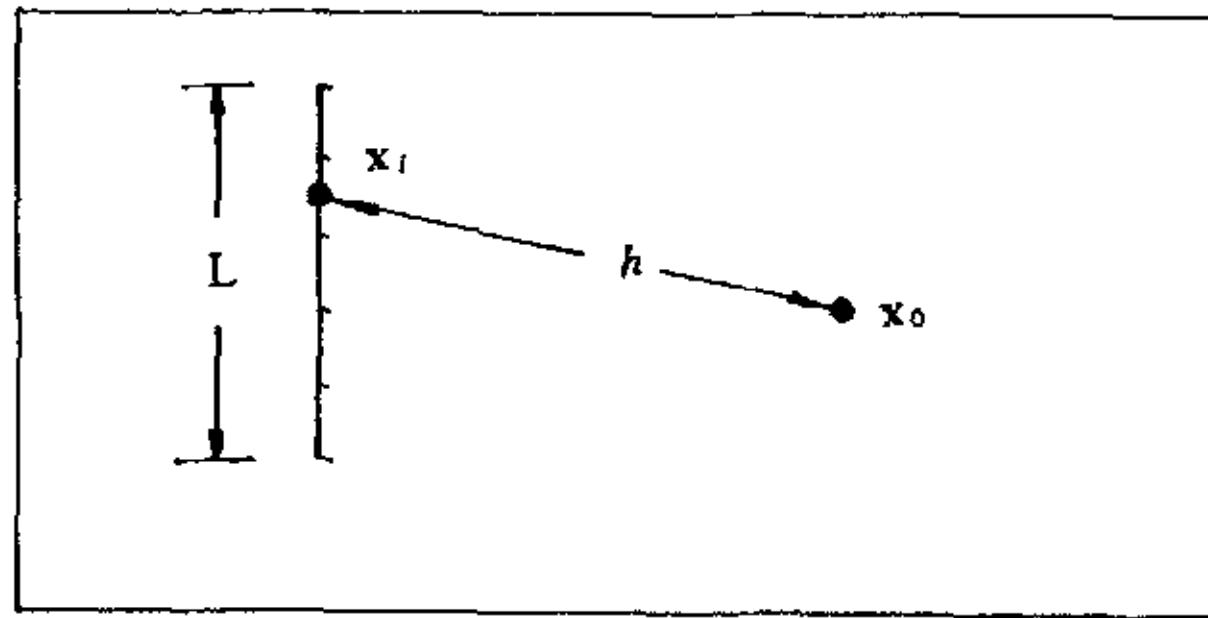


图 3-14 点与线之间的数值积分

图中点 x_0 与每个小区间之间的变异函数值是用点与小区间中心之间的变异函数近似求出的。在蒙特卡罗模拟过程中, 产生一个 0-1 随机数, 当乘以线段的长度 L 时, 它便代表线段中一个点的位置, 如图 3-14 中的 x_i 。该点与已知点 x_0 之间的变异函数值通过理论变异函数模型求得。多次重复这一步骤, 可以想象, 随着模拟次数的增加, 线段 L 将被所产生的点均匀地覆盖, 所有变异函数的平均值近似等于点与线段之间的实际变异函数平均值。

3.4.2 线段之间的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(L, L')$

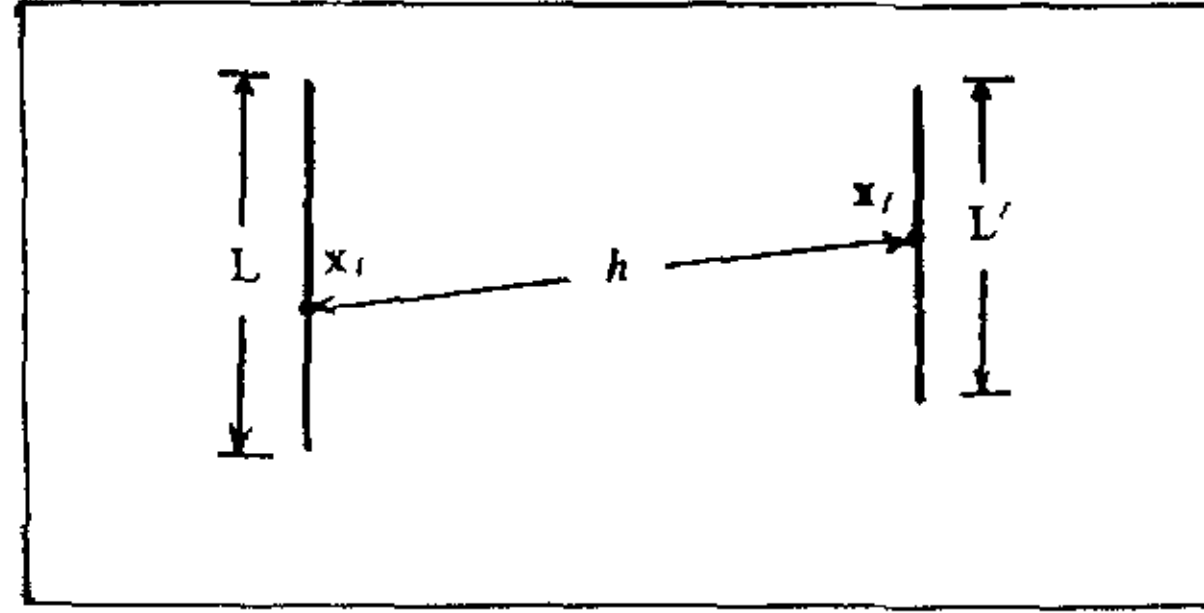


图 3-15 线段之间的变异函数平均值

计算两个线段之间的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(L, L')$ 时，同时产生两个 0-1 随机数，分别乘以线段L的长度和线段L'的长度，产生两个随机点，如图 3-15 中的 x_i 和 x_j ，然后计算这两点之间的变异函数值。多次重复这一步骤，则所有这些变异函数值的平均值就近似等于两个线段之间的实际变异函数平均值。当两个线段L与L'重合为一个线段的特殊情况，其结果则为线段自身的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(L, L)$ 。

3.4.3 点与面之间的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(x_0, v)$

计算点与一个面之间变异函数平均值 $\bar{\gamma}(x_0, v)$ 时，产生一组 2 个 0-1 随机数，分别乘以方形面积的长与宽，以确定面积内的一个随机点 x_i ，如图 3-16 所示。该点与已知点 x_0 之间的变异函数值通过理论变异函数模型求得。多次重复这一步骤，则所有变异函数的平均值近似等于点与面之间的实际变异函数平均值 $\bar{\gamma}(x_0, v)$ 。

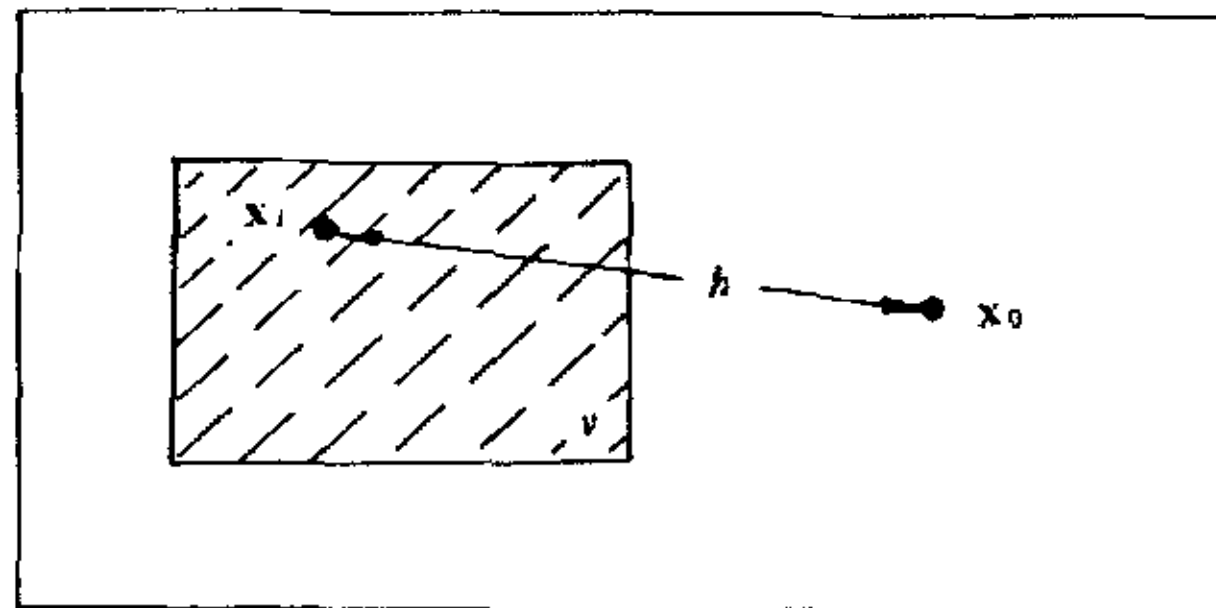


图 3-16 点与面之间的变异函数平均值

3.4.4 面与面之间的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(v, v')$

计算两个面积之间的变异函数平均值时，每次应同时产生两组(每组 2 个)0-1 随机数，分别乘以两个面积的长与宽，即可得到两个随机点，并计算这两点之间的变异函数值，如图 3-17 所示。多次重复这一步骤，则所有变异函数值的平均值即近似等于两个面积之间的实际变异函数平均值 $\bar{\gamma}(v, v')$ 。当两个面积 v 与 v' 重合为一个面积的特殊情况，其结果则为面积自身的变异函数平均值 $\bar{\gamma}(v, v)$ 。

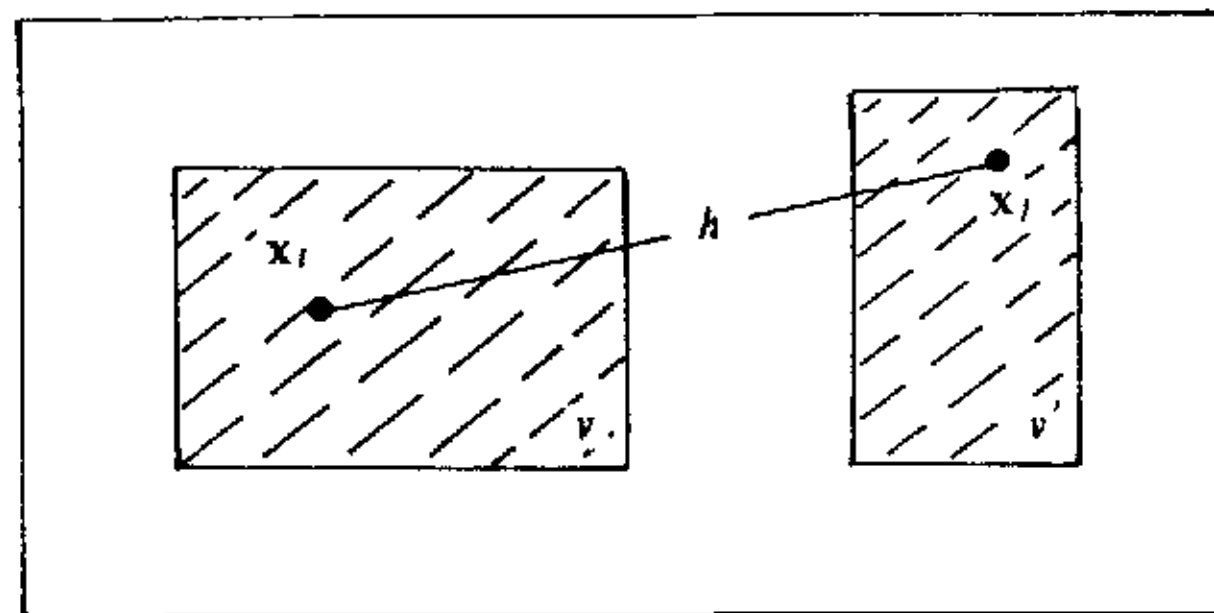


图 3-17 面与面之间的变异函数平均值

3.4.5 模拟的次数

在上述模拟方法中，重要的是决定重复进行的次数。为了达到模拟的目的，每增加 N 次(由经验确定)模拟，就要计算一次平均变异函数，当变异函数稳定在某一范围(按实际要求的精度，例如 5%)内时，模拟可终止。这一过程已编成计算机程序。

4 基本变量的概率分析

依据计算模型预测桩基承载力时，有三种类型的基本随机变量。第一种为土性随机变量，如土层厚度，土的性质指标等；第二种为描述几何不确定性的随机变量；第三种为描述计算模型不确定性的随机变量。因此，在对桩基承载力进行概率分析之前，必须首先对这三种基本随机变量进行概率分析。

4.1 土性变量的概率分析

4.1.1 桩侧土层厚度 L_i 的概率分析

一般情况下，桩侧是由不同性质的多层地基组成的，如图 4-1 所示。每一土层的厚度可以用一个内蕴平稳的随机场 $L(x)$ 来模拟。

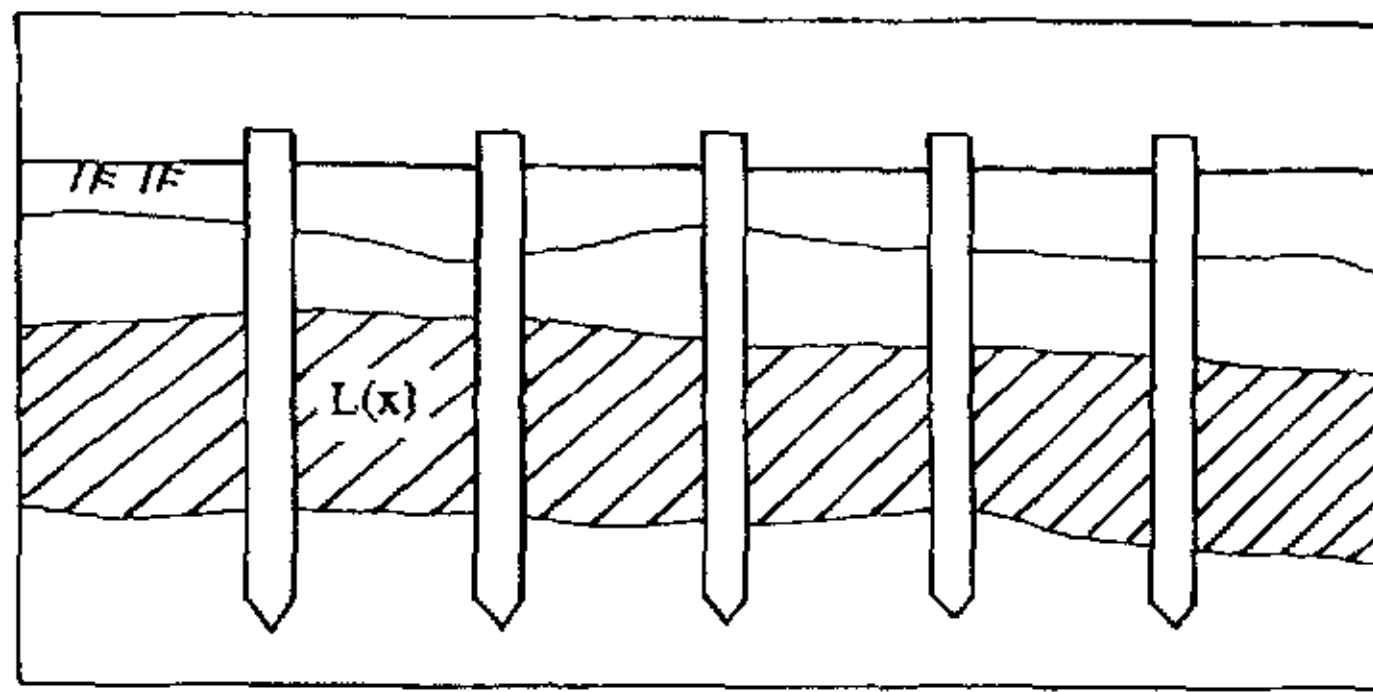


图 4-1 桩基土层剖面示意图

为分析方便起见，假定单桩的横截面为方形，横截面积为 v ，又假定研究的平面区域(如某一工程场地)为 V ，它恰被划分为 N 个同等大小的单桩横截面积 v ，如图 4-2(a)所示，即

$$V = \sum_{i=1}^N v_i = Nv \quad (4-1)$$

令 $l(y)$ 为平面上点 y 处的层厚值，则中心位于点 x_i 的每一单桩面积 $v(x_i)$ 内的平均层厚为：

$$l_v(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{v} \int_{v(\mathbf{x}_i)} l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4-2)$$

类似地，中心位于点 \mathbf{x}_o 的场地 V 内的平均层厚是：

$$l_v(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{V} \int_{V(\mathbf{x}_o)} l(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_v(\mathbf{x}_i) \quad (4-3)$$

与位于场地 V 内的单桩 $v(\mathbf{x}_i)$ 的 N 个位置 \mathbf{x}_i 对应着 N 个离差 $(l_v(\mathbf{x}_o) - l_v(\mathbf{x}_i))$ 。 N 个层厚值 $l_v(\mathbf{x}_i)$ 对于它们的平均值 $l_v(\mathbf{x}_o)$ 的离差可用均方差来表征：

$$s^2(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_v(\mathbf{x}_o) - l_v(\mathbf{x}_i))^2 \quad (4-4)$$

离差也可用 N 个层厚值 $l_v(\mathbf{x}_i)$ 的直方图，即用层厚值的出现频率来表示，如图 4-2(b)。但在预估阶段，由于 $l_v(\mathbf{x}_i)$ 未知，因此是得不到这个直方图的。但如

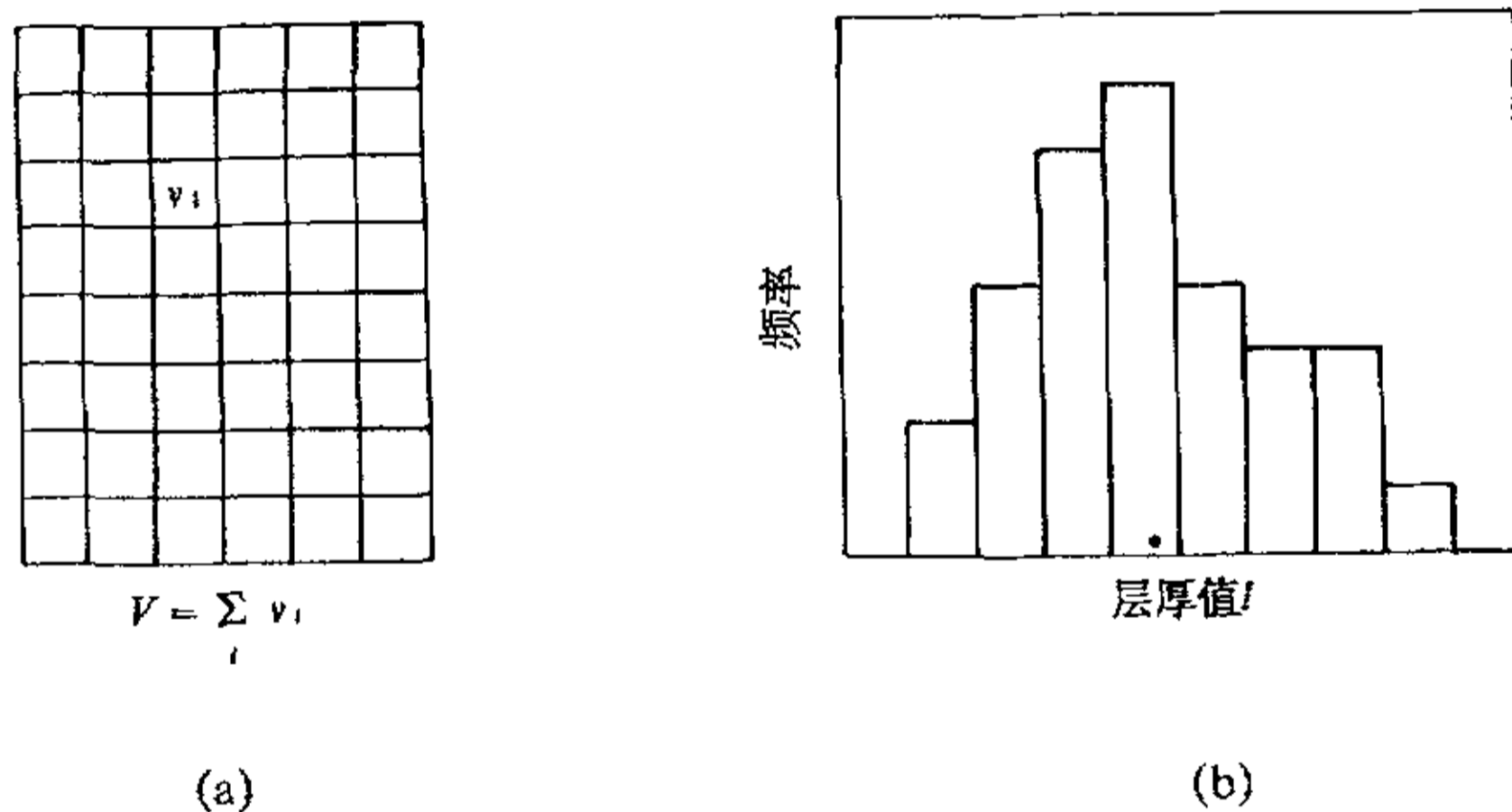


图 4-2 层厚的离差表示

已得到层厚随机场的变异函数 $\gamma_L(\mathbf{h})$ ，则均方离差可由离差方差来表征(见第 2 章式(2-33))：

$$D^2(v/V) = \bar{\gamma}_L(V, V) - \bar{\gamma}_L(v, v) \quad (4-5)$$

因此，用均值 $l_v(\mathbf{x}_o)$ 和离差方差 $D^2(v/V)$ 就描述了桩侧层厚的概率分布。然而现实情况是，平均值 $l_v(\mathbf{x}_o)$ 是由有限个(例如 n 个)观测孔的观测值来估计的，即

$$l_{\hat{v}_n}(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(y_i) \quad (4-6)$$

则 $l_{\hat{v}_n}(\mathbf{x}_o)$ 与 $l_v(\mathbf{x}_o)$ 有所不同, 这里包含一个估计离差 ($l_{\hat{v}_n}(\mathbf{x}_o) - l_v(\mathbf{x}_o)$), 可用估计方差来表征(见第 2 章式(2-25)):

$$\sigma_E^2 = 2\bar{\gamma}_L(V, (n)) - \bar{\gamma}_L(V, V) - \bar{\gamma}_L((n), (n)) \quad (4-7)$$

因此, 用 $l_{\hat{v}_n}(\mathbf{x}_o)$ 去描述单桩层厚的均值时, 必须考虑这两种离差。第 2 章已引入估计方差的概念, 且推得其计算式为:

$$D_E^2(v/V_n) = 2\bar{\gamma}_L(V, (n)) - \bar{\gamma}_L(v, v) - \bar{\gamma}_L((n), (n)) \quad (4-8)$$

当单桩面积 v 相对于场地 V 来说为甚小, 即 $v \ll V$ 时, 则可将 v 看作为一个点, 此时, $\bar{\gamma}(v, v) = 0$, 即:

$$D_E^2(o/V_n) = 2\bar{\gamma}_L(V, (n)) - \bar{\gamma}_L((n), (n)) \quad (4-9)$$

因而, $l_{\hat{v}_n}(\mathbf{x}_o)$ 和 $D_E^2(o/V_n)$ 就描述了桩侧某一层厚 L 的概率分布。

这里分析一下估计方差 $D_E^2(o/V_n)$ 与勘察网度的关系。设观测孔按方格网状布设, 如图 4-3 所示, 则当 n 增加时, $D_E^2(o/V_n)$ 将逐渐减小, 最后趋向于

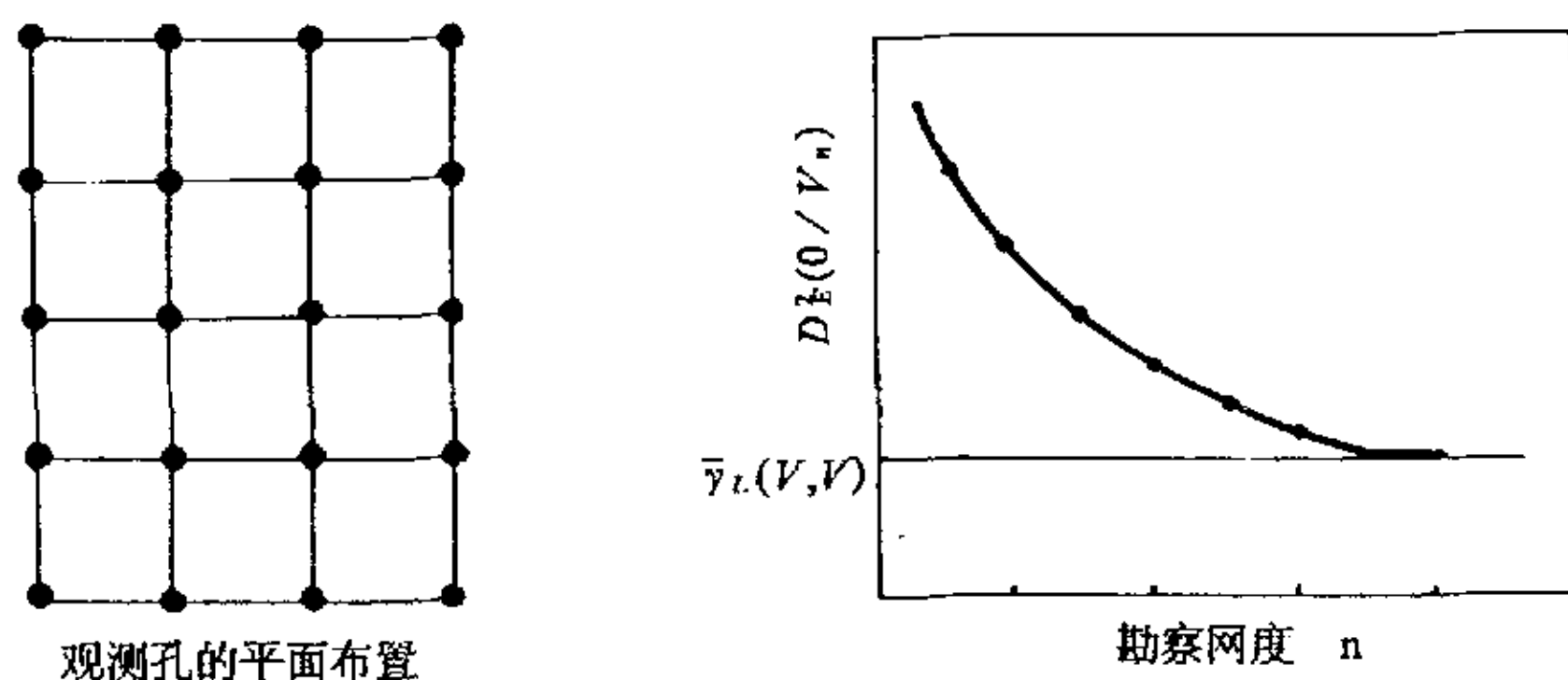


图 4-3 估计方差与观测孔数量的关系

一个稳定的值 $\bar{\gamma}_L(V, V)$ 。这说明, 观测孔增加时, 可以使估计方差减小, 也就是勘察工作量增加时, 我们对层厚的估计就越准确。

4.1.2 土性指标的概率分析

4.1.2.1 单孔土性指标的分析

(1) 土性指标的随机场模型

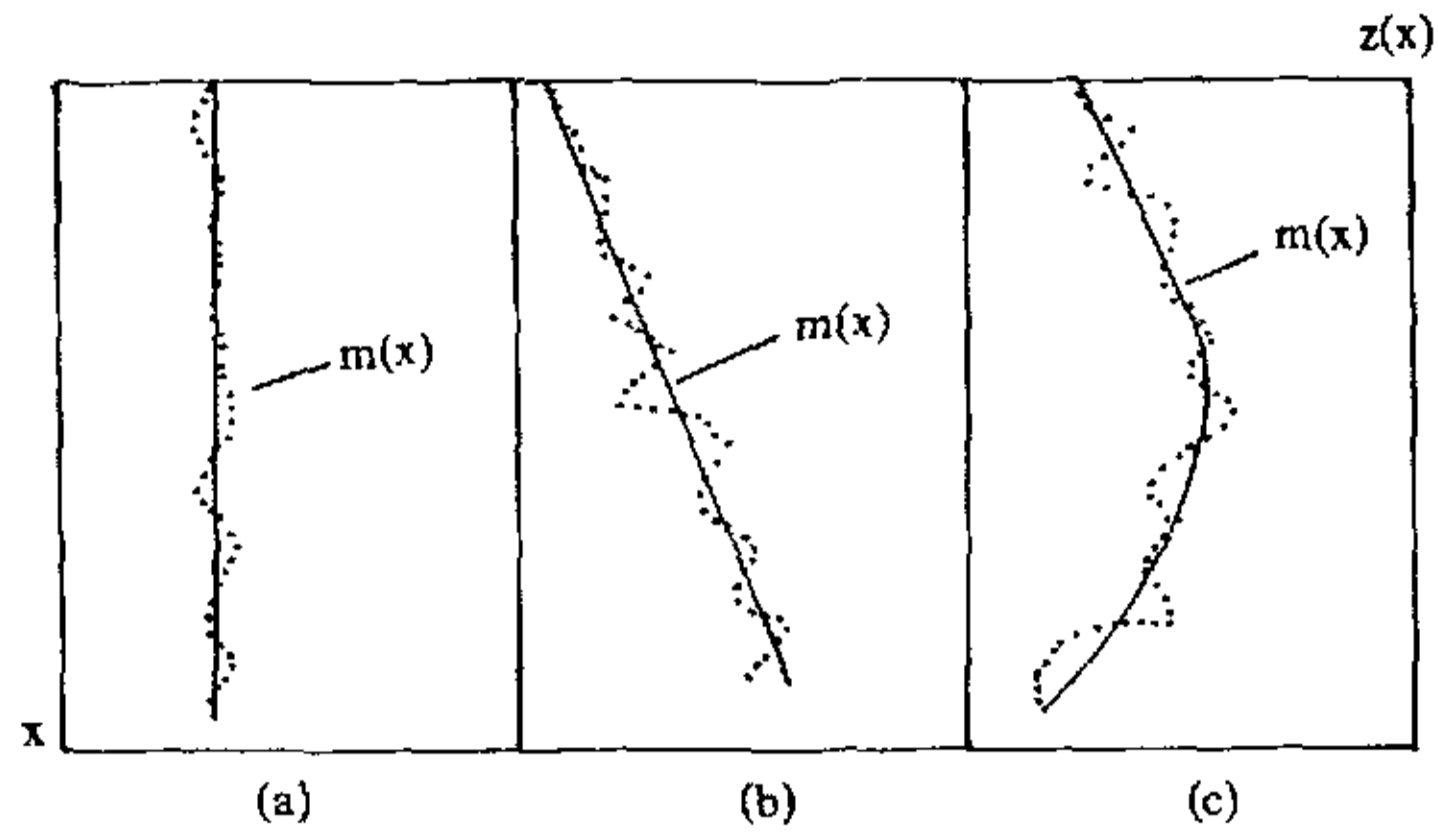


图 4-4 土性指标沿深度的变化

由单孔观测到的某一土层沿深度方向的土性指标如图 4-4 所示，它可以表示为下述一维随机场的实现：

$$Z(x) = m(x) + R(x) \quad (4-10)$$

式中 $Z(x)$ 为土性指标观测值， $m(x)$ 为均值函数，即：

$$E[Z(x)] = m(x) \quad (4-11)$$

$R(x)$ 称为剩余，可用均值为零的一维内蕴平稳随机场来模拟，即

$$E[R(x)] = 0 \quad (4-12)$$

$$\gamma_R(h) = \frac{1}{2} E[(R(x+h) - R(x))^2] \quad (4-13)$$

这里 $\gamma_R(h)$ 代表剩余的变异函数，设随机场 $Z(x)$ 的变异函数为 $\gamma_z(x_1, x_2)$ ，因为

$$\begin{aligned} 2\gamma_z(x_1, x_2) &= \text{Var}[Z(x_1) - Z(x_2)] \\ &= E[(Z(x_1) - Z(x_2))^2] - (m(x_1) - m(x_2))^2 \\ &= \text{Var}[R(x_1) - R(x_2)] \\ &= E[(R(x_1) - R(x_2))^2] \end{aligned}$$

所以 $\gamma_z(x_1, x_2) = \gamma_R(x_1, x_2)$

又因 γ_R 为平稳的，所以 γ_z 也应是平稳的，即：

$$\gamma_z(h) = \gamma_R(h) \quad (4-14)$$

式(4-14)表明, 随机场 $Z(x)$ 的变异函数与剩余 $R(x)$ 的变异函数相等。但要得到 $\gamma_R(h)$, 首先必须求得均值函数 $m(x)$ 。

均值函数 $m(x)$ 表征随机场 $Z(x)$ 的规则而连续的变化趋势, 根据土层性质的不同, $m(x)$ 可由下述三种函数形式来表征(图 4-4 中(a), (b), (c))。

$$\text{常数: } m(x) = a_0 \quad (4-15)$$

$$\text{线性: } m(x) = a_0 + a_1x \quad (4-16)$$

$$\text{二次: } m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4-17)$$

一般可通过趋势线分析法(最小二乘法)来拟合得出 $m^*(x)$, 从而得到每个数据点上的估计剩余值:

$$R^*(x_i) = Z(x_i) - m^*(x) \quad (4-18)$$

由此即可计算 $\gamma_R^*(h)$ (见第 3 章)。

(2) 单孔土性指标平均值的估计

假定从一个观测孔中获得了某土层厚度 l_v 范围内的 n 个土性指标 $Z(x)$ 观测值 $z(x_i)(i = 1, \dots, n)$, 如图 4-5(a)。

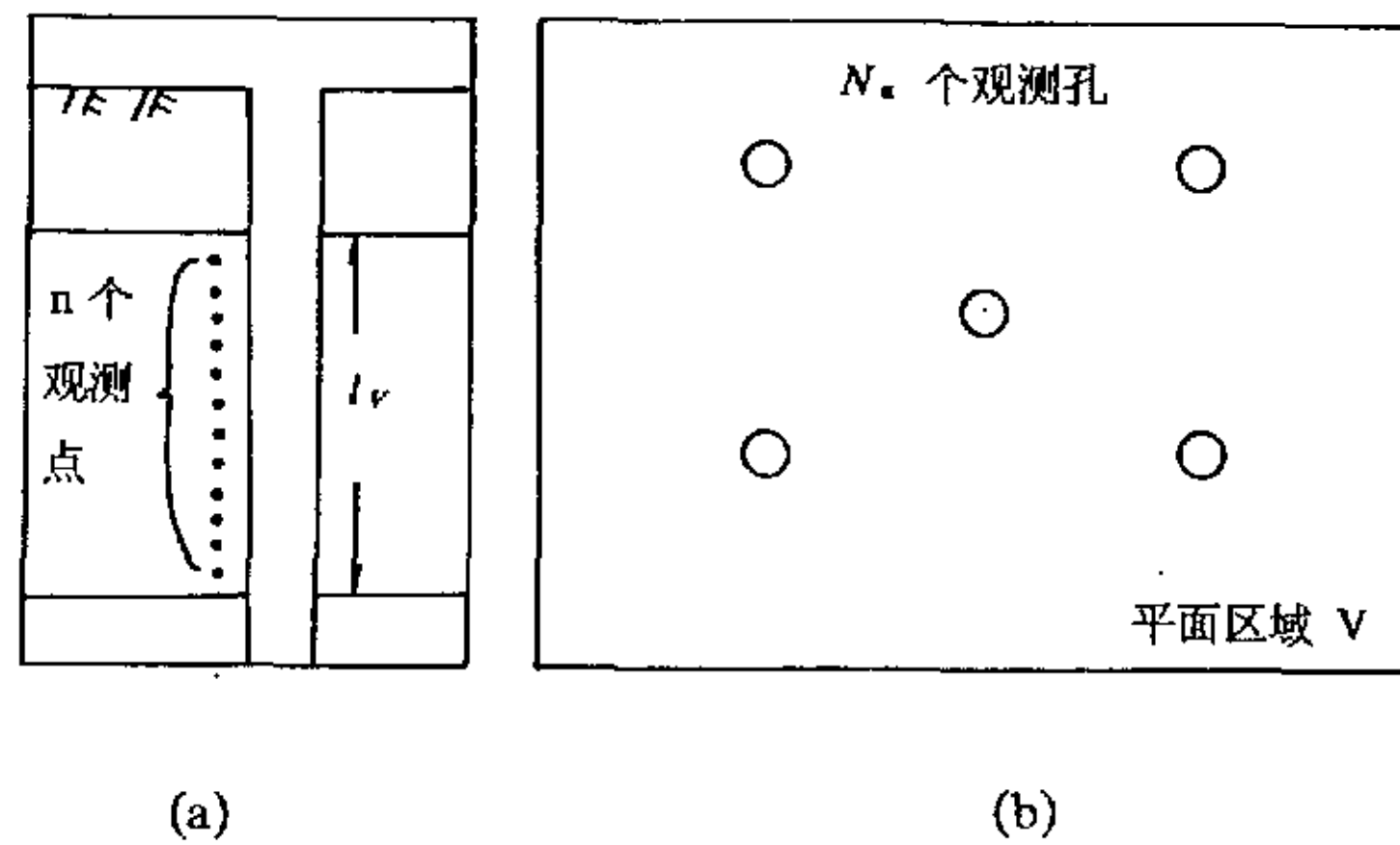


图 4-5 土性指标的估计

则土性指标在 l_v 内的平均值应为:

$$Z_{lv} = \frac{1}{l_v} \int_{lv} Z(x) dx \quad (4-19)$$

这个值是由深度方向 n 个取样点的算术平均值来估计的, 即

$$z_{in}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z(x_i) \quad (4-20)$$

此时估离方差可以表达为

$$D_z^2(l_v / l_n) = 2\bar{\gamma}_z(l_v, (n)) - \bar{\gamma}_z(l_v, l_v) - \bar{\gamma}_z((n), (n)) \quad (4-21)$$

它就等于用 n 个观测值去估计 l_v 范围内平均值的估计方差 $\sigma_z^2(l_v, (n))$ 。

当 $n \rightarrow \infty$, 即观测点充满整个 l_v 空间时(例如连续观测), 则有

$$\begin{aligned} D_z^2(l_v / l_n) &= 2\bar{\gamma}_z(l_v, l_v) - \bar{\gamma}_z(l_v, l_v) - \bar{\gamma}_z(l_v, l_v) \\ &= 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时} \end{aligned} \quad (4-22)$$

因此, 对于连续观测的静力触探曲线, 对单孔土性指标平均值的估计可看成是确定的值。

4.1.2.2 桩侧土性指标的估计

对于桩基来说, 我们所关心的是土性平均值在水平方向上的变异。如果单孔土性指标平均值已确知(例如连续观测), 则可通过与层厚概率分析完全相同的方法去计算桩侧土性指标平均值的概率分布, 但实践上, 往往由于资料不足而很难得到土性指标平均值的水平向变异函数。能否直接通过垂向(沿深度方向)变异函数计算桩侧土性指标的概率分布呢? 下文对此进行了探讨。

设平面域 V 内有 N_n 个观测孔(图 4-5(b)), 每个观测孔中对于某土层有 n 个等间距的观测点。则这 $N_n \times n$ 个观测值的总平均值为

$$z_{nN_n}^* = \frac{1}{nN_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^n z_i(x_j) \quad (4-23)$$

用这个平均值去估计单桩桩侧层厚 l 范围内的土性指标平均值时, 其估离方差为:

$$D_z^2(l / nN_n) = 2\bar{\gamma}(V, (nN_n)) - \bar{\gamma}(l, l) - \bar{\gamma}((nN_n), (nN_n)) \quad (4-24)$$

我们可以把 N_n 个观测孔看成为同一个一维随机场 $Z(x)$ 的不同的实现, 则(4-24)式可写为:

$$D_z^2(l / nN_n) = 2\bar{\gamma}_z(V, (nN_n)) - \bar{\gamma}_z(l, l) - \bar{\gamma}_z((nN_n), (nN_n)) \quad (4-25)$$

又因平面上观测孔之间距离一般远远大于土性指标垂向变异函数的相关距离, 则可认为孔与孔之间观测点的变异函数值恒为 $\bar{\gamma}_z(\infty) = C(0)$, 则有:

$$\bar{\gamma}_z((nN_s), (nN_s)) = \frac{1}{N_s} \bar{\gamma}_z((n), (n)) + \frac{N_s - 1}{N_s} \cdot C(o) \quad (4-26)$$

又当平面区域 V 相对于变异函数相关距离为甚大时, 即相当于 $V \rightarrow \infty$ 时, 则有:

$$\bar{\gamma}_z(V, (nN_s)) \approx \gamma_z(\infty) = C(o) \quad (4-27)$$

这样, 由式(4-25)可推得:

$$\begin{aligned} D_E^2(l/nN_s) &= 2C(o) - \bar{\gamma}_z(l, l) - \left[\frac{1}{N_s} \bar{\gamma}_z((n), (n)) + \frac{N_s - 1}{N_s} C(o) \right] \\ &= C(o) - \bar{\gamma}_z(l, l) + \frac{C(o) - \bar{\gamma}_z((n), (n))}{N_s} \end{aligned} \quad (4-28)$$

因此, 用(4-23)式和(4-28)式, 我们就可以获得桩侧土性指标平均值的概率分布。以下讨论一下式(4-28)的含义以及与其它研究成果的关系。

(1) 当 $N_s = 1$, 即只有一个观测孔时, 则据(4-28)式有:

$$\begin{aligned} D_E^2(l/n) &= C(o) - \bar{\gamma}_z(l, l) + C(o) - \bar{\gamma}_z((n), (n)) \quad (4-29) \\ &= 2\bar{\gamma}_z(\infty, (n)) - \bar{\gamma}_z(l, l) - \bar{\gamma}_z((n), (n)) \end{aligned}$$

这表明, $D_E^2(l/n)$ 代表用 n 个观测值去估计无限区域范围内 l 局部平均的估离方差。

式(4-29)也可以写成用协方差来表达:

$$D_E^2(l/n) = \bar{C}(l, l) + \bar{C}((n), (n)) \quad (4-30)$$

此式与 Li & Lumb (1987) 研究的成果一致。

(2) 当 $N_s \rightarrow \infty$ 时, 即观测孔大量增加时, 则据(4-28)式有:

$$\begin{aligned} D_E^2(l/nN_s) &\rightarrow C(o) - \bar{\gamma}_z(l, l) \\ &= \bar{C}(l, l) \end{aligned} \quad (4-31)$$

又据(2-39)和(2-40)式有

$$D_E^2(l/nN_s) = \text{Var}[Z_l] = \sigma^2 \Gamma(l) \quad (4-32)$$

此时估离方差就是 Vanmarcke (1977) 所谓的局部平均的方差概念。我们注意到, 对于桩基土性指标的估计来说, 只有当观测孔比较多的情况, 才可以直接应用局部平均方差来近似计算。

4.2 几何不确定性分析

桩的几何不确定性表现为实际成桩几何尺寸(如桩截面直径或边长)与设计尺寸的偏差。假定桩的设计尺寸为 d ，而实际成桩尺寸为 d_t ，则它们之间的关系可由下式表示：

$$d_t = \xi \cdot d \quad (4-33)$$

式中 ξ 为描述几何不确定性的随机变量因子， ξ 的概率分布可由均值 μ_ξ 和方差 σ_ξ^2 (或标准差 σ_ξ 和变异系数 V_ξ)来表征。

这两个统计参数 μ_ξ 和 σ_ξ^2 可通过大量的实测资料的统计分析而获得。表4-1中收集了68根设计直径均为800mm的钻孔灌注桩实测桩径，由表中数据可以算得 $\hat{\mu}_\xi = 1.10$ ， $\hat{\sigma}_\xi = 0.05$ ， $V_\xi = 0.046$ ，其概率分布如图4-6所示。

钻孔灌注桩实测桩径的统计
(设计直径 $d=800\text{mm}$)

表 4-1

实际桩径 (mm)	887	885	870	968	856	885	823	840	973	900
$\xi = d_t / d$	1.109	1.106	1.088	1.210	1.070	1.106	1.029	1.050	1.216	1.125
实际桩径 (mm)	835	816	880	928	815	827	806	834	857	912
$\xi = d_t / d$	1.044	1.020	1.100	1.160	1.019	1.034	1.008	1.043	1.071	1.140
实际桩径 (mm)	855	949	869	921	874	853	939	855	865	906
$\xi = d_t / d$	1.069	1.186	1.086	1.151	1.093	1.066	1.174	1.069	1.081	1.133
实际桩径 (mm)	849	956	858	862	916	874	864	923	862	897
$\xi = d_t / d$	1.061	1.195	1.073	1.078	1.145	1.093	1.080	1.154	1.078	1.121
实际桩径 (mm)	863	907	900	820	840	861	919	916	889	874
$\xi = d_t / d$	1.079	1.134	1.125	1.025	1.050	1.076	1.149	1.145	1.111	1.093
实际桩径 (mm)	907	936	862	856	865	898	902	859	851	959
$\xi = d_t / d$	1.134	1.170	1.078	1.070	1.081	1.123	1.128	1.074	1.064	1.199
实际桩径 (mm)	905	816	810	877	920	840	854	863		
$\xi = d_t / d$	1.131	1.020	1.013	1.096	1.150	1.050	1.068	1.079		

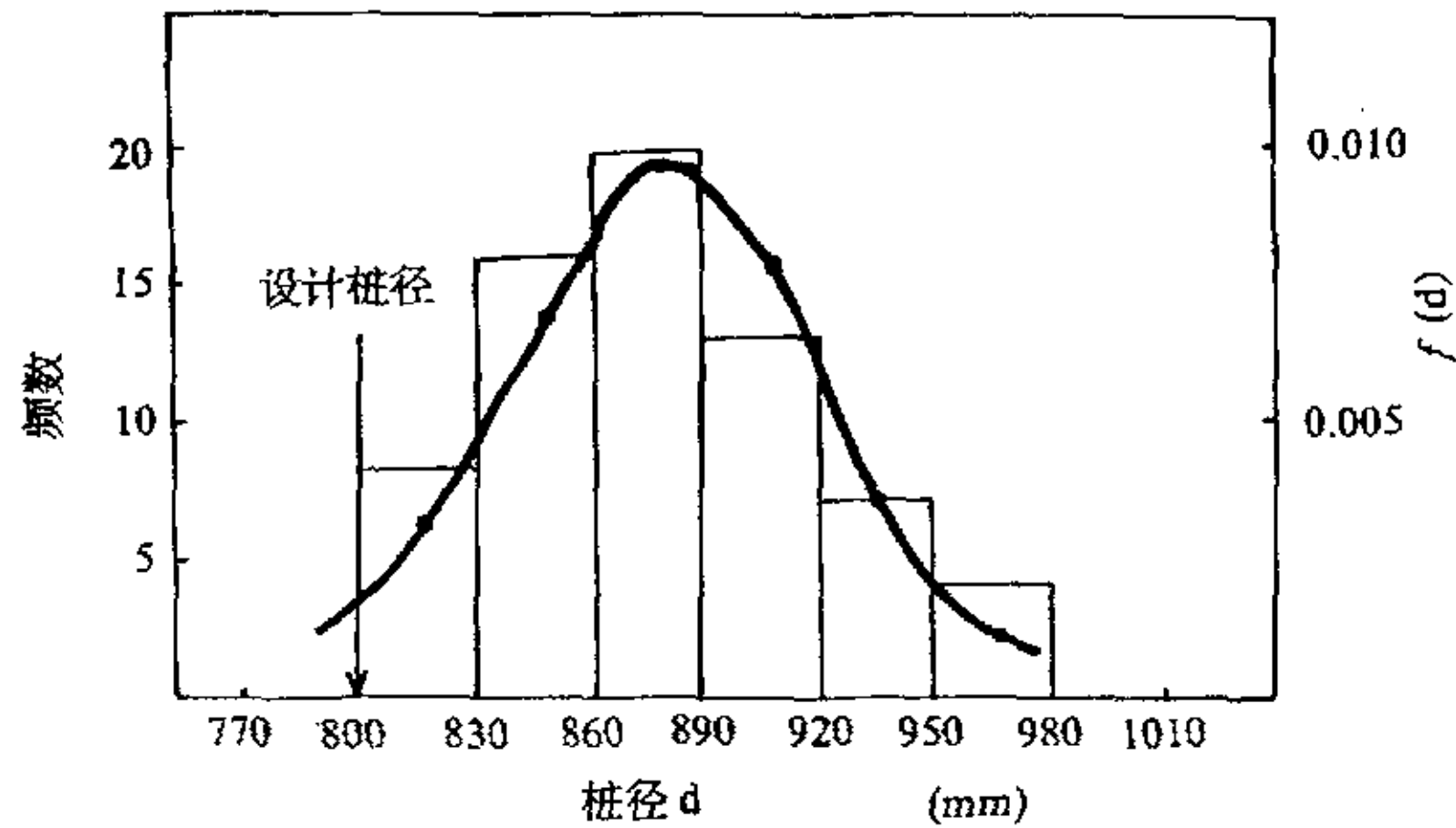


图 4-6 钻孔灌注桩实测桩径的概率分布

从统计结果可以看出，钻孔灌注桩桩径的变异是比较明显的，而且平均来讲实际桩径要比设计桩径大 10% 左右。

表 4-2 收集了设计截面边长为 400mm 的混凝土预制桩实测截面边长，从表中数据可以算得 $\hat{\mu}_\xi = 1.0$ ， $\hat{\sigma}_\xi = 0.003$ ， $V_\xi = 0.003$ ，其概率分布如图 4-7 所示。

预制桩实测截面边长的统计
(设计边长 $d=400\text{mm}$)

表 4-2

实际边长 (mm)	401	401	399	399	403	404	401	398	397	400
$\xi = d_i / d$	1.0025	1.0025	0.9975	0.9975	1.0075	1.010	1.0025	0.9950	0.9925	1.0000
实际边长 (mm)	402	399	399	399	401	398	401	401	398	399
$\xi = d_i / d$	1.005	0.9975	0.9975	0.9975	1.0025	0.9950	1.0025	1.0025	0.9950	0.9975
实际边长 (mm)	399	402	401	400	400	401	402	399	399	399
$\xi = d_i / d$	0.9975	1.0050	1.0025	1.0000	1.0000	1.0025	1.0050	0.9975	0.9975	0.9975
实际边长 (mm)	400	399	399	401	399	403	399	399	401	400
$\xi = d_i / d$	1.0000	0.9975	0.9975	1.0025	0.9975	1.0075	0.9975	0.9975	1.0025	1.0000
实际边长 (mm)	399	402	399	401	395	399	400	404	398	398
$\xi = d_i / d$	0.9975	1.0050	0.9975	1.0025	0.9875	0.9975	1.0000	1.0100	0.9950	0.9950

续表 4-2

实际边长 (mm)	397	398	399	401	399	403	400	402	400	399
$\xi = d_i / d$	0.9925	0.9950	0.9975	1.0025	0.9975	1.0075	1.0000	1.0050	1.0000	0.9975
实际边长 (mm)	402	399	399	401	400	400	400	403	399	400
$\xi = d_i / d$	1.0050	0.9975	0.9975	1.0025	1.0000	1.0000	1.0000	1.0075	0.9975	1.0000
实际边长 (mm)	398	399	404	401	398	398	400	402	399	397
$\xi = d_i / d$	0.9950	0.9975	1.0100	1.0025	0.9950	0.9950	1.0000	1.0050	0.9975	0.9925

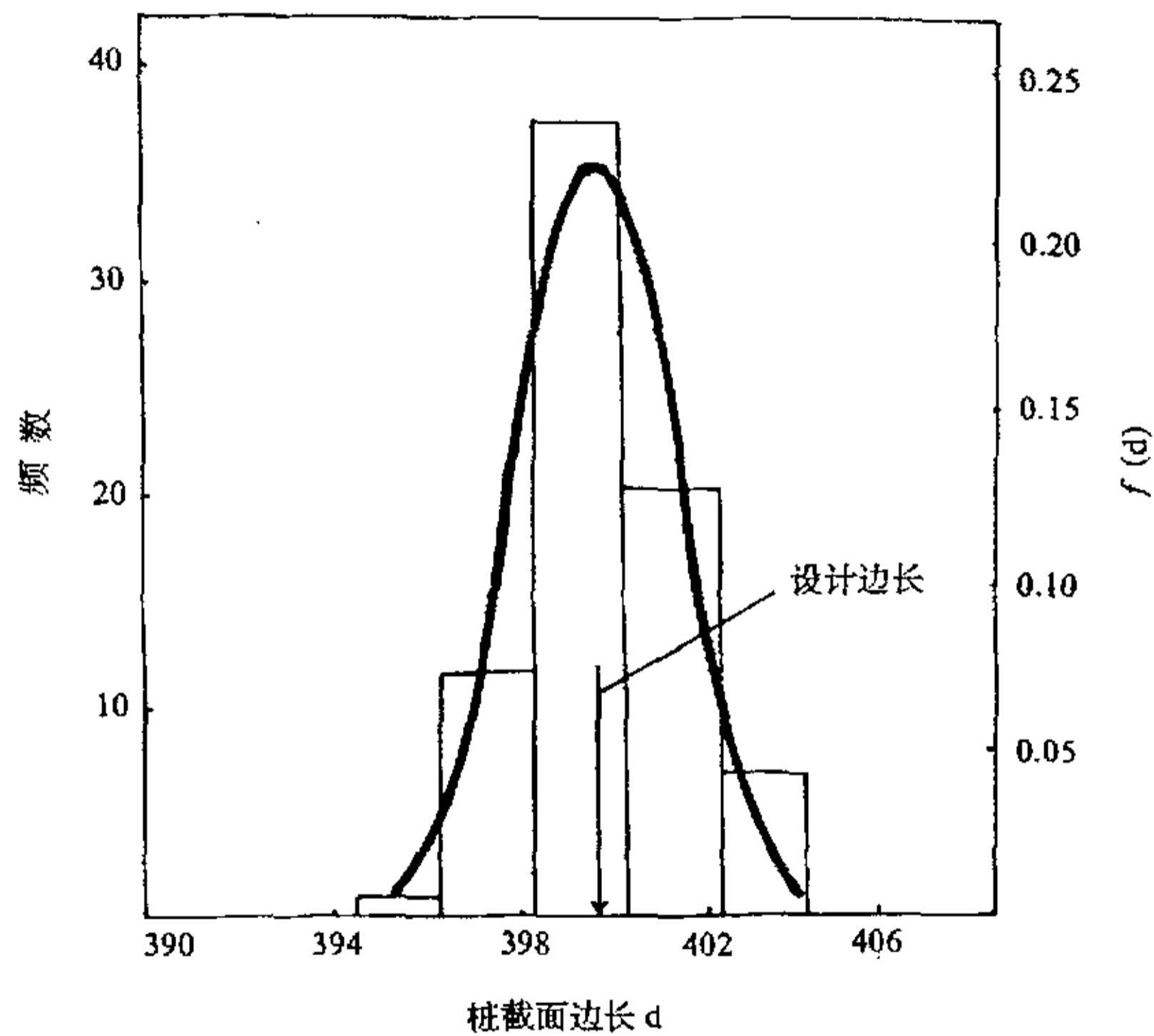


图 4-7 预制桩实测截面边长的分布

从以上统计分析可知，预制桩几何尺寸的变异性比钻孔灌注桩要小得多，因此桩基几何尺寸的不确定性主要是针对灌注桩而言。应当指出，灌注桩的直径是沿桩身变化的，严格来讲应当用第 2 章所述的随机场来模拟，但目前所积累的资料尚不足以对此进行深入的研究。

4.3 计算模型不确定性分析

设桩的真实承载力为 Q_u ，通过某种计算模型依据各种已知参数计算而得到的估算承载力为 Q_{uk} ，则它们之间的关系可写成：

$$Q_u = \eta \cdot Q_{uk} \quad (4-34)$$

这里 η 为描述模型不确定性的随机变量因子，假定 η 服从均值为 μ_η 、标准差为 σ_η 的概率分布，则如果计算模型在预估单桩承载力时给出无偏的估计时，其均值 μ_η 应当为1.0。标准差 σ_η 描述了计算模型的变异性，其值越小，表示计算模型的精度越高。

η 的概率分布可通过大量的实测资料统计得到。假设通过现场原型试验(桩基载荷试验)获得了 n 个桩基的承载力值 $y_k(k=1, \dots, n)$ ，同时对这 n 个桩基按照某一计算模型计算得到 n 个预测值 $x_k(k=1, \dots, n)$ ，则

$$\eta_k = \frac{y_k}{x_k} \quad (k=1, \dots, n) \quad (4-35)$$

为 η 这个随机变量的 n 次实现，通过统计可获得 η 的概率分布。

这里要注意两个问题：

(1) 由现场原型试验获取的桩基承载力与桩基的真实承载力也是有区别的，它们之间的关系可表达为

$$Q_u = J \cdot Y_k \quad (4-36)$$

这里 J 为描述现场测试误差和取值不确定性的随机变量因子，由于桩的真实承载力始终未知，所以无法得出 J 的概率分布。不过通常情况下，桩基静载荷试验在现场可得到良好的控制，因而我们可以认为 J 的均值为1.0而标准差远小于 η 的标准差(Ronold & Bjerager, 1992)，从而忽略 Y_k 的测试不确定性，而认为

$$Q_u \approx Y_k \quad (4-37)$$

(2) 由现场原型试验获得测试值 Y_k 的一次实现 y_k 后，由某一计算模型可以同时计算得出这根桩的预估承载力 x_k ，这里要注意的是，计算模型中采用

的土性参数应当是这根桩所在位置测得的参数，以避免土性参数变异的影响，同时，桩基的几何尺寸亦应严格控制，以便忽略几何尺寸不确定性的影响。

Ronold & Bjerager (1992)统计了 11 根桩基的实测和计算资料，结果表明，美国 API 方法(American Petroleum Institute Method)计算桩基极限承载力的模型不确定性随机变量因子 η 的统计特征为 $\hat{\mu}_\eta = 0.801$ ， $\hat{\sigma}_\eta = 0.103$ ，说明这个计算模型给出的结果是有偏的。高大钊和李镜培(1990)研究了《上海地基规范》(DBJ08-11-89)中用单桥静力触探比贯入阻力 p_r 值计算桩基极限承载力的模型不确定性，结果表明，这个计算模型的统计特征为： $\hat{\mu}_\eta = 1.0$ ， $\hat{\sigma}_\eta = 0.15$ 。本文作者统计研究了《建筑桩基技术规范》(JGJ-94-94)中用双桥静力触探指标 q_c 和 f_s 估计桩基极限承载力的计算模型不确定性，该计算模型表达式为：

$$Q_{ult} = U \sum l_i \cdot \beta_i \cdot f_{si} + \alpha \cdot q_c \cdot A_p \quad (4-38)$$

式中

f_{si} ——第 i 层土的探头平均侧阻力；

q_c ——桩端平面上下探头阻力，按规范规定选取；

α ——桩端阻力修正系数，对粘性土、粉土取 2/3，

对饱和砂土取 1/2；

β_i ——第 i 层土桩侧阻力综合修正系数，按下式计算：

粘性土、粉土： $\beta_i = 10.04(f_{si})^{-0.55}$

砂土： $\beta_i = 5.05(f_{si})^{-0.45}$

U ——桩身横截面周长；

l_i ——桩侧第 i 层土的层厚；

A_p ——桩端横截面积。

实测资料全部选自西安及其附近地区，桩基类型为混凝土预制桩，成桩方式有动力打入和静力压入两种，资料统计见表 4-3。

计算模型不确定性分析

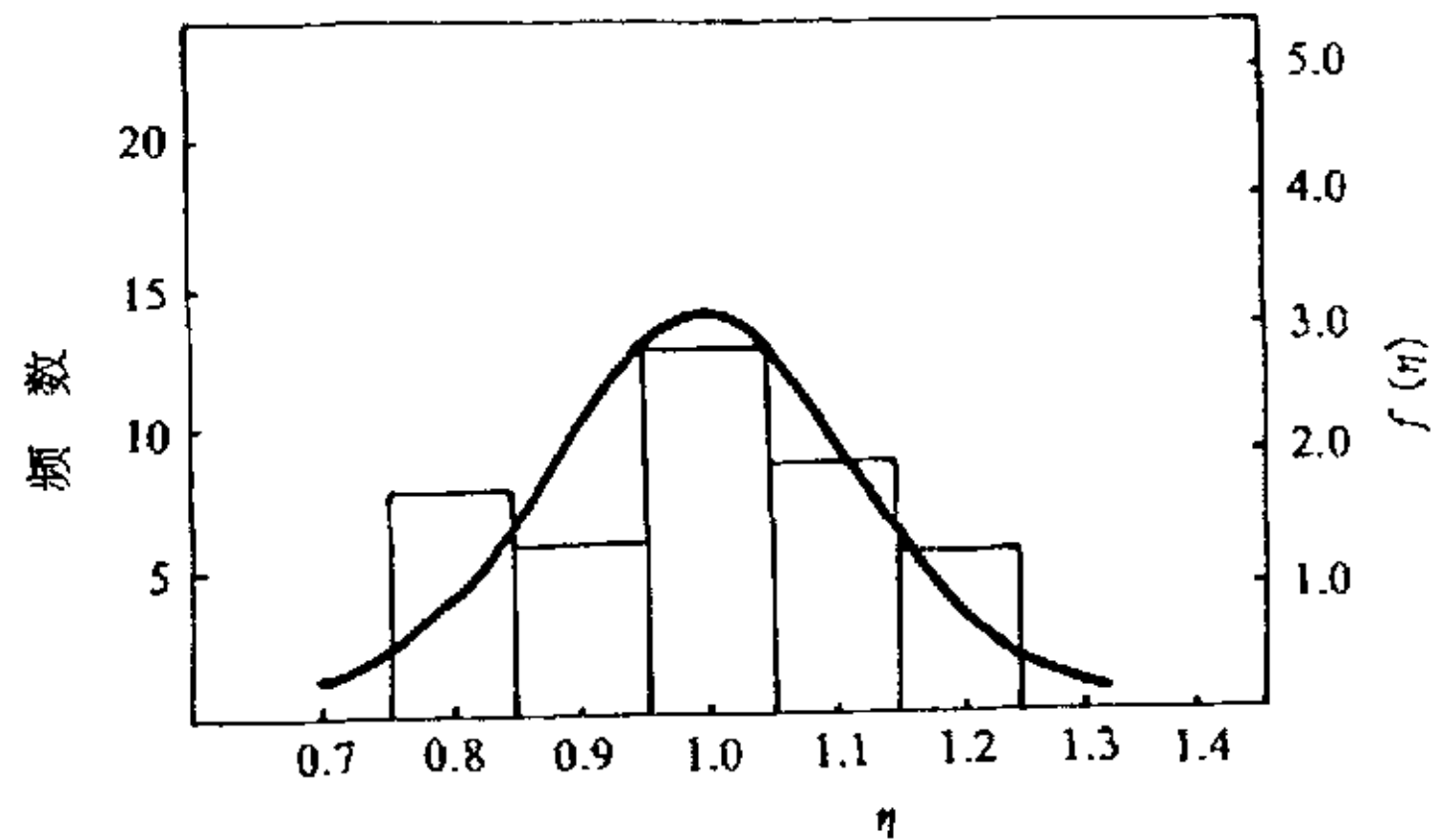
表 4-3

编号	试桩尺寸 (m)	试桩极限 承载力 y_k (kN)	计算模型估算 极限承载力 x_k (kN)	$\eta_k = \frac{y_k}{x_k}$
1	0.4×0.4×16.0	2600	2153	1.21
2	0.35×0.35×12.0	900	827	1.09
3	0.4×0.4×17.0	1200	1490	0.81
4	0.4×0.4×12.6	1050	1044	1.01
5	0.4×0.4×13.6	1150	1135	1.01
6	0.4×0.4×20.1	1800	1549	1.16
7	0.4×0.4×24.5	1800	1875	0.96
8	0.4×0.4×17.2	1560	1681	0.93
9	0.4×0.4×28.0	3250	2810	1.16
10	0.4×0.4×13.0	840	798	1.05
11	0.4×0.4×21.5	3000	3789	0.79
12	0.4×0.4×18.0	2500	2114	1.18
13	0.35×0.35×21.6	1900	1736	1.09
14	0.35×0.35×17.6	950	1196	0.79
15	0.35×0.35×13.5	800	913	0.88
16	0.35×0.35×17.4	1000	1207	0.83
17	0.4×0.4×10.3	2800	2355	1.19
18	0.35×0.35×12.7	1800	1983	0.91
19	0.35×0.35×11.2	1200	1189	1.01
20	0.4×0.4×29.0	3800	3939	0.97
21	0.35×0.35×7.0	650	640	1.02
22	0.35×0.35×7.0	700	650	1.08
23	0.35×0.35×11.0	650	740	0.88
24	0.35×0.35×11.0	650	705	0.92
25	0.35×0.35×9.0	700	730	0.96
26	0.35×0.35×9.0	800	790	1.01
27	0.35×0.35×13.0	550	670	0.82
28	0.35×0.35×13.0	550	660	0.83
29	0.35×0.35×13.7	800	960	0.83
30	0.35×0.35×13.7	1100	995	1.10

续表 4-3

编号	试桩尺寸 (m)	试桩极限 承载力 y_k (kN)	计算模型估算 极限承载力 x_k (kN)	$\eta_k = \frac{y_k}{x_k}$
31	0.35×0.35×9.2	600	580	1.03
32	0.35×0.35×13.7	1100	1075	1.02
33	0.35×0.35×17.0	1850	1510	1.22
34	0.35×0.35×13.7	1000	1140	0.88
35	0.35×0.35×13.4	1600	1510	1.06
36	0.35×0.35×13.0	900	800	1.12
37	0.35×0.35×16.6	1700	2060	0.83
38	0.35×0.35×18.5	2300	2250	1.02
39	0.35×0.35×26.5	2600	2330	1.11
40	0.35×0.35×16.6	2400	2250	1.07
41	0.4×0.4×23.5	2000	1800	1.11
42	0.4×0.4×9.0	700	730	0.96

依据表 4-3 中的数据, 可以得到描述(4-38)式模型不确定性随机变量因子 η 的概率分布特征: $\hat{\mu}_\eta = 1.0$, $\hat{\sigma}_\eta = 0.125$ 。说明, 这个计算模型对于桩基极限承载力的估算是无偏的, 而且预估的精度也是相当高的。 η 的频率直方图与理论概率分布曲线如图 4-8 所示。

图 4-8 η 的概率分布

5 桩基承载力概率分析

5.1 依据计算模型的概率分析及存在的问题

5.1.1 概率分析表达式

根据某个计算模型对桩基承载力进行概率分析时,涉及到三种不确定性基本变量,即土性不确定性,几何参数不确定性及计算模型不确定性等。第4章已经详细论述了这三种不确定性的概率分析方法,为了对桩基承载力进行概率分析,就必须将这些不确定性变量按照一定的计算模型组合成概率分析表达式。

例如,《建筑桩基技术规范》(JGJ94-94)中推荐的用双桥静力触探指标计算预制桩单桩极限承载力的计算模型(式4-38)可以写成如下的概率分析表达式:

$$\tilde{Q}_{uk} = \tilde{\eta} \cdot [4(\tilde{\xi}d) \sum_i \tilde{L}_i \cdot \beta_i \cdot \tilde{f}_{ui} + \alpha \cdot \tilde{q}_c (\tilde{\xi}d)^2] \quad (5-1)$$

$$\text{粉土, 粘性土: } \alpha = 2/3, \beta_i = 10.04(\tilde{f}_{ui})^{-0.55}$$

$$\text{砂土: } \alpha = 1/2, \beta_i = 5.05(\tilde{f}_{ui})^{-0.45}$$

式中符号的意义同前,字符上面的~表示随机变量。

5.1.2 计算机随机模拟试验

由概率定义知,某事件的概率可以用大量试验中该事件发生的频率来估算。因此,如果对桩基承载力概率分析表达式中的随机变量进行大量随机抽样,然后把这些抽样值一组一组代入概率分析表达式以计算桩基承载力,即可得到桩基承载力的随机样本。当样本的容量很大时,根据格利文科(Glivenko)定理,即可用样本的分布函数去推断总体的分布函数。计算机随机模拟试验(又称 Monte Carlo 法)就是按照上述思路解题的(徐钟济, 1985)。

对于式(5-1),计算机模拟试验的过程如下:

(1) 首先用随机抽样方法(吴世伟, 1990)分别获得各随机变量的随

机数 $(\tilde{L}_i)_j, (\tilde{f}_i)_j, (\tilde{q}_c)_j, (\tilde{\xi})_j, (\tilde{\eta})_j$; 这里 j 代表第 j 次抽样。

(2) 据式 (5-1), 计算 Q_{uk} , 获得一个 Q_{uk} 的观察值 $(\tilde{Q}_{uk})_j$ 。

(3) 设抽样数为 N , 每组抽样变量随机数对应的观察值为 $(\tilde{Q}_{uk})_j$, 则在完成 N 次抽样后, 获得一个容量为 N 的随机样本, 其均值和方差分别为

$$\mu_Q = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\tilde{Q}_{uk})_j \quad (5-2)$$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N [(\tilde{Q}_{uk})_j - \mu_Q]^2 \quad (5-3)$$

上述过程已编成相应的计算机程序, 因此只要按第 4 章所述的方法得到各随机变量的概率分布后, 即可通过模拟试验方法获得桩基承载力的概率分布。这里模拟次数(抽样数 N)与精度有关, 图 5-1 是某工程桩基承载力概率分析中

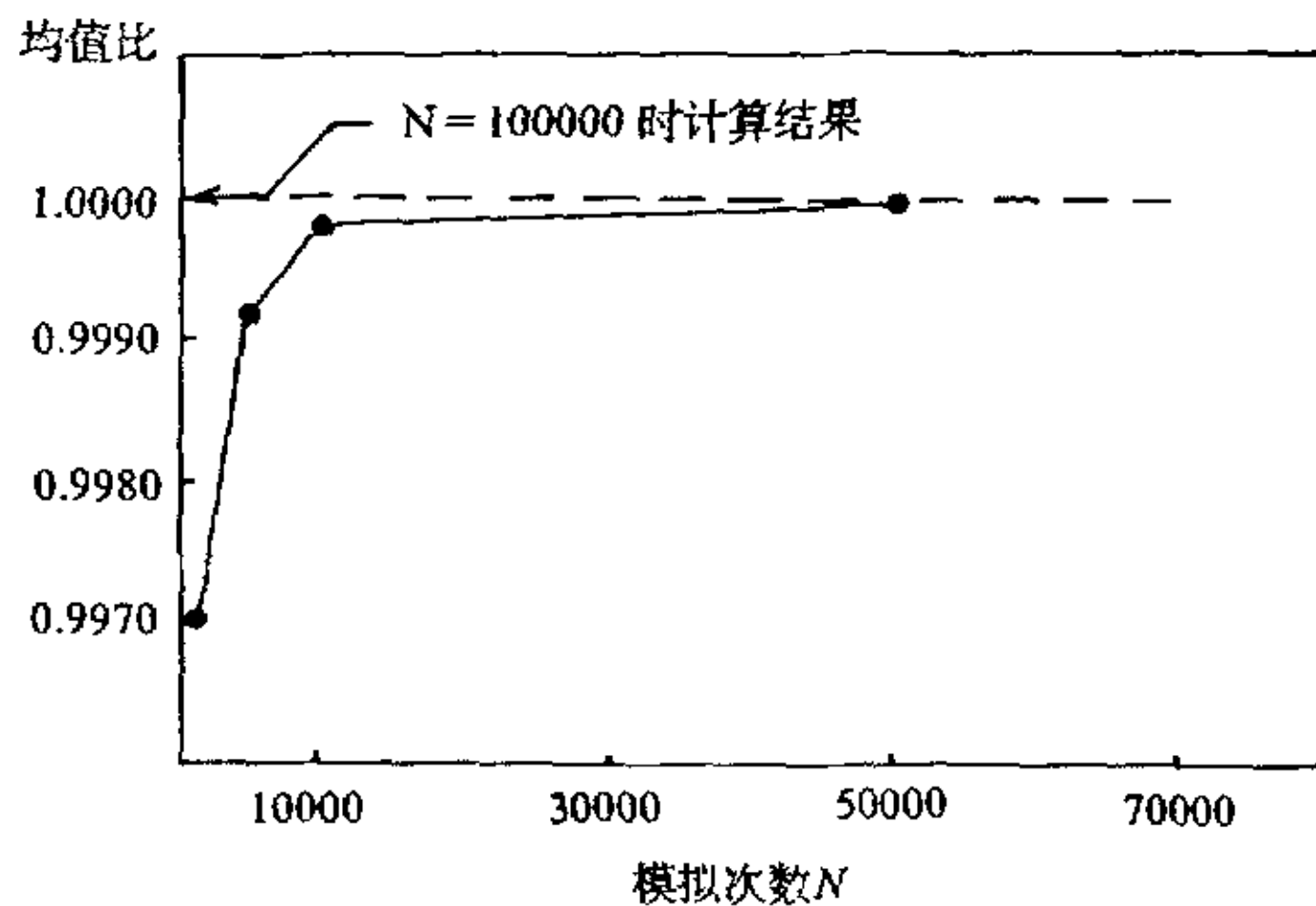


图 5-1 计算机模拟试验次数与精度的关系

模拟次数逐渐增加时与模拟次数达到 10 万次时模拟试验结果的比较, 从图中可以看出, 模拟次数达到 1 万次以上时, 模拟试验结果已相差甚小, 因此, 通常实践上以模拟 1 万次为宜。

5.1.3 存在的问题

根据计算模型对桩基承载力进行概率分析可以得到桩基承载力的一个概率分布, 但它只代表我们对于桩基承载力概率分布的先验认识, 而不能等同于实

实际桩基承载力的概率分布, 原因是:

(1) 对于土性变量的估计, 是与勘察试验工作量的多少有关的, 这个概念已反映在估离方差的计算式 (2-50) 中。试验工作量越大时, 对土性变量估计的方差越小, 因此, 我们通过概率分析获得的土性变量 (如 \tilde{L}_i , \tilde{f}_{ui} , \tilde{q}_i 等) 的概率分布并不等同于实际场地的自然变异 (即离差方差), 而包含着由于不完备观测导致的估计误差。

(2) 模型不确定性随机变量因子 $\tilde{\eta}$ 的概率分布是通过一个地区大量的实测资料得到的, 而对于一个具体的工程场地来说, 其概率分布的方差可能将大大减小。

因此, 仅仅依据计算模型进行概率分析是不够的, 为了获得更加接近于真实情况的概率分布, 就必须借助于抽样检验的方法对此进行修正。

5.2 原型试验与概率分布的修正

在桩基的设计阶段, 一般都要进行少量的原型试验 (即桩基静载荷试验), 以便完成最终的设计。虽然这少量的桩基原型试验不能单独用于承载力概率分析, 但若依据贝叶斯原理 (Bayes' theorem) 将试验结果作为抽样检验结果与前述分析得到的概率分布结合起来时, 则可获得更为满意的概率分析结果。

5.2.1 贝叶斯分析原理

5.2.1.1 先验分布与后验分布

考虑一个统计推断问题。设总体 X 的概率密度函数为 $f(x/\theta)$, 这里 θ 是参数空间 Ω 中一个未知的参数, 现在拟通过 X 的一组样本观察值去推断 θ 的分布。

如果在获得样本观察值之前, 能够从有关信息和经验知识中已经得到 θ 在 Ω 中的一个概率分布 $g(\theta)$, 则这个分布称为 θ 的先验分布。

现在假定随机变量 X_1, \dots, X_n 是概率分布为 $f(x/\theta)$ 的一个随机样本, 则它们的联合概率密度函数为:

$$f_n(x_1, \dots, x_n/\theta) = f(x_1/\theta) \cdots f(x_n/\theta)$$

采用向量记号 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, 那么上式可简写为

$$f_n(\mathbf{x} / \theta) = f(x_1 / \theta) \cdots f(x_n / \theta) \quad (5-4)$$

根据贝叶斯定理(DeGroot, 1975), 当给定 $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ 时, θ 的条件概率密度函数为

$$g(\theta / \mathbf{x}) = \frac{f_n(\mathbf{x} / \theta)g(\theta)}{\int_{\Omega} f_n(\mathbf{x} / \theta)g(\theta)d\theta} \quad (5-5)$$

$g(\theta / \mathbf{x})$ 就称为 θ 的后验概率密度函数, 它表征在获得 n 个观察值后, θ 在 Ω 中的概率分布, 即后验分布。

5.2.1.2 后验分布的计算

设总体 X 服从正态分布, 且其方差 σ^2 为已知, 但其均值 θ 的值却是未知的 ($-\infty < \theta < \infty$)。又假定 θ 的先验分布是一个正态分布且其均值为 μ , 方差为 v^2 。当给定 $X_i = x_i (i = 1, \dots, n)$ 时, $f_n(\mathbf{x} / \theta)$ 可用下式表示:

$$f_n(\mathbf{x} / \theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right] \quad (5-6)$$

这里 \propto 为比例符号, 表示其左右相差一个比例常数。

令

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

则有

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 = n(\theta - \bar{x}_n)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2) \quad (5-7)$$

代入(5-6)式得

$$f_n(\mathbf{x} / \theta) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x}_n)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2)\right]$$

消去不含 θ 的项, 有

$$f_n(\mathbf{x} / \theta) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x}_n)^2\right] \quad (5-8)$$

又因

$$g(\theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2v^2}(\theta - \mu)^2\right] \quad (5-9)$$

则据式(5-5)有

$$g(\theta / \mathbf{x}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n}{\sigma^2}(\theta - \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{v^2}(\theta - \mu)^2\right]\right\} \quad (5-10)$$

其中

$$\begin{aligned} & \frac{n}{\sigma^2}(\theta - \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{v^2}(\theta - \mu)^2 \\ &= \frac{n}{\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\bar{x}_n + \bar{x}_n^2) + \frac{1}{v^2}(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2) \\ &= \frac{nv^2 + \sigma^2}{\sigma^2 v^2} \left(\theta - \frac{\sigma^2\mu + nv^2\bar{x}_n}{\sigma^2 + nv^2}\right)^2 + \frac{n}{\sigma^2 + nv^2}(\bar{x}_n - \mu)^2 \end{aligned}$$

所以(5-10)式可表示为

$$g(\theta / \mathbf{x}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{nv^2 + \sigma^2}{\sigma^2 v^2} \left(\theta - \frac{\sigma^2\mu + nv^2\bar{x}_n}{\sigma^2 + nv^2}\right)^2\right]\right\} \quad (5-11)$$

令

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2\mu + nv^2\bar{x}_n}{\sigma^2 + nv^2} \quad (5-12)$$

$$v_1^2 = \frac{\sigma^2 v^2}{\sigma^2 + nv^2} \quad (5-13)$$

则(5-11)式又可写为:

$$g(\theta / \mathbf{x}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2v_1^2}(\theta - \mu_1)^2\right] \quad (5-14)$$

因此, θ 的后验分布是均值为 μ_1 , 方差为 v_1^2 的正态分布, 而 μ_1 和 v_1^2 可通过式(5-12)和式(5-13)算得。

5.2.2 桩基承载力先验概率分布的修正

5.2.2.1 贝叶斯原理的推广

贝叶斯原理表明, 可通过抽样检验的方法, 将总体均值 θ 的先验分布修正为均值 θ 的后验分布。但我们依据计算模型得到的是单桩承载力的一个先验概率分布而并非均值的先验分布, 而且我们想得到的是单桩承载力的后验分布而

非均值的后验分布，为此，必须对贝叶斯原理加以改进。

设依据计算模型得到的桩基承载力的概率分布是场地桩基承载力的一个先验分布，且其均值为 μ_0 ，方差为 σ_0^2 。又设场地桩基承载力的真实分布为正态分布，且其方差已知为 σ^2 ，而均值 θ 为未知，但 θ 服从均值为 μ ，方差为 v^2 的先验正态分布，则依据第 2 章所述的概念，这里 σ_0^2 为桩基承载力的估离方差， σ^2 为表征桩基承载力自然变异的离差方差，而 v^2 为预估承载力均值的估计方差，据式(2-51)可得：

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 + v^2$$

即：

$$v^2 = \sigma_0^2 - \sigma^2 \quad (5-15)$$

$$\mu = \mu_0 \quad (5-16)$$

又设现场进行了 n 次抽检 (n 根桩静载试验)，且其均值为 \bar{x}_n ，则据式(5-12)和式(5-13)可算得 θ 的后验分布为

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2 \mu_0 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2) \bar{x}_n}{\sigma^2 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2)} \quad (5-17)$$

$$v_1^2 = \frac{\sigma^2(\sigma_0^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2)} \quad (5-18)$$

这是均值 θ 的后验分布，为了得到单桩承载力的后验分布，则还必须经过下述换算。设单桩承载力后验分布的均值为 μ_s ，方差为 σ_s^2 ，则同样有：

$$\sigma_s^2 = v_1^2 + \sigma^2 \quad (5-19)$$

$$\mu_s = \mu_1 \quad (5-20)$$

所以

$$\mu_s = \frac{\sigma^2 \mu_0 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2) \bar{x}_n}{\sigma^2 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2)} \quad (5-21)$$

$$\sigma_s^2 = \frac{\sigma^2(\sigma_0^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2)} + \sigma^2 \quad (5-22)$$

至此，我们得到了通过现场实验结果修正桩基承载力的先验分布而得到桩基承载力后验分布的计算式。

5.2.2.2 场地桩基承载力真实方差 σ^2 (离差方差)的估计

式(5-21)和式(5-22)表明, 进行贝叶斯分析必须具备以下三个条件

- (1) 桩基承载力的先验分布(μ_0, σ_0^2);
- (2) 现场原型试验结果(n, \bar{x}_n);
- (3) 场地桩基承载力的真实分布方差(σ^2).

其中第(1)个条件通过计算模型的概率分析获得, 第(2)个条件依据现场载荷试验获得, 而第(3)个条件只能依据以往的试验或经验结果估算得到。表 5-1 是收集到的部分试验结果, 为了便于比较, 统一由变异系数表示。

现场桩基承载力的实际变异系数

表 5-1

地点	桩型	地层简况	试桩数量	变异系数	资料来源及说明
北京	灌注桩	—	11	0.168	徐攸在, 1989
日本	灌注桩	—	24	0.169	徐攸在, 1989
London-Hendon	灌注桩	硬粘土	9	0.12	Skempton, 1954
河南许昌	灌注桩	粉质粘土	8	0.12	卢世深, 1983
西安	预制桩	黄土(粉质粘土)	5	0.06	某工程静载试验统计得到
西安	预制桩	黄土(粉质粘土)	214	0.06	由某工程静力压桩终止压力统计得到

从表 5-1 可以看出, 灌注桩承载力的实际变异系数比预制桩的要大得多。表 5-1 中相同类型的桩基承载力变异系数比较接近, 可供概率分析时参考, 但应指出, 用于桩基概率分析的实际变异系数值最好采用当地同种类型桩基的经验数据。

5.2.2.3 对后验分布计算式的讨论

式(5-21)可以写成如下的形式:

$$\mu_n = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2)} \mu_0 + \frac{n(\sigma_0^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_0^2 - \sigma^2)} \bar{x}_n \quad (5-23)$$

从式(5-23)可以直观地得出如下结论, 当 n 逐渐增加时, \bar{x}_n 的权系数增大, 后

验分布的均值 μ_e 将越来越逼近现场试验值的平均值 \bar{x}_n ，而 μ_0 的权系数则逐渐减小。仅当 $n=0$ ，即没有做现场试验时， $\mu_e = \mu_0$ 。

式(5-22)也可以写成如下的形式

$$\sigma_e^2 = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2 - \sigma^2} \right) + n} \right) \sigma^2 \quad (5-24)$$

从(5-24)式可以得出如下结论：

- (1) 当 $n=0$ ，即没有做现场试验时， $\sigma_e^2 = \sigma_0^2$ 。
- (2) 当 $n \rightarrow \infty$ ，即试验数大量增加时， σ_e^2 将逐渐逼近 σ^2 。
- (3) 后验分布的方差仅与现场试验的次数有关，而与试验的具体结果无关。由此，试验前即可通过该式按照期望的后验方差计算恰当的试验工作量。

例如，若期望 $\sigma_e^2 \leq \lambda \sigma^2$ ，(λ 为大于1.0的系数)，则可据(5-24)式，得

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2 - \sigma^2} \right) + n} \leq \lambda$$

即：

$$n \geq \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2 - \sigma^2} \quad (\lambda > 1) \quad (5-25)$$

从上式可以看出 n 与 σ_0^2 的关系， σ_0^2 越大时， n 越大， σ_0^2 越小时， n 越小。而 σ_0^2 是桩基承载力先验分布的方差，即估离方差。它的大小与对土性的勘察试验工作量有关，勘察工作量越大时，可使 σ_0^2 越小。于是我们可以看出勘察工作量与现场原型试验工作量之间的关系，勘察工作量增加时，在相同期望后验方差情况下，可以使原型试验的数量减少。因此，贝叶斯分析也为工作量的优化决策提供了一条有利的途径。

5.3 工程实例简介

5.3.1 工程概况

某桩基工程的勘察情况如图5-2所示。桩基的设计尺寸为 $0.4 \times 0.4 \times 14.0$ (m)，采用静压法施工。

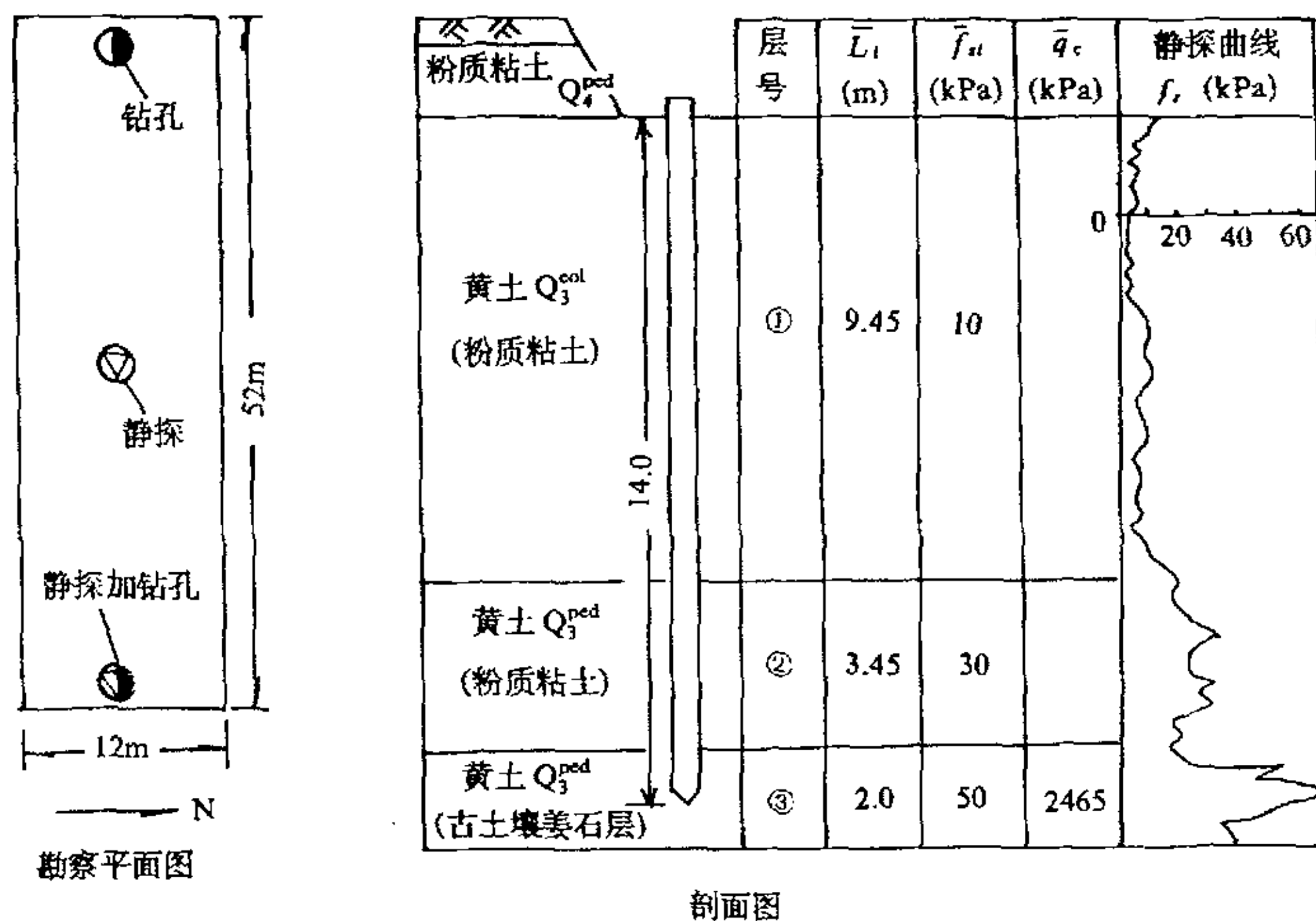


图 5-2 某桩基工程的勘察结果

5.3.2 桩基承载力的初步概率分析

根据勘察结果, 本工程桩基概率分析表达式可以写为:

$$\bar{Q}_{uk} = \bar{\eta} \cdot \left\{ 1.6\bar{\xi}[\bar{L}_1 \cdot \beta_1 \cdot \bar{f}_{s1} + \bar{L}_2 \cdot \beta_2 \cdot \bar{f}_{s2} + (14.0 - \bar{L}_1 - \bar{L}_2) \cdot \beta_3 \cdot \bar{f}_{s3}] + \frac{2}{3} \cdot \bar{q}_c \cdot (0.4\bar{\xi})^2 \right\} \quad (5-26)$$

$$\beta_i = 10.04(\bar{f}_{si})^{-0.55} \quad (i=1, 2, 3)$$

上述概率分析表达式中, 有 8 个独立的随机变量, 即 $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$, \bar{L}_1 , \bar{L}_2 , \bar{f}_{s1} , \bar{f}_{s2} , \bar{f}_{s3} , \bar{q}_c 。依据第 4 章所述计算方法, 可以算得各随机变量的均值和标准差, 见表 5-2。

各基本变量的均值和标准差

表 5-2

基本随机变量	$\bar{\eta}$	$\bar{\xi}$	\bar{L}_1 (m)	\bar{L}_2 (m)	\bar{f}_{s1} (kPa)	\bar{f}_{s2} (kPa)	\bar{f}_{s3} (kPa)	\bar{q}_c (kPa)
均值 μ	1.0	1.0	9.45	3.45	10.0	30.0	50.0	2465.0
标准差 σ	0.125	0.003	0.46	0.43	3.3	4.2	12.2	600.0

按照式(5-26)编制相应的模拟试验(Monte Carlo 法)程序, 当模拟试验次数为 1 万次时, 计算机分析得到的桩基承载力的频率直方图及相应的理论正态分布曲线如图 5-3 所示。

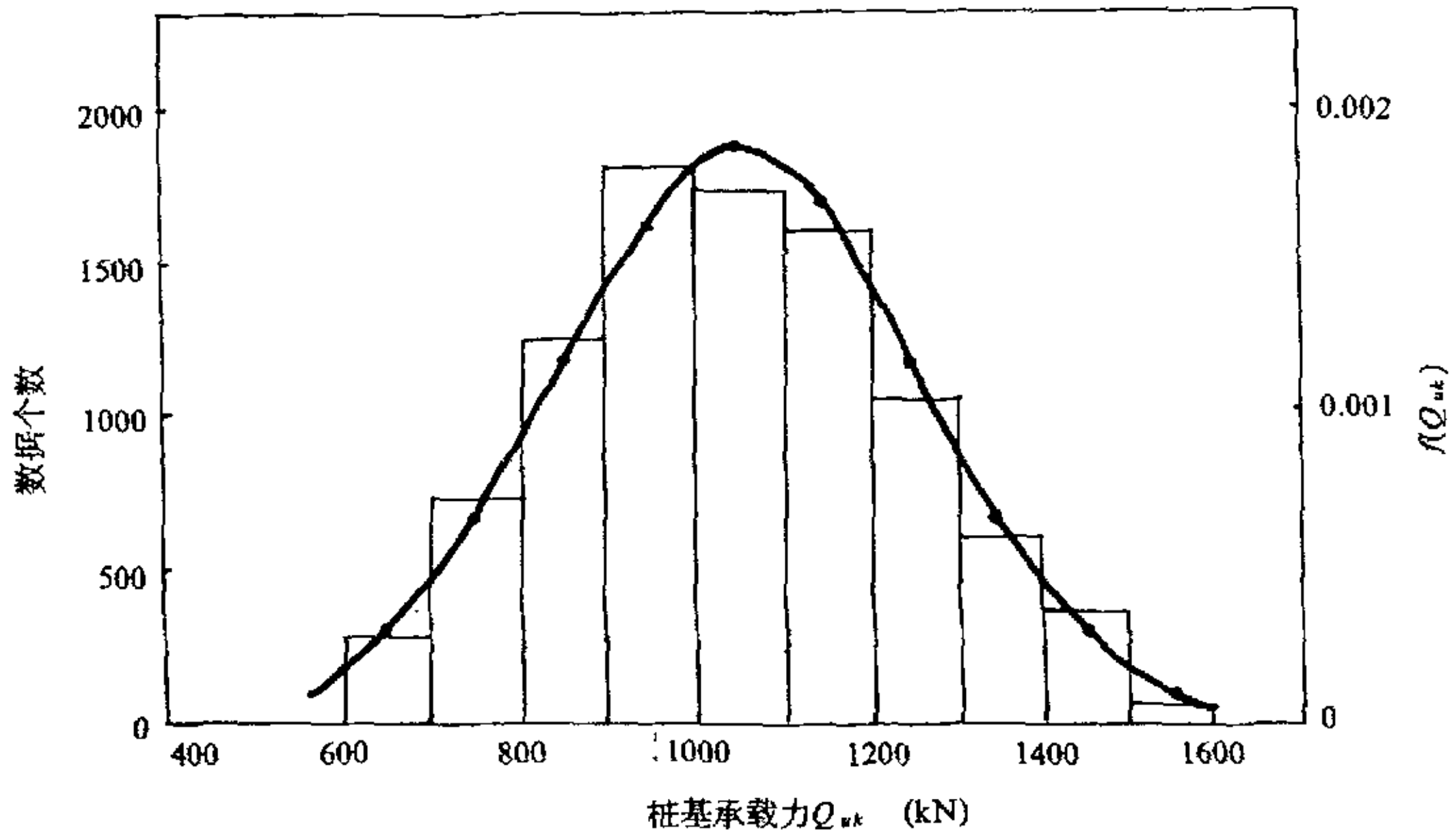


图 5-3 桩基承载力模拟试验分析结果($N=10000$)

由此算得桩基承载力概率分布的均值 $\mu_Q=1051\text{kN}$, 标准差 $\sigma_Q=210.6\text{kN}$ 。

讨论:

(1) 当不考虑几何不确定性时, 计算结果为 $\mu_Q=1051\text{kN}$, $\sigma_Q=210.6\text{kN}$, 其分布曲线与考虑几何不确定性的分布曲线重合。因此, 通常情况下, 对于预制桩可以忽略几何不确定性, 而不影响概率分析结果。

(2) 当不考虑计算模型不确定性时, 计算结果为 $\mu_Q=1051\text{kN}$, $\sigma_Q=165.7\text{kN}$, 其相应的理论分布曲线与考虑模型不确定性的理论分布曲线相差较大(如图 5-4)。这说明, 模型不确定性对承载力概率分析的结果影响甚大。

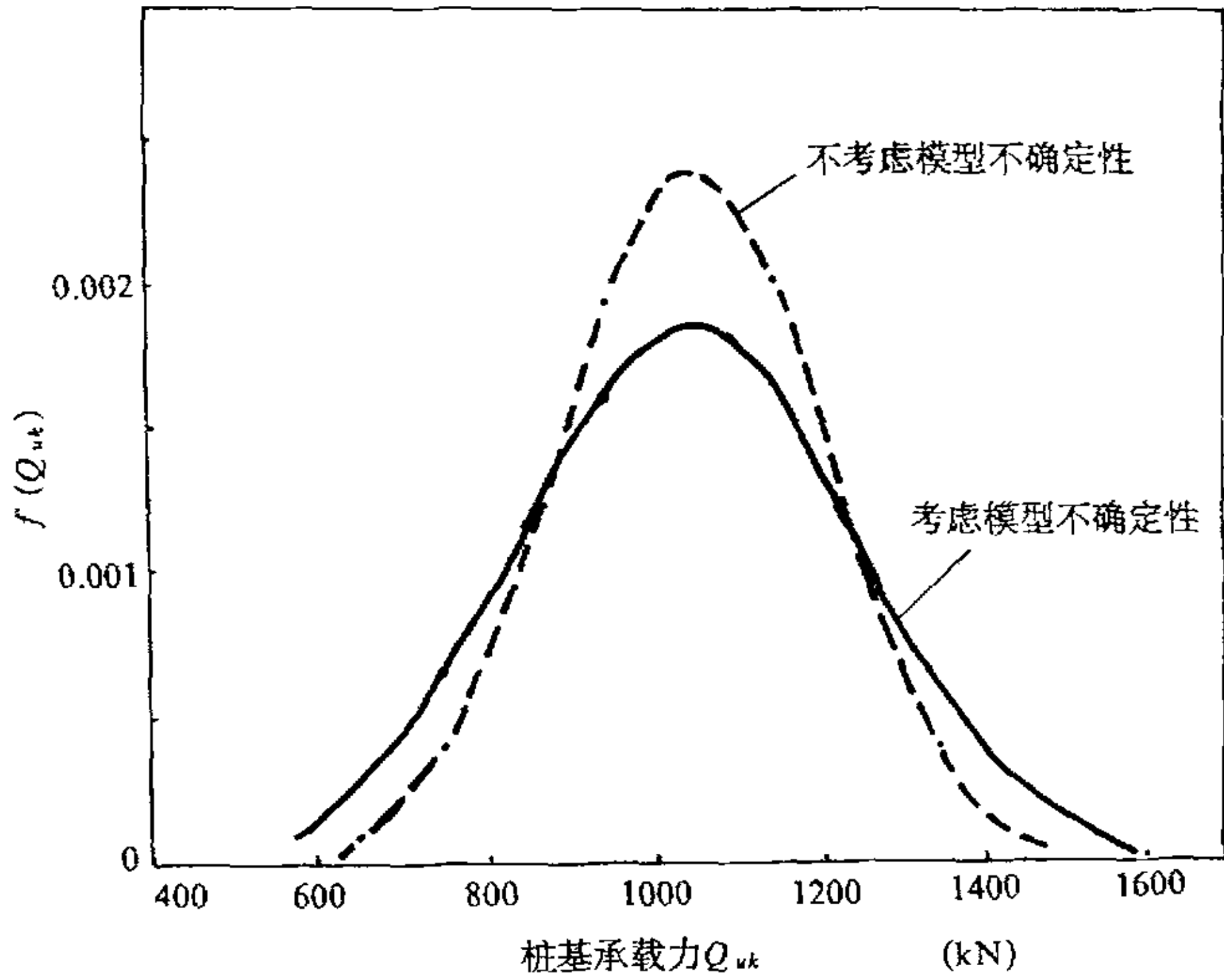


图 5-4 模型不确定性对分析结果的影响

5.3.3 桩基静载试验与概率分布的修正

在现场共进行了两根有效的桩基静载荷试验，其结果如图 5-5 所示，由此得 $n=2$ ， $\bar{x}_n=910\text{kN}$ 。

根据西安市的经验(见表 5-1)，场地预制桩的实际变异系数 $V \approx 0.06$ ，则 $\sigma \approx 1051 \times 0.06 = 63.1(\text{kN})$ ，又因先验分布 $\mu_Q = 1051(\text{kN})$ ， $\sigma_Q = 210.6(\text{kN})$ ，则据式(5-21)和式(5-22)，可以计算出后验分布的均值和方差：

$$\mu_s = \frac{\sigma^2 \mu_Q + n(\sigma_Q^2 - \sigma^2) \bar{x}_n}{\sigma^2 + n(\sigma_Q^2 - \sigma^2)} = 917\text{kN}$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \sqrt{\frac{\sigma^2(\sigma_Q^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_Q^2 - \sigma^2)} + \sigma^2} \\ &= \sqrt{1.4765\sigma^2} = 76.7\text{kN} \end{aligned}$$

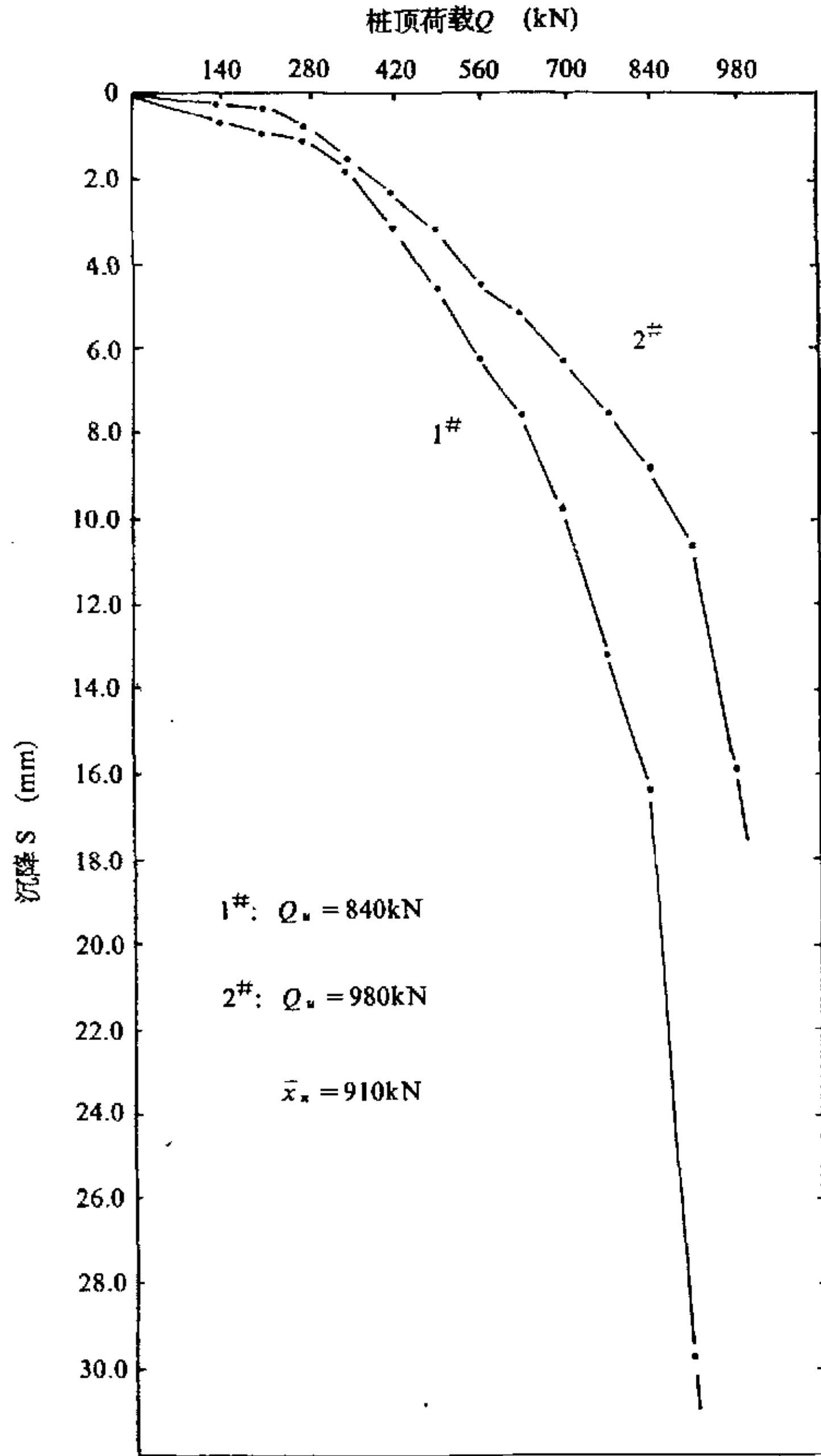


图 5-5 桩基静载试验结果

先验分布与后验分布的比较见图 5-6，从图中可以看出，后验分布曲线修正了先验分布曲线的均值，而且方差大为减小，这是一个更加接近实际情况的桩基承载力概率分布曲线。

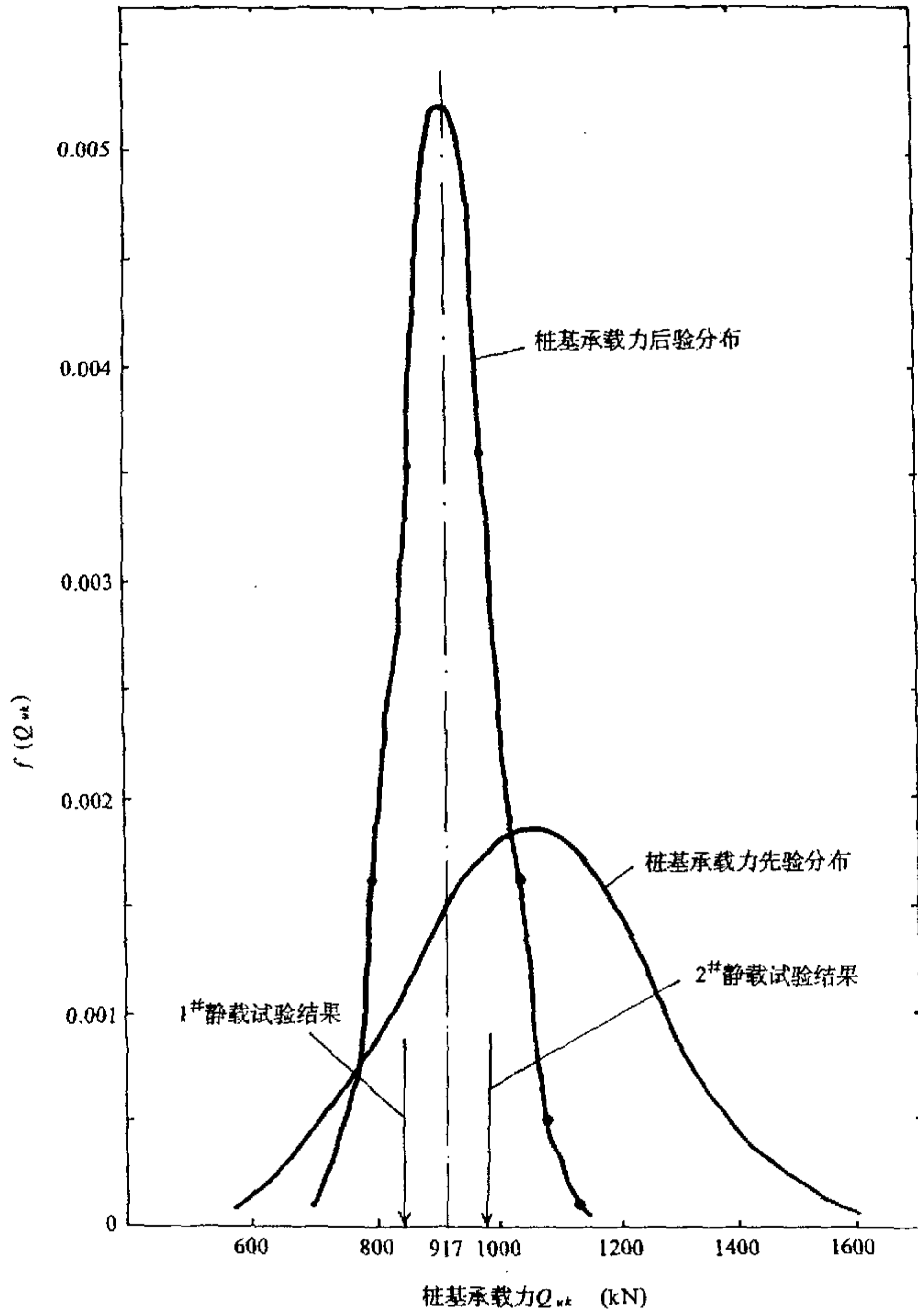


图 5-6 先验分布与后验分布的比较

6 结 语

6.1 桩基可靠性设计的关键问题是确定荷载效应与桩基承载力的概率分布函数或其数字特征，这就必须对荷载效应和桩基承载力进行概率分析，本文研究了桩基承载力概率分析的方法，对于桩基的可靠性设计将起到积极的推动作用。

6.2 对桩基承载力进行概率分析的根本原因是桩基承载力的不确定性。而桩基承载力的不确定性体现在对它进行分析和预测之中。预测桩基承载力的途径有二：一是通过抽样试验的方法（即桩基原型试验），二是通过计算模型分析的方法。

6.3 在绝大多数工程实践中，通过抽样试验的方法去获取桩基承载力的概率分布是难以办到的，因此桩基承载力的概率分析主要通过计算模型的分析来实现。

6.4 依据计算模型对桩基承载力进行概率分析时，必须定量研究三种不确定性因素，即土性不确定性、施工不确定性和计算模型不确定性。本文着重研究了土性不确定性的分析方法，针对桩基的特点，建立了有限域土性随机场的估计理论。

6.5 桩基概率分析的特点是通过有限的勘察资料去估计某个区域内土性变量在水平方向的变异情况。既有局部平均的问题（如土性指标），也有不是局部平均的问题（如土层厚度）。在估计的过程中，涉及到两种不确定性来源，即估计误差的不确定性和土性自然变异的不确定性。为了全面地考虑上述特点，本文从基本的随机场概念出发，逐渐引入估计方差和离差方差的概念及其表征方法，最后推得估离方差的表达式，为解决桩基土性变量的概率分析问题奠定了基础。

6.6 本文提出的估离方差表达式完整地表述了土性参数估计中的两个不

确定性来源: (1) 由离差方差表达的土性的自然变异; (2) 由估计方差表达的由于不完备观测导致的统计误差。估离方差的计算式既适用于有限区域的情况, 亦可适用于无限区域的情况, 而且没有各态历经性的假设条件, 因此, 对于考虑自然变异和统计误差的土工概率分析问题, 估离方差计算式具有普遍适用的意义。

6.7 估离方差计算式仅仅是协方差函数或变异函数平均值的线性组合。因此, 要对某个土性变量进行概率分析, 首先必须构造出一种表征该变量随机场空间结构的协方差函数或变异函数。从适用范围来说, 变异函数是一种比协方差函数更为理想的数学工具。本文收集了大量的实验资料, 研究了与桩基概率分析密切相关的土层厚度及有关土性指标的变异函数特征及其理论模型, 并按照蒙特卡罗模拟法设计了一种计算变异函数平均值的方法。

6.8 利用本文提出的估离方差运算模型可以方便地对桩侧土性变量进行概率分析, 我们注意到, 对于桩基土性指标的估计来说, 只有当观测孔比较多的情况下, 才可以直接应用传统的局部平均方差来近似代替估离方差。

6.9 为了完整地进行桩基承载力概率分析, 本文在收集实测资料的基础上, 研究了桩基几何尺寸的不确定性和计算模型的不确定性, 结果表明, 钻孔灌注桩桩径的变异是非常明显的, 在进行桩基承载力概率分析时应予以考虑, 而混凝土预制桩的几何尺寸变异性很小, 在桩基承载力概率分析时可以忽略。计算模型的不确定性是很明显的, 对桩基承载力概率分析结果影响甚大。

6.10 考虑了土性不确定性, 几何不确定性, 计算模型不确定性, 并通过计算机随机模拟试验的方法可以得到桩基承载力的一个概率分布。但这个概率分布只代表我们对于桩基承载力概率分布的先验认识, 而不能等同于实际桩基承载力的概率分布。因此, 仅仅依据计算模型进行概率分析是不够的, 为了获得更加接近于真实情况的概率分布, 就必须借助于抽样检验的方法对此进行修正。

6.11 在桩基的设计阶段，一般都要进行少量的桩基原型试验以便完成最终的设计。虽然这少量的桩基原型试验不能单独用于承载力概率分析，但若依据贝叶斯原理将试验结果作为抽样检验结果与通过计算模型得到的概率分布结合起来，则可获得更为满意的概率分析结果。

6.12 本文针对桩基概率分析的特点，对传统的贝叶斯原理进行了改进，得到了通过现场试验结果修正桩基承载力的先验分布而得到桩基承载力后验分布的计算式。

6.13 应用本文的研究成果，对某工程桩基进行了概率分析，获得了较为满意的结果。

6.14 本文的研究成果表明，桩基承载力概率分析的结果是与所获得的信息量有关的。所获得的信息量（勘察阶段或抽检阶段）越大，概率分布就越“窄”，分析结果就越接近实际情况。本文研究的是正问题，即如何通过获得的信息量去进行桩基承载力的概率分析问题。也可以根据本文的成果去研究与此相应的反问题，即如何根据最终的要求去合理安排工作量问题。今后对这一问题的研究，将有助于勘察和试验工作的优化决策。

6.15 桩基承载力的概率分析问题是相当复杂的，本文取得了初步的研究成果，但仍然存在一些问题需要进一步研究，如多层地基土性变量的互相关问题，施工过程中除几何尺寸以外的其它不确定性问题，桩基工程的系统可靠性问题等等。

致 谢

子曰：三年学，不至于谷，不易得也。（论语·泰伯第八）

在完成本文之际，想起先贤的这句话，不禁使我感慨万千！是呀，能够静下心来读书三年，而不计较其它的得失，确实不是一件容易做到的事。我能够坚持完成三年的学业，并非因为自己一时的发奋自励，而完全应当归功于师长的关爱和朋友的帮助。即如古人所讲：师友夹持，虽懦夫亦能立志也。所以，我首先向尊敬的两位导师吴世明教授和张苏民教授致以最诚挚的谢意！

同时，我还要感谢浙江大学土木工程系的全体老师和同学。特别是直接给我授过课或对本文提出过有益建议的师友们，他们是：谢康和教授，陈云敏教授，钱在兹教授，陈龙珠教授，高广运教授级高工，姚谏博士，夏唐代博士，蔡袁强博士，杨峻博士，王奎华博士等。

三年来，笔者工作的单位机械工业部勘察研究院对我的学习给予了大力支持，谨向院领导和同事们表示衷心的感谢！特别是张炜教授级高工对论文的选题提出过有益的建议并提供了非常宝贵的资料，王世荣高工、章杰高工、李志宏工程师对笔者的研究工作给予了热心帮助，论文的打印工作是由李爱青、刘京华等同志完成的，在此一并致谢！

参 考 文 献

- [1] Freudenthal, A.M.(1954). "Safety and Probability of Structural Failure." *Proc. ASCE*, Vol.80, No. 408,563.
- [2] Skempton,A.W.(1954). "Cast insitu bored piles in london clay." *Geotechnique*, 9(4),153-157.
- [3] Ржаницын, А.Р. (1947). Строительная промышленность, но. 8.
- [4] Casagrande, A.(1965). "Rule of the 'calculated risk' in earthwork and foundation engineering." *J. Soil. Mech. and Found. Engrg. Div., ASCE* 91(4),1.
- [5] Lumb, P.(1966). "Variability of natural soils." *Can. Geotech. J.*, 3(2),74-97.
- [6] Wu, T. H., and kraft, L. M. (1967). "The probability of foundation safety." *J. Soil Mech. and Found. Engrg. Div., ASCE*, 93(5),213-230.
- [7] Cornell, C. A. (1969). "Structural safety specification based on second-moment reliability." *Symp. on Concepts of safety and Methods of Design*, Final Report, Int. Association of Bridge and structure Engrg., london, U.K. 235-245.
- [8] Benjamin, J. R., and Cornell, C. A. (1970). *Probability, statistics, and decision for civil engineerings*. McGraw-Hill book co., New York, N. Y., 684.
- [9] Folayan, J. I., Hoeg, K., and Benjamin, R. (1970). "Decision theory applied to settlement predictions." *J. Soil. Mech. and Found. Engrg. Div., ASCE*, 96, 1127-1141.
- [10] Wu, T. H., and kraft, L. M. (1970). "Safety analysis of slopes." *J. Soil Mech. and Found. Engrg. Div., ASCE*, 96(2), 609-630.
- [11] Cornell, C. A. (1971). "First order uncertainty analysis of soil deformation and stability." *Proceedings of the 1st Int. conf. on Applications of statistics and Reliability to soil and structural Engineering*. Hongkong.
- [12] Lumb, P. (1971). "Precision and accuracy of soil tests." *Proc. of Int. Conf. on Applications of statistics and probability in soil and structural Engineering*. Hong kong.
- [13] Fredlund, D. G., and Dahlman, A. E. (1971). "Statistical geotechnical properties of Glacial lake Edmonton sediments." *Proc. Int. conf. on Applications of statistics and probability in soil and structural Engineering*, Hongkong. 203-228.
- [14] Bjerrum, L. (1973). "Geotechnical problems involved in foundations of structures in the North Sea." *Geotechnique*, London, U. K., 23(3), 319-358.
- [15] Lambe, T. W. (1973). "Predictions in soil engineering." *Geotechnique*, 23,149-202.

- [16] Lippman, M. J. (1973). "Two-Dimensional stochastic Model of a Heterogenous Geologic System." *thesis presented to the University of California, at Berkeley, Calif.*
- [17] Matheron, G. (1973). "The intrinsic random functions and their applications." *Adv. Appl. probab.*, 5, 439-468.
- [18] Wu, T. H., Hvas, S. K. and Chang, N. Y. (1973). "Probabilistic Analysis of Seepage." *J. of the soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 99(4).
- [19] Ang, A. H-S., and Cornell, C. A. (1974). "Reliability Basis of Structural Design and Safety." *Journal of the structural Division, ASCE*, 100(9).
- [20] Hoeg, K., and Muraka, R. P. (1974). "Probabilistic Analysis and Design of a Retaining Wall." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 100(3), 349-366.
- [21] Matsuo, M., and kuroda, k. (1974). "Probabilistic Approach to Design of Embankments." *Soil and Foundations*, 14(2).
- [22] Wu, T. H. (1974). "Uncertainty, Safety, and Decision in Civil Engineering." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 100(3), 329-348.
- [23] Winterkorn, H. F. and Fang, H. Y. (1975). *Foundation Engineering Handbook*, Van Nostrand Reinhold Company.
- [24] Ang, A. H-S., and Tang, W. H. (1975). *Probability concepts in engineering planing and design*. Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, N. Y. 409.
- [25] Christian, J. T., and Swiger, W. F. (1975). "Statistics of liquefaction and SPT results." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 101(11),1135-1150.
- [26] Kraft, L. M., Jr., and Murff, J. D. (1975). "A probabilistic investigation of foundation design for offshore gravity structures." *Proc. offshore Technology conf.*, 351-366.
- [27] Yuceman, M. S., and Tang, W. H. (1975). "Long term stability of soil-slopes, a reliability approach." *Proc. of 2nd Int. Conf. on Applications of statistics and Probability to soil and Structural Engineering*, 2, Aachen, West Germany, 215-229.
- [28] Veneziano, D., and Faccioli, E. (1975). "Bayesian Design of Optimal Experiments for the Estimation of soil properties." *Proc. of 2nd Int. Conf. on Applications of statistics and Probability to soil and structural Engineering*, Aachen, West Germany.
- [29] Whitman, R. V., Biggs, J. M., Brennen, J. E., Cornell, C. A., de Neufville, R. L., and Vanmarcke, E. H. (1975). "Scismic Design Decision Analysis." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 101(5), 1067-1084.

- [30] Lumb, P. (1975). "Spatial Variability of Soil Properties." *Proc. of 2nd Int. conf. on Applications of statistics and probability to soil and structural Engineering*, Aachen, West Germany. 397–421.
- [31] Alonzo, E. E. (1976). "Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays." *Geotechnique*, 26(3), London, U. K., 453–472.
- [32] Rackwitz, R. (1976). *Practical probabilistic approach to design*. Bulletin 112, Comite European du Beton, Paris, France.
- [33] DeGroot, M. H. (1975). *Probability And Statistics*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc.
- [34] Tang, W. H., Yucemen, M. S., and Ang, A. H–S. (1976). "Probability–based short term design of soil slopes." *Can. Geotech. J.*, 13(3), 201–215.
- [35] Kay, J. N. (1976). "Safety factor evaluation for single piles in sand." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 102(10), 1093–1110.
- [36] Meyerhof, G. G. (1976). "Concepts of Safety in Foundation Engineering Ashore and Offshore." *Proc. 1st Int. Conf. on the Behavior of offshore structures*, Trondheim, Norway, Vol.1, 501–515.
- [37] Vanmarcke, E. H. (1977). "Probabilistic modeling of soil profiles." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 103(11), 1277–1246.
- [38] Vanmarcke, E. H. (1977). "Reliability of Earth Slopes." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 103(11), 1247–1266.
- [39] Baecher, G. B. (1978). "Analyzing exploration strategies." *Site characterization and Exploration*, C. H. Dowding, ed., ASCE, New York, N. Y., 220–246.
- [40] Hoeg, K., and Tang, W. H. (1978). *Probabilistic considerations in the foundation engineering for offshore structures*. Publication No. 120, Norwegian Geotech. Inst., Oslo, Norway.
- [41] Journé, A. G., and Huijbregts, ch. J. (1978). *Mining Geostatistics*, Academic Press, Inc., London, U. K.
- [42] Yegian, M. K., and Whitman, R. V. (1978). "Risk Analysis for Ground Failure by liquefaction." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 104(7), 921–938.
- [43] Hal dar, A., and Tang, W. H. (1979). "Uncertainty analysis of relative density." *J. Geo tech. Engrg. Div., ASCE*, 105(7), 899–904.

- [44] Tang, W. H. (1979). "Probabilistic evaluation of penetration resistance." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 105(10), 1173–1191.
- [45] Ubaji, R. J., and Houston, W. N. (1979). *A Procedure for assessing reliability of offshore pile foundations under Wave loading*. Report UCB / GT / 79–01, Dept. of Civ. Engrg., Univ. of California, Berkeley, Calif.
- [46] Baecher, G. B., and Einstein, H. H. (1979). "Slope Reliability Models in Pit Optimization." APCOM, Tucson, 501–512.
- [47] Halder, A., and Tang, W. H. (1979). "Probabilistic Evaluation of liquefaction Potential." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 105(2), 145–163.
- [48] Veneziano, D. (1979). "Statistical Estimation and Data collections: A Review of Procedures for Civil Engineers." *Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Applications of statistics and Probability to soil and Structural Engineering*, Sydney, Australia.
- [49] Baecher, G. B. (1979). "Search strategies in geotechnical engineering." *Proc. 3rd Int. Conf. on Application of statistics and Probability to soil and struct. Engrg.*, Vol.1, Sydney, Australia.
- [50] Veneziano, D., and Antoniano, J. (1979). "Reliability Analysis of Slopes: Frequency Domain Analysis." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 105(2), 165–182.
- [51] 於崇文等(1980). 数学地质的方法与应用. 冶金工业出版社, 1980年4月第1版.
- [52] Poulos, H. G. and Davis, E. H. (1980). *Pile Foundation Analysis And Design*. John Wiley & Sons, Inc.
- [53] Vanmarcke, E. H. (1980). "Probabilistic stability Analysis of Earth slopes." *Engineering Geology*, 16, 29–50.
- [54] Christian, J. T. (1980). "Probabilistic Soil Dynamics: State of the Art." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 106(4), 385–397.
- [55] Ali, E. M., Wu, T. H. and Chang, N. Y. (1980). "Stochastic Model of Flow Through Stratified Soils." *J. Geotech. Engrg. Div.*, 106(6), 593–610.
- [56] 高大钊(1981). "静力触探试验结果的可靠性分析." 工程勘察, 1981年第2期.
- [57] Haldar, A. and Tang, W. H. (1981). "Statistical Study of Uniform Cycles in Earthquakes." *J. Geotech. Engrg. Div.*, 107(5), 577–590.
- [58] Tabba, M. M., and Yong, R. N. (1981). "Mapping and predicting soil properties: theory." *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 107(5), 713–793.
- [59] Tang, W. H. (1981). "Probabilistic evaluation of loads." *J. Geotech. Engrg., Div., ASCE*, 107(3), 287–304.

- [60] Wu, T. H., and Wong, K. (1981). "Probabilistic Soil exploration: Case history." *J. Geotech. Engrg., Div., ASCE*, 107(12), 1693–1711.
- [61] Baecher, G. B. (1981). "Optimal Estimators for soil properties." *J. Geotech. Engrg. Div.*, 107(5), 649–653.
- [62] Fardis, M. N., and Veneziano, D. (1981). "Estimation of SPT-N and Relative Density." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 107(10), 1345–1349.
- [63] 高大钊(1982). "岩土测试中经验公式的误差估计." 工程勘察, 1982年第3期.
- [64] Asaoka, A., and Grivas, D. (1982). "Spatial Variability of the undrained strength of clays." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 108(5), 743–756.
- [65] Chowdhury, R. N., and A-Grivas, D. (1982). "Probabilistic model of progressive failure of slopes." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 108(6), 803–819.
- [66] 高大钊, 魏道焱(1983). "试论概率方法在岩土工程中的作用与地位." 概率论与统计学在岩土工程中的应用专题学术座谈会专辑.
- [67] 刘宏梅(1983). "关于可靠性方法的现状及其可行性." 概率论与统计学在岩土工程中的应用专题学术座谈会专辑.
- [68] 高大钊(1983). "岩土工程的可靠性分析." 岩土工程学报, 1983年第3期, 第4期.
- [69] 卢世深, 林亚超(1983). 桥梁钻孔桩试验, 人民交通出版社.
- [70] Ingra, T. S., and Baccher, G. B. (1983). "Uncertainty in bearing capacity of sands." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 109(7), 899–914.
- [71] Vanmarcke, E. H. (1983). *Random Fields: Analysis and synthesis*. MIT Press, Cambridge, Mass.
- [72] Duncan, J. M. and. Houston W. N. (1983). "Estimating Failure Probabilities for California Lcvees." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 109(2), 260–268.
- [73] Jaeger, L. G. and Baidar Bakht. (1983). "Number of Test Versus Design pile capacity." *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 109(6), 821–831.
- [74] Thoft-christensen, P.(1983). *Reliability Theory and Its Application in Structural and Soil Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers.
- [75] 包承纲(1984). "土工中的可靠性设计问题." 人民长江, 1984年第1期.
- [76] Ang, A. H-S., and Tang, W. H. (1984). *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*. Vol. 2, John Wiley and Sons, New York, N. Y.
- [77] Whitman, R. V. (1984). "Evaluating Caculated Risk in Geotech. Engrg." The seventeenth Terzaghi lecture, *J. Geotech. Engrg.*, 110(2), 145–188.

- [78] Baker, R. (1984). "Modeling soil variability as a random field." *Math. Geol.*, 16(5), 435-448.
- [79] Wu, T. H., Martinez, R. E. and kjekstad, O. (1984). "stability of Ekofisk Tank: Reliability Analysis." *J. Geotech. Engrg, Div.*, 110(7), 938-956.
- [80] 徐钟济(1985).蒙特卡罗方法.上海科技出版社.
- [81] 高大钊(1985).“地基土力学性质指标的可靠性分析与取值.”*同济大学学报*,第4期.
- [82] 包承纲(1985).“贝叶斯定理及其在三峡工程中的应用.”*人民长江*, 1985年第1期.
- [83] 熊兴邦, 高大钊(1985).“关于低塑性土地基承载力表的修订.”*建筑科学研究报告*.
- [84] 高大钊(1986).“土的抗剪强度指标的统计方法.”*工程勘察*, 1986年第4期.
- [85] 高大钊(1986).“岩土参数的变异性及分布拟合.”*岩土力学参数的分析与解释讨论会文集*.
- [86] 何信芳, 熊兴邦, 陈林(1986).“运用统计数学研究膨胀土含水量的最小值”.*岩土力学参数的分析与解释讨论会文集*.
- [87] 王寿仁(1986).*概率论基础和随机过程*.科学出版社, 1986年6月第1版.
- [88] 王光远, 王文泉(1986).“抗震结构的模糊可靠性分析.”*力学学报*, 第18卷第4期.
- [89] Wu, T. H., Potter, J. C., and kjekstad, O. (1986). "Probabilistic Analysis of offshore Site Exploration." *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 112(11), 981-1000.
- [90] Tang, W. H., and Quek, S. T. (1986). "Statistical Model of Boulder Size and Fraction." *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 112(1), 79-90.
- [91] 包承纲(1986).“多层地基沉降的概率分析.”*第四届土力学及基础工程学术会议论文选集*.中国建筑工业出版社.
- [92] Chowdhury, R., Tang, W. H. and Sidi, I. (1987). "Reliability Model of Progressive slope Failure." *Geotechnique*, December, 467-481.
- [93] Li, K. S., and Lumb, P.(1987). "Probabilistic Design of Slopes." *Canadian Geotechnical Journal*, 24, 520-535.
- [94] Li K. S., and White, W. (1987). *Probabilistic Characterization of Soil Profiles*. Research Report No. 19, Department of Civil Engineering, University College, The Univ. of New South Wales.
- [95] 陈忠汉, 高大钊(1988).“用多参数最优解法求桩侧分层土极限摩阻力.”*工程勘察*, 1988年第5期.
- [96] Tang, W. H. (1988). *offshore Axial Pile Design Reliability*. Research Report for Project PRAC 86-29B, American Petroleum Institute.

- [97] Wu, T. H., Kjekstad, O., Lee, I-M., and Lacasse, S. (1988). "Reliability Analysis of Foundation stability for Gravity platforms in the North Sea." *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 26, 359-368.
- [98] Righetti, G., and Harrop-Williams, K. (1988). "Finite element analysis of random soil media." *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 114(1), 59-75.
- [99] Tang, W. H., and Halim, I. S. (1988). "Updating anomaly statistics—multiple anomaly pieces." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 114(6), 1091-1096.
- [100] 高大钊(1989).土力学可靠性原理.中国建筑工业出版社, 1989年12月第1版.
- [101] 李启信, White, W., 楚剑, 赵敏敏(1989).“土层的概率模型及其在桩基分析中的应用.”*岩土工程学报*, 第11卷第6期, 120-128.
- [102] 包承纲(1989).“谈岩土工程概率分析法中的若干基本问题.”*岩土工程学报*, 第11卷第4期, 94-98.
- [103] 徐攸在, 刘兴满(1989).桩的动测新技术, 中国建筑工业出版社.
- [104] 黄兴棣(1989).工程结构可靠性设计.人民交通出版社, 1989年1月第1版.
- [105] Bogardi, I., Kelly, W. E. and Bardossy, A. (1989). "Reliability Model for Soil liner: Initial Design." *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 115(5), 658-669.
- [106] Ronold, K. O. (1989). "Probabilistic Consolidation Analysis with Model Updating." *J. Geotech. Engrg.*, 115(2), 119-210.
- [107] Wu, T. H., Tang, W. H., Sangrey, D. A. and Baecher, G. B. (1989). "Reliability of offshore Foundations—State of the Art." *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 115(2), 157-178.
- [108] Tang, W. H. (1989). "Uncertainties in offshore axial pile capacity." *Foundation Engineering: Current principles and practices*, Vol. II, F. Kulhawy, ed., ASCE, New York, N. Y., 833-847.
- [109] 刘金砺(1990).桩基础设计与计算.中国建筑工业出版社, 1990年7月第1版.
- [110] 杨为民等(1990).系统可靠性数字仿真.北京航空航天大学出版社.
- [111] 高大钊, 李镜培(1990).“单桩竖向承载力参数及桩身强度可靠度分析.”全国建筑桩基设计与施工规范讨论会.
- [112] 李继华等(1990).建筑结构概率极限状态设计.中国建筑工业出版社.
- [113] 吴世伟(1990).结构可靠度分析.人民交通出版社, 1990年8月第1版.
- [114] [日]松尾稔著, 万国潮、李杨海等译(1990).地基工程学——可靠性设计的理论和实践.人民交通出版社, 1990年2月第1版.

- [115] 陈雨生(1990).“略论数值法、模拟和拟合”.水文地质工程地质, 1990年第5期.
- [116] Halim,I.S.and Tang,W.H.(1990).“Bayesian Method for characterization of Geological Anomaly” .*Proceedings of ISUMA'90 The First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis*,Maryland, December, 585–594.
- [117] Oka,Y., and Wu, T.H.(1990).“System Reliability of Slope Stability.” *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 116(8), 1185–1189.
- [118] Ronold, K. O. (1990). “Reliability Analysis of Tension pile.” *J.Geotech. Engrg.*, 116(5), 760–773.
- [119] Ronold, K. O. (1990).“Random field modeling of foundation failure modes.” *J. Geotech. Engrg., ASCE*, 116(4),554–570.
- [120] 熊大国(1991).随机过程理论与应用.国防工业出版社, 1991年1月第1版.
- [121] 张尧庭等(1991).贝叶斯统计推断.科学出版社, 1991年3月第1版.
- [122] 黄强(1991).“建筑单桩竖向承载力可靠度分析方法及其工程应用.”全国地基基础标准技术委员会.
- [123] 熊国伟等(1991).“单桩承载力可靠度分析.”河海大学学报, 第19卷第1期.
- [124] 刘祖德, 潘国宁, 蒋桐(1991).“三维随机边界元与随机有限元耦合理论及其在桩基可靠性分析中的应用.”第六届全国土力学及基础工程会议论文集, 上海.
- [125] 冷伍明(1991).“桥梁桩基可靠性分析探讨.”西南交通大学建校95周年学术报告会文集, 西南交通大学出版社.
- [126] 钟亮、林思左(1991).“单桩竖向承载力可靠度的研究.”建筑科学, 1991年第4期.
- [127] Bensen,C.H., and Charbencau,R.J.(1991).“Reliability Analysis for time of Travel in Compacted Soil liners.” *Geotech.Engrg. Congress 1991,Geotechnical Specialty Publication No.27,ASCE*,456–467.
- [128] Barker,R.M.,Duncan, J.M., Rojiani,K.B., Ooi,P.S.K., and Kim,S.G.(1991). “Load Factor Design Criteria for Highway Structure Foundations.” Final Report prepared for National Cooperative Highway Research Program,Transportation Research Board,National Research council,Virginia Polytechnic Institute and State University ,NCHRP Project24–4.
- [129] Li,K.S.,Lo,S–C.R.,and lee,I.K.(1991).“A Preliminary study on limit state Design of pile Foundations.” Reserach Report No.R120,University College,Australian Defence Force Academy, The University of New South Wales, Canberra.

- [130] Fenton,G.A.,and Vanmarcke,E.H.(1991).“Spatial Variation in liquefaction Risk Asscssment.” *Proceeding, Geotech .Engrg .Congress,ASCE*, Vol.I,594–607.
- [131] Kay,J.N.,Kulhawy,F.H.,and Grigoriu,M.D.(1991).“Assessment of Uncertainties in Geotechnical Design Parameters.” *Proceeding,Sixth ICASP*, Mexico City, 683–692.
- [132] Zcitoun,D.G.,and Barker,R.(1991).“Wave–Number Domain Approach for soil Variability Analysis.” *J Geotech.Engrg.,ASCE*,117(7), 1061–1079.
- [133] 李镜培,高大钊(1992).“桩基承载力参数估计的随机场模型.” *岩土工程师*,第2期.
- [134] 李国周, 欧阳葆元(1992).“软土地基固结与沉降概率分析.” *岩土工程学报*, 第14卷第1期.
- [135] 李同田, 李士菁(1992).“天津地区单桩承载力可靠度分析.” *工程结构可靠性*, 中国土木工程学会桥梁及结构工程学会第三届学术交流会议论文集.
- [136] 李亦为, 甘惠琳(1992).“用改进的模拟法计算工程的失效概率.” *上海铁道学院学报*, 第13卷第2期.
- [137] Daniel,D.E.(1992).“Probabilistic Analysis of the Minimum Thickness of clay liners for Waste Cantainment Units.” Presentation at workshop on Reliability Methods for Risk Mitigation in Geotechnical Engineering ,Geotechnical Board, National Research Council ,Irvine,CA.
- [138] Hamilton, J.M. and Murff, J.D. (1992). “Selection of LRFD Resistance Factors for Pile Foundation Design.” *Structures Congress 92*, ed. Jim Morgan, ASCE, 788–795.
- [139] Ronold, K. O. and Bjerager, P. (1992). “ Model Uncertainty Representation in Geotechnical Reliability Analysis. ” *J. Geotech. Engrg.*, 118(3), 363–376.
- [140] Tang, W. H. and Gilbert, R. B. (1992). *Offshore Pile System Reliability*. Research Report for project PRAC 89–29, American Petroleum Institute.
- [141] 刘西拉(1993).“我国结构工程学科应优先发展的领域.” *土木工程学报*, 第4期.
- [142] 高大钊(1993).“地基基础工程标准化与概率极限状态设计原则.” *岩土工程学报*, 第15卷第4期.
- [143] 吴炳焜 (1993).“The Probabilistic Aspects of Stress Tensors in Mechanics of Particulate Media.” *西南交通大学学报(英文版)*, Vol. 1, No.1.
- [144] DeGroot, D. J., and Baccher, G. B. (1993). “Estimating Autocovariance of In–situ Soil Properties.” *J. Geotech. Engrg.*, 119(1).

- [145] Wolff, T. F.(1993). "Probabilistic Assessment of Pile Interference." *J. Geotech. Engrg.*, 119(3).
- [146] Chowdhury, R. N., and Xu, D. W. (1993). "Rational polynomial Technique in Slope-Reliability Analysis." *J. Geotech. Engrg.*, 119(12), 1910-1928.
- [147] Tang, W. H. (1993). "Recent developments in geotechnical reliability." *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Li &Lo (eds), Balkema.
- [148] Kay, J. N. (1993). "Probabilistic design of foundations and earth structures." *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Li & Lo(eds), Balkema.
- [149] White, W. (1993). "Soil variability: Characterisation and modeling." *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, Li &Lo (eds), Balkema, Rotterdam.
- [150] 祝玉学(1993).边坡可靠性分析.冶金工业出版社.
- [151] 姚耀武, 陈志伟(1994).“土坡稳定可靠度分析.”岩土工程学报, 第16卷第2期.
- [152] 张润楚, 王兆军(1994).“关于计算机试验的设计理论和数据分析.”应用概率统计, 第10卷第4期.
- [153] 包承纲(1994).“可靠度分析方法在岩土工程中的应用.”海峡两岸土力学及基础工程(地工技术)学术研讨会论文集, 西安.
- [154] 冷伍明, 赵善锐(1995).“土工参数不确定性的计算分析.”岩土工程学报, 第17卷第2期, 68-74.
- [155] 闫澍旺等(1995).“土性剖面随机场模型的平稳性和各态历经性验证.”岩土工程学报, 第17卷第3期, 1-9.
- [156] 张广文, 刘令瑶(1995).“确定随机变量概率分布参数的推广 Bayes 法.”岩土工程学报, 第17卷第3期, 91-94.
- [157] 周镜(1995).“第1章总论”.桩基工程手册, 中国建筑工业出版社.
- [158] 中华人民共和国行业标准(1995), 建筑桩基技术规范 JGJ94-94, 中国建筑工业出版社, 1995年9月第1版.
- [159] 高大钊(1996).“岩土工程设计安全度指标及其应用.”工程勘察, 1996年第1期.
- [160] 张征, 刘淑春, 鞠硕华(1996).“岩土参数空间变异性分析原理与最优估计模型.”岩土工程学报, 第18卷第4期.
- [161] 李杰(1996).随机结构系统.科学出版社, 1996年10月第1版.
- [162] Tang, W. H. (1997).“Dealing with Uncertainties in Geotechnical Engineering.” *Proceedings of the Second International Symposium on Structures and Foundations in Civil Engineering*, Hong kong.