



工程力学(二)

历年考题



2018-5-20

机械工程学院 简琦薇

目录

目录	- 1 -
一、 绪论	- 1 -
二、 轴向拉伸与压缩	- 2 -
三、 剪切与挤压	10
四、 扭转	12
五、 梁的平面弯曲	17
六、 应力状态分析与强度理论	30
七、 组合变形	40
八、 压杆稳定	50
附录：计算公式	60

一、 绪论

1. 工程力学的主要任务是研究构件的强度、刚度与稳定性问题, 强度是指: B; 刚度是指: C;

稳定性是指: A。(2015)

(A) 保持原有平衡状态的能力; (B) 构件抵抗破坏的能力; (C) 构件抵抗变形的能力。

2. 根据大量的试验结果表示, 一点的线应变 ε 与该点应变方向的正应力 σ 的关系为

$\sigma = E\varepsilon$, 称为拉压胡克定理, 该点的角应变 γ 与其应变方向的剪应力 τ 的关系为

$\tau = G\gamma$, 称为剪切胡克定理。(2016)

3. 线应变 ε 的单位是 1, 角应变 γ 的单位是 1。(2016)

4. 材料力学中, 变形固体的基本假设有连续性假设, 均匀性假设, 各向同性假设, 小变形假设。(2016)

5. 各向同性均匀材料的弹性性质, 由弹性模量 E , 剪切弹性模量 G 和泊松比 μ 来表征, 这三者之间的关系为 B。(2016)

(A) $G = \frac{E}{1+\mu}$; (B) $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; (C) $E = \frac{G}{1+\mu}$; (D) $E = \frac{G}{2(1+\mu)}$ 。

6. 横向变形系数又称为 C。(2016)

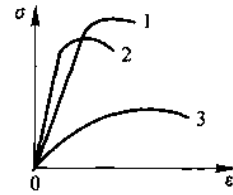
(A) 弹性模量; (B) 剪切弹性模量;

(C) 泊松比; (D) 抗拉刚度。

二、 轴向拉伸与压缩

1. 三根杆的尺寸相同但材料不同, 材料的应力-应变曲线如图所示, 试问:

(1)强度最高的是 1 。 (2)刚度最大的是 2 。 (2017)



2. 拉伸试样由硬铝制成, 厚度 $\delta = 2\text{mm}$, 试验段板宽 $b = 20\text{mm}$, 标距 $L = 70\text{mm}$, 在轴向拉力 $F = 6\text{kN}$ 作用下, 测得试验段伸长量 $\Delta L = 0.15\text{mm}$, 板宽缩短 $\Delta b = 0.014\text{mm}$, 则硬铝的弹性模量 $E = \underline{70\text{GPa}}$, 泊松比 $\mu = \underline{0.33}$ 。(2017)

3. 对于没有明显屈服阶段的塑性材料, 通常以产生 0.2% 残余应变时所对应的应力值作为屈服强度, 称为名义屈服强度, 记作 $\underline{\sigma_{0.2}}$ 。(2016)

4. 标距为 100mm 标准计划试件, 直径为 10mm , 拉断后测得伸长后的标距为 123mm , 颈缩处的最小直为 6.4mm , 则该材料的延伸率 $\delta = \underline{23\%}$, 断面收缩率 $\phi = \underline{59.04\%}$ 。(2016)

5. 低碳钢拉伸的四个阶段有弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段。(2016)

6. 轴向拉压的强度条件为 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, 对于许用应力 $[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$ 中的极限应力 σ_u 而言, 脆性材料 σ_u

取值为: (D) σ_b ; 塑性材料 σ_u 的取值为: (C) σ_s ; 或 (E) $\sigma_{0.2}$ 。(2015)

7. 直径为 $d = 10\text{mm}$ 的拉伸试件, 标距 $l_0 = 50\text{mm}$, 拉伸断裂后, 两标点间的长度 $l_1 = 63.4\text{mm}$, 颈缩处的直径 $d_1 = 5.7\text{mm}$, 试件的延伸率 $\delta = 26.8\%$; 断面收缩率 $\phi = 67.51\%$, 属于塑性材料。(2015)

1 当低碳钢试件的试验应力 $\sigma = \sigma_s$ 时，试件将：(D) (2014)

- (A) 完全失去承载能力； (B) 破断；
(C) 发生局部颈缩现象； (D) 产生较大的塑性变形；

2 脆性材料的极限应力是(D) (2014)

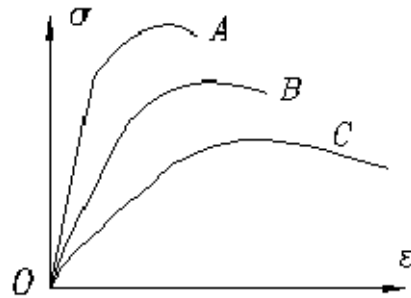
- A. σ_e B. σ_p C. σ_s D. σ_b

3 .甲、乙两杆 ,几何尺寸相同 ,轴向拉力 P 相同 ,材料不同 ,它们的应力和变形正确的是(C)。

- (A) 应力 σ 和变形 Δl 相同； (B) 应力 σ 不同和变形 Δl 相同；
(C) 应力 σ 相同和变形 Δl 不同； (D) 应力 σ 不同和变形 Δl 不同；

4、图示三种材料的应力—应变曲线，则 (2014)

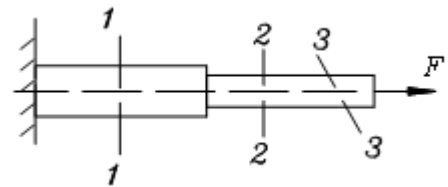
- 弹性模量最大的材料是 (A) ；
强度最高的材料是 (A) ；
塑性性能最好的材料是 (C)



5. 变截面杆受集中力 F 作用，如图 2.39 所示。设 F_1 、 F_2 、 F_3 分别表示杆中截面 1-1、2-2 和 3-3

上沿轴线方向的内力值，则下列结论中哪个是正确的？正确答案是__ (A) __。(2013)

- (A) $F_1 = F_2 = F_3$ ； (B) $F_1 = F_2 \neq F_3$ ；
(C) $F_1 \neq F_2 = F_3$ ； (D) $F_1 \neq F_2 \neq F_3$ ；



6 . 对于没有明显屈服阶段的塑性材料，通常以 $\sigma_{0.2}$ 表示屈服极限。其定义有以下四个结论，正确的是哪一个？__ C __。(2015)

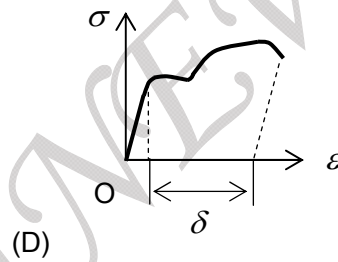
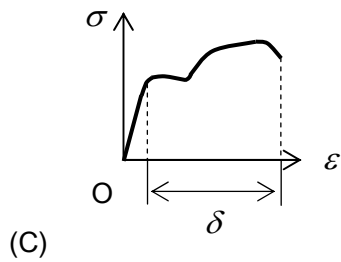
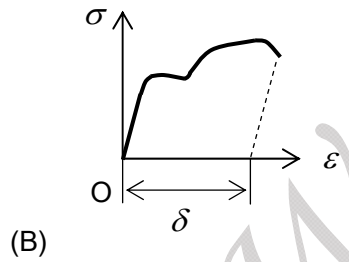
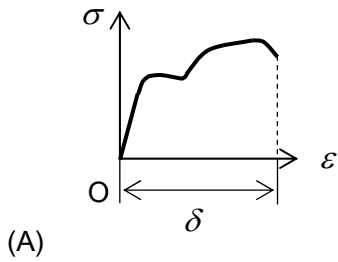
- (A) 产生 2% 的塑性应变所对应的应力值作为屈服极限；

(B) 产生 0.02%的塑性应变所对应的应力值作为屈服极限；

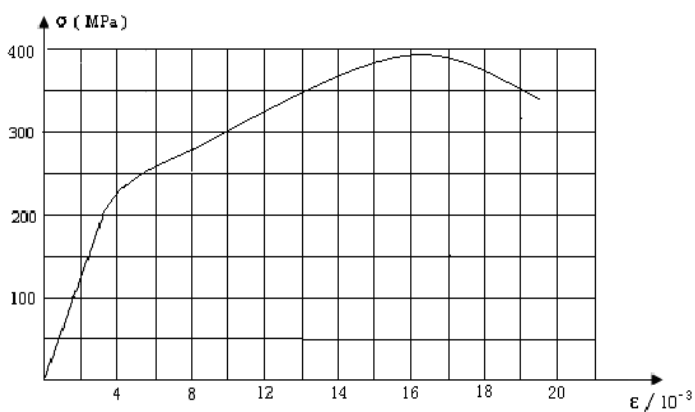
(C) 产生 0.2%的塑性应变所对应的应力值作为屈服极限；

(D) 产生 0.2%的应变所对应的应力值作为屈服极限。

7. 低碳钢的拉伸 $\sigma - \varepsilon$ 曲线中，延伸率 δ 为图 B _____。(2016)

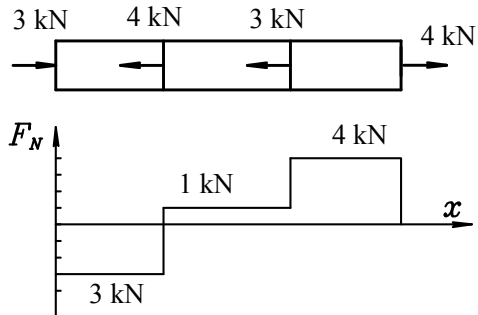


1. 某材料的应力应变曲线如图所示,在图上标示出该材料的比例极限 σ_P 、名义屈服极限 $\sigma_{0.2}$ 、强度极限 σ_b 。

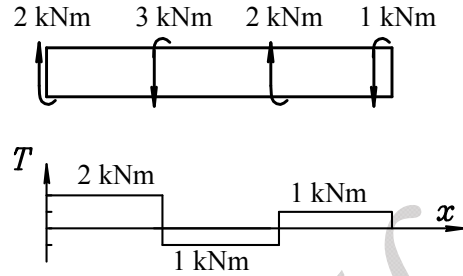


简答题 (每题 6 分) (2015)

1、画出图 (a) 拉杆的轴力图；

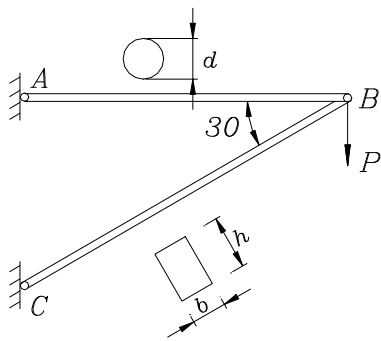


2、画出图 (b) 轴的扭矩图。



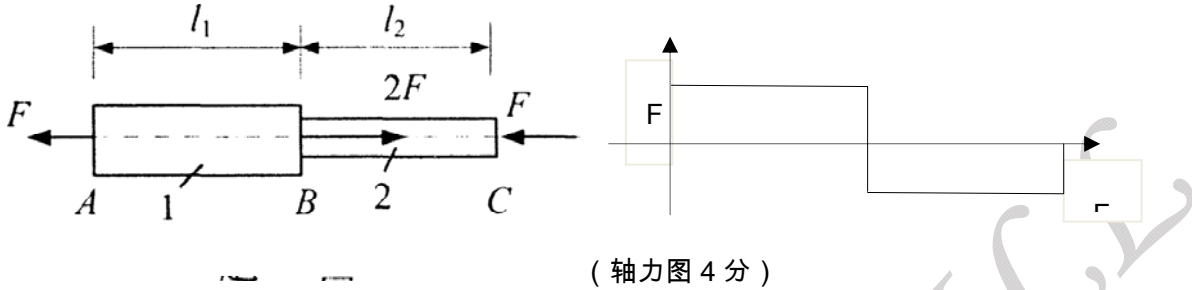
计算题 (本题共 1 小题 , 10 分) (2014)

图示三角架， AB 为圆截面钢杆，直径 $d = 30mm$ ； BC 为矩形木杆，尺寸 $b = 600mm$ ， $h = 120mm$ 。若钢的许用应力 $[\sigma]_G = 170MPa$ ，木材的 $[\sigma]_M = 10MPa$ ，试校核各杆的强度。
 $P = 40kN$ 。



计算题(2016)

1. 图示阶梯形杆 AC，已知力 $F=10\text{ kN}$ ， $l_1=l_2=400\text{mm}$ ，AB 段的横截面面积 $A_1=100\text{mm}^2$ ，BC 段的横截面面积 $A_2=50\text{mm}^2$ ，其弹性模量均为 $E=200\text{GPa}$ ，画出轴力图，计算杆 AC 的轴向变形 Δl 。



$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum \frac{F_{Ni} l_i}{EA_i} = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} + \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = \frac{Fl_1}{EA_1} - \frac{Fl_2}{EA_2} \\ &= \frac{10 \times 10^3 \times 0.4}{200 \times 10^9} \left(\frac{1}{100 \times 10^{-6}} - \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \right) \quad (6 \text{ 分}) \\ &= 0.2 \text{ mm} \end{aligned}$$

计算题 (2016)

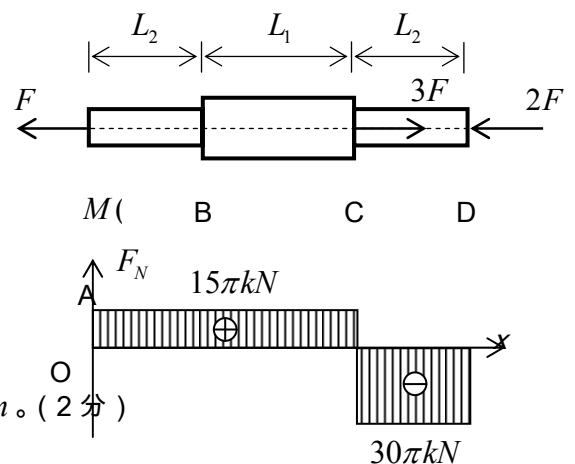
1. 变截面直杆 AD 如图， $F = 15\pi\text{kN}$ ， $L_1 = 500\text{mm}$ ， $L_2 = 300\text{mm}$ ，AB 段和 CD 段为实心圆， $d_1 = 15\text{mm}$ ，BC 段为实心圆， $d_2 = 20\text{mm}$ ，其弹性模量均为 $E = 240\text{GPa}$ ，画出轴力图，并计算 D 截面相对于 B 截面的位移 ΔL 。(2016)

解：轴力图，(3 分)

BC 段， $\Delta L_1 = \frac{F_{N1} L_1}{EA_1} = 0.3125\text{mm}$ ，拉，(2 分)

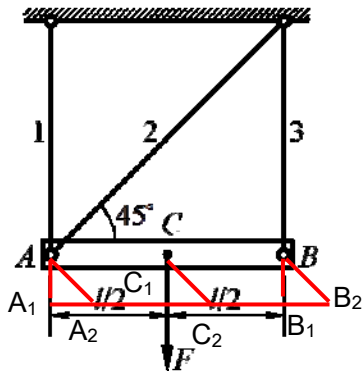
CD 段， $\Delta L_2 = \frac{F_{N2} L_2}{EA_2} \approx 0.67\text{mm}$ ，压，(2 分)

D 截面相对于 B 截面的位移 $\Delta L = \Delta L_1 - \Delta L_2 = -0.3575\text{mm}$ 。(2 分)



计算题 (2017)

1. 已知图示结构中三杆的拉压刚度均为 EA ，设杆 AB 为刚体，载荷 F ，杆 AB 长 l 。试求点 C 的铅垂位移和水平位移。(2017)



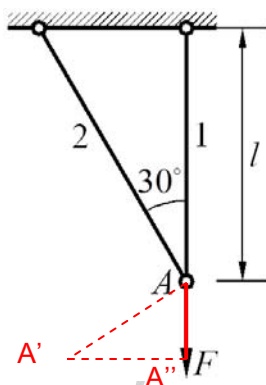
(图 4 分)

解： $F_{N1} = F_{N3} = \frac{F}{2}$ ， $F_{N2} = 0$ ，受力分析列方程求各杆受力 (4 分)

$$\Delta_{Cx} = C_1C_2, \quad \Delta_{Cy} = CC_1,$$

$$\Delta_{Cx} = \Delta_{Cy} = \frac{Fl}{2EA}。 (4 分)$$

2. 图示受力结构中，若杆 1 和杆 2 的拉压刚度 EA 相同，则求节点 A 的铅垂位移和水平位移。(2015)

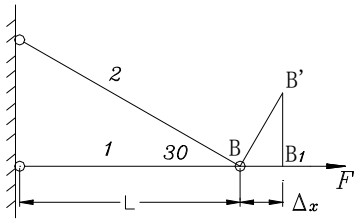


解： $F_{N1} = F$ ， $F_{N2} = 0$

$$\Delta L_1 = \frac{Fl}{EA}, \quad \Delta L_2 = 0$$

$$\Delta A_x = A'A'' = \frac{\sqrt{3}Fl}{EA}, \quad \Delta A_y = AA'' = \frac{Fl}{EA}$$

3. 1 杆与 2 杆的弹性模量 E 与横截面面积 A 均相同，试求桁架 B 点的水平与垂直位移，并画出节点 B 的变形图。(2014)



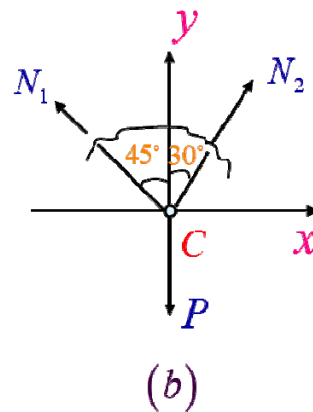
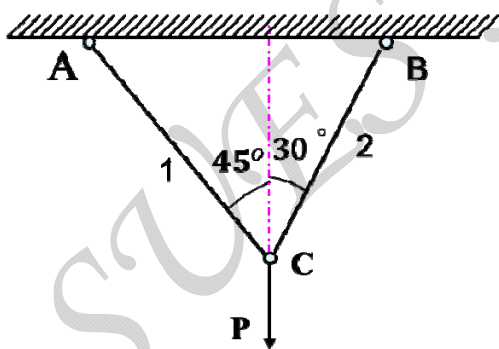
解： $F_{N1} = F$, $F_{N2} = 0$

$$\Delta L_1 = \frac{Fl}{EA}, \quad \Delta L_2 = 0$$

$$\Delta_x = BB_1 = \frac{Fl}{EA}, \quad \Delta_y = B'B_1 = \sqrt{3} \frac{Fl}{EA}$$

计算题 (本题共 1 小题，共 16 分) (2014)

图 (a) 所示结构中，杆 1 材料为碳钢，横截面面积为 $A_1 = 200\text{mm}^2$ ，许用应力 $[\sigma]_1 = 160\text{Mpa}$ ；杆 2 材料为铜合金，横截面面积 $A_2 = 300\text{mm}^2$ ，许用应力 $[\sigma]_2 = 100\text{Mpa}$ ，试求此结构许可载荷 P 。



解: 1) 结构中各杆应满足平衡条件，对节点 C 取图 (b) 所示研究对象，有

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 30^\circ = 0 & (a) \\ \sum Y &= N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 30^\circ - P = 0 & (b) \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

由式 (a)、(b) 解得各杆轴力与外载的关系

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}P}{1+\sqrt{3}} = 0.518P \quad (\text{拉杆}) \quad (a) \quad (2 \text{分})$$

$$N_2 = \frac{2P}{1+\sqrt{3}} = 0.732P \quad (\text{拉杆}) \quad (b)$$

2) 结构中各杆应满足各自强度条件

$$N_1 \leq [N_1] = A_1 [\sigma]_1 \quad (e) \quad (4 \text{分})$$

$$N_2 \leq [N_2] = A_2 [\sigma]_2 \quad (f)$$

$$0.518P \leq A_1 [\sigma]_1 \quad (3 \text{分}),$$

$$[P]_1 \leq \frac{2 \times 10^{-4} \times 160 \times 10^3}{0.518} = 61.78 \text{kN}$$

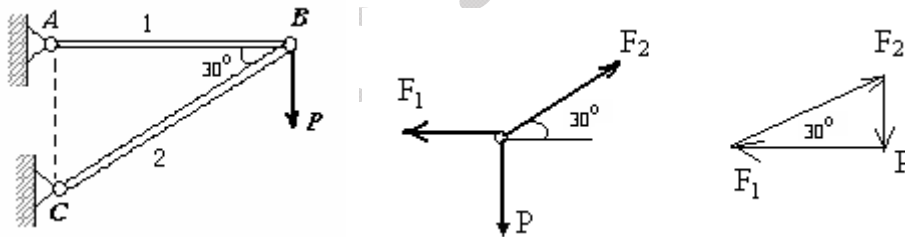
$$0.732P \leq A_2 [\sigma]_2 \quad (3 \text{分})$$

$$[P]_2 \leq \frac{3 \times 10^{-4} \times 100 \times 10^3}{0.732} = 40.98 \text{kN}$$

结论 (1分)

计算题 (10分) (2015)

图示三角构架，AB为圆截面刚杆，直径为30mm，刚杆的许用应力为 $[\sigma] = 170 \text{MPa}$ ，BC为边长为100mm的矩形木杆，木材的需用应力 $[\sigma] = 10 \text{MPa}$ ，试求结构的许用载荷P。



解： $F_1 = 1.732P$ (拉) ， $F_2 = 2P$ (压)

$$\sigma_{AB} = \frac{F_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \times 1.732P}{3.14 \times 30^2} \leq 170 \text{MPa}$$

$$P \leq 69.3 \text{KN}$$

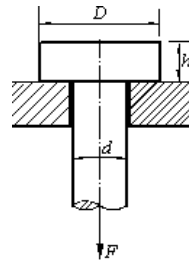
$$\sigma_{BC} = \frac{F_2}{100 \times 100} = \frac{P}{10000} \leq 10 \text{MPa}$$

$$P \leq 100 \text{KN}$$

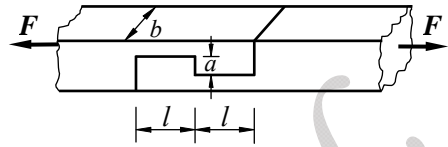
$$P_{\max} \leq 69.3 \text{KN}$$

三、 剪切与挤压

1. 螺栓的剪切面积 πdh , 挤压面积 $\pi(D^2 - d^2) / 4$ 。 (2017)



2. 木榫接头的剪切面积 bl , 挤压面积 ab 。 (2017)



4. 叶片根部结构, 连接部位及其横截面如图 4 , 则剪切面积 $A = \pi dt$ _____ , 挤压面积 $A =$

$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ 。 (2016)

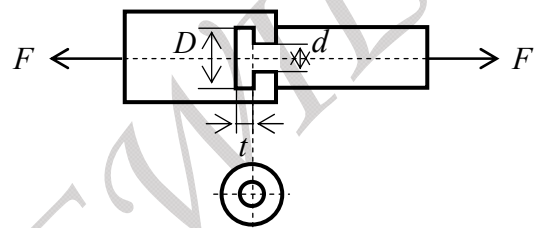


图 4

5. 摇手柄的手柄和心轴(阴影部分)之间由平键联接如图 , 键的剪切面积 $A = bL$; 挤压面积 $A =$

$\frac{tL}{2}$ 。 (2016)

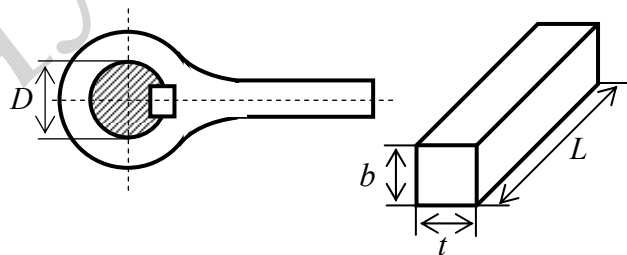
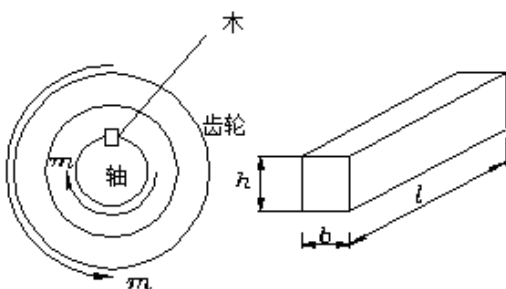
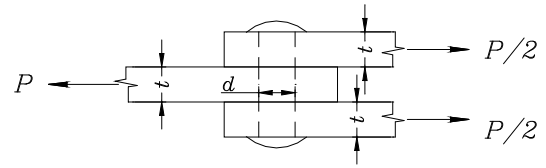


图 5

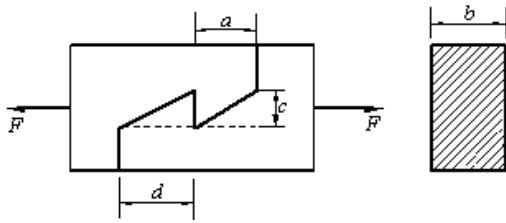
6. 齿轮和轴用平键联接如图 6 , 键的受剪面积 $A = bl$; 挤压面积 $A = \frac{hl}{2}$ 。 (2016)



7. 铆接头的连接板厚度 $t = d$ ，受力如图，则铆钉剪切应力 $\tau = \frac{2P}{\pi d^2}$ ，挤压应力 $\sigma_{bs} = \frac{P}{2dt}$ 和 $\frac{P}{dt}$ 。

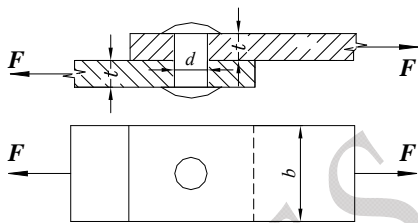


8. 试求螺栓的剪切面和挤压面的面积剪切面积 bd 、 ad ；挤压面积 bc 。(2013)



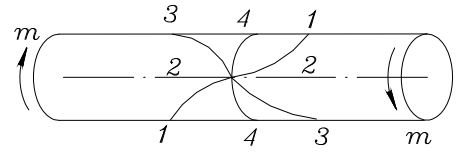
9. 在如图所示两块板用铆钉连接并受拉力 F 的作用，板的厚度为 t ，铆钉直径为 d 。铆钉的剪应力

$\tau = 4F / \pi d^2$ ，铆钉的挤压应力 $\sigma_{bs} = F / td$ 。(2015)



四、 扭转

1. 图示圆轴，若材料分别为低碳钢与铸铁，两端受到的外力偶方向如图所示，指出低碳钢与铸铁分别沿着图中哪个截面破坏？



低碳钢 4-4，铸铁 1-1。(2017)

2. 现有两根材料、长度及扭矩相同的受扭圆轴，若两者直径之比为 3 : 4。则此时两轴的抗扭刚度之比为 (256 : 81)。(2014)

3. 圆轴扭转时，若传递的功率为 10 千瓦(KW)，转速为 100 转 / 分(r / min； rpm)。则传递的外力偶矩为 954.9Nm。(2014)

1. 一内外径之比为 $\alpha = d/D$ 的空心圆轴，当两端承受扭转力偶矩时，横截面上的最大剪应力为 τ ，则内圆周处的剪应力为 (B):(2014)

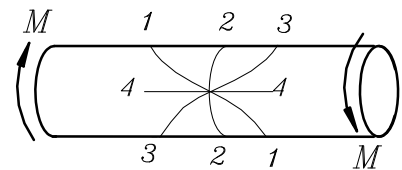
(A) τ ; (B) $\alpha\tau$; (C) $(1-\alpha^3)\tau$; (D) $(1-\alpha^4)\tau$;

2. 图示圆轴，材料分别为低碳钢与铸铁，两端受力如图所示，杆的破坏截面有以下四种案:(2016)

(A) 沿螺旋面 1 - 1 破坏； (B) 沿横截面 2 - 2 破坏；

(C) 沿螺旋面 3 - 3 破坏； (D) 沿纵截面 4 - 4 破坏；

低碳钢的正确答案是 (B)；铸铁的正确答案是 (C)。



3. 空心圆轴的外径为 D ，内径为 d ， $\alpha = d/D$ 。其抗扭截面系数为(D)。(2016)

(A) $W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha)$ ； (B) $W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^2)$ ；

(C) $W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^3)$ ； (D) $W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$

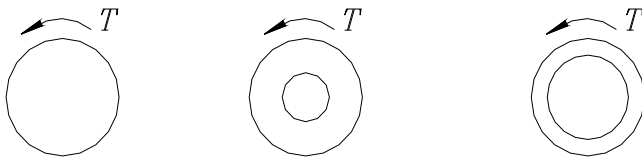
4. 一内外径之比为 $\alpha = d/D$ 的空心圆轴，当两端承受扭转力偶时，若横截面上的最大切应力为 τ ，则内圆周处的切应力有四种答案，正确的是 (B)。(2016)

- (A) τ ; (B) $\alpha\tau$; (C) $(1-\alpha^3)\tau$; (D) $(1-\alpha^4)\tau$ 。

5. 切应力互等定理是由单元体_____A_____。(2015)

- (A) 静力平衡关系导出的； (B) 几何关系导出的；
(C) 物理关系导出的； (D) 强度条件导出的。

1. 分别画出图示三种截面上剪应力沿半径各点处的分布规律。(2015)



(a) 圆截面 (b) 空心圆截面 (c) 薄壁圆截面

计算题每题 15 分，共 30 分) (2013)

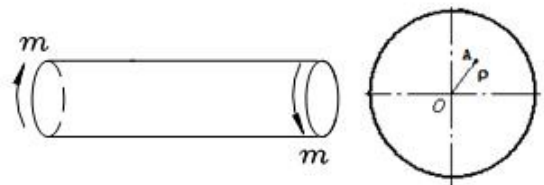
图示受扭圆轴的直径， $d = 50\text{mm}$ 外力偶矩 $m = 2\text{kNm}$ ，材料的 $G = 82\text{GPa}$ 。试求：(1)横截面上 $\rho = d/4$ 的 A 点处切应力和相应的切应变。(2) 最大切应力和单位长度相对扭转角。

$$\text{解：} \tau_A = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{2 \times 10^6 \times 50 \times 32}{4 \times \pi \times 50^4} = 40.76\text{MPa}$$

$$\gamma_A = \frac{\tau_A}{G} = 4.9 \times 10^{-4}$$

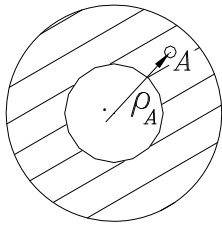
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{2 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 50^3} = 81.5\text{MPa}$$

$$\theta = \frac{T_A}{GI_p} \times \frac{\pi}{180} = 0.0224^\circ/\text{m}$$



计算题 (2017)

1. 图示空心圆截面轴，外径 $D = 40 \text{ mm}$ ，内径 $d = 20 \text{ mm}$ ，扭矩 $T = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，计算 $\rho_A = 15 \text{ mm}$ 的 A 点处的扭转切应力 τ_A ，以及横截面上最大与最小扭转切应力。(2017)



解：1) 计算 A 点处的扭转切应力 τ_A

$$\therefore \tau_A = \frac{T\rho_A}{I_p} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \quad \alpha = \frac{d}{D} = \frac{20}{40} = 0.5 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \tau_A = \frac{T\rho_A}{I_p} = \frac{1 \times 10^3 \times 15 \times 10^{-3} \times 32}{\pi(40 \times 10^{-3})^4 \times (1-0.5^4)} = 63.662 \text{ MPa} \quad (2 \text{ 分})$$

2) 计算截面上最大与最小扭转切应力

$$\tau_{\max} = \frac{TD}{2I_p} = \frac{1 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-3} \times 32}{\pi(40 \times 10^{-3})^4 \times (1-0.5^4)} = 84.883 \text{ MPa} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{或 } \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{1 \times 10^3 \times 16}{\pi(40 \times 10^{-3})^3 \times (1-0.5^4)} = 84.883 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{Td}{2I_p} = \frac{1 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \times 32}{\pi(40 \times 10^{-3})^4 \times (1-0.5^4)} = 42.441 \text{ MPa} \quad (3 \text{ 分})$$

计算题 (15 分) (2015)

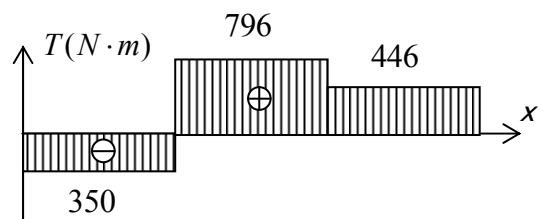
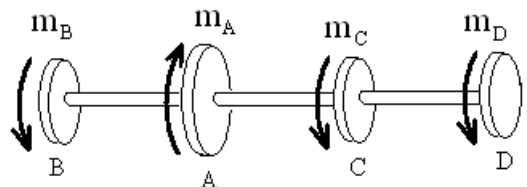
如图传动轴的主动轮的输入功率 $P_A = 36 \text{ kW}$ ，在 B 、 C 、 D 处的输出功率分别 $P_B = P_C = 11 \text{ kW}$ ， $P_D = 14 \text{ kW}$ ，轴的转速为 $n = 300 \text{ r/min}$ 。求：1) 画 BD 轴的扭矩图 2) 若材料的剪切许用应力为 $[\tau] = 80 \text{ MPa}$ ，设计轴的直径 $d = ?$

$$\text{解：输出扭矩 } M_A = 9549 \frac{36}{300} = 1146 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_B = M_C = 350 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_D = 446 \text{ N} \cdot \text{m}$$

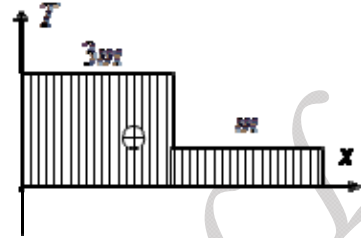
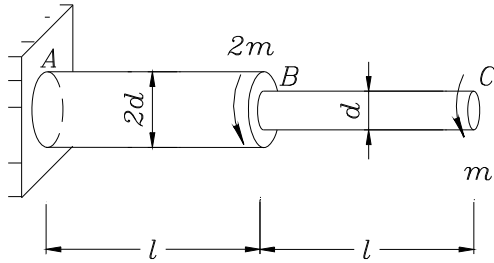
$$T_{\max} = 796 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 796 \times 10^3}{\pi \times 80}} = 37 \text{ mm}$$



计算题 (2016)

1. 圆轴如图，材料的剪切模量为 G ，轴的直径为 d ，画出扭矩图，计算自由端 C 的扭转角。



解：AB 段， $T = 3m$ ，BC 段， $T = m$ 扭矩图 (4 分)

$$\text{AB 段的转角 } \varphi_{BA} = \frac{TL}{GI_p} = \frac{6mL}{\pi Gd^4}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{BC 段的转角 } \varphi_{CB} = \frac{TL}{GI_p} = \frac{32mL}{\pi Gd^4}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{自由端 C 的扭转角 } \varphi = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} = \frac{38mL}{\pi Gd^4}. \quad (2 \text{ 分})$$

计算题 (2017)

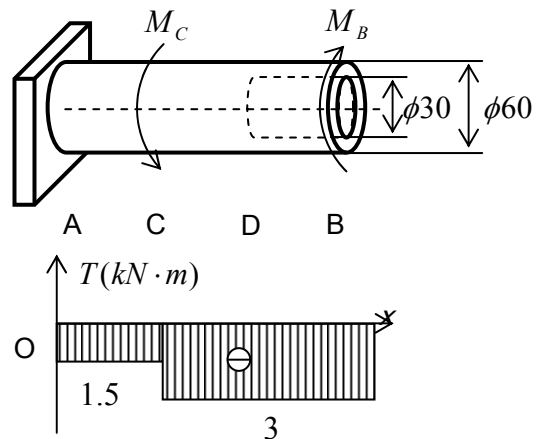
1. 圆轴 A 端固定，如图， $M_B = 3\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $M_C = 1.5\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $AC = CD = BD = 0.6\text{m}$ ，剪切弹性模量 $G = 200\text{GPa}$ ，作轴的扭矩图，并求 B 截面相对截面 C 的扭转角 φ_{BC} 。(2017)

解：轴的扭矩图如图，(4 分)

$$\varphi_{DC} = \frac{T \cdot CD}{GI_{pCD}} \approx 0.40^\circ, \quad (2 \text{ 分})$$

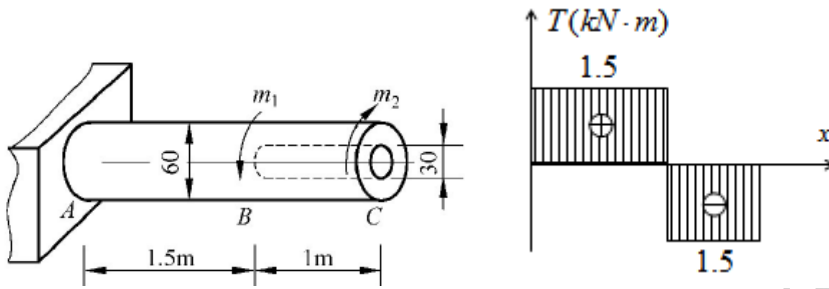
$$\varphi_{BD} = \frac{T \cdot BD}{GI_{pBD}} \approx 0.43^\circ, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\varphi_{BC} = \varphi_{BD} + \varphi_{DC} = 0.83^\circ. \quad (1 \text{ 分})$$



计算题 (本题 14 分)(2017)

钢制受扭圆轴，一端固定，如图所示， $m_1 = 3kN \cdot m$ ， $m_2 = 1.5kN \cdot m$ ，剪切弹性模量 $G=80GPa$ ，试求：(1) 画出扭矩图；(2) AB 和 BC 段横截面上最大切应力；(3) B 截面相对于 A 截面的扭转角 φ_{AB} ，C 截面相对于 B 截面的扭转角 φ_{BC} 和 C 截面相对于 A 截面的扭转角 φ_{AC} 。



解：(1) 扭矩图(3分)，

$$(2) AB, \tau_{\max} = \frac{T_1 D}{2I_p} = \frac{T_1}{W_p} \approx 35.37MPa (3分),$$

$$BC, \tau_{\max} = \frac{T_2 D}{2I_p} = \frac{T_2}{W_p} \approx 37.73MPa (3分),$$

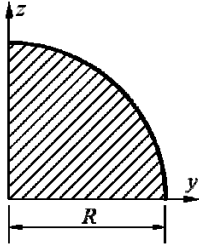
$$(2) \varphi_{BA} = \frac{T_1 \cdot AB}{GI_p} \approx 1.27^\circ (2分),$$

$$\varphi_{CB} = \frac{T_2 \cdot BC}{GI_p} \approx 0.90^\circ (2分),$$

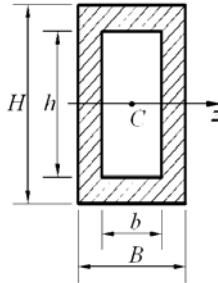
$$\varphi_{CA} = -\varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 0.37^\circ (1分)。$$

五、 梁的平面弯曲

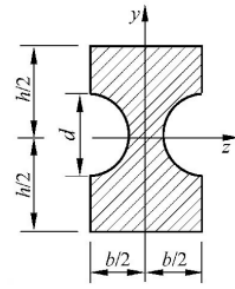
1. 图示扇形的对 y 轴的惯性矩为 $I_y = \pi R^4 / 16$ ，对坐标原点的极惯性矩 $I_p = \pi R^4 / 8$ 。(2017)



1 题图

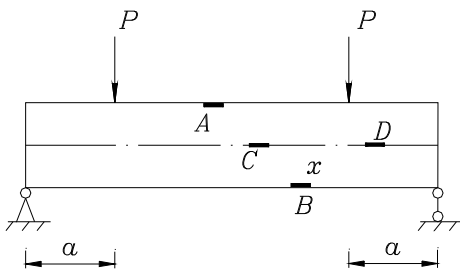


2 题图

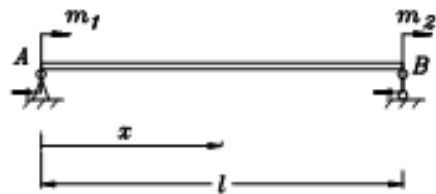


3 题图

2. 图示 $B \times H$ 的矩形中挖掉一个 $b \times h$ 的矩形，则此平面图形的 $W_z =$ _____。(2014)
3. 如图所示，一矩形截面 $b = 2h/3$ ，从左右两侧切去直径为 d 的半圆形， $d = h/2$ ，切去后的平面图形对 z 轴的惯性矩为 _____。
3. 提高梁弯曲强度的措施有选择合理的截面形状、合理安排梁的受力情况、合理选用材料、设计等强度梁。(2016)
4. 图示梁的 A、B、C、D 四点中，单向应力状态的点是 A、B，纯剪应力状态的点是 D，在任何截面



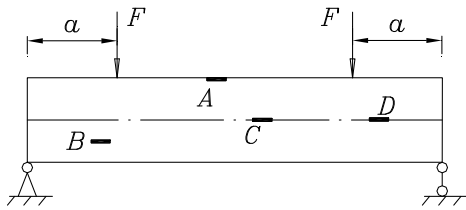
4 题图



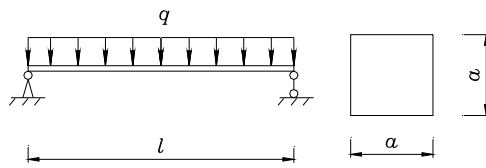
5 题图

5. 已知图示梁的弯曲刚度 EI 为常数，今欲使梁的挠曲线在 $x = l/3$ 处出现一拐点，则两力偶的比值 m_1 / m_2 应为 1/2。(2016)

6、图示梁的 A、B、C、D 四点中，单向应力状态的点是 A ，纯剪切应力状态的点是 D ，在任何截面上应力均为零的点是 B 。



6 题图

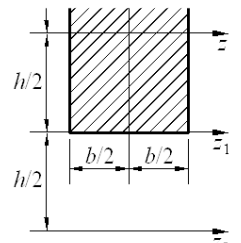


7 题图

7. 所示正方形截面简支梁，若载荷不变，而将边长增加一倍，其则最大弯曲正应力为原来的 1/8 倍，最大弯曲切应力为原来的 1/4 倍。(2013)

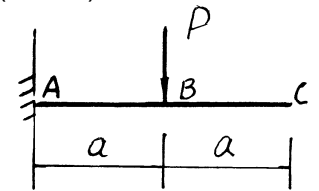
1. 由惯性矩的平行移轴公式， I_{z_2} 的答案有四种：正确的是 (C)。(2014)

- (A) $I_{z_2} = I_{z_1} + bh^3/4$; (B) $I_{z_2} = I_z + bh^3/4$;
 (C) $I_{z_2} = I_z + bh^3$; (D) $I_{z_2} = I_{z_1} + bh^3$;



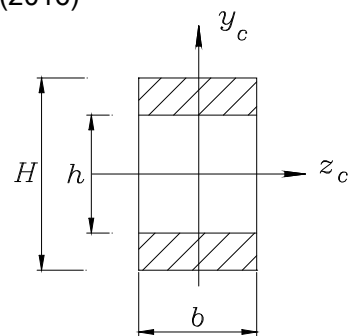
2. 图示悬臂梁 AC，C 截面处的挠度值，有四种答案，其中正确的是 (C)。(2014)

- A. $f_c = \theta_B \cdot a$ B. $f_c = \theta_A \cdot 2a$
 C. $f_c = f_B + \theta_B \cdot a$ D. $f_c = f_B$

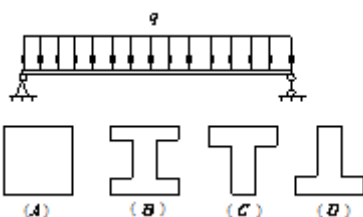


3. 图示截面对形心轴 z_c 的抗弯截面模量 W_{z_c} 有四种答案正确的是 (B)。(2016)

- (A) $bH^2/6 - bh^2/6$;
 (B) $(bH^2/6)[1 - (h/H)^3]$;
 (C) $(bh^2/6)[1 - (H/h)^3]$;
 (D) $(bh^2/6)[1 - (H/h)^4]$ 。

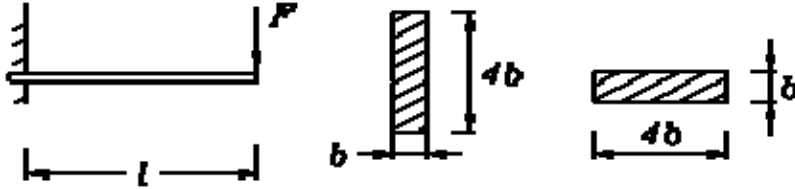


4. 图示梁的材料为铸铁，截面形式有四种如图所示，最佳形式为 (D)。(2016)



5. 一梁拟用图示两种方式搁置, 则两种情况下的最大应力之比为 $\frac{(\sigma_{\max})_a}{(\sigma_{\max})_b}$ 为: B 。(2014)

- (A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{8}$; (C) $\frac{1}{16}$; (D) $\frac{1}{32}$;



6 圆环形截面梁的外径为 D , 内径为 d , 内外径之比 $\alpha = \frac{d}{D}$, 其抗弯截面系数 W_z 应为(D)(2014)

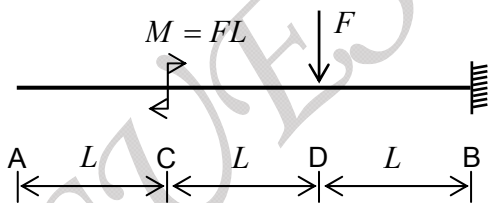
- A. $\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha)$ B. $\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^2)$ C. $\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^3)$ D. $\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$

7. 两根梁尺寸, 受力和支承情况完全相同, 但材料不同, 弹性模量分别为 E_1 和 E_2 , 且 $E_1 = 7E_2$, 则两根梁的挠度之比 y_1/y_2 为: (B) 。(2014)

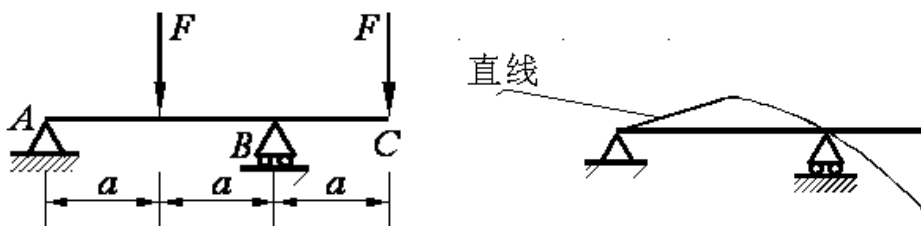
- (A) $1/14$; (B) $1/7$; (C) $1/49$; (D) $1/\sqrt{7}$;

8. 如图所示悬臂梁 AB , 不发生变形的是 A 段。(2015)

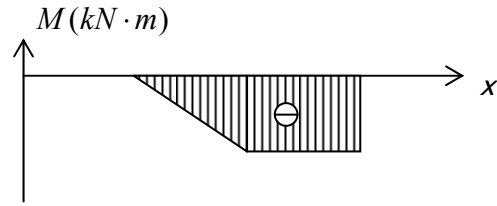
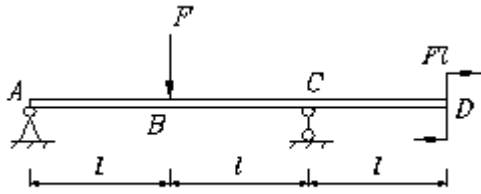
- (A) AC ; (B) CD ; (C) AD ; (D) DB 。



外伸梁受载荷如图所示, 绘制其挠曲线的大致形状。(2014)



画出图示梁的弯矩图及挠曲线大致形状。



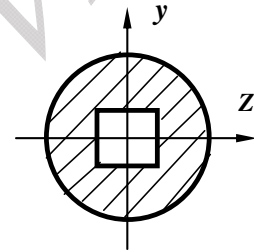
$$F_A=0, F_C=F, w_A=0, w_C=0$$

计算题 (2015)

1、如图所示是一枚被称为“孔方兄”的中国古钱币，设圆的直径为 d ，挖去的正方形边长为 b ，若 $b = d/2$ ，求该截面的弯曲截面系数 W_z 。

解：
$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{b^4}{12} = \frac{d^4}{192}(3\pi - 1) \quad (2分)$$

$$W_z = (\frac{\pi d^4}{64} - \frac{b^4}{12}) / (d/2) = \frac{d^3}{96}(3\pi - 1) \quad (4分)$$



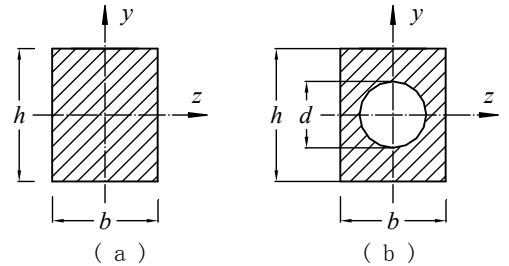
简答题 (每题 6 分) (2015)

如图所示 (a)、(b) 两图形中的 $h = 60\text{mm}$ 、 $b = 40\text{mm}$ ，其中 $d = 30\text{mm}$ 。试计算两图形的面积

比 $\frac{A_b}{A_a}$ 与对 z 的惯性矩 $\frac{I_z^b}{I_z^a}$ ，结果在梁的弯曲强度中说明什么问题？

$$A_a = bh, A_b = bh - \frac{\pi}{4}d^2, \frac{A_b}{A_a} = 0.705$$

$$I_{za} = \frac{1}{12}bh^3, I_{zb} = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{64}\pi d^4, \frac{I_{zb}}{I_{za}} = 0.945$$

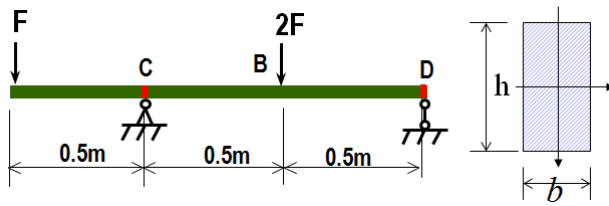


截面 (b) 相对截面 (a) 面积减少近 1/3，而惯性矩减少仅 0.55%，

说明在梁的弯曲强度中这种截面为合理截面。

计算题 (15 分) (2015)

图示矩形截面梁，横截面 $b=60\text{mm}$ 、 $h=120\text{mm}$ ， $[\sigma]=160\text{MPa}$ ，求： F_{\max}



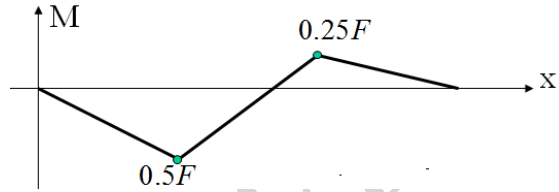
解：(1) 支反力 $F_C = 2.5F$ ， $F_D = 0.5F$

(2) 画弯矩图， $M_{\max} = -0.5F$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad \therefore \frac{0.5F}{\frac{1}{6}bh^2} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{[\sigma] \frac{1}{6}bh^2}{0.5m} = \frac{160 \times 60 \times 120^2}{0.5 \times 10^3 \times 6} = 46080\text{N}$$

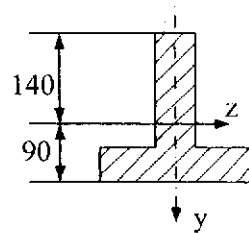
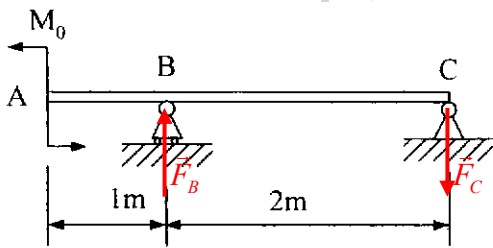
$$\therefore F_{\max} = 46.08 \text{ (kN)}$$



计算题 (本题共 1 小题，18 分) (2014)

倒 T 形截面外伸梁如图所示，集中力偶矩 $M_0=25\text{kN}\cdot\text{m}$ ，截面对形心轴 z 的惯性矩 $I_z=102 \times 10^6\text{mm}^4$ ，

试求：1. 画出梁的剪力图和弯矩图；2. 截面 B 上的最大弯曲拉应力和压应力。



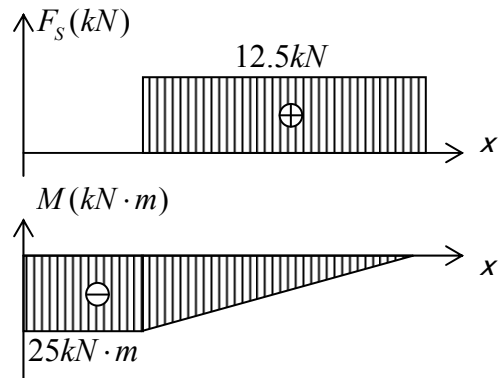
(尺寸单位：mm)

解：(1) 支反力 $F_B = F_C = 12.5\text{kN}$

(2) 画剪力图和弯矩图，B 截面上拉下压

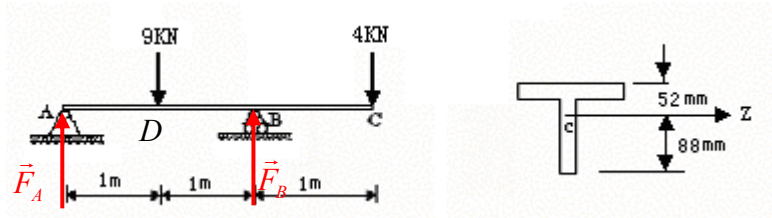
$$\sigma_t = \frac{M_B}{I_z} y_{\max}^t = \frac{25 \times 10^6}{102 \times 10^6} \times 140 = 34.31\text{MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{M_B}{I_z} y_{\max}^c = \frac{25 \times 10^6}{102 \times 10^6} \times 90 = 22.06\text{MPa}$$



计算题 (本题共 1 小题 , 15 分) (2014)

图示 AC 梁的受力如图所示 , 横截面为 $I_z=763\text{cm}^4$ 工字型钢。试求 : 1. 画出图示梁的剪力图和弯矩图 ; 2. 求出最大正弯矩和最大负弯矩所在的截面 ; 3. 截面梁上的最大弯曲拉应力和压应力 ; 4. 已知 $[\sigma_c]=50\text{MPa}$, $[\sigma_t]=30\text{MPa}$ 校核该梁



解 : (1) 支反力 $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -9 \times 1 + F_B \times 2 - 4 \times 3 = 0$, $F_B = 10.5\text{kN}$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B - 9 - 4 = 0, F_A = 2.5\text{kN}$$

(2) 画剪力图和弯矩图 , 最大正弯矩在 D 截面 , 最大负弯矩在 B 截面

(3) D 截面上压下拉 : $\sigma_t = \frac{M_D}{I_z} y_{\max}^t = \frac{2.5 \times 10^6}{763 \times 10^4} \times 88 = 28.83\text{MPa}$

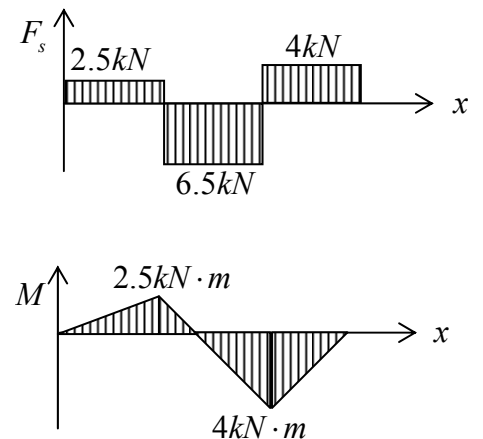
$$\sigma_c = \frac{M_D}{I_z} y_{\max}^c = \frac{2.5 \times 10^6}{763 \times 10^4} \times 52 = 17.04\text{MPa}$$

B 截面上拉下压 : $\sigma_t = \frac{M_B}{I_z} y_{\max}^t = \frac{4 \times 10^6}{763 \times 10^4} \times 52 = 27.26\text{MPa}$

$$\sigma_c = \frac{M_B}{I_z} y_{\max}^c = \frac{4 \times 10^6}{763 \times 10^4} \times 88 = 46.13\text{MPa}$$

$$\therefore \sigma_{\max}^c = 46.13\text{MPa} \leq [\sigma_c], \quad \sigma_{\max}^t = 28.83\text{MPa} \leq [\sigma_t]$$

(4) 梁满足强度条件 , 安全



计算题 (本题 14 分) (2016)

受均布载荷的简支梁如图, $L = 8m$, $D = 240mm$,

(1) 画出剪力、弯矩图; (2) 求全梁最大正应力。

解: (1) 求支反力 $F_A = F_B = 48kN$

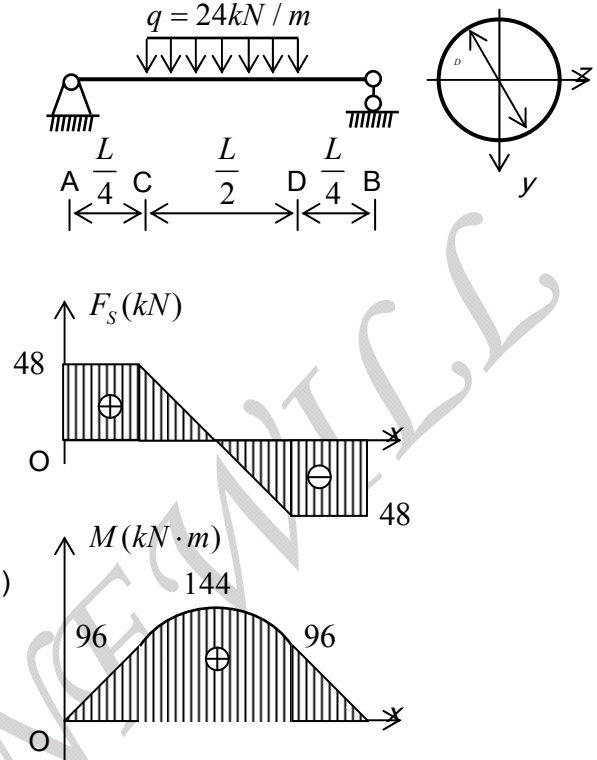
(2) 画出剪力图 (4 分); 画出弯矩图 (4 分)

$$(3) M_{\max} = F_A \times \frac{L}{2} - q \times \frac{L}{4} \times \frac{L}{8} = 144kN \cdot m,$$

跨中截面弯矩最大, 上压下拉 (2 分)

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}, (1 分)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}^t = \sigma_{\max}^c = \frac{M_{\max}}{W_z} \approx 106.10MPa。 (3 分)$$



计算题 (本题 14 分) (2016)

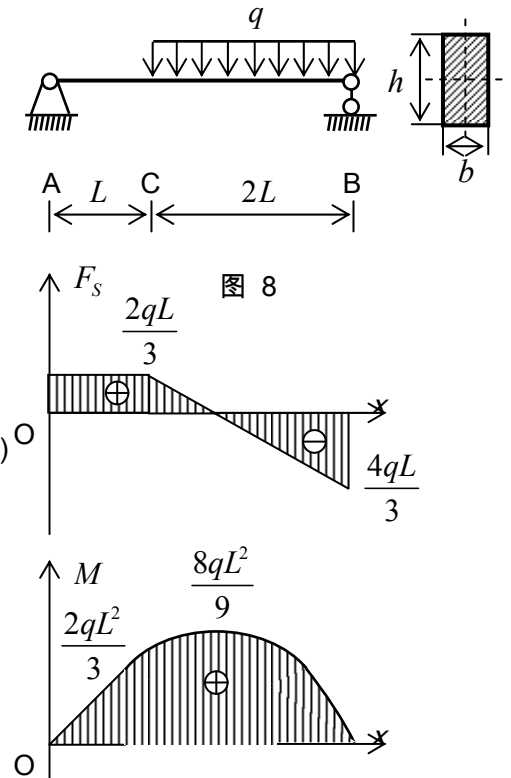
矩形截面梁 AB 受力如图所示, 集中力分别作用在 AB 中点 C 截面处和梁的两端, $q = 30kN/m$, 梁的宽度 $b = 120mm$, 高度 $h = 240mm$, $L = 1m$, (1) 作梁的剪力图和弯矩图, (2) 求梁的最大正应力。

解: (1) 剪力图, (4 分) 弯矩图; (4 分)

$$(2) M_{\max} = \frac{8qL^2}{9} = \frac{8 \times 30 \times 1^2}{9} = \frac{80}{3} kN \cdot m, \text{ 上压下拉, (2 分)}$$

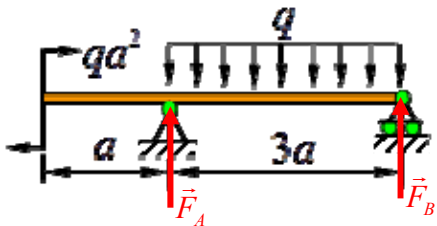
$$W_z = \frac{bh^2}{6}, (1 分)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}^t = \sigma_{\max}^c = \frac{M_{\max}}{W_z} \approx 23.15MPa。 (3 分)$$



计算题 (本题共 1 小题 , 12 分) (2015)

求梁支座约束力 , 并画出梁的剪力 F_s 图和弯矩 M 图。



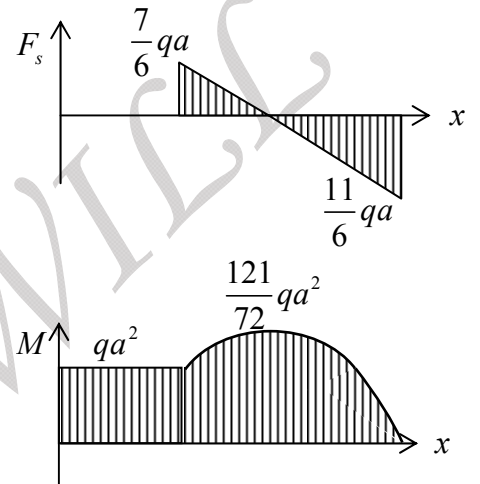
解 : (1) $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -qa^2 - q \times 3a \times 1.5a + F_B \times 3a = 0, F_B = \frac{11}{6} qa$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B - q \times 3a = 0, F_A = \frac{7}{6} qa$

(2) 画剪力图和弯矩图

剪力为零点到 B 点距离 : $= \frac{11}{7+11} \times 3a = \frac{11}{6} a$,

弯矩极值 : $= -q \times \frac{11}{6} a \times \frac{11}{6} a + \frac{11}{6} qa \times \frac{11}{6} a = \frac{121}{72} qa^2$



计算题 (本题 15 分) (2016)

矩形截面梁 AB 受力如图所示 , 其中力偶作用在 AB 中点 C 截面处。已知梁的宽度 $b=140\text{mm}$, 高度

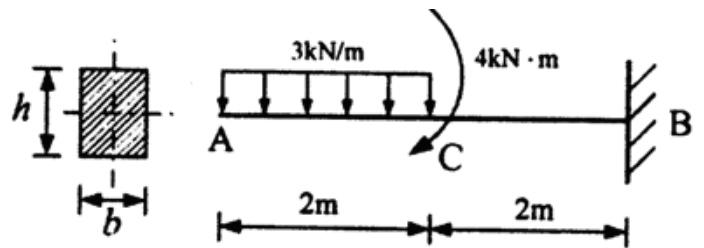
$h=280\text{mm}$, 材料的许用应力 $[\sigma]=10\text{MPa}$ 。 1) 作梁的剪力图和弯矩图 ; 2) 求梁的最大正应力 ,

校核该梁的正应力强度。

解 : (1)

$F_B = ql_{AC} = 3 \times 2 = 6\text{kN}$

$M_B = 3 \times 2 \times 3 - 4 = 14\text{kN} \cdot \text{m}$

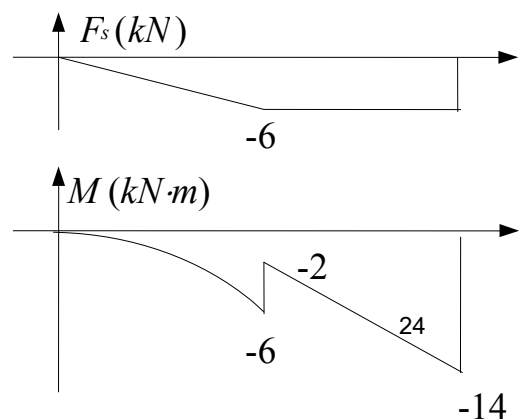


(约束力 2 分) (剪力图 2 分 , 弯矩图 4 分)

(2) $\sigma_{\max} = \frac{My}{I_z} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z}$

$M_{\max} = 14\text{kN} \cdot \text{m}, y_{\max} = \frac{h}{2} = 140\text{mm}$

$I_z = \frac{bh^3}{12}, \sigma_{\max} = \frac{14 \times 10^3 \times 140 \times 10^{-3} \times 12}{140 \times 280^3 \times 10^{-12}} = 7.653\text{MPa}$



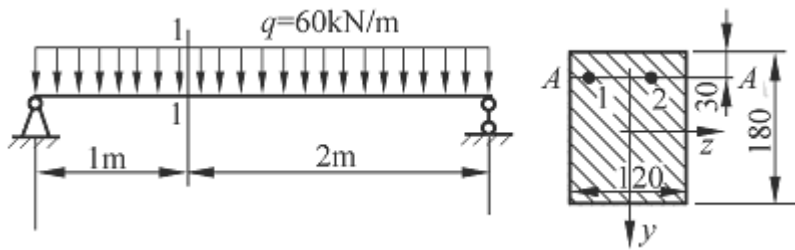
或者

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{14 \times 10^3 \times 6}{140 \times 280^2 \times 10^{-9}} = 7.6531 \text{MPa} \quad (6 \text{分})$$

$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = 10 \text{MP}$ ，满足强度要求。(1分)

计算题 (本题 15 分) (2016)

受均布载荷的简支梁如图，(1)画出剪力、弯矩图，计算 1—1 截面上 A-A 线上 1、2 两点处的正应力；(2)此截面的最大正应力；(3)全梁最大正应力。



解：(剪力图 2 分，弯矩图 3 分)

$$M_1 = 60 \text{kN} \cdot \text{m} ,$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 5.832 \times 10^7 \text{mm}^4 , \quad y_1 = y_2 = \frac{180}{2} - 30 = 60 \text{mm} , \quad (2 \text{分})$$

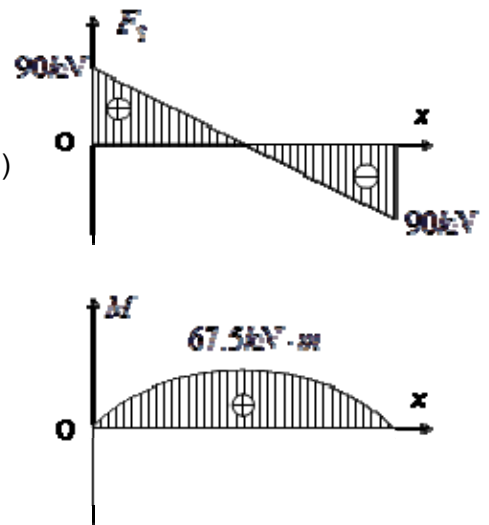
$$\text{正应力 } \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{M_1}{I_z} y_1 \approx 61.73 \text{MPa} , \quad (2 \text{分})$$

$$(2) \quad y_{\max} = \frac{180}{2} = 90 \text{mm} , \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = 6.48 \times 10^5 \text{mm}^3 , \quad (2 \text{分})$$

$$\text{最大正应力 } \sigma_{\max} = \frac{M_1}{W_z} \approx 92.6 \text{MPa} , \quad (2 \text{分})$$

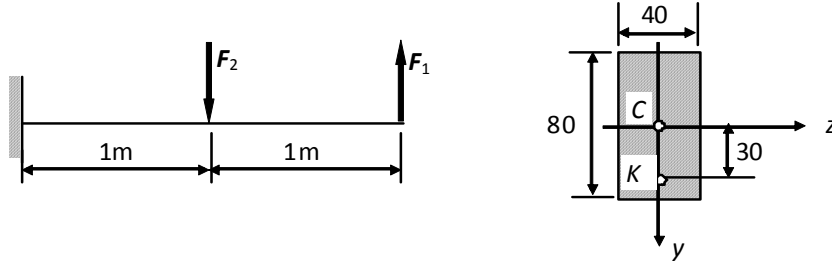
$$(3) \quad M_{\max} = 67.5 \text{kN} \cdot \text{m} ,$$

$$\text{全梁的最大正应力 } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \approx 104.2 \text{MPa} . \quad (2 \text{分})$$



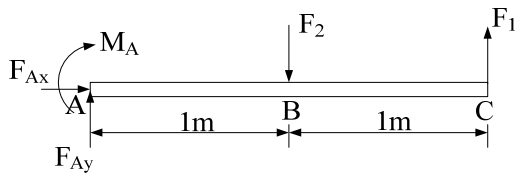
计算题 (本题 14 分)(2017)

图示悬臂梁，横截面为矩形，承受载荷 F_1 与 F_2 作用，且 $F_1=2F_2=5\text{ kN}$ ，试画出剪力、弯矩图，计算梁内的最大弯曲正应力，及该应力所在截面上 K 点处的弯曲正应力。



解：(1) 画出梁的剪力图、弯矩图

1) 求支反力，先分析悬臂梁的受力情况，如图所示

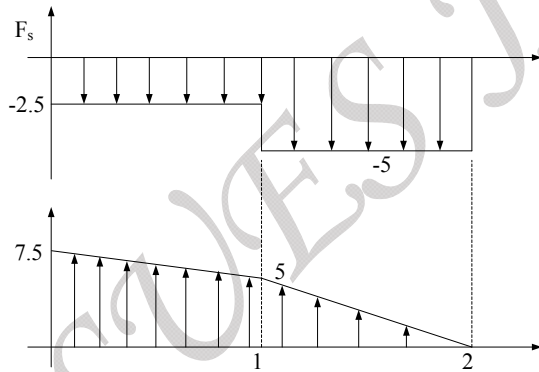


(2 分)

$$\sum M = 0 \quad 2F_1 - F_2 - M_A = 0 \quad M_A = 2F_1 - F_2 = 10 - 2.5 = 7.5\text{ kNm} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_1 - F_2 = 0 \quad F_{Ay} = F_2 - F_1 = 2.5 - 5 = -2.5\text{ kN} \quad (1 \text{ 分})$$

2) 通过微分关系，画出剪力与弯矩图



(4 分)

(2) 计算梁内的最大弯曲正应力、及该应力所在截面上 K 点处的弯曲正应力

在 A 截面得到最大弯矩为 $M_{\max} = 7.5\text{ kNm}$

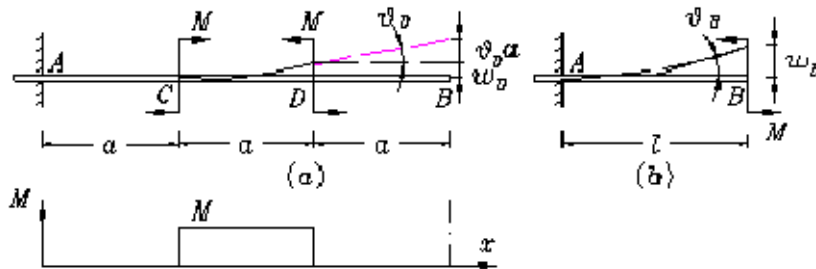
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{M_{\max}}{bh^2/6} = \frac{7.5 \times 10^3 \times 6}{40 \times 80^2 \times 10^{-3 \times 3}} = 175.78\text{ MPa} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\sigma_K = \frac{M_{\max} y_K}{I_z} = \frac{M_{\max} y_K}{bh^3/12} = \frac{7.5 \times 10^3 \times 30 \times 10^{-3} \times 12}{40 \times 80^3 \times 10^{-3 \times 4}} = 131.84\text{ MPa} \quad (3 \text{ 分})$$

计算题 (本题 12 分) (2014)

1. 画出图 (a) 所示悬臂梁的弯矩图以及梁挠曲线的大致形状。如果已知图 (b) 中悬臂梁 B 点的转角

$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$ 与挠度 $w_B = \frac{Ml^2}{2EI}$ ，试用叠加法求图 (a) 自由端 B 点的挠度与转角。



解：AC 段不变形，(a) 图中 B 截面的转角与 D 截面转角相同，即

$$\theta_B = \theta_D = \frac{Ma}{EI}。$$

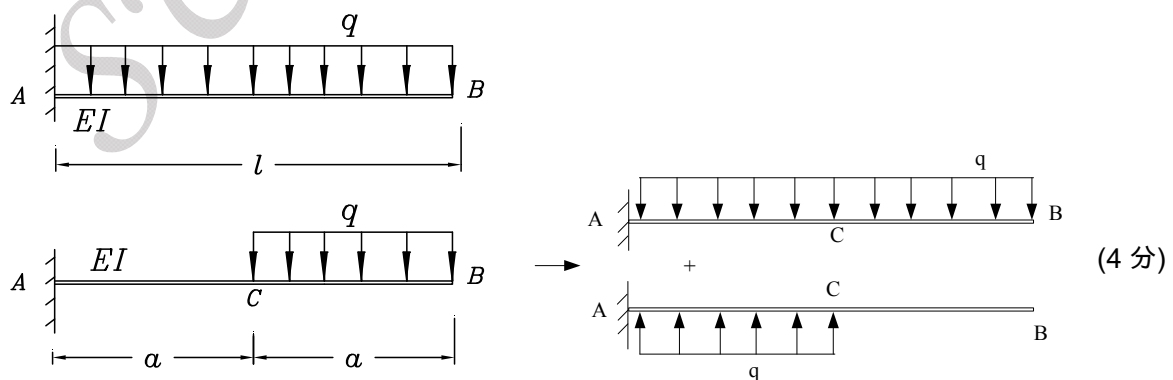
(a) 图中 B 截面的挠度为：

$$w_B = w_D + \theta_D a = \frac{Ma^2}{2EI} + \frac{Ma}{EI} a = \frac{3Ma^2}{2EI}$$

计算题 (本题 12 分) (2017)

已知图(a)所示悬臂梁自由端的挠度和转角分别为： $w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$ ， $\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$ 。试用叠加法求图

(b)所示悬臂梁自由端 B 点的挠度 w_B 与转角 θ_B 。梁的抗弯刚度为 EI 。



$$(1) w_{B1} = -\frac{q(2a)^4}{8EI}, \theta_{B1} = -\frac{q(2a)^3}{6EI} \quad (2 \text{分})$$

$$(2) w_{C2} = \frac{qa^4}{8EI}, \theta_{C2} = \frac{qa^3}{6EI} \quad (1 \text{分})$$

$$w_{B2} = w_{C2} + \theta_{C2}a = \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^3}{6EI}a = \frac{7qa^4}{24EI} \quad (1 \text{分})$$

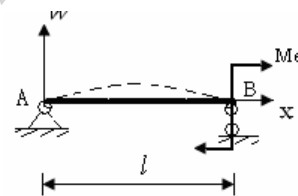
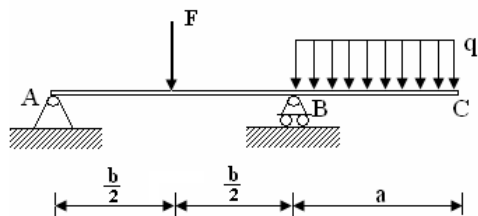
进行叠加后

$$w_B = w_{B1} + w_{B2} = \frac{-2qa^4}{EI} + \frac{7qa^4}{24EI} = \frac{-41qa^4}{24EI} \quad (2 \text{分})$$

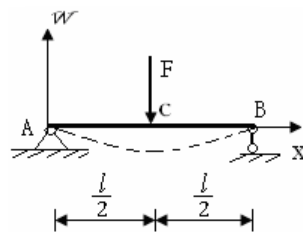
$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{C2} = -\frac{7qa^3}{6EI} \quad (2 \text{分})$$

计算题 (本题共 1 小题 , 14 分) (2015)

用叠加法求图示梁 C 端挠度 y_c 和 θ_c 转角。 $F=qb$ 。 几种常见梁的变形公式

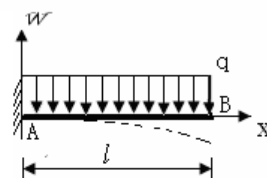


$$\theta_A = \frac{M_e L}{6EI} \quad \theta_B = -\frac{M_e L}{3EI}$$



$$\theta_A = -\theta_B = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

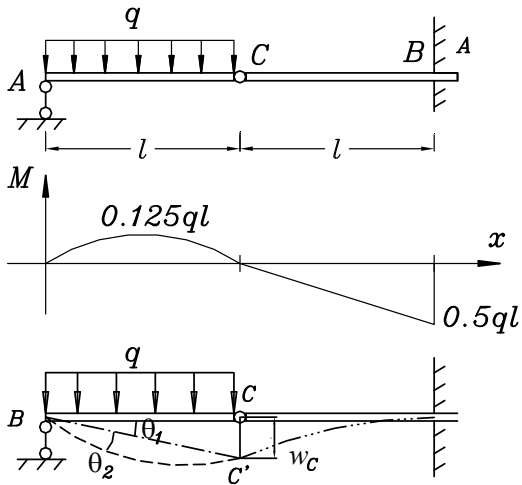
$$w_C = -\frac{Fl^3}{48EI}$$



$$w_B = -\frac{ql^4}{8EI} \quad \theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$$

计算题 (本题 12 分) (2015)

组合梁受力及尺寸如图所示, (1) 画出梁的弯矩图与挠曲线的大致形状; (2) 根据附录梁的挠度表求 C 点的挠度 w_C 与 BC 梁 A 截面的转角 θ_A 。



$$\text{C 点挠度, } w_C = \frac{0.5ql}{3EI} l^3 = \frac{ql^4}{6EI} \downarrow$$

$$\theta_{A1} = \frac{w_C}{l} = \frac{ql^3}{6EI}, \theta_{A2} = \frac{ql^3}{24EI}$$

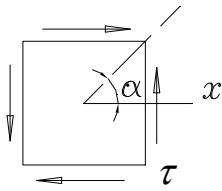
$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} = \frac{ql^3}{6EI} + \frac{ql^3}{24EI} = \frac{5ql^3}{24EI}$$

SUES JAYNE

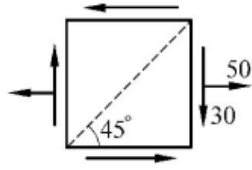
六、 应力状态分析与强度理论

1. 第一、二强度理论适用 脆性 材料，此种材料的破坏形式是 断裂 。第三、四强度理论适用 塑性 材料，此种材料的破坏形式是 屈服 。（2017）

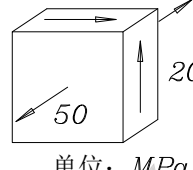
2. 纯剪切应力状态如图所示。 E 、 μ 分别为材料的弹性模量和泊松比, 设 $\alpha = 45^\circ$, 则沿 45° 方向的正应力为 $\sigma_{45^\circ} = \tau$, 线应变 $\varepsilon_\alpha = \tau(1+\mu)/E$ 。（2017）



2 题图

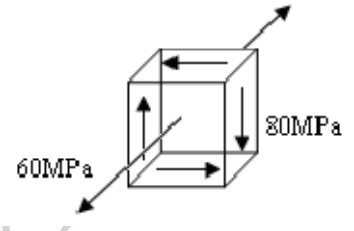


3 题图



单位: MPa

4 题图



5 题图

3. 已知应力状态如图所示(应力单位为 MPa), 已知材料 $E=70\text{GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.33$ 。 45° 方位的正应变为 _____ 。（2015）

4. 图示单元体的主应力 $\sigma_1 = \underline{50}$, $\sigma_2 = \underline{20}$, $\sigma_3 = \underline{-20}$, 最大切应力 $\tau_{\max} = \underline{35}$ 。（2017）

5. 图示单元体的主应力 $\sigma_1 = \underline{80\text{MPa}}$, $\sigma_2 = \underline{60\text{MPa}}$, $\sigma_3 = \underline{-80\text{MPa}}$, 相当应力 $\sigma_{r3} = \underline{160\text{MPa}}$ 。（2017）

6. 强度理论主要是根据简单拉伸时的强度条件, 来建立复杂应力状态下的强度条件, 最大拉应力理论和最大拉应变理论适用于 脆性 材料的 断裂 现象, 最大剪应力理论和形状改变比能理论适用于 塑性 材料的 屈服 现象。（2016）

7. 某点的应力状态如图 7 所示, 则该点的相当应力 $\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_x^2}$, $\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_y^2 + 3\tau_x^2}$ 。（2016）

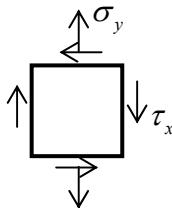


图 7

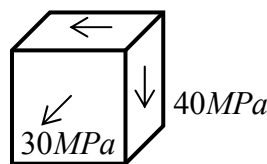


图 8

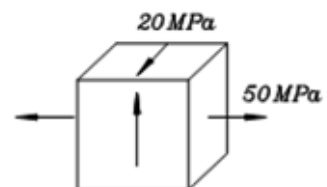
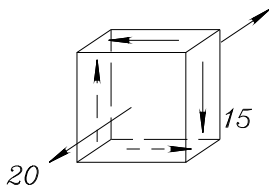


图 9

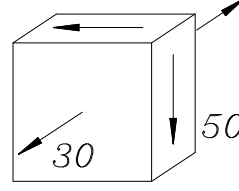
8. 某点的应力状态如图 8 所示,则该点的主应力 $\sigma_1 = 40MPa$, $\sigma_2 = 30MPa$, $\sigma_3 = -40MPa$, 最大剪应力 $\tau_{max} = 40MPa$ 。(2016)

9. 某点的应力状态如图示,求该点的主应力 $\sigma_1 = 50MP$, $\sigma_2 = 20MP$, $\sigma_3 = -20MP$, 最大切应力 $\tau_{max} = 35MP$ 。(2016)

10. 图示单元体的三个主应力为: $\sigma_1 =$; $\sigma_2 =$; $\sigma_3 =$ 。(2015)



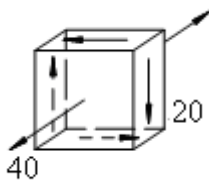
10 题图



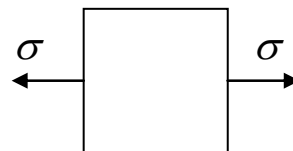
11 题图

11. 某点的应力状态如图示,图示单元体的主应力 $\sigma_1 =$, $\sigma_2 =$, $\sigma_3 =$, 最大剪应力 $\tau_{max} =$, 按第三强度理论计算的相当应力 $\sigma_{r3} =$ 。(2014)

14. 图示单元体的三个主应力为: $\sigma_1 = 40$ $\sigma_2 = 20$ $\sigma_3 = -20$ 。(2014)



(第 14 小题 单位: MPa)



(第 16 小题)

15. 由构件内一点处切取的单元体中,正应力最大的面与切应力最大的面夹角为 90 。(2014)

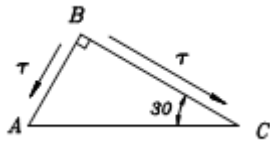
16. 杆件单向拉伸时,单元体如图所示,假设 E, μ 已知, $\varepsilon_{45^\circ} = -\frac{\sigma}{2E}(1-\mu)$ 。(2014)

17. 常见的材料的破坏形式有 屈服破坏 和 脆性断裂 。(2014)

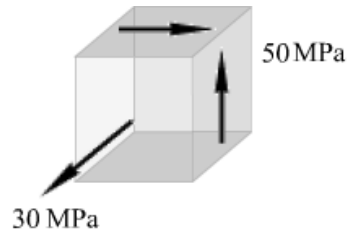
1、已知单元体 AB、BC 面上只作用有剪应力 τ ,现关于 AC 面上应力为_____。(2015)

(A) $\tau_{AC} = \tau/2$, $\sigma_{AC} = 0$; (B) $\tau_{AC} = \tau/2$, $\sigma_{AC} = \sqrt{3}\tau/2$;

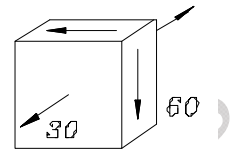
(C) $\tau_{AC} = \tau/2$, $\sigma_{AC} = -\sqrt{3}\tau/2$; (B) $\tau_{AC} = -\tau/2$, $\sigma_{AC} = \sqrt{3}\tau/2$;



1 题图



2 题图



3 题图

2 . 一点的应力状态如右图所示 , 则其主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 分别为_____B_____。(2015)

(A) 30MPa、 100 MPa、 50 MPa (B) 50 MPa、 30MPa、 -50MPa

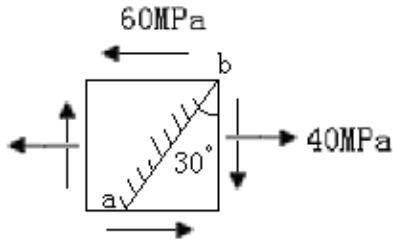
(C) 50 MPa、 0、 -50MPa (D) -50 MPa、 30MPa、 50MPa

3、 图示应力状态中的 $\sigma_1 =$ B ; $\sigma_3 =$ E ; 第三强度理论的相当应力 $\sigma_{r3} =$ D 。(应力单位 : MPa)(2014)

(A) 30 ; (B) 60 ; (C) 90 ; (D) 120 ; (E) -60

计算题 (本题共 1 小题 , 15 分)(2105)

已知构件内某点的应力状态如图所示。求 : (1) ab 面上的应力 τ_α 和 σ_α 大小。(2) 该点主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的大小。



$$\sigma_x = 40, \sigma_y = 0, \tau_x = 60, \alpha = -30^\circ$$

$$\sigma_{-30^\circ} = \frac{40}{2} + \frac{40}{2} \cos(-60^\circ) - 60 \sin(-60^\circ) = 20 + 20 \times 0.5 - 60 \times (-0.866) = 81.96 \text{ MPa}$$

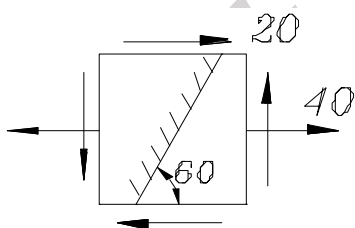
$$\tau_{-30^\circ} = \frac{40}{2} \sin(-60^\circ) + 60 \cos(-60^\circ) = 20 \times (-0.866) + 60 \times 0.5 = 12.68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + (60)^2} = 20 \pm 63.25 = \begin{cases} 83.24 \text{ MPa} \\ -43.24 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 81.96 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -43.24 \text{ MPa}$$

计算题 (12 分)

已知应力状态如图所示(应力单位为 MPa)。(1)求指定斜截面上的正应力与切应力 ;(2)求出主应力与所在截面的方位 , 并将主应力画在单元体上。(3)求出最大切应力。



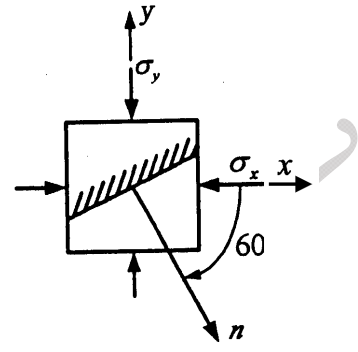
计算题 (10 分) (2015)

单元体应力状态如图所示，已知 $\sigma_x = -25\text{MPa}$ ， $\sigma_y = -5\text{MPa}$ ，试求：1) 外法线与 x 轴成顺时针 60° 夹角的斜截面上的正应力与切应力，并取分离体表示出该面上求得的应力。2) 求出该单元体的三个主应力和最大剪应力。

$$\sigma_{-60} = \frac{-25-5}{2} + \frac{-25+5}{2} \cos(-120) = -10\text{MPa}$$

$$\tau_{-60} = \frac{-25+5}{2} \sin(-120) = -8.66\text{MPa}$$

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -5\text{MPa}, \sigma_3 = -25\text{MPa}, \tau_{\max} = 12.5\text{MPa}$$



计算题 (2016)

2. 单元体应力状态如图所示。单位：MPa。试求：(1) 图示斜截面上的正应力与切应力，(2) 该单元体的三个主应力。

解：(1) $\sigma_x = 24\text{MPa}$ ， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_x = 15\text{MPa}$ ， $\alpha = 120^\circ$ ，(1分)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \approx 18.99\text{MPa} \text{ , (2分)}$$

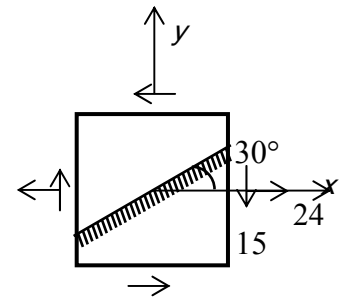
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \approx -17.89\text{MPa} \text{ , (2分)}$$

(2) 主应力

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \approx 31.21\text{MPa} \text{ , (1分)}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \approx -7.21\text{MPa} \text{ , (1分)}$$

$$\sigma_1 = 31.21\text{MPa} \text{ , } \sigma_2 = 0 \text{ , } \sigma_3 = -7.21\text{MPa} \text{ . (2分)}$$



计算题 (2016)

单元体应力状态如图所示。试求:1) 外法线与 x 轴成顺时针 60° 夹角的斜截面上的正应力与切应力, 2) 求出该单元体的三个主应力。

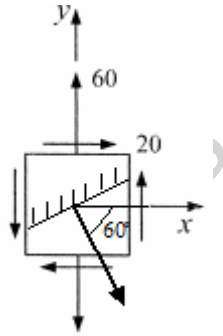
解: (1) $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 60MPa$, $\tau_x = -20MPa$, $\alpha = -60^\circ$, (1分)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \approx 27.68MPa, (2分)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \approx 35.98MPa, (2分)$$

$$(2) \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \approx 66.06MPa \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \approx -6.06MPa \end{aligned}, (2分)$$

(3) 主应力 $\sigma_1 = 66.06MPa$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -6.06MPa$ 。(3分)



计算题 (2016)

已知应力状态如图所示, 应力单位为 MPa, 试求: (1) 主应力大小; (2) 最大剪应力。

解: 应力 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 30MPa$, $\tau_{xy} = -15MPa$, (1分)

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 15 + 15\sqrt{2} \approx 36.21MPa, (2分)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 15 - 15\sqrt{2} \approx -6.21MPa, (2分)$$

$\sigma_1 = 36.21MPa$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -6.21MPa$, (1分)

或, $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 15\sqrt{2} = 21.21MPa$ 。(3分)

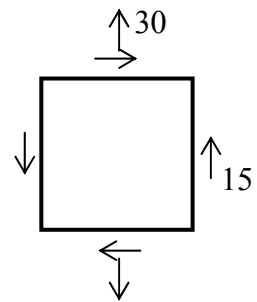


图 2

计算题 (2016)

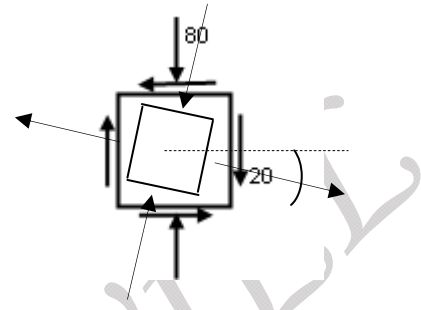
已知应力状态如图所示，应力单位为 MPa。试求：(1)主应力大小，主平面位置；(2)在单元体上绘出主平面位置及主应力方向；(3)最大切应力。

解： $\sigma_x = 0$ ， $\sigma_y = -80$ ， $\tau_{xy} = 20$ (1 分)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(1) \quad = \frac{0 - 80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - (-80)}{2}\right)^2 + 20^2}$$

$$= \begin{cases} 4.7214 \text{ MPa} \\ -84.7214 \text{ MPa} \end{cases}$$



$$\sigma_1 = 4.7214 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \sigma_3 = -84.7214 \text{ MPa} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-40}{0 - (-80)} = -\frac{1}{2}, \alpha_0 = -13.2812^\circ \text{ 或 } \alpha_0 = -0.2318 \text{ rad} \quad (2 \text{ 分})$$

(2) 如图所示 (2 分)

(3)

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

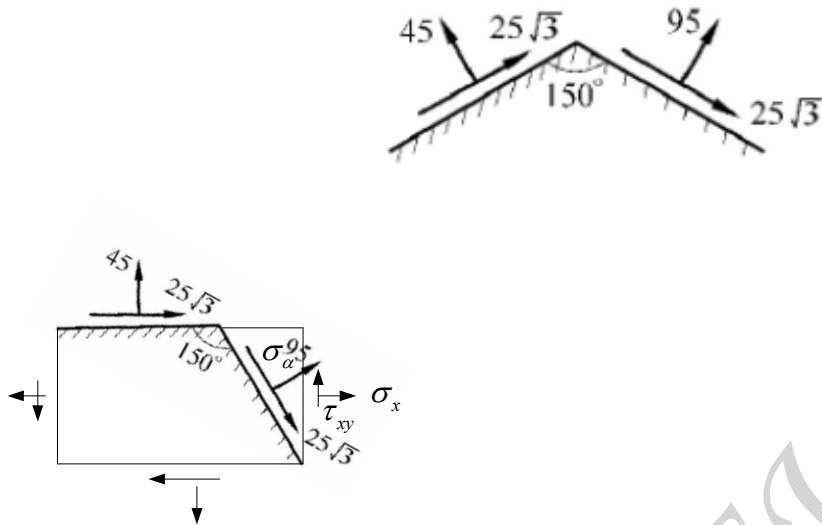
$$= \pm \sqrt{\left(\frac{0 - (-80)}{2}\right)^2 + 20^2}, (2 \text{ 分}) \quad \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{0 - (-80)}{40} = 2$$

$$= \pm 44.7214 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1 = 31.7189^\circ \text{ 或 } \alpha_1 = 0.5536 \text{ rad}$$

计算题 (本题 14 分) (2017)

受力体在通过某点两个平面上的应力如图所示，试求其主应力的的大小和主平面的位置。



$$\sigma_x = ?, \sigma_y = 45, \tau_{xy} = -25\sqrt{3}, \alpha = 60^\circ, \sigma_\alpha = 95 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (2 \text{ 分})$$

$$95 = \frac{\sigma_x + 45}{2} + \frac{\sigma_x - 45}{2} \cos 120^\circ + 25\sqrt{3} \sin 60^\circ \quad (2 \text{ 分})$$

$$\sigma_x = 95 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \\ &= \frac{95 + 45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{95 - 45}{2}\right)^2 + (-25\sqrt{3})^2} \\ &= \begin{cases} 120 \\ 20 \end{cases} \text{ MPa} \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\sigma_1 = 120, \sigma_2 = 20, \sigma_3 = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \times (-25\sqrt{3})}{95 - 45} = \sqrt{3} \quad (2 \text{ 分})$$

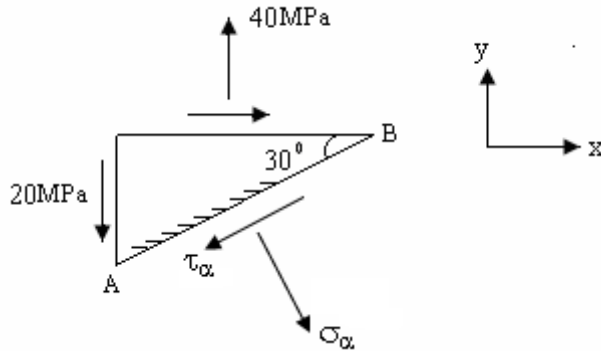
$$\alpha_0 = 30^\circ, \alpha'_0 = -60^\circ \quad (2 \text{ 分})$$

计算题（本题 12 分）（2017）

已知某点在两个方位面上的应力，如图所示。

求：（1）该点在 AB 面上的应力 τ_α 和 σ_α 大小。（2）该点的三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的大小。

（3）沿 y 轴方向的正应变 ε_y 。材料的弹性常数 $E = 200\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ 。



解： $\sigma_x = 0$ ， $\sigma_y = 40\text{MPa}$ ， $\tau_{xy} = -20\text{MPa}$ ， $\alpha = -60^\circ$ ， (2 分)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \approx 12.68\text{MPa} \text{ , (2 分)}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \approx 27.32\text{MPa} \text{ , (2 分)}$$

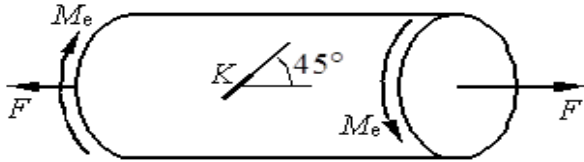
$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \approx \begin{cases} 48.28\text{MPa} \\ -8.28\text{MPa} \end{cases} \text{ , (2 分)}$$

$$\sigma_1 = 48.28\text{MPa} \text{ , } \sigma_2 = 0 \text{ , } \sigma_3 = -8.28\text{MPa} \text{ , (2 分)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] = 2 \times 10^{-4} \text{ . (2 分)}$$

计算题 (本题 15 分) (2016)

图示圆杆的直径 $d = 200 \text{ mm}$, 两端承受力与力偶 , $F = 200\pi \text{ kN}$, 弹性模量 $E = 200 \times 10^3 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ 。在杆表面点 K 处 , 测得线应变 $\varepsilon_{45^\circ} = 3 \times 10^{-4}$ 。试用第四强度理论校核杆的强度。



解：根据应力状态分析，K 点的应力状态如图 (单元体 4 分)

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{200\pi \times 10^3}{\pi \times (200 \times 10^{-3})^2 / 4} = 20 \text{ MPa} \quad (2 \text{ 分}) \quad \sigma_y = 0 ,$$

$$\tau_{xy} = ? ,$$

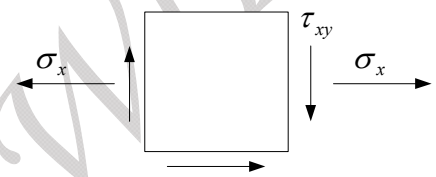
$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{E} (\sigma_{45} - \mu \sigma_{-45}) = 3 \times 10^{-4} ,$$

$$\sigma_{45} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 90^\circ - \tau_{xy} \sin 90^\circ = 10 - \tau_{xy} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\sigma_{-45} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-90^\circ) - \tau_{xy} \sin(-90^\circ) = 10 + \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{E} [10 - \tau_{xy} - \mu(10 + \tau_{xy})] = 3 \times 10^{-4} , (2 \text{ 分})$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{20^2 + 3 \times 40.7692^2} = 73.3920 \text{ MP} < 170 \text{ MPa} \quad (3 \text{ 分})$$



七、 组合变形

1、 构件如图 1，则 A 截面上的应力状态主要是由轴向拉伸、弯曲、扭转变形引起的。

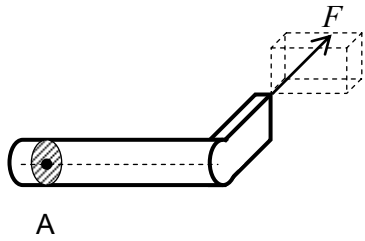
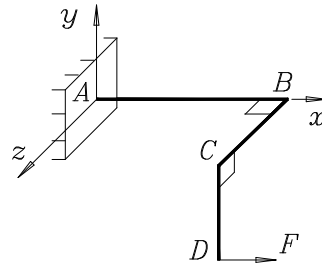


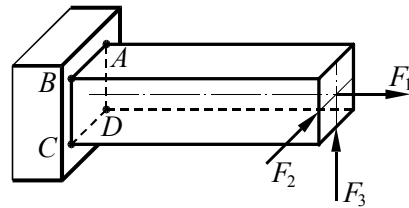
图 1



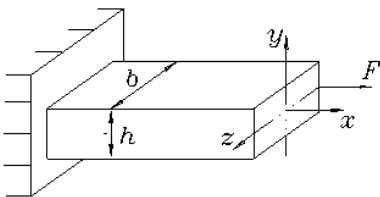
2、 图示圆截面折杆 (ABC 位于水平面内 , BCD 位于铅垂面内) , 在铅垂力 F 作用下 , AB 段发生拉伸+弯曲变形 , BC 段发生 弯曲+扭转 变形 , CD 段发生 弯曲 变形。(2015)

1. 铸铁构件受力如图所示，其危险点的位置有四种答案，正确的是(C)。(2014)

- (A) A 点； (B) B 点；
(C) C 点； (D) D 点。

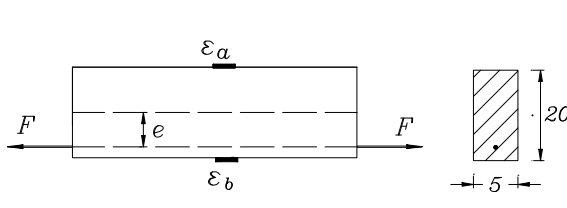


1. 求图示杆中的最大拉应力。



计算题 (本题 15 分) (2014)

图示矩形截面钢杆，材料的弹性模量为 $E = 200GPa$ ，用应变片测得其上下表面的轴向正应变分别为 $\varepsilon_a = 0.5 \times 10^{-3}$ 、 $\varepsilon_b = 1.5 \times 10^{-3}$ 。试绘出横截面上的正应力的分布图，并求拉力 F 及其偏心距 e 的数值。



The diagram shows a rectangular bar of height $h=20$ mm and width $b=5$ mm. It is pulled by forces F at an eccentricity e from the neutral axis. Strain gauges at the top and bottom surfaces measure strains ε_a and ε_b respectively. The stress distribution is shown as a linear function across the height.

$$\sigma_a = E\varepsilon_a, \quad \sigma_a = 100MPa$$

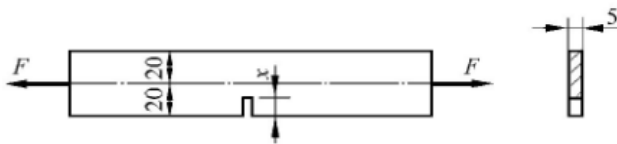
$$\sigma_b = E\varepsilon_b, \quad \sigma_b = 300MPa$$

$$\sigma_b = \frac{Fe}{W_z} + \frac{F}{A}, \quad \sigma_a = -\frac{Fe}{W_z} + \frac{F}{A}$$

$$F = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2}bh = 5kN, \quad e = \frac{\sigma_b - \sigma_a}{2F} \frac{bh^2}{6} = 1.67(mm)$$

计算题 (2017)

1. 图示板件，外力 $F=12kN$ ，许用应力 $[\sigma]=100MPa$ ，试求板边切口的允许深度 x 的值。(2017)



解：从受力分析得出在切口处横截面的变形为拉弯组合变形，并且在此横截面的内力为

$$\begin{cases} F_N = F \\ M = Fx/2 \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

因此，在此截面最大的正应力为板件切口的最高点

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fx}{2bh^2} = \frac{12 \times 10^3}{5 \times 10^{-6} \times (40-x)} + \frac{3 \times 12 \times 10^3 \times x \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-9} \times (40-x)^2} \leq [\sigma] \quad (6 \text{ 分})$$

$$x = 5.2cm$$

计算题 (本题 14 分) (2016)

图示圆柱重 $P_1 = 300\pi kN$, 直径 $D = 450mm$, 高 $h = 3m$, 重 $P_2 = 10\pi kN$ 的刚性小球放置于圆柱上表面时 , 小球滚动至于距上表面中心 O 为 $d = 30mm$ 的位置静止 , 圆柱的弹性模量 $E = 200GPa$, $[\sigma] = 160MPa$, 试校核立柱的强度。

解 : $A = \frac{\pi D^2}{4}$, $W_z = \frac{\pi D^3}{32}$, (1 分)

固定端为危险截面 , (1 分)

$\sigma_{x1max} = \frac{P_1}{A} \approx 5.92MPa$, (2 分)

$\sigma_{x21} = \frac{P_2}{A} \approx 0.20MPa$, (2 分)

$\sigma_{x22max}^t = \sigma_{x22max}^c = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{32P_2d}{\pi D^3} \approx 0.10MPa$, (2 分)

$\sigma_{xmax} = \sigma_{xmax}^c = \sigma_{x1max} + \sigma_{x21} + \sigma_{x22max}^c = 6.23MPa$, (3 分)

$\sigma_{xmax} = 6.22MPa < 160MPa = [\sigma]$, (1 分)

满足强度要求 , 能够正常工作。 (2 分)

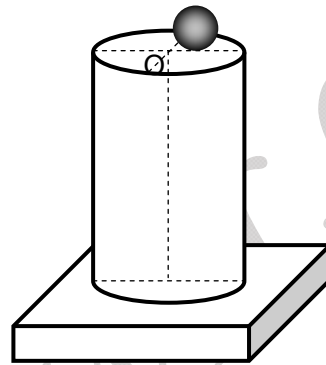


图 9

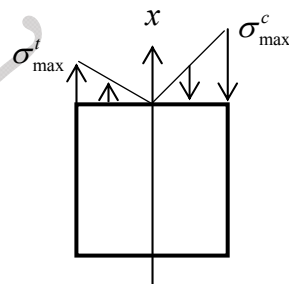
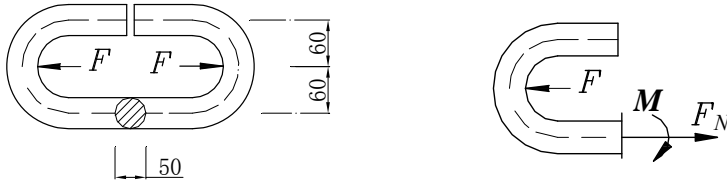


图 9

计算题（本题 10 分）（2015）

开口链环如图所示，已知 $d = 50 \text{ mm}$ ，拉力 $F = 10 \text{ kN}$ 作用，许用应力 $[\sigma] = 60 \text{ MPa}$ 。试求链环中段的最大拉应力，并校核其强度。链环的缺口焊好后，其应力又是多少。



解： $d = 50 \text{ mm}$ ， $F = 10 \text{ kN}$ ， $e = 60 \text{ mm}$

$$M = Fe = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 1963.5 \text{ mm}^2$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 12271.8 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_n = \frac{F}{A} = 5.093 \text{ MPa}$$

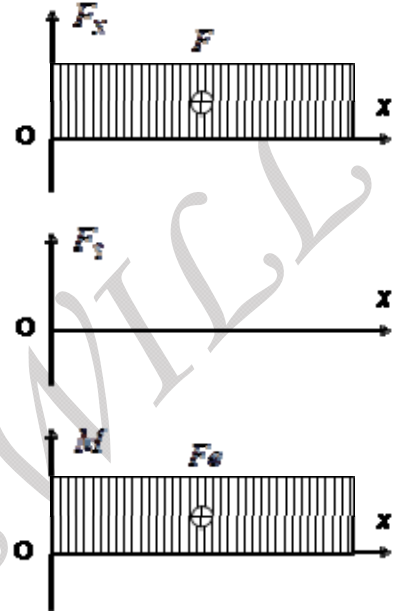
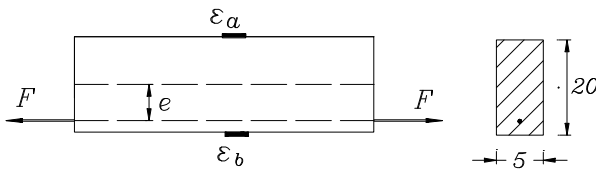
$$\sigma_w = \frac{Fe}{W_z} = 48.892 \text{ MPa}$$

$$\text{最大拉应力： } \sigma_{\max} = \sigma_n + \sigma_w = 53.985 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\text{缺口焊好： } \sigma_l = 0.5\sigma_n = 2.546 \text{ MPa}$$

计算题 (本题 15 分) (2016)

图示矩形截面钢杆，材料的弹性模量为 $E = 200GPa$ ，用应变片测得其上下表面的轴向正应变分别为 $\varepsilon_a = 0.5 \times 10^{-3}$ 、 $\varepsilon_b = 1.5 \times 10^{-3}$ 。试绘出横截面上的正应力的分布图，并求拉力 F 及其偏心距 e 的数值。



解：拉伸和纯弯曲组合，

$$A = 100mm^2, W_z = \frac{bh^2}{6} \approx 333.33mm^3, (1分)$$

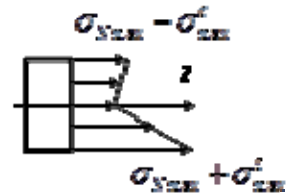
拉伸，最大正应力 $\sigma_{Nmax} = \frac{F}{A}$ ，拉，(2分)

纯弯曲， $M_{max} = Fe$ ，(2分) $\sigma_{max}^t = \sigma_{max}^c = \frac{Fe}{W_z}$ ，(2分) 下拉上压，

$$\text{最大正应力 } \sigma_{max} = \sigma_{Nmax} + \sigma_{max}^t = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z},$$

$$\varepsilon_a = 0.5 \times 10^{-3}, \varepsilon_b = 1.5 \times 10^{-3},$$

横截面上的正应力分布如图，(2分)



$$\sigma_a = \sigma_{Nmax} - \sigma_{max}^c = \frac{F}{A} - \frac{Fe}{W_z},$$

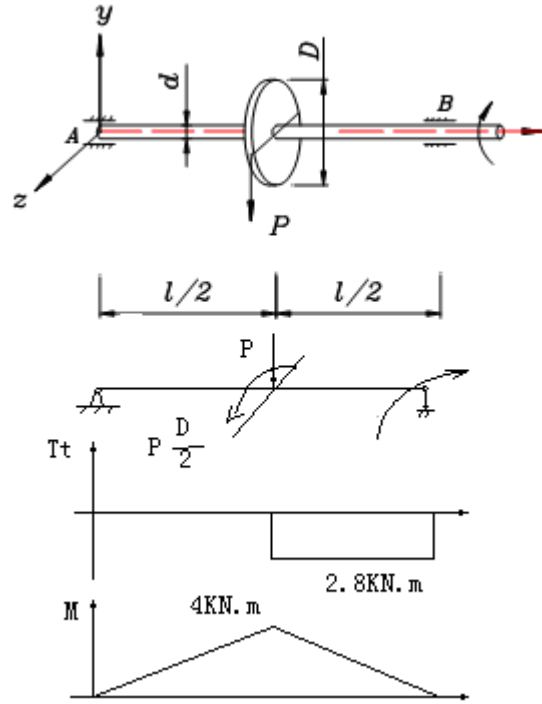
$$\sigma_b = \sigma_{Nmax} + \sigma_{max}^t = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z},$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{A} - \frac{Fe}{W_z} \right), (2分) \quad \varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z} \right), (2分)$$

拉力 $F = 20kN$ ，偏心距 $e \approx 1.67mm$ 。(2分)

计算题 (本题 15 分) (2013)

传动轴 AB 直径 $d = 80\text{mm}$, 轴长 $l = 2\text{m}$,
 $[\sigma] = 100\text{MPa}$, 轮缘挂重 $P = 8\text{kN}$, 与转矩 m 平
 衡, 轮直径 $D = 0.7\text{m}$ 。试画出轴的内力图, 并用第三
 强度理论校核轴的强度。



解 :

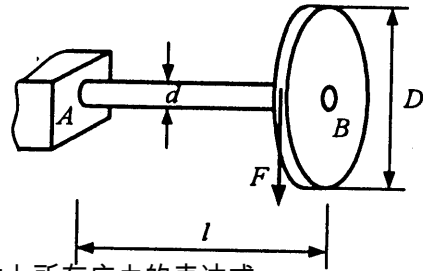
$$T_t = -2.8\text{KN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\max} = 4\text{KN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_{\max}^2 + T_t^2}}{W_z} = 97.18\text{MPa} \leq [\sigma]$$

计算题 (本题共 1 小题 , 18 分) (2014)

图示圆轴 A 端固定, 轴长为 l , 直径为 d ; B 端固连一圆轮, 其直径为 D , 轮缘上作用铅垂切向力为 F 。试求



1、画出 AB 的弯矩图和扭矩图 ,

2、 求出该梁的危险截面

3、 画出危险截面上危险点的单元体应力状态, 求出该单元体上所有应力的表达式。

4、 求出该单元体的第三强度相当应力。

5、若 $F = 5\text{KN}$, 圆轮直径 $D = 1.2\text{m}$, 轴长 $l = 0.8\text{m}$, $[\sigma] = 160\text{MPa}$, 试求 AB 的直径 d 。

解

$$\sigma = 32Fl / \pi d^3, \tau = 16T / \pi d^3$$

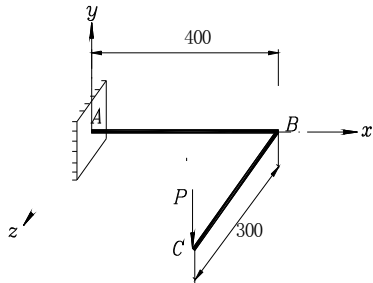
$$\sigma_{r3} = \frac{32\sqrt{T^2 + M^2}}{\pi d^3} = \frac{32\sqrt{(Fa)^2 + (Fl)^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{(5 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.8)^2} \cdot 1000}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 68.2\text{mm}$$

计算题 (本题 14 分) (2014)

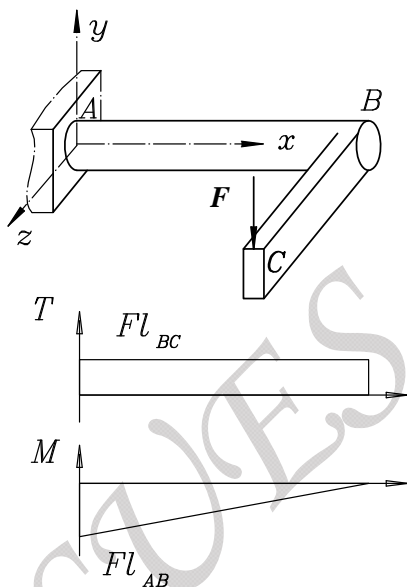
图示拐轴一端固定，按第三强度理论确定轴 AB 的最大载荷 P。已知：L=400mm，

a=300mm,d=50mm，材料的许用应力 $[\sigma]=130\text{MPa}$ 。



$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma] \\ &= \frac{\sqrt{(0.4P)^2 + (0.3P)^2}}{W} \leq [\sigma] \\ P &\leq 3189\text{N}\end{aligned}$$

计算题 (本题 12 分) (2015)



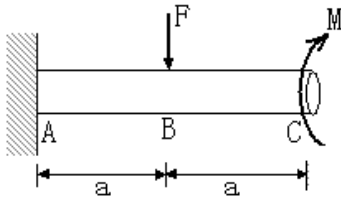
图示放置的直角曲拐 ABC，AB 段为圆截面直径 $d = 50\text{mm}$ ， $l_{AB} = 150\text{mm}$ ， $l_{BC} = 140\text{mm}$ ，材料的许用应力 $[\sigma] = 50\text{MPa}$ ，在 C 点作用一铅垂力 F。(1) 画出 AB 段的扭矩图与弯矩图 (2) 试按第三强度理论确定许可荷载 [F] 的大小。

由强度条件 $\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma]$ ，得

$$W_z := \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \quad W_z = 1.227 \times 10^4 \quad F := \frac{W_z \cdot \sigma_u}{10 \sqrt{15^2 + 14^2}} \quad F = 2.99 \times 10^3$$

计算题 (本题 14 分)(2014)

图示圆截面杆，承受力 $F=10\text{KN}$ 和扭力偶 $M=3\text{KN}\cdot\text{m}$ 的作用，杆用塑性材料制成。



- 1、画出 AC 的弯矩图和扭矩图，
- 2、 求出该梁的危险截面
- 3、 画出危险截面上危险点的单元体应力状态，求出该单元体上所有应力的表达式。
- 4、 求出该单元体的第三强度相当应力。
- 5 . 材料许用应力为 $[\sigma]=160\text{MPa}$, $AB=BC=a=0.4\text{m}$,按第三强度理论设计杆的直径 d 的大小。

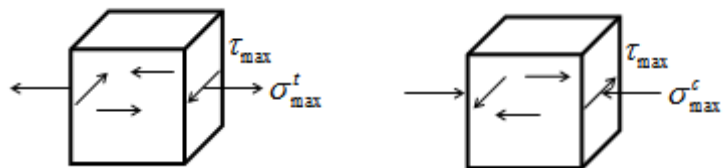
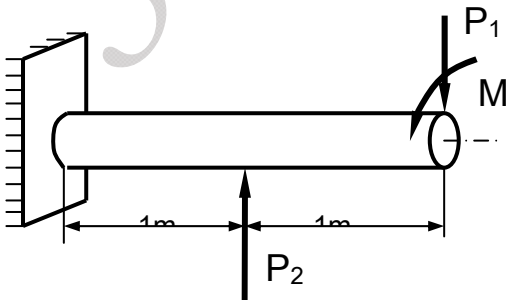
$$\sigma = 32Fl / \pi d^3, \tau = 16T / \pi d^3$$

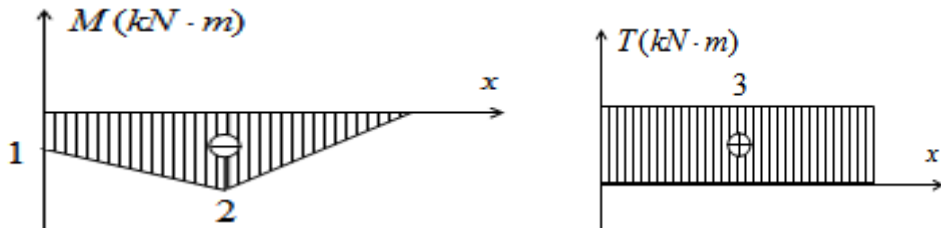
$$\sigma_{r3} = \frac{32\sqrt{T^2 + M^2}}{\pi d^3} = \frac{32\sqrt{(Fa)^2 + (M)^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{(3)^2 + (10 \cdot 0.4)^2} \cdot 1000}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 68.2\text{mm}$$

计算题 (本题 14 分)(2017)

一直径 $d=80\text{mm}$ 的圆轴受力如图所示， $P_1=2\text{kN}$ ， $P_2=3\text{kN}$ ， $M=3\text{kN}\cdot\text{m}$ ，材料的许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$ 。求：(1) 危险点的应力单元体；(2) 画出轴的内力图 (弯矩图和扭矩图) (3) 按照第三强度理论校核轴的强度。





解：弯矩图和扭矩图(4分)， $M_{\max} = 2\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $T_{\max} = 3\text{kN}\cdot\text{m}$ ，(2分)

P_2 截面上下两点为危险点，应力单元体如图，(2分)

$$\sigma_x = \frac{M_{\max}}{W_z} \approx 39.79\text{MPa}，\tau_x = \frac{T_{\max}}{W_z} \approx 29.84\text{MPa}，(2分)$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} \approx 49.74\text{MPa} < [\sigma]，(2分) \text{构件安全，能够正常工作}(2分)。$$

计算题 (15分) (2015)

圆截面直角弯杆 ABC 放置于图示的水平位置，已知 $L = 50\text{cm}$ ，水平力 $F = 40\text{kN}$ ，铅垂均布载荷 $q = 28\text{kN/m}$ ，材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，试用第三强度理论设计杆的直径 d 。

解：作出内力图或求出内力值 (5分)

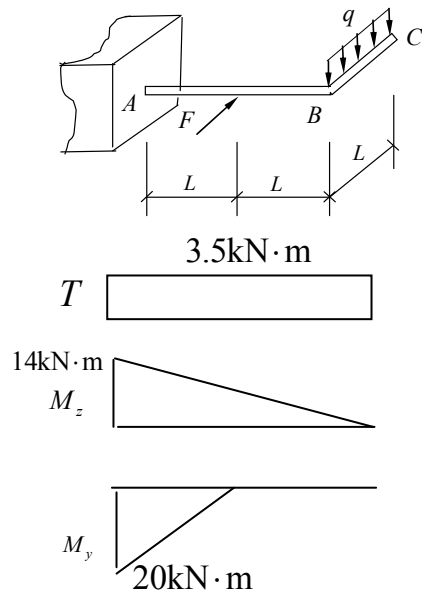
$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{\sqrt{T^2 + M_y^2 + M_z^2}}{[\sigma]} \quad (4分)$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2}}{\pi[\sigma]}} \quad (4分)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{3.5^2 + 20^2 + 14^2} \times 10^3}{3.14 \times 160 \times 10^6}}$$

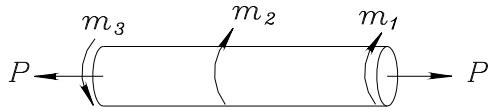
$$= 11.6\text{cm} \quad (2分)$$

安全

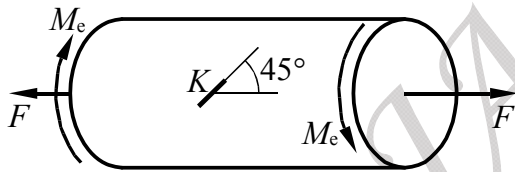


计算题 (10 分) (2015)

圆轴直径 $d = 20\text{mm}$, 已知 $m_1 = 0.1\text{kN}\cdot\text{m}$, $m_2 = 0.2\text{kN}\cdot\text{m}$, $m_3 = 0.3\text{kN}\cdot\text{m}$, $P = 10\text{kN}$ 。求轴内危险截面主应力和最大剪应力。



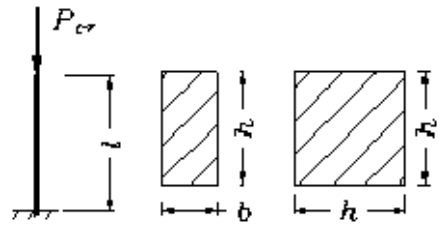
计算题 (本题 15 分) 图示圆杆的直径 $d = 200\text{mm}$, 两端承受力与力偶 , $F = 200\pi\text{kN}$, $E = 200 \times 10^3\text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $[\sigma] = 170\text{MPa}$ 。在杆表面点 K 处 , 测得线应变 $\varepsilon_{45^\circ} = 3 \times 10^{-4}$ 。试在 K 点取单元体 , 并用第四强度理论校核杆的强度。



八、 压杆稳定

1. 长方形截面细长压杆如图, $b/h=1/2$; 将 b 改为 h 后仍为细长压杆, 临界力 P_{cr} 是原来 (C) 倍。(2016)

(A) 2 倍; (B) 4 倍; (C) 8 倍; (D) 16 倍;



2. 两根材料和柔度都相同的压杆, 正确答案是 A 。(2015)

- (A) 临界应力一定相等, 临界压力不一定相等
- (B) 临界应力不一定相等, 临界压力一定相等
- (C) 临界应力和临界压力一定相等
- (D) 临界应力和临界压力不一定相等

3. 压杆的柔度 $\lambda < \lambda_s$, 临界应力用 A 计算。(2016)

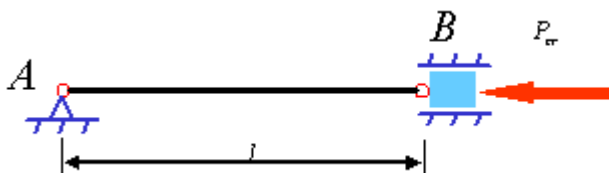
- (A) 屈服应力; (B) 直线型经验公式;
- (C) 抛物线型经验公式; (D) 欧拉公式。

1. 提高压杆稳定性的措施有 选择合理的截面形状、减小压杆长度、增强杆端约束、合理选用材料。(2016)

计算题 (本题共 1 小题, 10 分) (2014)

图示两端铰支细长圆截面连杆, 长度 $l = 800 \text{ mm}$, 直径 $d = 20 \text{ mm}$, 材料为 Q235 钢, $E = 200 \text{ GPa}$ 。

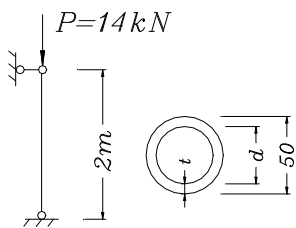
试计算连杆的临界载荷 P_{cr} 。



$$\text{解: } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times \pi / 64 \times 20^4 \times 10^{-12}}{0.8^2} = 24.19 \text{KN}$$

计算题 (本题 15 分)(2013)

图示细长压杆，截面为圆环形， $E = 70 \text{GPa}$ ，稳定安全系数 $n_{st} = 2$ ，计算压杆横截面厚度 t 。



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E \pi D^4 (1 - \alpha^4)}{64 (\mu l)^2}, \mu = 1$$

$$P \leq [F_{st}] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} \Rightarrow 14 \times 10^3 \leq \frac{\pi^3 \times 70 \times 10^3 \times 50^4 (1 - \alpha^4)}{2 \times 64 \times 2000^2}$$

$$\text{解得: } \alpha = \frac{d}{D} \leq 0.83, d \leq 41.4 \text{mm}, t = \frac{D - d}{2} = 4.3 \text{mm}$$

计算题 (本题共 1 小题, 15 分)(2014)

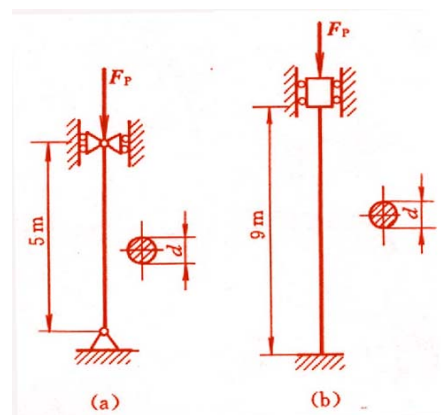
如图所示圆截面压杆， $E = 210 \text{GPa}$ ， $\sigma_p = 206 \text{MPa}$ ， $\sigma_s = 235 \text{MPa}$ ， $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda$ 。

1) 分析哪一根压杆的临界载荷比较大；

2) 已知： $d = 160 \text{mm}$ 。求：二杆的临界载荷

$$\text{解: } \lambda = \frac{\mu l}{i}, i = \frac{d}{4}$$

$$(1) \lambda_a = \frac{1 \times 5000}{40} = 125, \lambda_b = \frac{0.5 \times 7000}{40} = 87.5$$



$\lambda_a > \lambda_b$, b 杆的临界载荷大

$$(2) \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210 \times 10^3}{206}} = 100.3$$

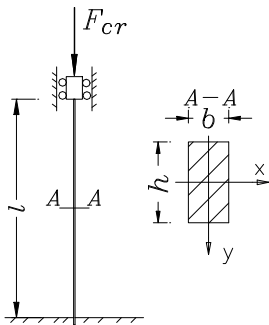
$$\lambda_s = 304 - 235 / 1.12 = 61.6$$

$$A \text{ 杆: } \lambda_a > \lambda_p, F_{cra} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times \pi \times 160^4}{(1 \times 5000)^2 \times 64} = 2667 \text{ kN}$$

$$B \text{ 杆: } \lambda_s < \lambda_b < \lambda_p, F_{crb} = \sigma_{crb} A = (304 - 1.12 \times 87.5) \times \frac{\pi}{4} \times 160^2 = 4141.9 \text{ kN}$$

计算题 (本题 15 分) (2014)

图示压杆 $l = 300 \text{ mm}$, $b = 15 \text{ mm}$, $h = 20 \text{ mm}$; 材料的弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$, $\lambda_p = 50$, $\lambda_0 = 0$, 中柔度杆的临界应力 $\sigma_{cr} = 382 \text{ MPa} - (2.18 \text{ MPa})\lambda$ 。试问: 1) 此压杆是细长压杆还是中柔度杆? 2) 压杆的临界载荷; 3) 若载荷为 $F = 25 \text{ kN}$, 并要求稳定安全因数 $n_{st} = 3.5$, 此压杆是否安全?



$$\text{解: 1) } i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12hb}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5 \times 300}{15} \times 2\sqrt{3} = 34.64$$

$\lambda_0 < \lambda < \lambda_p$, 中柔度杆

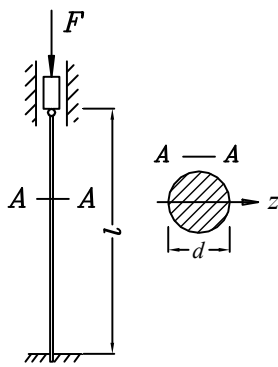
$$2) F_{cr} = \sigma_{cr} A = (382 - 2.18 \times 34.64) \times 15 \times 20 = 91.9 \times 10^3 \text{ N} = 91.9 \text{ kN}$$

$$3) [F] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{91.9}{3.5} = 26.3kN$$

$F < [F]$, 安全

计算题 (本题 12 分) (2015)

图示一端铰支，一端固定压杆，其实心圆截面的直径 $d = 40 \text{ mm}$ ，弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，受轴向压力 F 作用。杆长为 $l = 1 \text{ m}$ ， $\lambda_p = 100$ ， $\lambda_s = 60$ ，中柔度压杆的临界应力公式为 $\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda$ ，其中 $a = 304 \text{ MPa}$ 、 $b = 1.12 \text{ MPa}$ 。(1) 试判断该压杆是否为细长压杆？(2) 确定压杆的临界压力；(3) 若规定的稳定安全系数 $n_{st} = 2.5$ ，确定工作压力。



解：(1) $\mu = 0.7$, $i = \frac{d}{4} = 10$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7 \times 1000}{10} = 70$$

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$, 中柔度压杆

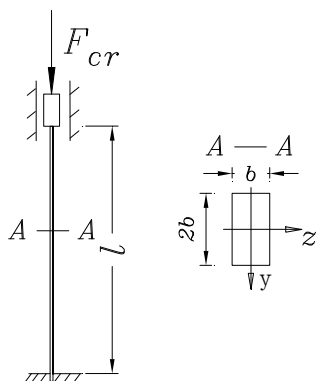
(2) $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda = 225.6 \text{ MPa}$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \frac{\pi d^2}{4} = 283.5 \text{ kN}$$

(3) $F_{st} = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{283.5}{2.5} = 113.4 \text{ kN}$

计算题 (本题 15 分) (2016)

图示压杆，其截面为 $A = 4500 \text{ mm}^2$ ， $l = 3\text{m}$ ，材料的 $E = 200\text{GPa}$ ， $\lambda_p = 100$ ， $\lambda_0 = 61.4$ ，中柔度杆的临界应力公式为 $\sigma_{cr} = 304 \text{ MPa} - (1.12 \text{ MPa})\lambda$ 。求：(1)判断此杆为细长压杆还是中柔度杆压杆；(2) 结构失稳时的载荷 F_{cr} ；(3)若稳定安全因数 $n_{st} = 2.5$ ，确定结构的最大工作压力。



解：(1) $\mu = 0.5$ ，(1分)

$$A = 2b^2, I_{\min} = \frac{2b^4}{12} = \frac{2b^2 \cdot 2b^2}{24} = \frac{A^2}{24}, (2分)$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{A}{24}}, (2分)$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \mu l \sqrt{\frac{24}{A}} \approx 109.5 > 100 = \lambda_p, (3分)$$

压杆为细长压杆，(1分)

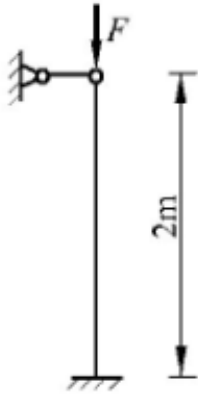
$$(2) \text{ 载荷临界力 } F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \frac{A^2}{24} \approx 740.2 \text{ kN}, (3分)$$

$$(3) \text{ 结构的最大工作压力 } F_{\max} = \frac{F_{cr}}{n_{st}} \approx 296.1 \text{ kN}. (3分)$$

计算题 (本题 12 分) (2017)

图示压杆由直径 $d=60\text{mm}$ 的圆钢制成， $E = 200\text{GPa}$ ， $\lambda_p=100$ ， $\lambda_s=60$ ，中长杆临界应力公式 $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda \text{ MPa}$ 。(1)计算杆的惯性半径，柔度。判断这根杆是大柔度杆，中柔度杆还是小柔度

杆？(2)求压杆的临界应力 σ_{cr} 和临界力 F_{cr} 。



解： $\mu = 0.7$ ，(2分)

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 15\text{mm} \text{ , (2分)}$$

$$\lambda = \frac{\mu L}{i} \approx 93.33 \text{ , (2分)}$$

$$60 < \lambda = 93.33 < 100 \text{ , (2分)}$$

中柔度杆，(2分)

经验公式， $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda \approx 199.47\text{MPa}$ (2分)，

$$P_{cr} = \sigma_{cr} A \approx 563.99\text{kN} \text{ (2分)}。$$

计算题（本题 14分）（2016）

工作状态下，千斤顶的螺杆部分简化后如图所示， $d = 80\text{mm}$ ， $L = 1\text{m}$ ， $E = 200\text{GPa}$ ，

$\sigma_p = 210\text{MPa}$ ， $\sigma_s = 240\text{MPa}$ ，临界应力的直线型经验公式为 $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda(\text{MPa})$ ，稳定

安全因数 $n_{st} = 3.5$ ，求螺杆的最大工作压力。

解： $\mu = 2$ ，(1分)

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \text{ , } I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} \text{ , } i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} \text{ , (2分)}$$

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \approx 96.95 \text{ , } \lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b} \approx 57.14 \text{ , (3分)}$$

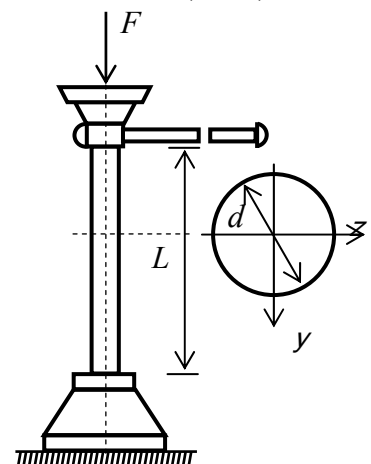


图 8

$$\lambda = \frac{\mu L}{i} = 100, (2 \text{分})$$

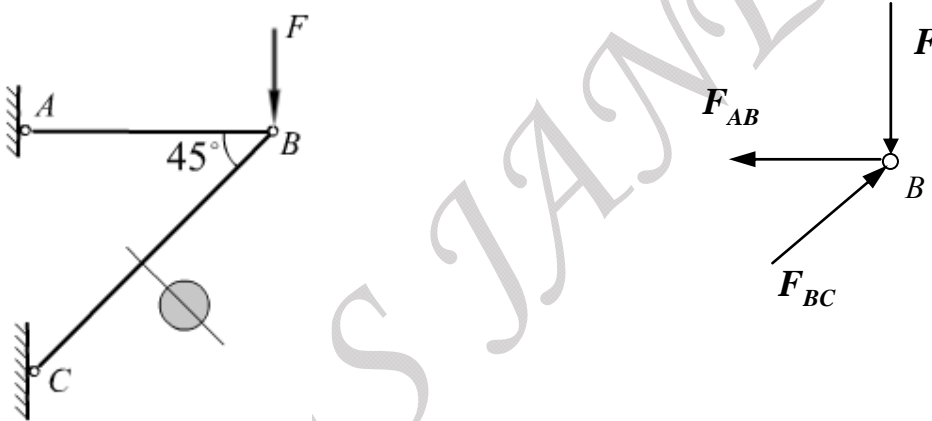
$\lambda > \lambda_p$, 大柔度压杆, (2分)

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E \pi d^4}{(\mu L)^2 64} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \pi \times 80^4}{(2.0 \times 1)^2 64} \approx 992.2 \text{kN}, (2 \text{分})$$

$$F_{\max} = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{992.2}{3.5} \approx 283.5 \text{kN} (2 \text{分})$$

计算题 (本题共 1 小题, 15 分) (2014)

图示支架, 斜杆 BC 为圆截面杆, 直径 $d=45\text{mm}$ 、长度 $l=1.25\text{m}$, 材料为优质碳钢, 比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$, 弹性模量 $E=200\text{GPa}$ 。若 $[\eta]_{st}=4$, 试按 BC 杆的稳定性确定支架的许可载荷 $[F]$ 。



解: 取节点 B : $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \cdot \sin 45^\circ - F = 0$

$$F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = F \quad (3 \text{分})$$

取 CB 杆: $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 3.14 \times \sqrt{\frac{200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3 \quad (3 \text{分})$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{l}{\frac{d}{4}} = \frac{1.25 \times 4}{0.045} = 111.1 > \lambda_p \quad (3 \text{分})$$

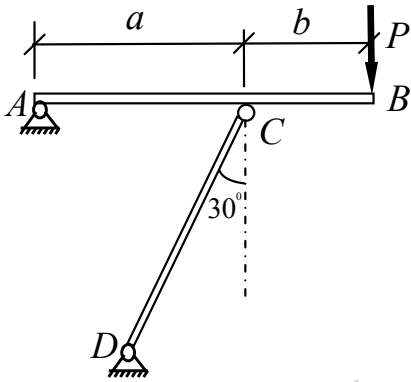
\therefore 可以使用 Euler 公式

$$F_{BC-Cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^3 \times 200 \times 10^9 \times 0.045^4}{(1 \times 1.25)^2 \times 64} = 253.9 \text{ (kN)} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\therefore [F] = \frac{\sqrt{2} F_{BC-Cr}}{2 n_{st}} = \frac{\sqrt{2} \times 253.9}{2 \times 4} = 44.9 \text{ (kN)} \quad (3 \text{ 分})$$

计算题 (本题 15 分) (2016)

如图所示的结构中，各杆的重量不计，杆 AB 可视为刚性杆。已知 $a = 100\text{cm}$, $b = 50\text{cm}$ ，杆 CD 长 $L = 2\text{m}$ ，横截面为边长 $h = 5\text{cm}$ 的正方形，材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，比例极限 $\sigma_p = 200\text{MPa}$ ，稳定安全系数 $n_{st} = 3$ 。求结构的许可外力 $[P]$



解：杆 AB 的受力对 A 点取矩： $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_{CD} \cos 30^\circ a - P(a+b) = 0$

$$\frac{F_{CD} a \cos 30^\circ}{a+b} = P \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} F_{CD} = P \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{DC 杆横截面的惯性半径 } i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{h^4}{12h^2}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ cm} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{DC 杆的柔度 } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 2}{5 \times 10^{-2}} \times 2\sqrt{3} = 138.56 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{200}} = 99.3456 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\lambda > \lambda_p, \text{ DC 杆为大柔度压杆} \quad (2 \text{ 分})$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A = \frac{\pi^2 \times 200}{138.56^2} \times 50^2 = 257 \text{ kN} \quad (2 \text{ 分})$$

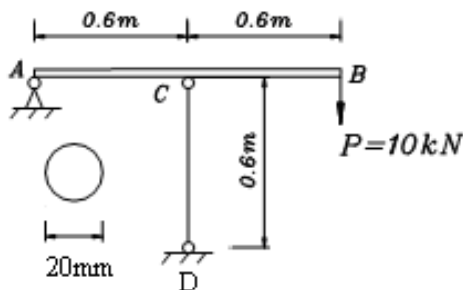
$$[F_{CD}] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{257}{3} = 85.7kN$$

$$[P] = \frac{\sqrt{3}}{3}[F_{CD}] = 49.5kN$$

计算题 (本题 12 分) (2017)

图示结构，尺寸如图所示，立柱 CD 直径为 20mm 的圆截面，材料的 $E = 200GPa$ ， $\sigma_p = 200MPa$ 。

若稳定安全因数 $n_{st} = 2$ ， $\lambda_p = \pi\sqrt{E/\sigma_p}$ 。求：(1) CD 杆的柔度；(2) 校核 CD 杆的稳定性。



(1) AB 受力: $\sum M_A = 0$ ， $F_{CD} \times 0.6 - P \times 1.2 = 0$ ， $F_{CD} = 20kN$ (1分)

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} / \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{4}$$
 (1分)

$$\mu = 1$$
 (1分)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 600 \times 4}{20} = 120$$
 (2分)

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.345$$
 (1分)

$$\lambda \geq \lambda_p$$
，CD 杆为大柔度杆件 (2分)

(2) $F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{120^2} \times \frac{\pi}{4} \times 20^2 \times 10^{-6} = 43.064kN$ (2分)

$$[F_{st}] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{43.064}{2} = 21.5kN$$
 (1分)

$$F_{CD} \leq [F_{st}]$$
，安全 (1分)

计算题 (本题 14 分)(2016)

简易桁架如图所示，杆 AB 和 AC 均为 Q235 钢杆， AB 杆的直径为 $d = 30\text{mm}$ ， AC 杆为矩形截面 $b \times h = 20 \times 36$ ， $E = 200\text{GPa}$ ， $\sigma_s = 235\text{MPa}$ ， $\sigma_p = 200\text{MPa}$ ， $\lambda_p = 100$ ， $\lambda_s = 60$ ，结构的强度安全因数 $n_s = 2.5$ ，稳定安全因数 $n_{st} = 3.5$ ， $L = 0.7\text{m}$ ，求： F 的最大值。

解： $F_{AC} = 2F$ ，压力， $F_{AB} = F$ ，拉力，(2 分)

$$AB \text{ 杆, } [F]_{AB} = [\sigma]A_1 = \frac{\sigma_s}{n_s} \frac{\pi d^2}{4} \approx 66.44\text{kN},$$

$$F_{\max 1} = [F]_{AB} = 66.44\text{kN}, \text{ (2 分)}$$

$$AC \text{ 杆, } [F]_{AC} = [\sigma]A_2 = \frac{\sigma_s}{n_s} bh = 67.68\text{kN},$$

$$F_{\max 21} = \frac{[F]_{AC}}{2} = 33.84\text{kN}, \text{ (2 分)}$$

AC 杆稳定性计算，

$$\mu = 1.0, I_{\min} = \frac{hb^3}{12}, i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} b \approx 5.77\text{mm}, \text{ (1 分)}$$

$$\lambda = \frac{\mu L}{i} \approx 242.49 > 100 = \lambda_p, \text{ 大柔度杆, (2 分)}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \approx 33.57\text{MPa}, P_{cr} = \sigma_{cr} A_2 \approx 24.17\text{kN}, \text{ (2 分)}$$

$$\text{或, } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu L)^2} \approx 24.17\text{kN},$$

$$F_{\max 22} = \frac{[P]}{2} = \frac{6.9}{2} = 3.45\text{kN}, \text{ (2 分)}$$

$$F_{\max} = 3.45\text{kN}. \text{ (1 分)}$$

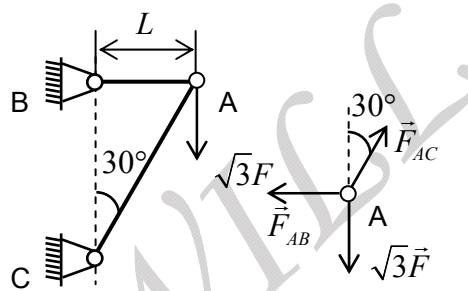


图 10

图 10

附录：计算公式

一、轴向拉压：

1、横截面上正应力： $\sigma = \frac{F_N}{A}$ ，拉伸为正，压缩为负

2、斜截面上 $\left\{ \begin{array}{l} \text{正应力：} \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \text{ 拉伸为正，压缩为负} \\ \text{切应力：} \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \text{ 绕保留段内任一点呈顺时针力矩为正} \end{array} \right.$

方位角 α 符号：以 x 轴正向为初始边，当方位角 α 逆时针转到 n （截面外法线）时为正

3、强度条件： $\sigma = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$

许用应力 $[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$ ， σ_u ——极限应力， n ——安全系数，

极限应力 $\sigma_u = \begin{cases} \sigma_s \text{ 或 } \sigma_{0.2}, & \text{塑性材料} \\ \sigma_b, & \text{脆性材料} \end{cases}$

4、材料力学性能：

(1) 低碳钢四个阶段：弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、颈缩阶段

四个极限： $\sigma_p, \sigma_e, \sigma_s, \sigma_b$

(2) 铸铁： σ_b

(3) 衡量材料塑性指标 $\left\{ \begin{array}{l} \text{延伸率 } \delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \\ \text{断面收缩率 } \psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \end{array} \right.$

5、变形：纵向线应变： $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

横向线应变： $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$

胡克定律： $\sigma = E\varepsilon$ ，前提条件 $\sigma \leq \sigma_p$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

二、剪切挤压：

1、剪切应力 $\tau = \frac{F_s}{A_s} \leq [\tau]$

2、挤压应力 $\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$

挤压面积确定：①当实际挤压面为平面，该平面的面积就是计算挤压面面积；

②当实际挤压面为半圆柱面，该半圆柱面在直径平面的投影面积是计算挤压面面积。

SUES JANEVILL

三、扭转：

1、外力偶矩计算：

$$M = 9549 \frac{P}{n}; \quad M \text{ 单位为 } N \cdot m; P \text{ 为功率, 单位为 } kW; n \text{ 为转速, 单位为 } r/min$$

$$M = 7024 \frac{P}{n}; \quad P \text{ 为功率, 单位为 马力}$$

2、扭矩符号：按右手螺旋法则。

四指的指向为扭矩的转向，大拇指的指向（即扭矩矢量方向）与截面外法线一致，扭矩为正

3、薄壁圆筒横截面上切应力： $\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 t}$ ，

方向：垂直于半径，均匀分布

4、圆轴扭转：

$$\text{几何条件: } \gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\text{物理条件: } \tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\text{静力平衡: } \tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\text{横截面上切应力: } \tau = \frac{T\rho}{I_p}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

$$\text{实心轴: } I_p = \frac{\pi D^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\text{空心轴: } I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4), \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

$$\text{单位长度扭转角: } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

$$\text{两端截面间的扭转角: } \varphi = \frac{Tl}{GI_p}, \text{ 单位 } rad$$

5、强度条件 $\tau_{\max} = \left(\frac{T}{W_p}\right)_{\max} \leq [\tau]$

6、刚度条件： $\theta_{\max} = \left(\frac{T}{GI_p}\right)_{\max} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta]$

7、圆轴扭转破坏原因分析：

8、斜截面上应力： $\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha$
 $\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$

四、平面弯曲：

1、弯曲内力（截面法）：

剪力：截面一侧所有外力的代数和， $F_s = \Sigma F_i$ （一侧）

果剪力的方向对保留段内任一点之矩为顺时针，则剪力方向为正

弯矩：截面一侧所有外力对截面形心点之矩代数和（包括外力偶的代数和）， $M_s = \Sigma M_i$ （一侧）

上凹下凸为正

快速计算：剪力：截面左侧向上的外力或右侧向下的外力 → 剪力为正；

弯矩：截面任一侧向上的外力 → 正号的弯矩；

截面左侧顺时针或右侧逆时针的外力偶 → 正号的弯矩；

剪力、弯矩与分布荷载间的微分关系：

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x), \quad \frac{dM^2(x)}{dx^2} = q(x)$$

几何意义：剪力图在某点的切线斜率等于相应截面处的分布荷载值

弯矩图在某点的切线斜率等于相应截面处的剪力值

应用：利用微分规律做内力图

2、弯曲应力

① 纯弯曲梁横截面上的正应力公式：

$$\text{几何条件：} \varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

$$\text{物理条件：} \sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$

$$\text{静力平衡：} \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\text{横截面上弯曲正应力：} \sigma = \frac{My}{I_z}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

$$\text{圆形截面：} I_z = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$\text{矩形截面：} I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

②、强度条件： $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$

③、矩形截面梁横截面上的剪应力：

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}, \quad \tau_{\max} = \frac{3 F_s}{2 A} \quad (\text{中性层上剪力最大})$$

④、切应力强度条件：
$$\tau_{\max} = \frac{F_{s \max} S_{z \max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$$

3、弯曲变形：

挠度 w ：横截面形心沿垂直于轴线方向的位移。

挠度向上为正；向下为负。

转角 θ ：横截面绕中性轴转过的角度。

顺时针为负；逆时针为正。

关系： $\theta = \frac{dw}{dx}$ ，横截面的转角等于挠曲线在该截面处的切线斜率

② 挠曲线近似微分方程：

$$EIw'' = M(x)$$

1) 积分法求弯曲变形： $EIw'' = M(x)$

$$EIw' = \int M(x) dx + C_1$$

$$EIw = \int (\int M(x) dx) dx + C_1 x + C_2$$

根据弯曲梁变形的边界条件和连续条件确定积分常数。

2) 叠加法：载荷叠加

结构叠加（逐段求和法）

③ 挠曲线大致形状：1) 由弯矩的正负判断挠曲线弯曲的大致形状（画弯矩图）；

2) 由梁的支座处的边界条件及梁变形的连续条件判断。

④ 刚度计算：
$$\frac{w_{\max}}{L} \leq \left[\frac{\delta}{L} \right], \quad \theta_{\max} \leq [\theta]$$

五、应力状态分析与强度理论

1、任意斜面上的应力计算

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

2、主应力，主平面

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \text{ 此时切应力为零}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \text{ 或 } \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{\min}} = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y}$$

3、 τ 的极值及所在平面

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \text{ 此时 } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \text{ (平面应力状态下), } \operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ (三向应力状态下, } \tau_{\max} \text{ 所在平面 } \sigma_1, \sigma_3 \text{ 与均成 } 45^\circ, \text{ 与 } \sigma_2 \text{ 平行)}$$

4、图解法

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\text{圆心: } \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right), \text{ 半径: } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

点对应：应力圆上的点与单元体上的面对应，点的坐标即为单元体面上的应力值。

2倍角关系：应力圆上两点对应的圆心角为“ 2α ”，单元体上两面的夹角“ α ”，且两者转向相同

5、广义胡克定律：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

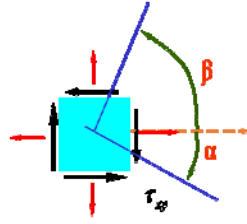
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \quad \text{或} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

①求平面应力状态下任意方向的应变 ($|\alpha| + |\beta| = 90^\circ$)

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} [\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta]$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E} [\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha]$$



②求平面应力状态下任意方向的应力 ($|\alpha| + |\beta| = 90^\circ$)

$$\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta]$$

$$\sigma_\beta = \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha]$$

6、强度理论：

①材料破坏的类型：脆性断裂；屈服破坏。

②材料破坏的主要因素：最大拉应力；最大拉应变；最大剪应力；最大形状改变比能。

③四个强度理论

最大拉应力理论 (第一强度理论) : $\sigma_r = \sigma_1 \leq [\sigma]$

最大拉应变理论 (第二强度理论) : $\sigma_r = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

最大剪应力理论 (第三强度理论) : $\sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

畸变能密度理论 (第四强度理论) : $\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$

④强度理论使用范围：

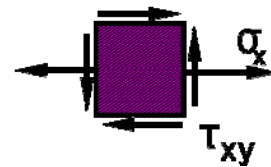
脆性材料采用第一、第二强度理论 (断裂破坏) ;

塑性材料采用第三、第四强度理论 (屈服破坏) 。

7、强度理论的应用 (平面应力状态下单向受力和纯剪切组合)

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2} \leq [\sigma]$$



六、组合变形

1、拉（压）弯组合变形：

$$\sigma_{\max}^t = \frac{F}{A} + \frac{M_{y\max}}{W_z} \leq [\sigma_t]$$

$$\sigma_{\max}^c = -\frac{F}{A} + \frac{M_{y\max}}{W_z} \leq [\sigma_c]$$

2、弯扭组合变形

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

$$\text{强度计算：} \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_{z\max}^2 + T_{\max}^2}}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_{z\max}^2 + 0.75T_{\max}^2}}{W_z} \leq [\sigma]$$

3、拉扭组合变形

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

$$\text{强度计算：} \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

七、压杆稳定

①临界压力和临界应力计算：

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \quad \begin{array}{l} \mu=1.0, \text{ 两端铰支 (两端可转动)} \\ \mu=0.7, \text{ 一端铰支一端固定 (一端可转动, 一端不可转动)} \\ \mu=0.5, \text{ 两端固定 (两端不可转动)} \\ \mu=2.0, \text{ 一端固定一端自由} \end{array}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad (i = \frac{d}{4} \text{ 圆截面})$$

1) 判断柔度：

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}, \quad \lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

2) 大柔度杆： $\lambda > \lambda_p$ ，采用欧拉公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\text{或 } F_{cr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A$$

3) 中柔度杆： $\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ ，采用经验公式

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = (a - b\lambda) A$$

4) 小柔度杆： $\lambda < \lambda_s$ ，只需进行强度计算

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

$$F = [\sigma] A$$

②稳定性计算

$$\text{安全系数法： } F \leq [F_{st}] = \frac{F_{cr}}{n_{st}}$$