

# 基于 Hammerstein 模型的双环管聚丙烯装置 牌号切换控制研究

## 摘 要

随着国民经济的发展,人们对聚丙烯树脂产品的要求越来越高,不仅数量上需求激增,而且在产品的多样化方面也提出了更高的要求。为了满足市场需求,生产聚丙烯树脂的公司不得不生产不同牌号的聚合物,这就导致牌号切换越来越频繁,而每次切换都伴随着大量的时间损失和过渡料损失,缺乏有效的工艺操作的控制方法是重要原因之一,因而研究牌号切换过程中的控制方法具有极其重要的理论价值和经济意义。

为减少切换过程的时间,从而减少过渡料的产生,提高经济效益,本文在查阅较多国内外相关文献的基础之上,对聚丙烯牌号切换的控制算法进行了研究,其中的关键点是:

1、采用何种模型来处理聚丙烯双环管牌号切换过程的非线性特性,以提高控制算法的可行性; 2、采用何种合适的控制方法来处理模型参数的不确定性和外界扰动,以提高算法的精确度。3、与此同时,采用何种方法来获得闭环系统的稳定条件。本文的研究基础和取得的结果如下:

1、介绍了聚丙烯牌号切换的概念和研究意义,并介绍了国内外聚丙烯工业生产的研究现状;指明牌号切换过程的研究所存在的控制问题,并提出了本文所采用的解决方法。

2、从聚丙烯生产过程的工艺特点出发,以 Spheripol 工艺流程为例,对丙烯聚合反应机理作了简要介绍,并对聚丙烯牌号切换的物性指数模型做了简要的介绍。

3、对 Hammerstein 模型作了简要介绍,然后以 Hammerstein 模型为基础分别给出了名义无扰动系统、具有扰动的系统和同时具有扰动以及模型参数不确定性的系统的控制器的设计方法,进而结合 LMI 技术和 Lyapunov 稳定性理论分别得到了闭环系统稳定的充分条件。

4、通过分别把基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型最优控制算法,约束 Hammerstein 模型  $H_{\infty}$  控制算法和约束不确定 Hammerstein 模型鲁棒  $H_{\infty}$  制算法分别应用于聚丙烯牌号切换生产控制过程,仿真结果验证了理论结果的有效性。因此,本文的研究成果可以为企业创造较大的经济价值。

5、最后对本文研究工作进行了总结，并提出了所设计的控制算法的不足之处和改进方向。

**关键词：**聚丙烯，牌号切换，Hammerstein 模型， $H_\infty$ 控制，鲁棒控制，稳定性

# RESEARCH ON GRADE TRANSITION CONTROL OF PROPYLENE POLYMERIZATION IN DURL-LOOP REACTOR BASED ON HAMMERSTEIN MODEL

## ABSTRACT

Along with development of economics, not only the demand of quantity of Polypropylene (PP) becomes bigger, but also needs of production's diversification become higher. In order to satisfying the customer's request, the polymer plants are forced to operate under frequent grade transition policies, which wastes a lot of time and produces a huge amount of off-specification product. Lack of an effective controlling law is one of the most important reasons. As a result, more attention should be paid on the polypropylene's continuous production process.

In order to reducing length of interim and the quantity of production, a great deal of papers on the field of grade transition were reviewed, on these basis, much attention were paid on the controlling law of the grade transition. The key points of the study were how to deal with the nonlinearity, all admissible uncertainties and disturbance of the process and how to get sufficient stability condition for the closed-loop system. The main basis and contribution of the thesis were as follows:

Firstly, the concept of the polypropylene's continuous production process and meaning of the research were introduced, and then the process made in this area during the last decades was summarized, and finally the difficulties and the general framework of solving this problem were presented in this paper.

Secondly, propylene's polymerization mechanism was briefly introduced based on the Spheripol process, and then the actual model of polypropylene's continuous production process was introduced.

Thirdly, Hammerstein model was introduced. Based on the two-step technique, the design methods were presented for the state feedback guaranteed cost controllers of three different systems, and then the Lyapunov method was used to get sufficient stability conditions for the closed-loop system.

Fourthly, the optimal controller of constrained Hammerstein model based on LMI,  $H_\infty$  controller of constrained Hammerstein model and robust  $H_\infty$  controller of constrained Hammerstein model were used in the polypropylene's continuous production process one by one. As results, all three methods could get satisfying effect. Simulations on polypropylene grade transitions were employed to illustrate the effectiveness of the method proposed here. So the research of the thesis could bring great benefits to the enterprises.

Finally, the work accomplished in this thesis was briefly summarized and some remarks on further improvement of the motion control systems were also presented.

**Key Words:** polypropylene, grade transition, hammerstein model,  $H_\infty$  control, robust control, stability

# 浙江工业大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经加以标注引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得浙江工业大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

作者签名：陈俊木 日期：2009年5月25日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江工业大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

- 1、保密口，在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。
- 2、不保密口。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：陈俊木 日期：2009年5月25日  
导师签名： 日期： 年 月 日

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 引言

聚丙烯(Polypropylene, PP)是以丙烯单体为主聚合而成的一种合成树脂,是塑料工业中的重要产品,它包括均相聚丙烯(HomoPP),无规聚丙烯(RandomPP),以及抗冲聚丙烯(ImpactPP)等。由于聚丙烯具有比重轻、耐抗冲、耐腐蚀、高透明、无毒性、强度好、电绝缘性能好且易于加工等优良性能,因而被广泛应用于轻工、化工、化纤、家电、包装、汽车等领域,在我国的聚烯烃树脂中,成为仅次于聚乙烯(HDPE、LDPE、LLDPE)和聚氯乙烯(PVC)的第三大塑料。

## 1.2 国内外聚丙烯工业概述

### 1.2.1 国外聚丙烯工业生产研究现状

聚丙烯(PP)是热塑性塑料中的后起之秀,自 1957 年在意大利首次实现工业化以来,聚丙烯已成为通用热塑性塑料中历史最短、发展和增长最快的品种。1978 年,PP 的世界产量已超过 400 万吨,仅次于聚乙烯、聚氯乙烯和聚苯乙烯居第四位。由于原料来源丰富、价格便宜、性能优良、用途广泛,目前发展速度仍然是热塑性塑料中最快的。1995 年 PP 的世界产量为 1910 万吨,超过了聚苯乙烯的 1000 万吨位居第三。2000 年 PP 的世界产量达到了 2820 万吨,超过了聚氯乙烯的 2600 万吨跃居第二。根据美国化学品市场协会(CMAI)统计,2003 年全球聚丙烯需求量已达 3540 万吨。而巴塞尔公司预计,到 2010 年 PP 需求平均增长率约为 8.0%,生产能力将达到 5400 万吨。亚洲(除了日本)将是增长速率最快的地区,其年均增长率将达到约 9.5%,其次是南美,年平均增长率约为 8.4%,再次分别是中东 7.9%,东欧 6.9%,非洲 6.5%,北美 5.8%,西欧 5.4%,日本 2.4%,中国将是需求增长最快的国家,平均增长率将达到 10%<sup>[1-8]</sup>。

世界上欧美发达国家的 PP 生产主要集中在注塑成型和纤维领域。从 80 年代中期开始,PP 需求量的增长主要依靠了以下三个领域的发展<sup>[6,7,9]</sup>:

- 1) 注塑成型领域:汽车工业和家电产业近些年发展迅速,对 PP 的需求不断增加。汽车工业中复合材料的使用率较高,这些复合材料是针对汽车的不同性能要求及用户的各种需要而设计的。复合材料中主要添加了以滑石粉、玻璃纤维为代表的无

机物及以 EPM 为中心的合成橡胶材料。要通过材料轻量化来满足省油、耐冲击、高强度以及可循环利用等严格要求,在目前塑料材料领域只有采用 PP 才能解决这些问题,因而汽车用塑料材料以 PP 为主要发展方向是个汽车厂家的共识。此外,家电产品在近年也得到了飞速发展,PP 通过特殊改性后可作为 ABS、PS、PVC 的代用品,其用途不断扩大,在该领域的应用也更加广泛。进入 90 年代以后,家电产品逐渐转入东南亚国家,使得这一地区对家电产品的用料需求增大。

- 2) 纤维领域:这一领域在欧美发展较快,其应用领域在不断扩展,特别在土木建筑材料和医疗护理等方面的需求量增长尤为明显。此外,在纺织方面,手套、保暖内衣、香烟滤嘴纤维束及纺织地毯等都有广阔的市场。
- 3) 薄膜领域:在 PP 薄膜当中,主要有双向拉伸薄膜(OPP)、流延薄膜(CPP)、和吹塑薄膜(IPP)三种成型方法。以薄膜比重较大的日本为例,2002 年其薄膜(PP)的构成为:OPP 占 52.8%,CPP 占 30.7%,IPP 占 12.8%,其他占 3.7%。OPP 大致用于食品包装、纤维包装,其他包装及工业用膜;而 CPP 用途中,食品包装占 80%,特别是复合密封包装材料使用量较大(占 55%)。从上可知,在薄膜产品中 OPP 和 CPP 占绝对主导地位。

### 1.2.2 我国聚丙烯工业生产研究现状

自 1990 年以来,我国的 PP 树脂产量以年平均增长 20%的速度增长,成为国内合成树脂中发展最快的品种之一,特别是近几年发展尤其迅速,截至目前,已建成的生产装置总产能达 550 万吨每年。从市场需求分析,尽管我国聚丙烯生产工业取得了迅猛发展,生产能力和产量大幅度增长,但在数量、质量以及品种方面仍不能满足国民经济高速发展的需要,中国将是需求增长最快的国家,年均增长率约有 10%。预计国内需求从 2004 年的 710 万吨增长到 2010 年的 1080 万吨,而产量将从约 550 万吨增长到 900 万吨,成为世界上最重要的 PP 消费国家。

目前,我国 PP 行业所面临的形式是数量上供不应求,通用料过多,专用料短缺。每年国家需花费大量外汇进口价格较高的专用料,以满足国内市场对专用料的需求<sup>[3]</sup>。由于国内市场的局限及 PP 后加工发展的滞后等原因,当前我国的 PP 消费结构还处于一个较低档次的水平。虽然在 80 年代末以后,我国相继建成投产了几套新引进设备,引进牌号也多达 200 种,但由于种种原因,国产的 PP 大多数属于档次较低的通用牌号,产量较大的基本集中在少数几个牌号上,专用料中的相当部分还得从国外引进。

影响国内 PP 专用料生产开发的因素很多,从设备运行控制层面上分析,缺乏有效的装置运行及工艺操作的控制方法是重要原因之一。目前国外大部分生产装置都采用先进控制策略来实现对最优过程的控制,使得生产装置能够在保证系统稳定,安全的基础上,实现更多的产出,大大改善了设备运行效率和经济效益;而国内绝大多数聚丙烯装置尚只能进行 DCS 甚至更低的仪表 PID 控制,制约了产品质量和成本。在聚丙烯生产过程中,主要质量参数熔融指数和密度的可调范围内有上百的品种牌号,能够在更短的时间内实现切换控制,在企业的经济效益方面具有重大意义。

在聚丙烯连续生产的过程中,按照同一种策略,牌号正切换和逆切换的过程操作轨迹往往是不对称的,产生的过渡料数量也不相同,它体现了牌号切换的非线性,再加上切换过程中模型本身也是非线性的,因此对牌号切换过程的控制属于基于复杂模型的非线性过程控制。非线性控制技术的理论还不成熟,实施起来也要复杂很多。

## 1.3 牌号切换控制方法研究

### 1.3.1 背景及意义

随着社会的进步和发展,聚丙烯产品不同的用途对树脂特性的要求也不尽相同,为了满足市场需求,生产聚丙烯树脂的公司不得不生产不同牌号的聚合物。然而,在现代生产中,为减少生产损耗,聚合过程通常都要求很大的产量,同时很多不同产品牌号的生产品牌号的生产必须在同一套生产设备中产生,这就产生了一种名为牌号切换的过程操作<sup>[10]</sup>。为了减少牌号切换过程中的中途料的损耗和切换时间的浪费,我们有必要对过程中的切换方法进行研究,以便达到经济利益的最大化。

近年来我国每年的炼油量大幅提高,给石化工业带来了发展机遇。聚丙烯生产属石化工业,其主要原料来自石油炼厂气。聚丙烯的力学性能、耐腐蚀性、耐热性、注塑性能均比较良好,逐渐在较广泛的领域中取代钢铁、木材、纸、聚碳酸酯、尼龙等材料。其用途包括医疗器械、机械零件、器具、水和多种酸碱的输送管道、电缆绝缘层、纤维和薄膜等。聚丙烯的全球需求自 1995 年起年均增长 8.6%,而我国则高达 20%以上。2005 年国内产量 533 万吨,进口 328 万吨。总之,国内聚丙烯生产企业不管是产品的数量还是质量上都还无法满足社会需求。

究其原因,除了我们的企业在市场运作、生产管理等诸多方面的差距外,最重要的原因就是企业生产过程的自动化水平不高,集中表现在生产工艺落后。国内大型聚丙烯装置基本上采用引进技术实现连续生产,但与发达国家相比存在显著差距。主要表现在:品种



少、低档牌号比重大、高档牌号奇缺。聚丙烯产品总计 100 多个牌号，我国大型聚丙烯装置只能生产几种至十几种牌号。根据市场需求，聚丙烯生产装置需要经常性地对牌号切换，属于多牌号生产。然而切换过程中产生的过渡料不属于任何一种牌号，是最低档的混合物产品或是废品。按我国目前的情况，牌号切换过渡时间平均为 10 到 14 小时。以大庆 30 万吨/年聚丙烯装置为例，这期间将产生约 400 吨过渡料，以中档聚丙烯市场价每吨 1 万元计，损失巨大，同时造成了大量资源、能源浪费，至今也还没有一种很可靠的控制算法能够减少这种浪费。

本课题以国家 863 项目——“大型聚丙烯装置面向节能降耗的多牌号生产策略研究”为背景，对聚丙烯生产系统中的牌号切换系统的控制方法进行了研究，其中包括控制器的设计和控制算法的稳定性证明两块内容。

### 1.3.2 牌号切换控制目标

理想的聚丙烯牌号切换应满足以下几个目标<sup>[11~14]</sup>：

- (1) 达到新产品性能目标值所需要的时间最短，生产的不合格过渡料产品数量最少；
- (2) 过渡过程安全，无聚合物粘结，反应器状态良好；
- (3) 过渡结束后反应器状态稳定，反应温度、生产速率等都必须稳定在设定的目标值上；
- (4) 过渡结束后聚合物生产连续，质量合格；

### 1.3.3 本文的牌号切换控制方法

牌号切换问题的研究和解决大致分为三个阶段：

1) 建模：研究牌号切换问题，首先要对切换过程进行数学建模。建模方法主要有经验建模，机理建模和半经验半机理建模。当今对于聚丙烯牌号切换过程的建模多用的半经验半机理方法。文献[15]以 Amoco 气相工艺 HSRB 反应器为研究对象，根据物料平衡方程和动力学方程建立了丙烯聚合机理模型，对实际生产具有参考价值。文献[16]以 Hypol 工艺为研究对象，利用软测量的方法建立了适用于工业装置的丙烯共聚机理模型，利用工业现场数据验证了模型的有效性，可以用来指导实际生产。建模不是本文的研究内容，因此我们对以上模型只做参考。

2) 优化：优化主要是指采用合适的数值计算方法，通过对动态数学模型的求解获得一组最优操作变量和状态变量轨迹。目前牌号切换中求解带有约束的非线性规划问题的方法主要有序列二次规划算法<sup>[17]</sup>和迭代动态规划算法<sup>[18]</sup>。

3) 控制: 通过对聚合反应器的控制, 使牌号切换的操作变量和状态变量按照优化计算所获得的最优轨迹变化<sup>[19-21]</sup>。

本文只对控制方法作讨论。聚丙烯稳定生产阶段, 国内外大多采用工作点附近近似线性化的 PID 控制<sup>[22]</sup>; 但牌号切换和多牌号生产是工作点的转换过程, 无法作类似的近似。因此, 需要采用先进控制策略实现切换过程的优化。目前, 国内外有采用线性模型预测控制进行研究, 文献[23]以环管聚丙烯反应器为例, 对聚合反应的牌号切换, 设计了混合逻辑动态的线性模型预测控制算法, 有较强的可操作性, 并且计算量较小; 也有采用非线性模型预测控制进行研究的, 如文献[24]对连续搅拌反应釜生产高密度聚丙烯的牌号切换过程, 设计一种两层结构的非线性模型预测控制算法, 第一层进行分段线性化, 第二层通过二次规划设计控制器, 文献[25]提出了一个带有离线动态优化器和非线性模型预测控制器的最优牌号切换控制系统, 对实际生产有一定的指导意义。

但是不管是线性模型预测控制还是非线性模型预测控制都存在一些问题。对于强非线性、扰动频繁的系统或工作点大范围变化的系统而言, 线性模型预测控制常无法满足控制品质的要求; 而非线性模型预测控制存在计算量大且非线性预测控制器解析求解非常困难等问题。因此我们考虑是否有模型既可以准确的描述牌号切换过程的非线性, 而且该模型也可以和先进控制算法结合, 满足在保证控制器的有效性的前提下也可使得控制器求解过程相对简单, Hammerstein 模型就是这样一个模型。

Hammerstein 模型不仅结构简单, 而且相当多的一类非线性系统可以用 Hammerstein 模型来描述, 如蒸馏塔、热交换器、pH 中和过程<sup>[26]</sup>等。因此, 其控制问题在工业过程应用中引起了广泛的关注。目前, 国内外已有很多关于 Hammerstein 模型的应用性的文章。文献[27]和文献[28]都应用 Hammerstein 模型来描述化工生产过程中的非线性过程来指导生产, 取得了良好的效果。文献[29] 结合加权递推最小二乘法, 提出了一种基于 Hammerstein 模型的自适应非线性预测控制器, 并应用于半连续聚合反应装置的温度控制, 取得了比线性模型预测控制更好的控制效果。文献[30]应用 Hammerstein 模型来描述热膜式空气质量流量(MAF)传感器, 实现了 MAF 传感器在不同工况下模型的统一, 有效的提高了传感器精度。文献[31]将 Hammerstein 系统非线性模型预测控制策略用于赛曼幅值热稳频过程的控制, 并取得了比 PID 更好的控制效果。文献[32]结合递推参数估计法, 提出了一种无约束 Hammerstein 模型的自校正极值调节器, 并应用于燃烧系统的优化控制。

这些文章都充分显示了 Hammerstein 模型在处理系统非线性时的良好表现。然而这些 Hammerstein 模型控制器设计方法通常不考虑约束, 且把非线性环节纳入目标函数直接求解控制量。显然直接算法增加了控制器的计算量, 不利于控制器的在线应用。对此, 文

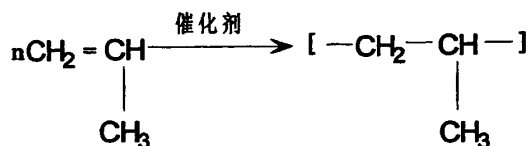
献[33]根据 Hammerstein 模型的特定结构并结合模型预测控制技术给出了两步法控制器设计方法。Hammerstein 模型的两步法充分利用了 Hammerstein 模型的特殊结构把控制器设计问题仍归结在线性控制系统范围内，极大的简化了系统非线性的处理过程。此后，Hammerstein 系统控制器设计也得到了进一步的发展和完善<sup>[34,35]</sup>。但这些方法通常采用输入输出模型描述，缺乏对过程内部动态特性的刻画。本文结合先进控制和两步法控制策略，对有输入约束的离散时间状况空间模型描述的 Hammerstein 系统提出了两步法先进控制器的设计方法，即首先由 LMI 方法<sup>[57]</sup>设计 Hammerstein 模型线性子系统的先进控制器；其次，通过求解一约束动态非线性优化问题得到实际控制量。

与此同时，为了能够使控制算法对牌号切换过程具有实际的指导意义，在简化控制器设计过程的同时我们还需要考虑到闭环系统鲁棒性能和抗干扰能力。保性能控制作为一种先进控制策略，可以使不确定系统具有一确定的二次性能指标上界或使其能够最小二次稳定<sup>[36,37]</sup>；而  $H_\infty$  控制是一种处理未建模干扰的有效方法<sup>[38,39]</sup>。在实际工业系统，外界干扰和不确定性因素一般都同时存在，聚丙烯牌号切换系统也不例外，所以在控制系统设计中在考虑闭环系统的抗干扰能力的同时还需要考虑到系统的鲁棒性能。而鲁棒  $H_\infty$  控制是一种在保证系统具有满意的鲁棒稳定性的同时并且具有较好的动态调节性能<sup>[40,41]</sup>，对于聚丙烯牌号切换控制具有较大的指导意义。

## 第 2 章 聚丙烯生产工艺简介及牌号切换建模

### 2.1 均聚反应机理

聚丙烯的反应为自由基链式聚合反应，以均聚物为例，反应式如下<sup>[42]</sup>



丙烯分子含有活泼的  $\pi$  键，能被钛系络合物催化剂吸附或配位，双键极化，使丙烯单体插入钛、碳键之间，接在阴离子上形成活性链。

使用高效载体催化剂体系进行丙烯聚合反应(从种属上说，属于 Zigler-Natta 催化剂体系)，可用下面五个基本反应步骤来叙述<sup>[43]</sup>

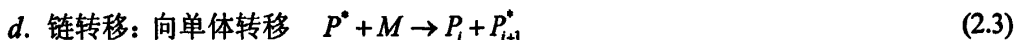
a. 活化反应：助催化剂(*TEAL*)与  $\text{TiCl}_4$  在载体表面上反应，将钛的氧化状态从 +4 价还原到 +3 价，即为聚合反应激活钛。在生成的 *TEAL-TiCl<sub>4</sub>* 络合物中，*Ti* 是聚合反应的活性中心。



一个丙烯分子在活性中心自行插入，形成一个聚丙烯链的开始。



丙烯分子在活性中心依次插入，聚合链从催化剂颗粒表面向外增长。



一个氢分子在中心自行插入，在链的末端形成一个甲基( $-\text{CH}_3$ )视为链终止。氢的作用在于终止聚合链的增长。提高氢气的浓度即使链终止速率加快，这会生成较短、较低分子量的聚丙烯链；同样，减低氢气浓度使终止速率降低，这会生成较长、较高分子量的聚丙烯

烯链。

## 2.2 聚丙烯的生产工艺与装置

### 2.2.1 聚丙烯的工业发展

1954 年意大利蒙埃公司(Montedison)的纳塔(Natta)首次采用  $TiCl_4 - AlEt_3$  经过配位聚合而成结晶状高等规度聚丙烯,并于 1957 年建成间歇式 6000t/a 聚丙烯装置,以此为标志,聚丙烯开始了工业化的生产发展。近 50 年以来,聚丙烯的生产工艺不断发展,由最初的浆液工艺发展到目前广泛使用的液相本体和气相法,从而简化了生产流程,降低了建设投资和生产成本<sup>[44-47]</sup>。

近年来我国的 PP 工业发展很快,PP 产量已由 1995 年的 107.3 万吨增长到 2000 年的 300 万吨,2004 年突破 474 万吨。为满足市场需求,我国先后在大庆石化、扬子石化等,建成数套大型 PP 装置。到 2004 年底,国内聚丙烯生产厂家约有 80 多家,生产能力 445 万吨年。其中连续法生产聚丙烯装置 30 套,生产能力 257 万吨年,间歇法小本体装置 106 套,产能为 80.7 万吨年。这些生产厂家大多隶属于中国石化和中国石油两大集团公司。国内的连续法聚丙烯生产工艺主要采用日本三井油化的液相本体法—气相法工艺和 Himont 的液相本体法—气相法工艺。

### 2.2.2 生产工艺与装置

某石化聚丙烯装置设计能力为 10 万 t/a,运行时间为 7200 小时。该装置采用美国 Himont 公司的 Spheripol 工艺技术,它采用了高效载体催化剂,并以液相均聚及气相共聚相结合为特征,属于当前先进的生产技术之一。主要原料是聚合级丙烯、乙烯、丁烯—1 和氢气。使用高效载钛催化剂可生产丙烯的均聚物;丙烯、乙烯无规共聚物;丙烯、乙烯、丁烯—1 三元无规共聚物;丙烯、乙烯多相共聚物等 49 个基础牌号的粉料产品。加添加剂可生产 110 多个牌号的粉料产品。

Spheripol 工艺是一种液相预聚合与液相均聚合和气相共聚相结合的聚合工艺。该工艺采用高效催化剂,生产的聚丙烯粉料度分布可以调节,既可以宽也可以窄。均聚反应器由两个串联的环管式反应器,具有传热系数大、单位体积产率高、流速快、催化剂体系分布均匀、反应条件较易控制、产品转换快、结构简单及材质要求低等特点。由于均聚生成的聚合物颗粒较大、呈球状,不仅流动性好,而且不像细粉那样容易被气流吹走,因此该工艺的气相反应器采用密相流化床形式,不需要像气相流化床反应器那样在上部留有很大的

气固相分离空间，而且可以缩小反应器体积，进而减低造价，节省消耗。

由于该工艺催化剂性优，聚合工艺配合得当，并且在设计上按聚合反应的停留时间与充分发挥催化剂的作用达到平衡，因此产品不必进一步处理就能达到所要求的性能。可以生产全范围、多用途的各类型产品。其均聚和无规共聚产品的特点是净度高，光学性能好，挥发物含量低、无异味等；而多相共聚产品具有高刚性、高抗冲和高结晶度等特点。

Spheripol 工艺现在已经发展到第二代，与采用单环管反应器的第一代技术相比，第二代技术使用双环管反应器，操作压力和操作温度都明显提高，可生产双峰聚丙烯。催化剂体系采用第四代或第五代的 Z-N 高效催化剂，改进了聚合物的高压和低压脱气设备，增加了氢气分离和回收单元，增加了操作灵活性，汽蒸、干燥和丙烯事故排放单元也有所改进，提高了效率。原料单体和各项公用工程消耗也显著下降。

第二代 Spheripol 技术的产品无论从牌号数量还是产品质量都比第一代技术有很大提高；产品颗粒更加均匀，可生产高刚性、高结晶度和低热封温度的新牌号，产品的熔体流动指数范围宽，可从 0.3 到 1600。能生产均聚、无规共聚和抗冲共聚物共 102 个牌号的产品，应用范围更广。

Spheripol 均聚生产工艺分为以下五个单元（如图 2-1 所示）<sup>[48]</sup>：

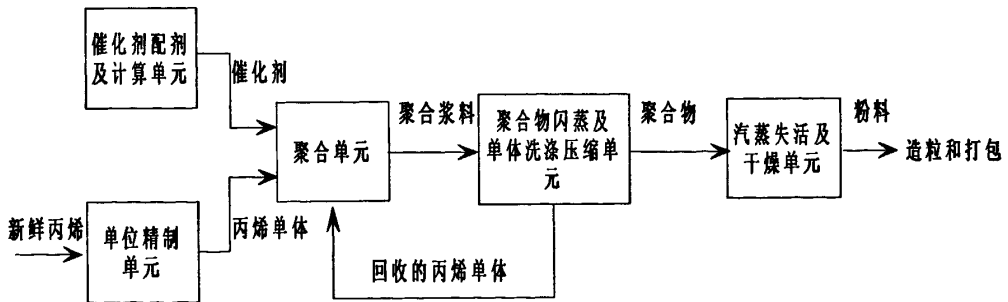


图 2-1 Spheripol 聚丙烯生产工艺流程图

1. 催化剂配制及计算单元：负责主催化剂和助催化剂的配制与计算输送。

2. 聚合单元：主要完成从单体到聚合物的聚合过程。这一过程分两步：即单体先经预聚合后再进行液相本体聚合。预聚合是将催化剂和少量单体混合在较低的温度下进行预聚反应，其目的为在可控的温度范围内使催化剂表面先形成一层聚合物外壳，避免高活性催化剂和大量丙烯直接接触产生飞温现象。预聚合和均聚反应同采用高循环比的环管反应器，并配有大功率轴流搅拌器。

3. 聚合物闪蒸和单体洗涤压缩单元：通过高压闪蒸和低压过滤来回收未反应的丙烯单体，回收的单体之后经过洗涤压缩重新送回到聚合单元循环使用。

4. 聚合物汽蒸和干燥单元：将聚合物进行汽蒸和干燥，使残存的催化剂失活，并去除聚合物中的水分，使其满足进一步加工的要求。

5. 单体精制单元：去除丙烯单体中含有的对聚合反应有害的两种物质：COS 和 CO，完成丙烯单体的精制。

### 2.2.3 工艺流程叙述

以某石化企业的 Spheripol PP 工艺为例，该装置已四氯化钛( $TiCl_4$ )/三乙基铝(TEAL)/给电子体(DONOR)催化剂体系，采用三个串联的反应器液相本体聚合生产各种牌号的产品。其中，第一个反应器为预聚合反应釜，在此由于反应温度较低(约  $18^\circ C$ )，催化剂被激活并逐渐释放潜在的催化活性中心。其后的两个环管反应器，由于环管内流体的高速流动及环管夹套的良好散热能力，反应温度几乎相同。对于 Impact PP 的生产，来自第三反应器的丙烯均聚需要通过与乙烯、新鲜丙烯和氢气在气相流化床反应器内进行共聚，反应热通过循环气体与外部冷却器带走。

图 2-2 为某石化企业的 Spheripol PP 工艺装置的简要生产流程。新鲜催化剂(包括助催化剂 TEAL 和给电子体 DONOR)通过搅拌器 D201 加入到预聚合反应器 R200 中，同时新鲜的丙烯单体和惰性组分丙烷通过循环流股进入 R200，也有  $H_2$  补充到循环流股中，并在气相色谱仪在线监测的情况下随循环流股进入各个反应器。预聚合后，反应器 R200 的反应产物输送至环管反应器 R201 中，在此与新鲜丙烯单体和分子量调节剂  $H_2$  发生聚合反应生成丙烯聚合物。在第一环管反应器 R201 中，转化率约在 55 %-65% 之间，剩下未反应的液态丙烯和聚合物粉料混在一起，进入第二环管反应器 R202，完成剩下的聚合反应。

环管反应器输出含有固体颗粒的混合物淤浆至闪蒸罐 D-301, D301 的闪蒸气体(主要为丙烯、丙烷等)进入洗涤塔 T301 底部，脱除携带的粉末和三乙基铝，从洗涤塔底部连续排放到低压脱气装置 F301。为防止固体积聚在洗涤塔底部，在塔底料位的控制下洗涤丙烯进入洗涤塔 T301 的顶部。为了维持与装置负荷无关的回流量，塔底配有再沸器，从塔顶出来的所有气体在 F301 冷凝，尾气的排放用自动流量控制，防止惰性气体在冷凝器积聚。在 F301 冷凝的循环丙烯被送到进料罐 D302，同时，新鲜丙烯在液位控制下用泵输送到该罐，混合后的循环丙烯和新鲜丙烯一起加到反应器中去。对于抗冲共聚物生产，除上述流程，聚合物经过高压闪蒸后切换进入气相流化床反应器 R401，和乙烯、新鲜丙烯单体和氢

气发生共聚反应。反应器中通过离心压缩机循环反应气体使粉料保持流化状态的。循环气体流股经 C401 加压后返回 R401。作为 R401 的反应产物，熔融态的聚合物及溶解的单体返回至前述的低压闪蒸罐 F301，在此进行聚合物与单体的闪蒸分离。闪蒸后的气相单体经压缩、冷却后切换至乙烯回收塔 T402，同样 T402 塔顶有少量放空，以避免惰性组分在反应器中的积累。通过调节新鲜丙烯进料流率来控制反应器的操作压力，而循环气体的流率通常保持恒定以维持很好的流态化效果。

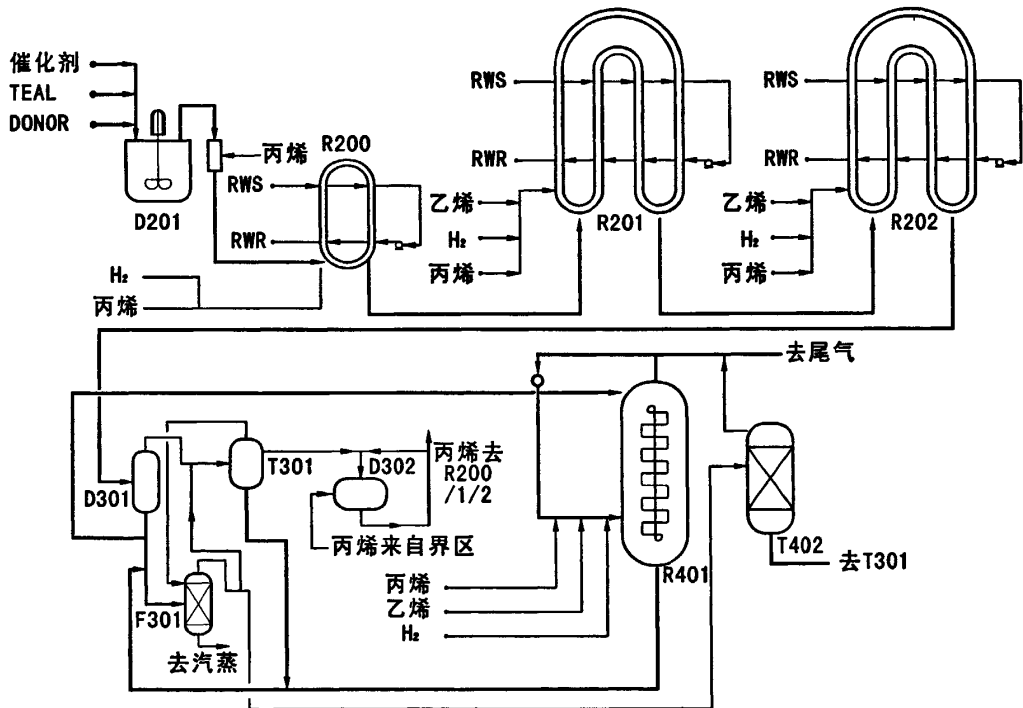


图 2-2 某企业 Spheripol 工艺流程图

### 2.3 聚丙烯产品性能指标及影响因素

在影响聚丙烯品质特征的众多因素中，分子量分布是最重要的物性指数。因为分子量分布很难直接表示，工业上常常用熔融指数(Melt Index,  $MI$ )来代替。

熔融指数( $MI$ )是指热塑性树脂在熔体流动仪上，每 10min 通过标准口模的重量，以 g/10min 为单位表示。 $MI$  标志着聚丙烯树脂在熔融状态下流动性的好坏。在熔融状态下， $MI$  越大，分子量越大，分子链越难移动， $MI$  越小，流动性越差。因而  $MI$  值直接影响聚丙烯树脂的加工性能，是聚丙烯产品质量最主要的指标之一。影响聚丙烯  $MI$  值的因素有



氢气浓度、聚合反应密度、产率、杂质浓度、温度等，但工业生产一般是在稳定的反应条件下进行的，所以氢气浓度成为调节  $MI$  值的主要因素。

牌号切换是一项非常复杂的过程，在切换过程中，各种变量之间存在着强烈的关联，操作者经常使用多种变量(如氢气浓度、反应温度、共聚单体浓度等)同时变化来达到牌号切换优化操作的目的。例如，氢气浓度会对控制聚合物的熔融指数起关键作用，但氢气浓度的变化会导致聚合物密度跟着变化，为减弱氢气浓度对于密度的影响，必须调节共聚单体浓度。所以为保持熔融指数和密度在合适的范围，切换时必须考虑多种变量同时作用达到切换的良好效果。为了达到新产品性能指标所需时间最少，生产的不合格过渡产品数量最少，并且过渡过程安全稳定，所以切换过程的控制方法也就显得尤为重要。

## 2.4 熔融指数模型

聚丙烯产品在切换过程中，在时刻变化着的操作条件下，产生的新的聚合物和原先反应器中的聚合物混合，导致分子量和组成分布扩大。切换过程中产生的聚合物累计性能虽然仍在某个牌号的合格产品的规格中，但其与稳态条件下生产的聚合物的性能相比是有很大的区别的。因此，在牌号切换过程的研究中，应该同时考虑产品的瞬时性质和累计性质。

在工业生产过程中，聚合物的  $MI$  值受到多种变量(如反应温度  $T$ 、氢气浓度  $[H_2]$ 、丙烯浓度  $[M_1]$ 、乙烯浓度  $[M_2]$ 、催化剂浓度  $[R]$  和杂质浓度  $[I]$  等)的影响，且各种变量存在强烈的耦合<sup>[49]</sup>。由于切换过程机理复杂，很难准确得到各个变量与  $MI$  值之间的反应动力学参数。因此，可以利用机理分析建立  $MI$  的模型结构，在这个基础上通过曲线拟合作参数辨识，以得到相应的系统参数，从而建立聚合物  $MI$  的模型。

将聚合物  $MI$  表示成反应温度  $T$ 、氢气浓度  $[H_2]$ 、丙烯浓度  $[M_1]$ 、乙烯浓度  $[M_2]$ 、催化剂浓度  $[R]$  和杂质浓度  $[I]$  的函数。通过对聚丙烯稳态生产过程聚合反应的机理分析<sup>[50]</sup>，得到瞬时熔融指数  $MI_t$  的模型结构

$$\ln(MI_t) = k_1 + k_2 / T + k_3 \ln(k_4 + k_5 \frac{[H_2]}{[M_1]}) + k_6 \frac{[M_2]}{[M_1]} + k_7 \frac{[R]}{[M_1]} + k_8 \frac{[I]}{[M_1]} \quad (2.7)$$

其中  $k_1 \dots k_8$  是相应的系统参数，

在环管反应器内，由于乙烯浓度  $[M_2]$  含量很小，只有几个 ppm，可以忽略，而催化剂浓度和杂质浓度影响都是比较固定的，所以生产均聚丙烯的方程可进一步考虑如下：

$$\ln(MI_i) = k_1 + k_2/T + k_3 \ln(k_4 + k_5 \frac{[H_2]}{[M_1]})$$

其中  $k_1 \dots k_5$  是相应的系统参数；记  $C_{H_2/M} = \frac{[H_2]}{[M_1]}$ ，则

$$\ln(MI_i) = k_1 + k_2/T + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M}) \quad (2.8)$$

在机理分析过程中，我们也可得到双环管累计熔融指数  $MI_c$  的模型结构<sup>[51]</sup>

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} v(t) \quad (2.9)$$

联立(2.8)和(2.9)，可得：

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} v(t) \quad (2.10)$$

$$\ln(MI_i) = k_1 + k_2/T + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M})$$

其中  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)] = [\ln(MI_{c,1}) \ \ln(MI_{c,2})]^T$ ， $v(t) = [v_1(t) \ v_2(t)] = [\ln(MI_{i,1}) \ \ln(MI_{i,2})]^T$ ， $MI_{c,1}$ ， $MI_{i,1}$  分别为第一环管的累计熔融指数和瞬时熔融指数； $MI_{c,2}$ ， $MI_{i,2}$  分别为第二环管的累计熔融指数和瞬时熔融指数； $T(K)$ ， $C_{H_2/M}$  分别为反应温度和氢气丙烯摩尔浓度比；模型参数  $k_1, k_2 \dots k_5$  可由工业数据辨识得到；聚合物停留时间  $\tau_1=0.85$ ， $\tau_2=1.15$ 。

如果把  $T(K)$ ， $C_{H_2/M}$  看成是切换过程的输入， $MI_c$ ， $MI_i$  为输出，则(2.10)可描述牌号切换过程产品质量的变化。显然方程组(2.10)组成了一个多输入单输出(MISO)的广义 Hammerstein 模型。于是，可以通过设计最优输入完成对切换过程的闭环优化控制。在下一章中将根据上述模型来设计控制器以达到理想的控制效果。

## 第 3 章 基于 Hammerstein 模型的控制设计

### 3.1 Hammerstein 模型

Hammerstein 模型描述的系统是一种常见的输入非线性系统，其结构如图 3-1 所示。它由一个静态非线性环节加上一个动态线性环节组成<sup>[52]</sup>。其一般形式为：线性部分采用 CARIMA 模型，而非线性部分为一多项式。这种模型的最大特点就是容易辨识，因此应用也十分广泛。它能描述生物系统<sup>[53]</sup>以及许多化工设备和过程的非线性特性。

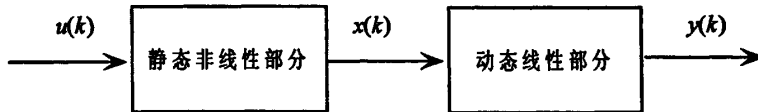


图 3-1 Hammerstein 模型结构

Hammerstein 模型的控制策略大体上可分为两种：第一种是整体求解策略<sup>[54]</sup>，一般是把输入非线性部分纳入目标函数，直接求解控制作用。整体求解法的控制律计算比较复杂，实际应用比较难。第二种是非线性分离两步法控制策略<sup>[55,56]</sup>，即首先对线性模型应用预测控制算法计算中间变量，然后再通过输入非线性反算实际的控制作用。两步法控制策略充分利用了 Hammerstein 模型的特殊结构，把控制器设计问题仍归结在线性控制系统范围内，这比整体法要简单得多。尽管在优化中不能直接纳入控制作用，但考虑到很多控制的目的是使系统输出尽快跟踪设定值变化或使系统状态尽快收敛到原点，控制加权的引入只是为了抑制控制作用的幅值过大或变化速率太快，这时 Hammerstein 非线性分离策略将是更加实用的。本文中采用的是 Hammerstein 模型两步法策略。

### 3.2 基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型最优控制器设计

本节研究的是约束 Hammerstein 模型最优控制问题。通过结合线性二次型最优控制和两步法控制策略，对有输入约束的离散时间状况空间模型描述的 Hammerstein 系统提出了一种两步法最优控制器的设计方法，即首先由 LMI 方法设计 Hammerstein 模型线性子系统的最优控制器；其次，通过求解一约束动态非线性优化问题得到实际控制量。同时，基于

Lyapunov 稳定性理论给出了闭环系统稳定的充分条件。

### 3.2.1 系统描述

考虑由状态空间模型描述的离散时间约束 Hammerstein 系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bv(k), \quad v(k) = h(u(k)), \quad k = 0, 1, \dots \\ U_{lb} &\leq u(k) \leq U_{ub} \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中:  $x(k) \in R^m$ ,  $v(k) \in R^n$ ,  $u(k) \in R^p$  分别是系统的状态向量, 中间变量和实际输入;  $A$  和  $B$  是适当维数的常数矩阵; 函数  $h$  表示实际输入和中间变量的非线性关系, 满足  $h(0) = 0$ ;  $U_{lb} \in R^p$  和  $U_{ub} \in R^p$  分别为输入约束的最小值向量和最大值向量。

考虑模型(3.1)的线性子系统  $x(k+1) = Ax(k) + Bv(k)$ , 并定义如下的二次型性能指标:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + v^T(k)Rv(k)\} \quad (3.2)$$

其中的  $Q$  和  $R$  是给定的对称正定加权矩阵, 则存在如下结论:

引理 3.1<sup>[57]</sup> 考虑 Hammerstein 模型(3.1)的线性子系统和性能指标(3.2), 如果以下优化问题

$$\begin{aligned} \min_{S, X, W} Z &= \text{Trace}(S) \quad (3.3) \\ \text{s.t. (i)} \quad &\begin{bmatrix} -X & AX + BW & 0 & 0 \\ (AX + BW)^T & -X & X & W^T \\ 0 & X & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \text{(ii)} \quad &\begin{bmatrix} X & I \\ I & S \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

存在一个最优解  $(S, W, X)$ , 则  $v(k) = WX^{-1}x(k)$  是系统线性部分的最优控制器, 相应的一个系统性能指标上界是  $J^* = \text{Trace}(X^{-1})$ 。问题(3.3)可以直接用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解。

### 3.2.2 最优控制器设计

对于(3.1), 采用两步法设计约束 Hammerstein 系统的最优控制器, 其步骤如下:

第一步, 只考虑线性部分  $x(k+1) = Ax(k) + Bv(k)$ , 为了便于书写, 以下令  $x_k = x(k)$ ,  $v_k = v(k)$ 。由引理 3.1 可得线性子系统的一个最优控制:

$$v'_k = Kx_k = WX^{-1}x_k \quad (3.4)$$

第二步, 引入输入约束, 并为了使理论输入与实际输入偏差尽可能的小, 则极小化如下约束最优化问题

$$\begin{aligned} \min_u & \left[ \|v'_k - h(u)\|^2 + \|u - u_{sp}\|_W^2 \right] \\ \text{s.t. } & U_{lb} \leq u \leq U_{ub} \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中的  $W$  为实际输入加权矩阵,  $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数,  $u_{sp}$  为输入目标值。求解(3.5)得满足输入约束的最优控制律, 并记为  $u^{opt} = g(v'_k)$ 。

显然, 如果优化问题(3.5)精确求解且系统是无约束的, 则  $g$  满足  $h(g(v'_k)) = v'_k$ 。但对于实际系统  $h(g(v'_k)) - v'_k \neq 0$ 。因此当采用两步法计算约束非线性 Hammerstein 系统的控制量时就存在系统稳定问题, 下面利用 Lyapunov 稳定性理论建立上述算法的闭环稳定性。

### 3.2.3 稳定性分析

考虑模型(3.1)及由上述算法计算的最优控制律  $u^{opt} = g(v'_k)$ , 并记  $f(v'_k) = h(g(v'_k))$ , 可得  $v_k = h(g(v'_k)) = f(v'_k)$ , 从而可得约束 Hammerstein 系统的闭环系统为

$$x_{k+1} = Ax_k + Bv_k = Ax_k + Bf(v'_k) - Bv'_k + Bv'_k = (A + BK)x_k + B(f(v'_k) - v'_k) \quad (3.6)$$

则对于系统(3.6)存在如下稳定性结论:

**定理 3.1** 对于(3.6), 如果存在一个实数  $\varepsilon > 0$  满足以下两个条件, 闭环系统渐近稳定:

$$i) \begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & (A + BK)^T P_1 \\ P_1 A & -\varepsilon I & 0 \\ P_1 (A + BK) & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

$$ii) 2s^T B^T P_1 B (f(s) - s) + (f(s) - s)^T (\varepsilon B^T B + B^T P_1 B) (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.8)$$

其中, 正定对称阵  $P_1 = X^{-1}$ 。

**证明:** 选取  $V(x) = x_k^T P_1 x_k$  为闭环系统(3.6)的备选 Lyapunov 函数, 其中正定对称矩阵  $P_1$  需满足  $(A + BK)^T P_1 (A + BK) - P_1 < 0$ , 则由引理 3.1 可得  $P_1 = X^{-1}$  满足条件。

$$\begin{aligned} & V(x_{k+1}) - V(x_k) \\ &= x_{k+1}^T P_1 x_{k+1} - x_k^T P_1 x_k \\ &= \left[ (A + BK)x_k + B(f(v'_k) - v'_k) \right]^T P_1 \left[ (A + BK)x_k + B(f(v'_k) - v'_k) \right] - x_k^T P_1 x_k \\ &= x_k^T (A + BK)^T P_1 (A + BK)x_k - x_k^T P_1 x_k + x_k^T (A + BK)^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\ & \quad + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 (A + BK)x_k + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_k^T (A+BK)^T P_1 (A+BK) x_k - x_k^T P_1 x_k + 2x_k^T (A+BK)^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&= x_k^T [(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1] x_k + 2x_k^T (A+BK)^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&= x_k^T [(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1] x_k + 2(x_k^T A^T + (v'_k)^T B^T) P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&= x_k^T [(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1] x_k + 2x_k^T A^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) + 2(v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\leq x_k^T [(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1] x_k + \varepsilon^{-1} x_k^T A^T P_1 P_1 A x_k + \varepsilon (f(v'_k) - v'_k)^T B^T B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\quad + 2(v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k)
\end{aligned}$$

要使得上式成立，需满足实数  $\varepsilon > 0$ ，从而可得

$$\begin{aligned}
V(x_{k+1}) - V(x_k) &\leq x_k^T [(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1 + \varepsilon^{-1} A^T P_1 P_1 A] x_k + \varepsilon (f(v'_k) - v'_k)^T B^T B (f(v'_k) - v'_k) \\
&\quad + 2(v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) \\
&= x_k^T [(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1 + \varepsilon^{-1} A^T P_1 P_1 A] x_k \\
&\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (\varepsilon B^T B + B^T P_1 B) (f(v'_k) - v'_k) + 2(v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k)
\end{aligned}$$

显然，要使系统稳定，函数  $V$  必须满足  $V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq 0$ 。即如果满足以下两个式子

$$(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1 + \varepsilon^{-1} A^T P_1 P_1 A < 0$$

$$2(v'_k)^T B^T P_1 B (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (\varepsilon B^T B + B^T P_1 B) (f(v'_k) - v'_k) \leq 0$$

的实数  $\varepsilon > 0$  存在，则有  $V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq 0$ 。记  $v'_k = s$ ，则

$$(f(s) - s)^T (\varepsilon B^T B + B^T P_1 B) (f(s) - s) + 2s^T B^T P_1 B (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.9)$$

由

$$(A+BK)^T P_1 (A+BK) - P_1 + \varepsilon^{-1} A^T P_1 P_1 A < 0$$

再利用矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & (A+BK)^T P_1 \\ P_1 A & -\varepsilon I & 0 \\ P_1 (A+BK) & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

如果存在实数  $\varepsilon > 0$ ，且满足式(3.9)和式(3.10)，则闭环系统稳定。定理得证。

### 3.3 约束 Hammerstein 模型 $H_\infty$ 控制器设计

考虑到实际系统中存在外界干扰, 本节研究的是约束 Hammerstein 模型  $H_\infty$  控制问题,  $H_\infty$  控制能在保证系统稳定的前提下, 使干扰对系统评价性能的影响被抑制到所要求的最小程度, 同时输出量尽可能对干扰信号不敏感, 从而保证系统鲁棒调节性能。以下通过结合  $H_\infty$  控制和两步法控制策略, 对有输入约束的离散时间状况空间模型描述的 Hammerstein 系统提出了一种两步法  $H_\infty$  控制器的设计方法, 即首先设计 Hammerstein 模型线性子系统的  $H_\infty$  控制器; 其次, 通过求解非线性方程组得到实际控制量。与此同时, 基于 Lyapunov 稳定性理论和  $H_\infty$  理论给出了闭环系统  $\gamma$  稳定的充分条件。

#### 3.3.1 系统描述

考虑由状态空间模型描述的离散时间约束 Hammerstein 系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 v(k) + B_2 \omega(k), \quad v(k) = h(u(k)) \\ z(k) &= Cx(k) + Dv(k) \\ U_{lb} \leq u(k) \leq U_{ub}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中:  $x(k) \in R^m$ ,  $v(k) \in R^n$ ,  $u(k) \in R^p$  分别是系统的状态向量, 中间变量和实际输入,  $z(k) \in R^q$  是被调输出;  $\omega(k) \in R^r$  是外部扰动输入, 且  $\omega(k) \in L_2[0, \infty)$ ;  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$  和  $D$  是适当维数的常数矩阵。  $h$  表示实际输入和中间变量的非线性关系, 满足  $h(0) = 0$ 。  $U_{lb} \in R^p$  和  $U_{ub} \in R^p$  分别为输入约束的最小值向量和最大值向量。

假设 3.1  $(A, B_1)$  是可控的,  $(A, C)$  是可观的。

定义 3.1 对给定的正常数  $\gamma$ , 设计状态反馈控制律  $v(k) = Kx(k)$ , 使得模型(3.11)的线性子系统  $x(k+1) = Ax(k) + B_1 v(k) + B_2 \omega(k)$  满足以下条件:

- (i) 线性子系统在  $\omega \equiv 0$  时是渐近稳定的;
- (ii) 在零初始条件下, 线性子系统对所有非零的  $\omega \in L_2[0, \infty)$ , 有

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|\omega\|_2 \quad (3.12)$$

则称线性子系统具有  $H_\infty$  的性能  $\gamma$ , 此时称线性子系统是  $\gamma$  稳定的。其中  $\|\cdot\|_2$  表示信号的 2-范数。

考虑 Hammerstein 模型的线性子系统和给定的正常数  $\gamma$ , 则存在如下结论:

引理 3.2<sup>[57]</sup> 如果优化问题

$$\min_{a, X, Y, N} Z = \text{Trace}(N) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t. (i)} \quad & \begin{bmatrix} -X & 0 & (AX+B_1V)^T & (CX+DV)^T \\ 0 & -a\gamma^2 I & aB_2^T & 0 \\ AX+B_1V & aB_2 & -X & 0 \\ CX+DV & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0 \\
 \text{(ii)} \quad & \begin{bmatrix} -N & B_2^T \\ B_2 & -X \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned}$$

存在一个最优解  $a, X, V, N$ ，则  $v(k) = VX^{-1}x(k)$  是系统(3.11)线性子系统的  $H_\infty$  最优控制律。此时，Hammerstein 模型的线性子系统具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。问题(3.13)可以直接用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解。

### 3.3.2 $H_\infty$ 控制器设计

考虑模型(3.11)，基于两步法设计约束 Hammerstein 系统的  $H_\infty$  控制器，其步骤如下：

首先，只针对线性子系统  $x(k+1) = Ax(k) + B_1v(k) + B_2\omega(k)$  设计控制器，为了便于书写，以下令  $x_k = x(k)$ ， $v_k = v(k)$ ， $z(k) = z_k$  及  $w_k = w(k)$ 。由引理 3.2 可得线性子系统的一个  $H_\infty$  控制：

$$v'_k = Kx_k = VX^{-1}x_k \quad (3.14)$$

其次，附加输入约束，同时为了使理论输入与实际输入偏差尽可能的小，则求解如下约束最优化问题

$$\begin{aligned}
 \min_u \quad & \left[ \|v'_k - h(u)\|^2 + \|u - u_{sp}\|_W^2 \right] \\
 \text{s.t.} \quad & U_{lb} \leq u \leq U_{ub}
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中的  $W$  为实际输入加权矩阵， $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数， $u_{sp}$  为输入目标值。求解(3.15)得满足输入约束的最优控制律，并记为  $u^{opt} = g(v'_k)$ 。

由以上可知，如果优化问题(3.15)在系统无约束情况下能够精确求解，则  $g$  满足  $h(g(v'_k)) = v'_k$ 。但实际系统一般  $h(g(v'_k)) - v'_k \neq 0$ 。因此当采用两步法计算约束非线性 Hammerstein 系统的控制作用时就存在系统稳定性问题。下面利用 Lyapunov 稳定性理论和  $H_\infty$  理论给出了闭环系统  $\gamma$  稳定的充分条件。

### 3.3.3 稳定性分析

考虑模型(3.11)及由上述算法计算所得的最优控制律  $u^{opt} = g(v'_k)$ 。方便起见，记



$f(v'_k) = h(g(v'_k))$ , 可得  $v_k = h(g(v'_k)) = f(v'_k)$ , 从而可得约束 Hammerstein 系统的闭环系统为

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1 v_k + B_2 w_k = Ax_k + B_1 f(v'_k) - B_1 v'_k + B_1 v'_k + B_2 w_k = (A + B_1 K)x_k + B_1 (f(v'_k) - v'_k) + B_2 w_k \quad (3.16)$$

定义 3.2 对给定的正常数  $\gamma$ , 如果状态反馈控制律  $v'_k = Kx_k$ , 使得闭环系统(3.16)满足:

- (i) 闭环系统在  $\omega = 0$  时是渐近稳定的;
- (ii) 在零初始条件下, 闭环系统对所有非零的  $\omega \in L_2[0, \infty)$ , 有

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|\omega\|_2 \quad (3.17)$$

则称闭环系统具有  $H_\infty$  的性能  $\gamma$ , 此时称闭环系统是  $\gamma$  稳定的。其中  $\|\cdot\|_2$  表示信号的 2-范数。

对于系统(3.16)存在如下稳定性结论:

定理 3.2 对给定的正常数  $\gamma$ , 如果存在一个实数  $\varepsilon > 0$  使得下列不等式成立:

$$i) \begin{bmatrix} -P_1 & 0 & (A+B_1K)^T P_1 & A^T P_1 & (C+DK)^T \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 \\ P_1(A+B_1K) & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ C+DK & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

$$ii) 2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) + (f(s) - s)^T (\varepsilon B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.19)$$

其中, 正定对称阵  $P_1 = X^{-1}$ , 则  $H_\infty$  控制器  $v'_k = Kx_k$  可使闭环系统  $\gamma$  稳定, 即  $\omega_k = 0$  时系统渐近稳定,  $\omega_k \neq 0$  时, 系统具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。

证明: 选取  $V(x) = x_k^T P_1 x_k$  为闭环系统(3.16)的备选 Lyapunov 函数, 其中正定对称矩阵  $P_1$  需满足  $(A+B_1K)^T P_1 (A+B_1K) - P_1 < 0$ , 由引理 3.2 可得  $P_1 = X^{-1}$  满足条件。首先, 不考虑干扰, 即令  $\omega_k = 0$ , 证明闭环系统  $x_{k+1} = (A+B_1K)x_k + B_1(f(v'_k) - v'_k)$  渐近稳定。

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\ &= x_{k+1}^T P_1 x_{k+1} - x_k^T P_1 x_k \\ &= x_k^T [(A+B_1K)^T P_1 (A+B_1K) - P_1] x_k + 2x_k^T A^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \\ &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \end{aligned}$$

易知

$$2x_k^T A^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \leq \varepsilon_1^{-1} x_k^T A^T P_1 P_1 A x_k + \varepsilon_1 (f(v'_k) - v'_k)^T B_1^T B_1 (f(v'_k) - v'_k) \quad (3.20)$$

要使得式(3.20)成立, 需满足实数  $\varepsilon_1 > 0$ , 从而可得

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\
 &\leq x_k^T [(A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) - P_1] x_k + \varepsilon_1^{-1} x_k^T A^T P_1 P_1 A x_k + 2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') \\
 &\quad + \varepsilon_1 (f(v_k') - v_k')^T B_1^T B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') \\
 &= x_k^T [(A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) - P_1 + \varepsilon_1^{-1} A^T P_1 P_1 A] x_k \\
 &\quad + (f(v_k') - v_k')^T (\varepsilon_1 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(v_k') - v_k') + 2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k')
 \end{aligned}$$

显然，要使系统在  $\omega_k = 0$  时渐近稳定，函数  $V$  必须满足  $\Delta V < 0$ 。即如果满足以下两个式子

$$(A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) - P_1 + \varepsilon_1^{-1} A^T P_1 P_1 A < 0 \quad (3.21)$$

$$2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (\varepsilon_1 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(v_k') - v_k') \leq 0 \quad (3.22)$$

的实数  $\varepsilon_1 > 0$  存在，则有  $\Delta V < 0$ 。记  $v_k' = s$ ，式(3.22)等价于

$$(f(s) - s)^T (\varepsilon_1 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(s) - s) + 2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.23)$$

利用矩阵 Schur 补性质，式(3.21)等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & (A+B_1K)^T P_1 \\ P_1 A & -\varepsilon_1 I & 0 \\ P_1(A+B_1K) & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

如果存在实数  $\varepsilon_1 > 0$ ，且满足式(3.23)和式(3.24)，则系统在  $\omega_k = 0$  时渐近稳定。

当考虑外界干扰  $\omega_k$  存在，证明闭环系统  $(A+B_1K)x_k + B_1(f(v_k') - v_k') + B_2 w_k$  具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。为了保证  $\|z\|_2$  的有界性，则在零初始条件下有：

$$J_{zw} = \Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \quad (3.25)$$

将其中的  $\Delta V$  和  $z(k) = Cx(k) + Dv(k)$  代入可得

$$\begin{aligned}
 J_{zw} &= \Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &= x_{k+1}^T P_1 x_{k+1} - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &= [(A+B_1K)x_k + B_1(f(v_k') - v_k') + B_2 w_k]^T P_1 [(A+B_1K)x_k + B_1(f(v_k') - v_k') + B_2 w_k] - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &= [x_k^T (A+B_1K)^T + w_k^T B_2^T] P_1 [(A+B_1K)x_k + B_2 w_k] - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &\quad + 2[x_k^T (A+B_1K)^T + w_k^T B_2^T] P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A+B_1K)^T \\ B_2^T \end{bmatrix} P_1 [(A+B_1K) \quad B_2] \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &\quad + 2[x_k^T (A+B_1K)^T + w_k^T B_2^T] P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) & (A+B_1K)^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1(A+B_1K) & B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (C+DK)^T(C+DK) & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x_k^T A^T + w_k^T B_2^T \end{bmatrix} P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \\
 &+ 2(v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k)
 \end{aligned}$$

由矩阵性质可知

$$2 \begin{bmatrix} x_k^T A^T + w_k^T B_2^T \end{bmatrix} P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \leq \varepsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} x_k^T A^T + w_k^T B_2^T \end{bmatrix} P_1 P_1 [Ax_k + B_2 w_k] + \varepsilon_2 (f(v'_k) - v'_k)^T B_1^T B_1 (f(v'_k) - v'_k) \quad (3.26)$$

要使得式(3.26)成立, 需满足实数  $\varepsilon_2 > 0$ , 从而可得

$$\begin{aligned}
 J_{zw} &= \Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &\leq \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) + (C+DK)^T(C+DK) & (A+B_1K)^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1(A+B_1K) & -\gamma^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &+ \varepsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} x_k^T A^T + w_k^T B_2^T \end{bmatrix} P_1 P_1 [Ax_k + B_2 w_k] + \varepsilon_2 (f(v'_k) - v'_k)^T B_1^T B_1 (f(v'_k) - v'_k) \\
 &+ 2(v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) + (C+DK)^T(C+DK) & (A+B_1K)^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1(A+B_1K) & -\gamma^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &+ \varepsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T \\ B_2^T \end{bmatrix} P_1 P_1 \begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \\
 &+ (f(v'_k) - v'_k)^T (\varepsilon_2 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) + (C+DK)^T(C+DK) & (A+B_1K)^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1(A+B_1K) & -\gamma^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &+ \varepsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P_1 P_1 A & A^T P_1 P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 P_1 A & B_2^T P_1 P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 B_1 (f(v'_k) - v'_k) \\
 &+ (f(v'_k) - v'_k)^T (\varepsilon_2 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(v'_k) - v'_k)
 \end{aligned}$$

令

$$Q = \begin{bmatrix} -P_1 + (C+DK)^T(C+DK) + \varepsilon_2^{-1} A^T P_1 P_1 A + (A+B_1K)^T P_1(A+B_1K) & (A+B_1K)^T P_1 B_2 + \varepsilon_2^{-1} A^T P_1 P_1 B_2 \\ B_2^T P_1(A+B_1K) + \varepsilon_2^{-1} B_2^T P_1 P_1 A & -\gamma^2 I + B_2^T P_1 B_2 + \varepsilon_2^{-1} B_2^T P_1 P_1 B_2 \end{bmatrix}$$

则可得

$$\Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k$$

$$= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + 2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (\varepsilon_2 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(v_k') - v_k') < 0 \quad (3.27)$$

要使得  $J_{zw} < 0$ ，只需满足式(3.28)和式(3.29)

$$\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3.28)$$

$$2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (\varepsilon_2 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(v_k') - v_k') \leq 0 \quad (3.29)$$

式(3.28)等价于使  $Q < 0$ ，即

$$\begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) + \varepsilon_2^{-1} A^T P_1 P_1 A + (A + B_1 K)^T P_1 (A + B_1 K) & (A + B_1 K)^T P_1 B_2 + \varepsilon_2^{-1} A^T P_1 P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 (A + B_1 K) + \varepsilon_2^{-1} B_2^T P_1 P_1 A & -\gamma^2 I + B_2^T P_1 B_2 + \varepsilon_2^{-1} B_2^T P_1 P_1 B_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

利用矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & (A + B_1 K)^T P_1 & A^T P_1 & (C + DK)^T \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 \\ P_1 (A + B_1 K) & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ C + DK & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

记  $v_k' = s$ ，式(3.29)等价于

$$2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) + (f(s) - s)^T (\varepsilon_2 B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.32)$$

如果存在实数  $\varepsilon_2 > 0$ ，且满足式(3.31)和式(3.32)，则  $J_{zw} < 0$ ，从而可得闭环系统具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。

在式(3.20)和式(3.26)中，为了分离非线性输入部分，分别引入了参数  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ ，不失一般性，可取  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ，此时非线性函数  $f$  所满足的不等式(3.23)和(3.32)均等价于

$$2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) + (f(s) - s)^T (\varepsilon B_1^T B_1 + B_1^T P_1 B_1) (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.33)$$

与此同时，式(3.24)等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & (A + B_1 K)^T P_1 \\ P_1 A & -\varepsilon I & 0 \\ P_1 (A + B_1 K) & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

式(3.31)等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & (A+B_1K)^T P_1 & A^T P_1 & (C+DK)^T \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 \\ P_1(A+B_1K) & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ C+DK & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

由矩阵性质易知式(3.35)成立时,式(3.34)必然成立。由以上可得,如果存在实数 $\varepsilon > 0$ ,且满足式(3.33)和式(3.35),则 $\omega_k = 0$ 时系统渐近稳定, $\omega_k \neq 0$ 时,系统具有 $H_\infty$ 性能 $\gamma$ 。定理得证。

### 3.4 约束不确定 Hammerstein 模型鲁棒 $H_\infty$ 控制器设计

考虑实际工程控制中,被控对象的参数不确定性的存在以及干扰信号的不可避免,本节研究的是约束不确定 Hammerstein 模型的鲁棒  $H_\infty$  控制问题,鲁棒  $H_\infty$  控制可同时有效的处理模型不确定性和外界扰动对于系统的影响,从而在保证系统鲁棒稳定性的前提下,还保证系统具有满意的动态响应能力和抗干扰抑制能力。考虑到鲁棒  $H_\infty$  控制和两步法控制各自所拥有的优点,本节结合两者对约束不确定 Hammerstein 系统提出了一种两步法鲁棒  $H_\infty$  控制器的设计方法,即首先利用 LMI 理论设计 Hammerstein 模型线性子系统的鲁棒  $H_\infty$  控制器;其次,通过反解非线性方程组得到实际的控制作用。随后,利用 Lyapunov 稳定性理论和鲁棒  $H_\infty$  理论给出了闭环系统鲁棒稳定的充分条件。

#### 3.4.1 系统描述

考虑由状态空间模型描述的离散时间约束不确定 Hammerstein 系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A)x(k) + (B_1 + \Delta B_1)v(k) + B_2\omega(k) \\ z(k) &= Cx(k) + Dv(k) \\ v(k) &= h(u(k)) \\ U_{lb} \leq u \leq U_{ub}, \quad k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

其中:  $x(k) \in R^m$ ,  $v(k) \in R^n$ ,  $u(k) \in R^p$  分别是系统的状态向量,中间变量和实际输入, $z(k) \in R^q$  为被调输出; $\omega(k) \in R^s$  是外部扰动输入,且 $\omega(k) \in L_2[0, \infty)$ ;  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$  和  $D$  是适当维数的常数矩阵,  $\Delta A$  和  $\Delta B_1$  是反映系统模型中的参数不确定性的未知矩阵,假定是范数有界的,且具有以下形式:

$$[\Delta A \quad \Delta B_1] = HF [E_1 \quad E_2] \quad (3.37)$$

上式中的  $F \in R^{i \times j}$  是一个满足

$$F^T F \leq I \quad (3.38)$$

的不确定矩阵,  $H$ 、 $E_1$ 和 $E_2$ 是已知的常数矩阵,反映了不确定常数的结构信息; $h$ 表示实际输入和中间变量的非线性关系,满足 $h(0)=0$ ;  $U_b \in R^p$ 和 $U_{ub} \in R^p$ 分别为输入约束的最小值向量和最大值向量。

假设 3.2  $(A, B_1)$ 是可控的,  $(A, C)$ 是可观的。

定义 3.3 对给定的正常数 $\gamma$ ,状态反馈控制律 $v(k)=Kx(k)$ 称为模型(3.36)的线性子系统 $x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B_1+\Delta B_1)v(k)+B_2\omega(k)$ 的鲁棒  $H_\infty$ 控制律。如果对所有满足(3.38)的参数不确定性,以下条件成立:

- (i) 线性子系统在 $\omega=0$ 时是渐近稳定的;
- (ii) 在零初始条件下,线性子系统对所有非零的 $\omega \in L_2[0, \infty)$ ,有

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|\omega\|_2 \quad (3.39)$$

此时称线性子系统是 $\gamma$ 稳定的。其中 $\|\cdot\|_2$ 表示信号的2-范数。

考虑 Hammerstein 模型的线性子系统和给定的正常数 $\gamma$ ,则存在如下结论:

引理 3.3<sup>[57]</sup> 如果优化问题

$$\min_{a,b,X,V,N} \text{Trace}(N) \quad (3.40)$$

$$\text{s.t. (i)} \quad \begin{bmatrix} -X & 0 & (AX+B_1V)^T & (E_1X+E_2V)^T & (CX+DV)^T \\ 0 & -a\gamma^2 I & aB_2^T & 0 & 0 \\ AX+B_1V & aB_2 & -X+bHH^T & 0 & 0 \\ E_1X+E_2V & 0 & 0 & -bI & 0 \\ CX+DV & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} -N & B_2^T \\ B_2 & -X \end{bmatrix} < 0$$

存在一个最优解 $a,b,X,V,N$ ,则 $v(k)=VX^{-1}x(k)$ 是系统(3.36)的线性子系统的鲁棒  $H_\infty$ 控制律。问题(3.40)可以直接用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解。

在设计控制器前,再引入以下的引理。

引理 3.4<sup>[57]</sup> 给定适当维数的矩阵 $Y$ 、 $D$ 和 $E$ ,其中 $Y$ 是对称的,则 $Y+DFE+E^T F^T D^T < 0$ ,对所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 $F$ 成立,当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$ ,使得

$$Y+\varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0 \quad (3.41)$$

引理 3.5<sup>[58]</sup>  $A$ ,  $H$ ,  $E$ 和 $F$ 为适当维数的实数矩阵,且 $F^T F \leq I$ ,则对于任意满

足不等式  $\varepsilon I - E^T P E > 0$  的对称正定矩阵  $P$  的  $\varepsilon > 0$ ，下面的不等式成立

$$(A + HFE)^T P (A + HFE) \leq A^T P A + A^T P E (\varepsilon I - E^T P E) E^T P A + \varepsilon H H^T \quad (3.42)$$

### 3.4.2 鲁棒 $H_\infty$ 控制器设计

对于(3.36)，下面给出不确定 Hammerstein 系统两步法鲁棒  $H_\infty$  控制器的设计方法。为了便于书写，以下令  $x_k = x(k)$ ， $v_k = v(k)$ ， $z(k) = z_k$  及  $\omega_k = \omega(k)$ 。

第一步，针对线性部分  $x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B_1 + \Delta B_1)v(k) + B_2\omega(k)$ ，由引理 3.3 可得线性子系统的鲁棒  $H_\infty$  控制：

$$v_k' = Kx_k = VX^{-1}x_k \quad (3.43)$$

第二步，考虑输入约束，极小化如下约束最优化问题

$$\begin{aligned} \min_u & \left[ \|v_k' - h(u)\|^2 + \|u - u_{sp}\|_W^2 \right] \\ \text{s.t. } & U_{lb} \leq u \leq U_{ub} \end{aligned} \quad (3.44)$$

目的在于使理论输入与实际输入偏差尽可能的小。其中的  $W$  为实际输入加权矩阵， $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数， $u_{sp}$  为输入目标值。通过求解(3.44)得满足输入约束的最优控制律，并记为  $u^{opt} = g(v_k')$ 。

易知，如果优化问题(3.44)能够精确求解且系统是无约束的，则  $g$  满足  $h(g(v_k')) = v_k'$ 。但对于实际系统  $h(g(v_k')) - v_k' \neq 0$ 。因此当采用两步法计算约束非线性 Hammerstein 系统的控制量时就存在系统稳定性问题。

### 3.4.3 稳定性分析

考虑模型(3.36)及由上述算法计算的最优控制律  $u^{opt} = g(v_k')$ ，并记  $f(v_k') = h(g(v_k'))$ ，可得  $v_k = h(g(v_k')) = f(v_k')$ ，从而可得约束 Hammerstein 系统的闭环系统为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (B_1 + \Delta B_1)f(v_k') - (B_1 + \Delta B_1)v_k' + (B_1 + \Delta B_1)v_k' + B_2\omega_k \\ &= (A + \Delta A + B_1K + \Delta B_1K)x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v_k') - v_k') + B_2\omega_k \\ &= ((A + B_1K) + (\Delta A + \Delta B_1K))x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v_k') - v_k') + B_2\omega_k \end{aligned}$$

令  $A_c = A + B_1K$ ， $\Delta A + \Delta B_1K = HF(E_1 + E_2K) = HFE_c$ ， $\bar{A}_c = A_c + HFE_c$ ， $A_d = A + HFE_c$

所以

$$x_{k+1} = \bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v_k') - v_k') + B_2\omega_k \quad (3.45)$$

定义 3.4 对给定的正常数  $\gamma$ ，状态反馈控制律  $v_k' = Kx_k$  称为模型(3.36)的鲁棒  $H_\infty$  控制

律。如果对所有满足(3.38)的参数不确定性，以下条件成立：

- (i) 闭环系统在  $\omega \equiv 0$  时是渐近稳定的；
- (ii) 在零初始条件下，闭环系统对所有非零的  $\omega \in L_2[0, \infty)$ ，有

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|\omega\|_2 \quad (3.46)$$

此时称闭环系统是  $\gamma$  稳定的。其中  $\|\cdot\|_2$  表示信号的 2-范数。

对于系统(3.45)存在如下稳定性结论：

**定理 3.3** 对给定的正常数  $\gamma$ ，如果存在四个均大于零的实数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  满足  $\varepsilon_4 I - E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2 > 0$  且满足以下不等式：

$$i) \begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 & E_c^T & 0 \\ P_1 A & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & \varepsilon_2 P_1 H \\ P_1 A_c & 0 & -P_1 & 0 & \varepsilon_2 P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 H^T P_1 & \varepsilon_2 H^T P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.47)$$

$$ii) \begin{bmatrix} -P_1 & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 & E_c^T & (C + DK)^T & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_1^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 P_1 H \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & \varepsilon_3 P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ C + DK & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 H^T P_1 & \varepsilon_3 H^T P_1 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.48)$$

$$iii) \quad 2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) + \varepsilon_4 s^T B_1^T P_1 H H^T P_1 B_1 s + (f(s) - s)^T \Pi (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.49)$$

其中：

$$\Pi = B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2 (\varepsilon_4 I - E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2)^{-1} E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + \varepsilon_4 H H^T + \varepsilon_4^{-1} E_2^T E_2$$

$$P_1 = X^{-1}$$

$$A_c = A + B_1 K$$

则对所有满足(3.38)的参数不确定性，鲁棒  $H_\infty$  控制器  $v_k' = Kx_k$  可使闭环系统  $\gamma$  稳定，即  $\omega_k = 0$  时闭环系统渐近稳定， $\omega_k \neq 0$  时，闭环系统具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。

**证明：**选取  $V(x) = x_k^T P_1 x_k$  为闭环系统(3.45)的备选 Lyapunov 函数，由引理 3.3 可得正定对称矩阵需满足  $P_1 = X^{-1}$ 。首先，不考虑干扰，即令  $\omega_k = 0$ ，证明如果式(3.47)和式(3.49)同时成立，则闭环系统  $x_{k+1} = \bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v_k') - v_k')$  渐近稳定。

$$\Delta V = V_{k+1} - V_k$$



$$\begin{aligned}
 &= x_{k+1}^T P_1 x_{k+1} - x_k^T P_1 x_k \\
 &= [\bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k)]^T P_1 [\bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k)] - x_k^T P_1 x_k \\
 &= (\bar{A}_c x_k)^T P_1 (\bar{A}_c x_k) - x_k^T P_1 x_k + 2(\bar{A}_c x_k)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &= (\bar{A}_c x_k)^T P_1 (\bar{A}_c x_k) - x_k^T P_1 x_k + 2(A_d + B_1 K)x_k^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &= (\bar{A}_c x_k)^T P_1 (\bar{A}_c x_k) - x_k^T P_1 x_k + 2[x_k^T A_d^T + (v'_k)^T B_1^T] P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &= (\bar{A}_c x_k)^T P_1 (\bar{A}_c x_k) - x_k^T P_1 x_k + 2(A_d x_k)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k)
 \end{aligned}$$

由矩阵性质可知

$$2(A_d x_k)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \leq \beta_1^{-1} (A_d x_k)^T P_1 P_1 (A_d x_k) + \beta_1 (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \quad (3.50)$$

要使得式(3.50)成立,  $\beta_1$ 需为大于零的实数, 由此可得

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= V_{k+1} - V_k \\
 &\leq (\bar{A}_c x_k)^T P_1 (\bar{A}_c x_k) - x_k^T P_1 x_k + \beta_1^{-1} (A_d x_k)^T P_1 P_1 (A_d x_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + \beta_1 (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &= x_k^T \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c x_k - x_k^T P_1 x_k + \beta_1^{-1} x_k^T A_d^T P_1 P_1 A_d x_k + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T (P_1 + \beta_1 I)(B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \\
 &= M + N
 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 M &= x_k^T \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c x_k - x_k^T P_1 x_k + \beta_1^{-1} x_k^T A_d^T P_1 P_1 A_d x_k = x_k^T (\bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c + \beta_1^{-1} A_d^T P_1 P_1 A_d - P_1) x_k \\
 N &= 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T (P_1 + \beta_1 I)(B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k)
 \end{aligned}$$

易知若  $M < 0$  和  $N \leq 0$  同时成立, 则  $V_{k+1} - V_k < 0$ , 系统渐近稳定。

要使  $M < 0$ , 即满足

$$\bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c + \beta_1^{-1} A_d^T P_1 P_1 A_d - P_1 < 0 \quad (3.51)$$

由矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A_d^T P_1 & \bar{A}_c^T P_1 \\ P_1 A_d & -\beta_1 I & 0 \\ P_1 \bar{A}_c & 0 & -P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.52)$$

代入  $\bar{A}_c = A_c + HFE_c$  和  $A_d = A + HFE_c$ , 可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 \\ P_1 A & -\beta_1 I & 0 \\ P_1 A_c & 0 & -P_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & E_c^T F^T H^T P_1 & E_c^T F^T H^T P_1 \\ P_1 HFE_c & 0 & 0 \\ P_1 HFE_c & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.53)$$

令

$$Y = \begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 \\ P_1 A & -\beta_1 I & 0 \\ P_1 A_c & 0 & -P_1 \end{bmatrix}$$

式(3.53)相当于

$$Y + \begin{bmatrix} 0 & E_c^T F^T H^T P_1 & E_c^T F^T H^T P_1 \\ P_1 HFE_c & 0 & 0 \\ P_1 HFE_c & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.54)$$

式(3.54)等价于

$$Y + \begin{bmatrix} 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix} F [E_c \ 0 \ 0] + [E_c \ 0 \ 0]^T F \begin{bmatrix} 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix}^T < 0 \quad (3.55)$$

由引理 3.4 可得

$$Y + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix}^T + \varepsilon_2^{-1} [E_c \ 0 \ 0]^T [E_c \ 0 \ 0] < 0 \quad (3.56)$$

其中  $\varepsilon_2$  需为大于零的实数, 式(3.56)等价于

$$Y + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 \\ 0 & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2^{-1} E_c^T E_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.57)$$

代入  $Y$  可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 + \varepsilon_2^{-1} E_c^T E_c & A^T P_1 & A_c^T P_1 \\ P_1 A & -\beta_1 I + \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 \\ P_1 A_c & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & -P_1 + \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.58)$$

由矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 & E_c^T \\ P_1 A & -\beta_1 I + \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & 0 \\ P_1 A_c & \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & -P_1 + \varepsilon_2 P_1 H H^T P_1 & 0 \\ E_c & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.59)$$

再次利用矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 & E_c^T & 0 \\ P_1 A & -\beta_1 I & 0 & 0 & P_1 H \\ P_1 A_c & 0 & -P_1 & 0 & P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & H^T P_1 & H^T P_1 & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.60)$$

对式(3.60)的左边的矩阵同时左乘和右乘  $\text{diag}\{I, I, I, I, \varepsilon_2 I\}$ , 由此可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 & E_c^T & 0 \\ P_1 A & -\beta_1 I & 0 & 0 & \varepsilon_2 P_1 H \\ P_1 A_c & 0 & -P_1 & 0 & \varepsilon_2 P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 H^T P_1 & \varepsilon_2 H^T P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.61)$$

易知式(3.61)成立, 则  $M < 0$ 。所以如果式(3.61)成立, 且  $N \leq 0$ , 则系统渐近稳定。

当考虑干扰  $\omega_k$  的存在, 证明如果式(3.48)和式(3.49)同时成立, 则闭环系统  $x_{k+1} = \bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + B_2 \omega_k$  对于所有满足(3.38)的参数不确定性具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。

为了保证  $\|z\|_2$  的有界性, 则在零初始条件下有:

$$J_{zw} = \Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \quad (3.61)$$

只需证明  $J_{zw} < 0$  即可。将其中的  $\Delta V$  和  $z_k = Cx_k + Dv_k$  代入可得

$$\begin{aligned} J_{zw} &= \Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\ &= x_{k+1}^T P_1 x_{k+1} - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\ &= [\bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + B_2 w_k]^T P_1 [\bar{A}_c x_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + B_2 w_k] - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k \\ &\quad - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\ &= [x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T] P_1 [\bar{A}_c x_k + B_2 w_k + (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k)] - x_k^T P_1 x_k + z_k^T z_k \\ &\quad - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\ &= (x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T) P_1 (\bar{A}_c x_k + B_2 w_k) - x_k^T P_1 x_k + 2(x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T) P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\ &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)(f(v'_k) - v'_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_c^T \\ B_2^T \end{bmatrix} P_1 \begin{bmatrix} \bar{A}_c & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (C+DK)^T(C+DK) & 0 \\ 0 & -r^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + 2(x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T) P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (C+DK)^T(C+DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c & \bar{A}_c^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + 2(x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T) P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (C+DK)^T(C+DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c & \bar{A}_c^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + 2(x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T) P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k)
 \end{aligned}$$

由矩阵性质可得

$$\begin{aligned}
 &2(x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T) P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &\leq \beta_2^{-1} [x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T] P_1 P_1 [A_d x_k + B_2 w_k] + \beta_2 (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

要使(3.62)成立,  $\beta_2$  需为大于零的实数, 由此可得

$$\begin{aligned}
 J_{zw} &= \Delta V + z_k^T z_k - \gamma^2 \omega_k^T \omega_k \\
 &\leq \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (C+DK)^T(C+DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c & \bar{A}_c^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + \beta_2^{-1} [x_k^T \bar{A}_c^T + w_k^T B_2^T] P_1 P_1 [A_d x_k + B_2 w_k] + \beta_2 (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (C+DK)^T(C+DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c & \bar{A}_c^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + \beta_2^{-1} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_d^T \\ B_2^T \end{bmatrix} P_1 P_1 \begin{bmatrix} A_d & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) \\
 &\quad + (f(v'_k) - v'_k)^T [\beta_2 (B_1 + \Delta B_1)^T (B_1 + \Delta B_1) + (B_1 + \Delta B_1)^T P_1 (B_1 + \Delta B_1)] (f(v'_k) - v'_k) \\
 &= \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 + (C+DK)^T(C+DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c + \beta_2^{-1} A_d^T P_1 P_1 A_d & \bar{A}_c^T P_1 B_2 + \beta_2^{-1} A_d^T P_1 P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c + \beta_2^{-1} B_2^T P_1 P_1 A_d & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 + \beta_2^{-1} B_2^T P_1 P_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
 &\quad + 2(v'_k)^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k) + (f(v'_k) - v'_k)^T (B_1 + \Delta B_1)^T \beta_2 I + P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v'_k) - v'_k)
 \end{aligned}$$

要使得  $J_{zw} < 0$ , 只需满足式(3.63)和式(3.64)

$$\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0 \quad (3.63)$$

$$Q_2 \leq 0 \quad (3.64)$$

其中:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c + \beta_2^{-1} A_d^T P_1 A_d & \bar{A}_c^T P_1 B_2 + \beta_2^{-1} A_d^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c + \beta_2^{-1} B_2^T P_1 A_d & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 + \beta_2^{-1} B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = 2(v_k')^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (B_1 + \Delta B_1)^T (\beta_2 I + P_1) (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k')$$

要使得式(3.63)成立, 只需满足

$$\begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) + \bar{A}_c^T P_1 \bar{A}_c + \beta_2^{-1} A_d^T P_1 A_d & \bar{A}_c^T P_1 B_2 + \beta_2^{-1} A_d^T P_1 B_2 \\ B_2^T P_1 \bar{A}_c + \beta_2^{-1} B_2^T P_1 A_d & -r^2 I + B_2^T P_1 B_2 + \beta_2^{-1} B_2^T P_1 B_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.65)$$

利用矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) & 0 & \bar{A}_c^T P_1 & A_d^T P_1 \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 \\ P_1 \bar{A}_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 \\ P_1 A_d & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.66)$$

把  $\bar{A}_c = A_c + HFE_c$ ,  $A_d = A + HFE_c$  代入式(3.66), 可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) & 0 & (A_c^T + E_c^T F^T H^T) P_1 & (A^T + E_c^T F^T H^T) P_1 \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 \\ P_1 (A_c + HFE_c) & P_1 B_2 & -P_1 & 0 \\ P_1 (A + HFE_c) & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_c^T F^T H^T P_1 & E_c^T F^T H^T P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 HFE_c & 0 & 0 & 0 \\ P_1 HFE_c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.68)$$

令

$$Y = \begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I \end{bmatrix}$$

式(3.68)相当于

$$Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix} F [E_c \ 0 \ 0 \ 0] + [E_c \ 0 \ 0 \ 0]^T F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix}^T < 0 \quad (3.69)$$

由引理 3.4 可得

$$Y + \varepsilon_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \end{bmatrix}^T + \varepsilon_3^{-1} \begin{bmatrix} E_c^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.70)$$

其中  $\varepsilon_3$  需为大于零的实数, 代入  $Y$ , 由此可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 + (C + DK)^T (C + DK) + \varepsilon_3^{-1} E_c^T E_c & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 + \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 & \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 \\ P_1 A & P_1 B_2 & \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 & -\beta_2 I + \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.71)$$

利用矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 & E_c^T & (C + DK)^T \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 & 0 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 + \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 & \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 & 0 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 & -\beta_2 I + \varepsilon_3 P_1 H H^T P_1 & 0 & 0 \\ E_c & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ C + DK & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.72)$$

式(3.72)相当于

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 & E_c^T & (C + DK)^T \\ 0 & -r^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 & 0 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I & 0 & 0 \\ E_c & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ C + DK & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-\varepsilon_3^{-1} I)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 H \\ P_1 H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (3.73)$$

利用矩阵 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 & E_c^T & (C+DK)^T & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & P_1 H \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I & 0 & 0 & P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ C+DK & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & H^T P_1 & H^T P_1 & 0 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.74)$$

对式(3.74)的左边的矩阵同时左乘和右乘  $\text{diag}\{I, I, I, I, I, I, \varepsilon_3 I\}$ , 由此可得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 & E_c^T & (C+DK)^T & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 P_1 H \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\beta_2 I & 0 & 0 & \varepsilon_3 P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ C+DK & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 H^T P_1 & \varepsilon_3 H^T P_1 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.75)$$

由此可得当(3.75)成立时, 式(3.63)成立, 此时只需再满足  $Q_2 \leq 0$ , 就可得  $J_w < 0$ 。

同 3.3 节, 在式(3.50)和式(3.62)中, 为了分离非线性输入部分, 分别引入了参数  $\beta_1$  和  $\beta_2$ , 不失一般性, 可取  $\beta_1 = \beta_2 = \varepsilon_1$ , 此时非线性函数  $f$  所满足的不等式  $Q_2 \leq 0$  和  $N \leq 0$  均等价于

$$2(v_k')^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (B_1 + \Delta B_1)^T (\varepsilon_1 I + P_1) (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k') \leq 0 \quad (3.76)$$

令

$$\Gamma = 2(v_k')^T B_1^T P_1 (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (B_1 + \Delta B_1)^T (\varepsilon_1 I + P_1) (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k')$$

则可得

$$\Gamma = 2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + 2(v_k')^T B_1^T P_1 \Delta B_1 (f(v_k') - v_k') + (f(v_k') - v_k')^T (B_1 + \Delta B_1)^T (P_1 + \varepsilon_1 I) (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k') \quad (3.77)$$

由引理 3.5 和矩阵性质可得

$$\begin{aligned} & (f(v_k') - v_k')^T (B_1 + \Delta B_1)^T (P_1 + \varepsilon_1 I) (B_1 + \Delta B_1) (f(v_k') - v_k') + 2(v_k')^T B_1^T P_1 \Delta B_1 (f(v_k') - v_k') \\ & \leq (f(v_k') - v_k')^T [B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2 (\varepsilon_4 I - E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2)^{-1} E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + \varepsilon_4 H H^T] (f(v_k') - v_k') \\ & \quad + \varepsilon_4 (v_k')^T B_1^T P_1 H H^T P_1 B_1 (v_k') + \varepsilon_4^{-1} (f(v_k') - v_k')^T E_2^T E_2 (f(v_k') - v_k') \end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_4 I - E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2 > 0$ , 由此可得式(3.77)等价于

$$\begin{aligned} \Gamma & \leq 2(v_k')^T B_1^T P_1 B_1 (f(v_k') - v_k') + \varepsilon_4 (v_k')^T B_1^T P_1 H H^T P_1 B_1 (v_k') + \varepsilon_4^{-1} (f(v_k') - v_k')^T E_2^T E_2 (f(v_k') - v_k') \\ & \quad + (f(v_k') - v_k')^T [B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2 (\varepsilon_4 I - E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2)^{-1} E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 \\ & \quad + \varepsilon_4 H H^T] (f(v_k') - v_k') \end{aligned} \quad (3.78)$$

记  $v_k' = s$ , 式(3.78)等价于

$$\Gamma \leq 2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) + \varepsilon_4 s^T B_1^T P_1 H H^T P_1 B_1 s + (f(s) - s)^T \Pi (f(s) - s) \quad (3.79)$$

其中:

$$\Pi = B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + B_1^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2 (\varepsilon_4 I - E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) E_2)^{-1} E_2^T (P_1 + \varepsilon_1 I) B_1 + \varepsilon_4 H H^T + \varepsilon_4^{-1} E_2^T E_2$$

若式(3.79)成立, 即

$$2s^T B_1^T P_1 B_1 (f(s) - s) + \varepsilon_4 s^T B_1^T P_1 H H^T P_1 B_1 s + (f(s) - s)^T \Pi (f(s) - s) \leq 0 \quad (3.80)$$

则  $\Gamma \leq 0$ , 从而使得  $Q_2 \leq 0$  和  $N \leq 0$  同时成立。

与此同时, 式(3.75)等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1 & 0 & A_c^T P_1 & A^T P_1 & E_c^T & (C+DK)^T & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & B_2^T P_1 & B_2^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 A_c & P_1 B_2 & -P_1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 P_1 H \\ P_1 A & P_1 B_2 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & \varepsilon_3 P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ C+DK & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 H^T P_1 & \varepsilon_3 H^T P_1 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.81)$$

式(3.61)等价于

$$\begin{bmatrix} -P_1 & A^T P_1 & A_c^T P_1 & E_c^T & 0 \\ P_1 A & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & \varepsilon_2 P_1 H \\ P_1 A_c & 0 & -P_1 & 0 & \varepsilon_2 P_1 H \\ E_c & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 H^T P_1 & \varepsilon_2 H^T P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.82)$$

由以上可得, 对所有满足(3.38)的参数不确定性, 若存在四个均大于零的实数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ , 且满足式(3.80), 式(3.81)和式(3.82), 则  $\omega_k = 0$  时系统渐近稳定,  $\omega_k \neq 0$  时, 系统具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ 。定理得证。



## 第 4 章 聚丙烯牌号切换控制仿真研究

### 4.1 引言

聚丙烯牌号切换过程为强非线性过程。按照一般方法，应该设计一个非线性的控制器来控制输入信号，但非线性控制器在现今理论下设计还比较繁琐，而且系统稳定性很难得到保证。为了克服这个困难，从式子(2.10)出发，我们把切换过程看成是一个线性子系统和一个非线性子系统的组合，采用 Hammerstein 模型两步法控制，先对线性部分设计线性化控制器，再求解非线性方程组，从而得到实际的控制作用。这样做的好处在于，控制器设计过程简单，而且系统稳定性也容易得到保证。在接下来的三节中我们分别把第三章中的三种控制算法应用于聚丙烯牌号切换过程。

牌号切换的目的在于使目标牌号的最终累计熔融指数在合格范围内。本章以牌号 A 和牌号 B 作为切换过程的目标牌号和起始牌号，表 4-1 给出了牌号 A 与牌号 B 的稳态生产数据和性能指标。其中  $MI$  表示熔融指数值； $T(K)$ ， $C_{H_2/M}$  分别为反应温度和氢烯摩尔浓度比。

表 4-1 两牌号的稳态生产数据和性能指标

	A1#	A2#	B1#	B2#
$MI(g/10min)$	43.118	36.217	2.336	3.003
$T(K)$	343.15	343.15	343.15	343.15
$C_{H_2/M}$	0.0033	0.003	0.0005	0.00045

注：1#和 2#分别表示第一环管和第二环管。

### 4.2 基于 LMI 的 Hammerstein 系统最优控制仿真

为了应用控制算法，取离散时间  $T_s=0.5h$ ，将模型(2.10)线性子系统离散化可得：

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5553 & 0 \\ 0.2649 & 0.3595 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.4447 & 0 \\ 0.1034 & 0.2722 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.1)$$

非线性子系统为

$$\ln(MI_i) = k_1 + k_2 / T + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M}) \quad (4.2)$$

在以上条件下，可得最优控制器为

$$v(k) = \begin{bmatrix} 0.083 & -0.2941 \\ 0.0944 & -0.4681 \end{bmatrix} x(k) \quad (4.3)$$

#### 4.2.1 基于 LMI 的约束 Hammerstein 系统最优控制算法的实现

基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型最优控制算法的实施步骤如下：

- 在机理建模的基础上，利用生产数据辨识得到切换前牌号的  $MI$  模型参数；
- 读入  $k$  时刻的双环管累计熔融指数值  $MI_{c,1}(k)$  和  $MI_{c,2}(k)$ ，并进行坐标平移；
- 利用引理 3.1 计算中间变量  $v'_k$ ，即  $k$  时刻的双环管瞬时熔融指数  $MI_{i,1}(k)$  和  $MI_{i,2}(k)$

的理论值；

- 利用  $\min_u [\|v'_k - h(u)\|^2 + \|u - u_p\|_w^2]$  求解实际输入  $T_1, T_2, C_{H_2/M}^1, C_{H_2/M}^2$ ，即两环管的

温度以及氢气丙烯浓度比；

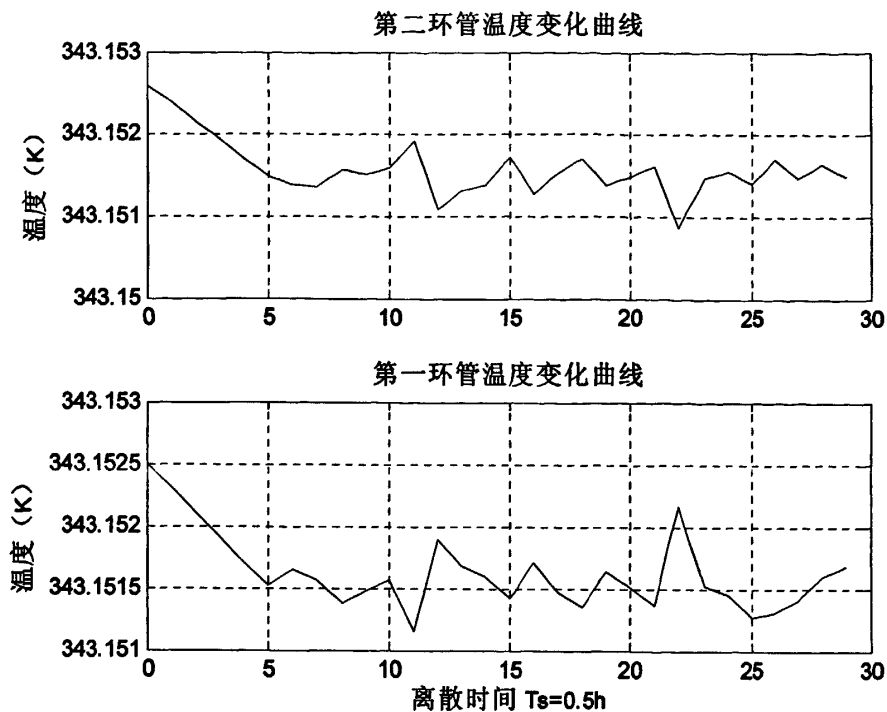
- 利用式子(4.2)分别计算  $k$  时刻的双环管瞬时熔融指数  $MI_{i,1}(k)$  和  $MI_{i,2}(k)$  的实际值；
- 利用式子(4.1)计算  $k+1$  时刻的累计熔融指数  $MI_{c,1}(k+1)$  和  $MI_{c,2}(k+1)$ ；
- 令  $k = k+1$ ，转步骤 b)。

#### 4.2.2 计算结果及讨论

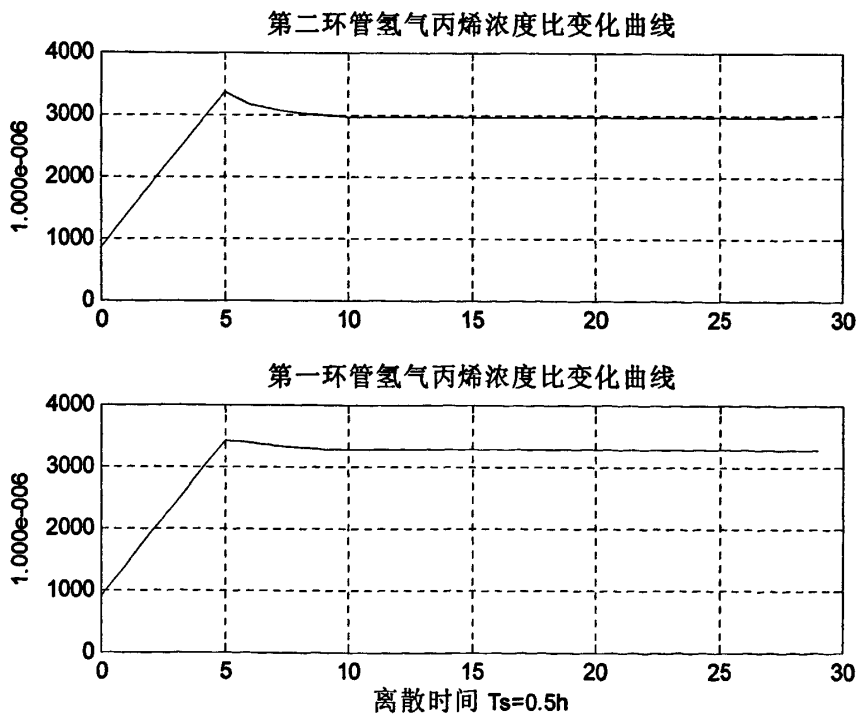
将 4.2.1 节中的算法应用于聚丙烯的两个牌号 A 和 B 的切换过程中，得到切换过程中两环管反应器中产品性能指标的变化轨迹、状态变量的变化轨迹以及最终产物的熔融指数的变化轨迹。

由表 4-1 可知，牌号 A 和牌号 B 的熔融指数相差很大，且反应器中情况不同，第一环管反应器中的聚合物的  $MI$  值由 2.336 g/10min 上升到 43.118 g/10min，而第二环管反应器中则由 3.003 g/10min 上升到 36.217 g/10min。由于牌号切换时聚合单体丙烯的进料速率通常保持不变，反应器内熔融指数的改变，主要是通过调节氢气的进料速率以改变氢气浓度来实现。

牌号 B 和牌号 A 分别为起始牌号与目标牌号。计算所得轨迹如图 4-1~图 4-3 所示。



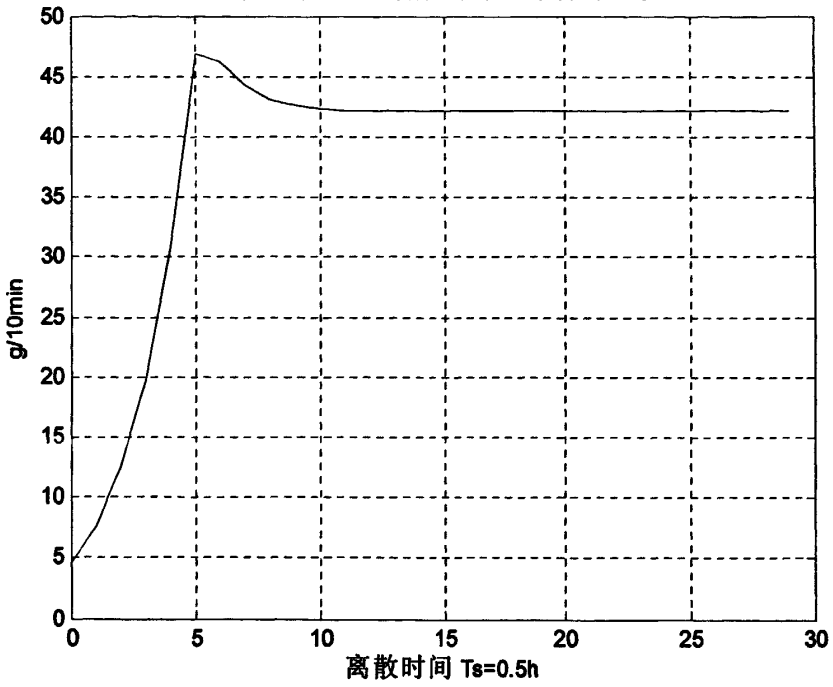
(a)



(b)

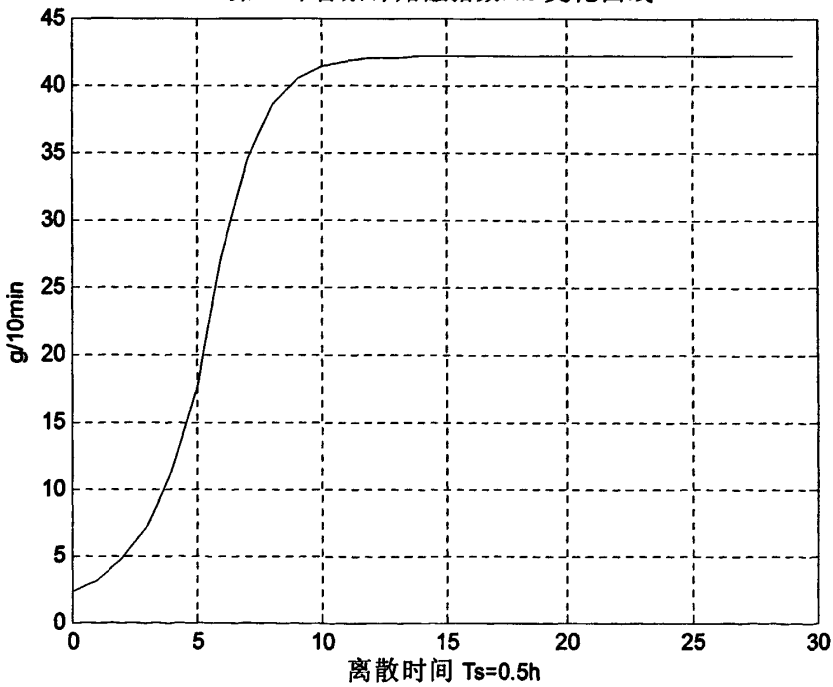
图 4-1 环管反应器中控制量变化轨迹

第一环管瞬时熔融指数M<sub>li</sub>变化曲线



(a)

第一环管累计熔融指数M<sub>lc</sub>变化曲线



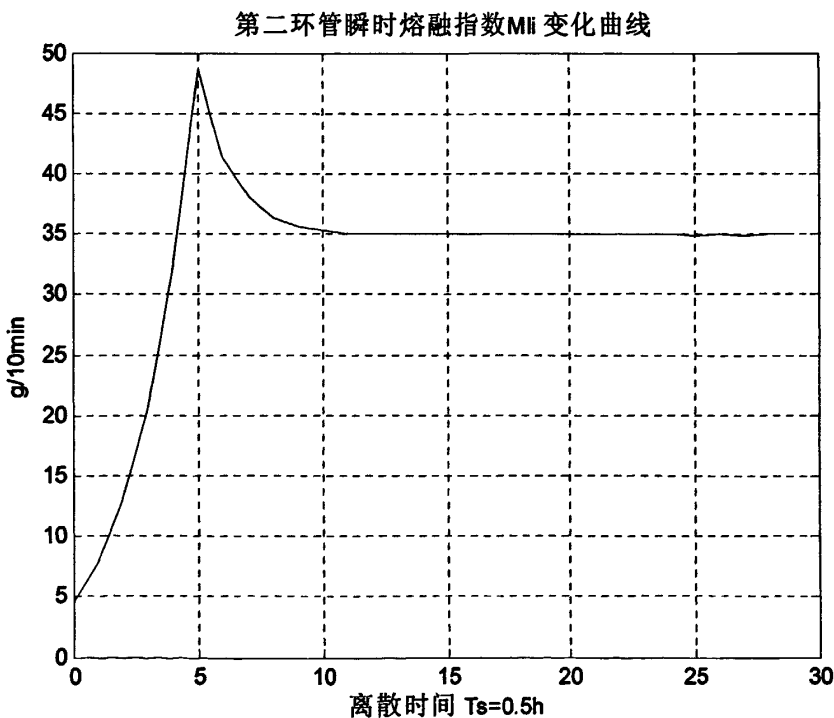
(b)

图 4-2 第一环管反应器中状态变量变化轨迹

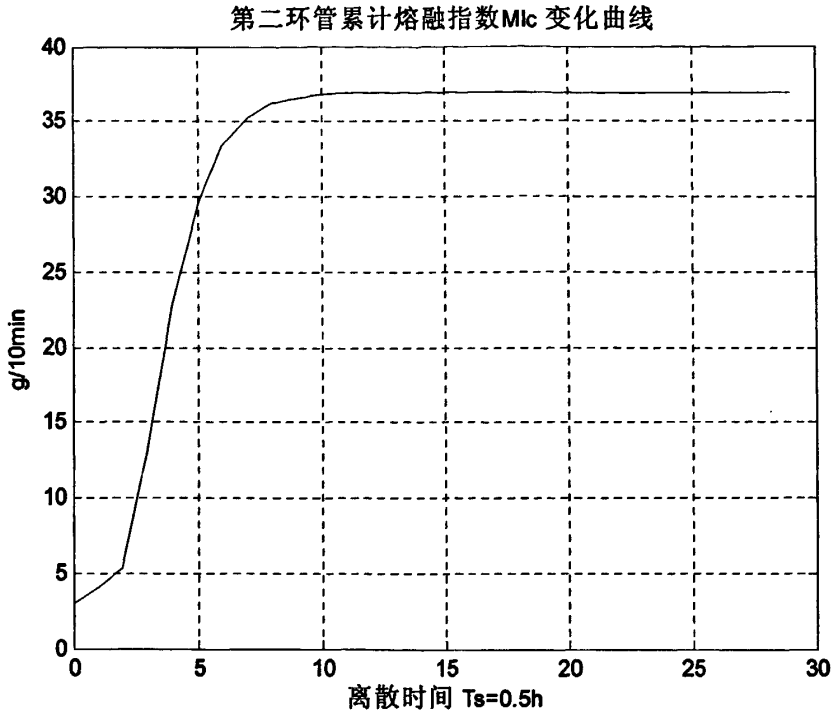
第一环管反应器中  $MI$  值由小变大, 在切换时需增加氢气进料速率, 提高氢气浓度, 使得聚合过程中链终止反应速度增加, 增加低聚物的生成, 从而提高聚合物的熔融指数。在操作中, 氢气丙烯摩尔浓度比变化如图 4-1(b)所示, 首先提高氢气丙烯摩尔浓度比至 3500ppm 左右, 再平稳回落至稳态值附近。在此操作下, 聚合物瞬时熔融指数迅速升至 50 g/10min 左右, 然后降低至 43.118g/10min 附近, 累计熔融指数平稳过渡到目标值附近且最终稳态值为 43.50g/10min, 如图 4-2(a)、4-2 (b)所示。

第二环管反应器中情况类似, 在操作中, 氢烯比变化曲线如图 4-1(b)所示, 首先提高氢烯比至 3300ppm 左右, 再平稳回落至稳态值附近。在此操作情况下, 聚合物瞬时熔融指数迅速升至 47g/10min 左右, 然后降低至 36.217g/10min 附近, 累计熔融指数平稳过渡到目标值附近且最终稳态值为 37.24g/10min, 如图 4-3(a)、4-3 (b)所示。

图 4-1(a)为双环管温度变化曲线, 由图可知牌号 A 与牌号 B 温度的稳态值都维持在 343.15K 附近, 符合实际操作要求。



(a)



(b)

图 4-3 第二环管反应器中状态变量变化轨迹

A 牌号第一环管和第二环管熔融指数的稳态值分别为 43.118g/10min 和 36.217g/10min, B 牌号第一环管和第二环管熔融指数的稳态值分别为 2.336g/10min 和 3.003g/10min。以熔融指数偏差小于  $\pm 3\%$  的聚合物为合格产品,即牌号 A 的熔融指数在两环管中的合格范围为 41.82~44.41 g/10min 和 35.13~37.30g/10min, 牌号 B 的熔融指数在两环管中的合格范围为 2.26~2.406 g/10min 和 2.913~3.093g/10min, 由图 4-2(b)和图 4-3(b)可得第一环管和第二环管最终稳态值都在合格范围内。严格意义上,两个环管反应器中的丙烯聚合物在生产过程中必须同时达到合格要求,生产出来的产品才是合格产品。如图 4-2(b)所示,第一环管反应器中,切换开始后约 0.4 小时,聚合物的累计熔融指数离开牌号 B 的合格范围,进入过渡料生产期,当切换进行到约 5.2 小时,聚合物进入牌号 A 的合格产品的生产阶段,因而第一环管反应器中切换时间为约 4.8 小时。如图 4-3(b)所示,第二环管反应器中,切换开始后约 0.5 小时,聚合物的累计熔融指数离开牌号 B 的合格范围,进入过渡料生产期,当切换进行到约 5.0 小时,聚合物进入牌号 A 的合格产品的生产阶段,切换时间为约 4.5 小时。

切换终止时,两环管反应器及出料系统中聚合物产品均达到目标牌号要求,因此,应用基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型最优控制算法计算所得切换时间为 4.8 小时。装置生

产能力以 20t/h 计算, 过渡废料约为 96 吨; 而实际工厂的切换时间在 10 小时以上, 过渡废料在 200 吨以上。采用基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型的最优控制算法, 可以有效地减少牌号切换的时间, 从而减少过渡料的数量。

### 4.3 约束 Hammerstein 系统的 $H_\infty$ 控制仿真

由于实际工业系统不可避免存在外界干扰, 聚丙烯牌号切换系统也不例外, 所以在控制系统设计中必须考虑闭环系统的抗干扰能力。而  $H_\infty$  控制是一种处理外界干扰的有效方法。它通过设计一个控制器使系统不仅具有满意的稳定性, 且具有良好的鲁棒调节性能, 对于聚丙烯牌号切换控制具有较大的指导意义。

建立牌号切换过程物性指数动态模型如下

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \omega(t) \quad (4.4)$$

$$\ln MI_i = k_1 + \frac{k_2}{T} + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M})$$

其中  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)] = [\ln(MI_{c,1}) \ \ln(MI_{c,2})]^T$ ,  $v(t) = [v_1(t) \ v_2(t)] = [\ln(MI_{i,1}) \ \ln(MI_{i,2})]^T$ ,  $MI_{c,1}$ ,  $MI_{i,1}$  分别为第一环管的累计熔融指数和瞬时熔融指数;  $MI_{c,2}$ ,  $MI_{i,2}$  分别为第二环管的累计熔融指数和瞬时熔融指数;  $T(K)$ ,  $C_{H_2/M}$  分别为反应温度和氢烯摩尔浓度比; 模型参数  $k_1, k_2, \dots, k_5$  可由工业数据辨识得到; 聚合物停留时间  $\tau_1 = 0.85, \tau_2 = 1.15$ ,  $\omega(t)$  为随机扰动输入, 扰动矩阵参数  $\tau_3 = 0.5, \tau_4 = 0.8$ 。

为了应用控制算法, 取离散时间  $T_s = 0.5h$ , 将模型(4.4)线性子系统离散化可得:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5553 & 0 \\ 0.2649 & 0.3595 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.4447 & 0 \\ 0.1034 & 0.2722 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0.189 \\ 0.294 \end{bmatrix} \omega(k) \quad (4.5)$$

非线性子系统为

$$\ln MI_i = k_1 + \frac{k_2}{T} + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M}) \quad (4.6)$$

取扰动抑制度  $\gamma = 10$ , 可得  $H_\infty$  控制器为

$$v(k) = \begin{bmatrix} 0.0047 & -0.1390 \\ -0.1259 & -0.1017 \end{bmatrix} x(k) \quad (4.7)$$

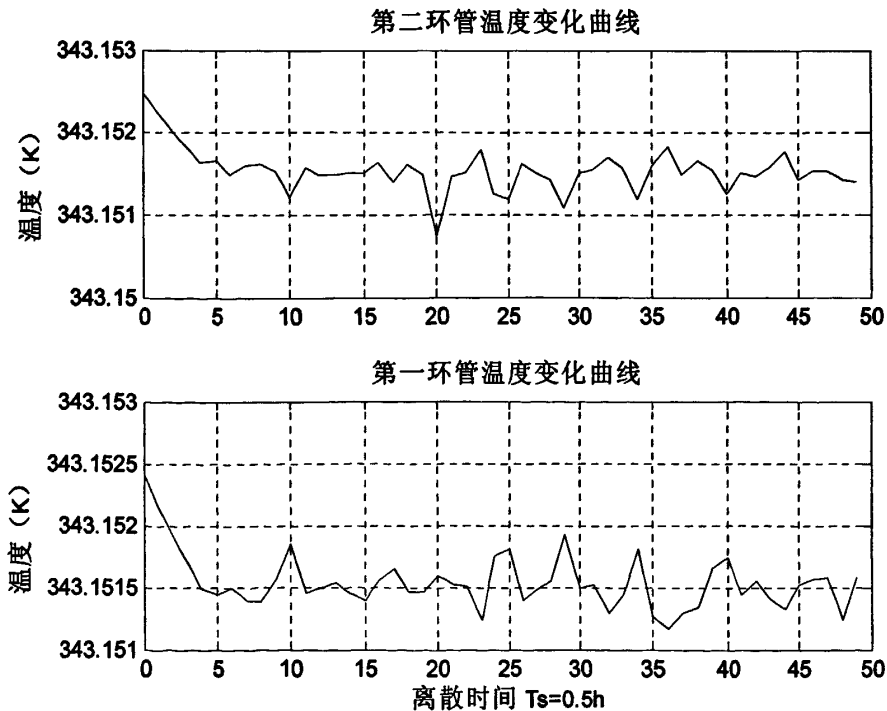
4.3.1 约束 Hammerstein 系统的  $H_\infty$  控制算法的实现

基于 Hammerstein 模型的  $H_\infty$  控制算法的实施步骤如下:

- 在机理建模的基础上, 利用生产数据辨识得到切换前牌号的  $MI$  模型参数;
- 读入  $k$  时刻的双环管累计熔融指数值  $MI_{c,1}(k)$  和  $MI_{c,2}(k)$ , 并进行坐标平移;
- 利用引理 3.2 计算中间变量  $v'_k$ , 即  $k$  时刻的双环管瞬时熔融指数  $MI_{i,1}(k)$  和  $MI_{i,2}(k)$ ;
- 利用 
$$\min_u \left[ \|v'_k - h(u)\|^2 + \|u - u_{sp}\|_w^2 \right]$$
  
s.t.  $U_{lb} \leq u \leq U_{ub}$  求解实际输入  $T_1, T_2, C_{H_2/M}^1, C_{H_2/M}^2$ ;
- 利用式子(4.5)分别计算  $k$  时刻的双环管瞬时熔融指数  $MI_{i,1}(k)$  和  $MI_{i,2}(k)$  的实际值;
- 利用式子(4.4)计算  $k+1$  时刻的累计熔融指数  $MI_{c,1}(k+1)$  和  $MI_{c,2}(k+1)$ ;
- 令  $k = k+1$ , 转步骤 b)。

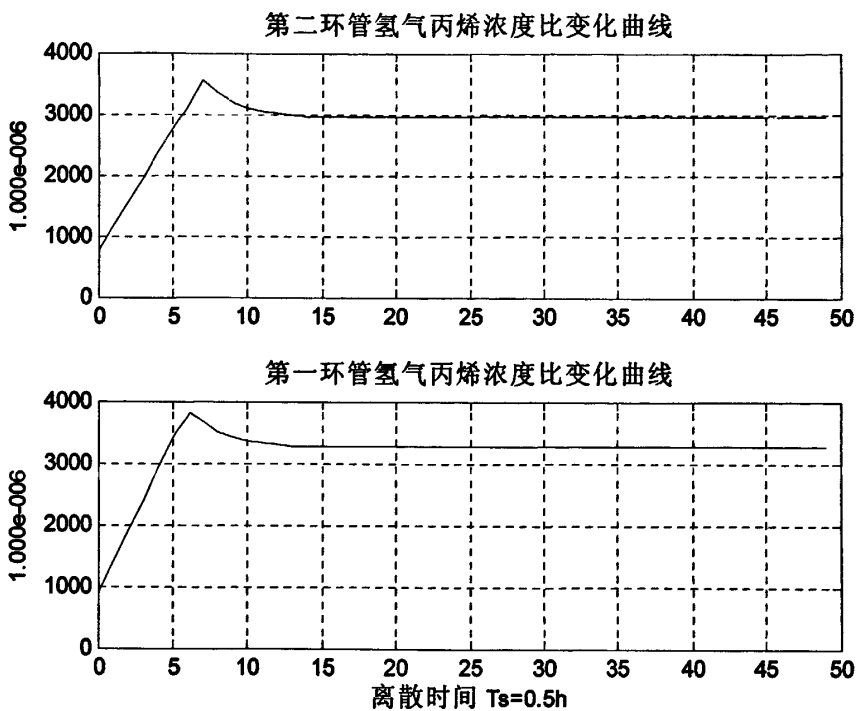
## 4.3.2 计算结果及讨论

同理, 第一环管反应器中的聚合物的  $MI$  值由 2.336 g/10min 上升到 43.118 g/10min, 而第二环管反应器中则由 3.003 g/10min 上升到 36.217 g/10min. 将 4.3.1 节中的算法应用于聚丙烯的两个牌号 A 和 B 的切换过程, 计算所得轨迹如图 4-4~图 4-6 所示。



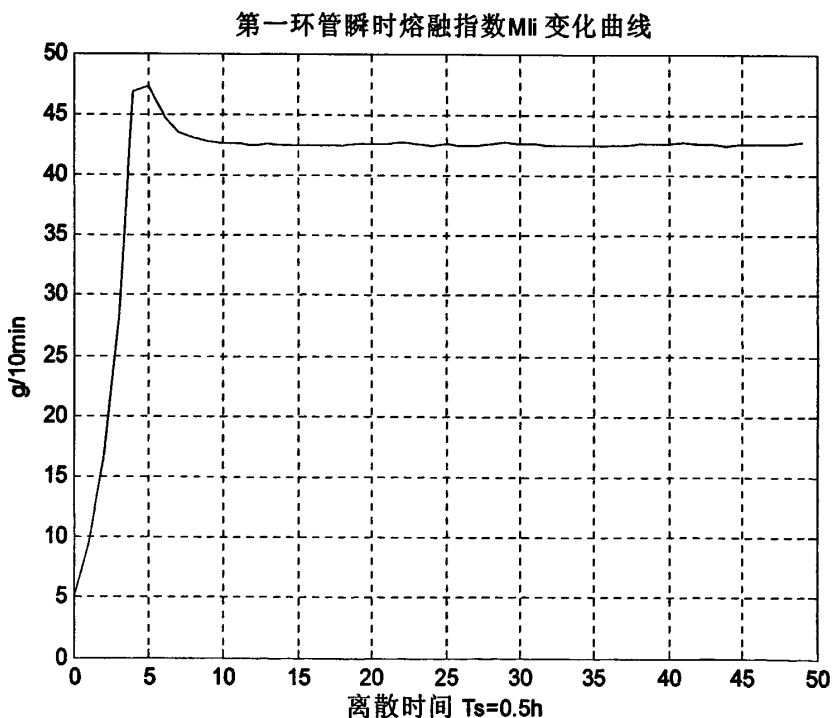
(a)





(b)

图 4-4 环管反应器中控制量变化轨迹



(a)

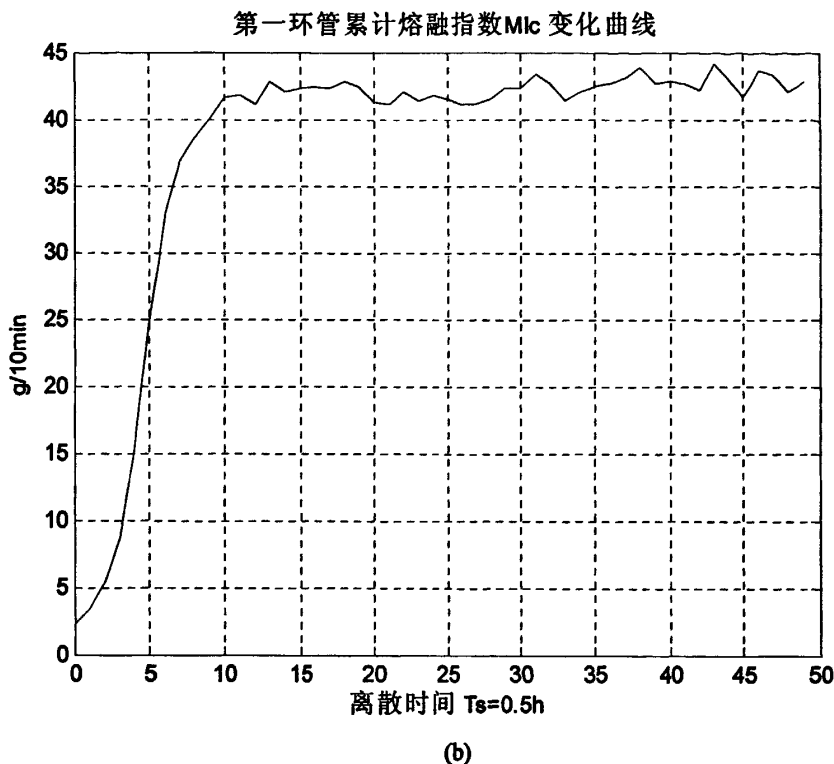
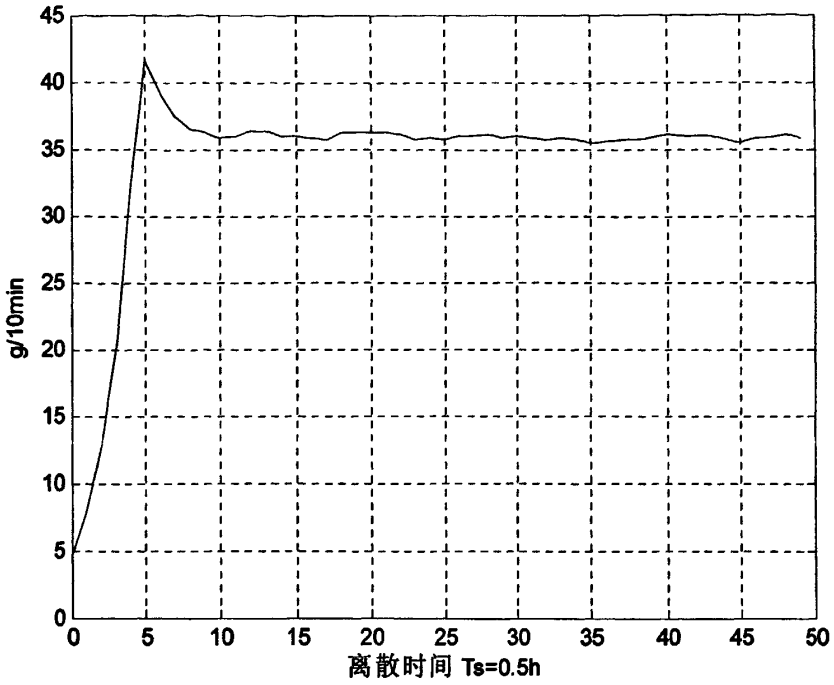


图 4-5 第一环管反应器中状态变量变化轨迹

同 4.2 节，第一环管反应器中  $MI$  值由小变大。为了减少扰动对于切换过程的影响，使得切换过程更加平稳，因而要加快反应速率，提高氢烯比有利于反应更快进行。因为氢气浓度的提高能有效促进增长中的高分子链发生链终止，从而使聚合物分子量降低，所以，为了能够获得  $MI$  值较大的聚合物，在切换时需增加氢气进料速率，提高氢气浓度。氢烯比变化曲线如图 4-4(b)所示，首先提高氢气丙烯摩尔浓度比至 3400ppm 左右，比标准值 3300ppm 略高，再平稳回落至稳态值附近。在此操作下，聚合物瞬时熔融指数迅速升至 46 g/10min 左右，然后降低至 43.118g/10min 附近；由于外界扰动的存在，累计熔融指数最终稳定范围为 42.22~44g/10min，如图 4-5(a)、(b)所示。

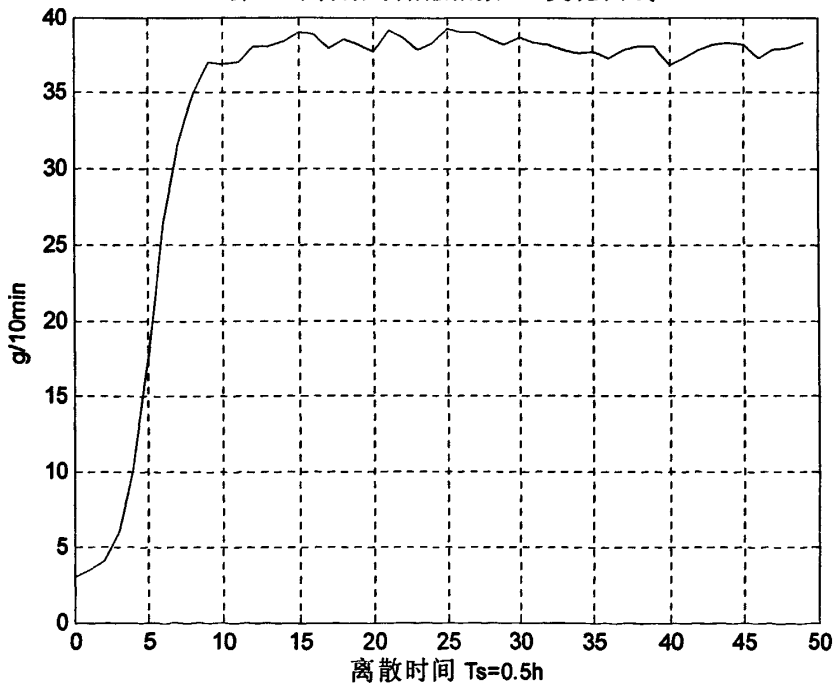
第二环管反应器中情况类似，在操作中，氢气浓度变化如图 4—4(b)所示，首先提高氢气浓度至 3100ppm 左右，再平稳回落至稳态值附近。在此操作情况下，聚合物瞬时熔融指数迅速升至 47 g/10min 左右，然后降低至 36.217g/10min 附近，累计熔融指数最终稳态值范围为 36.84~39.05g/10min，如图 4-6(a)、(b)所示。图 4-4(a)为双环管温度变化曲线，由图可知牌号 A 与牌号 B 温度的稳态值都维持在 343.15K 附近，符合实际操作要求。

第二环管瞬时熔融指数MII变化曲线



(a)

第二环管累计熔融指数Mic变化曲线



(b)

图 4-6 第二环管反应器中状态变量变化轨迹

由于外界扰动的存在, 相对于基于 LMI 最优控制算法, 两步法  $H_\infty$  控制算法只能保证熔融指数偏差  $\pm 8\%$  以内, 即牌号 A 的熔融指数在两环管中的合格范围 39.67~46.56 g/10min 和 33.3~39.11g/10min, 牌号 B 的熔融指数在两环管中的合格范围为 2.15~2.52 g/10min 和 2.76~3.24g/10min 由图 4-5(b)和 4-6(b)可知双环管累计熔融指数稳态值均在合格范围内。如图 4-5(b)所示, 第一环管反应器中, 切换开始后约 0.3 小时, 聚合物的累计熔融指数离开牌号 B 的合格范围, 进入过渡料生产期, 当切换进行到约 5.5 小时, 聚合物进入牌号 A 的合格产品的生产阶段, 因而第一环管反应器中切换时间为约 5.2 小时。如图 4-6(b)所示, 第二环管反应器中, 切换开始后约 0.5 小时, 聚合物的累计熔融指数离开牌号 B 的合格范围, 进入过渡料生产期, 当切换进行到约 5.2 小时, 聚合物进入牌号 A 的合格产品的生产阶段, 因而第一环管反应器中切换时间为约 4.7 小时。

切换终止时, 两环管反应器及出料系统中聚合物产品均达到目标牌号要求, 因此, 应用基于 Hammerstein 模型的  $H_\infty$  控制算法计算所得切换时间为 5.2 小时。装置生产能力以 20t/h 计算, 过渡废料约为 104 吨; 而实际工厂的切换时间在 10 小时以上, 过渡废料在 200 吨以上。显然, 采用约束 Hammerstein 模型的  $H_\infty$  控制算法, 可以有效地减少牌号切换的时间以提高经济效益。

#### 4.4 约束不确定 Hammerstein 系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制仿真

实际工业系统除了存在外界干扰, 同时还存在大量的不确定性因素, 如模型参数不确定性等, 聚丙烯牌号切换系统也不例外, 所以在控制系统设计中在考虑闭环系统的抗干扰能力的同时还需要考虑到系统的鲁棒性能。

建立牌号切换过程物性指数动态模型如下:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1 + \Delta\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{\tau_1 + \Delta\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1 + \Delta\tau_1} & -\frac{1}{\tau_2 + \Delta\tau_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1 + \Delta\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2 + \Delta\tau_2} \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \omega(t) \quad (4.8)$$

$$\ln MI_i = k_1 + \frac{k_2}{T} + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M})$$

其中  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)] = [\ln(MI_{c,1}) \ \ln(MI_{c,2})]^T$ ,  $v(t) = [v_1(t) \ v_2(t)] = [\ln(MI_{i,1}) \ \ln(MI_{i,2})]^T$ ,  $MI_{c,1}$ ,  $MI_{i,1}$  分别为第一环管的累计熔融指数和瞬时熔融指数;  $MI_{c,2}$ ,  $MI_{i,2}$  分别为第二环管的累计熔融指数和瞬时熔融指数;  $T(K)$ ,  $C_{H_2/M}$  分别为反应温度和氢烯摩尔浓度比; 模型参数  $k_1, k_2, \dots, k_5$  可由工业数据辨识得到; 聚合物停留时间  $\tau_1 = 0.85, \tau_2 = 1.15$ ,  $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2$  反映了系统模型中的参数不确定性,  $\omega(t)$  为随机扰动输入, 扰动矩阵参数  $\tau_3 = 0.5, \tau_4 = 0.8$ 。

为了应用控制算法, 取离散时间  $T_s=0.5h$ , 运用后向差分法将模型(4.8)线性子系统离散化可得:

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B_1 + \Delta B_1)v(k) + B_2\omega(k) \quad (4.9)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4118 & 0 \\ 0.2649 & -0.023 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.5882 & 0 \\ 0 & 0.4348 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.4 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\tau_1}{1.7(0.85+\Delta\tau_1)} & 0 \\ \frac{-\Delta\tau_1}{1.7(0.85+\Delta\tau_1)} & \frac{\Delta\tau_1}{1.7(0.85+\Delta\tau_1)} + \frac{\Delta\tau_2}{2.3(1.15+\Delta\tau_2)} \end{bmatrix},$$

$$\Delta B_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\Delta\tau_1}{1.7(0.85+\Delta\tau_1)} & 0 \\ 0 & \frac{-\Delta\tau_2}{2.3(1.15+\Delta\tau_2)} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} -1/39 & 0 \\ 1/39 & -1/39 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F = \sin(k)$$

非线性子系统为

$$\ln MI_i = k_1 + \frac{k_2}{T} + k_3 \ln(k_4 + k_5 C_{H_2/M}) \quad (4.10)$$

取扰动抑制度  $\gamma=10$ , 可得鲁棒  $H_\infty$  控制器为

$$v(k) = \begin{bmatrix} 0.0216 & -0.1209 \\ -0.1153 & -0.0644 \end{bmatrix} x(k) \quad (4.11)$$

#### 4.4.1 约束不确定 Hammerstein 系统鲁棒 $H_\infty$ 控制算法的实现

基于不确定 Hammerstein 模型的鲁棒  $H_\infty$  控制算法的实施步骤如下:

- 在机理建模的基础上, 利用生产数据辨识得到切换前牌号的  $MI$  模型参数;
- 读入  $k$  时刻的双环管累计熔融指数值  $MI_{c,1}(k)$  和  $MI_{c,2}(k)$ , 并进行坐标平移;
- 利用引理 3.3 计算中间变量  $v'_k$ , 即  $k$  时刻的双环管瞬时熔融指数  $MI_{i,1}(k)$  和  $MI_{i,2}(k)$  的理论值;

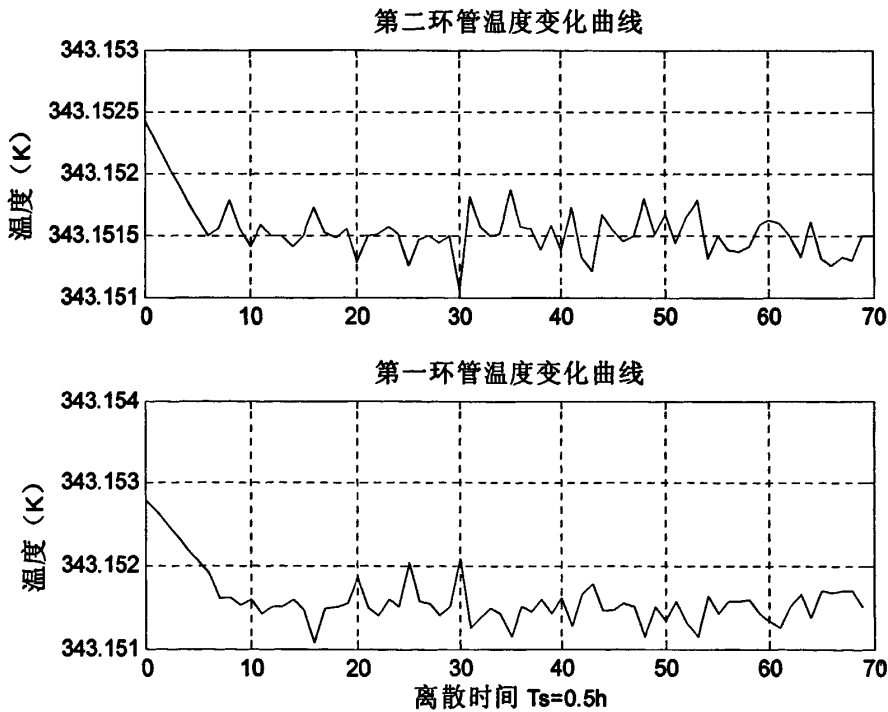
- 利用  $\min_u [\|v'_k - h(u)\|^2 + \|u - u_{sp}\|_w^2]$  求解实际输入  $T_1, T_2, C_{H_2/M}^1, C_{H_2/M}^2$ , 即两环管的  $s.t. U_{lb} \leq u \leq U_{ub}$

温度以及氢气丙烯浓度比:

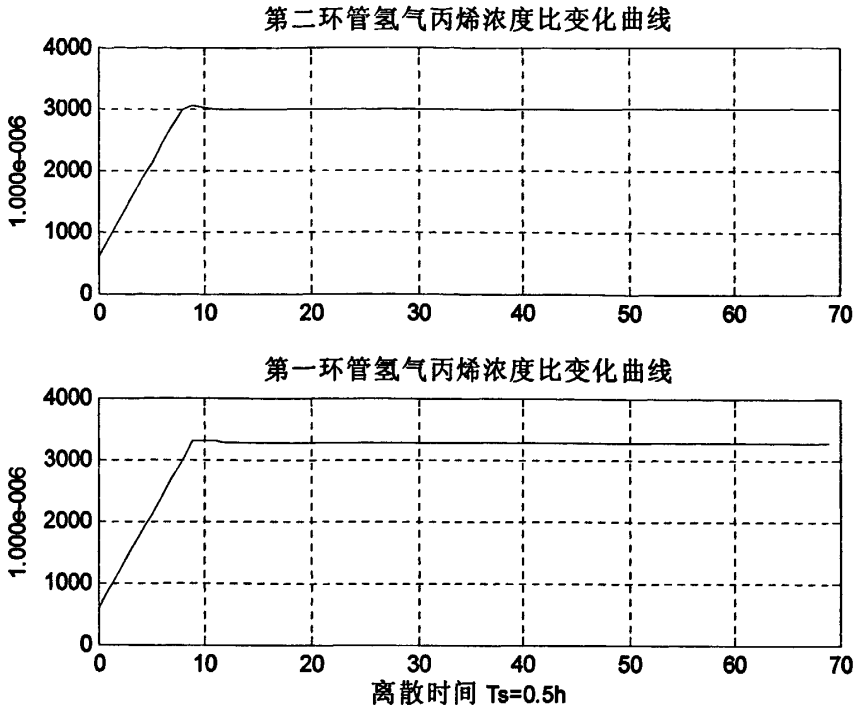
- e) 利用式子(4.8)分别计算  $k$  时刻的双环管瞬时熔融指数  $MI_{i,1}(k)$  和  $MI_{i,2}(k)$  的实际值;
- f) 利用式子(4.7)计算  $k+1$  时刻的累计熔融指数  $MI_{c,1}(k+1)$  和  $MI_{c,2}(k+1)$ ;
- g) 令  $k=k+1$ , 转步骤 b)。

#### 4.4.2 计算结果及讨论

同理, 第一环管反应器中的聚合物的  $MI$  值由 2.336 g/10min 上升到 43.118 g/10min, 而第二环管反应器中则由 3.003 g/10min 上升到 36.217 g/10min。将 4.4.1 节中的算法应用于聚丙烯的两个牌号 A 和 B 的切换过程中, 得到切换过程中两环管反应器中产品性能指标的变化轨迹、状态变量的变化轨迹以及最终产物的熔融指数的变化轨迹。牌号 B 和牌号 A 分别为起始牌号与目标牌号。计算所得轨迹如图 4-7~图 4-9 所示。

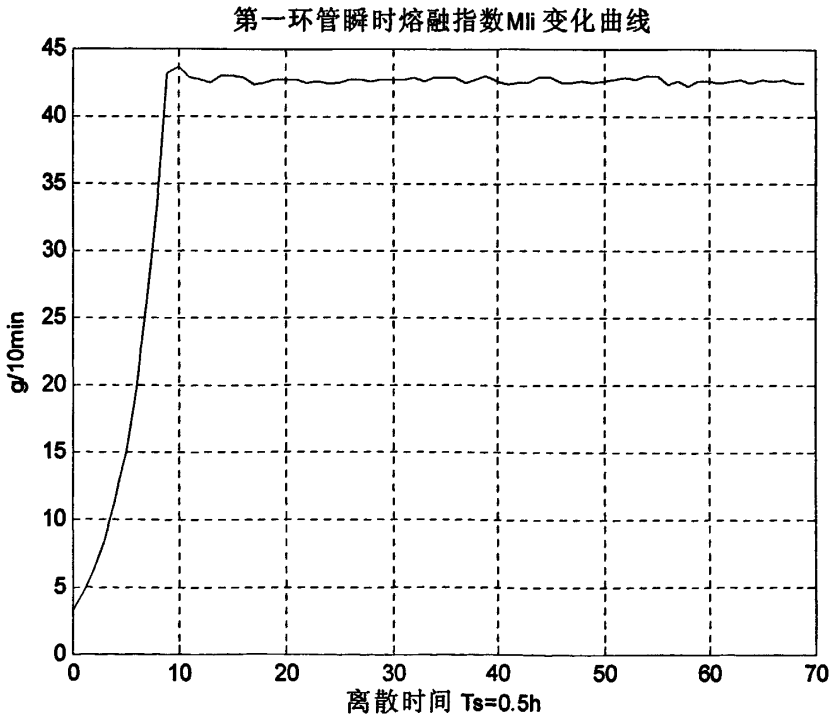


(a)



(b)

图 4-7 环管反应器中控制量变化轨迹



(a)

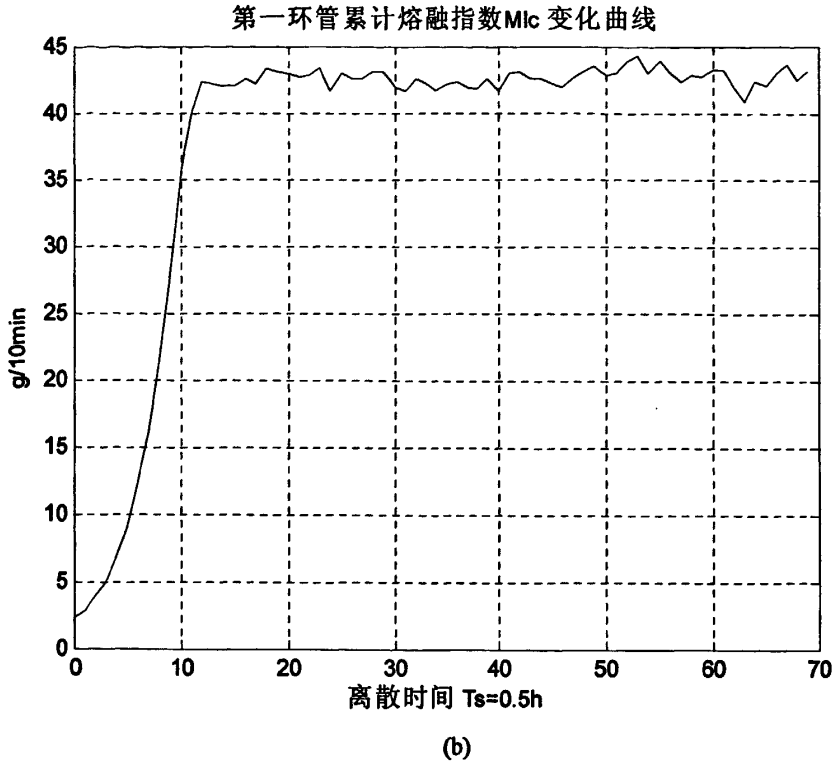


图 4-8 第一环管反应器中状态变量变化轨迹

相对于基于 LMI 最优控制算法和  $H_\infty$  控制算法, 鲁棒  $H_\infty$  控制算法可以保证系统具有满意的鲁棒性能的同时具有较好的动态调节性能, 对于工业实际更加具有应用价值。因而有必要对作为控制变量的氢烯比和温度作进一步探讨。

为了生产  $MI$  较高的产品, 同时为了减少扰动和不确定因素过多的影响切换过程, 需要提高氢气浓度以提高氢烯比, 从而提高聚合反应速率。但是, 氢气也有类似毒物的作用, 它会覆盖在催化剂和的表面, 降低催化剂的活性, 不利于反应的进行。因而对于氢烯比的控制必须坚持如下原则: 在熔融指数能够保证适宜的情况下, 氢烯比应该尽量低些。生产  $MI$  较低的产品也需要坚持此项原则。工业上可通过高速气相色谱对双环管中气相丙烯和氢气的组分进行快速自动测定, 然后用计算机对氢烯比进行计算, 并用其计算结果来控制双环管氢气的加料, 从而达到实时控制的效果。

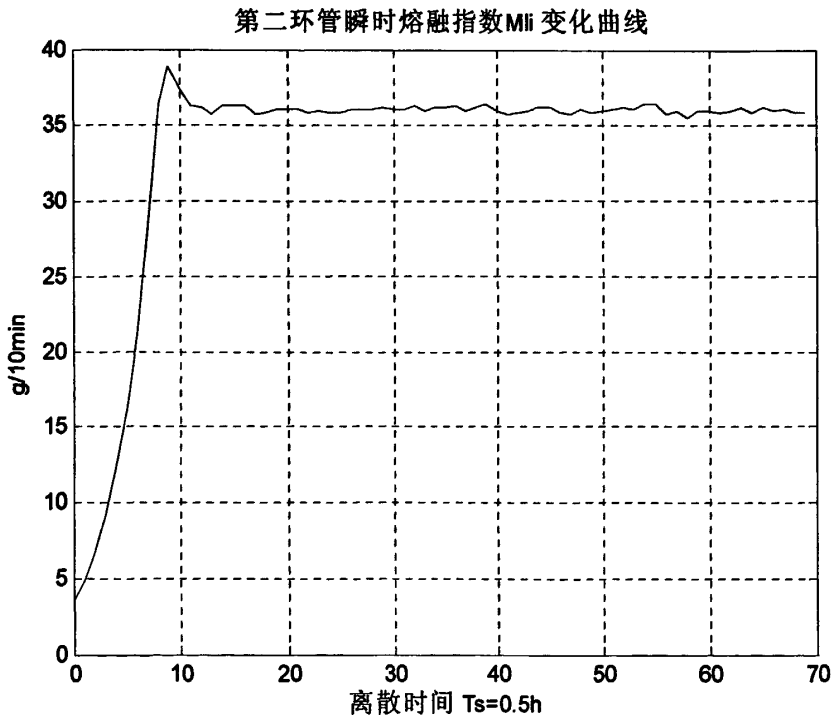
在以上原则指导下第一环管氢烯比变化曲线如图 4-7(b)所示, 缓慢提高氢烯比至稳态值 3300ppm 左右并保持在此状态。在此操作下, 聚合物瞬时熔融指数迅速升至 44g/10min 左右, 然后降低至 43.118g/10min 附近, 由于模型不确定性和外界扰动的影响, 累计熔融指数最终稳态值范围为 42.15~44.48g/10min, 如图 4-8(a)、(b)所示。第二环管反应器中情况类似, 在操作中, 氢气浓度变化如图 4-7(b)所示, 缓慢提高氢烯比至稳态值 3000ppm 左



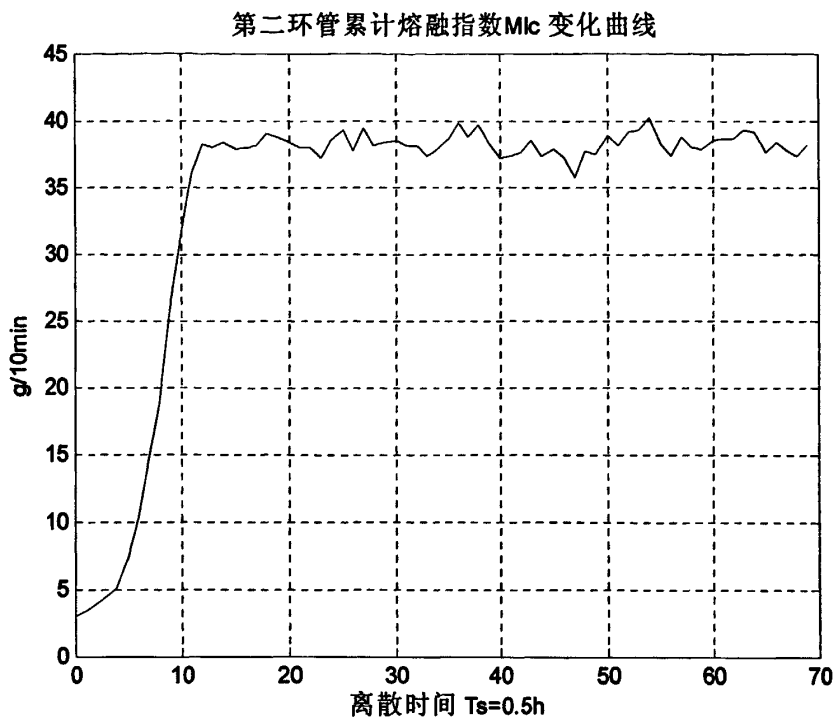
右并保持在此状态。在此操作情况下，聚合物瞬时熔融指数迅速升至 38 g/10min 左右，然后降低至 36.217g/10min 附近，累计熔融指数最终稳态值范围为 35.7~39.6g/10min，如图 4-9(a)、(b)所示。

图 4-7(a)为双环管温度变化曲线，由于牌号 A 与牌号 B 的温度稳态值均为 343.15K，所以反应过程不需要对温度进行调节。但是，如果起始牌号和目标牌号的温度稳态值不同，反应过程中就需要对温度进行调节。一般先让温度略微过调，然后慢慢调整，最终稳定在目标值上，这种方法可以减少牌号切换的过渡时间。温度对于丙烯聚合物的熔融指数有所影响，但为了反应平稳进行，不宜对其频繁调节，一般来说，需要使温度在牌号切换过程完成之前稳定下来，温度不是影响熔融指数的主要操作变量。工业过程中温度得改变主要通过控制冷却水温度和流量来实现。

在实际工业生产中，考虑到杂质等因素对于聚合物  $MI$  值的影响，需要调整氢烯比或者反应温度来保证合格的质量指标。在调整过程中，考虑到实际生产的可控性，也考虑到聚合温度受反应设备允许操作压力的限制，再者改变反应温度会对其他质量指标产生影响(如等规度)，所以一般不采用改变聚合温度的方法，而用改变氢气浓度的调节来控制  $MI$  值。



(a)



(b)

图 4-9 第二环管反应器中状态变量变化轨迹

由于外界扰动和系统参数不确定性的影响，相对于基于 LMI 最优控制算法和  $H_\infty$  控制算法，鲁棒  $H_\infty$  控制算法可保证熔融指数偏差  $\pm 10\%$  以内，即牌号 A 的熔融指数在两环管中的合格范围为 38.8~47.42 g/10min 和 32.6~39.8g/10min，牌号 B 的熔融指数在两环管中的合格范围为 2.1~2.57 g/10min 和 2.7~3.3g/10min，由图 4-8(b)和 4-9(b)可知双环管累计熔融指数稳态值均在合格范围内。如图 4-8(b)所示，第一环管反应器中，切换开始后约 0.6 小时，聚合物的累计熔融指数离开牌号 B 的合格范围，进入过渡料生产期，当切换进行到约 5.5 小时，聚合物进入牌号 A 的合格产品的生产阶段，因而第一环管反应器中切换时间为约 4.9 小时。如图 4-6(b)所示，第二环管反应器中，切换开始后约 0.6 小时，聚合物的累计熔融指数离开牌号 B 的合格范围，进入过渡料生产期，当切换进行到约 5.2 小时，聚合物进入牌号 A 的合格产品的生产阶段，因而第一环管反应器中切换时间为约 4.6 小时。切换终止时，两环管反应器及出料系统中聚合物产品均达到目标牌号要求，因此，应用基于不确定 Hammerstein 模型的鲁棒  $H_\infty$  控制算法计算所得切换时间为 5.0 小时。

表 4-2 比较了鲁棒  $H_\infty$  控制算法计算所得结果与实际生产中所需的切换时间和产生的过渡料数量。装置生产能力以 20t/h 计算。由表可见，按照基于不确定 Hammerstein 模型的

鲁棒  $H_\infty$  控制算法所得轨迹进行生产, 可大幅减少切换时间, 降低过渡料数量, 经济效益十分明显。

表 4-2 切换时间及过渡料损耗

切换控制方法	基于不确定 Hammerstein 模型的鲁棒 $H_\infty$ 控制算法		实际生产中的控制算法	
	第一环管反应器	第二环管反应器	第一环管反应器	第二环管反应器
部分切换时间, h	4.9	4.6	10	9
总体切换时间, h	4.9		10	
过渡料产量, t	98		200	

目前, 市场上的聚丙烯价格约为 12000 元/吨, 采用基于不确定 Hammerstein 模型的鲁棒  $H_\infty$  控制算法以后, 每次切换不仅节省了大量的时间, 还可以为工厂减少过渡料损耗, 每次牌号切换带来直接经济效益约  $12000 \times (200 - 98) = 1224000$  元。

## 4.5 结论

为了比较基于 LMI 的最优控制算法,  $H_\infty$  控制算法和鲁棒  $H_\infty$  控制算法的差别, 下面分别用三种控制器来控制同时具有扰动和参数不确定性的 Hammerstein 系统。

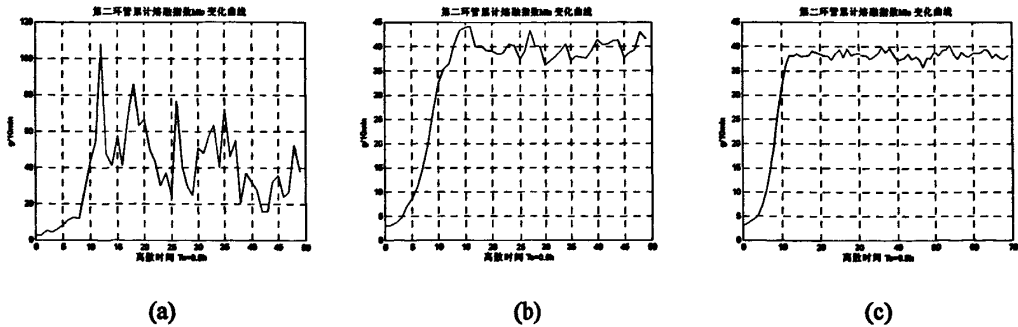


图 4-10 第二环管累计熔融指数变化曲线

图 4-10(a)、4-10(b)、4-10(c)分别为把基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型最优控制算法, 约束 Hammerstein 模型  $H_\infty$  控制算法和约束不确定 Hammerstein 模型鲁棒  $H_\infty$  控制算法应用于聚丙烯牌号切换生产控制过程所得的第二环管累计熔融指数变化曲线。由图 4-10(a)易知, 由于控制算法未考虑系统扰动和参数摄动的影响, 导致系统不稳定。由图

4-10(b)和 4-10(c)可得累计熔融指数最终稳态值范围分别为 36.6~44.58 g/10min 和 35.7~39.6g/10min, 以误差在 $\pm 10\%$ 以内为合格产品, 即第二环管合格产品稳态值范围为 32.6~39.8g/10min, 可得  $H_\infty$ 控制算法虽然能使系统稳定, 但是由于未考虑参数摄动的影响, 导致稳态值误差过大, 不能满足产品性能要求。

考虑到实际生产中不可避免的同时存在不确定因素和外界扰动, 为了能够使控制条件尽可能的贴近实际生产环境, 鲁棒  $H_\infty$ 的实际应用价值更大。因而, 鲁棒  $H_\infty$ 控制算法更能够对实际生产控制起到指导作用, 从而有效减少聚丙烯连续生产的过渡时间和过渡料。所以本文的研究成果可以给企业带来较大的经济效益。

## 第 5 章 总结与展望

### 5.1 研究工作总结

随着社会的进步和发展,聚丙烯产品不同的用途对树脂特性的要求也不尽相同,为了满足市场需求,生产聚丙烯树脂的公司不得不生产不同牌号的聚合物。为了使企业的经济利益最大化,减少过渡时间和过渡料的产生,就需要有快速有效的生产控制算法。对牌号切换过程的控制方法的研究有利于改善工业切换系统的工作效率,为企业创造更多的价值,从而提高企业的竞争力。

本文在查阅较多国内外相关文献的基础之上,对聚丙烯牌号切换的控制过程进行了以下三方面的研究:1、选用约束 Hammerstein 模型来模拟聚丙烯牌号切换过程的强非线性;2、采用鲁棒控制和  $H_\infty$  控制算法在保证系统稳定性的同时来处理模型参数的不确定性或外界扰动。3、结合 LMI 技术和 Lyapunov 稳定性理论得到了闭环系统稳定的充分条件。约束 Hammerstein 模型可以保证控制器的设计仍然在线性范围内,有利于保证简化控制器的设计过程,也使得闭环系统的稳定性更容易保证;保性能控制算法可以在使系统具有满意的鲁棒性能; $H_\infty$  控制可以使系统具有满意的调节性能。

首先,简要介绍了聚丙烯牌号切换的概念和研究意义,并介绍了国内外聚丙烯工业生产的研究现状。以 Spheripol 工艺流程为例,对丙烯聚合反应机理作了简要介绍,并对聚丙烯牌号切换的物性指数模型作了总结,然后指明了牌号切换过程存在的控制问题,并提出了本文所采用的解决方法。

其次针对聚丙烯连续生产过程的强非线性,选取 Hammerstein 模型作为控制对象,并对 Hammerstein 模型作了简要介绍,然后分别给出了名义无扰动系统和具有扰动的系统以及同时具有扰动以及模型参数不确定性系统的控制器的设计方法,进而结合 LMI 技术和 Lyapunov 稳定性理论分别得到了闭环系统稳定的充分条件。

随后分别把基于 LMI 的约束 Hammerstein 模型最优控制算法,约束 Hammerstein 模型  $H_\infty$  控制算法和约束不确定 Hammerstein 模型鲁棒  $H_\infty$  控制算法应用于聚丙烯牌号切换生产控制过程,三者都取得了比较满意的控制效果,所以本文的研究成果可以减少聚丙烯连续生产的过渡时间和过渡料,给企业带来较大的经济效益。

## 5.2 展望

对于聚丙烯反应器的控制方法研究，国内外有很多机构对此都很重视，我国的聚丙烯生产企业的发展之路还很长。本文介绍的控制算法还有需要改善的地方，具体有以下工作要做：

### 1、提高控制效果

可以考虑把先进控制策略与智能控制(如神经网络控制)结合起来，从而弥补各自的缺陷，提高控制精度。

### 2、解决牌号切换控制方法的应用问题

本文中只是证明理论上牌号切换控制方法在闭环执行时的有效性，具体应用工作尚未实施，实施过程中可能遇到很多尚未预料到的问题需要解决，这部分工作有着重大的应用价值。

### 3、对紧急情况的处理方法

本文还未考虑到牌号切换控制系统的一些紧急情况的处理，例如扰动过大等。这些也是牌号切换控制需要考虑的问题，有待于进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] 施培明. 从国内外 PP 工业和市场发展看我国 PP 企业所面临的挑战[J]. 金山油化纤, 1995, 16(2): 40-43.
- [2] 黄福堂, 金容波, 姜兴剑. 国内外聚丙烯技术发展概况[J]. 国外油田工程, 2001, 17(8): 47-50.
- [3] 崔小明. 国外聚丙烯生产工艺及催化剂技术新进展[J]. 国外塑料, 2005, 23(3): 41-45.
- [4] 陈亚平, 王彤, 王建明. 国外连续法聚丙烯生产技术述评[J]. 当代石油石化, 2002, 10(2): 35-38.
- [5] 饶兴鹤. 聚丙烯工业的发展现状及新技术进展[J]. 中国石油和化工, 2005, 10(4): 79-82.
- [6] 张雪珍. 聚丙烯工艺及产品开发新进展[J]. 石油化工, 2003, 32(7): 615-619.
- [7] 关肇基. 聚丙烯技术发展及主要生产公司近况[J]. 现代塑料加工应用, 2000, 12(2): 46-50.
- [8] 袁晴堂. 聚丙烯技术进展[J]. 中国工程科学, 2001, 3(9): 29-36.
- [9] 赵敏, 高俊刚, 邓奎林. 改性聚丙烯新材料[M]. 北京: 化学工业出版社, 2002.
- [10] 莠亮. 聚丙烯连续生产过程的牌号切换研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2006.
- [11] Taketa M, Ray W H. Optimal grade transition strategies for multistage polyolefin reactors [J]. *AIChE J*, 1999, 45(8): 1776-1793.
- [12] Xie T Y, McAuley K B. Gas phase ethylene polymerization: production process, polymer properties, and reactor modeling [J]. *Ind.Eng.Chem.Res*, 1994, 33(3): 449-479.
- [13] Debling J A, Ray W H. Dynamic modeling of product grade transitions for olefin polymerization processes [J]. *AIChE J*, 1994, 40(3): 506-520.
- [14] McAuley K B, MacGregor J F. Optimal grade transitions in a gas phase polyethylene reactors [J]. *AIChE J*, 1992, 38(10): 1564-1576.
- [15] 怀改平, 徐用懋. 气相丙烯聚合稳态模型的研究和仿真[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(21): 203-205.
- [16] 怀改平, 成卫戌. 气相乙烯丙烯共聚及熔体流动指数软测量的研究[J]. 石油化工, 2004, 33(8): 743-746.
- [17] 王靖岱, 陈纪忠, 阳永荣. 连续聚合过程中牌号过渡的优化[J]. 化工学报, 2001, 52(4): 295-300.
- [18] 王靖岱, 阳永荣. 迭代动态规划在树脂牌号切换最优化模型中的应用[J]. 高校化学工程学报, 2000, 14(3): 264-269.
- [19] 周猛飞. 聚合反应过程的先进控制及优化[J]. 石油化工, 2003, 32(7): 626-629.
- [20] 王晖. 聚合控制及其进展[J]. 北京化工大学学报, 2000, 27(2): 88-92.
- [21] Mahadevan R, Doyle III F J. Control-relevant scheduling of polymer grade transitions [J]. *AIChE J*, 2002, 48(8): 1754-1764.
- [22] 罗雄麟. 化工过程动态[M]. 化学工业出版社, 北京, 2006.
- [23] Feather D, Harrell D, and Lieberman R. Hybrid approach to polymer grade transition control [J]. *AIChE J*, 2004, 50(10): 2502-2513.

- [24] Seki H, Ogawa M, Ohshima M, Wang Y. Industrial application of a nonlinear model predictive control to polymerization reactors [J]. *Control Engineering Practice*, 2001, 9(8): 819-828.
- [25] Wang Y, Ohshima M. Optimal grade transition control for polymerization reactors [J]. *Computer & Chemical Engineering*, 2000, 24(2-7): 1555-1561.
- [26] Eskinat E, Johnson S H, Luyben W L. Use of Hammerstein models in identification of nonlinear systems [J]. *AIChE J*, 1991, 37(2): 255-268.
- [27] Bhandari N, Rollins D. Continuous-time Hammerstein nonlinear modeling applied to distillation [J]. *AIChE J*, 2004, 50(2): 530-533.
- [28] Henson M A, Seborg D E. Adaptive nonlinear control of a pH neutralization process [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1994, 2(3): 169-182.
- [29] Sahli F M, Abdennour R B, Ksouri M. Nonlinear model-based predictive control using a generalized Hammerstein model and its application to a semi-reactor [J]. *Int J Adv Manuf Technol*, 2002, 20(3): 844-852.
- [30] 张媛媛, 徐科军, 张进. 基于 Hammerstein 模型的 MAF 传感器的动态非线性建模[J]. 电子测量与仪器学报, 2008, 22(4): 68-73.
- [31] 戴高良, 殷纯永, 谢广平. 采用预测控制进行纵向塞曼幅值热稳频的研究[J]. 中国激光, 1998, 25(5): 421-426.
- [32] 袁延奇, 刘文江. 基于 Hammerstein 模型的自校正极值调节器及其应用[J]. 仪器仪表学报, 2001, 22(4): 413-415.
- [33] 丁宝苍, 李少远. 具有约束的 Hammerstein 非线性控制系统的设计与分析[J]. 控制与决策, 2002, 18(1): 24-28.
- [34] 牛永肖, 丁宝苍, 孙鹤旭. 输入非线性系统的两步法预测控制的鲁棒稳定性[J]. 控制与决策, 2006, 21(4): 457-461.
- [35] Xiang W, Sheng J, Chen Z H. Model predictive control based on neural networks for Hammerstein type nonlinear systems [J]. *Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences*, 2008, 25(2): 224-232.
- [36] Jiang P G, Su H Y, Chu J. Optimal guaranteed cost control for a class of linear uncertain time-delay systems[A]. *Third WCICA[C]*. 2000, 1-5: 3354-3358.
- [37] Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. *IEEE Trans on Automat Contr*, 1994, 39(9): 1971-1977.
- [38] 张羽飞, 冯汝鹏, 王茂.  $H_2/H_\infty$ 混合优化问题综述[J]. 信息与控制, 2002, 31(5):430-436.
- [39] 申铁龙.  $H_\infty$ 控制理论与应用技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [40] 俞立, 陈国定, 潘海天. 不确定离散时间系统的  $H_2/H_\infty$ 最优保性能控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(2):151-154.
- [41] 马清亮, 胡昌华. 基于参数相关 Lyapunov 函数的鲁棒  $H_2/H_\infty$ 控制[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(10): 2244-2247.
- [42] Sarkar P, Gupta S K. Steady state simulation of continuous flow stirred tank slurry propylene polymerization reactors [J]. *Polymer engineering and science*, 1992, 32(11): 732-742.



- [43] Van den Bos A. Application of statistical parameter estimation methods to physical measurement [J]. *Phys E: Sci Instrum*, 1977, 33(10): 753-760.
- [44] Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal Function[J]. *Control Signal Systems*, 1989, 22(2): 303-314.
- [45] Wang H, Cameron R G, Johnson A F. A model-based expert control system for MWD in the manufacture of polyester [J]. *Trans Inst MC*, 1993, 15(1): 6-10.
- [46] 王树青等. 先进控制技术及应用[M]. 北京: 化学工业出版社, 2001.
- [47] Chang J S, Lai J L. Computation of optimal temperature policy for molecular weight control in a batch polymerization reactor [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1992, 31(3): 861-868.
- [48] 许健. 液相与气相本体法 PP 工艺路线分析[J]. *合成树脂基塑料*, 1999, 16(5): 20-23.
- [49] 荚亮, 梁军, 王文庆, 王靖岱. 聚烯烃连续生产过程中产品牌号切换的研究述评[J]. *化工进展*, 2006, 25(7): 780-184.
- [50] McAuley K B, MacGregor J F. Optimal grade transitions in a gas phase polyethylene reactors [J]. *AIChE J*, 1992, 38(10):1564-1576.
- [51] Lines B, Hartlen D, Paquin F D. Polyethylene reactor modeling and control design [J]. *Hydrocarbon Processing*, 1993, 72(6): 119-120.
- [52] Pearson R K, Pottmann M. Gray-box identification of block-oriented nonlinear models [J]. *Journal of Process Control*, 2000, 10(4): 301-315.
- [53] Korenberg I W. The identification of nonlinear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade mode [J]. *Biolog Cybernet*, 1986, 55(2-3): 135-144.
- [54] Bloemen H H J, Van De Boom T J J, Verbruggen H B. Model-based predictive control for Hammerstein-Wiener systems [J]. *International Journal of Control*, 2001(74): 482-495.
- [55] Anbunmani K, Patnaik L M, Sarma I G. Self-tuning minimum variance control of nonlinear systems of the Hammerstein model [J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1981, 26(10): 959-961.
- [56] Zhu Q M, Warwich K, Douce J L. Adaptive general predictive controller for nonlinear systems [J]. *IEEE Proc D*, 1991, 138(1): 33-40.
- [57] 俞立. 鲁棒控制 - 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [58] Xi L, De S Z, Carlos E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay [J]. *Automatica*, 1997, 33(9): 1657-1662.

## 致 谢

三年的研究生学习即将结束，在这三年的学习过程中，得到了很多老师、同学和朋友的关心和帮助。正式在这些关心和帮助下，我才得以顺利地完成了学业，并渡过了充实的研究生生活。

首先，我要感谢我的导师俞立教授，他认真细致、一丝不苟的科研作风一直是我工作和学习的榜样；他为人热情、有亲和力，是我的良师益友；他的真知灼见指引了我的前进方向。

其次，感谢何德峰老师在科研过程中为我提供的无私帮助和谆谆教诲，以及欧林林、徐建明、张贵军等老师给我的帮助，在此谨向各位领导和老师表示诚挚的敬意和谢忱。

再次，感谢我的师兄张文安，同学何伟，王微，王永灿，宋洪波，师妹吴玉书，王琪，师弟孙友统等三年来对我学习、生活的关心和帮助。感谢我的朋友谢序，同学林示麟、滕游，师弟胡磊、张鸿飞，在整个毕业设计环节，他们给了我很大的帮助和关心。

最后，感谢我的父亲、母亲、姐姐长期以来对我学业生活的支持和精神上的鼓励。

要感谢的人实在很多，在此对他们一并表示衷心的感谢！

## 攻读学位期间参加的科研项目和成果

### 参加的科研项目

- 1、基于网络的远程实验室平台设计,浙江省大学生“新苗人才计划”科研项目;
- 2、大型聚丙烯装置面向节能降耗的多牌号生产策略研究,国家高技术研究发展计划.

### 录用和发表的论文

- 1、陈俊杰,何德峰,俞立.基于 LMI 的约束 Hammerstein 系统最优控制器设计 [J],浙江工业大学学报,已录用.