

中文摘要

活齿端面谐波齿轮是综合现有的谐波齿轮传动和活齿传动的优点而发明的一种新型传动装置,能够从根本上克服现有的谐波齿轮传动中柔轮的变形与其承载能力之间的矛盾,不仅可以保留现有谐波齿轮传动所有的优点,而且可以大幅度地提高所传递的功率。根据文献检索和申请专利时查新的结果,目前国内还没有进行过这种新型传动装置的研究。

本文简要叙述了现有的谐波齿轮传动和活齿传动的原理以及圆柱齿轮修形的理论、方法和工艺,介绍了活齿端面谐波齿轮传动装置的结构、传动原理和传动比,分析了活齿端面谐波齿轮各啮合副的理论齿面方程,并在此基础上进行了啮合副理论齿面修形的研究工作,得到了以下结论:

(1) 在活齿端面谐波齿轮传动的过程中,为了减小啮合副中的活齿作往复直线运动时的惯性冲击,必须对各啮合副的理论齿面进行修形。

(2) 在分析活齿端面谐波齿轮各啮合副运动规律的基础上,提出了用二次空间曲面对各啮合副的理论齿面进行修形的原理和方法,修形齿面与理论齿面圆滑过渡,不仅可以减小活齿在作轴向往复运动时的冲击,而且便于设计和制造。

(3) 研究了活齿端面谐波齿轮各啮合副齿面修形的原则,得出了波发生器、活齿前端和端面齿轮齿面的修形高度之间必须满足的关系。

(4) 针对活齿端面谐波齿轮传动装置中应用的多齿传动结构,探讨了活齿前端齿底的修形问题,提出了几种可供选择的实施方案。

(5) 推导出了活齿端面谐波齿轮各啮合副经过齿面修形后的齿面方程。

此外,对进一步研究活齿端面谐波齿轮啮合副的主要课题进行了讨论和展望。关于活齿端面谐波齿轮啮合副的齿面方程及其修形的理论研究,奠定了活齿端面谐波齿轮减速器设计的理论基础,为这种新型传动装置的推广应用铺平了道路。

关键词: 活齿, 端面谐波齿轮, 齿面方程, 齿面修形

Abstract

The end face harmonious gear drive of oscillating teeth is a new type of drive, which contains the advantages of the common harmonic gear drive and the oscillating tooth. It radically solves the contradiction between the deformation and the carrying capacity of flexible gear. The carrying capacity is increased on the basis of preserving all merits of the common harmonic gear drive. According to the result of literature search, the theoretical researches of end face harmonic gear drive of oscillating teeth have not been founded.

The theory of harmonic gear drive, oscillating teeth drive and the theory, method and thchnics of cylindrical gear are presented. The structure and the transmission theory of end face harmonic gear drive of oscillating teeth are introduced. The researches for the modification of end face harmonic gear drive of oscillating teeth have been done in the condition of analyzing the equations of teeth surface of all key components. The conclusions are drawn as follows:

(1) The modification of the tooth surface must be done for decreasing the impact while oscillating teeth doing the axial reciprocating motion in the process of end face harmonic gear drive.

(2) The modification theory and method are introduced in the condition of preserving the motion state of the end face harmonic gear drive of oscillating teeth. It not only decreases the impact while oscillating teeth doing the axial reciprocating motion, but also is convenient for design and manufacture.

(3) The modification principle of tooth surface is deduced, and it draws the conclusion that the modificative tooth depth of wave producer, end face gear and oscillating teeth have certain relation.

(4) The modification of oscillating teeth for the multi-teeth drive of end face harmonic gear drive of oscillating teeth is discussed, and several measures are introduced.

(5) The equations of teeth surface after modification of all key components, such as wave producer, oscillating teeth, end face gear, are deduced.

Furthermore, the posterior dominating researches on end face harmonic gear drive of oscillating teeth are discussed. It is helpful for the basically theoretical researches and the design of end face harmonic gear drive of oscillating teeth. And it has a definite application expectation and economic value.

Keywords: Oscillating Tooth, End Face Harmonic gear, Equation of Tooth Surface, Modification

1 绪 论

1.1 传统谐波齿轮传动和活齿传动概述

1.1.1 传统谐波齿轮传动概述

谐波传动是上世纪 50 年代中期随着空间科学技术的发展,在薄壳弹性变形理论的基础上发展起来的一种新型传动技术。谐波齿轮传动是谐波传动中的一种主要结构类型,是以齿轮作为基本元件的谐波传动形式。此外,谐波传动还包括谐波摩擦传动、谐波螺旋传动和谐波无级变速传动等结构类型^[1]。

传统的谐波齿轮传动机构由三个基本构件组成:波发生器(Wave Generator)、作为挠性构件的柔轮(Flexible spline)和刚轮(Circular Spline),柔轮与刚轮在径向啮合,可称为径向谐波齿轮传动,其结构示意图如图 1.1 所示^{[2][3]}。

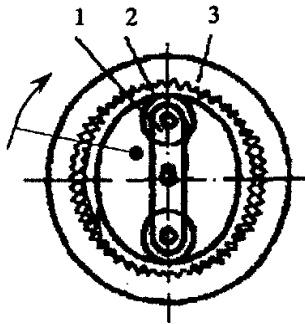


图 1.1 径向谐波齿轮传动的结构示意图

1-波发生器 2-柔轮 3-刚轮

当刚轮固定、波发生器为主动件、柔轮为从动件时,波发生器沿着图示方向旋转,迫使柔轮不断变形,柔轮的齿相继由啮入转向啮合,由啮合转向啮出,由啮出转向脱开,由脱开再转向啮入,从而使柔轮沿着波发生器相反的方向旋转。柔轮齿与刚轮齿在节圆处的啮合过程如同两个纯滚动(无滑动)的圆环一样,两者在任何瞬间,在节圆上转过的弧长必须相等。由于柔轮比刚轮在节圆周长上少了两个齿距,所以柔轮在啮合过程中,就必须相对刚轮转过两个齿距的角位移,这个角位移就是减速器输出轴的转动,从而就可以实现减速的目的。

这种谐波传动具有结构简单、体积小、重量轻、传动比范围大和运动精度高等优点。

不过，传统的谐波齿轮传动装置本身结构也存在一些不足的地方：

(1) 传递功率小 由于柔轮需要不断地产生径向变形来完成与刚轮的啮合传动，为了避免柔轮在这种高频率的周期性变形下产生疲劳断裂失效问题，柔轮的壁必须很薄，柔轮轮齿的模数也必须很小（通常小于 1），所以一般不能承受较大的载荷，不能传递较大的功率。

(2) 柔轮作为薄壁的带齿构件，在自由状态时，其节圆直径小于刚轮的节圆直径，两者的轮齿处于脱离状态。而在工作中，波发生器使柔轮不断地产生径向变形，以完成与刚轮的啮合运动。这种频繁的周期性变形使柔轮处于高度循环的交变应力状态中，很容易导致轮齿的疲劳破坏^[4]。

由以上分析可知，要增大谐波齿轮传递的功率，其主要的措施是增大模数，但这样就会导致柔轮壁厚的增大，增加柔轮疲劳破坏的危险性。因此，传统的谐波齿轮传动无法解决薄壁柔轮的变形与其承载能力之间的矛盾。

1.1.2 活齿传动概述

活齿传动是一种由少齿差行星齿轮传动演化而成的新型齿轮传动。这种传动最初的结构型式是在上世纪 30 年代由德国人提出来的，到了 40 年代，活齿传动技术就应用到汽车的转向机构中了。活齿传动的结构型式，在转速变换的过程中，具有多齿啮合、承载能力强、传动比大、传动范围广、传动效率高等特点，并保留了传统谐波齿轮传动的一些优点，同时使理论计算和设计计算也得以简化。活齿传动机构已应用到能源、机床、矿山、起重运输、化工、建筑工程、农机、医疗器械、纺织、轻工及食品机械等工业部门中，如用于锅炉的除渣机构、选矿场的球磨机、矿山牵引车等^[5]。

活齿传动与传统的谐波传动结构组成相似，由波发生器、活齿轮和中心轮三个基本构件组成。活齿传动是利用一组中间活动件——活齿来实现两轴之间的转速变换，突破了长期以来谐波齿轮传动中依靠柔轮变形来传递运动和动力的结构模式，将柔轮轮齿改为一组作循环运动的独立运动体。

活齿传动的结构型式很多，但是各种活齿传动的的基本传动原理是类似的，因此，本文用图 1.2 所示的滚柱活齿传动的结构模型和传动原理图为本，来分析活齿传动的结构和传动原理。

滚柱活齿传动的传动原理：如图 1.2 (b) 所示，当驱动力输入后，输入轴以等角速度 ω_H 顺时针转动，它带动偏心圆激波器，使其几何中心 B 绕固定中心 O 转动，由于偏心圆激波器径向尺寸的变化，激波器产生径向推力，迫使与中心轮（内齿）齿廓啮合的诸活齿沿着活齿架均布的径向导槽移动。与此同时，活齿因受活齿架和中心轮齿廓高副的约束，在沿着中心轮（内齿）齿廓运动的过程中，推动活齿架以等角速度 ω_G 转动，于是滚柱活齿传动实现了定速比的转速变换。在传动的过程中，与中心轮（内齿）非工作齿廓啮合的各个活齿，在活齿架的反推作用下，顺序地退回到活齿的工作起始位置，完成它的一个工作循环。每个滚柱活齿只能推动从动件转过一定的角度，而滚柱活齿传动的连续运动，是靠各滚柱活齿的接替工作来实现的。

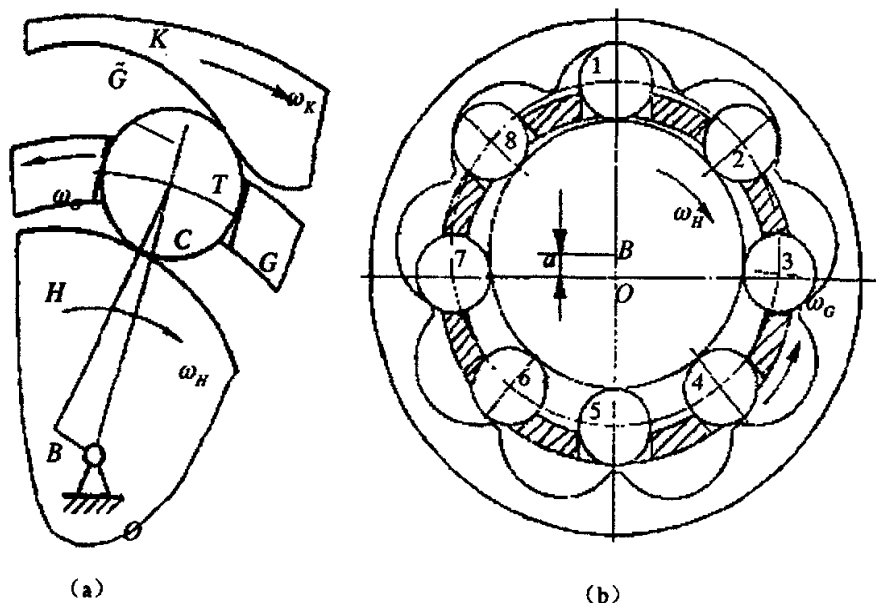


图 1.2 滚柱活齿传动的结构模型和传动原理图

1.2 活齿端面谐波齿轮传动概述

活齿端面谐波齿轮传动装置属于一种新型的空间活齿传动机构，可以从根本上克服传统的径向谐波齿轮传动中柔轮的变形与其承载能力之间的矛盾，并可增加同时啮合的齿数，加大齿轮的模数，从而可以在保留径向谐波齿轮传动的所有优点基础上，使其所传递的功率增加数十倍。这种新型的传动装置综合

了传统的径向谐波齿轮传动和活齿传动的优点，已经申报了中国发明专利，专利申请号为 200410012992.6。

根据文献检索和专利申请的查询结果，目前国内外还没有关于这种传动装置的研究。因此，关于活齿端面谐波齿轮传动的基础性理论研究和开发应用，不仅增加了活齿传动的类型，具有一定的理论意义，而且具有广泛应用前景和巨大经济价值。

传统的径向谐波齿轮传动装置是通过柔轮的弹性变形，使柔轮与刚轮啮合来实现运动和动力的传递，而活齿端面谐波齿轮传动装置则是将现有的端面谐波齿轮中的柔轮分离成若干块活齿，利用非定常升力面理论来传递运动和动力的，因此，可以从根本上克服现有的谐波齿轮传动中柔轮的变形与其承载能力之间的矛盾，并可增加同时啮合的齿数，加大齿轮的模数，从而可以在保留径向谐波齿轮传动所有优点的基础上，使其所传递的功率增加数十倍，特别适用于需要大传动比、大功率减速器的矿山、机械、冶金、建材等多种行业。

经过导师和往届毕业生的探索和研究，对于活齿端面谐波齿轮这种新型的传动装置，已经完成了以下几方面的基础性理论研究工作^{[6]-[11]}：

(1) 提出了活齿端面谐波齿轮传动装置的结构和传动原理；设计了各种可能用到的活齿端面谐波齿轮传动装置的结构型式。

(2) 用 Willis 转化机构法求出了活齿端面谐波齿轮传动装置的传动比，并用微分的方法分析、求出了瞬时传动比，得出了保证瞬时传动比恒定的条件。

(3) 在保证瞬时传动比恒定的条件下，推导出了活齿端面谐波齿轮传动装置的主要传动部件——端面齿轮、活齿以及波发生器的齿面方程。

(4) 在分析活齿端面谐波齿轮传动装置运动状态的基础上，提出了一种端面齿轮、活齿和波发生器齿面的修形方法。

(5) 对进一步研究活齿端面谐波齿轮传动装置的主要课题进行了讨论和展望，并初步探讨了其中部分课题的研究思路。

1.3 齿轮修形概述

1.3.1 齿轮修形的意义

通过对齿轮的轮齿进行适当的修形，可以显著提高齿轮的性能和使用寿命，减小啮合噪声、振动等。通过查阅大量文献，国内外学者就齿轮修形的重要性

有如下共识：各国学者在齿轮副产生回转误差的原因上基本达成了共识，他们认为回转误差是由齿轮本身的制造误差和受载变形造成的，因此通过对齿形进行适当修整可以减小回转误差；回转误差与齿轮的运转过程中的振动与轮齿啮合冲击有密切的关系，因此齿形修形得当，同样可以降低啮合和振动冲击；从微观上理解噪声，它应该是由轮齿振动的加速度均方根值引起的，故齿形修整能降低齿轮副的传动噪声；齿形对啮合过程中轮齿的接触载荷的分布会产生直接的影响，因此齿向修形可以提高齿根强度、齿面强度等；齿形修形能改善齿面的摩擦状况和润滑油膜的形成，从而会降低齿面油膜温升，因而能提高齿面的抗胶合能力；齿向修形同样能改善齿轮沿轴向的载荷分布，防止载荷过于集中：

1.3.2 齿轮修形理论的新进展

1.3.2.1 齿轮齿廓修形的理论与方法

在一对齿的啮合过程中，由于参与啮合的轮齿对数的改变，会引起啮合刚度的变化。在极短的时间内啮合刚度的急剧变化，将引起严重的激振。为了使啮合刚度的变化比较缓和，减少由于基节误差和受载变形所引起的啮入和啮出冲击，或为了改善齿面润滑状态，防止胶合发生，而把原来的渐开线齿廓在齿顶或接近齿根圆角的部位修去一部分（如图 1.3 所示），这种措施就是所谓的齿廓修形。

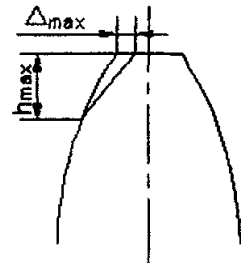


图 1.3 齿廓修形

不少学者对齿廓修形进行了研究。詹东安^[13]等在《高速齿轮齿部修形技术研究》中分析了齿廓修形的长修形和短修形的区别及应用场合。作者指出：在长修形中，凡两对齿啮合区被修去了是理想状态，这就出现单对齿啮合部分只有在满载设计状态下重合度为 1，这样啮合部分等于或小于基节，容易引起啮合不连续而产生振动和噪声。因此，长修形只适用于大螺旋角或大重合度的双斜（人字）齿轮。在短修形中，保留有一半的两对齿啮合区，起到两对齿啮合区载荷平缓啮入和啮出，这样啮合部分不小于一个基节，重合度大于 1，不会产生断续啮合现象。因此，短修形适用于直齿或一般螺旋角的单斜齿轮，应用广泛。作者根据生产经验也给出了计算修形量的一种简化公式，但没有深入分析影响修形量的各个因素。

杨廷力^[14]等在《渐开线高速齿轮的齿高修形》一文中给出了一种较为详细的计算方法。要点有：(1) 齿顶的最大修形量计算公式；(2) 修形区分为长短两种：长修形起点为单齿副啮合起点，短修形只有长修形的 1/2。长修形适用于大螺旋角和大重合度的宽斜齿轮，短修形适合于直齿轮或螺旋角小的。其确定修形量的原则是：(1) 整个啮合过程中的负荷变化呈平稳过渡；(2) 适应负荷变动的能力较强；(3) 有较好的工艺性。

王朝晋^[15]等在《关于齿廓修形的研究》一文中，应用材料力学理论建立了变形协调方程，据此建立的修形和修形曲线公式简单易行但未考虑接触变形的影响。

日本学者仙波正庄^[16]在《高强度齿轮设计》一书中详细分析和介绍了“一种简易的渐开线齿形修整的方法”和“把普通滚刀偏心安装来对渐开线齿廓进行修形的方法”。前者以节点处渐开线曲率半径的 3/4 为半径的圆弧作为齿廓修形的曲线，可获得较好的效果。后者则通过专门设计的刀具在齿形的加工工序中完成修形。

薛家宝^[17]等在《具有误差齿轮的弹性啮合特性及修形》一书中考虑轮齿误差、轮齿弹性变形和修形量之间的协调条件，导出轮齿在任意啮合处总变形量的积分求解式，运用了共轭曲面法对齿形不需作任何简化，因而此方法更合理些。

Dr. N. Sigg^[31]给出了确定齿廓修形的起点和深度的方法。并确立了齿顶修形量的计算公式。Sigg 的修形方法主要为使齿轮啮合过程中负荷变化曲线成为无突变的曲线，而修形量的最终确定仍然是以轮齿的强度能否满足要求为原则。

一些学者也研究了齿轮传动动态性能的优化问题。孙宁^[18]对影响齿轮传动动态性能的结构参数进行了优化，李伟^[19]对齿形的修形量进行了优化。这些研究要么进行结构参数的优化，要么进行齿形优化，王晓晨^[20]在《齿轮动态性能的结构参数与齿形的优化研究》一文中，将两方面的内容结合起来进行了研究，以齿轮传动系统的动态性能参数作为目标函数，对齿轮传动的结构参数和齿形进行了优化。计算结果表明：通过改变齿轮的结构参数和齿形，可以使齿轮传动系统的振动加速度均方根值明显下降，从而达到改善齿轮传动动态性能的目的。

综上所述，国内外的学者在计算齿廓修形的修形量的确定等问题上，认识尚未统一，其理论大致可归纳为三类：材料力学的方法；弹性力学的方法；数值

解法。三类计算方法所得到的结果相差不大，各有优缺点。在实际修形过程中可视具体情况的不同采取不同的方法，关键在于掌握修形的根本目的，并需要在实践中灵活运用。

1.3.2.2 齿轮齿向修形的理论与方法

齿轮轴或齿轮轮体受力后会发生弯曲及扭转弹性变形。此外，制造中的齿向误差、箱体轴承孔的误差及受力后的变形以及高速齿轮因为离心力引起的变形和温差引起的热变形等，都会使齿面负荷发生沿齿宽方向的变化。情况严重时造成载荷局部集中，引起高负荷区的齿面破坏或折断。高速重载齿轮运转时温度较高，热弹性变形更使负荷沿齿宽方向分布复杂化，特别是小齿轮因转速高、温度高，热变形更为显著，其影响更大。

为了避免以上现象，在齿的两端沿齿向方向进行修整，称之为齿向修形。齿向修形根据修形要求或工艺，可采取鼓形修形或齿端修形（如图 1.4 所示），其目的是相同的。

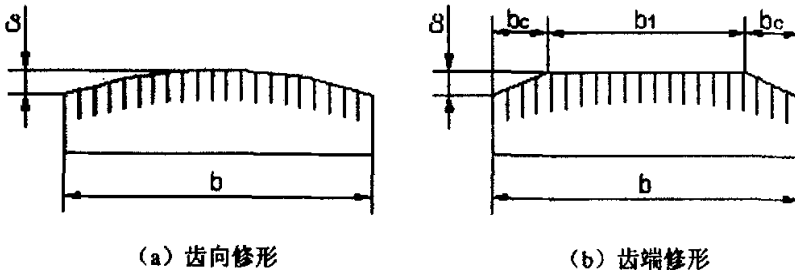


图 1.4 齿向修形

宋乐民^[21]等在《渐开线鼓形齿的鼓形量》一文中针对高速重载齿轮的齿面压陷和剥落设计了鼓形齿。他们经过深入研究认为，设计鼓形齿的目的是保证齿轮在最大倾斜条件下，齿不发生棱边嵌入现象。宋乐民等不但考虑了齿轮轴的变形，而且考虑了载荷作用下轮齿的弹性变形，在最大限度地减小鼓形齿载荷集中方面较其他方法考虑的更为全面。

美国学者 B. W. Dudley^[32]用逐步逼近法求解人字齿轮轴的弯曲、扭转变形及综合变形，求解的步骤为：（1）设载荷作用于螺旋齿的中部；（2）按集中载荷计算出齿轮轴的弯曲和扭转变形；（3）将弯、扭变形图叠加得出沿齿向的载荷分布图；（4）将载荷图沿齿向平均分成 4 份，由此确定第二次逼近的新负荷图；

(5) 用新的载荷替代原来载荷进行计算, 直到相邻两次载荷图十分接近为止。据此, Dudley 导出了计算齿轮轴弯曲扭转变形的公式。

杨廷力^[9]等在《渐开线高速齿轮的齿高修形》一文中, 在假定轮体膨胀但轮齿的几何形状和参数不变的情况下, 运用弹性力学和热传导理论得出最大修形量计算公式, 但他们只给出了 δ_{\max} 的计算公式, 而未对其来龙去脉深入研究。

美国学者 Nig Sigg^[31]认为, 对于单个斜齿轮可以按一定原则选定螺旋方向, 使轮齿负荷所产生的变形与轴的扭转变形相抵消, 从而减小修形量甚至不修形。他们提出的原则是: 在减速齿轮中, 轴齿轮的啮入端应在其输入联轴器的一端, 而对于增速齿轮情况正好相反。Sigg 并认为齿轮轴的综合弹性变形曲线由弯曲变形曲线和扭转变形曲线两者合成。

陶燕光^[22]在《高速齿轮热变形修形的试验研究》一文中分析了高速齿轮的热变形, 并作了以下假设: 把齿轮简化为处于稳定温度场中的匀质圆柱体, 沿齿轮外圆柱面有一个均匀分布的热源, 认为齿轮温度的分布情况与齿轮的半径有关。根据该假设, 运用弹性理论和热传导理论可求出齿轮任一半径上径向变形和齿轮啮合线方向上的热变形量。陶燕光法中的有关数据需要从测温实验中测得, 因而计算结果较为可靠, 但为了测温需要建立实验台, 成本高, 且温度测试是在齿轮装置处于空载的情况下进行的, 故其结论也有一定的近似性。

综上所述, 国内外在齿向修形和热变形方面进行研究的为数不少, 其中大多数是计算出变形量, 然后根据镜面对称的关系确定所需的修形量。在实际工作中需要分析一下是否有必要取所有的变形量。如果不需要, 就应分清哪些变形可以忽略, 根据实际情况确定出合理的修形量。

1.3.2.3 齿轮修形技术的新进展

对齿轮修形, 随着电子计算机广泛应用, 国内外的研究已由静态修形向动态修形方向发展, 在系统优化和三维综合修形的方向逐步深入。这些新发展正处于不断完善和深化的过程中。

张书生^[23]等在《齿轮传动动态性能的优化设计——最优修形曲线的确定》一文中, 以直齿圆柱齿轮传动中振动的最主要形式——圆周方向振动为研究对象, 建立了用单自由度扭振系统表示的动力学模型 (如图 1.5 所示)。

齿轮传动的动态性能用齿轮的振动加速度与齿轮噪声来描述, 而齿轮传动的振动加速度均方根值与齿轮噪声成线性关系, 齿轮传动的动态性能可描述为:

$$F(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{160} \dot{x}_i^2 / 160} \quad (\text{其中 } \dot{x}_i \text{ 为振动加速度})$$

作者以振动加速度均方根值 $F(x)$ 为优化目标函数，通过齿轮传动动态性能仿真研究，进行了齿轮修形曲线及参数的优化设计，通过直线修形、抛物线修形和正弦曲线修形的实例计算，分析了如何确定最优修形曲线：(1) 不同工况下，采用不同的修形曲线，修形效果是不同的，很难确定一种适于各种工况的最优修形曲线。进行修形曲线设计时，必须根据实际工况来确定修形曲线类型和曲线参数。(2) 载荷小、转速低的情况下，3种修形曲线修形效果差别不大；载荷大、转速高的情况下，正弦修形曲线和抛物线修形曲线修形效果好。相比之下，正弦修形曲线在很大范围（工况）内修形效果显著。

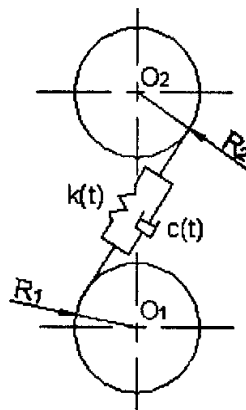


图 1.5 齿轮动力学模型

刘辉^[24]等在《传动装置的齿轮三维修形设计法》中提出了更为合理的齿面三维修形方法。并指出：齿轮修形设计不仅要考虑齿轮本身的参数，还要涉及到齿轮与传动装置之间关系的参数，从而达到更为合理和实用的效果，这是以往研究较少考虑的方面。作者从减小传动误差、减小啮入啮出冲击、均化载荷分布三个方面，研究了传动装置的齿轮三维修形设计方法，并编制了变速箱齿轮修形软件系统。修形后齿面趋势为中鼓形，并具有对角修形的特点，并且由于该档齿轮位于轴上靠近右轴承一端，轴变形使齿面出现偏载现象，所以齿面右端的修形量要大于左端，说明在进行齿轮三维计算时支承系统变形的影响是不容忽视的。

方宗德^[25]在《斜齿轮齿廓修形的试验研究》一文中用有限元网格划分，使工作齿面有 n 个节点分属于 m 个齿轮转角位置，将齿廓修形的优化设计表达成数学规划形式，解出式中表示的数学规划，即可得到优化齿廓修形曲线以及修形后在设计载荷 P 作用下的传动误差波形。他认为，如果分别进行齿向和齿廓修形，不可能得到良好的修形结果，考虑到修形的两个方向性和可加工性，他选择在齿宽和齿高方向上都是二次椭圆球面作为三维修形的模型，根据优化目标：齿面负荷均匀分布和降低传动误差，导出三维修形的优化设计形式，从而可以求得符合优化目标函数的 3-D 修形。

日本学者会田^[26]认为, 齿轮圆周方向振动加速度与声压级成线性关系, 因而选择了加速度均方值最小作为优化的目标函数; 并选择修形量作为优化参数, 约束范围在静态修形量的两边, 区间大小由载荷和啮合刚度而定。

王统^{[27][33]}等在齿轮轴三维综合弹性变形和齿向修形曲线的研究中, 用有限元法对齿轮轴的变形进行了分析计算, 掌握了齿轮轴的整体弹性变形和轮齿的变形情况, 首先得出了齿轮轴的三维综合弹性变形曲线, 进而求得三维齿向修形曲线。王统认为齿轮受载后产生的综合弹性变形主要由: 齿轮轴的弯曲变形; 齿轮轴的压缩变形; 齿轮轴的扭转变形; 轮齿的弯曲变形; 啮合接触区的弹性变形等五部分组成。

综上所述, 齿轮修形的设计和计算已有不少的理论和方法, 但实际满足上述理论的方法, 尚存在不少困难。

1.3.3 国内外齿轮修形工艺的现状和选题的意义

1.3.3.1 齿轮修形工艺现状

目前, 大多数齿轮生产厂家采用的齿轮修形方法有机械修形、数控修形和电火花修形等。

机械修形, 包括机械仿型(即靠模法)。它利用在滚渐开线齿轮时, 即使改变切齿深度, 齿轮齿形也不改变, 只是齿厚发生改变的原理来修形。

光电扫描修形, 此方法在国内外均已采用, 近年来曾用模板改变与光电管的距离, 调整电压改变电流大小, 用电解珩磨法达到齿廓修形的目的。这种修形适用于对称和不对称的各种修形, 所不同的是需按修形尺寸制作模板。

日本研制过数控修形, 其原理是以大齿轮的齿向为基础, 通过共轭副在跑合台架上的啮合, 测量装置可测得齿向误差, 误差经计算机转换成小齿轮的修形量后, 再经自控系统指挥铣头进行加工。

在德国, 采用过啮合齿轮互为电极, 以电火花去除进行互相调整的方法进行修形, 在我国也曾经采用过类似的方法, 但效果并不十分理想。

在以上的修形方法中, 齿轮在未淬火前, 虽可采用剃齿修形, 但该方法尚存在一定问题。剃齿的同时进行修形, 会产生剃齿误差。刀具的磨损和其修磨精度, 直接影响加工精度, 对斜齿轮修形还会使齿面扭曲。剃齿加工完的工件, 其精度和表面质量会在热处理后下降。齿轮淬火后虽能珩齿, 但制造修磨珩轮, 比加工斜齿轮要困难的多。磨齿可对硬齿面齿轮进行修形, 加工精度也较高,

但设备投资大。碟形双砂轮磨齿机,生产效率低下,生产成本低,不适合于大批量生产。蜗杆砂轮磨齿机生产效率较高,但砂轮制造成本很高,不适合于单件小批量生产。磨齿加工的工艺适应性较差,不能加工内齿轮、多联齿轮、螺旋伞齿轮等结构复杂的齿轮,尺寸较大的齿轮也不适合于磨齿加工。另外,磨齿有时还会出现表面烧伤、高温回火、受力变形及齿面应力状态不佳等表面质量缺陷。

综上所述,剃齿、磨齿修形存在着刀具制造困难、加工运动复杂、成本高、效率低、设备投资大、工艺适应性差等不足。从而使齿轮这一关键基础件难以满足现代化生产和使用上的要求。在这种情况下,国内外学者都致力于其它修形方法的研究。德国学者采用啮合齿轮互为电极的方法,以电火花去除进行互相修整。我国学者也在从事这方面的研究工作。日本学者以齿轮作为阳极,圆电解槽作为阴极,进行电化学齿轮修形方面的研究。

1.3.3.2 电化学齿轮修形研究现状

鉴于机械修形具有加工成本高、工艺适应性差等难以克服的缺点,电化学修形工艺因其独特优点,发展迅速。大连理工大学周锦进教授于70年代末开始了电化学齿轮修形技术的研究工作。他应用电场模拟方法,根据惠斯登电桥平衡原理,对齿面和阴极之间的电化学反应区域进行了二维电场模拟测量,得到了反应区域等位面 and 电流线分布图,探索了阴极几何参数、阴阳极间距对电场内电流线分布的影响规律。还对电化学修形齿轮的精度和齿面质量进行了较为深入的研究。对近年发展起来并得到广泛应用的谐波齿轮,也进行了电化学修形工艺的研究,且取得了可喜的成果^{[28][29][30]}。特别是通过电化学修形后的齿轮噪音可大幅度降低,且成倍地提高了齿轮寿命,其意义重大。

传统的电化学齿轮修形加工以直流电进行,前人对直齿轮、斜齿轮及谐波齿轮等的修形取得了一定的成果,但同时也存在了不少尚未解决的问题。近年来,一些学者用脉冲电流进行了电化学加工的尝试。初步的实验表明,采用脉冲电流加工明显提高了加工精度,表面质量也有了很大的改进。

1.3.3.3 国内外发展概括和发展趋势

对现代齿轮传动,为提高齿轮的传动性能,齿轮修形技术愈显其重要性,并成为提高齿轮传动性能的有效手段。国内外的学者们为此对齿轮修形技术(包

括齿廓和齿向修形)进行了大量深入、细致的研究,取得了丰硕的成果并已得到应用。美国学者 F. B. Oswald 和 D. P. Townsend 研究了圆柱齿轮修形对齿轮受力后静、动态变形的影响。日本学者 Yoshino Hidehiro 和 Muta Yoshifumi 研究了斜齿轮、螺旋齿轮三维齿面修形方法,他们对滚刀进行全新设计,加工出了不产生传动误差的修形斜齿轮。日本学者 Hoyashita Shigeru 也对斜齿轮三维齿面修形进行了研究^{[34]-[38]}。

剃齿加工中,对刀具进行特殊修磨可以实现齿廓修形,也可进行齿向修形。国外许多著名厂商生产的齿轮机床已具备了修形功能。我国在这方面与国际先进水平相比还有一定差距,一般采用电仿形装置辅助机床完成修形加工,加工精度较低,对于尺寸较大的工程机械齿轮,国内尚无较好的修形方法^{[39]-[46]}。

1.4 本课题研究的内容

本文所研究的课题来源于自筹项目,其目的是研制一种新型的活齿端面谐波齿轮传动装置。对于活齿端面谐波齿轮这种新型的传动装置已经完成了一些基础性的理论研究工作,对活齿端面谐波齿轮传动已经初步有了比较系统的理论研究。为了更好地进一步开展后继课题的研究,同时使这种新型的传动装置的研究朝有利于工业批量生产和投入实际应用的方向优化与发展,本文主要进行了如下一些基础性的理论研究工作,为产品的设计奠定了理论基础。

(1) 在分析活齿端面谐波齿轮各啮合副的运动规律的基础上,提出了用二次空间曲面对各啮合副的理论齿面进行修形的原理和方法,推导出了各啮合副齿面修形的原则。

(2) 针对活齿端面谐波齿轮传动装置中应用的多齿传动结构,探讨了活齿前端齿底的修形问题,提出了几种可供选择的实施方案。

(3) 推导出了活齿端面谐波齿轮各啮合副经过齿面修形后的齿面方程。

(4) 对进一步研究活齿端面谐波齿轮各啮合副的主要课题进行了讨论和展望。

2 活齿端面谐波齿轮的传动原理

2.1 活齿端面谐波齿轮的结构和工作原理

2.1.1 活齿端面谐波齿轮传动装置的基本结构

活齿端面谐波齿轮传动装置主要由端面齿轮 E、波发生器 W、活齿 O 及槽轮 H 等四个基本构件组成, 根据用途的不同, 可以采用单边传动或双边传动的型式, 单边传动装置的基本结构如图 2.1 所示。这种传动装置在结构上的特点是: 将传统的谐波齿轮传动中的刚轮改换为端面齿轮 2, 刚轮的内齿改换为端面上沿圆周方向均匀分布的轮齿, 波发生器 6 由径向的圆盘凸轮改换为轴向的圆柱端面凸轮 (一面或两面)。将柔轮分成若干块活齿 4, 并将其置于槽轮 3 中, 可作轴向的往复运动。活齿 4 的一端可与端面齿轮 2 进行啮入啮出的错齿运动, 其另一端则与波发生器 6 相接触 (滚动或滑动)。端面齿轮 2 固定在箱体 5 上, 波发生器 6 作为主动件与输入轴 7 相连, 槽轮 3 作为从动件与输出轴 1 相连^[10]。

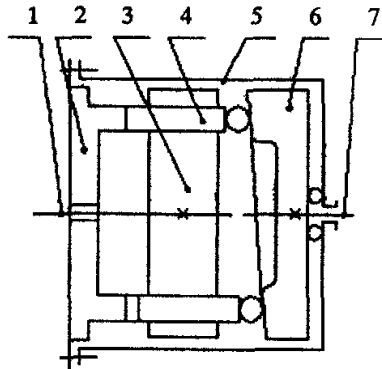


图 2.1 活齿端面谐波齿轮单边传动的结构示意图 (端面齿轮固定)

1—输出轴 2—端面齿轮 3—槽轮 4—活齿
5—箱体 6—波发生器 7—输入轴

活齿端面谐波齿轮传动属于行星传动的一种, 可以将端面齿轮、槽轮、波发生器三个基本传动构件中的任意一个固定, 而将其余的两个分别作为输入构件和输出构件, 组成传动机构。

活齿端面谐波齿轮双边传动的结构型式如图 2.2 所示, 波发生器通常为对称的双面凸轮, 传动部件的运动在波发生器的两边是对称的。由于波发生器两侧

受的力沿轴向相互抵消，双边传动的系统具有更好的受力状态，更适合传递大功率。波发生器的波数 (U) 为波发生器旋转一周，活齿在槽轮中往返一个来回的次数。常见的有单波传动 ($U=1$) 和双波传动 ($U=2$) 等结构型式。双波传动虽然传动比相对较小，但波发生器受到的轴向力是对称的，不会产生倾覆力矩，系统运转的平稳性较高，结构设计也比较容易，因此应用最为广泛^{[8][9]}。

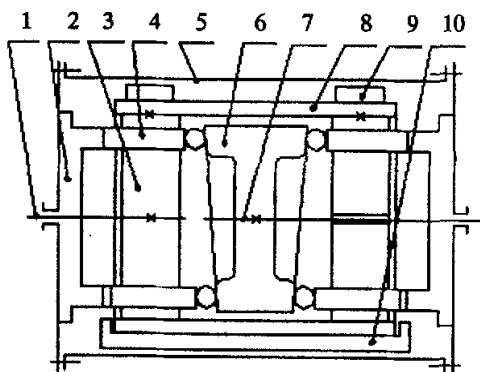


图 2.2 活齿端面谐波齿轮双边传动的结构示意图 (端面齿轮固定)

1—输出轴 2—端面齿轮 3—槽轮 4—活齿 5—箱体

6—波发生器 7—输入轴 8—连接套 9—压块 10—滑动轴承

在活齿端面谐波齿轮传动装置中，活齿分为若干块，每块活齿上的齿数 (Z_A) 可为单齿或多齿 (Z_A 大于 1)。在多齿传动的结构中，同时啮合的齿数多，槽轮和活齿块的结构设计也比较容易，因此应优先选用多齿传动。

2.1.2 活齿端面谐波齿轮传动装置的工作原理

传统谐波齿轮传动的运动转换，是依靠挠性构件（柔轮）的弹性变形来实现的^{[1][2]}，而活齿端面谐波齿轮传动则是依据非定常升力面理论来实现运动的转换。对于斜面上的物块，只要施加在物块上的外力作用在摩擦角之外，物块就会在斜面上移动，物块的移动即表明运动转换的可能性。显然，利用升力面理论进行传动，比依靠变形原理的传动更为简单，也更容易实现^[8]。

如图 2.1 所示，单边传动的活齿端面谐波齿轮传动装置的工作原理是：当安装在输入轴 7 上的波发生器 6 旋转时，在其端面凸轮的作用下，活齿 4 可在槽轮 3 中作轴向往复运动，并与端面齿轮 2 相互啮合，从而带动槽轮 3 与端面齿轮 2 作相对的转动，使固装在输出轴 1 上的槽轮 3 旋转（也可如图 2.2 所示，

将槽轮 3 固定, 使端面齿轮 2 旋转), 达到传递运动和动力的目的。在传动过程中, 利用非定常升力面原理, 使活齿的一端始终与波发生器相接触, 而另一端则相应地与端面齿轮处于啮入或啮出的状态。活齿与端面齿轮在一侧齿面的啮入运动是依靠波发生器端面凸轮的推动, 而其啮出运动则是依靠端面齿轮另一侧齿面的反向推动作用。在图 2.1 所示的单波传动 ($U = 1$) 中, 波发生器旋转一周, 活齿在槽轮中往返一个来回, 活齿与端面齿轮相对转动一个轮齿^{[8][9]}。

如图 2.2 所示, 双边传动的活齿端面谐波齿轮传动装置的工作原理是: 当安装在输入轴 7 上的波发生器 6 旋转时, 在其两端的端面凸轮的作用下, 两端槽轮 3 中各滑槽内的活齿 4, 分别与固定在箱体 5 两端的端面齿轮 2 相啮合, 带动两端的槽轮 3 (通过连接套 8 成为一个整体) 作同步的同向回转, 由输出轴 1 输出运动和动力。

从理论上讲, 活齿端面谐波齿轮传动也可以将波发生器作为输出端, 组成大增速比的谐波齿轮传动装置, 但在实际上, 由于波发生器的升角很小和摩擦的存在, 在升角小于或者等于摩擦角的情况下, 活齿端面谐波齿轮传动机构会发生自锁。如果加大波发生器的升角, 则会导致活齿的轴向行程和端面齿轮的齿高增大, 从而使轮齿变尖, 因此, 在实际应用中, 活齿端面谐波齿轮只能作为减速装置、不宜作为增速装置使用。在需要增速且功率较小的情况下, 可以采用普通的径向式谐波齿轮作为增速装置。

2.2 活齿端面谐波齿轮传动的运动参数关系

端面齿轮的齿数 Z_E 、活齿的理论总齿数 Z_O 与波发生器端面凸轮的波数 U 之间的关系为^{[8][10]}:

$$Z_E - Z_O = \pm U \quad (2-1)$$

式 (2-1) 中的 $(Z_E - Z_O)$ 可正可负, 在槽轮固定、波发生器转向相同的条件下, 对于 $Z_E > Z_O$ 和 $Z_E < Z_O$ 这两种情况, 端面齿轮的运动方向是不同的。图 2.3 是单齿传动时端面齿轮、活齿、槽轮和波发生器端面凸轮的周向展开图 (槽轮固定), 表示了端面齿轮与活齿之间两种不同的啮合部位和运动方向。图 2.3 (a) 表示 $Z_E > Z_O$ 时, 端面齿轮的右侧齿面与活齿处于工作啮合状态, 而左侧齿面与活齿则处于非工作啮合状态, 端面齿轮与波发生器同向旋转; 图 2.3 (b) 表示 $Z_E < Z_O$ 时, 端面齿轮的左侧齿面与活齿处于工作啮合状态, 而右侧齿面与活齿则处于

非工作啮合状态，端面齿轮与波发生器反向旋转。

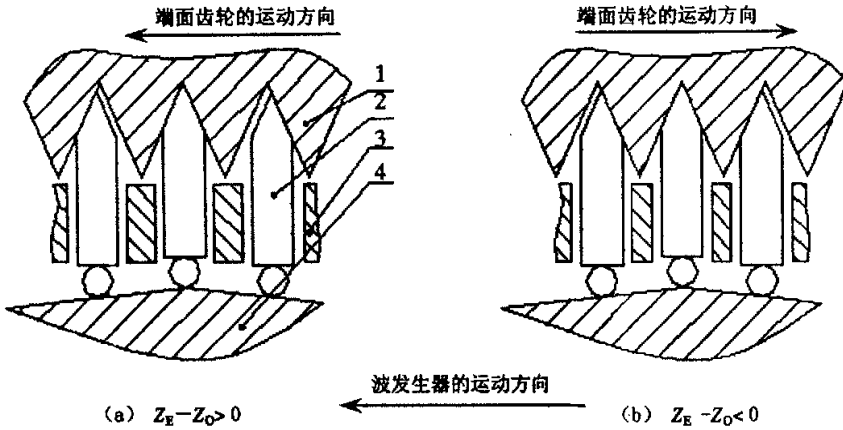


图 2.3 端面齿轮与活齿之间两种不同的啮合部位及其传动方向（槽轮固定）

1—端面齿轮 2—活齿 3—槽轮 4—波发生器

2.3 活齿端面谐波齿轮传动装置的传动比

2.3.1 活齿端面谐波齿轮传动装置的传动比

活齿端面谐波齿轮传动装置的传动比可用以下公式计算^[8]。

(1) 当端面齿轮固定且波发生器为主动件时，其传动比为

$$\text{若 } Z_E > Z_O, \text{ 则 } i_{WH}^{(E)} = \frac{Z_O}{Z_O - Z_E} = -\frac{Z_O}{U} \quad (2-2)$$

式 (2-2) 中的负号表示槽轮与波发生器转向相反；

$$\text{若 } Z_E < Z_O, \text{ 则 } i_{WH}^{(E)} = \frac{Z_O}{Z_O - Z_E} = \frac{Z_O}{U} \quad (2-3)$$

式 (2-3) 表示槽轮与波发生器转向相同。

(2) 当槽轮固定且波发生器为主动件时，其传动比为

$$\text{若 } Z_E > Z_O, \text{ 则 } i_{WE}^{(H)} = \frac{Z_E}{Z_E - Z_O} = \frac{Z_E}{U} \quad (2-4)$$

式 (2-4) 表示槽轮与波发生器转向相同；

$$\text{若 } Z_E < Z_O, \text{ 则 } i_{WE}^{(H)} = \frac{Z_E}{Z_E - Z_O} = -\frac{Z_E}{U} \quad (2-5)$$

式 (2-5) 中的负号表示槽轮与波发生器转向相反。

2.3.2 活齿端面谐波齿轮传动装置的瞬时传动比

活齿端面谐波齿轮传动装置运转的平稳性取决于其瞬时传动比是否恒定，因此，仅仅研究活齿端面谐波齿轮传动装置的宏观传动比是不够的，还应对其瞬时传动比进行研究。

将端面齿轮、活齿、槽轮和波发生器的端面凸轮在半径为 r 的圆柱面上沿周向展开，端面齿轮、活齿、波发生器之间的相对运动示意图如图 2.4 所示。在某个无限短的微小时间段 dt 内，可以认为波发生器端面凸轮的升程曲线为直线，其升角 θ 为定值；端面齿轮与活齿啮合的齿廓曲线也是直线，其齿形半角 α 也为定值。

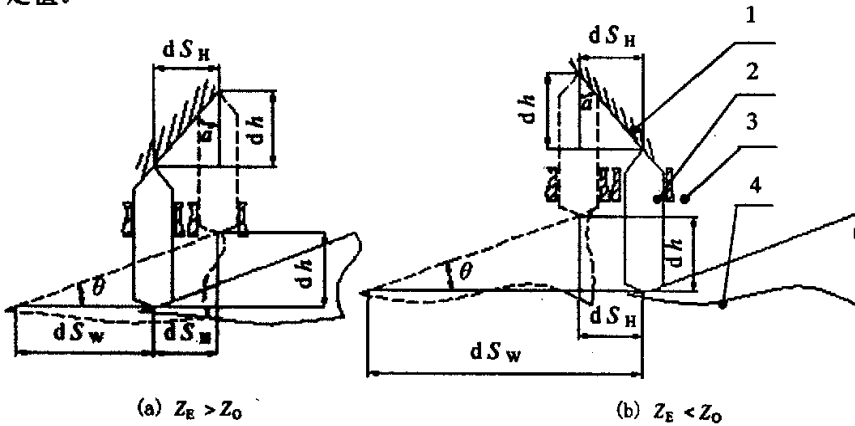


图 2.4 端面齿轮、活齿、波发生器之间相对运动的示意图（端面齿轮固定）

1-端面齿轮 2-活齿 3-槽轮 4-波发生器

图 2.4 (a) 所示是端面齿轮固定、波发生器为主动件，而且端面齿轮的齿数 Z_E 大于活齿的理论总齿数 Z_0 的传动型式。波发生器与槽轮（活齿）的初始位置用实线表示，经过一个微小时间段 dt 后，波发生器与槽轮（活齿）的新位置用虚线表示。在微小时间段 dt 内，波发生器转过了一个微小角度 $d\varphi_w$ ，其绝对切向位移为 $dS_w (= R \cdot d\varphi_w)$ ；波发生器推动活齿的轴向位移为 dh ，活齿带动槽轮在与波发生器相反的方向上相应地转过了一个微小角度 $d\varphi_H$ ，槽轮的绝对切向位移为 $dS_H (= dh \cdot \tan\alpha = R \cdot d\varphi_H)$ ，而由 $dh = (R \cdot d\varphi_w + dh \cdot \tan\alpha) \cdot \tan\theta$ 可得

$$dh = \frac{R \cdot d\varphi_w \tan\theta}{1 - \tan\theta \cdot \tan\alpha} \quad (2-6)$$

于是有

$$d\varphi_H = \frac{d\varphi_w \tan\theta \cdot \tan\alpha}{1 - \tan\theta \cdot \tan\alpha} \quad (2-7)$$

因此, 瞬时传动比为^{[9][10]}

$$i_{wh}^{(e)} = -\frac{d\varphi_w/dt}{d\varphi_H/dt} = -\frac{1 - \tan\theta \cdot \tan\alpha}{\tan\theta \cdot \tan\alpha} = 1 - \frac{1}{\tan\theta \cdot \tan\alpha} \quad (2-8)$$

图 2.4 (b) 所示是端面齿轮固定、波发生器为主动件, 而且端面齿轮的齿数 Z_E 小于活齿的理论总齿数 Z_O 的传动型式。由图可以看出

$$dh = (dS_w - dS_H) \cdot \tan\theta \quad (2-9)$$

$$dS_H = dh \cdot \tan\alpha \quad (2-10)$$

$$\frac{dS_w}{dS_H} = \frac{d\varphi_w}{d\varphi_H} \quad (2-11)$$

由式 (2-9)、式 (2-10)、式 (2-11) 可得出瞬时传动比为

$$i_{wh}^{(e)} = \frac{d\varphi_w/dt}{d\varphi_H/dt} = \frac{1 + \tan\theta \cdot \tan\alpha}{\tan\theta \cdot \tan\alpha} = 1 + \frac{1}{\tan\theta \cdot \tan\alpha} \quad (2-12)$$

图 2.5(a) 所示是槽轮固定、波发生器为主动件, 而且端面齿轮的齿数 Z_E 大于活齿的理论总齿数 Z_O 的传动型式。由图可以看出

$$dh = dS_w \cdot \tan\theta \quad (2-13)$$

$$dS_E = dh \cdot \tan\alpha \quad (2-14)$$

$$\frac{dS_w}{dS_E} = \frac{d\varphi_w}{d\varphi_E} \quad (2-15)$$

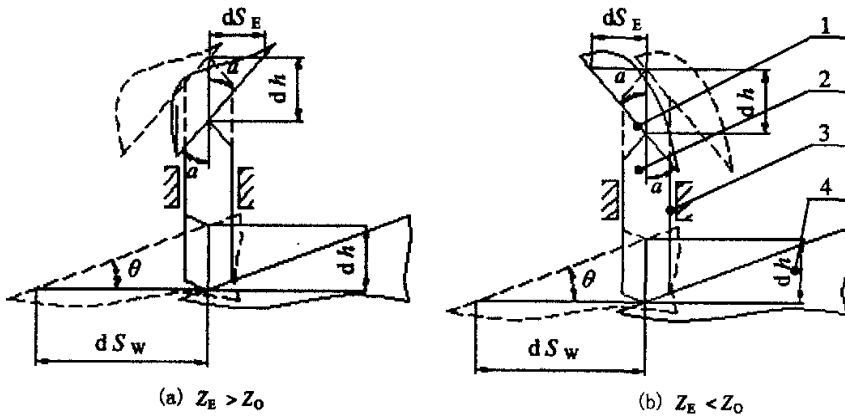


图 2.5 端面齿轮、活齿、波发生器之间相对运动的示意图 (槽轮固定)

1-端面齿轮 2-活齿 3-槽轮 4-波发生器

由式 (2-13)、式 (2-14)、式 (2-15) 可以求得瞬时传动比为

$$i_{we}^{(h)} = \frac{d\varphi_w/dt}{d\varphi_E/dt} = \frac{1}{\tan\theta \cdot \tan\alpha} \quad (2-16)$$

图 2.5(b) 所示是槽轮固定、波发生器为主动件, 而且端面齿轮的齿数 Z_E 小于活齿的理论总齿数 Z_O 的传动型式。同理可以求得瞬时传动比为

$$i_{we}^{(h)} = \frac{d\varphi_w/dt}{d\varphi_E/dt} = \frac{1}{\tan\theta \cdot \tan\alpha} \quad (2-17)$$

由式 (2-8)、式 (2-12)、式 (2-16)、式 (2-17) 可以看出, 活齿端面谐波齿轮传动装置的瞬时传动比 $i_{wh}^{(e)}$ 、 $i_{we}^{(h)}$ 只与波发生器的升角 θ 和端面齿轮与活齿的齿形半角 α 有关。此外, 研究表明, 活齿端面谐波齿轮传动装置的宏观传动比 $i_{wh}^{(E)}$ 、 $i_{we}^{(H)}$ 与瞬时传动比 $i_{wh}^{(e)}$ 、 $i_{we}^{(h)}$ 虽然表达形式不同, 但本质上是一致的^{[9][10]}。

2.3.3 瞬时传动比恒定的条件

由于活齿端面谐波齿轮传动装置的瞬时传动比 $i_{wh}^{(e)}$ 、 $i_{we}^{(h)}$ 与波发生器升角 θ 和端面齿轮与活齿的齿形半角 α 有关, 因此, 要保证活齿端面谐波齿轮传动装置在任一瞬时的瞬时传动比保持恒定, 其条件是使 $\tan\theta \cdot \tan\alpha$ 为一恒定的常值^{[9][10]}, 即

$$\tan\theta \cdot \tan\alpha = C \quad (\text{常数})$$

从理论上讲, 波发生器升角 θ 、端面齿轮和活齿的齿形半角 α 可以是变化的, 只要保证在任一瞬时 $\tan\theta \cdot \tan\alpha$ 为一恒定的常值, 就可以保证瞬时传动比不变, 但在实际工程中, 往往取 θ 和 α 为某一常数, 这样既便于设计, 又便于加工。

2.4 活齿端面谐波齿轮的理论齿面方程

2.4.1 活齿端面谐波齿轮的理论齿面

活齿端面谐波齿轮啮合面的选择和啮合原理的研究, 不仅对于传递动力的特性有很大的影响, 而且对于整个活齿端面谐波齿轮传动的研究都有十分重要的意义。

对于波发生器的齿面来说, 为了设计和加工方便的需要, 并且使活齿在轴向作匀速的往复运动, 在每一个半径为 r 的圆柱面上, 可取 θ 为某一常数 (α 也为某一常数)。因此, 波发生器在圆周方向顺时针转动的角度和其上某点沿着曲线上和下降 (左旋或右旋) 的距离为正比例关系, 这就是通常见到的等距螺旋线。此外, 在不同半径 r 的圆柱面上, θ 为不同的常数, θ 随半径 r 变化的关系为 $\tan\theta = (hU)/(r\pi)$, 那么, 不同半径 r 圆柱面上的等距螺旋线在径向连续排列, 就构成了母线为直线的空间螺旋面。因此, 波发生器的齿面是头数为 U (波

数)的多头螺旋面。每一个头(即每一个波)由左旋和右旋两部分组成。图 2.6 为头数为 2 ($U=2$) 的单面波发生器的齿面示意图。

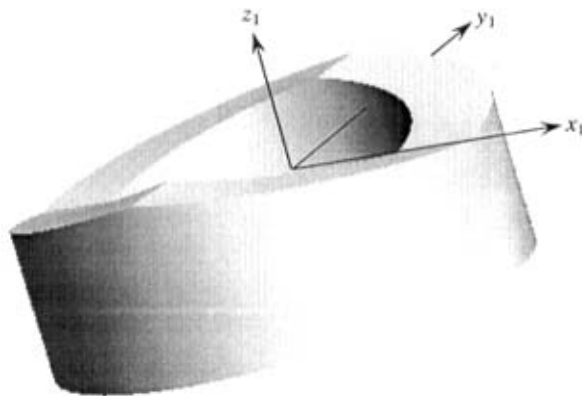


图 2.6 波发生器齿面示意图 ($U=2$)

在波发生器的齿面选择头数为 U 的多头螺旋面的条件下, 为了保证 $\tan \theta \cdot \tan \alpha = C$, 在每一个半径为 r 的圆柱面上, 可取 α 为相应的某一常数;

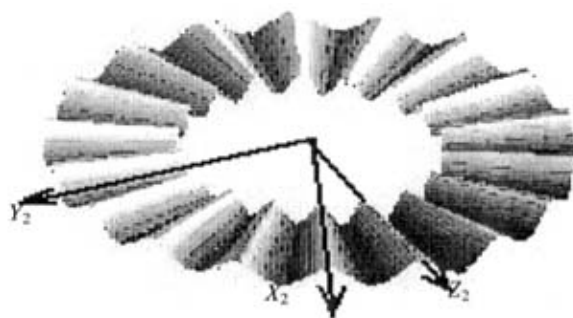


图 2.7 端面齿轮齿面方程示意图 ($Z_E=18$)

而在不同半径 r 的圆柱面上, α 为不同的常数, 如果取 α 随半径 r 变化的关系为 $\tan \theta = hZ_E$, 那么, 端面齿轮的齿面是头数为 Z_E (齿数) 的多头螺旋面, 而且每一个头(即每一个齿)由右旋和左旋的两部分组成。图 2.7 是头数为 18 ($Z_E=18$) 的端面齿轮齿面方程示意图。

由于活齿的前端与端面齿轮相啮合, 活齿的后端与波发生器的齿面相啮合, 因此, 通过包络线的方法, 可以得出活齿的前端与后端啮合部分的齿面同样为多头的螺旋面。

2.4.2 活齿端面谐波齿轮的理论齿面方程

2.4.2.1 波发生器的理论齿面方程

为了研究的方便,建立与波发生器固连的坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 如图 2.6 (波数 $U=2$)所示,并对 x_1 、 y_1 、 z_1 轴的位置和正方向规定如下:

以波发生器的中心线为 z_1 轴,并以从波发生器指向端面齿轮的方向为正方向;以波发生器的某一个齿底所在的直线为 x_1 轴,该直线与 z_1 轴垂直相交,交点即为坐标系的原点, x_1 轴的正方向就是从波发生器的内侧指向外侧;按照数学中对三维坐标系的规定(即符合右手定则)建立 y_1 轴, y_1 轴的正方向也是从波发生器的内侧指向外侧。

波发生器的齿面是头数为 U 的多头螺旋面(特殊的阿基米德螺旋面),而且由右旋和左旋两部分组成。波发生器齿面的右旋螺旋面在 $o_1-x_1y_1z_1$ 坐标系中的方程为^{[10][11]}

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{hU}{\pi} (\varphi_w - 2n\psi_w) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (2-18)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, U-1; \psi_w = \frac{\pi}{U}; 0 \leq \varphi_w - 2n\psi_w \leq \psi_w)$$

式中 r ——波发生器的半径, mm;

R_1 、 R_2 ——波发生器的内、外径(即端面齿轮的内、外径), mm;

φ_w ——波发生器的转角, rad;

ψ_w ——波发生器的啮合半角, 即半个波对应的中心角, rad。

本文定义波发生器的单个波(对于端面齿轮为单个齿)对应的中心角的一半为“啮合半角”,啮合半角是只与波发生器的波数 U (对于端面齿轮为齿数 Z_g)有关的定值,其值为 $\psi_w = \pi/U$ 。

波发生器齿面的左旋螺旋面在 $o_1-x_1y_1z_1$ 坐标系中的方程为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{hU}{\pi} (2n\psi_w - \varphi_w) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (2-19)$$

$$(n = 1, 2, \dots, U; \psi_w = \frac{\pi}{U}; 0 \leq 2n\psi_w - \varphi_w \leq \psi_w)$$

2.4.2.2 端面齿轮的理论齿面方程

同理，建立与端面齿轮固连的坐标系 $o_2 - x_2 y_2 z_2$ 如图 2.7 (齿数 $Z_E = 18$) 所示，并对 x_2 、 y_2 、 z_2 轴的位置和正方向规定如下：

以端面齿轮的中心线为 z_2 轴，并以从波发生器指向端面齿轮的方向为正方向；以某一个活齿齿顶所在的直线为 x_2 轴，该直线与 z_2 轴垂直相交，交点即为坐标系的原点， x_2 轴的正方向是从端面齿轮的内侧指向外侧；按照数学中对三维坐标系的规定（即符合右手定则）建立 y_2 轴， y_2 轴的正方向也是从端面齿轮的内侧指向外侧。

由于端面齿轮的齿面是头数为 Z_E 的多头螺旋面（特殊的阿基米德螺旋面），而且由右旋和左旋两部分组成，因此，可以求出端面齿轮齿面的右旋螺旋面在 $o_2 - x_2 y_2 z_2$ 坐标系中的方程为^{[10][11]}

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_E \\ y_2 = r \sin \varphi_E \\ z_2 = \frac{hZ_E}{\pi} (\varphi_E - 2n\psi_E) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (2-20)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, Z_E - 1; \psi_E = \frac{\pi}{Z_E}; 0 \leq \varphi_E - 2n\psi_E \leq \psi_E)$$

式中 φ_E —— 端面齿轮的转角，rad；

ψ_E —— 端面齿轮的啮合半角， $\psi_E = \pi/Z_E$ ，rad。

同理，还可以求出端面齿轮齿面的左旋螺旋面在 $o_2 - x_2 y_2 z_2$ 坐标系中的方程为

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_E \\ y_2 = r \sin \varphi_E \\ z_2 = \frac{hZ_E}{\pi} (2n\psi_E - \varphi_E) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (2-21)$$

$$(n = 1, 2, \dots, Z_E; \psi_E = \frac{\pi}{Z_E}; 0 \leq 2n\psi_E - \varphi_E \leq \psi_E)$$

2.4.2.3 活齿与波发生器接触的一端（后端）的齿面方程

与建立坐标系 $o_1-x_1y_1z_1$ 的过程相类似，建立与活齿固连的坐标系 $o_3-x_3y_3z_3$ ，并对 x_3 、 y_3 、 z_3 轴的位置和正方向规定如下：以槽轮的中心线为 z_3 轴，并以从波发生器指向端面齿轮的方向为正方向；以某一个活齿后端端部的直线为 x_3 轴（ x_3 轴的起始位置与 x_1 轴的起始位置重合），该直线与 z_3 轴垂直相交，交点即为坐标系的原点；按照数学中对三维坐标系的规定（即符合右手定则）确定 y_3 轴。

在 $o_3-x_3y_3z_3$ 三维坐标系中，通过包络的方法，可以求出活齿与波发生器右旋螺旋面共轭的齿面方程为^[10]

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_0 \\ y_3 = r \sin \varphi_0 \\ z_3 = \frac{hU}{\pi} \varphi_0 \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (0 \leq \varphi_0 \leq \psi_0) \end{cases} \quad (2-22)$$

式中 φ_0 ——活齿的转角，rad；

ψ_0 ——活齿对应中心角度的一半，rad。

同理，也可以求出活齿与波发生器左旋螺旋面共轭的齿面方程为

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_0 \\ y_3 = r \sin \varphi_0 \\ z_3 = \frac{hu}{\pi} (2\psi_0 - \varphi_0) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (\psi_w = \frac{\pi}{u}, 0 \leq 2\psi_0 - \varphi_0 \leq \psi_0) \end{cases} \quad (2-23)$$

2.4.2.4 活齿与端面齿轮接触的一端（前端）的齿面方程

以槽轮的中心线为 z_4 轴，并以从波发生器指向端面齿轮的方向为正方向；以某一个活齿前端的齿顶所在的直线为 x_4 轴（ x_4 轴的起始位置与 x_2 轴的起始位置重合），该直线与 z 轴垂直相交，交点即为坐标系原点，以从内侧指向外侧为正方向；按照数学中对三维坐标系的规定（即符合右手定则）确定 y_4 轴，建立 $o_4-x_4y_4z_4$ 三维坐标系。

在 $o_4-x_4y_4z_4$ 三维坐标系中，通过包络的方法，可以求出活齿与端面齿轮右

旋螺旋面共轭的齿面方程为^[10]

$$\begin{cases} x_4 = r \cos \varphi_0 \\ y_4 = r \sin \varphi_0 \\ z_4 = -\frac{hZ_E}{\pi} \varphi_0 \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (0 \leq \varphi_0 \leq \psi_0) \end{cases} \quad (2-24)$$

同理，也可以求出活齿与端面齿轮左旋螺旋面共轭的齿面方程为

$$\begin{cases} x_4 = r \cos \varphi_0 \\ y_4 = r \sin \varphi_0 \\ z_4 = -\frac{hZ_E}{\pi} (2\psi_0 - \varphi_0) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (0 \leq 2\psi_0 - \varphi_0 \leq \psi_0) \end{cases} \quad (2-25)$$

各个坐标系的转换关系，请参阅附录 2。

3 活齿端面谐波齿轮啮合副齿面的修形

通过对齿轮进行适当修形，可以显著提高齿轮的性能和使用寿命，减小啮合噪声、振动等。齿廓修形和齿向修形是齿轮修形中两种基本的修形方法。但本文所研究的活齿端面谐波齿轮啮合副的理论齿面是一种特殊的螺旋面，不同于传统齿轮的齿面，需要采用其它的修形方法来对这种特殊的螺旋面齿面进行修形。

在活齿端面谐波齿轮传动装置中，按照活齿块上的齿数，活齿端面谐波齿轮传动装置的结构可分为单齿传动和多齿传动。而多齿传动的传动原理与单齿传动完全相同，因此，在本章中以单齿传动为例进行各啮合副理论齿面的修形。

3.1 啮合副齿面修形的必要性

在活齿端面谐波齿轮传动装置（单齿传动）中，如图 3.1 所示，有一个移动副（活齿与槽轮）和两个啮合副：波发生器与活齿后端的啮合副 A，活齿前端与端面齿轮的啮合副 B，这两对啮合副的曲面都称为齿面。为了设计和加工的方便，活齿端面谐波齿轮两个啮合副的理论齿面都采用了母线为直线且与回转中心线垂直相交的多头阿基米德螺旋面，这样就可以保证活齿端面谐波齿轮在传动过程中瞬时传动比不变^[12]。

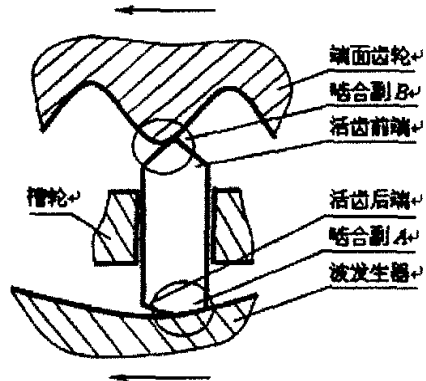


图 3.1 两对啮合副的示意图（槽轮固定）

如第 2 章所述，波发生器右旋螺旋齿面的方程为^{[10][11]}

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{hU}{\pi} (\varphi_w - 2n\psi_w) \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (3-1)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, U-1; \psi_w = \frac{\pi}{U}; 0 \leq \varphi_w - 2n\psi_w \leq \psi_w)$$

而波发生器左旋螺旋齿面的方程为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{hU}{\pi} (2n\psi_w - \varphi_w) \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (3-2)$$

$$(n = 1, 2, \dots, U; \psi_w = \frac{\pi}{U}; 0 \leq 2n\psi_w - \varphi_w \leq \psi_w)$$

在活齿端面谐波齿轮传动装置中，如果波发生器采用式 (3-1)、式 (3-2) 的齿面方程，那么当波发生器为主动件、端面齿轮为从动件、槽轮固定时，活齿在槽轮中作直线往复运动的位移 Z_1 、速度 \dot{Z}_1 和加速度 \ddot{Z}_1 将会按照图 3.2 所示的规律变化。

由图 3.2 可见，活齿运动的位移 Z_1 与波发生器的转角 φ_w 成正比，相应地，其速度为某一个定值（正向或者反向）。活齿在槽轮中沿轴向作匀速的直线往复运动时，在波发生器的齿顶或齿根处，活齿的速度突然反向，必然会产生理论值为无穷大的加速度，使整个活齿端面谐波齿轮传动装置受到强烈的惯性冲击，甚至会破坏整个传动装置的工作。

为了减小活齿作轴向往复运动时的冲击，必须使活齿在改变运动方向时，其速度从一个定值逐渐变化到零，再逐渐变化到反方向的某一定值。为达此目的，就必须对波发生器的齿顶和齿底进行适当的修形，使其齿顶和齿底成为圆滑过渡的齿面。当然，与此相对应，端面齿轮和活齿两端的齿面也必须进行相应的修形。

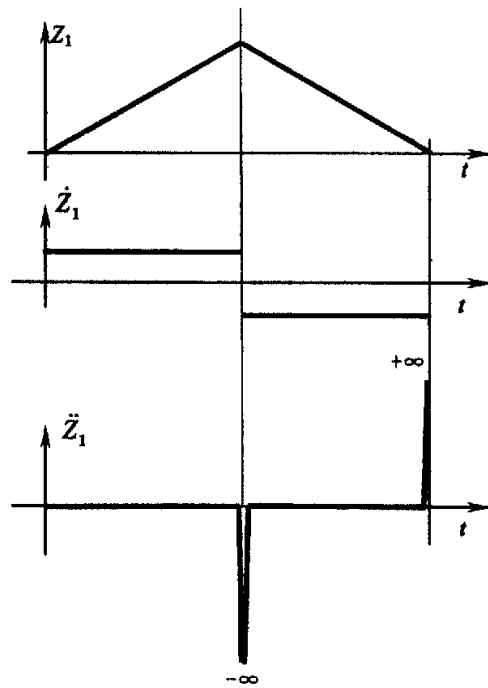


图 3.2 活齿运动的位移、速度和加速度示意图

3.2 波发生器与活齿后端啮合副齿面的修形

3.2.1 波发生器齿顶与活齿后端齿面的修形

将波发生器与活齿后端啮合副 A 的齿面在以波发生器的轴线为中心、半径为 r 的截面（用半径为 r 的圆柱面截啮合副 A 所得）上展开，波发生器齿顶、活齿后端的修形段及相应的坐标系如图 3.3 所示。图 3.3 中的曲线是修形段展开后的过渡曲线， h_1 是活齿后端修形段对应的齿高， h_{w1} 是波发生器齿顶修形段对应的齿高。以展开后的修形起始点（ $-\xi_0$ 处）和修形终止点（ ξ_0 处）的连线为 ξ 轴，以修形起始点和修形终止点之间线段的中点为原点 o ，以平行于波发生器轴线的直线为 z 轴，从齿根到齿顶的方向为正方向。

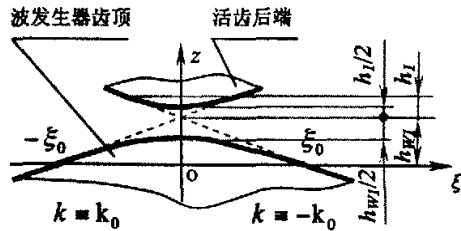


图 3.3 波发生器齿顶与活齿后端修形段的展开示意图

用半径为 r 的圆柱面截啮合副 A 所得的截面展开后均为直线，要使两条相交的直线在相交处圆滑过渡的方法很多，比较常见的方法有圆弧过渡，正、余弦过渡，二次或者高阶次曲线过渡等，本章采用二次曲线过渡的方法。

假定波发生器齿顶处修形段展开后的二次曲线方程为 $z = f(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$ (a 、 b 、 c 为待定系数)，为了使修形齿面与理论齿面光滑过渡连接，在修形起始点（ $-\xi_0$ ）和修形终止点（ ξ_0 ）还必须连续可导，即修形起始点的斜率 k_0 必须等于理论齿面展开后相应的斜率。因此， $z = f(\xi)$ 必须满足以下条件：

$$\begin{cases} f(\xi_0) = 0 \\ f(-\xi_0) = 0 \\ f'(\xi_0) = -k_0 \\ f'(-\xi_0) = k_0 \end{cases} \quad (3-3)$$

$$k_0 = \tan\theta = hU/\pi r \quad (3-4)$$

式中 $-\xi_0$ 、 ξ_0 ——修形起始点和修形终止点在坐标系中对应的坐标；

k_0 ——修形起始点所对应的斜率；

a 、 b 、 c ——过渡曲线中的待定系数。

将式 (3-3) 展开, 得

$$\begin{cases} a\xi_0^2 + b\xi_0 + c = 0 \\ a\xi_0^2 - b\xi_0 + c = 0 \\ 2a\xi_0 + b = -k_0 \\ -2a\xi_0 + b = k_0 \end{cases} \quad (3-5)$$

由式 (3-5) 可求得

$$\begin{cases} a = -\frac{k_0}{2\xi_0} \\ b = 0 \\ c = \frac{k_0\xi_0}{2} \end{cases} \quad (3-6)$$

故波发生器齿顶修形段展开后的方程为

$$z = f(\xi) = -\frac{k_0}{2\xi_0}\xi^2 + \frac{k_0\xi_0}{2} \quad (3-7)$$

ξ_0 与波发生器齿顶修形段的齿高 h_{w1} 有关, 由于等距螺旋线上各点的斜率相等, 将其展开后, 该螺旋线就成为了一条直线, 因此由 $k_0 = \frac{h_{w1}}{\xi_0}$ 可以得出

$$\xi_0 = \frac{h_{w1}}{k_0} \quad (3-8)$$

将式 (3-4)、式 (3-8) 代入式 (3-7) 中, 可得出

$$z = f(\xi) = -\frac{h^2U^2}{2\pi^2h_{w1}r^2}\xi^2 + \frac{h_{w1}}{2} \quad (3-9)$$

对式 (3-9) 进行坐标变换, 由于 $\xi = r \cdot \varphi_{w1}$, 因此, 在半径为 r 的圆柱面上, 二次曲线的方程为

$$z = f_1(\varphi_{w1}) = -\frac{h^2U^2}{2\pi^2h_{w1}} \cdot \varphi_{w1}^2 + \frac{h_{w1}}{2} \quad (3-10)$$

式中 φ_{w1} ——波发生器相对于其齿顶位置的转角, rad。

在不同半径 r 的圆柱面上, 虽然 ξ_0 、 k_0 (即 $\tan \theta$) 不同, 但是, 由于 $z = f_1(\varphi_{w1})$ 具有与半径 r 无关的特性, 因此这些二次曲线可组成一个曲面。在转角相同的情况下, 该曲面在不同半径 r 的圆柱面上, z 方向的高度相等。

活齿的后端也采用二次曲线过渡, 可以求出其二次曲线方程为

$$z = f_2(\varphi_{w1}) = \frac{h^2U^2}{2\pi^2h_1} \cdot \varphi_{w1}^2 + h_{w1} + \frac{h_1}{2} \quad (3-11)$$

波发生器齿顶和活齿后端修形后,也必须保证二者互相接触(如图 3.4 所示),则活齿须沿轴向(z 轴)向下移动 $\frac{h_{w1}}{2} + \frac{h_1}{2}$,此时活齿后端修形段的二次曲线方程为

$$z = f_3(\varphi_{w1}) = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \cdot \varphi_{w1}^2 + h_{w1} + \frac{h_1}{2} - \left(\frac{h_{w1}}{2} + \frac{h_1}{2} \right) = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \cdot \varphi_{w1}^2 + \frac{h_{w1}}{2} \quad (3-12)$$

图 3.5 所示是槽轮固定,活齿可以沿轴向(z 轴)移动,波发生器为主动件,经过一个微小时间段 Δt 后,波发生器转过了一个微小角度 $\Delta\varphi_{w1}$,其绝对切向位移为 $\Delta\xi(-r \cdot \Delta\varphi_{w1})$,即在 $\xi-o-z$ 坐标系下波发生器齿顶向左移动 $\Delta\xi$,波发生器齿顶推动活齿后端的轴向位移为 Δz_{w1} 。则此时波发生器齿顶修形段的二次曲线方程为

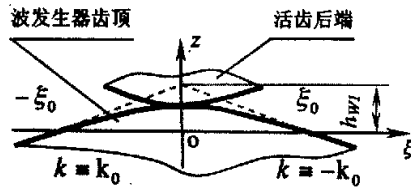


图 3.4 波发生器齿顶与活齿后端修形后互相接触的示意图

$$z = f_4(\varphi_{w1}) = -\frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w1}} (\varphi_{w1} + \Delta\varphi_{w1})^2 + \frac{h_{w1}}{2} \quad (3-13)$$

此时活齿后端修形段的二次曲线方程为

$$z = f_5(\varphi_{w1}) = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \varphi_{w1}^2 + \frac{h_{w1}}{2} - \Delta z_{w1} \quad (3-14)$$

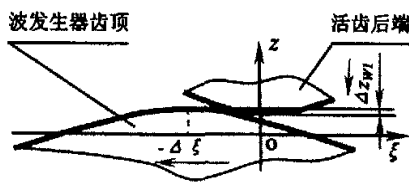


图 3.5 波发生器齿顶与活齿后端之间相对运动的示意图

假设此时这两条二次曲线的切点为 (ξ_w, z_w) ,切点处所对应的斜率为 k_w ,则切点应满足以下条件:

$$\begin{cases} z_w = f_4(\varphi_{w1}) = -\frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w1}} (\varphi_{w1} + \Delta\varphi_{w1})^2 + \frac{h_{w1}}{2} \\ z_w = f_5(\varphi_{w1}) = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \varphi_{w1}^2 + \frac{h_{w1}}{2} - \Delta z_{w1} \\ \xi_w = r \cdot \varphi_{w1} \\ k_w = \frac{dz_w}{d\xi_w} = \frac{df_4(\varphi_{w1})/d\varphi_{w1}}{d\xi_w/d\varphi_{w1}} = \frac{df_5(\varphi_{w1})/d\varphi_{w1}}{d\xi_w/d\varphi_{w1}} \end{cases} \quad (3-15)$$

由式 (3-15) 可求得

$$\begin{cases} \varphi_{w1} = -\frac{h_1}{h_{w1} + h_1} \cdot \Delta\varphi_{w1} \\ z_w = -\frac{h^2 U^2 h_{w1}}{2\pi^2 (h_{w1} + h_1)^2} \cdot \Delta\varphi_{w1}^2 + \frac{h_{w1}}{2} \\ \Delta z_{w1} = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 (h_{w1} + h_1)} \cdot \Delta\varphi_{w1}^2 \end{cases} \quad (3-16)$$

由式 (3-15)、式 (3-16) 可求得两条二次曲线的切点为

$$\left(-\frac{h_1 r}{h_{w2} + h_1} \cdot \Delta\varphi_{w2}, -\frac{h^2 U^2 h_{w2}}{2\pi^2 (h_{w2} + h_1)^2} \cdot \Delta\varphi_{w2}^2 + \frac{h_{w2}}{2} \right)$$

由式 (3-16) 可见, 波发生器齿顶推动活齿后端的轴向位移 Δz_{w1} 为

$$\Delta z_{w1} = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 (h_{w1} + h_1)} \cdot \Delta\varphi_{w1}^2 \quad (3-17)$$

3.2.2 波发生器齿底的修形

对展开后的波发生器齿底也采用二次曲线过渡的方法进行修形。坐标系的规

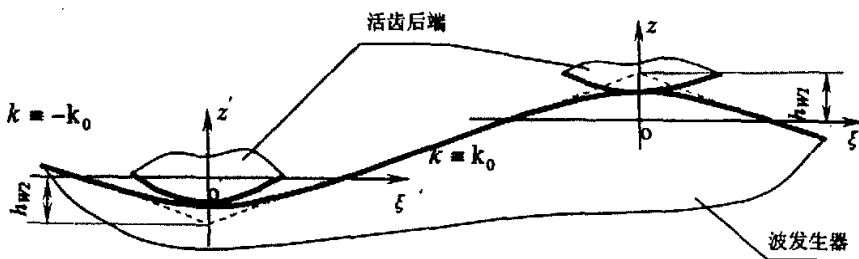


图 3.6 波发生器与活齿后端修形段的展开示意图

定如图 3.6 所示, 在 $\xi' - o' - z'$ 坐标系下可求出波发生器齿底修形段的二次曲线方程为

$$z' = f(\xi) = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w2} r^2} \cdot \xi'^2 - \frac{h_{w2}}{2} \quad (3-18)$$

式中 h_{w2} ——波发生器齿底修形段对应的齿高, mm。

对式 (3-18) 进行坐标变换, 由于 $\xi' = r \cdot \varphi_{w2}$, 因此, 在半径为 r 的圆柱面上, 二次曲线方程为

$$z' = f(\varphi_{w2}) = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w2}} \cdot \varphi_{w2}^2 - \frac{h_{w2}}{2} \quad (3-19)$$

式中 φ_{w2} ——波发生器相对于其齿底位置的转角, rad;

同样也可以求出波发生器齿底推动活齿后端的轴向位移 Δz_{w2} 为

$$\Delta z_{w2} = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 (h_{w2} - h_1)} \cdot \Delta \varphi_{w2}^2 \quad (3-20)$$

波发生器与活齿后端修形后, 活齿运动的位移 z_1 、速度 \dot{z}_1 、加速度 \ddot{z}_1 如图 3.7 所示。由图中可以看出, 活齿作往复直线运动的速度连续逐渐变化, 其速度从一个定值逐渐变化到零, 再逐渐变化到反方向的某一定值, 避免了刚性冲击; 相应地, 加速度也从一定值变化到零, 再变化到反方向的某一定值, 加速度被限制在了一个很小的范围内, 避免了受力过大的情况。

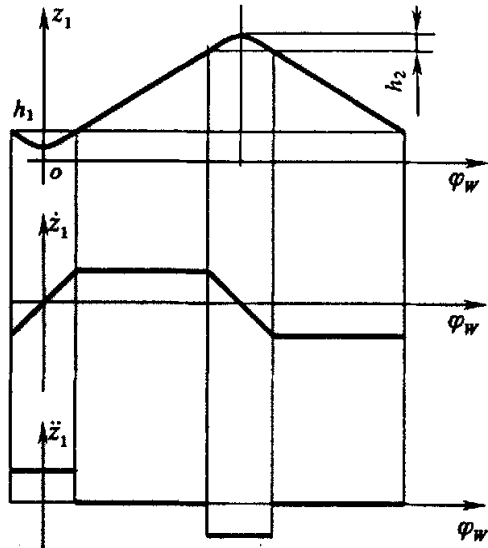


图 3.7 波发生器修形后活齿运动的位移 z_1 、速度 \dot{z}_1 、加速度 \ddot{z}_1 示意图

3.3 端面齿轮与活齿前端啮合副齿面的修形

3.3.1 端面齿轮齿底与活齿前端齿面的修形

将端面齿轮与活齿前端啮合副 B 的齿面在以端面齿轮的轴线为中心、半径

为 r 的截面（用半径为 r 的圆柱面截啮合副 B 所得）上展开，其齿底修形段及相应的坐标系如图 3.8 所示。图 3.8 中的曲线是修形段展开后的过渡曲线， h_2 是活齿前端修形段对应的齿高， h_{E2} 是端面齿轮齿底修形段对应的齿高。以展开后的修形起始点和修形终止点的连线为 ξ 轴，以修形起始点和修形终止点之间线段的中点为原点 o ，以平行于端面齿轮轴线的直线为 z 轴，从齿顶到齿根的方向为正方向。

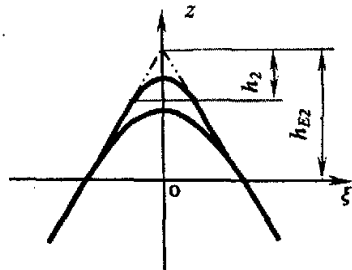


图 3.8 端面齿轮齿底与活齿前端修形段的展开示意图

展开后的端面齿轮齿底也采用二次曲线过渡的方法。按照求波发生器修形段展开后的二次曲线方程相同的方法，可以求出在此坐标系下端面齿轮齿底修形段的二次曲线方程为

$$z = f(\xi) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2} r^2} \cdot \xi^2 + \frac{h_{E2}}{2} \quad (3-21)$$

式中 h_{E2} ——端面齿轮齿底修形段对应的齿高，mm。

对式 (3-21) 进行坐标变换，由于 $\xi = r \cdot \varphi_{E2}$ ，因此，在半径为 r 的圆柱面上，二次曲线方程为

$$z = f_1(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2}} \cdot \varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} \quad (3-22)$$

式中 φ_{E2} ——端面齿轮相对于其齿底位置的转角，rad。

同样地，得出在此坐标系下活齿前端修形段的二次曲线方程为

$$z = f_2(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \cdot \varphi_{E2}^2 + h_{E2} - \frac{h_2}{2} \quad (3-23)$$

式中 h_2 ——活齿前端修形段对应的齿高，mm。

端面齿轮齿底与活齿前端修形后，也必须保证二者相互接触（如图 3.9 所示），此时活齿前端修形段的二次曲线方程为

$$z = f_3(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \cdot \varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} \quad (3-24)$$

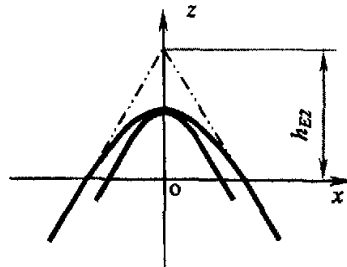


图 3.9 端面齿轮齿底和活齿前端修形后互相接触的示意图

图 3.10 所示是槽轮固定，活齿可以沿

轴向 (z 轴) 移动, 端面齿轮为从动件, 经过一个微小时间段 Δt 后, 端面齿轮转

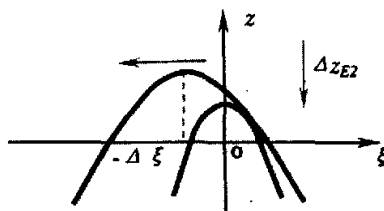


图 3.10 端面齿轮齿底和活齿外端之间相对运动的示意图

过了一个微小角度 $\Delta\varphi_{E2}$, 其绝对切向位移为 $\Delta\xi (= r \cdot \Delta\varphi_{E2})$, 端面齿轮齿底推动活齿前端的轴向位移为 Δz_{E2} 。则此时端面齿轮齿底修形段的二次曲线方程为

$$z = f_4(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2}} (\varphi_{E2} + \Delta\varphi_{E2})^2 + \frac{h_{E2}}{2} \quad (3-25)$$

活齿前端修形段的二次曲线方程为

$$z = f_5(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} - \Delta z_{E2} \quad (3-26)$$

假设此时这两条二次曲线的切点为 (ξ_E, z_E) , 切点处所对应的斜率为 k_E , 则切点应满足以下条件:

$$\begin{cases} z_E = f_4(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2}} (\varphi_{E2} + \Delta\varphi_{E2})^2 + \frac{h_{E2}}{2} \\ z_E = f_5(\varphi_{E2}) = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} - \Delta z_{E2} \\ \xi_E = r \cdot \varphi_{E2} \\ k_E = \frac{dz_E}{d\xi_E} = \frac{df_4(\varphi_{E2})/d\varphi_{E2}}{d\xi_E/d\varphi_{E2}} = \frac{df_5(\varphi_{E2})/d\varphi_{E2}}{d\xi_E/d\varphi_{E2}} \end{cases} \quad (3-27)$$

由式 (3-27) 可求得

$$\begin{cases} \varphi_{E2} = \frac{h_2}{h_{E2} - h_2} \cdot \Delta\varphi_{E2} \\ z_E = -\frac{h^2 Z_E^2 h_{E2}}{2\pi^2 (h_{E2} - h_2)^2} \cdot \Delta\varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} \\ \Delta z_{E2} = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 (h_{E2} - h_2)} \cdot \Delta\varphi_{E2}^2 \end{cases} \quad (3-28)$$

由式 (3-27)、式 (3-28) 可求得两条二次曲线的切点为:

$$\left(\frac{h_2 r}{h_{E2} - h_2} \cdot \Delta\varphi_{E2} - \frac{h^2 Z_E^2 h_{E2}}{2\pi^2 (h_{E2} - h_2)^2} \cdot \Delta\varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} \right)$$

由式 (3-28) 可见, 端面齿轮齿底推动活齿前端的轴向位移 Δz_{E2} 为

$$\Delta z_{E2} = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 (h_{E2} - h_2)} \cdot \Delta\varphi_{E2}^2 \quad (3-29)$$

3.3.2 端面齿轮齿顶的修形

对展开后的端面齿轮的齿顶也采用二次曲线过渡。坐标系的规定如图 3.11

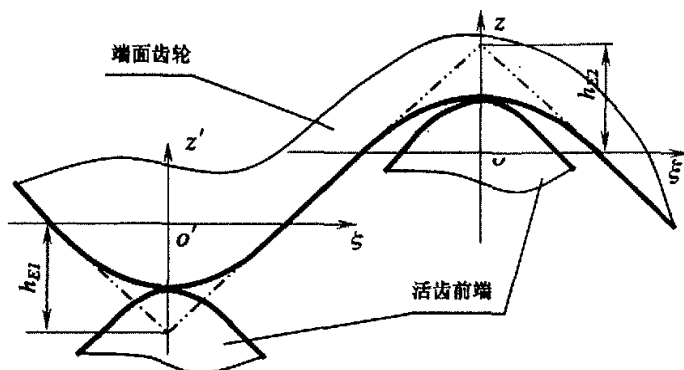


图 3.11 端面齿轮齿面与活齿前端修形展开后的示意图

所示, 在此坐标系 $\xi' - o' - z'$ 下可求出端面齿轮齿顶二次曲线方程为

$$z' = f(\xi) = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E1} r^2} \cdot \xi^2 - \frac{h_{E1}}{2} \quad (3-30)$$

式中 h_{E1} ——端面齿轮齿顶修形段对应的齿高, mm。

对式 (3-30) 进行坐标变换, 由于 $\xi = r \cdot \varphi_{E2}$, 因此, 在半径为 r 的圆柱面上, 二次曲线方程为

$$z' = f(\varphi_{E1}) = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E1}} \cdot \varphi_{E1}^2 - \frac{h_{E1}}{2} \quad (3-31)$$

式中 φ_{E1} ——端面齿轮相对于其齿顶位置的转角, rad。

同样也可以求出端面齿轮齿顶推动活齿前端的轴向位移 Δz_{E1} 为

$$\Delta z_{E1} = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 (h_{E1} + h_2)} \cdot \Delta\varphi_{E1}^2 \quad (3-32)$$

3.4 活齿端面谐波齿轮啮合副齿面修形的原则

在活齿端面谐波齿轮传动装置中,活齿是刚体,不可压缩。为了保证啮合副理论齿面未修形段的啮合状态在修形前后保持不变(即波发生器与端面齿轮在轴向的相对位置不变,如图 3.12 所示),必须保证波发生器齿顶推动活齿后端的轴向位移 Δz_{w1} 与端面齿轮齿底推动活齿前端的轴向位移 Δz_{E2} 相等,即

$$\Delta z_{w1} = \Delta z_{E2} \quad (3-33)$$

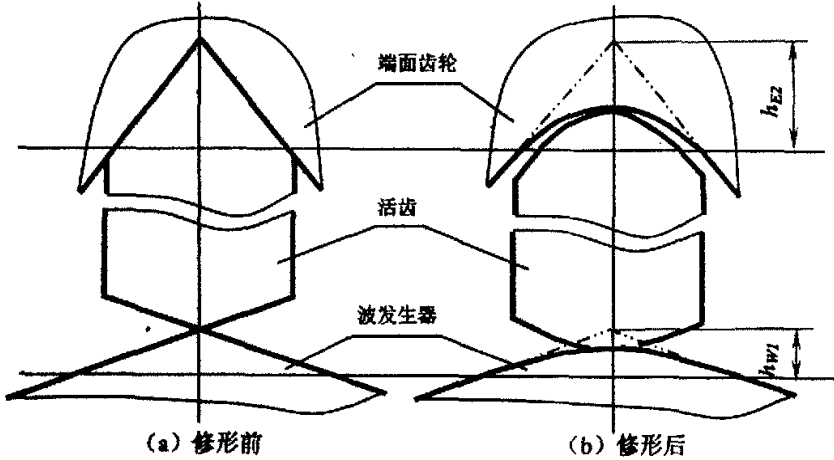


图 3.12 啮合副的轴向相对位置修形前后的对比示意图

$$\text{而} \quad \Delta z_{w1} = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 (h_{w1} + h_1)} \cdot \Delta \varphi_{w1}^2 \quad \Delta z_{E2} = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 (h_{E2} - h_2)} \cdot \Delta \varphi_{E2}^2$$

将 Δz_{w1} 、 Δz_{E2} 值代入式 (3-33) 中,得

$$\frac{U^2}{h_{w1} + h_1} \cdot \Delta \varphi_{w1}^2 = \frac{Z_E^2}{h_{E2} - h_2} \cdot \Delta \varphi_{E2}^2 \quad (3-34)$$

当槽轮固定、波发生器为主动件、端面齿轮为从动件时,其传动比为

$$i_{WE}^H = \frac{Z_E}{U} \quad (3-35)$$

波发生器与活齿后端、活齿前端与端面齿轮正确啮合时,有

$$\Delta \varphi_{w1} = i_{WE}^H \cdot \Delta \varphi_{E2} \quad (3-36)$$

将式 (3-35)、式 (3-36) 代入式 (3-34) 中,得

$$\begin{aligned} h_{w1} + h_1 &= h_{E2} - h_2 \\ \text{即} \quad h_{E2} &= h_{w1} + h_1 + h_2 \end{aligned} \quad (3-37)$$

同理，波发生器齿底推动活齿后端的轴向位移 Δz_{w2} 必须与端面齿轮齿顶推动活齿前端的轴向位移 Δz_{E1} 相等，即

$$\Delta z_{w2} = \Delta z_{E1} \quad (3-38)$$

而

$$\Delta z_{w2} = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 (h_{w2} - h_1)} \cdot \Delta \varphi_{w2}^2 \quad \Delta z_{E1} = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 (h_{E1} + h_2)} \cdot \Delta \varphi_{E1}^2$$

将 Δz_{w2} 、 Δz_{E1} 值代入式 (3-38) 中，得

$$\frac{U^2}{h_{w2} - h_1} \cdot \Delta \varphi_{w2}^2 = \frac{Z_E^2}{h_{E1} + h_2} \cdot \Delta \varphi_{E1}^2 \quad (3-39)$$

波发生器与活齿后端、活齿前端与端面齿轮正确啮合时，有

$$\Delta \varphi_{w2} = i_{wE} \cdot \Delta \varphi_{E1} \quad (3-40)$$

将式 (3-35)、式 (3-40) 代入式 (3-39) 中，可得出

$$h_{w2} - h_1 = h_{E1} + h_2$$

即

$$h_{w2} = h_{E1} + h_1 + h_2 \quad (3-41)$$

对活齿端面谐波齿轮啮合副齿面修形的研究表明：

(1) 采用二次空间曲面对波发生器、端面齿轮和活齿两端的理论齿面进行修形是可行的，这不仅可以减小活齿在作轴向往复运动时的冲击，而且便于设计和制造。

(2) 波发生器、活齿和端面齿轮齿面的修形高度存在着一定的关系，即：波发生器齿底的修形高度是端面齿轮齿顶修形高度，活齿前、后端修形高度的三者之和；端面齿轮齿底修形高度是波发生器齿顶修形高度，活齿前、后端修形高度的三者之和。

3.5 齿面修形段的瞬时传动比

活齿端面谐波齿轮传动装置在任一瞬时的瞬时传动比恒定的条件是使 $\tan \theta \cdot \tan \alpha$ 为一恒定的常值^{[9][10]}，即

$$\tan \theta \cdot \tan \alpha = C \quad (\text{常数})$$

当槽轮固定、波发生器为主动件，端面齿轮为从动件时，瞬时传动比为

$$i_{we}^{(h)} = \frac{d\varphi_w/dt}{d\varphi_E/dt} = \frac{1}{\tan \theta \cdot \tan \alpha}$$

则

$$\tan \theta \cdot \tan \alpha = 1/i_{we}^{(h)} = C$$

而宏观传动比和瞬时传动比是一致的^{[9][10]}, 即

$$i_{wE}^{(h)} = i_{wE}^H = Z_E / U$$

瞬时传动比恒定的条件即是

$$\tan \theta \cdot \tan \alpha = U / Z_E \quad (3-42)$$

由式 (3-15) 可知, 波发生器齿顶和活齿后端修形段的任一位置的斜率为

$$k_w = \frac{df_s(\varphi_{w1})/d\varphi_{w1}}{d\xi_w/d\varphi_{w1}} \quad (3-43)$$

将式 (3-13) 及 $\xi_w = r \cdot \varphi_{w1}$ 代入式 (3-43), 可得

$$k_w = \frac{1}{r} \cdot \frac{h^2 U^2}{\pi^2 h_1} \varphi_{w1}$$

即

$$\tan \theta' = k_w = \frac{1}{r} \cdot \frac{h^2 U^2}{\pi^2 h_1} \varphi_{w1} \quad (3-44)$$

式中 θ' ——波发生器齿面修形段在半径为 r 的圆柱面上展开后的升角, rad.

由式 (3-27) 可知, 端面齿轮齿底和活齿前端修形段的任一位置的斜率为

$$k_E = \frac{df_s(\varphi_{E2})/d\varphi_{E2}}{d\xi_E/d\varphi_{E2}} \quad (3-45)$$

将式 (3-25) 及 $\xi_E = r \cdot \varphi_{E2}$ 代入式 (3-45), 可得

$$k_E = -\frac{1}{r} \cdot \frac{h^2 Z_E^2}{\pi^2 h_2} \varphi_{E2}$$

即

$$\tan(90^\circ - \alpha') = k_E = -\frac{1}{r} \cdot \frac{h^2 Z_E^2}{\pi^2 h_2} \varphi_{E2} \quad (3-46)$$

式中 α' ——端面齿轮齿面修形段在半径为 r 的圆柱面上展开后的齿形半角, rad.

由式 (3-46), 可得

$$\tan \alpha' = \frac{1}{k_E} = -r \cdot \frac{\pi^2 h_2}{h^2 Z_E^2} \cdot \frac{1}{\varphi_{E2}} \quad (3-47)$$

则

$$\tan \theta' \cdot \tan \alpha' = k_w / k_E \quad (3-48)$$

将式 (3-44)、式 (3-47) 代入式 (3-48), 可得

$$\tan \theta' \cdot \tan \alpha' = -\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{U^2}{Z_E^2} \cdot \frac{\varphi_{w1}}{\varphi_{E2}} \quad (3-49)$$

将式 (3-16)、式 (3-28) 代入式 (3-49), 可得

$$\tan \theta' \cdot \tan \alpha' = \frac{h_{E2} - h_2}{h_{w1} + h_1} \cdot \frac{U^2}{Z_E^2} \cdot \frac{\Delta \varphi_{w1}}{\Delta \varphi_{E2}} \quad (3-50)$$

将式 (3-35)、式 (3-36) 和式 (3-37) 代入式 (3-50), 得到

$$\tan \theta' \cdot \tan \alpha' = U/Z_E$$

与式 (3-42) 一致, 说明波发生器齿顶和端面齿轮齿底修形段的瞬时传动比恒定。

同理, 可以验证波发生器齿底和端面齿轮齿顶修形段的瞬时传动比恒定。

4 多齿传动结构中啮合副齿面的修形

在活齿端面谐波齿轮传动装置中，活齿分为若干块，按照活齿上的齿数，活齿端面谐波齿轮传动装置的结构可以分为单齿传动和多齿传动。每块活齿上只有一个轮齿的传动称为单齿传动，而每块活齿上有多个轮齿的传动称为多齿传动。

以上探讨的是单齿传动装置的修形，而多齿传动是应用较广的，所以还必须探讨多齿传动装置的修形。

4.1 多齿传动

多齿传动的端面齿轮、活齿、槽轮和波发生器的周向展开图如图 4.1 所示。这种传动型式同时啮合的齿数多，槽轮的结构设计也比较容易。

为了保证活齿端面谐波齿轮传动装置正常运行，活齿和端面齿轮的轮齿必须排列在同一个半径的圆柱上。由于 $Z_E < Z_O$ ，即 $d_O < d_E$ ，因此，活齿之间必然会产生干涉，如图 4.1 所示。在图 4.1 中， $Z_E=15$ ， $Z_O=16$ ， $N=4$ ， $Z_A=4$ ， $Z_V=0$ ， $U=1$ ， $Z_E < Z_O$ ，活齿之间产生了干涉。

为了解决活齿之间产生干涉的问题，在多齿传动的结构中，可以采用在活齿块上空缺一个轮齿（即 $Z_V=1$ ）的方法。这样，图 4.1 所示的多齿传动结构就变为如图 4.2 所示， $Z_E=15$ ， $Z_O=16$ ， $N=4$ ， $Z_A=3$ ， $Z_V=1$ ， $U=1$ ，虽然 $Z_E < Z_O$ ，但活齿之间不会产生干涉。

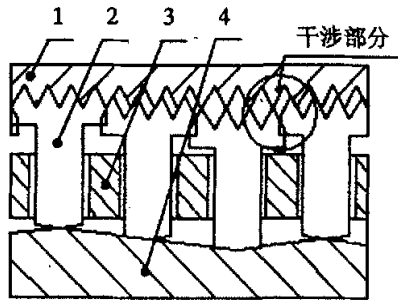


图 4.1 活齿端面谐波齿轮传动的周向展开图
($Z_E < Z_O$ ， $Z_A=4$ ， $Z_V=0$ ，活齿之间产生干涉)

1—端面齿轮 2—活齿 3—槽轮 4—波发生器

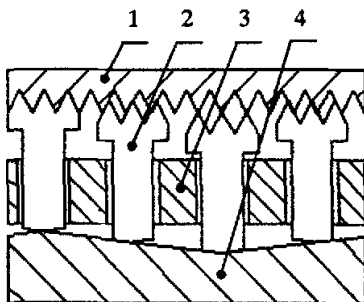


图 4.2 活齿端面谐波齿轮传动的周向展开图

($Z_E < Z_O$, $Z_A=3$, $Z_V=1$, 活齿之间不产生干涉)

1-端面齿轮 2-活齿 3-槽轮 4-波发生器

采用在活齿块上空缺一个轮齿(即 $Z_V=1$)的方法, 虽然可以解决活齿之间产生干涉的问题, 但由于参与啮合的齿数减少, 即啮合总面积减小, 这并不是设计所希望看到的。通过分析发现, 在满足传动条件 $Z_E-Z_O=\pm U$ 、 $Z_E < Z_O$ 时, 活齿发生干涉的原因是在同一半径的圆柱上, 不能排下所有的活齿块(如图 4.1)。为了避免产生干涉, 可以在圆周方向上削掉每个活齿块的一小部分(而不是空缺一个齿), 使所有的活齿块都能够排下, 从而就可以使活齿端面谐波齿轮传动装置正常运行。

当 $Z_E < Z_O$ 时, 槽轮与波发生器转向相同, 因此在活齿端面谐波齿轮传动装置正常运行时, 活齿始终只有一侧的齿面参与工作啮合, 而另一侧的齿面只参与活齿退出过程的非工作啮合, 受力极小, 因此, 在圆周方向上削掉一小部分

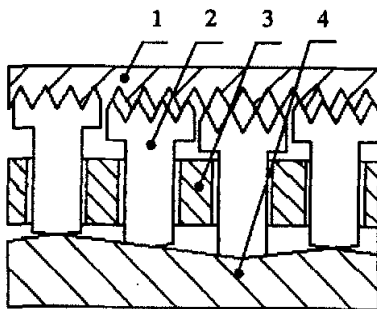


图 4.3 活齿端面谐波齿轮传动的周向展开图

($Z_E < Z_O$, $Z_A=3$, $Z_V=1$, 活齿之间不产生干涉)

1-端面齿轮 2-活齿 3-槽轮 4-波发生器

非工作啮合齿面，不仅仍然能够实现正常传动，而且可以消除活齿的干涉，是一种较好的处理方法。

一般来说，当 $Z_E < Z_O$ 时，在满足传动条件 $Z_O - Z_E = U$ 的要求下，每块活齿体上至少必须在圆周方向上削去 U/N 个齿，才能保证不产生干涉现象，如图 4.3 所示。

4.2 多齿传动的修形

由图 4.1、图 4.2 以及图 4.3 中可以看出，多齿传动的结构与单齿传动的最大的不同之处是在活齿的前端，多齿传动中活齿前端有齿顶和齿底之分，而单齿传动中活齿前端却没有；活齿的后端、波发生器 and 端面齿轮的结构与单齿传动的完全相同。

虽然多齿传动应用较广，但其传动原理与单边传动完全相同，因此，对于多齿传动的修形，除了活齿前端的修形与单齿传动稍有不同外，活齿后端、波发生器和端面齿轮的修形应与单边传动的完全相同。

多齿传动中活齿前端齿顶的修形应与单齿传动中活齿前端的修形相同，活齿前端齿底的修形可以有多种方法，以下仅探讨了三种基本的修形方法。

图 4.4 中，活齿前端齿底没有修形，这也可以保证端面齿轮齿顶不与活齿前端齿底相接触，不会造成惯性冲击，满足修形的要求。但活齿前端齿底不修形，容易在齿底产生应力集中，对整个装置的承载能力产生很大的影响。

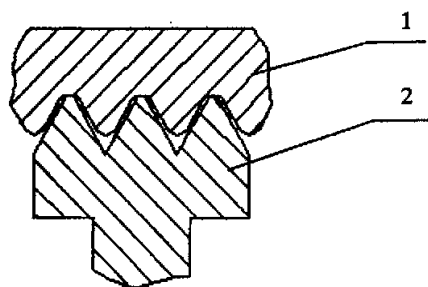


图 4.4 多齿传动中活齿前端齿底的修形方法之一

1—端面齿轮 2—活齿前端

图 4.5 中，活齿前端齿底也可以采用了二次曲线过渡的方法进行修形，为了保证不对装置造成惯性冲击，就必须保证端面齿轮齿顶不与活齿前端齿底相接

触，即活齿前端齿底的修形高度应小于端面齿轮齿顶的修形高度，这样就可以达到修形的目的。

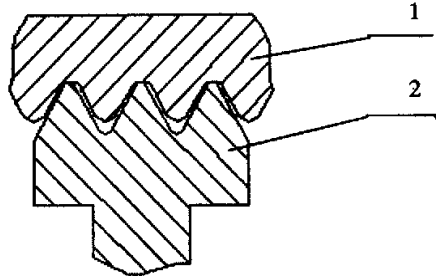


图 4.5 多齿传动中活齿前端齿底的修形方法之二

1—端面齿轮 2—活齿前端

图 4.6 中，活齿前端齿底采用了圆弧过渡的方法进行修形，这样修形的目的是基于整个装置的润滑。在装置的运行过程中，可以在活齿前端的这些小圆弧中注满润滑油或润滑脂，使装置达到润滑的目的。圆弧与活齿非修形段的连接处应该圆滑过渡，这样才能避免应力集中。

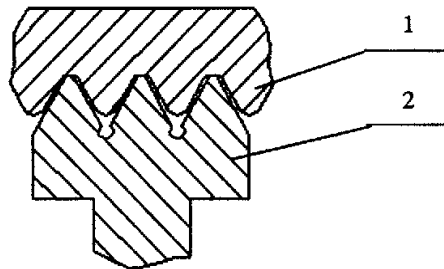


图 4.6 多齿传动中活齿前端齿底的修形方法之三

1—端面齿轮 2—活齿前端

对于多齿传动中的活齿前端的修形，可以根据实际的应用情况，选择合适的修形方式，确定修形的原则是：(1) 整个啮合过程中的负荷变化呈平稳过渡；(2) 适应负荷变动的能力较强；(3) 有较好的工艺性。只要满足上面的修形的原则，保证装置不会受到惯性冲击，适合实际应用的修形方法都是可行的。

5 活齿端面谐波齿轮修形后的齿面方程

5.1 波发生器修形后的齿面方程

波发生器修形后,其齿面方程由以下四部分组成:波发生器齿顶修形段齿面方程,波发生器齿底修形段齿面方程,波发生器未修形段右旋螺旋面方程和波发生器未修形段左旋螺旋面方程。在这四部分齿面中,存在四个连接处。

波发生器齿顶修形段的二次曲线方程为

$$z = -\frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w1}} \cdot \varphi_{w1}^2 + \frac{h_{w1}}{2} \quad (5-1)$$

将其转换到规定的 $o_1-x_1y_1z_1$ 坐标系中,则式(5-1)变为

$$z_1 = -\frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w1}} (\varphi_w - \psi_w - 2n\psi_w)^2 + h - \frac{h_{w1}}{2} \quad (5-2)$$

故波发生器齿顶修形段齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = -\frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w1}} (\varphi_w - \psi_w - 2n\psi_w)^2 + h - \frac{h_{w1}}{2} \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-3)$$

($n = 0, 1, 2, \dots, U-1; h - h_{w1} < z_1 < h - \frac{h_{w1}}{2}$)

同样可以得出波发生器齿底修形段齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_{w2}} (\varphi_w - 2n\psi_w)^2 + \frac{h_{w2}}{2} \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-4)$$

($n = 0, 1, 2, \dots, U-1; \frac{h_{w2}}{2} < z_1 < h_{w2}$)

波发生器未修形段右旋螺旋面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{hU}{\pi} (\varphi_w - 2n\psi_w) \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-5)$$

($n = 0, 1, 2, \dots, U-1; h_{w2} < z_1 < h - h_{w1}$)

波发生器未修形段左旋螺旋面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_w \\ y_1 = r \sin \varphi_w \\ z_1 = \frac{hU}{\pi} (2n\psi_w - \varphi_w) \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-6)$$

($n = 1, 2, \dots, U; h_{w2} < z_1 < h - h_{w1}$)

左旋螺旋面和右旋螺旋面的规定满足右手定则。

波发生器齿面修形后，齿面有四个连接处。其中两个就是 $z_1 = h_{w2}$ 处，即是波发生器齿底修形段分别与其未修形段左、右螺旋面连接处。将 $z_1 = h_{w2}$ 代入式 (5-4) 中，可得

$$\varphi_w = \pm \frac{\pi h_{w2}}{hU} + 2n\psi_w \quad (5-7)$$

将 $z_1 = h_{w2}$ 代入式 (5-5) 中，可得

$$\varphi_w = \frac{\pi h_{w2}}{hU} + 2n\psi_w \quad (5-8)$$

将 $z_1 = h_{w2}$ 代入式 (5-6) 中，可得

$$\varphi_w = -\frac{\pi h_{w2}}{hU} + 2n\psi_w \quad (5-9)$$

由式 (5-7)、式 (5-8) 和式 (5-9) 可以看出， $z_1 = h_{w2}$ 两个连接处是圆滑过渡的，满足其修形的要求。

同理，可以验证 $z_1 = h - h_{w1}$ 两个连接处也是圆滑过渡的。

5.2 活齿修形后的齿面方程

5.2.1 活齿后端修形后的齿面方程

活齿后端（与波发生器接触的一端）修形后，其齿面方程由以下三部分组成：活齿后端修形段齿面方程，活齿后端未修形段与波发生器在上升段的螺旋

面共轭的齿面方程和活齿后端未修形段与波发生器在下降段的螺旋面共轭的齿面方程。在这三部分齿面中，存在两个连接处。

活齿后端修形的二次曲线方程为

$$z = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \cdot \varphi_{w1}^2 + h_{w1} + \frac{h_1}{2} \quad (5-10)$$

将其转换到规定的 $o_3 - x_3 y_3 z_3$ 坐标系中，则式 (5-10) 变为

$$z_3 = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \cdot \varphi_0^2 + \frac{h_1}{2} \quad (5-11)$$

故活齿后端修形段齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_0 \\ y_3 = r \sin \varphi_0 \\ z_3 = \frac{h^2 U^2}{2\pi^2 h_1} \cdot \varphi_0^2 + \frac{h_1}{2} \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (\frac{h_1}{2} \leq z_3 \leq h_1) \end{cases} \quad (5-12)$$

活齿后端未修形段与波发生器在上升段的螺旋面共轭的齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_0 \\ y_3 = r \sin \varphi_0 \\ z_3 = \frac{hU}{\pi} \varphi_0 \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (h_1 \leq z_3 \leq h) \end{cases} \quad (5-13)$$

活齿后端未修形段与波发生器在下降段的螺旋面共轭的齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_0 \\ y_3 = r \sin \varphi_0 \\ z_3 = \frac{hU}{\pi} (2\psi_0 - \varphi_0) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \\ (h_1 \leq z_3 \leq h) \end{cases} \quad (5-14)$$

同样，可以验证 $z_3 = h_1$ 两个连接处是圆滑过渡的。

5.2.2 活齿前端修形后的齿面方程

活齿前端（与端面齿轮接触的一端）修形后，其齿面方程由以下三部分组成：活齿前端修形段齿面方程，活齿前端未修形段与端面齿轮在上升段的螺旋面共轭的齿面方程和活齿前端未修形段与端面齿轮在下降段的螺旋面共轭的齿面方程。在这三部分齿面中，存在两个连接处。

活齿前端修形段的二次曲线方程为

$$z = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \cdot \varphi_{E2}^2 + h_{E2} - \frac{h_2}{2} \quad (5-15)$$

将其转换到规定的 $o_4 - x_4 y_4 z_4$ 坐标系中，则式 (5-15) 变为

$$z_4 = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \cdot \varphi_0^2 - \frac{h_2}{2} \quad (5-16)$$

故活齿前端修形段齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_4 = r \cos \varphi_0 \\ y_4 = r \sin \varphi_0 \\ z_4 = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_2} \cdot \varphi_0^2 - \frac{h_2}{2} \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (5-17)$$

$$\left(-h_2 \leq z_4 \leq -\frac{h_2}{2} \right)$$

活齿前端未修形与端面齿轮在上升段的螺旋面共轭的齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_4 = r \cos \varphi_0 \\ y_4 = r \sin \varphi_0 \\ z_4 = -\frac{h Z_E}{\pi} \varphi_0 \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (5-18)$$

$$\left(-h \leq z_4 \leq -h_2 \right)$$

活齿前端未修形段与端面齿轮在下降段的螺旋面共轭的齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_4 = r \cos \varphi_0 \\ y_4 = r \sin \varphi_0 \\ z_4 = -\frac{h Z_E}{\pi} (2\psi_0 - \varphi_0) \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (5-19)$$

$$\left(-h \leq z_4 \leq -h_2 \right)$$

同样, 可以验证 $z_4 = -h_2$ 两个连接处是圆滑过渡的。

5.3 端面齿轮修形后的齿面方程

端面齿轮修形后, 其齿面方程由以下四部分组成: 端面齿轮齿底修形段齿面方程, 端面齿轮齿顶修形段齿面方程, 端面齿轮未修形段右旋螺旋面方程和端面齿轮未修形段左旋螺旋面方程。在这四部分齿面中, 存在四个连接处。

端面齿轮齿底修形段的二次曲线方程为

$$z = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2}} \cdot \varphi_{E2}^2 + \frac{h_{E2}}{2} \quad (5-20)$$

将其转换到规定的 $o_2 - x_2 y_2 z_2$ 坐标系中, 则式 (5-20) 变为

$$z_2 = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2}} (\varphi_E - \psi_E - 2n\psi_E)^2 + h - \frac{h_{E2}}{2} \quad (5-21)$$

故端面齿轮齿底修形段齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_E \\ y_2 = r \sin \varphi_E \\ z_2 = -\frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E2}} (\varphi_E - \psi_E - 2n\psi_E)^2 + h - \frac{h_{E2}}{2} \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-22)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, Z_E - 1; h - h_{E2} < z_2 < h - \frac{h_{E2}}{2})$$

同样可以得出端面齿轮齿顶修形段齿面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_E \\ y_2 = r \sin \varphi_E \\ z_2 = \frac{h^2 Z_E^2}{2\pi^2 h_{E1}} (\varphi_E - 2n\psi_E)^2 + \frac{h_{E1}}{2} \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-23)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, Z_E - 1; \frac{h_{E1}}{2} < z_2 < h_{E1})$$

端面齿轮未修形段右旋螺旋面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_E \\ y_2 = r \sin \varphi_E \\ z_2 = \frac{hZ_E}{\pi} (\varphi_E - 2n\psi_E) \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-24)$$

($n = 0, 1, 2, \dots, Z_E - 1; h_{E1} < z_2 < h - h_{E2}$)

端面齿轮未修形段左旋螺旋面方程的表达式为

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_E \\ y_2 = r \sin \varphi_E \\ z_2 = \frac{hZ_E}{\pi} (2n\psi_E - \varphi_E) \\ R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (5-25)$$

($n = 1, 2, \dots, Z_E; h_{E1} < z_2 < h - h_{E2}$)

左旋螺旋面和右旋螺旋面的规定满足右手定则。

同样，可以验证 $z_2 = h_{E2}$ 、 $z_2 = h - h_{E2}$ 四个连接处是圆滑过渡的。

各个坐标系之间的转换关系，请参阅附录 2。

6 结论与展望

6.1 结论

本文简要叙述了现有的谐波齿轮传动和活齿传动的原理以及圆柱齿轮修形的理论、方法和工艺,介绍了活齿端面谐波齿轮传动装置的结构、传动原理和传动比,分析了活齿端面谐波齿轮各啮合副的理论齿面方程,并在此基础上进行了啮合副理论齿面修形的研究工作,得到了以下结论:

(1) 在活齿端面谐波齿轮传动的过程中,为了减小啮合副中的活齿作往复直线运动时的惯性冲击,必须对各啮合副的理论齿面进行修形。

(2) 在分析活齿端面谐波齿轮各啮合副运动规律的基础上,提出了用二次空间曲面对各啮合副的理论齿面进行修形的原理和方法,修形齿面与理论齿面圆滑过渡,不仅可以减小活齿在作轴向往复运动时的冲击,而且便于设计和制造;同时满足瞬时传动比恒定的要求。

(3) 研究了活齿端面谐波齿轮各啮合副齿面修形的原则,得出了波发生器、活齿前后端和端面齿轮齿面的修形高度之间必须满足的关系,即:波发生器齿底的修形高度是端面齿轮齿顶修形高度,活齿前、后端修形高度的三者之和;端面齿轮齿底修形高度是波发生器齿顶修形高度,活齿前、后端修形高度的三者之和。

(4) 针对活齿端面谐波齿轮传动装置中应用的多齿传动结构,探讨了活齿前端齿底的修形问题,提出了几种可供选择的实施方案。

(5) 推导了活齿端面谐波齿轮各啮合副经过齿面修形后主要传动部件——波发生器、活齿前后端以及端面齿轮的齿面方程。

此外,对进一步研究活齿端面谐波齿轮啮合副的主要课题进行了讨论和展望。关于活齿端面谐波齿轮啮合副的齿面方程及其修形的理论研究,奠定了活齿端面谐波齿轮减速器设计的理论基础,为这种新型传动装置的推广应用铺平了道路。

6.2 研究展望

由于时间有限,本论文只研究了关于活齿端面谐波齿轮传动装置啮合副齿面的修形。按照研究的思路,后续的研究课题主要有:

(1) 活齿端面谐波齿轮传动装置中两啮合副齿面的修形高度虽存在一定的关系,但是6个修形高度的取值却不能通过两个方程解出来,只有定出其中的4个修形高度的值,其余2个才能求出来。在定其中4个修形高度值的时候,就要综合考虑各方面的因素。波发生器的升程(即活齿齿高) h 越小、波发生器齿底修形高度 h_{w2} 和齿顶修形高度 h_{w1} 越大,加速度越小;但同时啮合副的啮合总面积减小,会降低啮合副的承载能力。因此,应当着重考虑这两方面的因素,选择合适的修形高度。

(2) 齿面修形的方法很多,本文只讨论了用特殊螺旋面过渡的方法对各啮合副齿面进行修形,也可以研究采用其它的空间曲面对各啮合副理论齿面进行修形的原理和方法,并推导出各啮合副理论齿面修形后的齿面方程。

(3) 本论文讨论的多头阿基米德螺旋面只是许多可以实现活齿端面谐波齿轮传动的曲面的一种,而且是非常特殊的一种。如果其它的曲面,也能满足啮合原理和瞬时传动比恒定的要求,而且工艺上容易实现,都可以作为活齿端面谐波齿轮传动装置的理论齿面来研究。

(4) 本文所讨论的情形为波发生器和端面齿轮为对称分布的情况。对于波发生器和端面齿轮不对称分布的情况,尚未做出详细的分析。理论上,由于波发生器只有上升段做功,下降段是活齿的返回段,不做功。因此,可以尽量使得上升段变长,同时减小下降段所占的圆周长,这个就是通常机械上常用的“慢进快出”的方法。对于对称的活齿端面谐波齿轮传动装置,存在速度突变的问题,为了解决这个问题,本文采用了修形的方法,同样,在非对称的活齿端面谐波齿轮传动装置中,也可以采用修形的方法对速度的突变问题进行修正。修形的方法可以参照对称的活齿端面谐波齿轮的研究思路,修形后的齿面方程也可以使用本文类似的方法求出。

(5) 活齿端面谐波齿轮传动装置每个活齿(块)均等分放置在槽轮的孔中,槽轮分度的精度对啮合性能的影响很大,因此,对槽轮分度误差的影响必须作详细的分析计算。活齿端面谐波齿轮啮合副齿面的加工和装配时的误差以及其它误差对啮合性能、运动平稳以及承载能力的影响也很大,所以,对这些方面的误差也必须作详细的分析计算。

(6) 由于活齿端面谐波齿轮传动装置啮合副齿面是一种特殊的螺旋面,若采用传统的机加工方法,加工精度难以得到保证,可以研究用电火花线切割机配合数控回转工作台来加工。

参考文献

- [1] [苏]伊万诺夫. 谐波齿轮传动. 北京:国防工业出版社, 1987:51-80
- [2] 沈允文, 叶庆泰. 谐波齿轮传动的理论和设计. 北京:机械工业出版社, 1985:31-60
- [3] 北京谐波传动技术研究所. 北京谐波传动技术研究所向您介绍谐波传动技术. 机械设计与制造, 1996, 02:53-53
- [4] 吴序堂. 齿轮啮合原理. 北京:机械工业出版社 1982. 1
- [5] 曲继方. 活齿传动理论. 北京:机械工业出版社, 1993
- [6] 刘文波. 散齿端面谐波齿轮传动的研究: [硕士学位论文]. 武汉:武汉理工大学机电学院, 2003
- [7] 张佑林, 李峰等. 散齿端面谐波齿轮传动比的研究. 机械工程学会年会论文集, 北京:机械工业出版社. 2003. 12:P75
- [8] 张佑林, 李峰等. 活齿端面谐波齿轮传动原理的研究. 武汉理工大学学报, 2004. 6
- [9] 张佑林, 李峰等. 活齿端面谐波齿轮瞬时传动比的理论研究. 机械设计, 2005, 22(2): 39~41
- [10] 李峰. 活齿端面谐波齿轮啮合原理的研究: [硕士学位论文]. 武汉:武汉理工大学机电学院, 2004
- [11] 张佑林, 李峰. 活齿端面谐波齿轮啮合原理的研究. 机械设计与研究, 2005, 22(6): 58~60
- [12] 张佑林, 张海平等. 活齿端面谐波齿轮啮合副齿面修形的研究. 机械设计, 2005
- [13] 詹东安等. 高速齿轮齿部修形技术研究. 机械设计, 2000(8)
- [14] 杨廷力, 叶新等. 渐开线高速齿轮的齿高修形. 齿轮, 1982. 6(3): 14~24
- [15] 王朝晋, 丁玉成. 关于齿廓修形的研究. 齿轮, 1987(11): 4~11
- [16] 仙波正庄. 高强度齿轮设计. 任宏达等译. 北京:机械工业出版社, 1981: 105~205
- [17] 薛家国等. 具有误差齿轮的弹性啮合特性及修形. 齿轮, 1986(10)
- [18] 孙宁. 渐开线圆柱齿轮啮合参数的动力学优化设计. 第一届全国齿轮动力学学术会议论文集, 1987: 445~454
- [19] 李伟, 刘惟信. 考虑误差的轮齿啮合刚度的计算和降低齿轮动载荷的优化设计. 齿轮, 1987(3)
- [20] 王晓晨. 齿轮动态性能的结构参数与齿形的优化研究. 机械科学与技术, 1998(9)
- [21] 宋乐民著. 齿轮修形与齿轮强度. 北京:国防工业出版社, 1987

- [22] 陶燕光等. 高速齿轮热变形修形的试验研究. 齿轮, 1998. 12(2): 25~28
- [23] 张书生, 朱传敏等. 齿轮传动动态性能的优化设计—最优修形曲线的确定. 中国机械工程, 1999(3)
- [24] 刘辉等. 传动装置的齿轮三维修形设计法. 机械设计, 1999(1)
- [25] 方宗德, 张永才等. 斜齿轮齿廓修形德试验研究. 齿轮, 1992. 16(4): 27~30
- [26] 会田, 佐藤. 齿车线修正. 见寿山正博士主编. 日本机械学会论文集. 东京: 日本学会, 1986. 34(286): 2237~2239
- [27] 王统, 李伟. 齿轮轴三维综合弹性变形和齿向修形曲线德研究. 上海交通大学学报, 1993. 27(1): 64~71
- [28] 周锦进等. 电解加工“鼓形齿”“修缘齿”齿轮工艺的研究. 辽宁电加工, 1980(1)
- [29] 周锦进, 杨希平. 电化学加工鼓形齿轮新工艺. 电加工, 1983(3)
- [30] 周锦进等. 谐波齿轮电化学修形工艺的研究. 第五届全国电加工学术年会论文集, 1986
- [31] Sigg. N. Tooth Profile Modification of High Speed Duty Gear. Proceedings of International Conference on Gearing., New York:Mc Graw-Hill Co., 1958: 313~316
- [32] Dudley B. W. Handbook of Practical Gear Design. New York: Mc Graw-Hill Co., 1984: 193~235
- [33] Wang Tong . Analysis of Pinion Elastic Deformation and Curves of Axial Modification. Proceeding of the 7th World Congress of IFTOMM, Seville Pergamon Press, 1987: 1063~1066
- [34] F. B. Oawald, D. P. Townsend. Tooth Modification and Spur Gear Tooth Strain. Gear Technology, v13 n5, Sept-Oct, 1996
- [35] Kawalec, Andrzej. Numerical. Modeling and Robust Parametric Estimation of Surface Useful for Representation of Tooth Flanks. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 74, 2000, p571~588
- [36] Umeyama, Mitsuhiro. Effects of Gear Dimensions and Tooth Surface Modifications on the Loaded Transmission Error of Helical Gear Pair. American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication), Dev88 Oct 6-9, 1996, p725~732
- [37] Yoshino, Hidehiro. Studies on 3-D Tooth-surface Modification of Helical Gear (Form Grinding of Gears with Arbitrarily Modified Tooth Traces). Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C v60 n571 Mar 1994 p1053~1058

- [38] Kurokawa, Syuhei. Transmission Errors of Cylindrical Gears Under Load – Influence of Tooth Profile Modification and Tooth Deflection. American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) Dev88 Oct 6-9 1996 p213~217
- [39] C. W. Musser. Strain Wave Gearing. United States Patent 2906, 143, United States Patent Office, 1959
- [40] Le Kexi. CAD of Harmonic Drive with Controlled Backlash. Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition). 1992, 5(3): 6
- [41] Ewins D j. Model Testing. Theory and Practice, Great Britain. Research Studies Press Ltd, 1985
- [42] Volkov D P, Krainev A F. The Investigation and Selection of Parameter for Harmonic Drives with a Disc Wave Generator. 4th World Congress on the Theory of Machines and mechanisms, session 2B, 1975
- [43] Timoshenko S. Theory of Plates and shells. New York: Me Graw Hill, 1959
- [44] Kondo K J. Takada Study on Tooth Profiles of the Harmonic Drive. Transactions of the ASMS. 1990., 112: 137
- [45] Ernest O. Doebelin. Measurement Systems: Application and Design. MCGRAW—HILL, Inc. England, 1976
- [46] Xie Jinrui, Sun Linzhi. Meshing analysis method of harmonic gear drive using symmetric discwave generator. Proc. of the 1 st Inter. Sym. on Design and Synthesis, 1984, Tokyo

致 谢

本论文自始至终都是在导师张佑林教授的悉心指导和深切关怀下完成的。从我入学以来，张老师就在专业研究方向的定位、课题的选择、方案的确定和论文的撰写方面，给予我许多精心的指导，付出了许多心血，传授了许多宝贵的经验，而且对我的生活也给予了无微不至的关怀和帮助，使我能顺利地完成学业。张老师严谨的治学态度，高深的学术造诣，将使我终身受益。在论文即将完成之际，谨向张老师表示我衷心的感谢，同时也向张老师的家人对我的照顾表示最诚挚的谢意！

由衷地感谢各位老师，他们在我学习期间给予我的支持和帮助，使我受益匪浅！还要感谢陈亮、冯四平几位师弟，我们在相互的学习中，加深了友谊，增加了才干。

感谢武汉理工大学给了我一个良好的教育环境和学习氛围，并感谢在我学习期间曾经给予我关心和帮助的各位老师和同学！再次谢谢你们！

此外，我要特别感谢的是我的家人，尤其是我的妻子，在我的求学生涯中，他们给予了我物质和精神上的支持。没有他们多年来的无私奉献，就不会有我的今天。在此，谨将本文献给他们，以表示我的衷心感谢！

张海平

2005年10月

附录 1 攻读硕士学位期间发表的学术论文

张佑林, 张海平等. 活齿端面谐波齿轮啮合副齿面修形的研究. 机械设计, 2005
(将于 2005 年 11 月发表)

附录 2 各坐标系的坐标转换关系

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 + L \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ y_1 = y_3 \\ z_1 = z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_4 \cos \psi_0 - y_4 \sin \psi_0 \\ y_3 = x_4 \sin \psi_0 + y_4 \cos \psi_0 \\ z_3 = z_4 + L \end{cases}$$

附录 3 活齿端面谐波齿轮传动装置的符号对照表

符号	首次出现章节	量纲	符号的含义
A	3.1		波发生器与活齿后端的啮合副
B	3.1		活齿前端与端面齿轮的啮合副
d_g	4.1	mm	端面齿轮两个轮齿之间的距离 (周节)
d_o	4.1	mm	两个活齿之间的距离 (周节)
E	2.1.1		端面齿轮
H	2.1.1		槽轮
h	2.4.1	mm	波发生器的升程

符号	首次出现章节	量纲	符号的含义
h_1	3.2.1	mm	活齿后端修形段对应的齿高
h_2	3.3.1	mm	活齿前端修形段对应的齿高
h_{E1}	3.3.2	mm	端面齿轮齿顶修形段对应的齿高
h_{E2}	3.3.1	mm	端面齿轮齿底修形段对应的齿高
h_{W1}	3.2.1	mm	波发生器齿顶修形段对应的齿高
h_{W2}	3.2.2	mm	波发生器齿底修形段对应的齿高
N	4.1		活齿的块数
O	2.1.1		活齿
R_1	2.4.2	mm	活齿端面谐波齿轮的小端的半径
R_2	2.4.2	mm	活齿端面谐波齿轮的大端的半径
r	2.3.2	mm	展开的圆柱面的半径
U	2.1.1		活齿端面谐波齿轮的波数
W	2.1.1		波发生器
Z_A	2.1.1		单块活齿上抽齿后剩下的齿数, 即实际的齿数
Z_E	2.2		端面齿轮的齿数
Z_O	2.2		活齿的齿数
Z_V	4.1		单块活齿上抽取的齿数
α	2.3.2	rad	端面齿轮的齿形半角
α'	3.5	rad	端面齿轮齿面修形段在半径为 r 的圆柱面上展开后的升角
Δz_{E1}	3.3.2	mm	端面齿轮齿顶推动活齿前端的轴向位移
Δz_{E2}	3.3.1	mm	端面齿轮齿底推动活齿前端的轴向位移
Δz_{W1}	3.2.1	mm	波发生器齿顶推动活齿后端的轴向位移
Δz_{W2}	3.2.2	mm	波发生器齿底推动活齿后端的轴向位移
φ_E	2.4.2	rad	端面齿轮的转角
φ_{E1}	3.3.2	rad	端面齿轮相对于其齿顶位置的转角
φ_{E2}	3.3.1	rad	端面齿轮相对于其齿底位置的转角
φ_O	2.4.2	rad	活齿的转角
φ_W	2.4.2	rad	波发生器的转角
φ_{W1}	3.2.1	rad	波发生器相对于其齿顶位置的转角
φ_{W2}	3.2.2	rad	波发生器相对于其齿底位置的转角
θ	2.3.2	rad	波发生器在半径为 r 上的升角
θ'	3.5	rad	波发生器齿面修形段在半径为 r 的圆柱面上展开后的升角
ψ_E	2.4.2	rad	端面齿轮的啮合半角
ψ_O	2.4.2	rad	活齿的啮合半角
ψ_W	2.4.2	rad	波发生器的啮合半角