

## 摘 要

本论文简要介绍了分形的定义及其发展,以及 Mandelbrot 集(简称 M 集)和 Julia 集(简称 J 集)的概念及两者的区别。利用理论推导和数值模拟相结合的方法研究了混沌控制中的相关问题,取得了如下成果:

首先,对 M 集的内部精细结构的着色机制进行了研究。并将经典的 M 集推广到了实数阶,研究了实数阶 M 集的复动力分形特性,并且绘制了不同阶数的 M 集的图形。

其次,分析了模极值算法、分解算法和 Fisheye 算法,并利用这三种算法构造了一系列 M-J 集,研究了广义 M-J 集的结构特征。结果发现:(1)模极值算法和分解算法均可构造出广义 M-J 集非边界区域的结构;(2)广义 M-J 集的非边界区域具有分形特征;(3)广义 M-J 集具有对称性,且演化过程依赖相角主值范围的选取;(4)利用 Fisheye 算法,既可观察广义 M 集的整体结构,也可给出广义 M 集某处的局部细节。

再次,给出了四元数的运算及三角表示法。由 Lyapunov 指数或逃逸时间与周期点查找结合法,构造了一系列复平面上实数阶的广义 M 集和整数阶的四元数广义 M 集的二维切片;由模极值逃逸时间算法,构造了一系列整数阶四元数广义 M-J 集及整数阶广义 M 集的内部结构,研究了广义 M-J 集的结构特征。研究结果表明:(1)复平面上整数阶的广义 M 集的边界附着着无数按一定规则排列的周期花瓣序列,这种结构在不同水平上嵌套出现,体现了自相似性;(2)四元数广义 M 集及其内部结构是以各周期点的中心为球心的层层嵌套的球体;(3)四元数广义 M 集及其内部结构关于坐标轴对称;(4)在立体空间中,各点的最小模极值的分布是有规律的,它们是以各周期的中心点为球心的同心球体,且按照红色,紫色,深绿,淡绿的顺序循环出现,呈现了一定的周期性。

最后,分别利用单反馈,双反馈和交叉反馈方法研究了一类混沌系统的控制问题,并基于 Lyapunov 直接法和 Routh-Hurwitz 判据讨论了一类混沌系统的混沌轨道达到不稳定平衡点或极限环时的条件,同时给出了理论上的证明。数值模拟进一步验证了这两种方法的有效性。

**关键词:** 模极值; 逃逸时间算法; 四元数; 反馈法; 混沌控制

## Research on Fractal Structures of M-J Sets Using Some New Algorithms

### Abstract

This paper briefly introduces the definition and recently development of fractal, and the definition of Mandelbrot set and Julia set (M-J sets in short) as well as differences between these two sets. The relative problems of chaos control and chaos synchronization are studied in this thesis using the methods of theoretical derivation and numerical simulation. The main achievements contained in the research are as follows:

Firstly, study on the paint methods of internal fine structure of M sets. Moreover we introduce some paint methods of M sets based on time-escaping algorithm and extend the classical M sets to real order number, and study fractal character of complex dynamical system based on real order number M sets. We also paint some images of M sets with different order number.

Secondly, Extreme modulus escaping time algorithm, decomposition algorithm and fisheye algorithm are analyzed in this thesis, and we constructed a series of generalized M-J sets using these three algorithms. By studying the structure character of generalized M-J sets, we found: (1) Extreme modulus escaping time algorithm and decomposition algorithm are simple modification of classic escaping time algorithm; they can both construct the structure of non-boundary area of generalized M-J sets. (2) Non-boundary area of generalized M-J sets has fractal characters. (3) Generalized M-J sets have symmetry, and the process of evolvement depends on range of phase angle. (4) We can observe not only the whole structure of generalized Mandelbrot sets but also the details of some parts by using Fisheye algorithm.

Thirdly, Dynamic feature of complex inverse map and the structure of their periodic stable area are studied in this thesis, and presents operation and trigonometric representation of quaternion. We also constructed a series of generalized M sets with real number order on complex plane and a series of two-dimension section of generalized M sets with integer order based on quaternion. A series of quaternion generalized M-J sets using extreme modulus escaping time algorithm and inner part of generalized M sets with integer order are constructed in this thesis, studied the structure features of quaternion generalized M-J sets with real number order. Then we find: (1) There are countless of ruleless periodicity "petal" series on the border of generalized M sets with integer order on complex plane, and this kind of structure appears nestly on different level, presents the feature of self-similar. (2) M sets and their inner part are nested spheroid with the centre point being centres of periodic points. (3) M sets and their inner part are symmetry about axis. (4) In the stereo-space, the

distribution of the value of extreme modulus for each point is regular, they are nested spheroid with one heart being the centre point of each period, and appears circularly in the order of red, purple, dark green, light green, presents periodicity.

Fourthly, this paper studies the problem of control chaotic behavior of a kind of chaotic system. Two different methods, one feedback, two feed backs and cross-feedback methods are used to control chaos in a kind of chaos system. Based on the Lyapunov direct method and Routh-Hurwitz criteria, the conditions suppressing chaos to unstable equilibrium points or unstable periodic orbits (limit cycles) are discussed, and they are also proved theoretically. Numerical simulations show the effectiveness of the two different methods.

**Key Words:** Extreme Modulus; Escaping Time Algorithm; Quaternion; Feedback Method; Chaos Control

## 独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或者其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：古相卿 日期：2007.12.20

## 大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名： 吉丽娜

导师签名： 王兴元

2007年12月20日

## 引 言

著名数学家 Mandelbrot 根据 Julia 和 Fatou 所开创的“复动力系统理论”的思想, 利用计算机构造并研究了复映射  $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 2)$  的 M-J 集<sup>[2,3]</sup>。20 多年来, 人们对  $\alpha \in \mathbb{R}$  的广义 M-J 集已进行了深入研究, 发现了其中深藏着规律性的结构<sup>[7-17]</sup>。然而在上述研究中广义 M-J 集的内部和外部(即非边界区域)结构却被忽视。而模极值算法<sup>[18]</sup>、角度分解法<sup>[19]</sup>和 Fisheye 算法<sup>[20]</sup>通过改进经典逃逸时间算法, 可以显示出 M-J 集非边界区域的结构特征。利用上述三种方法, 作者研究了广义 M 集的分形结构及演化过程。

其次, 由于上述研究都是在 2-D 复平面上进行的, 为揭示高维复空间中 M-J 集的分形结构, Norton<sup>[21,22]</sup>、Heidrich<sup>[23]</sup>、Lakner<sup>[24]</sup>和 Holbrook<sup>[25]</sup>等先后提出了构造 M-J 集的三元数和四元数算法; Rochon<sup>[26]</sup>利用了一种可交换的广义复数—双复数<sup>[27-29]</sup>, 重新定义了 4-D M 集和 3-D Tetrabrot 集; Kantor 和 Chatelin 等建立了超复数空间<sup>[30,31]</sup>。在上述研究基础上, 本文利用 Lyapunov 指数法、周期点查找法和模极值逃逸时间算法研究了复平面上广义 M 集以及四元数广义 M-J 集的分形特征。

1990 年, Ott、Grebogi 和 Yorke 基于有无穷多的不稳定周期轨道嵌入在奇怪吸引子中这一事实, 提出了一种利用混沌内在特性的控制策略(即 OGY 法)<sup>[32]</sup>。此后, 一些学者对 OGY 策略作了推广并用多种实验证实了其有效性, 从而在物理学界掀起了混沌控制的研究热潮<sup>[33-35]</sup>。现如今, 人们已尝试并提出了基于不同角度的各种混沌控制的方法<sup>[36,37]</sup>。这些混沌控制方法可分为反馈和非反馈两类。反馈方法主要是通过控制混沌系统中的不稳定周期轨道实现混沌控制; 非反馈方法是在控制参数或状态变量上施加一个弱的外部周期扰动, 使得混沌系统转化为周期轨道, 从而达到控制混沌的目的。反馈控制方法有 OGY 法、自适应控制、线性反馈控制、变结构控制、模糊控制等<sup>[38-52]</sup>; 非反馈控制法有弱周期参数扰动法、弱周期脉冲附加法、弱噪声信号附加法等<sup>[53-57]</sup>。需要指出的是: 上述方法并不是对所有混沌系统的控制都有效, 不同的方法有各自的优缺点, 具体情况要具体分析。其它更有效、更方便的控制方法还有待发展。为此, 本文分别利用单反馈, 双反馈和交叉反馈法实现了一类混沌系统的控制, 并给出了理论上的证明, 数值模拟验证了这两种控制方法的有效性。

## 1 分形理论概述

分形集是一类不能用经典几何方法描述的“不规则”集合，它们基本满足分形的经典性质，但是在自相似的程度可以有很大差别。分形几何就是研究所谓“简单”空间上这样一类“复杂”子集的一门新兴数学分支<sup>[1]</sup>。

### 1.1 分形的产生与发展

分形理论的发展大致可分为三个阶段。

(1) 萌芽阶段(1872-1925)：在这阶段，人们已认识到积累典型的分形集，并力图对这类集合与经典的几何的差异进行描述，分类和刻画。在此之前，尽管人们已能区别连续与可微的曲线，但普遍认为连续而不可微的情形是极为例外的，并且在理论研究中应排除这种“另类”，曾经认为一条连续曲线上不可微的点应当是有限的，至少是可数的。1872年，维尔斯特拉斯(Weierstras)举证了一种复杂的连续函数(现称为维尔斯特拉斯函数)在任意一点均不具有有限或无限的导数，这一结果在当今引起了极大的震动。1904年，冯·科赫(Von Koch)用初等方法构造如今被称为冯·科赫曲线的处处不可微连续曲线，并且讨论了该曲线的性质。由于该曲线的构造极为简单，从而改变了人们认为连续不可微曲线的构造一定复杂的看法。特别重要的是，该曲线是第一个人为构造的具有局部于整体相似的结构例子，它被称为自相似结构。1913年，柏瑞(Perrin)对布朗运动进行了深入的研究，明确指出布朗运动作为运动曲线不具有导数。柏瑞指出，自然界的几何是混乱的，不能用通常形式的欧式几何或微积分中的那种完美的序表示出来。他的这些论述在1920年使年轻的维纳(Wiener)受到震动，并促使他随后建立了很多布朗运动的概率模型。为表明自然界混乱极端情形，维纳采用了“混沌”(Chaos)一词。此外像皮亚诺(Peano)、康托尔(Cantor)、闵可夫斯基(Minkowski)、豪斯道夫(Hausdorff)等大数学家在这期间也对分形这一现象进行了大量的探讨，极大地推动了分形理论的研究。

(2) 发展阶段(1926-1975)：在这半个世纪里，人们实际上对分形集的性质作了深入系统的研究，特别是维数理论的研究获得了丰富成果。在这个阶段特别要提到下面两个人的工作：贝西柯维奇(Besicovitch)和列维(Levy)。贝西柯维奇研究了曲线的维数，分形集的局部性质，分形集的结构，S-集的分析 and 几何性质，以及在数论、调用分析、几何测度中的应用，他的研究极大地丰富了分形几何理论。列维则在下面两个方面做出了重要工作：① 他第一个系统地研究了自相似集。② 他建立了分数布朗运动，它是随

机分形理论系统研究的重要先驱。尽管在此阶段在理论研究上取得了重要结果，但是绝大部分还都局限于纯数学理论的研究，而未与其它科学发生联系。

(3) 成熟和应用阶段(1975 至今): 1975 年, 曼德尔布罗特(Mandelbrot)将前人的结果进行了全面总结, 集其大成, 于 1975 年以“分形: 形状、机遇和维数”为名发表了他的划时代专著。在此专著中, 他第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法。此专著的发表标志着分形几何作为一个独立学科的正式诞生, 从而把分形理论推进到一个更为迅猛发展的新阶段。在应用方面, 它在物理的相变理论, 材料的结构控制, 力学中的断裂和破坏, 高分子链的聚合, 模式识别, 自然图像模拟, 酶的生长等领域都取得了令人瞩目的成功。

在医学图像处理领域, 最近十年来, 分形理论也有大量的应用报道。特别是用分形维数来刻画图像纹理已成为很流行的做法。在 Asvestas P A 等人发表的综述《Application of fractal theory on medical data processing》一文中, 详细介绍了分形理论在医学数据处理领域的各个方面的应用。此外, 用分形理论的迭代函数系来重建图像的研究也在国际上很热门。

曾经有人指出: 19 世纪后半期似乎是科学与数学变得更加专门化的时期, 而 20 世纪后半期, 随着非线性动力学和分形理论的日趋完善, 使得上述趋势得以逆转: 两者均被应用到对一系列深层次的交叉学科的研究中。

## 1.2 M 集的概念

### 1.2.1 M 集的定义

当 1980 年 Mandelbrot. B. B. 画出 M 集图像之后, M 集就被认为是数学上最为复杂的集合之一, 并吸引了大批数学家。然而至今在数学上还有很多没有解决的问题。如此复杂的现象出现在如此简明的、经典的迭代之中, 因而它又被称之为“数学恐龙”, 一个简单明了的数学表达式能隐藏惊人的复杂性。今天 M 集已成为分形、混沌最为重要的标志之一。M 集是对二次多项式  $f(z) = z^2 + c$  在参数平面(参数  $c$  所在平面为参数平面)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c; z, c \in \mathbb{C}$$

其实部和虚部分别为

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a,$$

和

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b。$$



M 集是在参数平面上固定一初始点  $z_0 = 0$ ，然后对所有的参数值  $c$  来研究起始点的轨迹。从这个初始点出发经多次迭代后，会有 2 种趋势：(1) 迭代的结果趋向无穷远处，则初始点  $c$  不属于 M 集；(2) 迭代的结果总保持有限，则初始点在 M 集中。M 集图形有非常复杂的结构，同时也具有一些明显的特征，它是由一个主要的心脏形结构与一系列圆盘形的“芽苞”突起连接在一起，每一个芽苞又被更细小的芽苞所环绕，依此类推，然而，这还远不是全部，如将 M 集的边界放大，便会显示出该集无穷数量的微型缩影，而这些微型 M 集中没有一个是与母集完全一样的，它们自己也各不相同。

### 1.2.2 M 集的计算机生成

#### (1) 初始化

假定屏幕或显示窗口的分辨率为  $a \times b$ ，按照  $K+1$  种颜色进行显示，颜色分别为  $0, 1, \dots, K$ 。 $p$  和  $q$  的取值范围分别为  $0.25 < p < 0.75$ ； $0.5 < q < 1.5$ 。迭代步数为 100。迭代步长为：

$$dp = (p_{\max} - p_{\min}) / (a - 1)$$

和

$$dq = (q_{\max} - q_{\min}) / (b - 1),$$

对屏幕上的所有点  $(n_p, n_q)$ ， $n_p = 0, 1, 2, \dots, a-1$ ； $n_q = 0, 1, 2, \dots, b-1$ ，完成以下循环：

#### (2) 循环初始化

令  $p_0 = p_{\min} + n_p \times dp$ ， $q_0 = q_{\min} + n_q \times dq$ ， $k = 0$ ， $x_0 = y_0 = 0$ ；

#### (3) 迭代

$$x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + pj, \quad y_{k+1} = 2x_k y_k + qj, \quad k = k + 1;$$

#### (4) 迭代循环控制

计算模：

$$r = x_k^2 + y_k^2。$$

如果  $r > M$ ，则选择颜色  $k$ ，转第(5)步。

如果  $k = K$ ，则选择颜色 0，转第(5)步。

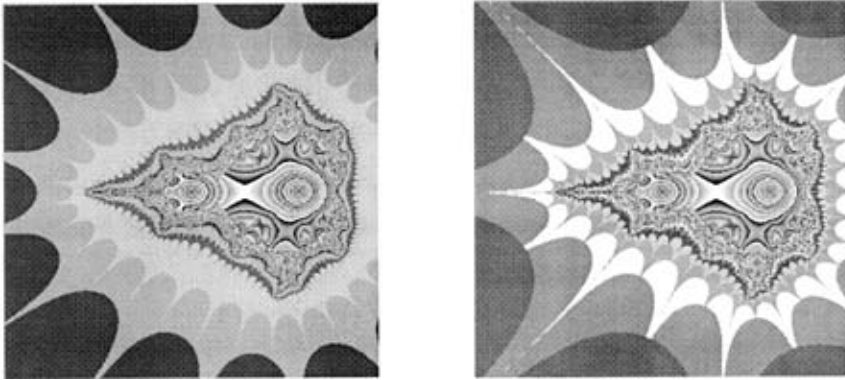
如果  $r < M$ ，并且  $k = K$ ，转第(2)步。

(5) 像素点循环。对点  $(n_p, n_q)$  着颜色  $k$ ，并且选择下一个像素点，转第(2)步。

### 1.2.3 M 集的内部结构

M 集是分形领域最著名的分形图形，在用计算机生成 M 集图形时，传统的算法是将 M 集的外部区域用多层次的色彩加以反映，而对于 M 集的内部区域，一般是用单一颜色来表现，有时甚至大部分被忽略，不予考虑，这样就不能很好地表示 M 集的内部结构。在对 M 集的实际应用中，作者通过对传统算法的改进，可以获得与传统算法生成的图形具有明显不同内部结构的 M 集图形，对于更加准确、艺术地描述出 M 集的内部特征有着十分重要的意义。

图 1.1 是用逃逸时间算法构造的经典 M 集，图 1.1(1) 的逃逸半径为 100，图 1.1(2) 的逃逸半径为 10。



(1) 逃逸半径取  $|\operatorname{Re}(z)| < 100$

(2) 逃逸半径取  $|\operatorname{Im}(z)| < 10$

图 1.1 逃逸时间算法构造的经典 M 集

Fig. 1.1 Classical M sets constructed using escaping time algorithm

### 1.3 J 集的概念

一个集合到其自身映射的迭代构成的动力系统，当对多项式  $f(z) = z^2 + c$  ( $c$  为给定的复数) 进行迭代时，由某一“初始状态”出发，序列  $z_0, z_1, z_2, \dots$  可能消逝于无穷，而且这过程进行得很快，但它们也可能保持有界，即距出发点不超越一个有限的距离。迭代序列保持有界的复数的集合叫做所考察的多项式的充满的 J 集，这种集合记为  $K_p$ ，集合  $K_p$  是复平面上的一个闭子集且有界，人们称这样的集是“紧”的，可以想象，根据  $c$  的值，它的形状具有很大的变化，其无穷的变化复杂形状不仅仅从图形上看是奇妙无比的。由于变量  $z$  和参数  $c$  均填满整个复平面  $\mathbb{C}$ ，为方便起见，对固定参数  $c \in \mathbb{C}$ ,

称  $Z$  平面为动力平面,称参数  $c$  所在的平面叫做参数平面。对参数平面上的每一点,在动力平面上都有一个特殊的图形与之对应。而动力平面可分为轨道有界的种子集  $K_p$  和轨道无界的种子集  $C/K_p = \{z \in \mathbb{C}: f_c^n(z) \mapsto \infty\}$ 。  $K_p$  的图像可以通过逃逸时间算法获得,其边界  $\partial K_p$  称为  $f_c$  的 J 集记为  $J_p$ 。

### 1.3.1 J 集的计算机生成

对于复迭代过程  $Z_{n+1} = Z_n + C$ , 分离出  $Z$  及  $C$  的实部、虚部, 记  $Z = x + iy, C = p + qi$ , 相应地第  $k$  个点  $Z_k$  意味着  $xy$  平面上的点  $(x_k, y_k)$ , 则  $Z_k$  到  $Z_{k+1}$  的迭代过程为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k^2 - y_k^2 + p \\ y_{k+1} &= 2x_k y_k + q \end{aligned}$$

平面图案区域内任一点  $p_k(x_k, y_k)$  的色彩灰度值得确定, 可以把  $x_k, y_k$  作为迭代初值代入上述函数而求得。

设显示器分辨率为  $a \times b$ , 可显示  $N+1$  种不同的色彩灰度值, 分别以  $0, 1, 2, \dots, N$  表示,  $0$  表示黑色, 同时设迭代次数不能超过  $N$  次, 迭代结果  $x_k, y_k$  的模值不能超过  $M$ , 否则迭代结束, 于是算法步骤可表示为:

- (1) 选定  $x_{\min} = y_{\min} = -1.5, x_{\max} = y_{\max} = 1.5$ , 固定参数  $C$  即  $p$  和  $q$  的值令  $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / (a - 1), \Delta y = (y_{\max} - y_{\min}) / (b - 1)$ ;  
对于显示区域内所有点  $(x, y), x = 0, 1, \dots, a - 1$  及  $y = 0, 1, \dots, b - 1$  完成如下循环;
- (2) 令  $x_0 = x_{\min} + x \cdot \Delta x, y_0 = y_{\min} + y \cdot \Delta y, k = 0$ ;
- (3) 有迭代过程式(1)从  $(x_k, y_k)$  中算出  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ , 并计数  $k = k + 1$ ;
- (4) 计算  $r = x_k^2 + y_k^2$ ; 若  $r > M$ , 则选择颜色  $k$ , 转至(5); 若  $k = N$ , 则选择颜色  $0$  或其它某一种特殊颜色, 转至(5); 若  $r \leq M$  且  $k < N$ , 则转至(3);
- (5) 对点  $(x, y)$  显示颜色  $k$  转至(2), 继续下一步的迭代过程。

### 1.3.2 M 集和 J 集的关系

J 集是不动点集, 而对 M 集来说, 它利用同样的迭代模型, 其所选的复平面是模型中的  $\mathbb{C}$  的复平面, 而图形中所有点的状态是当初值  $Z = 0$  时经  $n$  次迭代后  $Z_n$  的表现, 对于上面的话来自于 M 集的计算机模拟算法。

M 集上的每一点只是在  $C$  的复平面上模型  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  以  $Z = 0$  为初始值迭代  $n$  次后  $Z$  的状态, 也就是说 M 集上的每一点  $C = a + bi$  的状态只代表了 J 集中当  $C = a + bi$  时  $Z = 0$  时由模型迭代  $n$  次后的状态。如果  $C = a + bi$  是 M 集中扩散区域中的点, 说明对应于  $C$  点的 J 集  $(0,0)$  点是扩散点; 同理, 如果  $C = a + bi$  是 M 集中吸引区域中的点说明对应于  $C$  点的 J 集  $(0,0)$  点是吸引点; 如果  $C = a + bi$  是 M 集中不动点集中的点, 说明对应于  $C$  点的 J 集  $(0,0)$  点是不动点。

从而可以看出 M 集并非 J 集的字典<sup>[4]</sup>; 而是 J 集中  $(0,0)$  点的状态字典。如果我们在程序中取初始值  $Z$  为任意复数, 则我们可得到 J 集中  $Z$  点的状态字典。反之我们亦可以得到这样的结论: J 集是以  $Z$  为初值的 M 集  $C$  点的状态字典。这一结论可通过 J 集的计算机模拟算法得到。

以二次多项式  $f(z) = z^2 + c$  为例, M 集记录的是整个区域上的  $c$  值情况, 而 J 集是取一固定的  $c$  值后, 观察复平面上每一点  $(x, y)$  在迭代中的表现, 并把结果记录下来。因此对于同一个迭代函数, 有 M 集又有 J 集, 而且这两种集合的确有密切联系。

从某种意义上讲, M 集概括了所有可能的 J 集, 它是无穷数量的 J 集的直观的图解目录表, 或者说 M 集是一本很大的书, 而一个 Julia 集只是其中的一页。根据  $c$  点在 M 集中的位置, 就能预测与之相关的 J 集的外形及大小, 如果  $c$  点在 M 集内, 相应的 J 集就是连通的; 如果  $c$  点选自 M 集之外, 则其 J 集就是不连通的。在 M 集的某个“芽苞”上的某一点, 它对应着一个参数  $c$  的值, 现在我们用一个尽可能大倍数的“放大镜”去显微这一点的尽可能小的邻域, 由于存在着无限细节的性质总可以得到一个分形图形, 于是 M 集中一个最奇异的现象出现了, 这个分形图形与以该点  $c$  为参数值的  $f(z)$  的 J 集极其相似。M 集是一个可以查阅所有 J 集的微缩词典<sup>[3]</sup>, J 集有着自相似的性质, 而 M 集并没有这种性质, 也正因如此, M 集才得以对其无数的“亲戚”——J 集进行“压缩编码”。

## 2 利用三种算法研究广义 M-J 集的分形结构

### 2.1 理论与方法

定义 2.1 设  $f: z \leftarrow z^2 + c(|\alpha| > 1)$  为黎曼球  $\hat{\mathbb{C}}$  上的复映射,  $F_f$  表示  $\mathbb{C}$  中那些轨道不收敛到无穷大点的点  $z$  的集合, 即

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} : \{f^k(z)\}_{k=1}^{\infty} \text{ 是有界的}\},$$

称此集为相应于  $f$  的充满的广义 J 集,  $F_f$  的边界称为复映射  $f$  的广义 J 集, 记为  $J_f$ , 即

$$J_f = \partial F_f.$$

定义 2.2 设  $f: z \leftarrow z^2 + c(\alpha < 0 \text{ 或 } \alpha > 1)$  为黎曼球  $\hat{\mathbb{C}}$  上的复映射,  $M_f$  表示  $\mathbb{C}$  中  $c$  点的轨道有界的复数  $c$  的集合, 即

$$M_f = \{c \in \mathbb{C} : \{f^k(c)\}_{k=1}^{\infty} \text{ 有界}\} = \{c \in \mathbb{C} : c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\},$$

则称  $M_f$  为相应于  $f$  的广义 M 集。

定义 2.1 和 2.2 是计算机绘制  $M_f$  和  $F_f$  图象的逃逸时间算法的理论基础。下面以构造广义 M 集为例介绍上述三种算法, 广义 J 集的与此相似, 故不再赘述。

#### 2.1.1 模极值算法

对于给定的  $c \in M$ , 记  $f_c(z)$  的第  $k$  次迭代为  $f_c^k(z)$ , 定义如下两个函数:

$$\lambda_1(c) = \inf\{|f_c^k| : k = 1, 2, \dots\};$$

如果

$$\lambda_1(c) = |f_c^{j_1}(0)|$$

则

$$j_1(c) = k$$

这里  $\lambda_1(c)$  为最小模,  $j_1(c)$  为最小模指标。

(1) 对于复映射  $f_c(z)$ , 这里  $c = k_1 + k_2 i$ ,  $z = x + yi$ ; 设定视窗  $W$ 、逃逸尺度  $R$  和逃逸时间限制  $N$ 。

- (2) 设定步长为 0.01、 $(x_0, y_0) = 0$  和  $k = 0$ 。
- (3) 计算  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ ,  $k = k + 1$ ; 求  $|\operatorname{Re}(z)|$  或  $|\operatorname{Im}(z)|$  并记录到数组中。
- (4) 若  $k < N$  且  $|\operatorname{Re}(z)| > R$  或  $|\operatorname{Im}(z)| > R$ , 则按照外部着色机制对点  $(x_0, y_0)$  进行着色; 若  $k = N$  且  $|\operatorname{Re}(z)| < R$ , 或  $k = N$  且  $|\operatorname{Im}(z)| < R$ , 则遍历数组, 找出最小模值, 并根据最小模值对点  $(x_0, y_0)$  进行着色。
- (5) 重复步骤(3)和(4), 穷尽视窗  $W$  中的所有点, 即可获得广义 M 集。

### 2.1.2 分解算法

任意一个复数  $z$  都可以用  $re^{i\theta}$  来表示, 这里

$$r = \sqrt{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)}, \quad \theta = \tan^{-1}(\operatorname{Im}(z)/\operatorname{Re}(z)),$$

$r$  是模值,  $\theta$  是相角。若  $z_n$  刚好穿过以原点为圆心半径为  $R$  的圆, 则此时  $|z_n| = r_n \approx R$ 。故可把注意力集中在讨论相角  $\theta_n$  的值上。将复平面上的点  $z_n$  按照其相角等分成 256 份, 即

$$2\pi(l-1)/256 \leq \theta_n < 2\pi l/256 (l=1, 2, \dots, 256);$$

然后给每一个  $l$  值分配一种颜色。所以复平面上的每一点  $z_n$ , 按照它的  $\theta_n$  的值就对应了一个  $l$  的值, 也就分配了一种颜色。如此, 复平面上点  $z_0$  经过迭代计算后, 同样可以依据它对应的相角  $\theta_n$  的值分配到一个  $l$  的值。于是, 复平面区域上的每个点  $z_0$  根据其  $l$  值的不同就被分配了不同的颜色。

### 2.1.3 Fisheye 算法

描述广义 M 集的结构特征, 既要观察它的整体结构, 又要讨论其中的细微之处。我们可利用不同的放大倍数, 来观察其整体的效果或某处我们所关心的细节。利用 Fisheye 技术, 对于一块很大的区域, 只要确定了其中心的放大倍数, 就可将其压缩成一个很小的图像数据。Fisheye 算法的具体步骤为:

- (1) 确定图像中心, 视窗  $W$ , 中心与边缘的图像比率, 图像中心放大率, 图像中心步长。
- (2) 对于  $W$  中的每一点, 利用逃逸时间算法求出  $z = x + yi$  中的  $x$  和  $y$ 。
- (3) 利用逃逸时间算法, 根据逃逸时间函数值对  $W$  中的每个点进行着色。
- (4) 重复步骤(2)和(3), 穷尽视窗  $W$  中的所有点, 即可获得广义 M 集。

## 2.2 实验与结果

### 2.2.1 模极值算法所构造的广义 M-J 集

图 2.1-图 2.4 为由模极值算法所构造的广义 M-J 集(广义 J 集对应的复常数  $c = 0.01+0.7i$ )。其中, 图 2.1 和图 2.3 中某点的实部大于 100 则视为逃逸, 反之为稳定; 图 2.2 和图 2.4 中某点的虚部大于 10 则视为逃逸, 反之为稳定。将  $\alpha$  表示为  $\alpha = \pm(\eta + \gamma)$ , 其中  $\eta$  是正整数,  $\gamma$  为小数即  $0 < \gamma < 1$ 。观察图 2.1 和图 2.2 可见,  $\alpha = \pm\eta$  时的广义 M 集类似  $|\pm\eta - 1|$  个主瓣组成的花朵;  $\alpha = \pm(\eta + \gamma)$  时的广义 M 集类似  $|\pm\eta - 1|$  个主瓣及一雏瓣组成的花朵, 并随  $\gamma$  的增大, 雏瓣不断发育而演化成为一个主瓣。

**定理 2.1** 由模极值算法所构造的复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的广义 M 集, 有

$$|f^k(c)| = \left| f^k \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right| (k = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, \dots, (|\alpha| - 1))。$$

证明: 利用数学归纳法:

$$\because f \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) = \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right)^\alpha + ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} = e^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \left( c^\alpha e^{i(2\pi j)} + c \right) = e^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} (c^\alpha + c),$$

又

$$\because f(c) = c^\alpha + c \quad \therefore |f(c)| = \left| f \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right|,$$

故可设  $|f^k(c)| = \left| f^k \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right|$  成立, 因

$$f^{k+1} \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) = f^k \left[ f \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right] = f^k \left[ e^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} (c^\alpha + c) \right],$$

令  $f(c) = c^\alpha + c = c'$ , 则  $f^{k+1} \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) = f^k \left( c' e^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right)$ 。而  $f^{k+1}(c) = f^k[f(c)] = f^k(c')$ , 又因为

$$|f^k(c')| = \left| f^k \left( c' e^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right|, \quad \text{有} \quad |f^{k+1}(c)| = \left| f^{k+1} \left( ce^{\frac{i2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right|,$$

故命题真。该定理说明  $\alpha = \pm\eta$  的广义 M 集的中心为原点, 且具有  $|\alpha - 1|$  倍的旋转对称性 (图 2.1(1)-2.1(4) 和图 2.2(1)-2.2(4))。

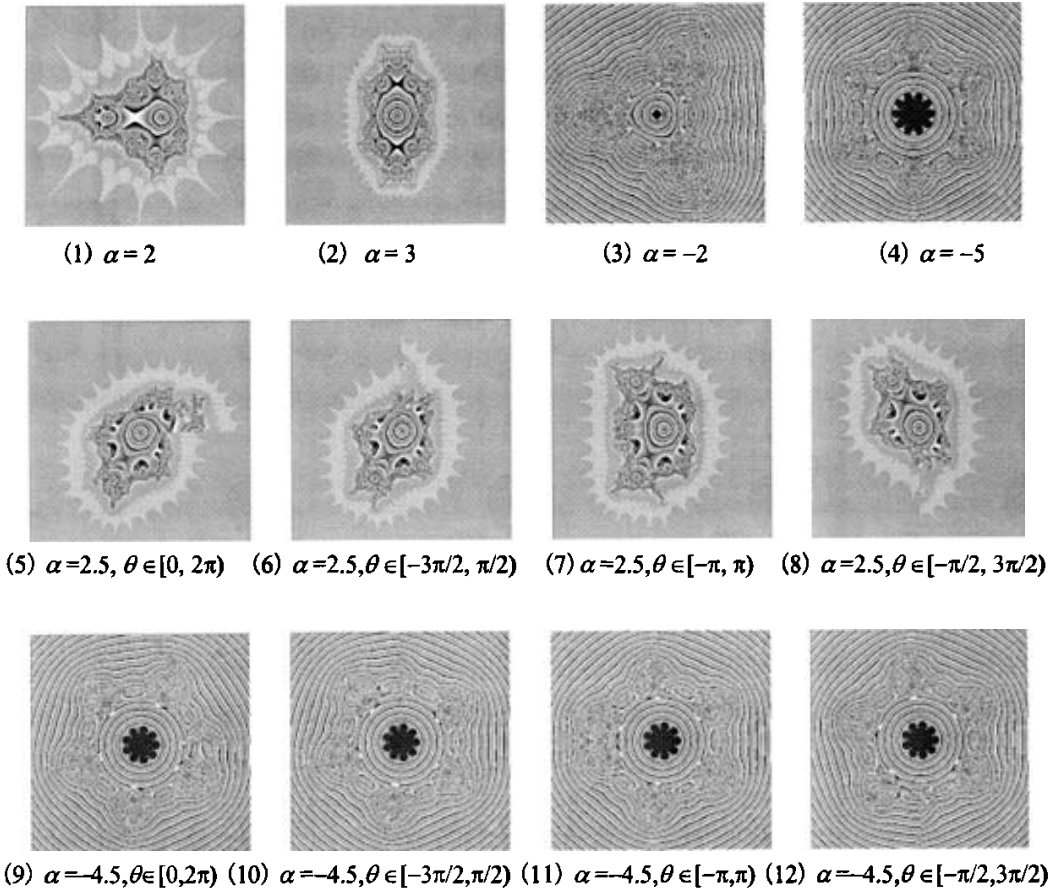


图 2.1 模极值算法所构造的广义 M 集

Fig. 2.1 Generalized M sets constructed using extreme modulus algorithm

定理 2.2 由模极值算法所构造的复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha < 0$  或  $\alpha > 1$ ) 的广义 M 集, 当选取相角  $\theta \in [-\pi, \pi)$  时, 有

$$f^k(c) = \overline{f^k(\bar{c})} (k=1, 2, \dots, N).$$

证明: 利用数学归纳法: 设  $c = |c|e^{i\theta}$ , 则  $\bar{c} = |c|e^{-i\theta}$ .

$$\because f(c) = c^\alpha + c = |c|^\alpha e^{i\alpha\theta} + |c|e^{i\theta}, \quad f(\bar{c}) = \bar{c}^\alpha + \bar{c} = |c|^\alpha e^{-i\alpha\theta} + |c|e^{-i\theta},$$

故

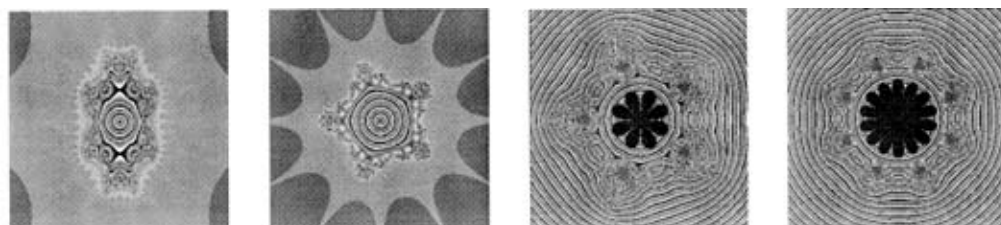
$$f(c) = \overline{f(\bar{c})}.$$



设  $f^k(c) = \overline{f^k(\bar{c})}$  成立, 则有

$$f^{k+1}(c) = f^k[f(c)] = \overline{f^k[\overline{f(c)}]} = \overline{f^k[f(\bar{c})]} = \overline{f^{k+1}(\bar{c})},$$

故命题真。该定理表明选取相角  $\theta \in [-\pi, \pi)$  的广义 M 集关于  $x$  轴对称 (图 2.1(7)、2.1(11)、2.2(7) 和 2.2(11))。

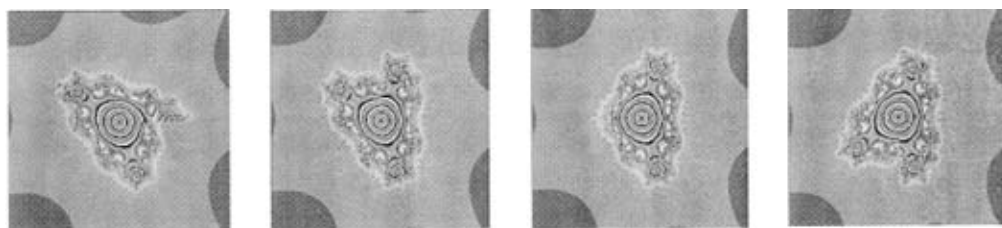


(1)  $\alpha = 2$

(2)  $\alpha = 5$

(3)  $\alpha = -4$

(4)  $\alpha = -7$

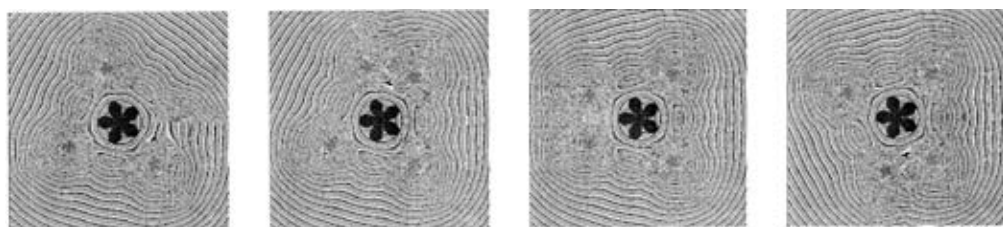


(5)  $\alpha = 3.5, \theta \in [0, 2\pi)$

(6)  $\alpha = 3.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$

(7)  $\alpha = 3.5, \theta \in [-\pi, \pi)$

(8)  $\alpha = 3.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$



(9)  $\alpha = -4.5, \theta \in [0, 2\pi)$

(10)  $\alpha = -4.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$

(11)  $\alpha = -4.5, \theta \in [-\pi, \pi)$

(12)  $\alpha = -4.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

图 2.2 模极值算法所构造的广义 M 集

Fig. 2.2 Generalized M sets constructed using extreme modulus algorithm

**定理 2.3** 由模极值算法所构造的复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的广义 M 集, 当选取相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  和  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  时, 有

$$f^k(c)\Big|_{\theta \in [-3\pi/2, \pi/2]} = \overline{f^k(\bar{c})}\Big|_{\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]} \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

证明：因为相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2]$  和  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]$  的选取关于  $x$  轴具有对称性，故当选取相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2]$  时  $c = |c|e^{i\theta}\Big|_{\theta \in [-3\pi/2, \pi/2]}$ ，则当选取相角  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]$  时，其共轭可表示为  $\bar{c} = |c|e^{-i\theta}\Big|_{\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]}$ ，由定理 2 的证明过程，可知命题真。

该定理表明相角选取为  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2]$  的广义 M 集  $x$  轴为轴旋转  $180^\circ$  后即得相角选取为  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]$  的广义 M 集，反之亦然(图 2.1(6)和 2.1(8)，2.1(10)和 2.1(12)，图 2.2(6)和 2.2(8)，2.2(10)和 2.2(12))。

图 2.3(1)-2.3(12) 以及图 2.4(1)-2.4(12) 是用模极值逃逸时间算法绘制的广义 J 集。观察图 2.3 和图 2.4 可见， $\alpha = \pm\eta$  时的广义 J 集类似  $\eta$  个主瓣组成的花朵； $\alpha = \pm(\eta+\gamma)$  时的广义 M 集类似  $\eta$  个主瓣及一雏瓣组成的花朵，并随  $\gamma$  的增大，雏瓣不断发育而演化成为一个主瓣。

**定理 2.4** 由模极值算法所构造的复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  且  $|\alpha| > 1$ ) 的广义 J 集，有

$$f(z) = f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) \quad (0 \leq j < |\alpha| - 1).$$

证明：利用数学归纳法：

$$\because f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) = (ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})^\alpha + c = z^\alpha e^{i(2\pi j)} + c = z^\alpha + c = f(z), \quad \therefore f(z) = f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})$$

又因为

$$f^{k+1}(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) = f^k[f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha-1}})] = f^k[f(z)] = f^{k+1}(z),$$

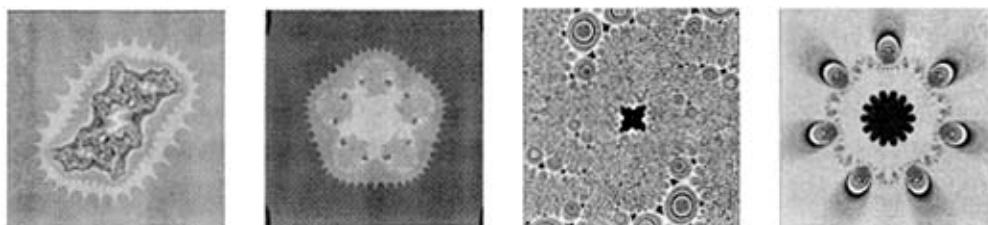
故命题真。定理 2.4 说明  $\alpha = \pm\eta$  的广义 J 集的中心为原点且具有  $\eta$  倍的旋转对称性。

**定理 2.5** 由模极值算法所构造的复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  且  $|\alpha| > 1$ ) 广义 J 集，若复数  $c$  的相角为  $\phi$ ，则主瓣中心的极坐标  $(r, \theta)$  为

$$\begin{cases} r = |c|^{\frac{1}{\alpha}} \\ \theta = [\phi + (2m+1)\pi] / \alpha \quad (m \text{ 为整数, 且 } 0 \leq m \leq |\alpha| - 1) \end{cases}$$

$\alpha = \pm(\eta+\gamma)$  时广义 J 集的结构特征可解释为：由 DeMoivre 理论

$$z^\alpha = r^\alpha (\cos \alpha\theta + i \sin \alpha\theta),$$

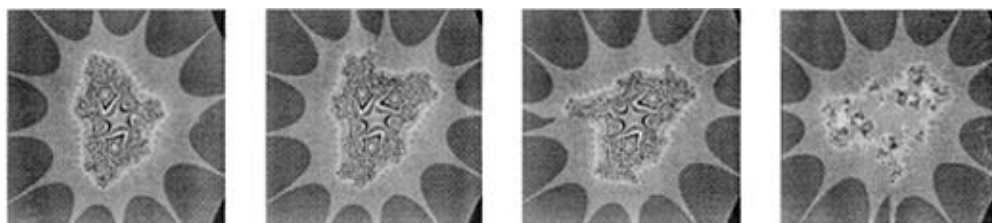


(1)  $\alpha = 2$

(2)  $\alpha = 5$

(3)  $\alpha = -2$

(4)  $\alpha = -7$

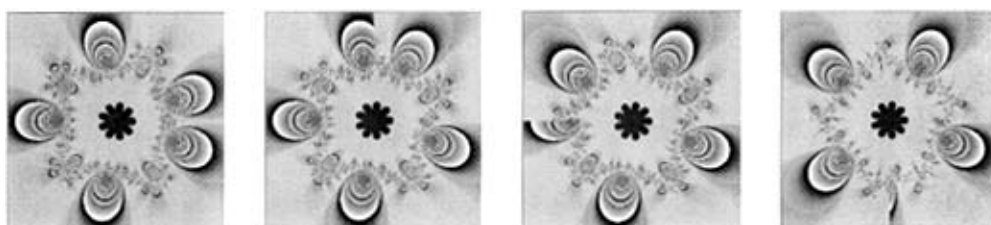


(5)  $\alpha = 2.5, \theta \in [0, 2\pi)$

(6)  $\alpha = 2.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$

(7)  $\alpha = 2.5, \theta \in [-\pi, \pi)$

(8)  $\alpha = 2.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$



(9)  $\alpha = -4.5, \theta \in [0, 2\pi)$

(10)  $\alpha = -4.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$

(11)  $\alpha = -4.5, \theta \in [-\pi, \pi)$

(12)  $\alpha = -4.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

图 2.3 模极值算法所构造的广义 J 集

Fig. 2.3 Generalized J sets constructed using extreme modulus algorithm

对  $f: z \leftarrow z^\alpha + c$  的每一次迭代,  $z$  都从直角坐标转换到极坐标, 以便计算  $z^\alpha$ , 然后再转换回直角坐标与复常数  $c$  进行相加。但从复平面的直角坐标  $(x, y)$  转换到极坐标  $(r, \theta)$ , 相角  $\theta$  的范围一般可选取以下四种情况:  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi)$  或  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 。当  $\alpha = \pm\eta$  时, 将不会影响式(2.1)的使用, 因

$$\begin{cases} \cos \alpha\theta = \cos(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \\ \sin \alpha\theta = \sin(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \end{cases} \quad (2.1)$$

但  $\alpha = \pm(\eta + \gamma)$  时, 则式(2.1)不成立, 故  $\theta$  范围的不同选取将导致广义 J 集的不同演化。另外在使用式(2.1)时,  $\alpha\theta$  可能超出上述四种情况:  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi)$

或 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 的范围, 为此要进行 $\alpha\theta \pm 2m\pi (m=1, 2, \dots)$ 的调整, 这就导致了广义 J 集雏瓣的出现。对于非整数的 $\alpha$ 值, 一个完整的主瓣的中心相角为 $(\pi + \phi)/\alpha$ 。若属于这个主瓣的所有点的最大和最小相角我们分别用 $\theta^+$ 和 $\theta^-$ 来表示, 则

$$\theta^\pm = (\pi + \phi \pm \pi)/\alpha$$

由定理 2.4 可知: 可利用这个完整的主瓣通过按顺时针或逆时针方向旋转 $|\alpha|-1$ 倍的 $2\pi/|\alpha|$ 弧度来获得广义 J 集的其余主瓣, 而上述相角 $\theta$ 的选取在正  $x$ 、正  $y$ 、负  $x$  或负  $y$  轴处的不连续性, 将不允许这个主瓣通过正  $x$ 、正  $y$ 、负  $x$  或负  $y$  轴, 这就导致穿过  $x$  或  $y$  轴(从两个方向)的主瓣部分消失, 出现了雏瓣, 且仅出现在相角 $\theta$ 不连续的正  $x$ 、正  $y$ 、负  $x$  或负  $y$  轴处, 可见雏瓣的出现在仅当 $\alpha$ 取非整数时。下面以选取相角 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为例(图 2.3(5)、2.3(9)、2.4(5)和 2.4(9)), 来定量说明这一现象。当某一完整的主瓣穿过正  $x$  轴时, 如果有正整数  $m$  和  $n$  满足

$$\theta^+ + 2\pi m/|\alpha| > 2\pi > \theta^- + 2\pi n/|\alpha|$$

或

$$\theta^- - 2\pi n/|\alpha| < 0 < \theta^+ - 2\pi n/|\alpha|$$

则将导致雏瓣的出现。对于情况(2.1), 雏瓣出现在正  $x$  轴下方到相角为 $(\theta^- + 2\pi m/|\alpha|)$ 处; 对于情况(2.2), 雏瓣出现在正  $x$  轴上方到相角为 $(\theta^+ - 2\pi n/|\alpha|)$ 处。同理可对相角选取为另三种情况:  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi)$ ,  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ , 进行上述的定量说明。

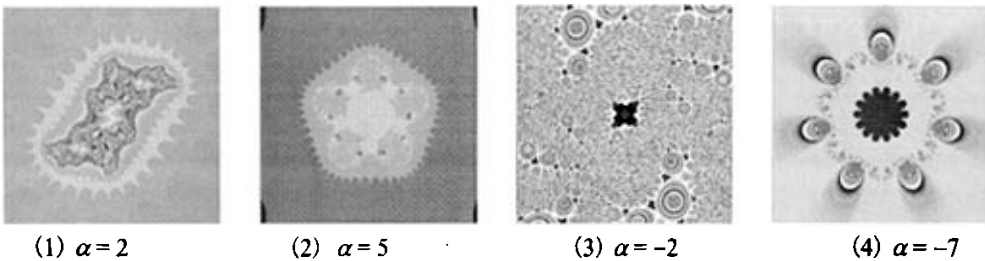
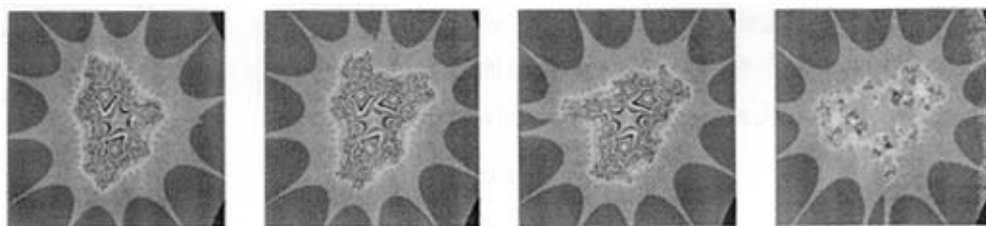
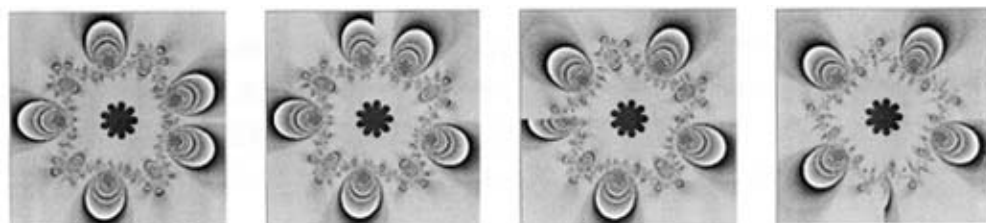


图 2.4 模极值算法所构造的广义 J 集

Fig. 2.4 Generalized J sets constructed using extreme modulus algorithm



(5)  $\alpha=2.5, \theta \in [0, 2\pi)$  (6)  $\alpha=2.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  (7)  $\alpha=2.5, \theta \in [-\pi, \pi)$  (8)  $\alpha=2.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$



(9)  $\alpha=-4.5, \theta \in [0, 2\pi)$  (10)  $\alpha=-4.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  (11)  $\alpha=-4.5, \theta \in [-\pi, \pi)$  (12)  $\alpha=-4.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

图 2.4 模极值算法所构造的广义 J 集(续)

Fig. 2.4 Generalized J sets constructed using extreme modulus algorithm(Con.)

### 2.2.2 分解算法所构造的广义 M-J 集

图 2.5(1)-2.5(12)以及图 2.6(1)-2.6(12)是由分解算法所绘制的广义 M-J 集(广义 J 集对应的复常数  $c = 0.01 + 0.7i$ ), 此时广义 M-J 集的结构特征与裂变演化规律同前, 故不再赘述。观察图 2.5 和图 2.6 可见, 在图中间广义 M-J 集的外侧, 一条条等势带中五颜六色的色块彼此相间, 且等势带中的色块正交于等势线。广义 M-J 集外无穷远处的等势带是由不经过迭代就逃逸的点  $re^{i\theta}$  组成, 这些点是按照  $\theta$  的初值着色,  $\theta$  初值是在  $[0, 2\pi)$  变化。故广义 M-J 集最外等势带被由原点向外发射 256 条等距的射线分割开, 即色块数为 256。向内接下来的一个等势带, 是由映射  $z \leftarrow z^\alpha + c$  一次迭代后逃逸的点组成。若该等势带中点的初值为  $re^{i\theta}$ , 则其一次迭代结果为  $r^\alpha e^{i\alpha\theta} + re^{i\theta}$ 。可见该等势带中的点相角  $\theta_n \in [0, \alpha\theta)$ , 故该等

势带中的色块数为  $256\alpha$ 。另外, 这些射线不是非常的笔直, 也不是所有的射线都是从原点发射出来的。可见, 随着等势带逐渐靠近广义 M-J 集, 等势带中色块的密度是成  $\alpha$  倍增加的, 这显示出这些色块结构具有自相似性。

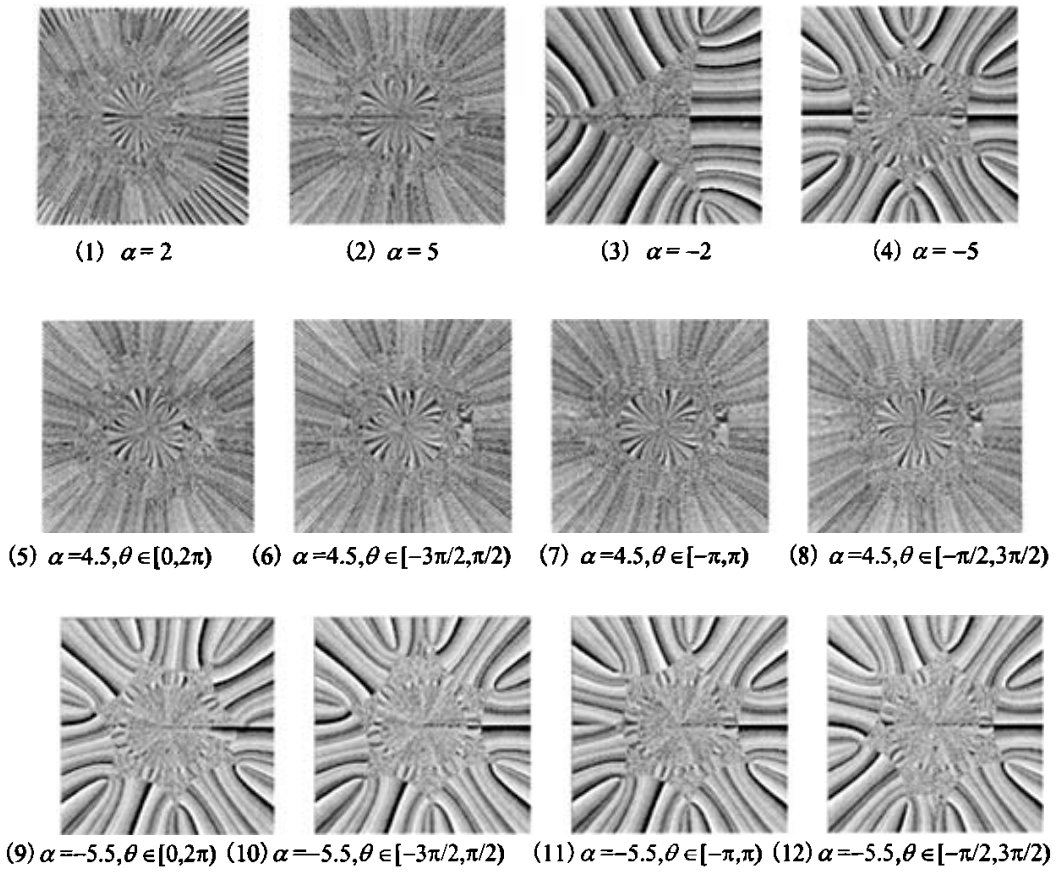


图 2.5 分解算法所构造的广义 M 集

Fig. 2.5 Generalized M sets constructed using decomposition algorithm

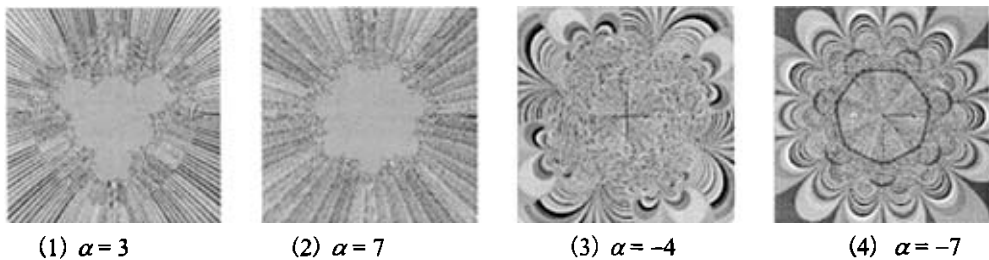
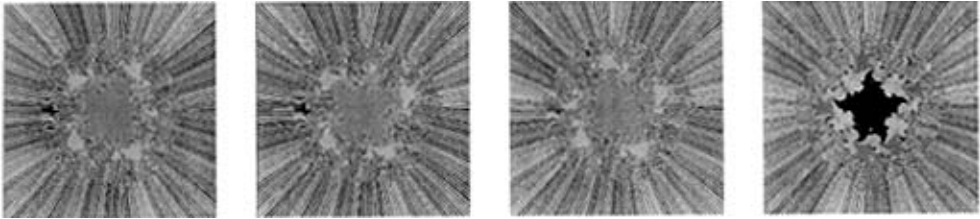
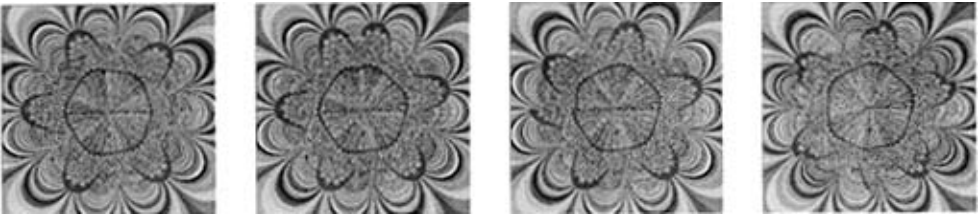


图 2.6 分解算法所构造的广义 J 集

Fig. 2.6 Generalized J sets constructed using decomposition algorithm



(5)  $\alpha=4.5, \theta \in [0, 2\pi)$  (6)  $\alpha=4.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  (7)  $\alpha=4.5, \theta \in [-\pi, \pi)$  (8)  $\alpha=4.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$



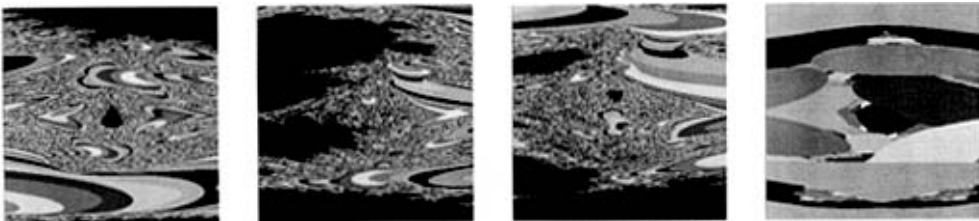
(9)  $\alpha=-5.5, \theta \in [0, 2\pi)$  (10)  $\alpha=-5.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  (11)  $\alpha=-5.5, \theta \in [-\pi, \pi)$  (12)  $\alpha=-5.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

图 2.6 分解算法所构造的广义 J 集(续)

Fig. 2.6 Generalized J sets constructed using decomposition algorithm(Con.)

### 2.2.3 Fisheye 算法所构造的广义 M 集

图 2.7 为 Fisheye 算法所构造的广义 M 集，图中心的放大倍数是 1500，趋于图边缘处的放大倍数逐渐减小。图中黑色为稳定区，彩色为逃逸区。观察图 2.7 可见，利用 Fisheye 算法不仅可以观察到广义 M 集的整体结构(图 2.7(1)-2.7(4))，还可以给出广义 M 集某处的细节。另外，根据前面对广义 M-J 集裂变演化规律的讨论，可知主幅角  $\theta$  的不同选取，将导致广义 M 集的不同演化(图 2.7(5)-2.7(8))。



(1)  $\alpha=2$

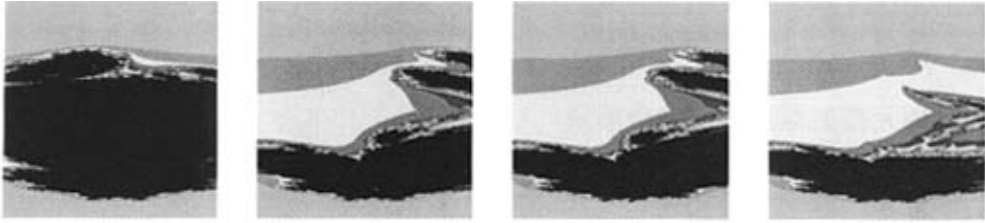
(2)  $\alpha=3$

(3)  $\alpha=4$

(4)  $\alpha=-2$

图 2.7 Fisheye 算法所构造的 M 集

Fig. 2.7 M sets constructed using Fisheye algorithm



(5)  $\alpha=7.5, \theta \in [0, 2\pi)$     (6)  $\alpha=7.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$     (7)  $\alpha=7.5, \theta \in [-\pi, \pi)$     (8)  $\alpha=7.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

图 2.7 Fisheye 算法所构造的 M 集(续)

Fig. 2.7 M sets constructed using Fisheye algorithm(Con.)



### 3 利用几种新算法构造四元数广义 M-J 集

#### 3.1 四元数的运算及三角表示法

1843 年, Hamilton 提出了四元数  $H$  空间  $SU$  的发生器, 相关学者在文献[21-25]中对四元数定义为

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\},$$

这里  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 且四元数由  $I$  和  $2 \times 2$  矩阵组成。四元数  $Q(x, y, z, w)$  可表示为

$$Q = xI + i\sigma \cdot V = \begin{pmatrix} x+iw & i(y-iz) \\ i(y+iz) & x-iw \end{pmatrix},$$

这里  $V = (y, z, w)$ 。

设  $Q$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的四维向量空间, 其正交基底  $(1,0,0,0)$ 、 $(0,1,0,0)$ 、 $(0,0,1,0)$  和  $(0,0,0,1)$  分别用  $r$ 、 $i$ 、 $j$  和  $k$  表示, 则  $Q$  中的元素均可表示为

$$q = [S, V] = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k,$$

这里标量部分  $S = q_0$ , 矢量部分  $V = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $q$  称为一个四元数。

(1) 基底的乘法满足:  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$ 。

(2) 加法:  $q_1 + q_2 = [S_1, V_1] + [S_2, V_2] = [S_1 + S_2, V_1 + V_2]$ 。

(3) 加法幺元:  $0 = [0, 0]$ 。

(4) 数量乘:  $\lambda q = [\lambda S, \lambda V]$ 。

(5) 乘法:  $q_1 q_2 = [S_1, V_1][S_2, V_2] = [S_1 S_2 - V_1 V_2, S_1 V_1 + S_2 V_2 + V_1 \times V_2]$ 。

(6) 乘法幺元:  $1 = [1, 0]$ 。

(7) 四元数的模:  $\|q\| = \sqrt{S^2 + V^2}$ 。

(8) 四元数的逆:  $q^{-1} = [S, -V] / \|q\|^2$ 。

四元数满足加法交换律、加法结合律和乘法结合律。需说明的是, 四元数的乘法无交换律<sup>[26]</sup>。

设四元数为  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ , 其模为  $h = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ 。设  $\cos \alpha = q_0/h$ , 则有

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} / h$$

故  $q$  可表示为

$$q = h \left[ \frac{q_0}{h} + \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{h} \cdot \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right] = h(\cos \theta + n \sin \theta)$$

这里

$$n = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

对于单位四元数  $q = [\cos \theta, n \sin \theta]$ , 这里  $n$  为单位旋转轴, 可证明

$$q = \exp(n\theta), \quad q^u = [\cos u\theta, n \sin u\theta] (u \in \mathbb{R})$$

### 3.2 Lyapunov 指数或逃逸时间与周期点查找结合法构造四元数广义 M 集

定义 3.1 设  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  为四元数空间  $H$  上的映射,  $M_f$  表示  $H$  中那些轨道有界的四元数  $q$  的集合, 即:

$$M_f = \{q \in H: \{f^k(q)\}_{k=1}^\infty \text{ 有界} \} = \{q \in H: q, q^\alpha + q, (q^\alpha + q)^\alpha + q, \dots \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\}$$

则称  $M_f$  为相应于  $f$  的广义 M 集。

根据定义 3.1, 可利用逃逸时间算法构造广义 M 集。由于四元数广义 M 集属于 4-D 空间, 一般令其一元固定, 取其 3-D 投影来观察四元数广义 M 集的结构; 或用二维切片来观察。四元数  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ , 可记为一个实数四元组  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ , 分别赋给一个实轴  $r$  和三个虚轴  $i, j$  和  $k$ 。四元数广义 M 集具有如下性质<sup>[27-31]</sup>。

定理 3.1 由映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  构造四元数的广义 M 集, 若点  $q(q_0, q_1, q_2, q_3) \in M_f (q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R})$ , 且  $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \rho^2 (\rho > 0)$ ; 又点  $q'(q'_0, q'_1, q'_2, q'_3)$  满足  $q_0 = q'_0, q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \rho^2$ , 则点  $q' \in M_f$ 。

证明: 利用数学归纳法: 因为

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^\alpha + c = (q_0 + \rho n)^\alpha + (q_0 + \rho n) = [h(\cos \theta + n \sin \theta)]^\alpha + h(\cos \theta + n \sin \theta) \\ &= h^\alpha (\cos \alpha \theta + n \sin \alpha \theta) + h(\cos \theta + n \sin \theta) = (h^\alpha \cos \alpha \theta + h \cos \theta) + n(h^\alpha \sin \alpha \theta + h \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里  $h = \sqrt{q_0^2 + \rho^2}$ ,  $\cos \theta = q_0/h$ ,  $\sin \theta = \rho/h$ ,  $n$  为单位向量。又因为

$$z'_1 = (z'_0)^\alpha + c' = (q'_0 + \rho n')^\alpha + (q'_0 + \rho n') = [h'(\cos \theta' + n' \sin \theta')]^\alpha + h'(\cos \theta' + n' \sin \theta'),$$

这里  $h' = \sqrt{(q'_0)^2 + \rho^2}$ ,  $\cos \theta' = q'_0/h'$ ,  $\sin \theta' = \rho/h'$ ,  $n'$  为单位向量。因为  $q_0 = q'_0$ , 所以  $h' = h$ ,  $\cos \theta' = \cos \theta$ ,  $\sin \theta' = \sin \theta$ , 则有

$$z'_1 = [h(\cos \theta + n' \sin \theta)]^\alpha + h(\cos \theta + n' \sin \theta) = (h^\alpha \cos \alpha \theta + h \cos \theta) + n'(h^\alpha \sin \alpha \theta + h \sin \theta) \quad (3.2)$$

由式(3.1)和(3.2)可得如下性质:

- (1)  $\|z_1\| = \|z'_1\|$ ;
- (2)  $z_1$  与  $z'_1$  标量相同;
- (3) 迭代后  $z_1$  与  $z'_1$  的矢量方向未变, 分别与  $q$  和  $q'$  相同。

假设  $m$  次迭代后,  $z_m$  与  $z'_m$  依然保持上述性质, 则  $m+1$  次迭代后得到

$$\begin{aligned} z_{m+1} &= z_m^\alpha + c = (q_m + \rho_m n)^\alpha + (q_0 + \rho n) = [h_m(\cos \theta_m + n \sin \theta_m)]^\alpha + h(\cos \theta + n \sin \theta) \\ &= (h_m^\alpha \cos \alpha \theta_m + h \cos \theta) + n(h_m^\alpha \sin \alpha \theta_m + h \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} z'_{m+1} &= z'^\alpha_m + c = (q'_m + \rho'_m n')^\alpha + (q'_0 + \rho n') = [h'_m(\cos \theta'_m + n' \sin \theta'_m)]^\alpha + h(\cos \theta + n' \sin \theta) \\ &= [h_m(\cos \theta_m + n' \sin \theta_m)]^\alpha + h(\cos \theta + n' \sin \theta) = (h_m^\alpha \cos \alpha \theta_m + h \cos \theta) + n'(h_m^\alpha \sin \alpha \theta_m + h \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

由式(3.3)和(3.4)可以判断,  $m+1$ 次迭代后  $z_{m+1}$  与  $z'_{m+1}$  依然满足上述性质。因此若点  $q \in M_f$ , 则  $q' \in M_f$ 。命题得证。

**定理3.2** 由映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  所构造的四元数广义M集在虚轴i、j和k的三维投影边界是一个球体。

**定理3.3** 由映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  所构造的四元数广义M集关于实轴r对称。

根据定理3.1易证定理3.2和3.3, 本文不再赘述。

**定理3.4** 复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (c \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{Z})$  定义的广义M集(记为  $M_c$ )沿实轴方向旋转可得到由映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  的四元数广义M集。

**证明:** 对于任意四元数  $q$ , 都存在一个单位四元数  $p$  和一个复数  $c$ , 满足

$$pqp^{-1} = c \quad (3.5)$$

可见式(3.5)是四元数除法环的内自同构, 且该变换中  $q$  的标量和模值均没有改变, 即  $q_0 = c_0$  和  $\|q\| = \|c\|$ <sup>[46]</sup>。

下面用数学归纳法证明: 若  $c \in M_c$ , 则  $q \in M$ 。因为

$$Z_1 = Z_0^\alpha + q = q^\alpha + q,$$

$$z_1 = z_0^\alpha + c = c^\alpha + c = (pqp^{-1})^\alpha + pqp^{-1} = pq^\alpha p^{-1} + pqp^{-1} = p(q^\alpha + q)p^{-1} = pZ_1 p^{-1}$$

假设迭代 $m$ 次后,  $z_m = pZ_m p^{-1}$ , 则迭代 $m+1$ 次后可得到

$$z_{m+1} = z_m^\alpha + c = (pZ_m p^{-1})^\alpha + c = pZ_m^\alpha p^{-1} + pqp^{-1} = p(Z_m^\alpha + q)p^{-1} = pZ_{m+1} p^{-1}$$

由上式可见, 若  $c \in M_c$ , 则  $q \in M$ . 又因为  $q_0 = c_0$  和  $\|q\| = \|c\|$ , 所以点  $c$  和点  $q$  在同一球面上, 命题得证.

定理3.4说明了映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  的四元数广义M集与复平面广义M集之间的关系. 作者实验也表明: 从 $x$ - $y$ 平面观察, 四元数广义M集与复平面的广义M集相同, 但在平行于 $x$ - $y$ 平面上四元数广义M集是一系列同心圆, 即在3-D空间里, 它是有边界的, 像是以 $x$ 轴为中心的带有条形状花纹的压扁了的圆锥. 暗红色的区域仍然是第一周期稳定区域, 它的补集包含了所有的其他的稳定周期区域, 与复平面上的周期集合不同的是, 在复平面内的圆形区域, 四元数广义M集是一个球体.

定理3.5 由映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{Z})$  构造四元数广义M集. 当 $\alpha$ 奇数时, 广义M集关于平面 $r=0$ 对称.

图 3.1(1)-3.1(16)、图 3.2(1)-3.2(16) 分别为利用 Lyapunov 指数或逃逸时间与周期点查找结合法所构造的整数阶四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片. 图 3.1 中黑色为混沌区, 彩色为稳定区; 图 3.2 中黑色为逃逸区; 彩色代表不同的周期区域, 着色规则同前述.

定理 3.6 由 Lyapunov 指数或逃逸时间与周期点查找结合法所构造的映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片, 有

$$\|f^k(c)\| = \left\| f^k \left( ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right\| [k=1, 2, \dots, N; j=0, 1, 2, \dots, (|\alpha|-1)]$$

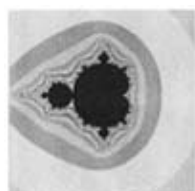
证明: 利用数学归纳法:

$$\because f \left( ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} \right) = \left( ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} \right)^\alpha + ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} = e^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} (c^\alpha e^{i(2\pi j)} + c) = e^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} (c^\alpha + c),$$

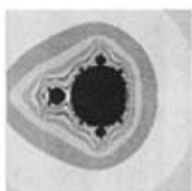
$$f(c) = c^\alpha + c, \therefore \|f'(c)\| = \left\| f' \left( ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}} \right) \right\|,$$

故有

$$\|f'(c)\| = \left\| f'(ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) \right\|$$



(1)  $\alpha = 2, c_2 = 0$



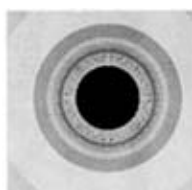
(2)  $\alpha = 2, c_2 = 0.3$



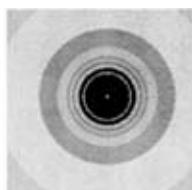
(3)  $\alpha = 2, c_2 = 0.6$



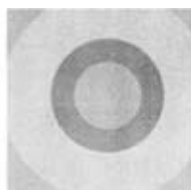
(4)  $\alpha = 2, c_2 = 0.8$



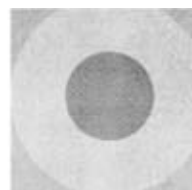
(5)  $\alpha = 2, c_0 = 0$



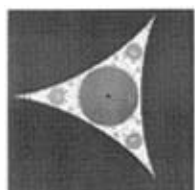
(6)  $\alpha = 2, c_0 = 0.3$



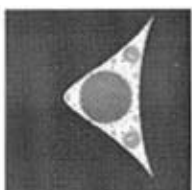
(7)  $\alpha = 2, c_0 = 0.6$



(8)  $\alpha = 2, c_0 = 0.8$



(9)  $\alpha = -2, c_2 = 0$



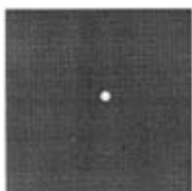
(10)  $\alpha = -2, c_2 = 0.3$



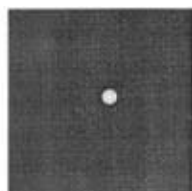
(11)  $\alpha = -2, c_2 = 0.6$



(12)  $\alpha = -2, c_2 = 0.8$



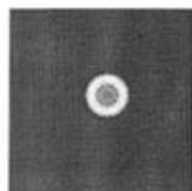
(13)  $\alpha = -2, c_0 = -1.4$



(14)  $\alpha = -2, c_0 = -1.25$



(15)  $\alpha = -2, c_0 = -0.9$



(16)  $\alpha = -2, c_0 = -0.57$

图 3.1 Lyapunov 指数与周期点查找结合法所构造的整数阶四元数广义 M 集的二维切片

Fig. 3.1 2-dimension section of the generalized M sets for quaternion with integer order constructed using Lyapunov exponent combined with periodic scanning method

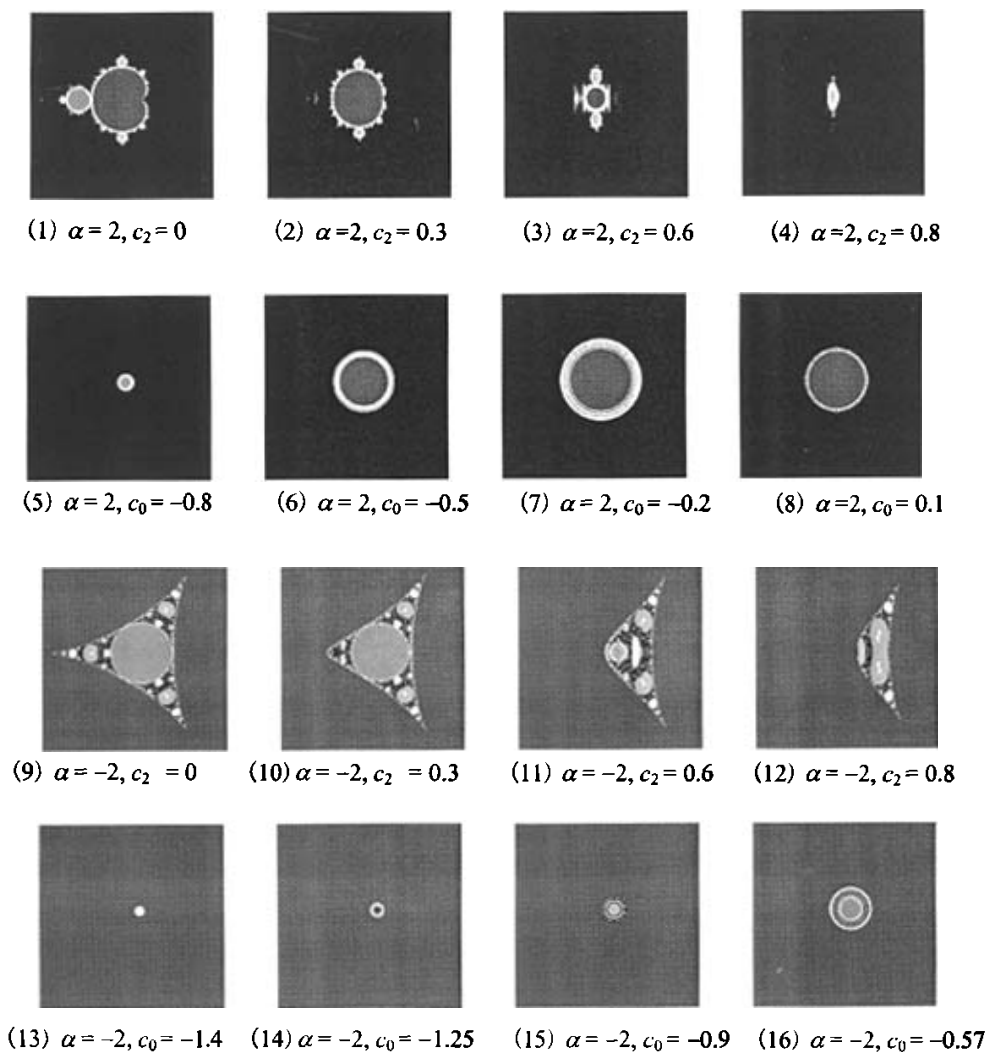


图 3.2 逃逸时间与周期点查找结合法所构造的整数阶四元数广义 M 集的二维切片

Fig. 3.2 2-dimension section of the generalized M sets for quaternion with integer order constructed using escaping-time algorithm combined with periodic scanning method

设

$$\|f^k(c)\| = \left\| f^k \left( ce^{i\frac{2\pi j}{a-1}} \right) \right\|,$$

因为

$$f^{k+1}(ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) = f^k[f(ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}})] = f^k[e^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}}(c^\alpha + c)],$$

令  $f(c) = c^\alpha + c = c'$ , 则  $f^{k+1}(ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) = f^k(c'e^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}})$ , 而  $f^{k+1}(c) = f^k[f(c)] = f^k(c')$ , 又因为

$$\|f^k(c')\| = \left\| f^k(c'e^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) \right\|,$$

故有

$$\|f^{k+1}(c)\| = \left\| f^{k+1}(ce^{\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) \right\|$$

命题真。该定理说明  $\alpha$  为整数的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片具有  $|\alpha-1|$  倍的旋转对称结构。

**定理 3.7** 由 Lyapunov 指数或逃逸时间与周期点查找结合法所构造的映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha < 0 \text{ 或 } \alpha > 1)$  的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片, 当选取相角  $\theta \in [-\pi, \pi)$  时, 有

$$f^k(c) = \overline{f^k(\bar{c})} (k=1, 2, \dots, N)$$

证明: 利用数学归纳法: 设  $c = \|c\|e^{i\theta}$ , 则  $\bar{c} = \|c\|e^{-i\theta}$ 。  $\because f(c) = c^\alpha + c = |c|^\alpha e^{i\alpha\theta} + |c|e^{i\theta}$ ,  $f(\bar{c}) = \bar{c}^\alpha + \bar{c} = |c|^\alpha e^{-i\alpha\theta} + |c|e^{-i\theta}$ , 故  $f(c) = \overline{f(\bar{c})}$ 。 设

$$f^k(c) = \overline{f^k(\bar{c})}$$

成立, 则有

$$f^{k+1}(c) = f^k[f(c)] = \overline{f^k[f(\bar{c})]} = \overline{f^k[f(\bar{c})]} = \overline{f^{k+1}(\bar{c})},$$

故命题真。该定理表明选取相角  $\theta \in [-\pi, \pi)$  的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片关于  $x$  轴对称。

**定理 3.8** 由 Lyapunov 指数或逃逸时间与周期点查找结合法所构造的映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片, 当选取相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  和  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  时, 有

$$f^k(c) \Big|_{\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)} = \overline{f^k(\bar{c})} \Big|_{\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)} (k=1, 2, \dots, N).$$

证明：因为相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  和  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  的选取关于  $x$  轴具有对称性，故当选取相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  时，则  $c = \|c\|e^{i\theta} \Big|_{\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)}$ ，当选取相角  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  时，其共轭可表示为  $\bar{c} = \|c\|e^{-i\theta} \Big|_{\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)}$ ，由定理 3.7 的证明过程，可知命题真。

该定理证明相角取为  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片以平行  $x$  轴为轴旋转 180 度后即得相角选取为  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  的四元数广义 M 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片，反之亦然。

### 3.3 模极值逃逸时间算法所构造的四元数广义 M-J 集

图3.3(1)-3.3(16)、图3.4(1)-3.5(16)分别为模极值逃逸时间算法<sup>[3]</sup>所构造的四元数广义M和广义J集。下面以构造广义M集为例介绍模极值逃逸时间算法，广义J集的与此相似，故不再赘述。具体模极值逃逸时间算法可描述为：

(1) 对于  $c \in M$ ，记  $f_c^k(z)$  为  $f_c(z)$  的第  $k$  次迭代。定义函数

$$\alpha_1(c) = \inf\{\|f_c^k\| : k = 1, 2, \dots\};$$

若

$$\alpha_1(c) = \|f_c^k(0)\|,$$

则定义函数

$$j_1(c) = k.$$

记  $\alpha_1(c)$  为最小模， $j_1(c)$  为最小模指标。

(2) 设定视窗  $W \subset \mathbb{C}$ ，逃逸半径为  $R$ ，逃逸时间限制为  $N$ 。令  $c = c_1 + c_2i$ ， $z = x + yi$ 。

(3) 设定步长为 0.01， $x_0 = y_0 = 0$ ， $k = 0$ 。

(4) 计算  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ ， $k = k + 1$ ，计算  $\|z\|$ ，记录到数组中。

(5) 若  $k < N$ ，则按照外部着色机制进行着色；若  $k = N$ ，遍历数组，找出最小模值。

(6) 根据最小值对该点进行着色。重复过程(4)、(5)，直到穷尽视窗  $W$  内所有的点，即可获得广义 M 集。



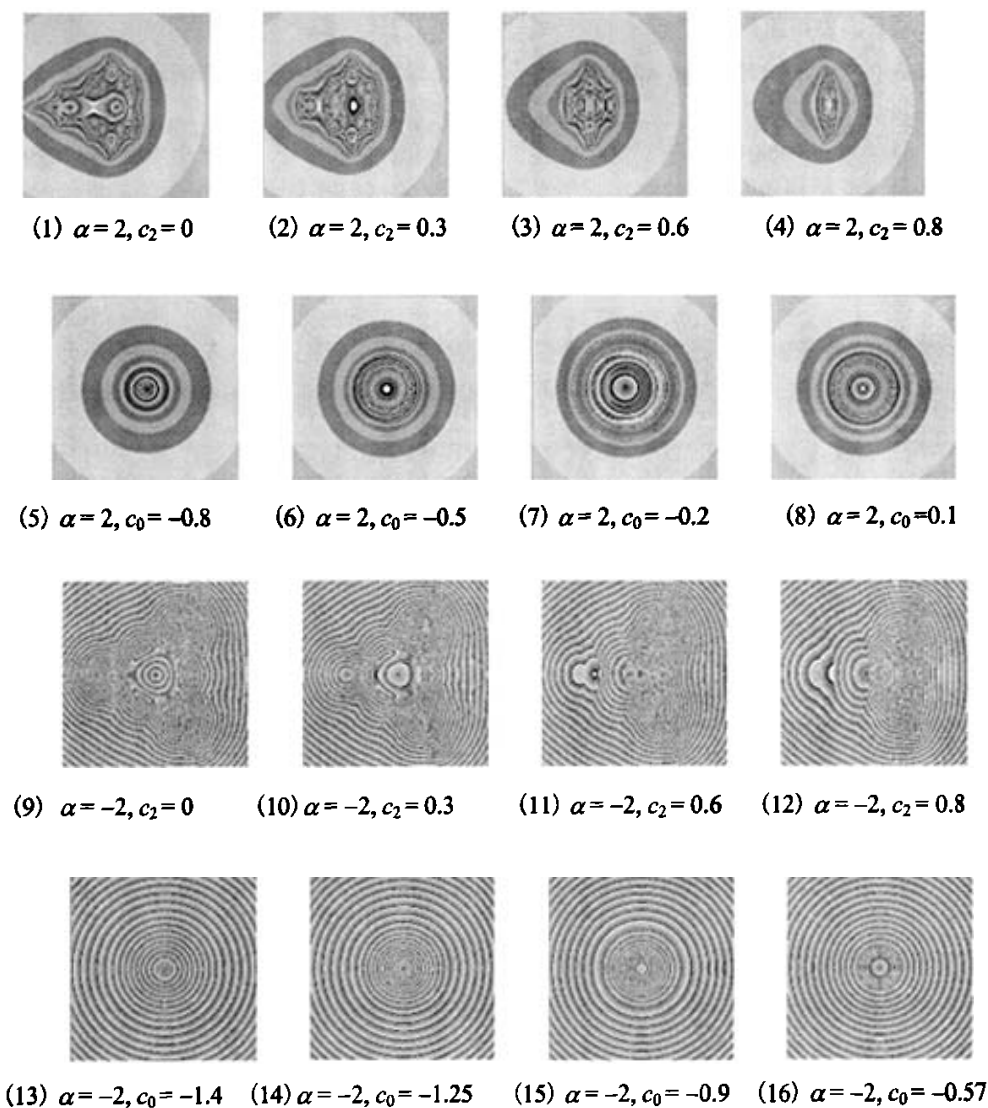


图 3.3 模极值逃逸时间算法所构造的四元数广义 M 集的二维切片  
 Fig. 3.3 2-dimension section of the generalized M sets for quaternion  
 constructed using extreme modulus escaping-time algorithm on the plane

观察图3.1-3.3可见，模极值逃逸时间算法所绘制的四元数广义M集与逃逸时间或Lyapunov指数与周期点查找结合法所构造的四元数广义M集具有相同的结构特征，故在此不再赘述。

模极值逃逸时间算法所绘制的四元数广义J集具有如下性质。

**定理 3.9** 由模极值逃逸时间算法构造映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  且  $|\alpha| > 1$ ) 的四元数广义 J 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片, 有

$$f(z) = f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) (0 \leq j < |\alpha| - 1).$$

证明: 利用数学归纳法:

$$\therefore f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) = (ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})^\alpha + c = z^\alpha e^{j(2\pi)} + c = z^\alpha + c = f(z),$$

$$\therefore f'(z) = f'(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}),$$

又因

$$f^{k+1}(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha-1}}) = f^k[f(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha-1}})] = f^k[f(z)] = f^{k+1}(z),$$

故命题真。定理 3.9 说明  $\alpha = \pm n$  的四元数广义 J 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片具有  $n$  倍的旋转对称性。

**定理 3.10** 由模极值逃逸时间算法构造映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$  且  $|\alpha| > 1$ ) 的四元数广义 J 集平行于  $x$ - $y$  平面的二维切片, 若复数  $c$  的相角为  $\phi$ , 则主瓣中心的极坐标  $(r, \theta)$  为

$$\begin{cases} r = |c|^{\frac{1}{\alpha}} \\ \theta = [\phi + (2m+1)\pi] / \alpha \quad (m \text{ 为整数, 且 } 0 \leq m \leq |\alpha| - 1) \end{cases}$$



(1)  $\alpha = 2, c_2 = 0$       (2)  $\alpha = 2, c_2 = 0.3$       (3)  $\alpha = 2, c_2 = 0.6$       (4)  $\alpha = 2, c_2 = 0.8$

图 3.4 模极值逃逸时间算法绘制的四元数广义 J 集的二维切片

Fig. 3.4 2-dimension section of the generalized Julia sets for quaternion constructed using extreme modulus escaping-time algorithm on the plane

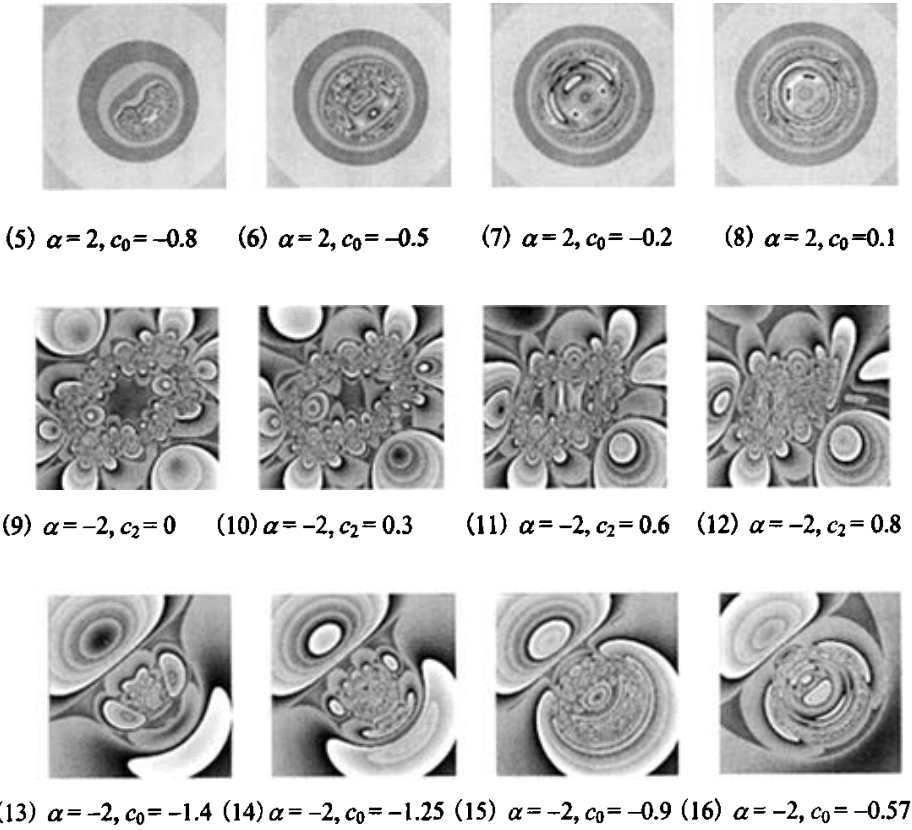


图 3.4 模极值逃逸时间算法绘制的四元数广义 J 集的二维切片(续)

Fig. 3.4 2-dimension section of the generalized Julia sets for quaternion constructed using extreme modulus escaping-time algorithm on the plane(Con.)

### 3.4 模极值逃逸时间算法所构造的四元数广义 M 集的内部结构

图3.5(1)-3.5(8)是由模极值逃逸时间算法所绘制的四元数广义M集的内部结构。由图3.5可见，广义M集的内部结构是以各周期的中心为球心的层层嵌套的球体结构，且具有一定的周期性。以图3.5(6)为例( $\alpha = 4, c_2 = 0$ )，可以清晰地看到，在一周期稳定区域内，是以一周期中心点为圆心的层层向外散开的同心圆簇，由于每个圆代表着最小模极值不同的点的集合，因此呈现出不同的颜色，且按照红色，紫色，深绿，淡绿的顺序循环出现，呈现了一定的周期性。各周期的边缘由于各周期的不同最小模极值而相互渗透，呈现出无规律的交界地带，但是随着指数 $\alpha$ 的增加，这些边缘区域的颜色将向各自的圆心靠拢，成为规则的圆形，并继续按照前面提出的颜色的顺序排列，图3.5(1)-3.5(4)呈现了随着指数 $\alpha$ 的增加，边界区域无规则的颜色分布逐渐趋于规则排列的演化过程。

由图3.5(1)可清晰地看出最小模极值相同的点分布在以各周期中心点为球心的球体上，整个内部结构呈现以 $c_0$ 为球心的同心球体，且按照红色，紫色，深绿，淡绿的顺序循环出现，呈现出一定的周期性。图3.6(7)和3.6(8)的指数 $\alpha$ 为负数，图3.6(k)和3.6(l)是从垂直于 $z$ - $y$ 面的方向观察图3.6(7)和3.6(8)得到的图形。可以看出它呈现出和指数为正数的广义M集的内部结构相同的结构。

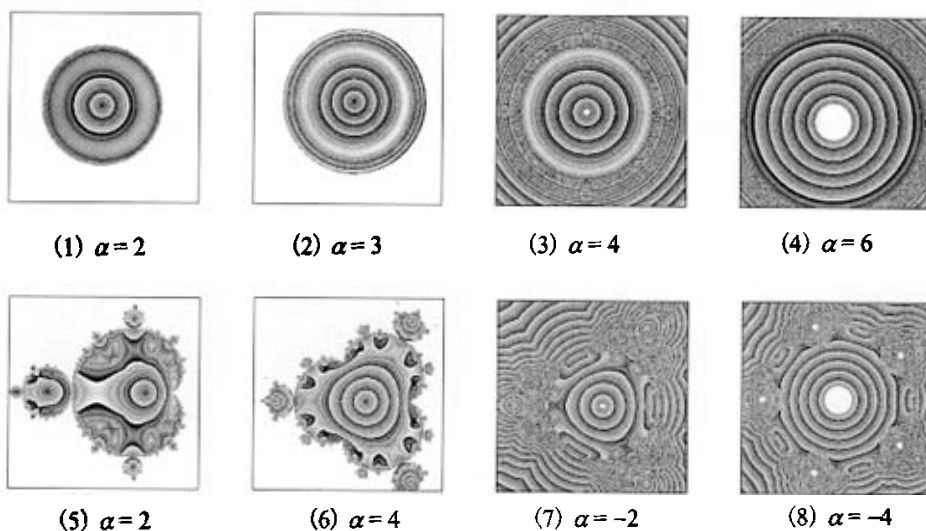


图 3.5 模极值逃逸时间算法绘制的四元数广义 M 集的内部结构

Fig. 3.5 Inner part of generalized M sets for quaternion constructed using extreme modulus escaping-time algorithm

当第三维 $c_2$ 取不同值时，由模极值逃逸时间算法作者绘制出四元数广义M集的内部结构如图3.6(1)–3.6(8)所示。图3.6(1)–3.6(4)是 $\alpha = 4$ ， $c_2 = 0, 0.5, -0.5, 0.8$ 时广义M集的内部结构，可见随 $c_2$ 的变化，内部结构有很明显的变化，表现在：① 随 $c_2$ 值的增大，内部结构变得越来越不完整；② 当 $c_2$ 取值互为相反数时，内部结构完全相同，这说明了此时广义M集的内部结构也是关于坐标轴对称的；③ 可清晰地看到广义M集的球体结构。在复平面由模极值逃逸时间算法绘制的广义M集内部结构只能给出平面上的分布规律，无法表现出空间立体结构，而由模极值逃逸时间算法绘制的四元数广义M集的内部结构，可由不同切片上的结构来明确最小模极值的分布情况。如图3.6(1)–3.6(4)所示，随 $c_2$ 的增大，图形变得不完整，这说明其内部结构是由半径大小不相同的球体结构组成的，当 $c_2$ 取值大于某些最小模极值分布的球体的半径时，将在这一切片观察不到这一模

极值的分布，比较图3.6(1)和3.6(4)可见，3.6(2)的图形比3.6(1)少了最左面顶端部分，即第二周期，这是因为  $c_2$  取值比第二周期的点所形成的球体半径大，对于负指数同样存在这样的现象，如图3.6(5)-3.6(8)。

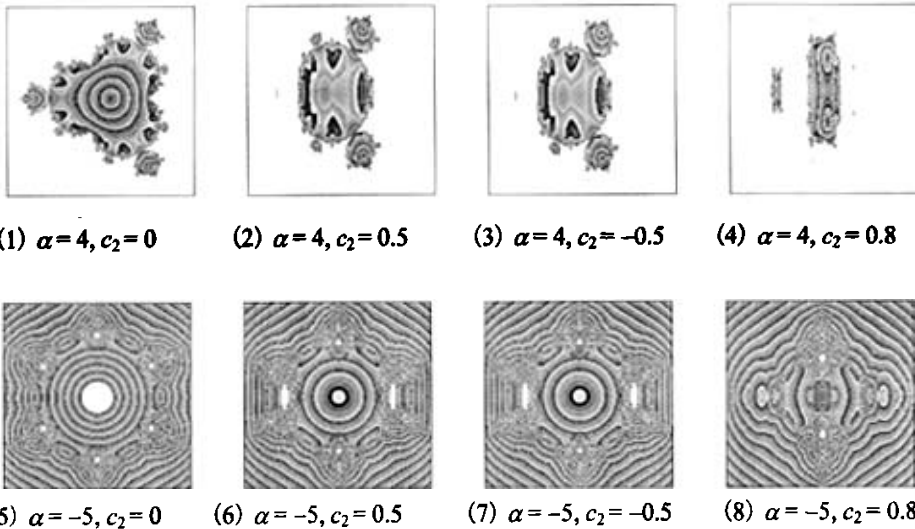


图 3.6 模极值逃逸时间算法绘制的四元数广义 M 集的内部结构的二维切片  
 Fig. 3.6 Inner part of 2-dimension section of the generalized M sets for quaternion constructed using extreme modulus escaping-time algorithm

## 4 一类混沌系统的控制

### 4.1 系统描述

#### 4.1.1 Silnikov 定理

设

$$\frac{dx}{dt} = f(x), t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^3,$$

这里  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , 且存在  $x_c \in \mathbf{R}^3$  使得  $f(x_c) = 0$ . 令  $J = Df(x_c)$  是  $f(x)$  在平衡点  $x_c$  的 Jacobi 矩阵,  $J$  满足以下条件:

- (1)  $J$  有三个特征根:  $\alpha, \beta \pm i\omega$ , 其中  $\alpha < 0, \beta > 0, |\alpha| > \beta, \alpha, \beta, \omega \in \mathbf{R}$ .
- (2) 存在一条通过平衡点  $x_c$  的同宿轨道.

则系统 (4.1) 存在 Smale 马蹄的混沌.

一般的三维二次多项式自治系统具有如下形式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^3 a_i x_i + a \\ \frac{dx_2}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 b_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + b \\ \frac{dx_3}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^3 c_i x_i + c \end{cases} \quad (4.1)$$

这里  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} (1 \leq i, j \leq 3), a_i, b_i, c_i (1 \leq i \leq 3)$ , 并且  $a, b, c$  都是常数. 首先要找出符合式 (4.1) 的一个系统, 这样它将具有一个平衡点. 为方便起见, 考虑式 (4.1) 中的第一个等式为线性的情况. 这就意味着  $a_{ij} = 0 (1 \leq i, j \leq 3)$  且  $a = 0$ . 为保证该系统只具有一个平衡点, 要求式 (4.1) 具有两个非线性项, 因此令

$$\begin{cases} b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0 \\ b_{13} = b_{31} = \frac{1}{2} \\ b_1 = b_2 = b_3 = 0 \\ c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = 0 \\ c_2 = c_3 = 0 \end{cases}$$

故可得到如下的一个简单系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_3 + b \\ \frac{dx_3}{dt} = c_1x_1 + c_2x_2x_3 + c \end{cases} \quad (4.2)$$

这里  $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq 3)$ 、 $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  都是实参数。

下面找出系统(4.2)的平衡点, 由系统(4.2)的前两个等式可得到

$$x_3 = \frac{-b}{x_1} \quad (4.3)$$

和

$$x_2 = \frac{a_3b - a_1x_1^2}{a_2x_1} \quad (4.4)$$

将(4.3)和(4.4)带入式(4.2)的第三个等式中可得如下代数式

$$a_2c_1x_1^3 + (a_1bc_2 + a_2c)x_1^2 - a_3c_2b^2 = 0 \quad (4.5)$$

令

$$a_1bc_2 + a_2c = 0 \text{ 或 } c = -\frac{a_1c_2}{a_2}b \quad (4.6)$$

则在式(4.6)的限定下, 可知式(4.5)有唯一实根

$$x_1 = \sqrt{\frac{a_3c_2}{a_2c_1}b^2}$$

再由式(4.3)和(4.4)得出相应的  $x_2$  和  $x_3$ , 因此可得到系统(4.2)的平衡点  $O(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, x_3^{(e)})$ 。

系统(4.2)在平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ c_1 & c_2x_3 & c_2x_2 \end{pmatrix},$$

其行列式值为

$$\det(J) = \frac{3a_2c_2b^2}{x_1^2}$$

由上述分析可知，此处要求  $a_2c_2 < 0$ 。另外，系统(4.4)在平衡点处的 Jacobi 矩阵的特征多项式为

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p = 0 \quad (4.7)$$

这里

$$\begin{aligned} p_1 &= -(a_1 + c_2x_2), \\ p_2 &= bc_2 - a_3c_1 + a_1c_2x_2 - a_2x_3, \\ p_3 &= -\frac{3a_2c_2b}{x_1^2}. \end{aligned}$$

令

$$\lambda = \mu - (p_1/3),$$

带入式(4.7)有

$$\mu^3 + p\mu + q = 0 \quad (4.8)$$

这里

$$\begin{aligned} p &= p_2 - \frac{p_1^2}{3}, \\ q &= p_3 - \frac{p_1p_2}{3} + \frac{2p_1^3}{27} \end{aligned}$$

设

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

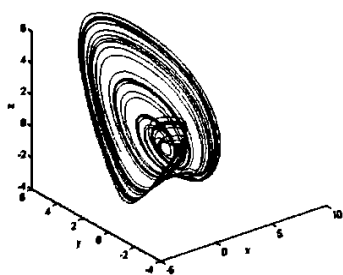
如果  $\Delta > 0$ ，则式(4.8)有一个实根和一对共轭虚根。因此当  $\Delta > 0$  时，式(4.7)有一个实根和一对共轭虚根，并且由于  $\det(J) < 0$ ，式(4.7)实根为负。为了保证虚根的实部为正并且平衡点是吸引子，还需要满足如下条件

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} < \min\left(\frac{p_1}{3}, \frac{-2p_1}{3}\right) \quad (4.9)$$

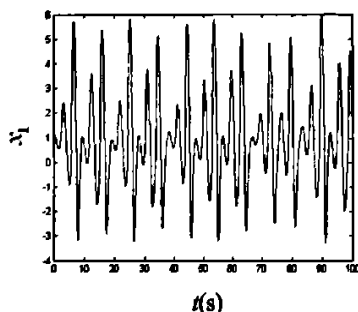


综上所述, 当式 (4.6) 和 (4.9) 成立, 并且  $a_2c_2 < 0$ ,  $\Delta > 0$  时, 系统 (4.2) 在点  $O(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, x_3^{(e)})$  处平衡, 且有一个实根和一对具有正实部的共轭虚根。

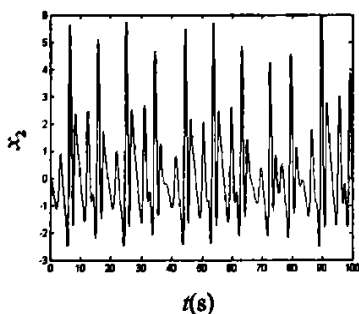
利用 Silnikov 定理构造混沌系统还必须证明系统存在过平衡点的同宿轨道, Zhou 等已给出该证明过程<sup>[32]</sup>, 故此处不再赘述。图 4.1 (1)–4.1 (4) 为系统 (4.2) 的混沌吸引子以及各变量的变化曲线。



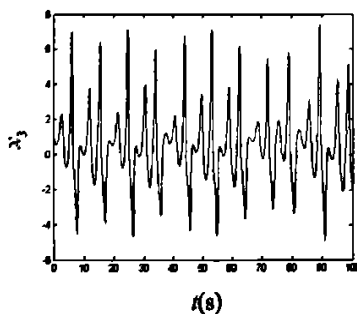
(1) 混沌吸引子



(2)  $x_1(t)$  的变化曲线



(3)  $x_2(t)$  的变化曲线



(4)  $x_3(t)$  的变化曲线

图 4.1 系统 (4.2) 的混沌吸引子

Fig. 4.1 Chaotic attractor of system (4.2)

#### 4.1.2 平衡点稳定性判断

令

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ x_1x_3 + b = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2x_3 + c = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

求解方程(4.10), 可得系统(4.2)的平衡点:  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$ 、 $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$ 、 $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$ , 若将系统(4.2)的平衡点表示为  $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  时, 则系统(4.2)的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ c_1 & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p = 0 \quad (4.11)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= -(a_1 + c_2\bar{y}), \\ p_2 &= bc_2 - a_3c_1 + a_1c_2\bar{y} - a_2\bar{z}, \\ p_3 &= -\frac{3a_2c_2b}{\bar{x}^2} \end{aligned}$$

**命题 4.1** 当参数  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 系统(4.2)的平衡点  $S_0$  是鞍点, 且不稳定。

**证明:** 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 将平衡点  $S_0$  的坐标代入式(4.11), 可得系统(4.2)的三个特征根分别为  $\lambda_1 = -1.3344$ 、 $\lambda_2 = 0.8195 + 2.6828i$  和  $\lambda_3 = 0.8195 - 2.6828i$ 。由于两个虚根的实部为正, 故  $S_0$  是鞍点且不稳定。

**命题 4.2** 当参数  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 系统(4.2)的平衡点  $S_1$  是不稳定的。

**证明:** 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 将平衡点  $S_1$  的坐标代入式(4.11)中, 可得系统(4.2)的三个特征根为  $\lambda_1 = -0.9039 - 5.0552i$ 、 $\lambda_2 = -1.2390 + 2.3095i$  和  $\lambda_3 = 0.1605 - 0.7625i$ 。由于存在实部为正的虚根  $\lambda_3$ , 可见  $S_1$  是不稳定的。

同理可证系统(4.2)的平衡点  $S_2$  也是不稳定的。

## 4.2. 单反馈控制

受控系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z - u_1 \\ \dot{y} = xz + b - u_2 \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - u_3 \end{cases} \quad (4.12)$$

式(4.12)中  $u_1$ 、 $u_2$  和  $u_3$  是单反馈外部输入控制，它们可使系统(4.4)的混沌运动轨道镇定到不稳定平衡点  $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  或极限环上。单变量反馈控制器为

$$\begin{cases} u_1 = k_1(x - \bar{x}) \\ u_2 = k_2(y - \bar{y}) \\ u_3 = k_3(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (4.13)$$

式(4.13)中  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  代表系统(4.4)的不稳定平衡点， $k_1$ 、 $k_2$  和  $k_3$  是正反馈增益。将式(4.13)代入式(4.12)，可得

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z - k_1(x - \bar{x}) \\ \dot{y} = xz + b - k_2(y - \bar{y}) \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz - k_3(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (4.14)$$

#### 4.2.1 镇定到平衡点 $S_0$

**命题 4.3** 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ ，且  $k_1 = k_2 = k_3 > 0.8195$  时，受控系统(4.14)渐进稳定并趋于平衡点  $S_0$ 。

**证明：**将平衡点  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  的坐标代入式(4.14)，可得

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z - k_1(x - 1.5532) \\ \dot{y} = xz + b - k_2(y + 1.5256) \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - k_3(z - 0.8370) \end{cases} \quad (4.15)$$

式(4.15)的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_0) = \begin{pmatrix} a_1 - k_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & -k_2 & \bar{x} \\ c_1 & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_3 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

经过计算，当  $k_1 = k_2 = k_3 = 0.9$  时，可得式(4.16)的三个特征根为  $\lambda_1 = -2.2344$ 、 $\lambda_2 = -0.0805 + 2.6828i$  和  $\lambda_3 = -0.0805 - 2.6828i$ ，此时实根和复根的实部均为负值，可知，受控系统(4.25)渐进稳定并趋于平衡点  $S_0$ 。

4.2.2 镇定到平衡点  $S_1$ 

**命题 4.4** 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ , 且  $k_1 = k_2 = k_3 > 0.1605$  时, 受控系统 (4.14) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_1$ 。

**证明:** 将平衡点  $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$  的坐标代入式 (4.14), 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z - k_1(x + 0.7784 - 1.3461i) \\ \dot{y} = xz + b - k_2(y - 0.7614 - 3.5082i) \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - k_3(z + 0.4185 + 0.7237i) \end{cases} \quad (4.17)$$

式 (4.17) 的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_1) = \begin{pmatrix} a_1 - k_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & -k_2 & \bar{x} \\ c_1 & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_3 \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k_1 = k_2 = k_3 = 0.2$  时, 可得式 (4.17) 的三个特征根为  $\lambda_1 = -1.1039 - 5.0552i$ 、 $\lambda_2 = -1.4390 + 2.3095i$  和  $\lambda_3 = -0.0395 - 0.7625i$ , 此时所有复根的实部均为负值, 可知, 受控系统 (4.14) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_1$ 。

4.2.3 镇定到平衡点  $S_2$ 

**命题 4.5** 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ , 且  $k_1 = k_2 = k_3 > 0.1605$  时, 系统 (4.14) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_2$ 。

**证明:** 将平衡点  $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$  的坐标代入式 (4.14), 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z - k_1(x + 0.7784 + 1.3461i) \\ \dot{y} = xz + b - k_2(y - 0.7614 + 3.5082i) \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - k_3(z + 0.4185 - 0.7237i) \end{cases} \quad (4.18)$$

式 (4.18) 的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_2) = \begin{pmatrix} a_1 - k_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & -k_2 & \bar{x} \\ c_1 & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_3 \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k_1 = k_2 = k_3 = 0.2$  时, 可得式 (4.18) 的三个特征根为  $\lambda_1 = -1.1039 + 5.0552i$ 、 $\lambda_2 = -1.4390 - 2.3095i$  和  $\lambda_3 = -0.0395 + 0.7625i$ , 此时所有复根的实部均为负值, 可知, 受控系统 (4.14) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_2$ 。

#### 4.2.4 镇定到极限环

镇定到围绕点  $S_0$  的极限环, 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ , 则在平衡点  $S_0$  上, 式 (4.14) 可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z - k_1(x - 1.5532) \\ \dot{y} = xz + b - k_2(y + 1.5256) \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - k_3(z - 0.8370) \end{cases} \quad (4.19)$$

式 (4.19) 的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_0) = \begin{pmatrix} a_1 - k_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & -k_2 & \bar{x} \\ c_1 & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_3 \end{pmatrix},$$

当  $k_1 = k_2 = k_3 = 0.8195$  时, 可求出特征根为  $\lambda_1 = -2.1539$ 、 $\lambda_2 = 2.6828i$  和  $\lambda_3 = -2.6828i$ , 故此时受控系统 (4.14) 的运动趋于一个围绕点  $S_0$  的极限环。

#### 4.2.5 数值模拟结果

选取  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ , 初始值为  $x(0) = 1$ 、 $y(0) = 0$  和  $z(0) = 1$ , 时间步长为  $\tau = 0.002(s)$ , 作者利用单反馈法模拟了将系统 (4.2) 镇定到平衡点的过程 (图 4.2 所示)。其中, 图 4.2(1) 给出了  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  时, 系统 (4.14) 镇定到  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  上的结果; 图 4.2(2) 给出了  $k_1 = k_2 = k_3 = 0.5$  时, 系统 (4.14) 镇定到  $S_1(-0.7784 + 1.3461i, 0.7614 + 3.5082i, -0.4185 - 0.7237i)$  上的结果; 图 4.2(3) 给出了  $k_1 = k_2 = k_3 = 0.5$  时, 系统镇定到  $S_2(-0.7784 - 1.3461i, 0.7614 - 3.5082i, -0.4185 + 0.7237i)$  上的结果。

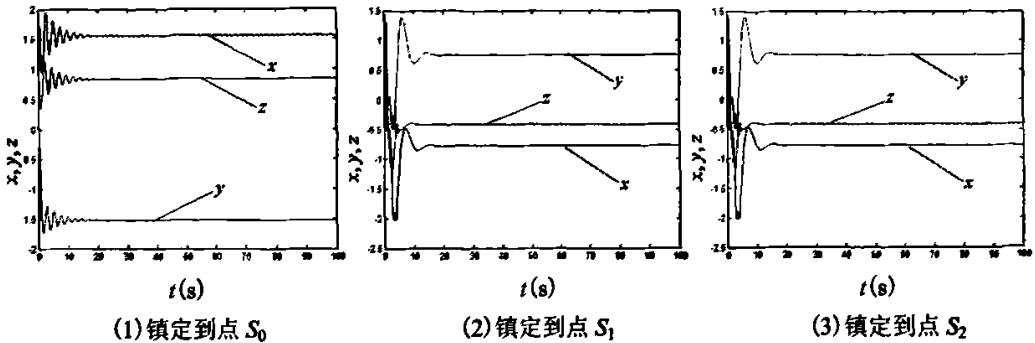
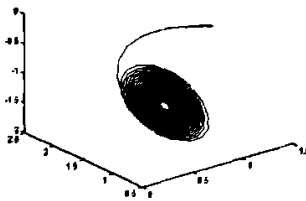


图 4.2 利用单反馈镇定系统(4.14)到平衡点时  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  的变化曲线

Fig. 4.2 The time response of status  $x(t)$ ,  $y(t)$  and  $z(t)$  when controlling system (4.14) to equilibrium points using one feedback control meshod

由图 4.2(1)可见：在 20(s)的时间内，系统(4.14)的  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  都稳定到了 1.5532, -1.5256, 0.8370, 即被镇定到  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  上；由图 4.2(2)可见：当  $t=12(s)$ 、5(s) 和 10(s) 时， $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  分别稳定到了  $-0.7784+1.3461i$ ,  $0.7614+3.5082i$ ,  $-0.4185-0.7237i$ ，即系统(4.14)被镇定到  $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$  上；由图 4.2(3)可见：当  $t=12(s)$ 、5(s) 和 10(s) 时， $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  分别稳定到了  $-0.7784-1.3461i$ ,  $0.7614-3.5082i$ ,  $-0.4185+0.7237i$ ，即系统(4.14)被镇定到  $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$  上。

由图 4.3 可看到，此时受控系统(4.14)的稳定状态是围绕着平衡点  $S_0$  的极限环。



围绕平衡点  $S_0$  的极限环

图 4.3 利用单反馈镇定系统(4.2)到极限环的模拟结果

Fig. 4.3 Simulation results of controlling system (4.2) to limit cycles using one feedback control method

### 4.3 双反馈控制

利用双反馈控制也可将系统(4.2)的混沌运动镇定到不稳定平衡点  $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  或极限环上。双反馈控制器为

$$\begin{cases} u_1 = k_1(a_1x + a_2y + a_3z) \\ u_2 = k_2(y - \bar{y}) \end{cases} \quad (4.20)$$

式(4.20)中  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  为系统(4.4)的不稳定平衡点,  $k_1$  和  $k_2$  是正反馈增益。

#### 4.3.1 镇定到平衡点 $S_0$

仅对系统(4.2)的第三式施加控制, 可得受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z \\ \dot{y} = xz + b \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - k_1(xz + b) - k_2(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (4.21)$$

**命题 4.8** 当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 且  $k_1 > 0.25$  和  $k_2 > 1$ , 受控系统(4.21)渐进稳定并趋于平衡点  $S_0$ 。

**证明:** 将平衡点  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  的坐标代入式(4.21), 可得式(4.21)的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_0) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ c_1 - k_1\bar{z} & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_1\bar{x} - k_2 \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k_1 = 0.5$  和  $k_2 = 1$  时, 可得式(4.32)的三个特征根为  $\lambda_1 = -0.9772$ 、 $\lambda_2 = -0.2474 + 3.0657i$  和  $\lambda_3 = -0.2474 - 3.0657i$ , 此时实根和复根的实部均为负值, 可知, 受控系统(4.21)渐进稳定并趋于平衡点  $S_0$ 。

#### 4.3.2 镇定到平衡点 $S_1$ 和 $S_2$

当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 且  $k_1 < -4$  和  $k_2 > 0.9$ , 受控系统(4.21)渐进稳定并趋于平衡点  $S_1$ 。

**证明:** 将平衡点  $S_1(-0.7784 + 1.3461i, 0.7614 + 3.5082i, -0.4185 - 0.7237i)$  的坐标代入式(4.21), 可得式(4.21)的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ c_1 - k_1 \bar{z} & c_2 \bar{z} & c_2 \bar{y} - k_1 \bar{x} - k_2 \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k_1 = -5$  和  $k_2 = 1$  时, 可得式(4.21)的三个特征根为  $\lambda_1 = -6.0113 + 6.6497i$ 、 $\lambda_2 = -0.8486 - 3.0320i$  和  $\lambda_3 = -0.0145 - 0.3954i$ , 此时所有复根的实部均为负值, 可知, 受控系统(4.32)渐进稳定并趋于平衡点  $S_1$ 。

当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 且  $k_1 < -4$  和  $k_2 > 0.9$ , 受控系统(4.21)渐进稳定并趋于平衡点  $S_2$ 。

证明: 将平衡点  $S_2(-0.7784 - 1.3461i, 0.7614 - 3.5082i, -0.4185 + 0.7237i)$  的坐标代入式(4.21), 可得式(4.21)的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ c_1 - k_1 \bar{z} & c_2 \bar{z} & c_2 \bar{y} - k_1 \bar{x} - k_2 \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k_1 = -5$  和  $k_2 = 1$  时, 可得式(4.21)的 Jacobi 矩阵的三个特征根为  $\lambda_1 = -6.0113 - 6.6497i$ 、 $\lambda_2 = -0.8486 + 3.0320i$  和  $\lambda_3 = -0.0145 + 0.3954i$ , 此时实根和复根的实部均为负值, 可知, 受控系统(4.21)渐进稳定并趋于平衡点  $S_2$ 。

### 4.3.3 数值模拟

选取  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ , 初始值为  $x(0) = 1$ 、 $y(0) = 0$  和  $z(0) = 1$ , 时间步长为  $\tau = 0.002(s)$ , 作者利用双反馈法模拟了将系统(4.2)镇定到平衡点的过程(图 4.6 所示)。其中, 图 4.6(1)给出了当  $k_1 = 0.5$  和  $k_2 = 1$  时, 系统(4.21)镇定到平衡点  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  上的结果; 图 4.6(2)给出了  $k_1 = 0.5$  和  $k_2 = 12$  时, 系统(4.21)镇定到平衡点  $S_1(-0.7784 + 1.3461i, 0.7614 + 3.5082i, -0.4185 - 0.7237i)$  上的结果; 图 4.6(3)给出了  $k_1 = 0.1$  和  $k_2 = 6$  时, 系统(4.21)镇定到平衡点  $S_2(-0.7784 - 1.3461i, 0.7614 - 3.5082i, -0.4185 + 0.7237i)$  上的结果。



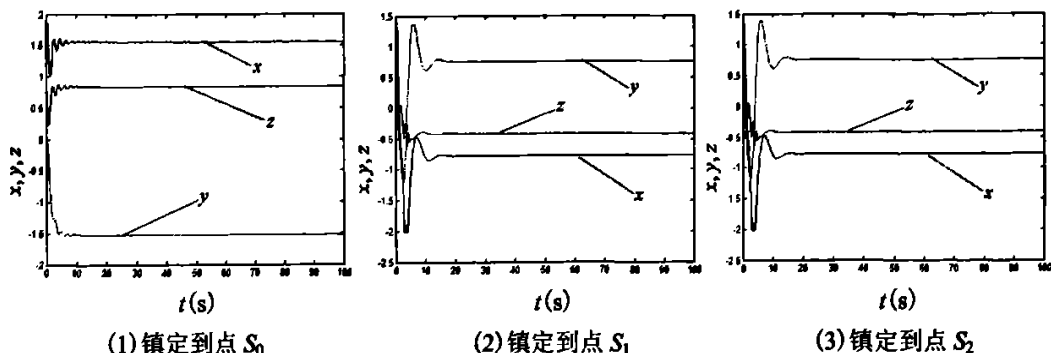


图 4.6 利用双反馈镇定系统 (4.21) 到平衡点时  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  的变化曲线

Fig. 4.6 The time response of status  $x(t)$ ,  $y(t)$  and  $z(t)$  when controlling system (4.21) to equilibrium points using two feedbacks control meshod

由图 4.6(1) 可见：在 13(s) 的时间内，系统 (4.31) 的  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  都稳定到了 1.5532, -1.5256, 0.8370，即被镇定到  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  上；由图 4.6(2) 可见：当  $t=4(s)$ 、 $3(s)$  和  $3(s)$  时， $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  分别稳定到了  $-0.7784+1.3461i$ ,  $0.7614+3.5082i$ ,  $-0.4185-0.7237i$ ，即系统 (4.32) 镇定到  $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$  上；由图 4.6(3) 可见：当  $t=12(s)$ 、 $5(s)$  和  $10(s)$  时， $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  分别稳定到了  $-0.7784-1.3461i$ ,  $0.7614-3.5082i$ ,  $-0.4185+0.7237i$ ，即系统 (4.32) 很快被镇定到  $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$  上。

#### 4.4 交叉反馈控制

设交叉反馈控制函数为

$$\begin{cases} u_1 = k(c_1x + c_2yz) + k(y - \bar{y}) \\ u_2 = k(xz + b) + k(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (4.22)$$

式 (4.22) 中  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  为系统 (4.2) 的不稳定平衡点， $k$  是正反馈增益。将式 (4.22) 代入系统 (4.2) 可得：

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3z \\ \dot{y} = xz + b - k(c_1x + c_2yz) - k(y - \bar{y}) \\ \dot{z} = c_1x + c_2yz + c - k(xz + b) - k(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (4.23)$$

#### 4.4.1 镇定到平衡点 $S_0$ 、 $S_1$ 和 $S_2$

当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 且  $k > -13.8756$ , 受控系统 (4.23) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_0$ 。

证明: 将平衡点  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  的坐标代入式 (4.23), 可得式 (4.23) 的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_0) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} - kc_1 & -kc_2\bar{z} - k & \bar{x} - kc_2\bar{y} \\ c_1 - k_1\bar{z} & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_1\bar{x} - k \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k=1$  时, 可得式 (4.23) 的 Jacobi 矩阵的三个特征根为  $\lambda_1 = -1$ 、 $\lambda_2 = -0.7058 + 2.8132i$  和  $\lambda_3 = -0.7058 - 2.8132i$ , 此时实根和复根的实部均为负值, 可知, 受控系统 (4.23) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_0$ 。

当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 且  $0.3 < k < 1.3$ , 受控系统 (4.23) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_1$ 。

证明: 将平衡点  $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$  的坐标代入式 (4.23), 可得式 (4.23) 的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} - kc_1 & -kc_2\bar{z} - k & \bar{x} - kc_2\bar{y} \\ c_1 - k_1\bar{z} & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_1\bar{x} - k \end{pmatrix},$$

经过计算, 当  $k=1$  时, 可得式 (4.23) 的三个特征根为  $\lambda_1 = -1.9712 - 6.6125i$ 、 $\lambda_2 = -0.0386 + 0.6449i$  和  $\lambda_3 = -2.1047 - 0.2313i$ , 此时所有复根的实部均为负值, 可知, 受控系统 (4.23) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_1$ 。

当  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$  时, 且  $0.3 < k < 1.3$ , 受控系统 (4.23) 渐进稳定并趋于平衡点  $S_2$ 。

证明: 将平衡点  $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$  的坐标代入式 (4.23), 可得式 (4.23) 的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{z} - kc_1 & -kc_2\bar{z} - k & \bar{x} - kc_2\bar{y} \\ c_1 - k_1\bar{z} & c_2\bar{z} & c_2\bar{y} - k_1\bar{x} - k \end{pmatrix},$$

经过计算,当  $k=1$  时,可得式(4.23)的 Jacobi 矩阵的三个特征根为  $\lambda_1 = -1.9712 + 6.6125i$ 、 $\lambda_2 = -0.0386 - 0.6449i$  和  $\lambda_3 = -2.1047 + 0.2313i$ , 此时所有复根的实部均为负值, 可知, 受控系统(4.23)渐进稳定并趋于平衡点  $S_2$ 。

#### 4.4.2 数值模拟

选取  $a_1 = -1.221, a_2 = 1.5, a_3 = 5, b = -1.3, c_1 = -1.5, c_2 = -1$ , 初始值为  $x(0) = 1, y(0) = 0$  和  $z(0) = 1$ , 时间步长为  $\tau = 0.002(s)$ , 作者利用交叉反馈法模拟了将系统(4.2)镇定到平衡点的过程(图 4.7 所示)。其中, 图 4.7(1)给出了当  $k=1$  时, 系统(4.23)镇定到平衡点  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  上的结果; 图 4.7(2)给出了  $k=1$  时, 系统(4.23)镇定到平衡点  $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$  上的结果; 图 4.7(3)给出了  $k=1$  时, 系统(4.23)镇定到平衡点  $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$  上的结果。

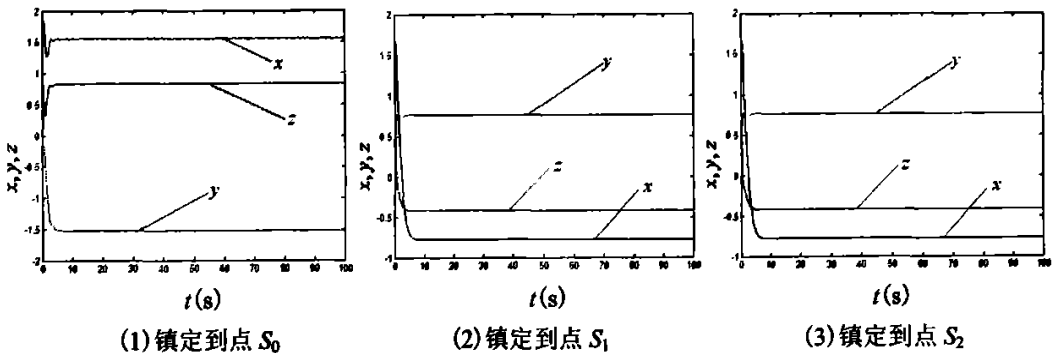


图 4.7 利用交叉反馈镇定系统(4.23)到平衡点时  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  的变化曲线

Fig. 4.7 The time response of status  $x(t), y(t)$  and  $z(t)$  when controlling system (4.23) to equilibrium points using cross feedback control meshod

由图 4.7 (1)可见: 在 6(s)的时间内, 系统(4.34)的  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  都稳定到了 1.5532, -1.5256, 0.8370, 即被镇定到  $S_0(1.5532, -1.5256, 0.8370)$  上; 由图 4.7(2)可见: 当  $t=6(s)$ 、 $3(s)$  和  $2(s)$  时,  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  分别稳定到了  $-0.7784+1.3461i$ ,  $0.7614+3.5082i$ ,  $-0.4185-0.7237i$ , 即系统(4.34)被镇定到  $S_1(-0.7784+1.3461i, 0.7614+3.5082i, -0.4185-0.7237i)$  上; 由图 4.7(3)可见: 当  $t=6(s)$ 、 $3(s)$  和  $2(s)$  时,  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  分别稳定到了  $-0.7784-1.3461i$ ,  $0.7614-3.5082i$ ,  $-0.4185+0.7237i$ , 系统镇定到  $S_2(-0.7784-1.3461i, 0.7614-3.5082i, -0.4185+0.7237i)$  上。

## 结 论

首先,这篇论文简要介绍了分形的定义及其发展, M 集和 J 集的概念及其两者的区别,重点介绍了 M 集内部精细结构的着色机制的研究上,介绍了逃逸时间算法以及模极值逃逸时间算法构造 M 集内部结构的方法。

实数阶 M 集的复动力系统分形特性:由迭代变换  $Z \leftarrow Z^a + C$  得到的分形图是与指数  $a$  的取值有关的。 $a$  取正整数时,得到的分形图呈波瓣状结构,其波瓣结构数目等于  $a-1$ 。当  $a$  为奇数时,图形对复平面的实轴和虚轴都对称;当  $a$  为偶数时,图形仅对称于复平面的实轴。 $a$  取负整数时,得到的分形图是围绕中心区域的均匀分支结构,分支结构的数目等于  $|a|+1$ 。当  $a$  为奇数时,图形的分支结构同时对称于复平面的实轴和虚轴,当  $a$  为偶数时,分枝结构仅对称于复平面的实轴。 $a$  为非整数时,若  $-\pi \leq A \leq \pi$ , 图像关于实轴对称,若  $0 \leq A \leq 2\pi$ , 图像不具有此特性。

实数阶 J 的复动力系统分形特性:与 M 集分形图不同的是, J 集分形图当指数是整数时(无论是正整数还是负整数),都会呈现数目为  $|a|$  个花瓣的花瓣图。

其次,研究了整数阶四元数广义 M-J 集的结构特征。通过对广义 M 集内部结构的研究,得出:广义 M 集及其内部结构是以各周期点的中心为球心的层层嵌套的球体;广义 M 集及其内部结构关于坐标轴对称;在立体空间中,各点的最小模极值的分布是有规律的,它们是以各周期的中心点为球心的同心球体,且按照红色,紫色,深绿,淡绿的顺序循环出现,呈现了一定的周期性。

最后,利用单反馈、双反馈和交叉反馈方法实现了一类混沌系统的混沌控制,并基于 Lyapunov 直接法和 Routh-Hurwitz 判据讨论了一类混沌系统的混沌状态轨道达到平衡点或不稳定周期轨道时的条件,同时给出了理论上的证明。数值模拟进一步验证了这三种控制方法均可成功将一类混沌系统的混沌运动轨道镇定到不稳定平衡点或不稳定周期轨道——极限环上。

到目前为止,本文的几种研究 M-J 集分形结构的几种方法还仍然停留在理论研究阶段,还有待于挖掘其与实际应用之间的联系,以扩展分形的应用领域。

## 参 考 文 献

- [1] 王兴元. 广义 M-J 集的分形理论. 大连:大连理工大学出版社, 2002.
- [2] 李奕彪, 李东. Mandelbrot 集与 Julia 集的图像生成算法. 中国图像图形学报, 1997, 2(7):506-508.
- [3] 朱志斌. Mandelbrot 集与 Julia 集关系的初探. 河西学院学报, 2003, 19(5):59-61.
- [4] 王琰. 模极值逃逸时间算法构造 M-J 混沌分布图. 工程图学学报, 1999, (2):15-20.
- [5] 朱华锋, 谭建荣. 基于广义 Mandelbrot 集的复动力系统的分形特性. 小型微型计算机系统, 2000, 21(11):1162-1165.
- [6] Benoit B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. San Francisco. W. H. Freeman and Company, 1982.
- [7] Peitgen H O, Saupe D. The science of fractal images. Berlin:Springer-Verlag, 1988.
- [8] Goldberg L R, Keen L. The mapping class group of a generic quadratic rational map and automorphisms of the 2-shift. Inventiones Mathematicae, 1990, 101(1):335-372.
- [9] Gujar U G, Bhavsar V C. Fractals from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  in the complex c-plane. Computers & Graphics, 1991, 15(3):441-449.
- [10] Gujar U G, Bhavsar V C, Vangala N. Fractals images from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  in the complex z-plane. Computers & Graphics, 1992, 16(1):45-49.
- [11] Dhurandhar S V, Bhavsar V C, Gujar U G. Analysis of z-plane fractals images from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  for  $\alpha < 0$ . Computers & Graphics, 1993, 17(1):89-94.
- [12] Wang X Y, Liu X D, Zhu W Y et al. Analysis of c-plane fractal images from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  for  $\alpha < 0$ . Fractals, 2000, 8(3):307-314.
- [13] Sasmor J C. Fractals for functions with rational exponent. Computers & Graphics, 2004, 28(4):601-615.
- [14] Romera M, Pastor G, Alvarez G et al. External arguments of Douady cauliflowers in the Mandelbrot set. Computers & Graphics, 2004, 28(3):437-449.
- [15] Pastor G, Romera M, Alvarez G et al. Chaotic bands in the Mandelbrot set. Computers & Graphics, 2004, 28(5):779-784.
- [16] Geum Y H, Kim Y I. Accurate computation of component centers in the degree-n bifurcation set. Computers & Mathematics with Applications, 2004, 48(1-2):163-175.
- [17] Wang X Y, Chang P J. Research on fractal structure of generalized M-J sets utilized Lyapunov exponents and periodic scanning techniques. Applied Mathematics & Computation, 2006, 175(2):1007-1025.
- [18] Entwistle I D. Julia set art and fractals in the complex plane. Computers & Graphics, 1989, 13(3):389-392.

- [19] Wang X Y. Fractal structures of the non-boundary region of the generalized Mandelbrot set. *Progress in Natural Science*, 2001, 11(9):693-700.
- [20] Jone D J. Three unconventional representations of the Mandelbrot set. *Computers & Graphics*, 1990, 14(1):127-129.
- [21] Nonton A. Generation and display of geometric fractals in 3-D. *Computer Graphics*, 1982, 3(1):61-67.
- [22] Norton A. Julia sets in the quaternions. *Computers & Graphics*, 1989, 13(2):267-278.
- [23] Heidrich R, Jank G. On the iteration of quaternionic moebius transformations. *Complex Variables*, 1996, 29(2):313-318.
- [24] Lakner M, Skapin-Rugelj M, Petek P. Symbolic dynamics in investigation of quaternionic Julia sets. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 24(5):1189-1201.
- [25] Holbrook J A R. Quaternionic Fatou-Julia sets. *Applied Mathematical Notes*, 1987, 11(1):79-94.
- [26] Rochon D. A generalized mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 2000, 8(4):355-368.
- [27] Price G B. An introduction to multicomplex spaces and functions. New York:Marcel Dekker Inc., 1991:138-410.
- [28] Fauser B. Clifford algebraic remark on the Mandelbrot set of two-component number systems. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 1996, 6(1):1-26.
- [29] Ryan J. Complexified Clifford analysis. *Complex Variables*, 1982, 1(2):119-149.
- [30] Kantor I L, Solodovnikov S S. Hypercomplex number:An elementary introduction to algebras. New York:Springer-Verlag, 1989:26-64.
- [31] Chatelin F C, Meskauskas T. Computation with hypercomplex numbers. *Nonlinear Analysis*, 2001, 47(5):3391-3400.
- [32] Zhou T, Chen G R, Yang Q G. Constructing a new chaotic system based on the Silnikov criterion. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19(4):985-993.
- [33] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11):1196-1199.
- [34] Chen G, Dong X. From chaos to order:methodologies, perspectives and applications. Singapore:World Scientific, 1998.
- [35] 王光瑞, 于熙龄, 陈式刚. 混沌的控制、同步与利用. 北京:国防工业出版社, 2001.
- [36] 关新平, 范正平, 陈彩莲, 等. 混沌控制及其在保密通信中的应用. 北京:国防工业出版社, 2002.
- [37] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步. 北京:科学出版社, 2003.
- [38] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌. 北京:电子工业出版社, 2003.
- [40] Singer J, Wang Y Z, Bau H H. Controlling a chaotic system. *Physical Review Letters*, 1991, 66(9):1123-1125.

- [41] Chen G. On some controllability conditions for chaotic dynamics control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1997, 8(9):1461-1470.
- [42] Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback. *Physica A*, 1995, 206(5-6): 323-330.
- [43] Vassiliadis D. Parametric adaptive control and parameter identification of low-dimensional chaotic systems. *Physica D*, 1994, 71(3):319-341.
- [44] Hwang C, Chow H, Wang Y. A new feedback control of a modified chua' s circuit system. *Physica D*, 1996, 92(1-2):95-100.
- [45] 王兴元, 刘明. 用滑模控制方法实现具有扇区非线性输入的主从混沌系统同步. *物理学报*, 2005, 54(6):2584-2589.
- [46] Hwang C, Hsieh J. A linear continuous feedback control of Chua' s circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1997, 8(9):1507-1515.
- [47] Tian Y, Gao F. Adaptive control of chaotic continuous-time systems with delay. *Physica D*, 1998, 117(1-4):1-12.
- [48] Pavlica V, Petrovacki D. About simple fuzzy control and fuzzy control based on fuzzy relational equations. *Fuzzy Sets and Systems*. 1999, 101(1):41-47.
- [49] Wang X, Chen G, Yu X. Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback. *Chaos*, 2000, 10(4):771-779.
- [50] Liu F, Ren Y, Shan X M et al. A linear feedback synchronization theorem for a class of chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 13(4):723-730.
- [51] Ömer M, Ercan S. Observer based synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, 1996, 54(5):4803-4811.
- [52] Wang Y W, Guan Z H, Wang H O. LMI-based fuzzy stability and synchronization of Chen' s system. *Physics Letters A*, 2003, 320(2-3):154-159.
- [53] Rajasekar S. Controlling of chaotic motion by chaos and noise signals in a logistic map and a Bonhoeffer — van der Pol oscillator. *Physical Review E*, 1995, 51(1):775-778.
- [54] Rajasekar S, Murraali K, Lakshmanan M. Control of chaos by nonfeedback methods in a simple electronic circuit system and the FitzHugh-Nagumo equation. *Chaos Solitons & Fractals*, 1997, 8(9):1545-1558.
- [55] Rameshi M, Narayanan S. Chaos control by nonfeedback methods in the presence of noise. *Chaos Solitons and Fractals*, 1999, 10(9):1473-1489.
- [56] Toshimichi S, Kunihiro M. Control of chaos from a piecewise linear hysteresis circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1995, 42(3):168-172.
- [57] Franz M, Zhang M H. Suppression and creation chaos in a periodically forced Lorenz system. *Physical Review E*, 1995, 52(4):3558-3565.

## 攻读硕士学位期间发表学术论文情况

[1] Wang Xingyuan, Gu Lina. Research fractal structures of Generalized M-J Sets using three algorithms. FRACTALS (been accepted).

刊物类型:EI,SCI 刊源

主办单位:Singapore: World Scientific

论文章节:第一章, 第二章

[2] Wang Xingyuan, Gu Lina. Research on fractal properties of generalized M sets and generalized M-J sets for quaternion using three algorithms. Mathematical and Computer Modeling (being reviewed).

刊物类型:SCI 刊源

主办单位:Elsevier B.V.

论文章节:第三章

[3] Wang Xingyuan, Gu Lina. Chaos control of Smale horseshoes chaotic system. International Journal of Robust and Nonlinear Control. (being reviewed).

刊物类型:SCI 刊源

主办单位:John Wiley & Sons, Ltd

论文章节:第四章

[4] Wang Xingyuan, Song Wenjing, Gu Lina. Control of generalized Mandelbrot sets. Applied Mathematics and Computation. (being reviewed).

刊物类型:SCI 刊源

主办单位:Elsevier B.V.

[5] Wang Xingyuan, Song Wenjing, Gu Lina. Control of generalized Julia sets. Theory, Methods & Applications. (being reviewed).

刊物类型:SCI 刊源

主办单位:Elsevier B.V.



## 致 谢

本文的完成首先要感谢的是我的导师王兴元教授，研究生期间，无论是在理论学习阶段，还是在论文的选题、开题、研究和撰写的每一个环节，无不得到王老师的悉心指导和帮助。王老师治学严谨，学识渊博，平易近人，他对我的指导和教诲使我受益终生。借此机会向王老师表达最衷心的感谢！他宽广的学识和丰富的实践经验使得作者在科研选题、工作实践中获益良多，必将受益终生。

课题组是一个小团队，没有课题组其他同学的大力配合，就不会有我今天的工作和研究成果。感谢王明军，辜妮妮，郎亚辉，赵群在论文写作过程中对我的帮助，感谢教研室的其他同学以及课题组的其他师兄、师姐、师弟、师妹，大家共同营造了良好的学术氛围和愉快的生活环境，这种良好的实验室环境是我论文工作的保障。

感谢母校大工对我的培养，在这里让我学会学习、学会做事、学会做人。感谢电信学院尤其是计算机系的所有老师，是您们孜孜不倦的教诲使我学到了知识、掌握了本领。

最后要感谢的是我的父母，正是由于你们默默无闻的奉献和一贯的支持和鼓励，才使我有信心和毅力完成全部的学业。感谢我所有的亲人，没有你们的支持和帮助，我同样不能走到今天。

我愿在未来的学习和工作过程中，以更加丰厚的成果来答谢所有关心和支持我的亲人、老师、同学和朋友。