

第一章:

1. 为使氦氖激光器的相干长度达到 1km, 它的单色性 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ 应是多少?

解: 相干长度 $L_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{c}{\nu_2 - \nu_1}$

将 $\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1}$, $\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2}$ 代入上式, 得:

$$L_c = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \text{ 因此}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{L_c}, \text{ 将 } \lambda_0 = 632.8 \text{ nm}, L_c = 1 \text{ km} \text{ 代入得:}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{632.8 \text{ nm}}{1 \text{ km}} = 6.328 * 10^{-10}$$

2. 如果激光器和微波激射器分别在 $\lambda = 10 \mu\text{m}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$ 和 $\nu = 3000 \text{ MHz}$ 输出 1W 连续功率, 问每秒钟从激光上能级向下能级跃迁的粒子数是多少?

解: $n = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{ch}$

$$(1) n = \frac{1 \text{ W} * 10 \mu\text{m}}{6.626 * 10^{-34} \text{ Js} * 3 * 10^8 \text{ ms}^{-1}} \approx 5.03 * 10^{19} \text{ 个}$$

$$(2) n = \frac{1 \text{ W} * 500 \text{ nm}}{6.626 * 10^{-34} \text{ Js} * 3 * 10^8 \text{ ms}^{-1}} \approx 2.52 * 10^{18} \text{ 个}$$

$$(3) n = \frac{1 \text{ W}}{6.626 * 10^{-34} \text{ Js} * 3000 \text{ MHz}} \approx 5.03 * 10^{23} \text{ 个}$$

3. 设一对激光能级为 E_2 和 E_1 ($f_2 = f_1$), 相应频率为 ν (波长为 λ), 能级上的粒子数密度分别为 n_2 和 n_1 , 求:

(a) 当 $\nu = 3000 \text{ MHz}$, $T = 300 \text{ K}$ 时, $\frac{n_2}{n_1} = ?$

(b) 当 $\lambda = 1 \mu\text{m}$, $T = 300 \text{ K}$ 时, $\frac{n_2}{n_1} = ?$

(c) 当 $\lambda = 1 \mu\text{m}$, $\frac{n_2}{n_1} = 0.1$ 时, 温度 $T = ?$

解:
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{f_2}{f_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

(a)
$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 3000 \cdot 10^6}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \approx e^{-4.8 \cdot 10^{-4}} \approx 1$$

(b)
$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} = e^{-\frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} \approx e^{-4.8 \cdot 10^0} \approx 1.4 \cdot 10^{-21}$$

(c)
$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} = e^{-\frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 1 \cdot 10^{-6} T}} = 0.1$$

得:
$$T \approx 6.3 \cdot 10^3 \text{ K}$$

4. 在红宝石 Q 调制激光器中, 有可能将几乎全部 Cr^{3+} 离子激发到激光上能级并产生激光

巨脉冲。设红宝石棒直径 1cm, 长度 7.5cm, Cr^{3+} 浓度为 $2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 巨脉冲宽度为 10ns, 求输出激光的最大能量和脉冲功率。

解: 由于红宝石为三能级激光系统, 最多有一般的粒子能产生激光:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} n h \nu = \frac{1}{2} \frac{n h c}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\pi (0.5)^2 \cdot 7.5 \cdot 2 \cdot 10^{19} \cdot 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{694.3 \cdot 10^{-9}} = 17 \text{ J}$$

$$P = \frac{E_{\max}}{\tau_R} = 1.7 \cdot 10^9 \text{ W}$$

5. 试证明, 由于自发辐射, 原子在 E_2 能级的平均寿命 $\tau_s = \frac{1}{A_{21}}$

证明: 自发辐射, 一个原子由高能级 E_2 自发跃迁到 E_1 , 单位时间内能级 E_2 减少的粒子

数为:

$$\frac{dn_2}{dt} = -\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp}, \quad \text{自发跃迁几率 } A_{21} = \left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp} \frac{1}{n_2}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -A_{21}n_2, \quad n_2(t) = n_{20}e^{-A_{21}t} \equiv n_{20}e^{-\frac{t}{\tau_s}}$$

$$\text{因此 } \tau_s = \frac{1}{A_{21}}$$

6. 某一分子的能级 E_4 到三个较低能级 E_1 E_2 和 E_3 的自发跃迁几率分别是 $A_{43}=5*10^7 s^{-1}$, $A_{42}=1*10^7 s^{-1}$ 和 $A_{41}=3*10^7 s^{-1}$, 试求该分子 E_4 能级的自发辐射寿命 τ_4 。若 $\tau_1=5*10^{-7} s$, $\tau_2=6*10^{-9} s$, $\tau_3=1*10^{-8} s$, 在对 E_4 连续激发并达到稳态时, 试求相应能级上的粒子数比值 $\frac{n_1}{n_4}$, $\frac{n_2}{n_4}$ 和 $\frac{n_3}{n_4}$, 并回答这时在哪两个能级之间实现了集居数反转。

$$(1) \tau_4 = \frac{1}{A_{43} + A_{42} + A_{41}} = 1.1*10^{-8} s$$

(2) 在稳定状态时, 不考虑无辐射跃迁和热弛豫过程,

$$\text{对 } E_3: A_{43}n_4 = \frac{n_3}{\tau_3}, \quad \frac{n_3}{n_4} = A_{43}\tau_3 = 5*10^{-1} \quad \text{实现 } E_4 \text{ 和 } E_3 \text{ 能级集居数反转}$$

$$\text{对 } E_2: A_{42}n_4 = \frac{n_2}{\tau_2}, \quad \frac{n_2}{n_4} = A_{42}\tau_2 = 6*10^{-2} \quad \text{实现 } E_4 \text{ 和 } E_2 \text{ 能级集居数反转}$$

$$\text{对 } E_1: A_{41}n_4 = \frac{n_1}{\tau_1}, \quad \frac{n_1}{n_4} = A_{41}\tau_1 = 15 \quad \text{没有实现 } E_4 \text{ 和 } E_1 \text{ 能级集居数反转}$$

7. 证明当每个模内的平均光子数 (光子简并度) 大于 1 时, 辐射光中受激辐射占优势。

$$\text{证明: } n = \frac{B_{21}\rho_\gamma}{A_{21}} = \frac{W_{21}}{A_{21}} > 1$$

即受激辐射跃迁几率大于自发辐射跃迁几率。受激辐射优势大。

8. (1) 一质地均匀的材料对光的吸收系数为 $0.01mm^{-1}$, 光通过 10cm 长的该材料后,

出射光强为入射光强的百分之几？（2）一光束通过长度为 1m 的均匀激励的工作物质。如果出射光强是入射光强的两倍，试求该物质的增益系数。

解：（1） $I(z)=I_0 e^{-\alpha z}$

$$\frac{I(z)}{I_0}=e^{-\alpha z}=e^{-0.01*100}\approx 36.8\%$$

$$(2) I(z)=I_0 e^{g^0 z}, \quad \frac{I(z)}{I_0}=e^{g^0 z}$$

$$2=e^{g^0 L}, \quad g^0=\frac{\ln 2}{L}\approx 0.7 \text{ m}^{-1}$$

第二章

1. 试利用往返矩阵证明对称共焦腔为稳定腔，即任意傍轴光线在其中可以往返无限多次，而且两次往返即自行闭合。

证明：设从镜 $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$ ，初始坐标为 $\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$ ，往返一次后坐标变为 $\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$ ，往返

$$\text{两次后坐标变为 } \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = T \cdot T \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$$

而对称共焦腔， $R_1=R_2=L$

$$\text{则 } A=1-\frac{2L}{R_2}=-1$$

$$B=2L\left(1-\frac{L}{R_2}\right)=0$$

$$C=-\left[\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}\left(1-\frac{2L}{R_1}\right)\right]=0$$

$$D=-\left[\frac{2L}{R_1}-\left(1-\frac{2L}{R_1}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right]=-1$$

$$\text{所以, } T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故, } \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \text{ 即, 两次往返后自行闭合。}$$

2. 试求平凹、双凹、凹凸共轴球面镜腔的稳定性条件。

解：共轴球面腔的稳定性条件为 $0 < g_1 \cdot g_2 < 1$ ，其中 $g_1=1-\frac{L}{R_1}$ ， $g_2=1-\frac{L}{R_2}$

（a 对平凹腔： $R_2=\infty$ ，则 $g_2=1$ ，

$$0 < 1 - \frac{L}{R_1} < 1, \text{ 即 } 0 < L < R_1$$

$$(b) \text{对双凹腔: } 0 < g_1 \cdot g_2 < 1, 0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1$$

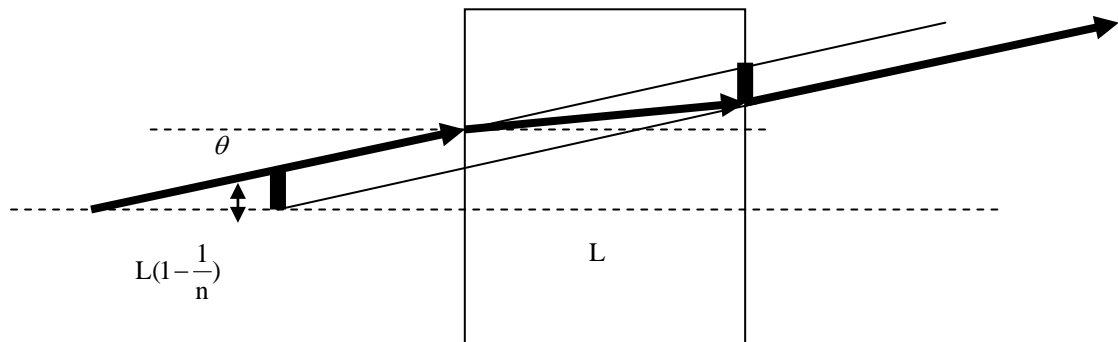
$$R_1 > L, R_2 > L \text{ 或 } R_1 < L, R_2 < L \text{ 且 } R_1 + R_2 > L$$

$$(c) \text{对凹凸腔: } R_1 = |R_1|, R_2 = -|R_2|,$$

$$0 < \left(1 - \frac{L}{|R_1|}\right) \left(1 + \frac{L}{|R_2|}\right) < 1, R_1 > L \text{ 且 } R_1 - |R_2| < L$$

3. 激光器的谐振腔由一面曲率半径为 1m 的凸面镜和曲率半径为 2m 的凹面镜组成，工作物质长 0.5m，其折射率为 1.52，求腔长 L 在什么范围内是稳定腔。

解：



由图可见有工作物质时光的单程传播有效腔长减小为无工作物质时的

$$L_e = L_c - L \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad ?$$

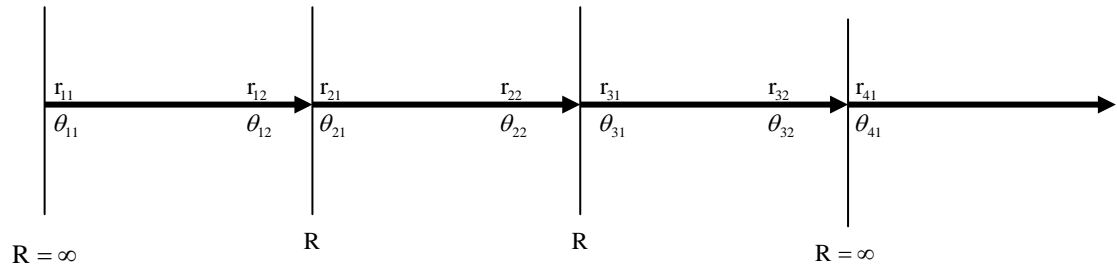
$$\text{由 } 0 < \left(1 + \frac{L_e}{1}\right) \left(1 - \frac{L_e}{2}\right) < 1, \text{ 得 } 1\text{m} < L_e < 2\text{m}$$

$$\text{则 } 1.17\text{m} < L_c < 2.17\text{m}$$

4. 图 2.1 所示三镜环形腔，已知 l ，试画出其等效透镜序列图，并求球面镜的曲率半径 R 在什么范围内该腔是稳定腔。图示环形腔为非共轴球面镜腔。在这种情况下，对于在由光轴组成的平面内传输的子午光线，式 (2.2.7) 中的 $f = (R \cos \theta) / 2$ ，对于在与此垂直的平面内传输的弧矢光线， $f = R / (2 \cos \theta)$ ， θ 为光轴与球面镜法线的夹角。

解：透镜序列图为

解：透镜序列图为



该三镜环形腔的往返矩阵为：

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = D = 1 - 3\frac{L}{f} + \left(\frac{L}{f}\right)^2$$

由稳定腔的条件： $-1 < \frac{1}{2}(A + D) < 1$ ，得： $0 < \left(\frac{L}{f} - 1\right)\left(\frac{L}{f} - 2\right) < 2$

$$\frac{L}{3} < f < \frac{L}{2} \text{ 或 } f > L。$$

若为子午光线，由 $f = \frac{1}{2}R \cos 30^\circ$ 则 $\frac{4L}{3\sqrt{3}} < R < \frac{2L}{\sqrt{3}}$ 或 $R > \frac{4L}{\sqrt{3}}$

若为弧矢光线，由 $f = \frac{R}{2\cos 30^\circ}$ ，则 $\frac{L}{\sqrt{3}} < R < \frac{\sqrt{3}L}{2}$ 或 $R > \sqrt{3}R$

5. 有一方形孔径共焦腔氦氖激光器， $L=30\text{cm}$ ， $d=2a=0.12\text{cm}$ ， $\lambda=632.8\text{nm}$ ，镜的反射率为 $r_1=1$ ， $r_2=0.96$ ，其他损耗以每程 0.003 估计。此激光器能否作单模运转？如果想在其共焦镜面附近加一个方形小孔阑来选择 TEM_{00} ，小孔边长应为多大？试根据图 2.5.5

作一大略的估计、氦氖增益由公式 $e^{g^0 l} = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \frac{l}{d}$ 计算。

$$\text{解：菲涅耳数 } N = \frac{a^2}{L\lambda} = \frac{(0.06\text{cm})^2}{30\text{cm} \cdot 632.8\text{nm}} \approx 1.9$$

$$\text{增益为 } e^{g^0 l} = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \frac{30}{0.12} = 1.075$$

TEM_{00} 模衍射损耗为 $4.7 \cdot 10^{-9}$

TEM_{01} 模衍射损耗为 10^{-6} ，总损耗为 0.043，增益大于损耗；

TEM_{02} 模衍射损耗为 5×10^{-6} ，总损耗为 0.043，增益大于损耗；

衍射损耗与腔镜损耗和其它损耗相比均可忽略，三横模损耗均可表示为 $\delta = 0.234$

$e^{-\delta} * e^{g_0 l} = 1.05 > 1$ 因此不能作单模运转

为实现 TEM_{00} 单横模运转所加小孔光阑边长为：

$$2\omega_{0s} = 2\sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{30 \times 632.8}{\pi}} \approx 5.0 \times 10^{-4} \text{ m}$$

6. 试求出方形镜共焦腔面上 TEM_{30} 模的节线位置，这些节线是等距分布的吗？

解： $H_3(X) = 8X^3 - 12X = 0$

$$X_1 = 0, \quad X_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \text{由 } \sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}} x = 0, \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 得节线位置:}$$

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3L\lambda}{4\pi}}$$

因此节线是等间距分布的。

7. 求圆形镜共焦腔 TEM_{20} 和 TEM_{02} 模在镜面上光斑的节线位置。

解： TEM_{02} 模的节线位置由缔合拉盖尔多项式：

$$\text{由 } L_2^0(\zeta) = \frac{1}{2}(2 - 4\zeta + \zeta^2) = 0 \text{ 得 } \zeta_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2},$$

$$\text{又 } \zeta = 2 \frac{r^2}{\omega_{0s}^2} \text{ 则 } r = \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}} \omega_{0s}$$

TEM_{20} 模的节线位置为 $r = 0$ 或 $\sin 2\phi = 0$,

$$\text{即: } \phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

8. 今有一球面腔， $R_1 = 1.5 \text{ m}$ ， $R_2 = -1 \text{ m}$ ， $L = 80 \text{ cm}$ 。试证明该腔为稳定腔；求出

它的等价共焦腔的参数。

$$\text{解: } g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 0.47 \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = 1.8, \quad g_1 \bullet g_2 = 0.846$$

即: $0 < g_1 \bullet g_2 < 1$, 所以该腔为稳定腔。

由公式 (2.8.4)

$$Z_1 = \frac{L(R_2 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} = -1.31\text{m}$$

$$Z_2 = \frac{-L(R_1 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} = -0.15\text{m}$$

$$f^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{[(L - R_1) + (L - R_2)]^2} = 0.25\text{m}^2$$

$$f = 0.5\text{m}$$

9. 某二氧化碳激光器采用平凹腔, $L = 50\text{cm}$, $R = 2\text{m}$, $2a = 1\text{cm}$, $\lambda = 10.6\mu\text{m}$ 。试计算

ω_{s1} 、 ω_{s2} 、 ω_0 、 θ_0 、 δ_{00}^1 、 δ_{00}^2 各为多少。

$$\text{解: } g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} = \frac{3}{4},$$

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} \left[\frac{R_1^2(R_2 - L)}{L(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)} \right]^{1/4} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} [L(R_2 - L)]^{1/4} \quad (R_1 \rightarrow \infty)$$

$$= \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \approx 1.7 * 10^{-3} \text{m}$$

$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} \left[\frac{R_2^2(R_1 - L)}{L(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)} \right]^{1/4}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{LR_2^2}{R_2 - L} \right)^{1/4}, \quad (R_1 \rightarrow \infty)$$

$$= \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \approx 2.0 * 10^{-3} \text{m}$$

$$\theta_0 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}} \left\{ \frac{[g_1 + g_2 - 2g_1g_2]^2}{g_1g_2(1-g_1g_2)} \right\}^{1/4} \approx 4.0 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$N_{\text{ef1}} = \frac{a_1^2}{\pi\omega_{s1}^2} = \infty, \quad \delta_{00}^1 = 0$$

$$N_{\text{ef2}} = \frac{a_2^2}{\pi\omega_{s2}^2} = 2.05, \quad \delta_{00}^2 = 8.1 * 10^{-10}$$

10. 试证明，在所有 $\frac{a^2}{L\lambda}$ 相同而 R 不同的对称稳定球面腔中，共焦腔的衍射损耗最低。

这里 L 表示腔长， $R = R_1 = R_2$ 为对称球面腔反射镜的曲率半径， a 为镜的横向线度。

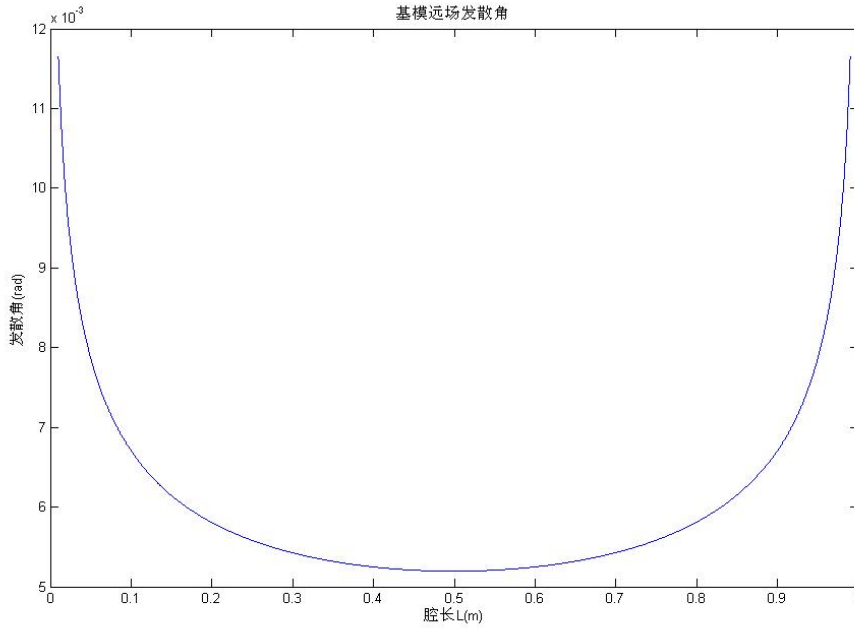
证明：在共焦腔中，除了衍射引起的光束发散作用以外，还有腔镜对光束的会聚作用。这两种因素一起决定腔的损耗的大小。对共焦腔而言，傍轴光线的几何偏折损耗为零。只要 N 不太小，共焦腔模就将集中在镜面中心附近，在边缘处振幅很小，衍射损耗极低。

11. 今有一平面镜和一 $R=1\text{m}$ 的凹面镜，问：应如何构成一平凹稳定腔以获得最小的基模远场角；画出光束发散角与腔长 L 的关系曲线。

$$\text{解： } \theta_0 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}} \left\{ \frac{[g_1 + g_2 - 2g_1g_2]^2}{g_1g_2(1-g_1g_2)} \right\}^{1/4} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}} \left[\frac{1-g_2}{g_2} \right]^{1/4}, \quad (g_1=1)$$

$$= 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}} \left(\frac{1}{L(R_2-L)} \right)^{1/4}$$

当 $L = \frac{R_2}{2} = 0.5\text{m}$ 时， θ_0 最小。



12. 推导出平凹稳定腔基模在镜面上光斑大小的表达式, 作出: (1) 当 $R=100\text{cm}$ 时, ω_{s1} , ω_{s2} 随 L 而变化的曲线; (2) 当 $L=100\text{cm}$ 时, ω_{s1} , ω_{s2} 随 R 而变化的曲线。

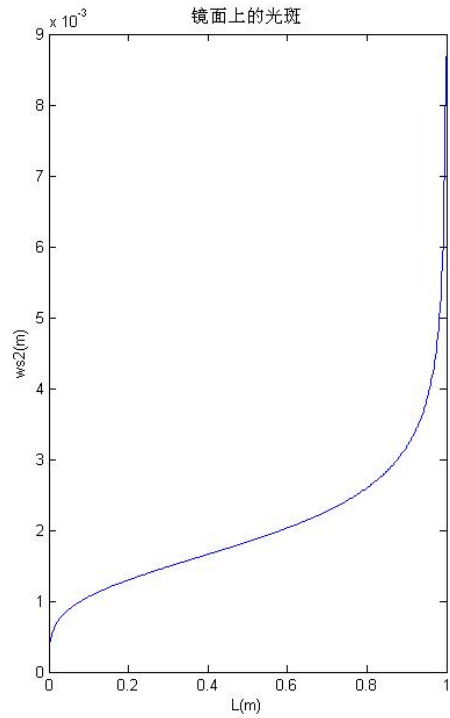
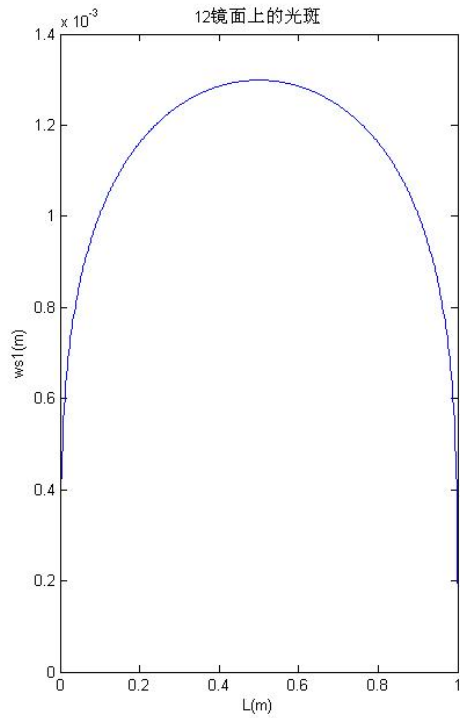
解:
$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} \left[\frac{R_1^2(R_2 - L)}{L(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)} \right]^{1/4}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} [L(R_2 - L)]^{1/4}, \quad (R_1 \rightarrow \infty)$$

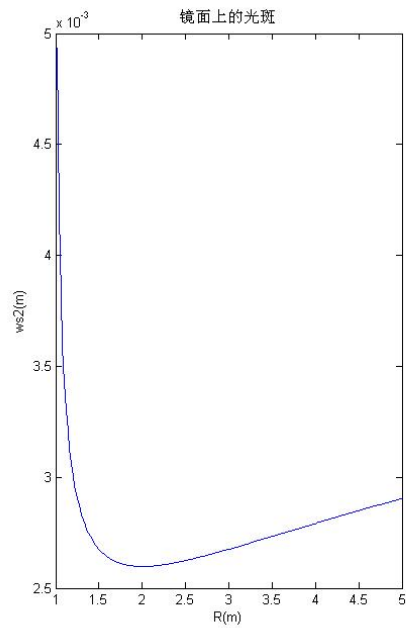
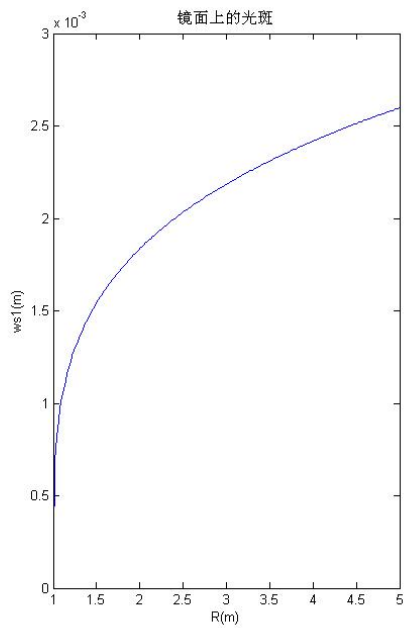
$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} \left[\frac{R_2^2(R_1 - L)}{L(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)} \right]^{1/4}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{LR_2^2}{R_2 - L} \right)^{1/4} \quad (R_1 \rightarrow \infty)$$

(1) $R_2 = R = 100\text{cm}$



(2) $L=100cm$



13.某二氧化碳激光器，采用平凹腔，凹面镜的 $R=2m$ ，腔长 $L=1m$ 。试给出它所产生的高斯光束的腰斑半径 ω_0 的大小和位置、该高斯光束的 f 及 θ_0 的大小。

解：
$$f^2 = \frac{L(R_1-L)(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{[(L-R_1)+(L-R_2)]^2}$$

$$=L(R_2-L)=1*(2-1)=1\text{m}^2$$

$$\text{即: } f=1\text{m}$$

$$\theta_0=2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi f}}\approx 3.7*10^{-3}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{f\lambda}{\pi}}\approx 1.8*10^{-3}\text{m}$$

14. 某高斯光束腰斑大小为 $\omega_0 = 1.14\text{mm}$ ， $\lambda = 10.6\mu\text{m}$ 。求与束腰相距 30cm 、 10m 、 1000m 远处的光斑半径 ω 及波前曲率半径 R 。

$$\text{解: } \omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2}, \quad R(z) = \left| z + \frac{f^2}{z} \right|$$

$$\text{其中, } f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \approx 0.385\text{m}$$

$$z = 30\text{cm}: \quad \omega(30\text{cm}) \approx 1.45\text{mm}, \quad R(30\text{cm}) \approx 0.79\text{m}$$

$$z = 10\text{m}: \quad \omega(10\text{m}) \approx 29.6\text{mm}, \quad R(10\text{m}) \approx 10.0\text{m}$$

$$z = 1000\text{m}: \quad \omega(1000\text{m}) \approx 2.96\text{m}, \quad R(1000\text{m}) \approx 1000\text{m}$$

15. 若已知某高斯光束之 $\omega_0 = 0.3\text{mm}$ ， $\lambda = 632.8\text{nm}$ 。求束腰处的 q 参数值，与束腰相距 30cm 处的 q 参数值，以及在与束腰相距无限远处的 q 值。

$$\text{解: } \frac{1}{q_0} = \frac{1}{R(0)} - i \frac{\lambda}{\pi\omega_0^2}, R(0) \rightarrow \infty$$

$$\text{束腰处: } q_0 = i \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} = if \approx i \cdot 44.66\text{cm}$$

$$q(z) = q_0 + z \dots \dots (2.10.8)$$

$$z = 30\text{cm}: q(30\text{cm}) \approx (30 + 44.66i)\text{cm}$$

$$z = \infty: q(\infty) = \infty$$

16. 某高斯光束 $\omega_0 = 1.2\text{mm}$, $\lambda = 10.6\mu\text{m}$ 。今用 $F = 2\text{cm}$ 的锩透镜来聚焦, 当束腰与透镜的距离为 10m 、 1m 、 10cm 、 0 时, 求焦斑大小和位置, 并分析所得的结果。

解: $f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \approx 0.43\text{m}$

$$l' = F + \frac{(l-F)F^2}{(l-F)^2 + f^2} \quad (2.10.17)$$

$$\omega_0'^2 = \frac{F^2\omega_0^2}{(F-l)^2 + f^2} \quad (2.10.18)$$

$l = 10\text{m}$: $l' \approx 2.004 \times 10^{-2}\text{m}$, $\omega_0' = 2.40 \times 10^{-6}\text{m}$

$l = 1\text{m}$: $l' \approx 2.034 \times 10^{-2}\text{m}$, $\omega_0' = 2.25 \times 10^{-5}\text{m}$

$l = 10\text{cm}$: $l' \approx 2.017 \times 10^{-2}\text{m}$, $\omega_0' = 5.53 \times 10^{-5}\text{m}$

$l = 0$: $l' \approx 1.996 \times 10^{-2}\text{m}$, $\omega_0' = 5.62 \times 10^{-5}\text{m}$

可见, 透镜对束腰斑起会聚作用, 位置基本不变在透镜焦点位置。

17. CO_2 激光器输出光 $\lambda = 10.6\mu\text{m}$, $\omega_0 = 3\text{mm}$, 用一 $F = 2\text{cm}$ 的凸透镜聚焦, 求欲得到 $\omega_0' = 20\mu\text{m}$ 及 $2.5\mu\text{m}$ 时透镜应放在什么位置。

解: $f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \approx 2.67\text{m}$

$$\omega_0'^2 = \frac{F^2\omega_0^2}{(F-l)^2 + f^2} \quad (2.10.18)$$

(1) $(F-l)^2 = \frac{F^2\omega_0^2}{\omega_0'^2} - f^2 \approx 1.885\text{m}^2$

$l \approx 1.39\text{m}$

(2) $(F-l)^2 = \frac{F^2\omega_0^2}{\omega_0'^2} - f^2 \approx 568.9\text{m}^2$

$l \approx 23.87\text{m}$

18. 如图 2.2 光学系统, 入射光 $\lambda = 10.6\mu\text{m}$, 求 ω_0'' 及 l_3 。

解: $f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \approx 2.67m$

$$l'_1 = F_1 + \frac{(l_1 - F_1)F_1^2}{(l_1 - F_1)^2 + f^2} \approx 0.02m$$

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{F_1^2\omega_0^2}{(F_1 - l_1)^2 + f^2}} \approx 2.25 \times 10^{-5} m$$

$$l'_2 = l_2 - l'_1 = 13cm$$

$$f' = \frac{\pi\omega_0'^2}{\lambda} \approx 1.50 \times 10^{-4} m$$

$$l_3 = F_2 + \frac{(l'_2 - F_2)F_2^2}{(l'_2 - F_2)^2 + f'^2} \approx 0.0812m$$

$$\omega_0'' = \sqrt{\frac{\omega_0'^2 F_2^2}{(l'_2 - F_2)^2 + f'^2}} \approx 1.41 \times 10^{-5} m$$

19. 某高斯光束 $\omega_0 = 1.2mm$, $\lambda = 10.6\mu m$ 。今用一望远镜将其准直。主镜用镀金反射镜 $R = 1m$, 口径为 $20cm$; 副镜为一锠透镜, $F_1 = 2.5cm$, 口径为 $1.5cm$; 高斯束腰与透镜相距 $l = 1m$, 如图 2.3 所示。求该望远系统对高斯束的准直倍率。

解: $M' = M \sqrt{1 + \left(\frac{l}{f}\right)^2} = \frac{F_2}{F_1} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{f}\right)^2} \quad (2.11.19)$

$$f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \approx 0.427m \quad , \quad F_2 = \frac{R}{2} = 0.5m$$

$$M' = 50.95$$

20. 激光器的谐振腔由两个相同的凹面镜组成, 它出射波长为 λ 的基模高斯光束, 今给定功率计, 卷尺以及半径为 a 的小孔光阑, 试叙述测量该高斯光束共焦参数 f 的实验原理及步骤。

解: 由两个相同的凹面镜组成的谐振腔所对应共焦腔的焦距为: $f = \frac{1}{2}[L(2R - L)]^{\frac{1}{2}}$, 束

腰半径: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}[L(2R - L)]^{\frac{1}{4}}}$ 。当 $L = R$ 时, 束腰半径最大。所以, 对称共焦腔有

最大的束腰半径。

实验步骤: 1, 对某一腔长, 测得束腰光斑的位置, 此位置单位面积内具有该腔内光

束的最大光功率。

2, 改变腔长, 同 1 测量束腰光斑处小孔后的光功率。在束腰光斑光功率最小时, 用卷尺测得两腔镜间距 L 。

$$\text{则有, } L = R, f = \frac{1}{2}L。$$

21. 已知二氧化碳激光谐振腔由两个凹面镜构成, $R_1 = 1m$, $R_2 = 2m$, $L = 0.5m$ 。如何选择高斯光束腰斑 ω_0 的大小和位置才能使它成为该谐振腔中的自再现光束?

解: 由式(2.12.3)及球面反射镜等价焦距 $F = \frac{1}{2}R$, 有:

$$R_1 = l_1 \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda l_1} \right)^2 \right] \text{ 和 } R_2 = l_2 \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda l_2} \right)^2 \right]$$

又 $l_1 + l_2 = L$, 取 $\lambda = 10.6\mu m$ 。

$$\text{得: } l_1 = 0.375m, l_2 = 0.125m, \omega_0 = 1.28 * 10^{-3}m$$

22. (1) 用焦距为 F 的薄透镜对波长为 λ 、束腰半径为 ω_0 的高斯光束进行变换, 并使变换后的高斯光束的束腰半径 $\omega'_0 < \omega_0$ (此称为高斯光束的聚焦), 在 $F > f$ 和 $F < f$

($f = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$) 两种情况下, 如何选择薄透镜到该高斯光束束腰的距离 l ? (2) 在聚焦过程中,

如果薄透镜到高斯光束束腰的距离 l 不能改变, 如何选择透镜的焦距 F ?

$$\text{解: } \omega_0'^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + f^2}, \quad \frac{\omega_0'}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{l}{F}\right)^2 + \left(\frac{f}{F}\right)^2}}$$

(1) 当 $F > f$ 时, 须 $\left(1 - \frac{l}{F}\right)^2 > 1 - \left(\frac{f}{F}\right)^2$ 解得: $l < F - \sqrt{F^2 - f^2}$ 或 $l > F + \sqrt{F^2 - f^2}$

当 $F < f$ 时, 总满足 $\frac{\omega_0'}{\omega_0} < 1$, 并在 $l = F$ 时, 最小。

(2) l 不变:

$$\frac{F^2}{(F-l)^2 + f^2} < 1 \Rightarrow F < \frac{l^2 + f^2}{2l}$$

23. 试由自再现变换的定义式 (2.12.2) 用 q 参数法来推导出自再现变换条件式 (2.12.3)。

$$\text{解: } q_c(l_c = l) = q(0) \quad (2.12.2)$$

$$q_c = i \frac{F^2 \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2} \quad \omega_0'^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2} \quad (2.10.18)$$

$$\text{令 } \omega_0' = \omega_0 \text{ 即 } \omega_0^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2} \text{ 得: } 1 = \frac{F^2}{(F-l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

$$\text{故 } F = \frac{1}{2} l [1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda l}\right)^2] \quad (2.12.3)$$

24. 试证明在一般稳定腔 (R_1, R_2, L) 中, 其高斯模在腔镜面处的两个等相位面的曲率半径分别等于各该镜面的曲率半径。

解:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ -\frac{2}{R_1} + \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_2} & -\frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} - \frac{2L}{R_2} + 1 \end{pmatrix}$$

由(2.12.10), 参考平面上的曲率半径为

$$R = \left| \frac{2B}{D-A} \right| = \left| \frac{4L - \frac{4L^2}{R_2}}{\frac{4L^2}{R_1 R_2} - \frac{4L}{R_1}} \right| = \left| \frac{1 - \frac{L}{R_2}}{\frac{L}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_1}} \right| = R_1$$

25. 试从式 (2.14.12) 导出式 (2.14.13), 并证明对双凸腔 $B^2 - 4C > 0$ 。

$$\text{解: } \frac{1}{l_1 + L} - \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R_2} \quad (2.14.12a) \quad R_2 l_2 - R_2 (l_1 + L) = 2l_2 (l_1 + L)$$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{R_2 (l_1 + L)}{R_2 - 2(l_1 + L)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{l_2 + L} - \frac{1}{l_1} = \frac{2}{R_1} \quad (2.14.12b) \quad R_1 l_1 - R_1 (l_2 + L) = 2l_1 (l_2 + L) \quad (2)$$

将 (1) 代入(2)得:

$$R_1 l_1 - R_1 \left(\frac{R_2 (l_1 + L)}{R_2 - 2(l_1 + L)} + L \right) = 2l_1 \left(\frac{R_2 (l_1 + L)}{R_2 - 2(l_1 + L)} + L \right)$$

$$\Rightarrow l_1^2 + \frac{2L(L-R_2)}{2L-R_1-R_2}l_1 + \frac{R_1L(L-R_2)}{2L-R_1-R_2} = 0 \quad (2.4.13)$$

$$l_1^2 + Bl_1 + C = 0$$

$$B = \frac{2L(L-R_2)}{2L-R_1-R_2}, \quad C = \frac{LR_1(L-R_2)}{2L-R_1-R_2}$$

$$B^2 - 4C = \frac{4L^2(L-R_2)^2}{(2L-R_1-R_2)^2} - \frac{4LR_1(L-R_2)}{2L-R_1-R_2}$$

对于双凸腔 $R_1 = -|R_1|$, $R_2 = -|R_2|$

$$B^2 - 4C = \frac{4L^2(L+|R_2|)^2}{(2L+|R_1|+|R_2|)^2} + \frac{4L|R_1|(L+|R_2|)}{2L+|R_1|+|R_2|} > 0$$

26. 试计算 $R_1 = 1m$, $L = 0.25m$, $a_1 = 2.5cm$, $a_2 = 1cm$ 的虚共焦腔的 $\xi_{\text{单程}}$ 和 $\xi_{\text{往返}}$ 。若想保持 a_1 不变并从凹面镜 M_1 端单端输出, 应如何选择 a_2 ? 反之, 若想保持 a_2 不变并从凸面镜 M_2 端单端输出, 应如何选择 a_1 ? 在这两种单端输出的条件下, $\xi_{\text{单程}}$ 和 $\xi_{\text{往返}}$ 各为多大?

题中 a_1 为镜 M_1 的横截面半径, R_1 为其曲率半径, a_2 、 R_2 的意义类似。

解: 对于虚共焦腔: $R_1 = 1m$, $L = 0.25m$ 。由 $R_1 + R_2 = 2L$ 得 $R_2 = -0.5m$,

$$m_2 = \left| \frac{R_1}{R_2} \right| = 2, m_1 = 1。$$

$$a_1 = 2.5cm, a_2 = 1cm, \frac{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}{m_1^2} = 0.16, \Gamma_1 = 0.16;$$

$$\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}{m_2^2} = 1.5625, \Gamma_1 = 1。$$

$$\text{则 } \xi_{\text{单程}} = 1 - \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} = 0.6, \quad \xi_{\text{往返}} = 1 - \Gamma_1 \Gamma_2 = 0.84$$

(a) 保持 a_1 不变, 从凹面镜 M_1 端单端输出, 要求 M_2 能接收从 M_1 传输的光线, 则须:

$$\Gamma_1 = 1, a_2 \geq a_1, \text{ 此时 } \Gamma_2 = \frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}{m_2^2} \leq 0.25,$$

$$\xi_{\text{单程}} = 1 - \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} = 1 - \frac{a_2}{a_1} \geq 0.5, \quad \xi_{\text{往返}} = 1 - \Gamma_1 \Gamma_2 = 1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \geq 0.75$$

(b) 保持 a_2 不变, 从凸面镜 M_2 单端输出须:

$$\Gamma_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \leq 0.25,$$

$$\xi_{\text{单程}} = 1 - \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} = 1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \geq 0.5, \quad \xi_{\text{往返}} = 1 - \Gamma_1 \Gamma_2 = 1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \geq 0.75 \quad \text{第三章习题}$$

1. 试由式 (3.3.5) 导出式 (3.3.7), 说明波导模的传输损耗与哪些因素有关。在其他条件不变时, 若波导半径增大一倍, 损耗将如何变化? 若 λ 减小到原来的 $1/2$, 损耗又将如何变化? 在什么条件下才能获得低的传输损耗?

解: 由 $\gamma_{nm} \approx k\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_{nm}}{ka}\right)^2(1 - i\frac{2\eta_n}{ka})\right]$ 及 $\gamma_{nm} = \beta_{nm} + i\alpha_{nm}$ 可得:

$$\beta_{nm} = \text{Re}\{\gamma_{nm}\} = k\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_{nm}}{ka}\right)^2\left(1 + \frac{2}{ka}\text{Im}\{\eta_n\}\right)\right]$$

$$\alpha_{nm} = \text{Im}\{\gamma_{nm}\} = -\frac{1}{2}k\left(\frac{u_{nm}}{ka}\right)^2\frac{-2}{ka}\text{Re}\{\eta_n\} = \left(\frac{u_{nm}}{2\pi}\right)^2\frac{\lambda_0^2}{a^3}\text{Re}\{\eta_n\}$$

波导模的传输损耗 α_{nm} 与波导横向尺寸 a , 波长 λ_0 , 波导材料的折射率实部以及不同波导模对应得不同 u_{nm} 值有关。

(a) 波导半径增大一倍, 损耗减为原来的 $\frac{1}{8}$ 。

(b) 波长减小到原来的一半, 损耗减为原来的 $\frac{1}{4}$ 。

获得低的传输损耗应增大波导横向尺寸, 选择折射率实部小的介质材料和 u_{nm} 小的波导模。

2. 试证明, 当 η 为实数时, 若 $\eta > 2.02$, 最低损耗模为 TE_{01} 模, 而当 $\eta < 2.02$ 时, 为 EH_{11} 模, 并证明 TE_{01} 模的损耗永远比 TM_{01} 模低。

证明:

$$\alpha_{nm} = \left(\frac{u_{nm}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_0^2}{a^3} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, & \text{对 } TE_{0m} \text{ 模} \\ \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, & \text{对 } TM_{0m} \text{ 模} \\ \frac{1}{2} \frac{\eta^2 + 1}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, & \text{对 } EH_{nm} \text{ 模} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

对于以上三种不同模，参看书表中表 3.1，对于同一种模式， m 越小，损耗越小，因此以下考虑 TE_{01} ， TM_{01} ， EH_{11} 模之间谁最小（ EH_{11} 中 $n=1$ 最小）题中设 η 为实数，显然 $\eta > 1$ ，

所以 $\alpha_{01}^{TM_{01}} > \alpha_{01}^{TE_{01}}$ ，只需考虑 TE_{01} 与 EH_{11} ：

$$\text{当 } \frac{\alpha_{01}^{TE_{01}}}{\alpha_{11}^{EH_{11}}} = \frac{u_{01}^2}{u_{11}^2} \frac{2}{\eta^2 + 1} > 1 \text{ 时， } EH_{11} \text{ 小} \Rightarrow \eta < 2.02$$

$$\text{当 } \frac{\alpha_{01}^{TE_{01}}}{\alpha_{11}^{EH_{11}}} < 1 \text{ 时， } TE_{01} \text{ 小} \Rightarrow \eta > 2.02$$

3. BeO 在 $10.6\mu m$ 波长时 $\text{Re}\{\eta_n\} = 0.033$ ，试求在内径为 $2a = 1.4mm$ 的 BeO 波导管中

EH_{11} 模和 EH_{12} 模的损耗 a_{11} 和 a_{12} ，分别以 cm^{-1} ， m^{-1} 以及 dB/m 来表示损耗的大小。当

通过 $10cm$ 长的这种波导时， EH_{11} 模的振幅和强度各衰减了多少（以百分数表示）？

$$\text{解：由 } \alpha_{nm} = \left(\frac{u_{nm}}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_0^2}{a^3} \text{Re}\{\eta_n\}$$

$$\alpha_{11} = 1.58 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1} = 1.58 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}, \quad L_{11} = 8.686 \alpha_{11} = 1.37 \times 10^{-2} \text{ dB/m}$$

$$\alpha_{12} = 8.34 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1} = 8.34 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}, \quad L_{12} = 7.24 \times 10^{-2} \text{ dB/m}。$$

$$\text{当 } z = 10\text{cm} \text{ 时， } 1 - \frac{E(z)}{E(0)} \approx 0.02\%, \quad 1 - \frac{I(z)}{I(0)} \approx 0.04\%$$

4. 试计算用于 $10.6\mu m$ 波长的矩形波导的 a_{11} 值，以 cm^{-1} 及 dB/m 表示，波导由 BeO 制成，

$\text{Re}\{\eta_n\} = 0.033$ ， $2a = 1.4mm$ ，计算由 SiO_2 制成的同样的波导的 a_{11} 值，计算中取

$\text{Re}\{\eta_n\} = 1.37$ 。

$$\text{解： } \alpha_{11} = \frac{1}{8} \frac{\lambda_0^2}{a^3} \text{Re}\{\eta_n\}$$

$$BeO: \alpha_{11} = 1.35 \times 10^{-3} m^{-1} = 1.35 \times 10^{-5} cm^{-1}$$

$$L_{11} = 8.686 \alpha_{11} = 0.012 dB/m$$

$$SiO_2: \alpha_{11} = 0.056 m^{-1} = 5.6 \times 10^{-4} cm^{-1}$$

$$L_{11} = 8.686 \alpha_{11} = 0.487 dB/m。$$

5. 某二氧化碳激光器用 SiO_2 作波导管, 管内径 $2a = 1.4mm$, 取 $Re\{\eta_n\} = 1.37$, 管长 $10cm$, 两端对称地各放一面平面镜作腔镜。试问: 为了 EH_{11} 模能产生振荡, 反射镜与波导口距离最大不得超过多少? 计算中激活介质增益系数 $0.01cm^{-1}$ 。

$$\text{解: } \alpha_{11} = \left(\frac{u_{11}}{2\pi} \right)^2 \frac{\lambda^2}{a^3} Re\{\eta_n\} = 6.575 \times 10^{-4} cm^{-1},$$

$$z = 10cm \text{ 时, } e^{gz} = e^{(g_0 - 2\alpha_{11})z} = 1.0907,$$

而平面反射镜所产生的耦合损耗为 ($\frac{z}{f} < 0.4$): $C_{11} = 0.57 \times \left(\frac{z}{f} \right)^{\frac{3}{2}}$, 其中

$$f = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}, \omega_0 = 0.6435a。$$

为使 EH_{11} 模能产生振荡则要求 $e^{gz}(1 - C_{11}) > 1$, 得:

$$z < 0.277f = 1.66cm, \text{ 即反射镜与波导口距离不得超过 } 1.66cm.$$

第四章 电磁场与物质的共振相互作用 (习题答案)

习题 1

解: 根据多普勒效应, 有

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v_z/c}{1 - v_z/c}}$$

$$\text{则 } \lambda = c/\nu = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{1 - v_z/c}{1 + v_z/c}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - v_z/c}{1 + v_z/c}}$$

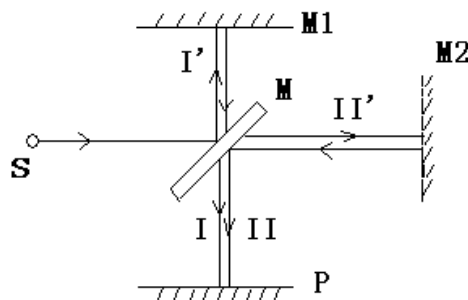
$$\text{当 } v_z = 0.1c \text{ 时, } \lambda_1 \approx 572.4nm$$

$$\text{当 } v_z = 0.4c \text{ 时, } \lambda_2 \approx 414.3nm$$

$$\text{当 } v_z = 0.8c \text{ 时, } \lambda_3 \approx 210.9nm$$

习题 2

解：为清楚起见，如下图所示



光源发出频率为 ν_0 的光，以 M 上反射的光为 I'，它被 M1 反射并透过 M，由图中的 I 所标记；透过 M 的光记为 II'，它被 M2 反射后又为 M 反射，此光记为 II，由于 M 和 M1 均为固定镜，所以 I 光的频率不变，仍为 ν_0 ，将 M2 看作光接收器，

由于它以速度 ν 运动，故它感受到的光的频率为 ν_0' ，依照下式

$$\nu_0' = \nu_0 \left(1 + \frac{\nu}{c} \right)$$

因 M2 反射 II' 光，所以它又相当于光发射器，其运动速度为 ν 时，发出的光的频率为

$$\nu_0'' = \nu_0' \left(1 + \frac{\nu}{c} \right) = \nu_0 \left(1 + \frac{\nu}{c} \right)^2 \approx \nu_0 \left(1 + 2\frac{\nu}{c} \right)$$

这样 I 光的频率为 ν_0 ，II 光的频率为 $\nu_0 \left(1 + \frac{2\nu}{c} \right)$ 在屏 P 上，I 光和 II 光的电场可分

别写为 $E_I = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$

$$E_{II} = E_0 \cos \left[2\pi\nu_0 \left(1 + \frac{2\nu}{c} \right) t \right]$$

因而屏 P 上的总光场为

$$E = E_I + E_{II} = 2E_0 \cos \left(2\pi\nu_0 t + \frac{\nu}{c} 2\pi\nu_0 t \right) \cos \left(\frac{\nu}{c} 2\pi\nu_0 t \right)$$

光强正比于电场振幅的平方，所以 P 上光强为

$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ 1 + \cos \left[2\pi \left(\frac{\nu}{c} 2\nu_0 \right) t \right] \right\}$$

它是 t 的周期函数，单位时间内的变化次数为

$$m = \frac{v}{c} 2\nu_0 = \frac{2\nu_0}{c} \frac{dL}{dt}$$

由上式可得 dt 时间间隔内屏上光强暗变化的次数为

$$mdt = \frac{2\nu_0}{c} dL$$

因为 dt 是镜 M2 移动 dL 长度所花费的时间, 所以 mdt 也就是镜 M2 移动 dL 过程中屏上光强的亮暗变化次数, 对上式两边积分, 即可得到镜 M2 移动 L 时, 屏上光强亮暗变化的次数

$$S = \int_{t_1}^{t_2} mdt = \int_{L_1}^{L_2} \frac{2\nu_0}{c} dL = \frac{2\nu_0}{c} (L_2 - L_1) = \frac{2\nu_0}{c} L = \frac{2L}{\lambda_0}$$

式中 t1 和 t2 分别为 M2 镜开始移动的时刻和停止移动的时刻, L1 和 L2 为与 t1 和 t2 相对应的 M2 镜的空间坐标, 且有 $(L_2 - L_1) = L$

习题 3

解: 根据光波的相干长度公式 (1.1.16)

$$L_c = \frac{C}{\Delta\nu}$$

由题意可知, 忽略自然加宽和碰撞加宽, 则主要表现为多普勒加宽

$$\begin{aligned} \text{即: } \Delta\nu &= \Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} = 7.16 \times 10^{-7} \frac{C}{\lambda_0} \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} \\ &= 336 \text{MH}_z \end{aligned}$$

$$\text{则 } L_c = \frac{C}{\Delta\nu} = \frac{C}{\Delta\nu_D} = 0.89 \text{m}$$

对氦氖激光器, 相干长度为

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)\lambda = 63.28 \text{m}$$

习题 4

解: CO_2 气体, $T=300\text{K}$, 考察 $10.6\mu\text{m}$ 线, 多普勒线宽为

$$\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} = 7.16 \times 10^{-7} \frac{c}{\lambda_0} \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} = 52.9 \text{MH}_z \approx 53 \text{MH}_z$$

$$\text{碰撞线宽系数 } \alpha = \frac{\Delta\nu_L}{P},$$

$$\text{计算 } \Delta\nu_L = \frac{1}{\pi\tau_L} = \frac{1}{\pi} N_a Q_{aa} \sqrt{\frac{16KT}{\pi m_a}} = \frac{1}{\pi} \times 7.24 \times 10^{22} \times \frac{P_a}{T} \times Q_{aa} \times \sqrt{\frac{16KT}{\pi m_a}}$$

因此: $\alpha = \frac{1}{P} \times \frac{1}{\pi} \times 7.24 \times 10^{22} \times \frac{P_a}{T} \times Q_{aa} \times \sqrt{\frac{16KT}{\pi m_a}} = 49 \text{KH}_z / P_a$

$$\Delta\nu_H = \Delta\nu_L + \Delta\nu_N = \Delta\nu_L + 5 \times 10^3 \text{H}_z$$

由 $\Delta\nu_L = \alpha P > \Delta\nu_D$ 得: $P > 1.08 \text{kPa}$ 。即当压强大于 1.08kPa 时均匀加宽将占优势。

习题 5

解: 根据 (4.3.26) 多普勒线宽为 $\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-17} \nu_0 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}$

取 $M=20$, $T=400\text{K}$

对 632.8nm 的跃迁: $\Delta\nu_D = 1.5 \text{G}$

用 μm 为单位, $\Delta\lambda = \frac{\Delta\nu_D}{c} \lambda^2 = 2 \times 10^{-6} \mu\text{m}$

用 cm^{-1} 为单位, $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta\nu_D}{c} = 5 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$

对 $1.1532 \mu\text{m}$ 的跃迁: $\Delta\nu_D = 0.833 \text{G}$

用 μm 为单位, $\Delta\lambda = 3.6 \times 10^5 \mu\text{m}$

用 cm^{-1} 为单位, $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 2.77 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$

对 $3.39 \mu\text{m}$ 的跃迁: $\Delta\nu_D = 0.3 \text{G}$

用 μm 为单位, $\Delta\lambda = 1.0 \times 10^6 \mu\text{m}$

用 cm^{-1} 为单位, $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1.0 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$

习题 6

解: 由 $\frac{dn_2}{dt} = -(A_{21} + S_{nr})n_2 = -\left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_{nr}}\right)n_2$ 可得:

$$n_2(t) = n_2(0) e^{-\left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_{nr}}\right)t}$$

(1) 自发辐射光功率:

$$P = n_2(t)A_{21}h\nu V = n_2(0)e^{-\left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_{nr}}\right)t} \frac{h\nu}{\tau_s} V$$

$$(2) \text{ 自发辐射光子数: } N_{2s} = \int_0^{\infty} \frac{n_2(t)}{\tau_s} V dt = \frac{Vn_2(0)}{\tau_s} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_{nr}}\right)t} dt = \frac{n_2(0)}{1 + \frac{\tau_s}{\tau_{nr}}} V$$

$$(3) \text{ 量子产额: } \eta_2 = \frac{N_{2s}}{n_2(0)V} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_s}{\tau_{nr}}}$$

习题 7

解: 粒子数方程为

$$\frac{dn_3}{dt} = n_1W_{13} - n_3(S_{32} + A_{31}) \quad (1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -\left(n_2 - \frac{g_2}{g_1}n_1\right) \frac{A_{21}}{n_2} g(\nu, \nu_0)\phi_l - n_2(A_{21} + S_{21}) + n_3S_{32} \quad (2)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n \quad (3)$$

其中 (2) 式可改写为

$$\dot{n}_2 = n_3S_{32} + B_{12}\rho(n_1 - n_2) - n_2(A_{21} + S_{21}) \quad (4)$$

因 S_{32} 与 A_{21} 相比很大, 这表示粒子在 E_3 能级上停留的时间很短, 故认为 E_3 能级上的

粒子数 $n_3 \approx 0$, 由此得 $\dot{n}_3 \approx 0$ 这样实际上将三能级问题简化为二能级问题来求解,

由 (1) 式得

$$n_3 = \frac{n_1W_{13}}{A_{31} + S_{32}}$$

代入 (4) 式, 得

$$\dot{n}_2 = \frac{n_1W_{13}}{A_{31} + S_{32}} S_{32} + B_{12}\rho(n_1 - n_2) - n_2(A_{21} + S_{21})$$

由于 $\dot{n}_2 = -\dot{n}_1$, 所以

$$(\dot{n}_2 - \dot{n}_1) = 2 \left[\frac{n_1W_{13}}{A_{31} + S_{32}} S_{32} + B_{12}\rho(n_1 - n_2) - n_2(A_{21} + S_{21}) \right] \quad (5)$$

红宝石对波长为 $6943 \times 10^{-4} \mu\text{m}$ 的光透明, 意为在能量密度 ρ 的入射光作用下, 红

宝石介质内虽有受激吸收和受激辐射，但出射光的能量密度仍为 ρ 。而要使入射光的能量密度等于出射光的能量密度，必须有 $(n_2 - n_1)$ 为常数，即 $(n_2 - n_1) = 0$ ，这样

(5) 式变为

$$S_{12} \frac{n_1 W_{13}}{A_{31} + S_{32}} + B_{12} \rho (n_1 - n_2) - n_2 (A_{21} + S_{21}) = 0$$

该式应对任意大小的 ρ 恒成立，这意味着它应与 ρ 无关，这只有

$$B_{12} \rho (n_1 - n_2) = 0, \text{ 即 } n_1 = n_2 \text{ 时才行}$$

在 $n_1 = n_2$ 时，由上式可知

$$W_{13} = (A_{21} + S_{21}) \left(1 + \frac{A_{31}}{S_{32}}\right)$$

因 $S_{21} \ll A_{21}$ ，所以

$$W_{13} \approx A_{21} \left(1 + \frac{A_{31}}{S_{32}}\right) = 3.18 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$$

习题 8

解：由式 (4.4.18) $\frac{dn_3}{dt} = n_1 W_{13} - n_3 (S_{32} + A_{31}) = 0$ ，及 (4.4.20) $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ，

其中 $n_3 \approx 0$ 。可得： $n_3 = \frac{W_{13}}{S_{32} + A_{31}} (n - n_2)$ ，代入 (4.4.19) 并略去受激跃迁项有：

$$\frac{dn_2}{dt} = n_3 S_{32} - n_2 (A_{21} + S_{21}) = \frac{W_{13} S_{32}}{S_{32} + A_{31}} n - \left(A_{21} + S_{21} + \frac{W_{13} S_{32}}{S_{32} + A_{31}} \right) n_2 \equiv A - B n_2$$

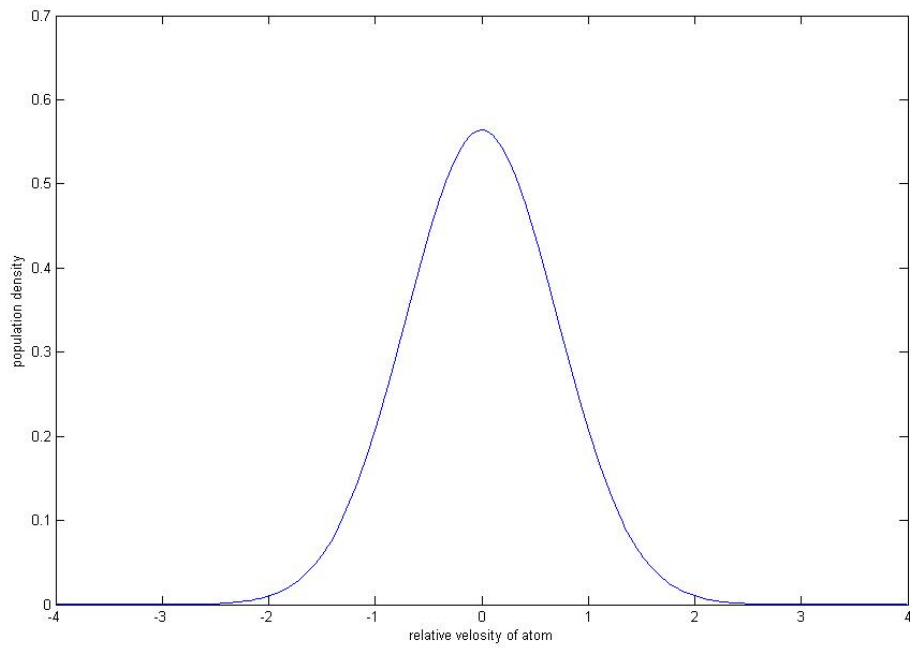
$$0 \leq t \leq t_0 \text{ 时积分得： } n_2(t) = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt})$$

$$t > t_0 \text{ 时则为： } n_2(t) = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt_0}) e^{-(A_{21} + S_{21})(t - t_0)}$$

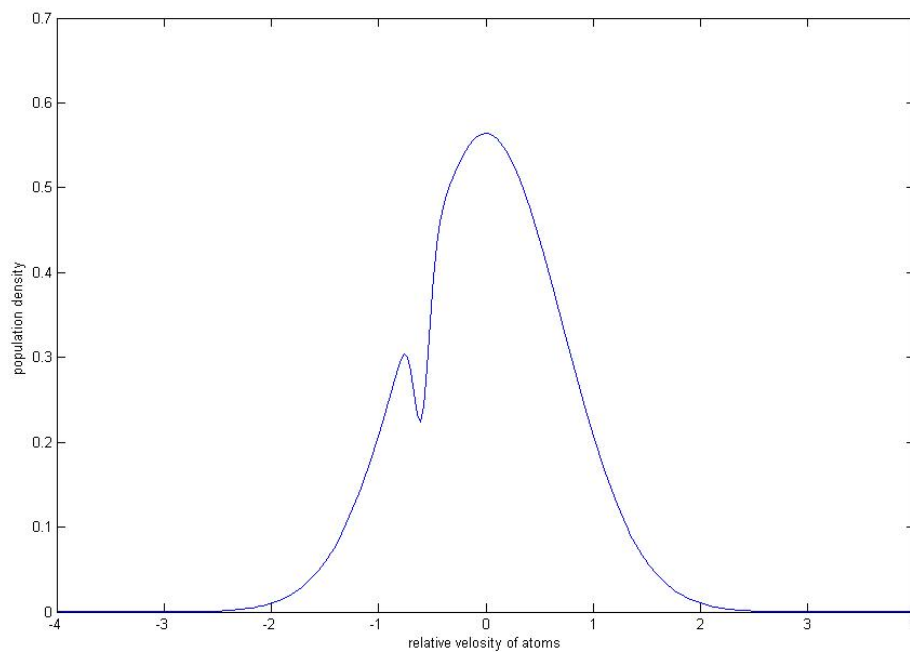
(可参考式 (5.0.1/2))，图见 5.0.1。

习题 9

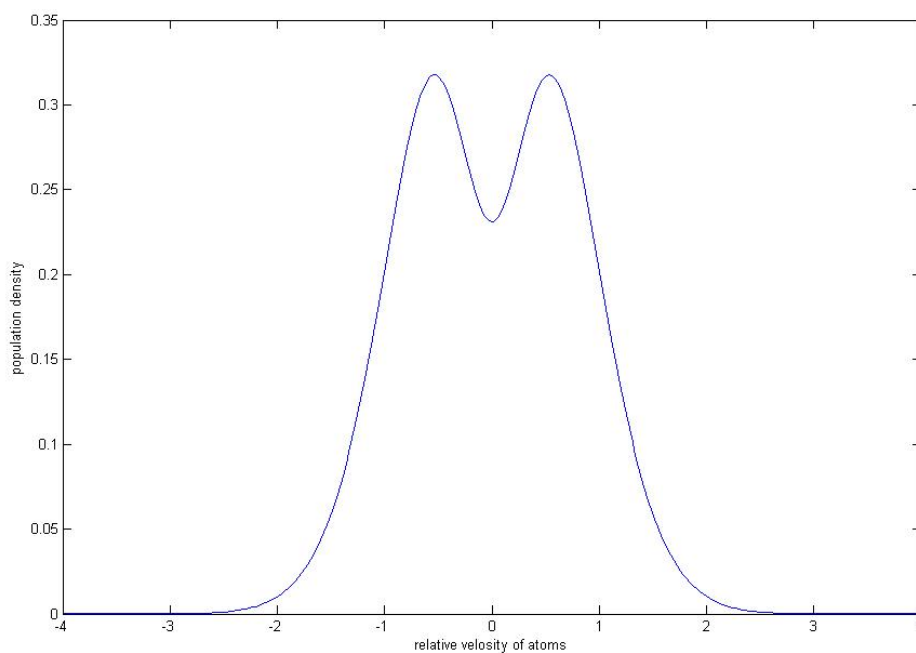
解：(1) $v \gg v_0$ 时，只有 v_z 很小的粒子的表观频率在中心频率处，因而只有在 v_z 很小处才能造成受激吸收。故不影响原粒子数的分布。



- (2) $v - v_0 \approx \frac{1}{2} \Delta v_D$ 时, 由 $v' = v \left(1 + \frac{v_z}{c} \right) = v_0$ 得: $v_z = -\frac{\Delta v_D}{2v} c$ 。即在该速度处的粒子受激吸收最大, 粒子数减少最多。



- (3) $v = v_0$ 时, $v_z = 0$ 处粒子受激吸收最大, 粒子数减少最多。



习题 10

解：在频率为 ν 的单色辐射场的作用下，受激跃迁几率为(4.4.11): $W_{21} = B_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)\rho$.

由爱因斯坦系数关系 (1.2.15): $A_{21} = B_{21}n_\nu h\nu$ ，及 ρ 与第 l 模内光子数密度 N_l 的

关系: $\rho = N_l h\nu$ 。有 $\frac{W_{21}}{N_l} = \frac{A_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)}{n_\nu}$ 。

在单位体积内 $\frac{W_{21}}{N_l}$ 表示由一个光子引起的受激跃迁几率。

$\frac{A_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)}{n_\nu}$ 表示频率为 ν 单位频率间隔内分配在一个模式上的自发辐射几率。

习题 11

解：设统计权重 $f_1 = f_2$ ，则有，均匀加宽的吸收截面为

$$\sigma_{12} = \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 \nu_0^2 \Delta\nu_H} \quad (4.4.14)$$

其中, v 是工作物质中的光速, $v = \lambda_0 \nu_0$ ， A_{21} 为自发辐射爱因斯坦系数, $A_{21} = \frac{1}{\tau_s}$ ，

其中 τ_s 为原子在能级 E_2 上的平均寿命；由于主要为自然加宽，故

$$\Delta\nu_H = \Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi\tau_s}$$

$$\text{所以, } \sigma_{12} = \frac{\lambda_0^2 \nu_0^2 \frac{1}{\tau_s}}{4\pi^2 \nu_0^2 \frac{1}{2\pi\tau_s}} = \lambda_0^2 / 2\pi$$

习题 12

解: 红宝石在 T=300K 常温下是均匀加宽, 粒子数密度为:

$$2 \times 3.98 \times 0.05 / 152 = 1.31 \times 10^{-5} \times 2 \text{ mol} \times 6.022 \times 10^{23} / \text{mol} = 2 \times 7.884 \times 10^{18} \text{ 个} / \text{cm}^3$$

$$\beta = \sigma(\nu_0, \nu_0) |\Delta n| \quad \text{所以 } \beta = 0.4 \text{ cm}^{-1}$$

当 $\Delta n < 0$ 时, ($\Delta n = n_2 - n_1$), 计算出 β 值

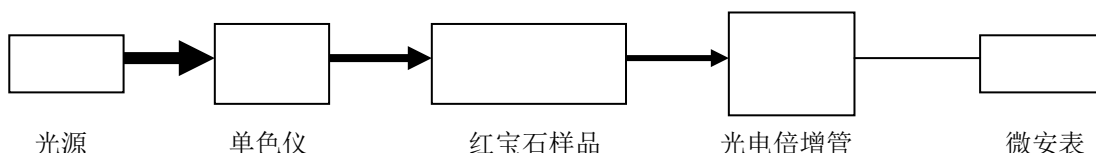
$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} = 9.25 \times 10^{-31}$$

$$\text{而 } |\Delta n| = |n_2 - n_1| = 2 \times 7884 \times 10^{18} \text{ 个} / \text{cm}^3$$

$$\text{所以 } \sigma = 2.5 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$$

习题 13

解: 实验方框图:



调节单色仪使 694.3nm 的光入射红宝石样品。通过光电倍增管测光经过红宝石样

品前后的光强: I_0 和 I 。并测得样品长度 L , 由 $\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha L}$, 可得吸收系数并利用习

题 12 所得结果, 则吸收截面 $\sigma_{12} = \frac{\alpha}{n}$ 。由于 $f_1 = f_2 = 4$, 故发射截面等于吸收截面。

用光源直接射在红宝石样品上, 用单色仪对其荧光进行测量, 测得最大值的一半

处两频率之差为荧光线宽。而荧光寿命为荧光线宽的倒数, 即 $\tau = \frac{1}{\Delta\nu_F}$ 。

习题 14

$$\text{解: } g(\nu_1, I_{\nu_1}) = g_H^0(\nu_0) \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)}$$

$$g_H^0(\nu_0) = \Delta n^0 \sigma_{21} = \Delta n^0 \frac{\nu^2 A_{21}}{4\pi^2 \nu_0^2 \Delta \nu_H}$$

线宽定义的最大值一半的 $\Delta \nu$

$$g(\nu_0 \pm \frac{\Delta \nu}{2}, \nu_0, I_{\nu_0}) = \frac{1}{2} g(\nu_0, \nu_0, I_{\nu_0})$$

$$\text{代入得, } g_H^0(\nu_0) \frac{(\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\frac{\Delta \nu}{2})^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S})} = \frac{1}{2} g_H^0(\nu_0) \frac{(\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S})}$$

$$\text{可推出 } (\frac{\Delta \nu}{2})^2 = (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S}) \text{ 进一步可推出 } \Delta \nu = \Delta \nu_H \sqrt{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S}}$$

习题 15

解: 若 ν_1, ν_2 二强光同时入射, 则此时反转集居数

$$\begin{aligned} \Delta n &= \Delta n_{\nu_1} \frac{(\nu_2 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\nu_2 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_2}}{I_S})} \\ &= \Delta n^0 \frac{(\nu_1 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S})} \cdot \frac{(\nu_2 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\nu_2 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_2}}{I_S})} \end{aligned}$$

(1) 弱光 ν 的增益系数

$$\begin{aligned} g_H(\nu, I_{\nu_1}, I_{\nu_2}) &= \Delta n \sigma_{21}(\nu, \nu_0) = \Delta n \frac{\nu^2}{8\pi \nu_0^2} A_{21} \hat{g}_H(\nu_1, \nu_0) \\ &= \Delta n \frac{\nu^2}{8\pi \nu_0^2} A_{21} \frac{\frac{\Delta \nu_H}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2} \end{aligned}$$

(2) 强光 ν_1 的增益系数

$$\begin{aligned} g_H(\nu_1, I_{\nu_1}, I_{\nu_2}) &= \Delta n \sigma_{21}(\nu_1, \nu_0) = \Delta n \frac{\nu^2}{8\pi \nu_0^2} A_{21} \hat{g}_H(\nu_1, \nu_0) \\ &= \Delta n^0 \frac{\nu^2}{8\pi \nu_0^2} A_{21} \frac{(\nu_2 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\nu_2 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_2}}{I_S})} \cdot \frac{\frac{\Delta \nu_H}{2\pi}}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S})} \end{aligned}$$

习题 16

解: 综合加宽线型函数为

$$\hat{g}(v, v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_D(v', v_0) \cdot \hat{g}_H(v, v_0) dv' \quad (4.3.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{2}{\Delta v_D} e^{-\left[\frac{4(\ln 2)(v'_0 - v_0)^2}{\Delta v_D^2}\right]} \cdot \frac{\frac{\Delta v_H}{2\pi}}{(v - v'_0)^2 + \left(\frac{\Delta v_H}{2}\right)^2} dv'_0 \quad (4.3.17)(4.3.27)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\Delta v_H}{\Delta v_D} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left[-4(\ln 2)\left(\frac{v'_0 - v_0}{\Delta v_D}\right)^2\right]}{(v - v')^2 + \left(\frac{\Delta v_H}{2}\right)^2} dv'_0$$

$$\hat{g}(v, v_0) = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \left(\frac{\Delta v_H}{\Delta v_D}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I_{v_1}}{I_S}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{-t^2}}{(\varepsilon_0 - t)^2 + \mu^2} dt$$

$$\varepsilon_0 = \frac{v_1 - v_0}{\frac{\Delta v_D}{2\sqrt{\ln 2}}} \quad \mu = \frac{\Delta v_H \sqrt{1 + \frac{I_{v_1}}{I_S}}}{\frac{\Delta v_D}{\sqrt{\ln 2}}}$$

误差函数定义为 $W(\varepsilon_0 + i\mu) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(\varepsilon_0 + i\mu - t)} dt$

其实部为 $W_R(\varepsilon_0 + i\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu e^{-t^2}}{(\varepsilon_0 - t)^2 + \mu^2} dt$

$$\hat{g}(v, v_0) = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \left(\frac{\Delta v_H}{\Delta v_D}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I_{v_1}}{I_S}}} \frac{W_R(\varepsilon_0 + i\mu)}{\pi}$$

习题 17

证明: (1) 在稳态情况下, (4.4.28) 为:

$$\frac{dn_2}{dt} = R_2 - \frac{n_2}{\tau_2} - \Delta n \sigma_{21}(v, v_0) V N_1 = 0$$

$$\frac{dn_1}{dt} = R_1 - \frac{n_1}{\tau_1} + \frac{n_2}{\tau_2} + \Delta n \sigma_{21}(v, v_0) V N_1 = 0$$

可得: $n_2 = \tau_2 [R_2 - \Delta n \sigma_{21}(v, v_0) V N_1]$,

$$n_1 = \tau_1 \left[R_1 + \frac{\tau_1}{\tau_{21}} R_2 + \Delta n \sigma_{21}(v, v_0) V N_1 \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_{21}} \right) \right]$$

由 $\Delta n = n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1$ 得:

$$\Delta n = \frac{\tau_2 R_2 - \frac{f_2}{f_1} \tau_1 \left(R_1 + \frac{\tau_1}{\tau_{21}} R_2 \right)}{1 + \sigma_{21}(v, v_0) V N_1 \tau_2 \left[1 - \frac{f_2}{f_1} \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_{21}} \right) \right]} = \frac{\Delta n^0}{1 + \phi \tau_{21} \sigma_{21}(v, v_0) V N_1}$$

(2) 均匀加宽介质中:

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \phi \tau_{21} \sigma_{21}(v, v_0) V N_1} = \frac{(v - v_0)^2 + \left(\frac{\Delta v_H}{2} \right)^2}{(v - v_0)^2 + \left(\frac{\Delta v_H}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{I_v}{I_s} \right)} \Delta n^0$$

$$\text{其中 } I_s = \frac{h\nu_0}{\phi \sigma_{21} \tau_{21}}$$

(3) 当 $\tau_1 / \tau_2 \ll 1$ 时, $\phi = \delta = \frac{\tau_2}{\tau_{21}}, I_s = \frac{h\nu_0}{\sigma_{21} \tau_2}$ 。则

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \tau_2 \sigma_{21}(v, v_0) V N_1} = \frac{(v - v_0)^2 + \left(\frac{\Delta v_H}{2} \right)^2}{(v - v_0)^2 + \left(\frac{\Delta v_H}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{I_v}{I_s} \right)} \Delta n^0$$

习题 18

$$\text{解: } \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{694.3 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$\sigma_{21} = 8.1 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad \tau_2 = 22 \times 10^{-12} \text{ s} \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\text{由公式 } I = \frac{h\nu_0}{2\sigma_{21}\tau_2}$$

$$\text{解得 } I_s = 8.03 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$$

习题 19

$$\text{解: 三能级系统, 稳态时 } \frac{dn_3}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = \frac{dn_1}{dt} = 0$$

$$\text{可得: } n_1 W_{13} = n_3 S_{32} \quad (1)$$

由于 $S_{32} \gg W_{13}$, 所以 $n_3 \approx 0$

$$(n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1) \sigma_{21}(\nu, \nu_0) \nu N + n_2 A_{21} = n_3 S_{32} \quad (2)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n \approx n_1 + n_2 \quad (3)$$

三式联立, 分别求得

$$n_3 = 0$$

$$n_2 = \frac{n(\frac{f_2}{f_1} \sigma_{21} \nu N + W_{13})}{\left[(1 + \frac{f_2}{f_1}) \sigma_{21}(\nu, \nu_0) \nu N + A_{21} + W_{13} \right]}$$

$$n_1 = \frac{n(\sigma_{21} \nu N + A_{21})}{\left[(1 + \frac{f_2}{f_1}) \sigma_{21} \nu N + A_{21} + W_{13} \right]}$$

$$\Delta n = n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1 = \frac{n(W_{13} - \frac{f_2}{f_1} A_{21})}{\left[(1 + \frac{f_2}{f_1}) \sigma_{21} \nu N + A_{21} + W_{13} \right]}$$

将式(4.4.14)及 (4.3.17) 代入上式, 可得

$$\Delta n = \frac{(\nu_1 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + (\frac{\Delta \nu_H}{2})^2 (1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_S})}$$

$$I_S = \frac{(A_{21} + W_{13})}{\sigma_{21} (1 + \frac{f_2}{f_1})} \cdot h \nu_0$$

习题 20:

解: 能级 0-2 之间存在一频率为 ν , 单色能量密度为 $\rho = h\nu N$ 的发射场。

$$\frac{dn_2}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau_{20}} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) n_2 + W_{02} n_0, \quad (A = \frac{1}{\tau_{20}} + \frac{1}{\tau_{21}})$$

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{n_2}{\tau_{21}} - \frac{n_1}{\tau_{10}} \text{ 及 } n_0 + n_1 + n_2 = n$$

稳态情况下: $n_1 = \frac{\tau_{10}}{\tau_{21}} n_2 \approx 0, n_2 = \frac{n}{1 + \frac{A}{W_{02}}}, n_0 = \frac{\frac{A}{W_{02}}}{1 + \frac{A}{W_{02}}} n$ 。

则: $\Delta n = n_2 - \frac{f_2}{f_0} n_0 = \frac{1 - \frac{f_2}{f_0} \frac{A}{W_{02}}}{1 + \frac{A}{W_{02}}} n$

当 $\nu = \nu_0$ 时, $W_{02} = \sigma_{02} \frac{I}{h\nu}$, $\Delta n(I_S) = \frac{1}{2} \Delta n^0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{f_2}{f_0} n\right)$

得: $I_S = \frac{h\nu}{\left(1 + 2\frac{f_0}{f_2}\right) \sigma_{02}} \left(\frac{1}{\tau_{20}} + \frac{1}{\tau_{21}}\right)$

大信号吸收系数: $\alpha = -\Delta n \sigma_{02} = \frac{\frac{f_2}{f_0} \left(1 + 2\frac{f_0}{f_2}\right) - \frac{1}{I_S}}{1 + 2\frac{f_0}{f_2} - \frac{1}{I_S}} \sigma_{02}$

习题 21

解: (1) 自然加宽: $\Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi\tau_s} = 1.0 \times 10^7 \text{ Hz}$

碰撞加宽: $\Delta\nu_L = \frac{1}{\pi\tau_L} = 2.79 \times 10^{10} \text{ Hz}$

多普勒加宽: $\Delta\nu_D = 3.16 \times 10^9 \text{ Hz}$

(2) 钠原子数密度: $N = 7.24 \times 10^{22} \times \frac{\text{Pa}}{\text{T}} = 3.2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$

而 $e^{-\frac{h\nu}{kT}} \approx 0$, 故可认为 $n_1 = N = 3.2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}, n_2 = 0$

在均匀加宽占优势时, 其谱线线型为均匀加宽, 则在中心频率处吸收截面为:

$$\sigma_{12} = \frac{f_2}{f_1} \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 v_0^2 \Delta\nu_H} = 3.97 \times 10^{-17} \text{ m}^2$$

则小信号吸收系数为: $\alpha^0 = n_1 \sigma_{12} = 1.27 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$

(3) 取饱和光强 $I_S = \frac{h\nu}{\sigma_{12}} A_{21} = 5.3 \times 10^5 \text{ Js}^{-1} \text{ m}^{-2}$,

则激光光强为 I 时，吸收系数为：
$$\alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

由 $\frac{I_L}{I_0} = e^{-\alpha L} = 0.5$ ，得：
$$I = 9.7 \times 10^9 \text{ Js}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

习题 22

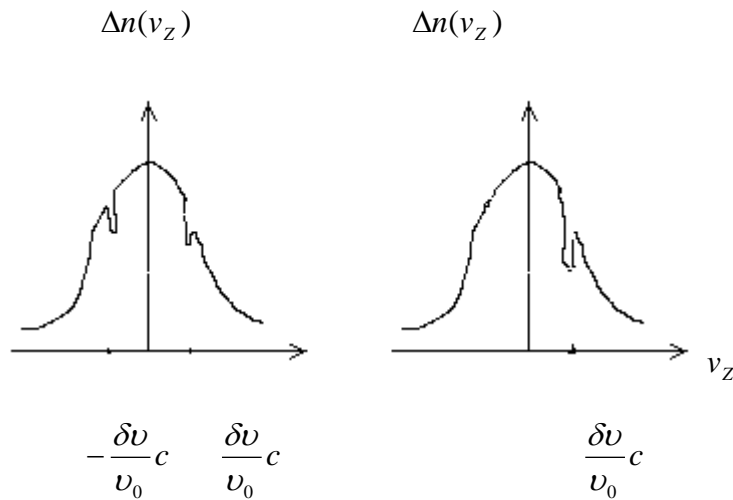
解：若有一频率为 ν 的光沿 Z 向传播，粒子的表观中心频率 $\nu'_0 = \nu_0(1 + v_z/c)$ 。当

$\nu = \nu'_0$ 时粒子产生受激辐射，所以产生受激辐射的粒子具有速度

$v_z = c(\nu - \nu_0)/\nu_0$ 若有一频率为 ν 的光沿 $-Z$ 方向传播，则粒子的表观中心频率为

$\nu'_0 = \nu_0(1 - v_z/c)$ 产生受激辐射的粒子具有速度 $v_z = c(\nu_0 - \nu)/\nu$

由以上分析，可知本题所述的两种情况下反转集居数密度按速度 v_z 的分布曲线见草图如下：



第五章

1、证明：由谐振腔内光强的连续性，有

$$I = I' \Rightarrow N \cdot V = N' \cdot V' \Rightarrow N \frac{C}{\eta} = N' \frac{C}{\eta'}$$

谐振腔内总光子数 $\Phi = NSl + N'S(L-l)$

$$= NSl + \frac{\eta'}{\eta} NS(L-l)$$

$$= NS[\eta'(L-l) + \eta l] / \eta$$

$$= NSL' / \eta, \quad L' = \eta l + \eta'(L-l)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Delta n \sigma_{21} \frac{C}{\eta} NSl - \frac{\Phi}{\tau_R}$$

$$\frac{SL' dN}{\eta dt} = \Delta n \sigma_{21} \frac{C}{\eta} NSl - \frac{NSL'}{\eta \tau_R}, \quad \tau_R = \frac{L'}{\delta C}$$

$$\frac{dN}{dt} = \Delta n \sigma_{21} CN \frac{l}{L'} - N \frac{\delta C}{L'}$$

2、解答：(1) $\Delta n_t = \frac{\delta}{\sigma_{21} l}$

$$\delta = 0.2, \quad l = 10 \text{ cm}$$

$$\sigma_{21} = \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 v_0^2 \Delta v_H}$$

$$v = \frac{c}{\eta}, \quad A_{21} = \frac{1}{\tau_s}, \quad \tau_s = 4 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$v_0 = \frac{c}{\lambda_0}, \quad \Delta v_H = 2 \times 10^5 \text{ MHz}, \quad \lambda_0 = 694.3 \text{ nm}$$

$$\Delta n = 4.1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

$$(2) \quad g_H^0(v_1) = \Delta n^0 \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 v_0^2 \Delta v_H} \frac{(\frac{\Delta v_H}{2})^2}{(v_1 - v_0)^2 + (\frac{\Delta v_H}{2})^2}$$

$$= g_t = \frac{\delta}{l}$$

$$\Delta v_{osc} = 2|v_1 - v_0|$$

$$\Delta v_q = \frac{c}{2L'}$$

$$n = \frac{\Delta v_{osc}}{\Delta v_q} = 82$$

3、解答：红宝石理想三能级系统： $\frac{dn_1}{dt} = -W_{13}n_1 + A_{21}n_2$ 和 $n_1 + n_2 = n$

$$\text{则: } \frac{dn_1}{dt} = A_{21}n - (W_{13} + A_{21})n_1$$

设 $n_1(t) = c(t)e^{-(W_{13}+A_{21})t}$, 代入上式, 并利用 $n_1(0) = n$ 得:

$$c(t) = \frac{A_{21}}{W_{13} + A_{21}} ne^{(W_{13}+A_{21})t} + \frac{W_{13}}{W_{13} + A_{21}} n$$

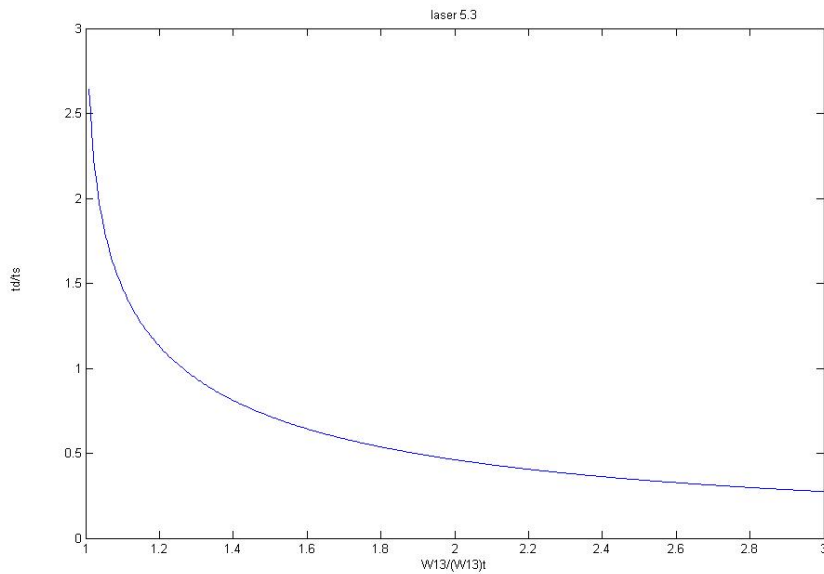
$$\text{则: } n_1(t) = \frac{A_{21}}{W_{13} + A_{21}} n + \frac{W_{13}}{W_{13} + A_{21}} ne^{-(W_{13}+A_{21})t}$$

$$\Delta n = n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1 = n \left[1 - 2 \left(\frac{A_{21}}{W_{13} + A_{21}} + \frac{W_{13}}{W_{13} + A_{21}} e^{-(W_{13}+A_{21})t} \right) \right]$$

令 $\Delta n(\tau_d) = 0$, 并由 $(W_{13})_t = \frac{1}{\tau_s}$, 可得:

$$\tau_d = \frac{\tau_s}{1 + \frac{W_{13}}{(W_{13})_t}} \ln \frac{2 \frac{W_{13}}{(W_{13})_t}}{\frac{W_{13}}{(W_{13})_t} - 1},$$

$$\frac{\tau_d}{\tau_s} = \frac{1}{1 + \frac{W_{13}}{(W_{13})_t}} \ln \frac{2}{1 - \frac{(W_{13})_t}{W_{13}}}. \text{ 做图如下:}$$



4、解答: 此激光器为四能级系统, 所以

$$E_{pt} = \frac{h\nu_p \delta V}{\eta_1 \sigma_{21} l}$$

$$\text{其中 } \nu_p = \frac{c}{\lambda}, \quad \delta = \frac{1}{2} \ln \frac{I_0}{I_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{I_0}{I_0 r_1 r_2} = -\frac{1}{2} \ln r_1 r_2$$

$$\eta_1 = 1, \quad \frac{V}{l} = s = \frac{1}{4} \pi d^2$$

$$\sigma_{21} = \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 v_0^2 \Delta v_H}$$

最后计算得, $E_{pt} = 4.05 \times 10^{-2} \text{ J}$

5、解答: 设半导体有源区长为 L :

$$\text{由 } J_1 \propto L\alpha + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{rr'} \text{ 和 } J_2 \propto L\alpha + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r}, \quad r = r' = 0.33$$

$$\text{则: } \frac{J_1}{J_2} = \frac{L\alpha + 1.1}{L\alpha + 0.55},$$

$$L\alpha = 0.554 \times \frac{2J_2 - J_1}{J_1 - J_2}$$

6、解答: (1) 均匀加宽

$$g_H^0(\nu_1) = g_H^0(\nu_0) \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} g_H^0(\nu_0)$$

$$\Rightarrow |\nu_1 - \nu_0| = \frac{1}{2} \Delta\nu_H$$

$$\Rightarrow \Delta\nu_{osc} = \Delta\nu_H$$

$$\therefore \Delta\nu_q = \frac{c}{2L'} = \frac{c}{2\eta L} > \Delta\nu_H$$

$$L < 3\text{m}$$

(2) 非均匀加宽

$$g_i^0(\nu_1) = g_i^0(\nu_0) \exp[-4 \ln 2 \left(\frac{\nu_1 - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2]$$

$$= \frac{1}{2} g_i^0(\nu_0)$$

$$\Rightarrow |\nu_1 - \nu_0| = \frac{1}{2} \Delta\nu_D$$

$$\Rightarrow \Delta v_{osc} = \Delta v_D$$

$$\therefore \Delta v_q = \frac{c}{2L'} = \frac{c}{2\eta L} > \Delta v_D$$

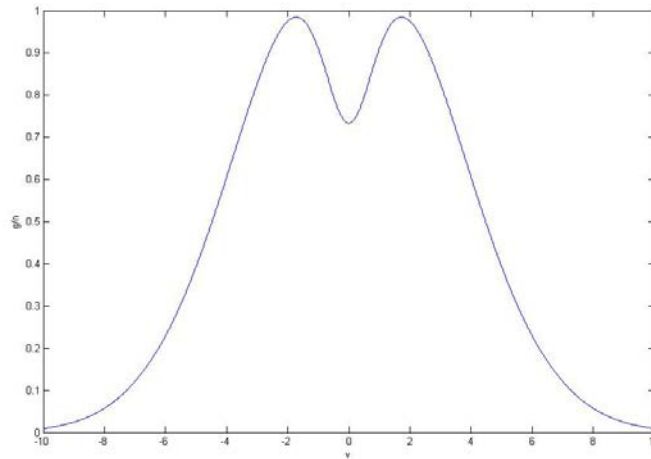
$$L < 3m$$

7、解答：（1）以轴向速度沿顺时针为正：

当 $v_A > v_{01}$ 时， ϕ^+ 与速度为 $\left(1 - \frac{v_{01}}{v_A}\right)c$ 的原子的表观中心频率重合；

ϕ^- 与速度为 $-\left(1 - \frac{v_{01}}{v_A}\right)c$ 的原子的表观中心频率重合，故形成两个对称的烧空。

当 $v_A = v_{01}$ 时， ϕ^+ ， ϕ^- 均与速度为 0 的原子表观中心频率重合，形成一个烧空。



（2）由（1）知当 $v_A \neq v_{01}$ 时， ϕ^+ ， ϕ^- 分别与不同速度的原子发生烧空，不存在

模式竞争；而当 $v_A = v_{01}$ 时， ϕ^+ ， ϕ^- 共用一种速度的原子而发生模式竞争，一旦某一模式增益超过另一模式则前者不断放大而后者则会熄灭。

（3）当 $v_A = v_0$ 时， ϕ^+ ， ϕ^- 共用某一速度的 Ne^{20} ，而对于 Ne^{22} 则由于 $v_A \neq v_0$ 而使得二模式不存在竞争。

（4）由于 Ne^{22} 原子质量大于 Ne^{20} ，则前者多普勒线型较后者低。由增益系数

$g(\nu, L) = \Delta n \sigma(\nu, L)$ 知，为使增益曲线对称应使 Ne^{22} 多一些。

8、解答：(1) $\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \nu_0 \sqrt{\frac{T}{M}} = 1.3\text{GHz}$

(2) $\Delta\nu_H = \Delta\nu_N + \Delta\nu_L = \frac{1}{2\pi\tau_1} + \frac{1}{2\pi\tau_2} + \alpha p = 0.2\text{GHz}$

$$\frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu_H} = 6$$

(3) 由 $\delta\nu = \sqrt{1 + \frac{I}{I_s}} \Delta\nu_H$ ，为使烧空重叠要求 $\delta\nu > \Delta\nu_q$

当 $I = 0$ 时： $\Delta\nu_H > \frac{c}{2L}$ ，得： $L > 0.7\text{m}$

当 $I = 10\text{Wcm}^{-2}$ 时，取 $I_s = 0.2\text{Wcm}^{-2}$ ，则： $L > \frac{c}{2\sqrt{1 + \frac{I}{I_s}} \Delta\nu_H} = 0.57\text{m}$

9、解答：(1) $\because h\nu_0 N = P \frac{l}{c}$

$$\therefore N = \frac{Pl}{h\nu_0 c} = \frac{Pl\lambda}{h\nu_0 c^2}$$

$$= 5.31 \times 10^7$$

(2) $\frac{d_N}{d_t} = \frac{\Delta n \sigma_{21} c N l}{L} - \frac{N}{\tau}$

当 $\Delta n = \Delta n_t$ ， $\frac{d_N}{d_t} = 0$ 时， $\sigma_{21} = \frac{L}{\tau \Delta n_t c l}$

$$\frac{d_N}{d_t} = \Delta n \frac{L c l N}{\tau \Delta n_t c l L} - \frac{N}{\tau} = \frac{\Delta n N}{\Delta n_t \tau} - \frac{N}{\tau}$$

当 $\Delta n = 1.1 \Delta n_t$ 时， $\frac{d_N}{d_t} = 0.1 \frac{N}{\tau}$

积分上式，得 $N = \exp\left(\frac{0.1t}{\tau} + c\right)$

当 $t = 0$ 时， $\ln N = 1, c = 0$

当 $N = 5.31 \times 10^7$ 时， $t = 5.93 \mu\text{s}$

10、解答：(1) $\alpha_m > g_m$ ，所以不能起振。

(2) 输入光强满足以下条件时, 可以起振 由式 (4.5.15) 得:

$$g(I) = \frac{g_m}{1 + \frac{I}{I_{SG}}} > \alpha(I) = \frac{\alpha_m}{1 + \frac{I}{I_{S\alpha}}}$$

由 $I > 0$, 得起振条件为: $g_m I_{SG} > \alpha_m I_{S\alpha}$

当 $g(I) = \alpha(I)$ 时, 获得稳定振荡, 此时腔内光强为:

$$I = \frac{\alpha_m - g_m}{\frac{g_m}{I_{S\alpha}} - \frac{\alpha_m}{I_{SG}}}$$

11、解答: $g_t = \frac{\delta}{l}, 2\delta = T + \alpha : g_t = \frac{T + \alpha}{2l}$

当 $g_t = g_m$ 时, T 有最大值 T_t , 且

$$T_t = 2g_m l - \alpha$$

$$T_m = \sqrt{2g_m l \alpha} - \alpha$$

解上面两方程, 得

$$\alpha = \frac{T_m^2}{T_t - 2T_m}$$

$$g_m = \frac{(T_t - T_m)^2}{2l(T_t - 2T_m)}$$

12、解答: (1) $\eta_s = \frac{dp}{dp_p}$

$$p = \eta_s p_p + C$$

当 $p_p = p_{pt}$ 时, $p=0$ 得: $C = -52.8W$

故 $p = 0.024p_p - 52.8$

则当 $p_p = 10kW$ 时, $p=187.2W$

(2) $\eta_s = \frac{v_0 A}{v_p S} \eta_0 \eta_1$ 。该平凹腔有效腔长 $L' = L - l(1 - \frac{1}{n}) = 0.466m$

其等价共焦球面腔参数为:

$$z_1 = L' = 0.466\text{m}, z_2 = 0, f = \sqrt{L'(R_1 - L')} = 1.45\text{m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} = 7 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{原光束直径为: } 2\omega(z_1) = 2\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{f}\right)^2} = 1.47\text{mm}$$

若换为平面镜输出光斑直径为工作物质直径 d 。则:

$$\eta_s' = \left[\frac{d}{2\omega(z_1)} \right]^2 \eta_s = 0.45$$

$$(3) \eta_s \propto \eta_0 = \frac{T}{2\delta}, \quad \frac{\eta_s'}{\eta_s} = \frac{T'\delta}{T\delta'}$$

$$\eta_s' = \frac{0.1 \times (0.15 + 0.005 \times 7.5 \times 2)}{0.15 \times (0.1 + 0.005 \times 7.5 \times 2)} \eta_s \approx 0.021$$

$$p' = \eta_s' p_p + C' = 0.021 p_p - 35$$

$$\text{当 } p_p = 10\text{kW} \text{ 时, } p' = 175\text{W}$$

13、解答: 由 $\Delta\nu_s = \frac{c\delta_s}{2\pi L}$, 则: $\Delta\nu_s' = \frac{\eta L}{\eta_0 L_0} \Delta\nu_s = 7\text{MHz}$

第六章

1. 在增益工作物质两端设置二反射率为 r 的反射镜, 形成一个发布里珀罗再生式放大器, 如图 6.1.1 所示。入射光频率为 ν , 谐振腔频率为 ν_c 。工作物质被均匀激励, 其小信号增益系数为 g^0 , 损耗系数为 α 。试求:

(1) 用多光束干涉的方法求再生放大器的小信号增益 $G^0 = \frac{I(l)}{I_0}$;

(2) $\nu = \nu_c$ 时再生放大器的增益 G_m^0 ;

(3) 再生放大器的带宽 $\delta\nu$;

(4) 若无反射镜时放大器的增益为 3, 试作 $G_m^0 - r$ 及 $\delta\nu - r$ 的曲线;

(5) 再生放大器正常工作时 r 的范围。

解: (1) 利用多光束干涉的方法求得:

$$G^0 = \frac{(1-r)^2 G_s^0}{(1-rG_s^0)^2 + 4rG_s^0 \sin^2 \left[\frac{2\pi l}{v} (\nu - \nu_c) \right]}$$

$G_s^0 = e^{(g^0 - \alpha)l}$ 为小信号行波放大器的增益。

(2) 当 $\nu = \nu_c$ 时, $G_m^0 = \frac{(1-r)^2 G_s^0}{(1-rG_s^0)^2}$

(3) 带宽: $\delta\nu = 2(\nu - \nu_c) = \frac{(1-rG_s^0)v}{2\pi l (rG_s^0)^{1/2}}$

(4) 若 $G_s^0 = e^{(g^0 - \alpha)l} = 3$, 则: $G_m^0 = \frac{(1-r)^2 3}{(1-3r)^2} = \left[\frac{1 - \frac{2}{3r-1}}{3} \right]^2$

$$\delta\nu = \frac{(1-3r)v}{2\pi l (3r)^{1/2}}$$

(5) $G_m^0 = \frac{(1-r)^2 G_s^0}{(1-rG_s^0)^2} \geq 1$, $(1-r)^2 G_s^0 \geq (1-rG_s^0)^2$ 整理得:

$$(G - G^2)r^2 + G - 1 \geq 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{G_s^0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. 证明式 (6.2.3)、(6.2.5) 以及式(6.2.10)

证明: (1) 证 (6.2.3):

根据 (6.2.2) 式:

$$g_m dz = \frac{(1 + I(z)/I_s)}{I(z) \left\{ 1 - [1 + I(z)/I_s] \alpha / g_m \right\}} dI(z)$$

$$d(z) = \frac{I(z) + I_s}{I_s g_m I(z) - \alpha I_s I(z) - \alpha I(z)^2} dI(z) = \frac{-[I(z) + I_s]}{\alpha I(z) [I(z) - \frac{g_m - \alpha}{\alpha} I_s]} dI(z)$$

$$\text{令 } A = \frac{-\alpha}{g_m - \alpha}, \quad B = \frac{g_m}{g_m - \alpha},$$

$$\text{则: } -\alpha dz = \frac{AdI(z)}{I(z)} + \frac{BdI(z)}{I(z) - \frac{g_m - \alpha}{\alpha} I_s},$$

$$\text{两边作定积分得: } -\alpha l = A \ln \frac{I(l)}{I_0} + B \ln \frac{I(l) - \frac{g_m - \alpha}{\alpha} I_s}{I_0 - \frac{g_m - \alpha}{\alpha} I_s}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{I(l)}{I_0} &= \frac{-\alpha l - B \ln \frac{I(l) - \frac{g_m - \alpha}{\alpha} I_s}{I_0 - \frac{g_m - \alpha}{\alpha} I_s}}{A} \\ &= (g_m - \alpha) l + \frac{g_m}{\alpha} \ln \frac{g_m - \alpha [1 + \frac{I(l)}{I_s}]}{g_m - \alpha [1 + \frac{I_0}{I_s}]} \end{aligned}$$

(2) 证 (6.2.5)

$$\frac{dI(z)}{I(z) dz} = \frac{g_m}{1 + \frac{I(z)}{I_s}}, \quad \frac{dI(z)}{I(z)} + \frac{dI(z)}{I_s} = g_m dz,$$

$$\text{两边作定积分得: } \ln \frac{I(l)}{I_0} + \frac{I(l) - I_s}{I_s} = g_m l$$

$$(3) \text{ 证 (6.2.10) } \quad g^0(\nu_1) = g^0(\nu_0) \frac{\left(\frac{\Delta H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta H}{2}\right)^2},$$

$$(\nu_1 - \nu_0)^2 = \frac{[g^0(\nu_0) - g^0(\nu_1)] \left(\frac{\Delta H}{2}\right)^2}{g^0(\nu_1)}$$

$$\delta\nu = 2(\nu - \nu_1) = \Delta H \sqrt{\frac{g^0(\nu_0) - g^0(\nu_1)}{g^0(\nu_1)}} = \Delta H \sqrt{\frac{[g^0(\nu_0) - g^0(\nu_1)] l}{g^0(\nu_1) l}}$$

又因为: $\frac{G(\nu_0)}{G(\nu_1)} = 2 = e^{[g^0(\nu_0) - g^0(\nu_1)]l}$, 即: $[g^0(\nu_0) - g^0(\nu_1)]l = \ln 2$

$$\delta\nu = \Delta_H \sqrt{\frac{\ln 2}{g^0(\nu_0)l - \ln 2}} = \Delta_H \sqrt{\frac{\ln 2}{\ln G^0(\nu_0) - \ln 2}}$$

3. 有一均匀激励的均匀加宽增益盒被可变光强的激光照射, 当入射光频率为中心频率 ν_0 时, 盒的小信号增益是 10dB, 增益物质谱线线宽 $\Delta\nu_0 = 1\text{GHz}$, 饱和光强 $I_s = 10\text{Wcm}^{-2}$, 假设增益盒的损耗为 0。

(1) 入射光频率 $\nu = \nu_0$, 求增益 (以 dB 表示) 和入射光强 I_0 的关系式;

(2) $|\nu - \nu_0| = 0.5\text{GHz}$, 求增益和 I_0 的关系式;

(3) $\nu = \nu_0$ 时求增益较最大增益下降 3dB 时的输出光强 I_l

解: 入射光频率为中心频率时, 小信号增益为 10dB, 即: $10\log G^0(\nu_0) = 10\log(e^{g_m L}) = 10$ 。

则: $G^0(\nu_0) = 10, g_m L = \ln 10$ 。

(1) 当入射光强为 I_0 时, 则由 (6.2.5): $\ln \frac{I(L)}{I_0} + \frac{I_0}{I_s} \left(\frac{I(L)}{I_0} - 1 \right) = g_m L$ 。

$$\text{设 } 10\log G(\nu_0) = 10\log \frac{I(L)}{I_0} = Y(\text{dB})$$

$$\text{则 } \frac{I(L)}{I_0} = 10^{\frac{Y}{10}}, \ln \frac{I(L)}{I_0} = \frac{Y}{10} \ln 10。$$

$$(6.2.5) \text{ 化为: } \frac{\ln 10}{10} Y + \frac{I_0}{I_s} (10^{\frac{Y}{10}} - 1) = \ln 10$$

(2) 当 $|\nu - \nu_0| = 0.5\text{GHz}$ 时, $g = \frac{g_m}{2 + \frac{I_0}{I_s}}$ 。

则 (6.2.5) 变为: $2\ln \frac{I(L)}{I_0} + \frac{I_0}{I_s} \left(\frac{I(L)}{I_0} - 1 \right) = g_m L$ 。

增益与 I_0 的关系为: $\frac{\ln 10}{5} Y + \frac{I_0}{I_s} (10^{\frac{Y}{10}} - 1) = \ln 10$

(3) 最大增益即为小信号增益，当 $\nu = \nu_0$ 时，增益 $Y = 7\text{dB}$ ，由 (1) 得：

$$I_0 = \frac{\ln 10 \left(1 - \frac{Y}{10}\right)}{\frac{Y}{10^{10}} - 1} I_s = 1.72 \text{Wcm}^{-2},$$

$$I(L) = 10^{\frac{Y}{10}} I_0 = 8.6 \text{Wcm}^{-2}$$

4. 用实验的方法可测出式 (6.3.18) 中的 β, β_p , 及 I_{pth} ，试设计此实验，并叙述试验及计算程序（假设 $\gamma = 1$ ）。

解：在小信号情况下，通过改变输入泵浦光强 I_{p0} 使对某一长度 L 光纤的小信号增益为

$$G^0 = 1, \text{ 则由式 (6.3.18) 有: } \ln \left[\gamma \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta_p L \right] + \frac{1}{\gamma+1} \beta_p L = \ln \left(\gamma \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} \right). \text{ 然}$$

后通过改变光纤长度测得长度为 L_m 时有最大的小信号增益 G_m^0 。由式 (6.3.21) 和

$$(6.3.22): L_m = \frac{1}{\beta_p} \left[\ln \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} + \gamma \left(\frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} - 1 \right) \right], \ln G_m^0 = \frac{\beta}{\beta_p} \left[\frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} - \ln \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} - 1 \right] \quad (3). \text{ 当}$$

$$\gamma = 1 \text{ 时, 前两式可化为: } \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} = \frac{\frac{1}{2} \beta_p L}{1 - e^{-\frac{1}{2} \beta_p L}} \quad (1), L_m \beta_p = \ln \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} + \frac{I_{p0}}{I_{\text{pth}}} - 1 \quad (2),$$

$$\text{将 (1) 代入 (2) 得: } 1 + L_m \beta_p = \ln \frac{\frac{1}{2} \beta_p L}{1 - e^{-\frac{1}{2} \beta_p L}} + \frac{\frac{1}{2} \beta_p L}{1 - e^{-\frac{1}{2} \beta_p L}}, \text{ 可计算得 } \beta_p \text{ 的值, 然}$$

后代入 (1) 可得 I_{pth} ，再代入 (3) 可得 β 值。

5. 已知掺铒光纤放大器中铒离子浓度 $n = 2 * 10^{18} \text{cm}^{-3}$ ， $\sigma_{12}(\nu) = \sigma_{21}(\nu) = 2 * 10^{-21} \text{cm}^2$ ， $\sigma_{13}(\nu) = 4 * 10^{-21} \text{cm}^2$ ， $l = 15 \text{m}$ 。当输入泵浦光功率 $P_{p0} = 5.5 \text{mW}$ 时放大器的小信号增益 $G_{dB}^0 = 0 \text{dB}$ ，试求 $P_{p0} = 100 \text{mW}$ 时光纤放大器的小信号增益（以 dB 为单位）。

解： $\gamma = 1$ ， $\beta_p = n \sigma_{13} = 8 * 10^{-3}$ ，式 (6.3.18) 简化为：

$$\ln\left[\frac{P_{p0}}{P_{pth}} - 6 - \ln G_0\right] + 6 - \ln G_0 = \ln \frac{P_{p0}}{P_{pth}}$$

将 $G_0^0=1$ 及 $P_{p0}=5.5mW$ 代入, 可求出 P_{pth} :

$$P_{pth} \approx \frac{P_{p0}}{6} \approx 0.916mW,$$

再将 $P_{p0}=100mW$ 及 P_{pth} 代入式

$$\ln\left[\frac{P_{p0}}{P_{pth}} - 6 - \ln G_0\right] + 6 - \ln G_0 = \ln \frac{P_{p0}}{P_{pth}}, \text{ 得到 } G_0 \text{ 的关系式:}$$

$$103 - \ln G_0 = 0.27 G_0,$$

$$G_0 \approx 360$$

增益为 $10\lg G_0 \approx 25.6$ 分贝

6. 证明在无损脉冲放大器中:

(1) 若入射光脉冲极其微弱, 则能量增益 $G_E = e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l}$

(2) 若入射光极强, 则能量增益 $G_E = 1 + \frac{\Delta n^0 l}{2J(0)}$

解: (1) 由式 (6.4.14) 及 $\alpha = 0$ 得:

$$G_E = e^{\sigma_{21}\Delta n^0 l}$$

(2) 由式 (6.4.20), 又因为 $J(0)$ 很大, 只保留与 $J(0)$ 有关的项:

$$\begin{aligned} G_E &= \frac{\ln e^{[2\sigma_{21}J(0) + \sigma_{21}\Delta n^0 l]}}{2\sigma_{21}J(0)} \\ &= \frac{2\sigma_{21}J(0) + \sigma_{21}\Delta n^0 l}{2\sigma_{21}J(0)} = 1 + \frac{\Delta n^0 l}{2J(0)} \end{aligned}$$

7. 用一脉宽 $\tau = 2ns$ 的矩形光脉冲照射增益盒, 光脉冲的波长恰好等于增益物质中心波长

($1\mu m$), 增益物质的发射截面 $\sigma = 10^{-14} cm^2$, 增益盒的小信号增益为 30dB, 其损

耗为零, 单位截面光脉冲能量为 W_0 , 当 (1) $W_0 = 2\mu Jcm^{-2}$ (2) $W_0 = 20\mu Jcm^{-2}$

(3) $W_0=200\mu Jcm^{-2}$ 时, 试求增益盒输出脉冲在起始和终了时的光强 I_1 和 I_2 及功

率增益 $G_p(L/c)$ 和 $G_p(t+L/c)$ 。

$$\text{解: } G_p(t) = \frac{J(l, t+L/c)}{J_0} = \frac{e^{\sigma\Delta n^0 l}}{e^{\sigma\Delta n^0 l} - (e^{\sigma\Delta n^0 l} - 1)e^{-2\sigma J_0(t-L/c)}}$$

$$\text{又: } 10\lg \frac{I(l)}{I_0} = 30, \text{ 即: } e^{\sigma\Delta n^0 l} = \frac{I(l)}{I_0} = 10^3, \text{ 得:}$$

$$G_p(t) = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-2\sigma J_0(t-L/c)}},$$

对于脉冲前沿起始 1), 2), 3), 增益均相同, 为:

$$G_p(L/c) = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^0} = 10^3$$

$$(1) I_1 = 10^3 * W_0 / \tau = 10^6 W cm^{-2}$$

$$(2) I_1 = 10^3 * W_0 / \tau = 10^7 W cm^{-2}$$

$$(3) I_1 = 10^3 * W_0 / \tau = 10^8 W cm^{-2}$$

对于脉冲后沿终了 1), 2), 3) 增益则不同

$$(1) G_p(t+L/c) = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-2\sigma J_0 \tau}} \left(J_0 \tau = \frac{\omega_0 \lambda}{hc} = 5 * 10^{18} W_0 \right)$$

$$= \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-0.2}} \approx 5.49$$

$$I_2 = 5.49 W_0 / \tau = 5.49 * 10^3 W cm^{-2}$$

$$(2) G_p(t+L/c) = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-2\sigma J_0 \tau}} = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-2}} \approx 1.16$$

$$I_2 = 1.16 \frac{W_0}{\tau} = 1.16 \cdot 10^4 W cm^{-2}$$

$$(3) G_p(t+L/c) = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-2\sigma J_0 \tau}} = \frac{10^3}{10^3 - (10^3 - 1)e^{-20}} \approx 1$$

$$I_2 = \frac{W_0}{\tau} = 10^5 W cm^{-2}$$

第七章习题

1. 有一平凹氦氖激光器，腔长 $0.5m$ ，凹镜曲率半径为 $2m$ ，现欲用小孔光阑选出 TEM_{00} 模，试求光阑放于紧靠平面镜和紧靠凹面镜处两种情况下小孔直径各为多少？（对于氦氖激光器，当小孔光阑的直径约等于基模半径的 3.3 倍时，可选出基横模。）

解：由 $g = 1 - \frac{L}{R}$ ，可计算出 $g_1 = 0.75$ ， $g_2 = 1.0$ ，满足 $0 < g_1 \cdot g_2 < 1$ ，故该腔为一稳定

腔。对 He-Ne 激光器的 $\lambda = 632.8nm$ ，则 $\omega_{os} = \sqrt{L\lambda/\pi} = 3.17 \times 10^{-4} m$ 。

由公式 (2.8.7)，当光阑放于紧靠凹面镜的情况下，

$$\omega_{s_1} = \omega_{os} \left[\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 \cdot g_2)} \right]^{1/4} = 4.82 \times 10^{-4}$$
，故小孔直径应为

$$d_1 = 3.3 \cdot \omega_{s_1} = 1.59 \times 10^{-3} m。$$

当光阑放于紧靠平面镜的情况下， $\omega_{s_2} = \omega_{os} \left[\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 \cdot g_2)} \right]^{1/4} = 4.17 \times 10^{-4}$ ，故小孔直

径应为 $d_2 = 3.3 \cdot \omega_{s_2} = 1.38 \times 10^{-3} m$ 。

2. 图 7.1 所示激光器的 M_1 是平面输出镜， M_2 是曲率半径为 $8cm$ 的凹面镜，透镜 P 的焦距 $F = 10cm$ ，用小孔光阑选 TEM_{00} 模。试标出 P 、 M_2 和小孔光阑间的距离。若工作物质直径是 $5mm$ ，试问小孔光阑的直径应选多大？

解： $f = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} = 18.5m$

$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F}\right)^2}} = 0.0135 \text{ mm}$$

小孔光阑直径为 $2\omega_0' = 0.027 \text{ mm}$

$$\text{距透镜 } P: l' = F \left[1 - \frac{F^2}{F^2 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}\right)^2} \right] = 10 \text{ cm}$$

距凹面镜 $M_2: l_2 = F_2/2 = 4 \text{ cm}$ 。

3. 激光工作物质是钕玻璃，其荧光谱线宽 $\Delta\lambda_F = 24.0 \text{ nm}$ ，折射率 $\eta = 1.50$ ，能用短腔选单纵模吗？

$$\text{解: } \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 2.14 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta\nu = c \cdot \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 6.4 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

由短腔选模条件: $\frac{c}{2L'} > \Delta\nu$ (7.1.3)

$$L' < \frac{c}{2\Delta\nu} = 2.3 \times 10^{-5}$$

$$L_{\max} = \frac{2.3 \times 10^{-5}}{\eta} \approx 15.6 \mu\text{m}。 \text{ 故不能用短腔选单纵模。}$$

4. 激光器腔长 500 mm (光程长)，振荡线宽 $\Delta\nu_{osc} = 2.4 \times 10^{10} \text{ Hz}$ ，在腔内插入法布里-珀罗标准具选单纵模。若标准具内介质折射率 $\eta = 1$ ，试求它的间隔 d 及平行平板反射率 r 。

$$\text{解: 由公式 (7.1.6) } \frac{c}{2\mu d \cos\theta} = \Delta\nu_{osc}$$

其中 $\mu = 1$ ， $\Delta\nu_{osc} = 2.4 \times 10^{10} \text{ Hz}$ ，令 $\cos\theta = 1$ ， $d = 6.25 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$\text{由公式 (7.1.7): } \frac{c}{2\pi\mu d} \frac{1-r}{\sqrt{r}} = \frac{c}{2L'}$$

其中 $L' = 500 \text{ mm}$ ，

则 $r = 0.96$ 。

5. 两种选模复合腔如图 7.2 (a)、(b)所示， M_1 、 M_2 、 M_3 为全反射镜， M_4 为部分透射镜。 l_1 、 l_2 应如何选择？

解：对图 7.2(a)所示的迈克尔逊复合腔，可看成是由两个子腔组合而成：全反射镜 M_1 和 M_3 组成一子腔，腔长为 $(L+l_1)$ ，谐振频率为 $\nu_{1i} = [c/2(L+l_1)] \cdot q_i$ ，式中 q_i 为正整数（并假设折射率为 1）；另一子腔由全反射镜 M_1 和 M_2 组成，其腔长为 $(L+l_2)$ ，同理，谐振频率为 $\nu_{2j} = [c/2(L+l_2)] \cdot q_j$ 。组合后的谐振腔必须同时满足两个腔的频率条件，令两等式相等并设第一个腔经过 N 个频率间隔后正好和第二个子腔经过 $N+1$ 个频率间隔后的频率再次相等，则有

$$cq_i/2(L+l_1) = cq_j/2(L+l_2) = \nu'$$

$$c(q_i + N)/2(L+l_1) = c(q_j + N+1)/2(L+l_2) = \nu''$$

式中 ν' 和 ν'' 为同时满足上两式的两个相邻的频率，令 $\Delta\nu = \nu'' - \nu'$ ，计算可得 $\Delta\nu = c/2(l_1 - l_2)$ ，此即为复合腔的频率间隔。

对图 7.2(b)所示的福克斯-史密斯式复合腔，其结构形式与迈克尔逊复合腔十分相似，只不过将半反镜转了九十度，此腔也由两个子腔组成，其中一个腔长为 $(L+l_2)$ ，而另一个腔长为 $(L+2l_2+l_1)$ ，同理，组合后的谐振频率间隔应为 $\Delta\nu = c/2(l_1+l_2)$ 。

6. 若调 Q 激光器的腔长 L 大于工作物质长 l ， η 及 η' 分别为工作物质及腔中其余部分的折射率，试求峰值输出功率 P_m 表达式。

解：由第五章习题 1 的结论，可知：

$$\frac{dN}{dt} = \Delta n \sigma_{21} c N \frac{l}{L'} - N \frac{\delta c}{L'}, \quad L' = \eta L + \eta'(L-l)$$

忽略自发辐射及泵浦激励的影响：

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -2\sigma_{21} \nu N \Delta n$$

$$\therefore \Delta n_t = \frac{\delta}{\sigma_{21} l}, \quad \tau_{Rl} = \frac{L'}{\delta c}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{dN}{dt} = \left(\frac{\Delta n}{\Delta n_t} - 1 \right) \frac{N}{\tau_{Rl}} \\ \frac{d\Delta n}{dt} = -2 \frac{\Delta n}{\Delta n_t} \frac{L'}{\eta l} \frac{N}{\tau_{Rl}} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{dN}{d\Delta n} = -\frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \left(1 - \frac{\Delta n_t}{\Delta n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \left(\frac{\Delta n_t}{\Delta n} - 1 \right)$$

$$\therefore N - N_i = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \left[\Delta n_t \ln \frac{\Delta n}{\Delta n_t} - \Delta n + \Delta n_t \right]$$

$$N = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} [\Delta n_t \ln \frac{\Delta n}{\Delta n_i} - \Delta n + \Delta n_i]$$

当 $\Delta n = \Delta n_t$ 时, $\frac{dN}{d\Delta n} = 0$, N 达到最大值 N_m

$$N_m = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} [\Delta n_t \ln \frac{\Delta n_t}{\Delta n_i} - \Delta n_t + \Delta n_i] = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \Delta n_t (\frac{\Delta n_t}{\Delta n_i} - \ln \frac{\Delta n_t}{\Delta n_i} - 1)$$

$$P_m = \frac{1}{2} h \nu_{21} N_m \nu_s T$$

7. 图 7.3 所示 $Nd:YAG$ 激光器的两面反射镜的透过率分别为 $T_2 = 0$, $T_1 = 0.1$, $2\omega_0 = 1mm$, $l = 7.5cm$, $L = 50cm$, $Nd:YAG$ 发射截面 $\sigma = 8.8 \times 10^{-19} cm^2$, 工作物质单通损耗 $T_i = 6\%$, 折射率 $\eta = 1.836$, 所价泵浦功率为不加 Q 开关时阈值泵浦功率的二倍, Q 开关为快速开关。试求其峰值功率、脉冲宽度、光脉冲输出能量和能量利用率。

解: $\delta = \delta_i - \frac{1}{2} \ln r_1 r_2 = 11.3\%$

$$\Delta n_t = \frac{\delta}{\sigma_{21} l} = 1.71 \times 10^{22} m^{-3}$$

$$\because \frac{P_p}{P_{pt}} = 2 \therefore \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} = 2$$

$$\therefore N_m = \frac{1}{2} \frac{\eta l}{L'} \Delta n_t (\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - \ln \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \eta \frac{7.5 \times 10^{-2}}{1.836 \times 7.5 \times 10^{-2} + 42.5 \times 10^{-2}} \times 1.71 \times 10^{22} \times (2 - \ln 2 - 1) = 3.5 \times 10^{20} \eta m^{-3}$$

$$\therefore P_m = \frac{1}{2} h \nu_{21} \frac{c}{\eta} S T N_m = 773.2W$$

$$\mu = 1 - \frac{\Delta n_f}{\Delta n_i} \approx 0.8$$

$$\therefore E = (\frac{T}{2\delta}) \mu h \nu_{21} V (\frac{\Delta n_i}{2}) = 0.067mJ$$

$$\therefore \tau_R = \frac{L'}{c\delta} = 1.66 \times 10^{-8} s$$

$$\text{又} \because \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} = 2 \text{ 时,}$$

$$\frac{\Delta t_r}{\tau_R} \approx 2.016, \frac{\Delta t_e}{\tau_R} \approx 2.481$$

$$\therefore \Delta t_r \approx 3.35 \times 10^{-8} \text{ s}, \Delta t_e \approx 4.12 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$\therefore \Delta t = \Delta t_r + \Delta t_e = 7.47 \times 10^{-8} \text{ s}$$

8. Q 开关红宝石激光器中, 红宝石棒截面积 $S = 1 \text{ cm}^2$, 棒长 $l = 15 \text{ cm}$, 折射率为 1.76, 腔长 $L = 20 \text{ cm}$, 铬离子浓度 $N = 1.58 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 受激发射截面 $\sigma = 1.27 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$, 光泵浦使激光上能级的初始粒子数密度 $n_{2i} = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 假设泵浦吸收带的中心波长 $\lambda = 0.45 \mu\text{m}$, E_2 能级的寿命 $\tau_2 = 3 \text{ ms}$, 两平面反射镜的反射率与透射率为 $r_1 = 0.95$, $T_1 = 0$, $r_2 = 0.7$, $T_2 = 0.3$ 。试求:

- (1) 使 E_2 能级保持 $n_{2i} = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ 所需的泵浦功率 P_p ;
- (2) Q 开关接通前自发辐射功率 P ;
- (3) 脉冲输出峰值功率 P_m ;
- (4) 输出脉冲能量 E ;
- (5) 脉冲宽度 τ (粗略估算)。

$$\text{解: (1) } P_p = \frac{n_{2i}}{\tau_s} h \nu V \approx 22.1 \text{ kW}$$

$$(2) P = \frac{n_{2i}}{\tau_s} h \nu_{21} V \approx 14.3 \text{ kW}$$

$$(3) \delta = -\frac{1}{2} \ln r_1 r_2 \approx 20.4\%$$

$$\Delta n_t = \frac{\delta}{\sigma_{21} l} \approx 1.07 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$$

$$\Delta n_i = n_{2i} - (N - n_{2i}) \approx 4.2 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$$

$$\therefore \frac{\Delta n_i}{\Delta n_t} \approx 3.93$$

$$\therefore P_m = \frac{1}{4} h \nu_{21} \frac{cl}{L'} ST \Delta n_i \left(\frac{\Delta n_i}{\Delta n_i} - \ln \frac{\Delta n_i}{\Delta n_i} - 1 \right) \approx 513 MW$$

(4) .由书中图 7.3.5(a)得 $\frac{\Delta n_f}{\Delta n_i} \approx 0.02$

$$\therefore \mu = 1 - \frac{\Delta n_f}{\Delta n_i} \approx 0.98$$

$$\therefore E = \left(\frac{T}{2\delta} \right) \mu h \nu V \left(\frac{\Delta n_i}{2} \right) \approx 7.6 J$$

(5) . $\Delta t \approx \frac{E}{P_m} \approx 15 ns$

9. 若有一四能级调 Q 激光器，由严重的瓶颈效应（即在巨脉冲持续时间内，激光低能级积累的粒子不能清除）。已知比值 $\Delta n_i / \Delta n_f = 2$ ，试求脉冲終了时，激光高能级和低能级的粒子数 n_2 和 n_1 （假设 Q 开关接通前，低能级是空的）。

解： $\Delta n_i = 2\Delta n_f$, $n_1 + n_2 = \Delta n_i$

由图 7.3.5(a)得 $\frac{\Delta n_f}{\Delta n_i} \approx 0.2$

$$n_1 = \frac{\Delta n_i - \Delta n_f}{2} = 0.4\Delta n_i$$

$$n_2 = 0.6\Delta n_i$$

10. 考虑一锁模激光器，其相邻模初位相 $\varphi_q - \varphi_{q-1} = \beta$ ，若输出光中各个模式光强按频率的分布是高斯函数分布，试证明输出脉冲按时间的分布也是高斯形的，并求出振荡带宽 $\Delta \nu_{osc}$ 和脉冲宽度 τ 之间的关系。（提示：合成电场求和近似地用积分来处理； $\Delta \nu_{osc}$ 及 τ 均按半最大值定义）

解： $I(\omega) = E(\omega)E(\omega)^* = E_0^2 \exp(-2a(\omega - \omega_0)^2)$ 其中， $a = const$

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp(-a(\omega - \omega_0)^2) \exp(-i\omega_0 t) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp(-a(\omega - \omega_0)^2) \exp(i(\omega - \omega_0)t) d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{E_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \exp(-t^2/4a)$$

$$I(t) = \frac{E_0^2 \pi}{a} \exp(-t^2/2a)$$

当 $t = 0$ 时, $I(0) = \frac{E_0^2 \pi}{a}$

当 $t = t_1$ 时, $I(t_1) = \frac{E_0^2 \pi}{2a}$

$$I(t_1) = \frac{E_0^2 \pi}{a} \exp(-t_1^2/2a) \Rightarrow t_1 = \sqrt{2a \ln 2}$$

$$\tau = 2t_1 = 2\sqrt{2a \ln 2};$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, $I(\omega_0) = E_0^2$

当 $\omega = \omega_1$ 时, $I(\omega_1) = \frac{1}{2} E_0^2$

$$I(\omega_1) = E_0^2 \exp(-2a(\omega - \omega_0)^2) \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 + \sqrt{\frac{1}{2a} \ln 2}$$

$$\Delta \nu = 2(\omega_1 - \omega_0)/2\pi = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2a} \ln 2}$$

$$\therefore \tau \Delta \nu = \frac{2}{\pi} \ln 2$$

11. 一锁模 $He - Ne$ 激光器振荡带宽为 $600MHz$, 输出谱线形状近似于高斯函数, 试计算其相应的脉冲宽度。

解: $\tau \Delta \nu = 0.4412$

$$\tau = 0.4412/\Delta \nu = 7.4 \times 10^{-10} s$$

12. 一锁模氩离子激光器, 腔长 $1m$, 多普勒线宽 $6000MHz$, 未锁模时的平均输出功率为 $3W$ 。试粗略估算该锁模激光器输出脉冲的峰值功率、脉冲宽度及脉冲间隔时间。

解: 纵模间隔 $\Delta \nu_q = \frac{c}{2L'} = 150MHz$, 多普勒线宽 $\Delta \nu_d = 6000MHz$, 故共有

$$n = \frac{6000}{150} = 40 \text{ 个纵模。所以锁模后激光器输出脉冲的峰值功率为}$$

$$P_m = 40 \times 3W = 120W$$

$$\text{脉冲宽度 } \tau = \frac{1}{\Delta \nu_d} = 1.7 \times 10^{-10} s \dots \dots (7.5.10)$$

$$\text{脉冲时间间隔 } T_0 = \frac{2L'}{c} = 6.7 \times 10^{-9} \text{ s} \dots (7.5.9)$$

第八章

1、解：单模振荡情况下电场为：

$$E(z, t) = E_n(t) \sin(k_n z) \cos[\omega_n t + \phi_n(t)]$$

代入 (8.4.16) 由 (8.4.18) 和 (8.4.19)

$$\rho_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2\hbar} E_n(t) \beta \sin(k_n z) \Delta n(z, t) e^{-i(\omega_n t + \phi_n)} \frac{(\omega - \omega_n) - i\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_n)^2}$$

$$\rho_{ba}^{(1)} = \frac{1}{2\hbar} E_n(t) \beta \sin(k_n z) \Delta n(z, t) e^{i(\omega_n t + \phi_n)} \frac{(\omega - \omega_n) + i\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_n)^2}$$

代入 (8.4.9) 和 (8.4.10)，稳态情况下：

$$\lambda_a - \gamma_a \rho_{aa} + i\hbar^{-1} \beta E (\rho_{ba} - \rho_{ab}) = 0$$

$$\lambda_b - \gamma_b \rho_{bb} + i\hbar^{-1} \beta E (\rho_{ba} - \rho_{ab}) = 0$$

$$\frac{\lambda_a}{\gamma_a} - \rho_{aa} + \frac{i\beta^2 E_n \sin^2(k_n z)}{2\hbar^2 \gamma_a} \Delta n \frac{1}{2} [e^{-2i(\omega_n t + \phi_n)} + 1] \frac{(\omega - \omega_n) - i\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_n)^2} = 0$$

$$\frac{\lambda_b}{\gamma_b} - \rho_{bb} - \frac{i\beta^2 E_n \sin^2(k_n z)}{2\hbar^2 \gamma_b} \Delta n \frac{1}{2} [e^{2i(\omega_n t + \phi_n)} + 1] \frac{(\omega - \omega_n) + i\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_n)^2} = 0$$

忽略高频项并用后式减前式有：

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} = \Delta n \left[1 - \frac{\beta^2 E_n^2 \sin^2(k_n z)}{2\hbar^2} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_n)^2} \frac{2\gamma_{ab}}{\gamma_a + \gamma_b} \right] \approx \frac{\Delta n}{1 + \frac{R}{R_s}}$$

2、解： $\therefore \dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, \hat{H}] = \frac{i}{\hbar} \rho H - \frac{i}{\hbar} H \rho$

$$\therefore \dot{\rho} - \frac{i}{\hbar} \rho H + \frac{i}{\hbar} H \rho = 0$$

上式等号两边同时左乘 $e^{\frac{i}{\hbar} H t}$ 、右乘 $e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$ ，得

$$e^{\frac{i}{\hbar} H t} \left(\dot{\rho} - \frac{i}{\hbar} \rho H + \frac{i}{\hbar} H \rho \right) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = 0, \text{ 即}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\frac{i}{\hbar} H t} \rho e^{-\frac{i}{\hbar} H t}) = 0$$

积分上式，得 $e^{\frac{i}{\hbar} H t} \rho e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = C$

令 $t=0$ ，可知 $C = \rho(0)$

所以, $e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \rho e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \rho(0)$

上式等号两边同时左乘 $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ 、右乘 $e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$, 得

$$\rho = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \rho(0) e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$$

3、证明: $H = H_0 = \begin{pmatrix} \hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix}$, 则: $H^n = \begin{pmatrix} \hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\hbar\omega_a)^n & 0 \\ 0 & (\hbar\omega_b)^n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (1) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} &= 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}H\right)t + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}H\right)^2 t^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{\hbar}H\right)^3 t^3 + \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} \hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \begin{pmatrix} (\hbar\omega_a)^2 & 0 \\ 0 & (\hbar\omega_b)^2 \end{pmatrix} t^2 + \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (-i\omega_a)t + \frac{1}{2!}(-i\omega_a)^2 t^2 + & 0 \\ 0 & 1 + (-i\omega_b)t + \frac{1}{2!}(-i\omega_b)^2 t^2 + \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 由题 8.2 结果: (有异议)

$$\begin{aligned} \rho &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \rho(0) e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{aa}^0 & \rho_{ab}^0 \\ \rho_{ba}^0 & \rho_{bb}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_b t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{aa}^0 & \rho_{ab}^0 e^{-i(\omega_a - \omega_b)t} \\ \rho_{ba}^0 e^{i(\omega_a - \omega_b)t} & \rho_{bb}^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第九章 典型激光器

习题 1

解: 我们知道

$$\text{长脉冲: 阈值功率 } P_{pt} = \frac{h\nu_p nV}{2\eta_F \tau_s}$$

$$\text{短脉冲: 阈值能量 } E_{pt} = \frac{h\nu_p nV}{2\eta_F}$$

$$\text{以及, } \frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{KT}}$$

V 是工作物质体积； ν_p 为泵浦光频率， η_F 为发光效率。

具体代入上面两式，得：

短脉冲或长脉冲激励情况下泵浦能量或功率的阈值，分别为

$$\text{短脉冲: } \frac{h\nu_{13}n}{\eta_1} \left(\frac{1+e^{-\Delta/KT}}{2+e^{\Delta/KT}} \right)$$

$$\text{长脉冲: } \frac{h\nu_{13}n_2(t_0)}{\eta_0\tau_{21}} \left(\frac{1+e^{-\Delta/KT}}{2+e^{-\Delta L/KT}} \right)$$

习题 2

解：阈值能量密度为
$$\frac{P_{pt}}{V\eta_p} = \frac{hcn}{2\eta_F\tau_s\lambda_p}$$

泵浦中心波长 $\lambda_p = 405nm$ 时：

$$\frac{P_{pt}}{V\eta_p} = \frac{6.62*10^{-34}*2*10^{19}*3*10^8}{2*0.7*3*10^{-3}*405*10^{-9}*0.01} = 2.3*10^5 Wcm^{-3}$$

泵浦中心波长 $\lambda_p = 555nm$ 时：

$$\frac{P_{pt}}{V\eta_p} = \frac{6.62*10^{-34}*2*10^{19}*3*10^8}{2*0.7*3*10^{-3}*555*10^{-9}*0.01} = 1.7*10^5 Wcm^{-3}$$

习题 3

解：我们知道激光器的输出功率（能量）和光泵输入功率（能量）间的关系为

$$P = \frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 \eta_p P_{pt} \left(\frac{P_p}{P_{pt}} - 1 \right) \quad (9.1.1)$$

$$E = \frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 \eta_p \varepsilon_{pt} \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pt}} - 1 \right) \quad (9.1.2)$$

式中 P_{pt} 及 ε_{pt} 分别为光泵输入电功率及电能量的阈值；

ν_0 与 ν_p 分别为激光及泵浦光频率； $\eta_0 = T/2\delta$ 为激光器谐振腔内激光能量（功率）

转化为输出激光能量（功率）的转换效率； η_1 为 E_3 能级至 E_2 能级的无辐射跃迁

效率； η_p 为泵浦效率。

题中给出条件： $\varepsilon_{pt(1)} = 5J$ ， $\varepsilon_{pt(2)} = 10J$ ， $\varepsilon_p = 15J$ ， $E_1 = 100mJ$ ，

$E_2 = 75mJ$ 。应用(9.1.2)式，可得

$$\text{器件 1: } 100mJ = \left(\frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 \eta_p\right)_{(1)} \cdot 5J \left(\frac{15J}{5J} - 1\right)$$

$$\text{器件 2: } 75mJ = \left(\frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 \eta_p\right)_{(2)} \cdot 10J \left(\frac{15J}{10J} - 1\right)$$

推出激光器的斜效率为

$$\left(\frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 \eta_p\right)_{(1)} = 0.01 \quad \left(\frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 \eta_p\right)_{(2)} = 0.015$$

现在来看，对应输出 150mJ 和 300mJ 能量时，器件 1 和 2 所分别需要的光泵输入能量为

$$\text{对器件 1, } 150mJ = 0.01 \cdot 5J \left(\frac{\varepsilon_{p(1)}}{5J} - 1\right) \Rightarrow \varepsilon_{p(1)} = 20J$$

$$300mJ = 0.01 \cdot 5J \left(\frac{\varepsilon'_{p(1)}}{5J} - 1\right) \Rightarrow \varepsilon'_{p(1)} = 35J$$

$$\text{对器件 2, } 150mJ = 0.015 \cdot 10J \left(\frac{\varepsilon_{p(2)}}{10J} - 1\right) \Rightarrow \varepsilon_{p(2)} = 20J$$

$$300mJ = 0.015 \cdot 10J \left(\frac{\varepsilon'_{p(2)}}{10J} - 1\right) \Rightarrow \varepsilon'_{p(2)} = 30J$$

比较上面式子，可知

对要求输出 150mJ 能量时，两台激光器所需要的光泵输入能量是相同的，因而两者均可；

对要求输出 300mJ 能量时，器件 1 所需要的光泵输入能量大于器件 2 所需要的光泵输入能量，因而应选择器件 2 更为合适。

习题 4

解：(1) 工作物质长度 $l = 10cm$ ，则阈值反转集居数密度为

$$n_{2t} = \frac{1}{\sigma_{21}} \left(\alpha_i + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r_1} \right) = 3.05 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

为保持 n_{2t} 不变，每秒钟需要泵浦到激光上能级 E_2 上的粒子数密度为（考虑到自发辐射）

$$n_{2t}' = A_{21}n_{2t} = \frac{1}{\tau_2}n_{2t} = 1.33 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$$

每平方厘米工作物质输出功率为

$$P_{out}' = (n_2 - n_{2t}')h\nu_0 \frac{T}{T + \beta} = \left(\frac{n_2}{n_{2t}'} - 1\right)n_{2t}' h\nu_0 \frac{T}{T + \beta}$$

式中 $\beta = 1 - e^{-2\alpha_1 l} = 0.18$

已知 $\frac{n_2}{n_{2t}'} = 4$ ，代入上式得

$$P_{out}' = 26.7 \text{ W/cm}^3$$

要求输出 50W 时，需要工作物质体积为

$$V = \frac{P_{out}}{P_{out}'} = 1.87 \text{ cm}^3$$

若 $l = 10 \text{ cm}$ ，则工作物质直径为

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi l}} = 0.488 \text{ cm}$$

(2) 阈值输入功率

$$P_{ih} = \frac{n_{2t}' h\nu_p V}{\eta_i \eta_c \eta_a \eta_F} = 824 \text{ W}$$

(3) 输出 500W 时的输入电功率；已知超阈值（泵浦输入为阈值的 4 倍） $n=4$ ，所以

$$P_{in} = nP_{ih} = 3.3 \text{ kW}$$

习题 5

解：一次电容放电能量： $\varepsilon_p = \frac{1}{2} CV^2 = 50 \text{ J}$ ，则： $E_p = \eta_p \varepsilon_p = 3.5 \text{ J}$ 。

由 (5.3.13) 和 (5.1.8) 及： $\eta_0 = \frac{T}{2\delta} = 0.77, \eta_1 = 1, \delta = 0.26$ 。

取 $\lambda_p = 750 \text{ nm}, \lambda_0 = 1064 \text{ nm}, \sigma_{21} = 88 \times 10^{-20} \text{ cm}^{-2}, S = 0.78 \text{ cm}^2$ 。

脉冲输出能量： $E = \frac{\nu_0}{\nu_p} \eta_0 \eta_1 E_p - \eta_0 \frac{hc}{\lambda_0} \frac{\delta S}{\sigma_{21}} = 1.9 \text{ J}$

习题 6

解：(1) 氦氖激光器的小信号增益系数可表示为

$$G^0(\nu_0) = \Delta n^0 \frac{\lambda_0^2 A_{21}}{4\pi \Delta \nu_D} \left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2} \quad (1)$$

式中 $A_{21} = 2.87 \times 10^{-6} s^{-1}$ 为自发辐射跃迁几率，而多普勒加宽线宽

$$\Delta\nu_D \approx 7.16 \times 10^{-7} \sqrt{\frac{T}{M}} \nu_0$$

式中氦原子量 $M=20$ ，而 $T=400K$ ，由此有

$$\Delta\nu_D \approx 283 MHz$$

根据题中给出条件

$$10 \log e^{G^0(\nu_0)l} = 30 dB \quad (\text{即：单程小信号增益为 } 30 dB)$$

式中腔长 $l = 1m$ ，由此可得到

$$G^0(\nu_0) = 0.069 cm^{-1}$$

于是由 (1) 式，求出反转集居数

$$\Delta n^0 = \frac{4\pi\Delta\nu_D G^0(\nu_0)}{\lambda_0^2 A_{21} (\ln 2 / \pi)^{1/2}} = 1.58 \times 10^9 cm^{-3}$$

(2) 因为 $A_{21} = 6.56 \times 10^6 s^{-1}$ ，而多普勒加宽线宽

$$\Delta\nu_D \approx 7.16 \times 10^{-7} \sqrt{\frac{400}{20}} \times 6.56 \times 10^6 = 1500 MHz$$

由式 (1) 可查到该波长时的小信号增益系数

$$G^0(\nu_0) = 0.1034 m^{-1}$$

由此求得 1m 长激光器的增益

$$10 \log e^{G^0(\nu_0)l} = 10 \log e^{0.1034} = 0.45 dB$$

习题 7

解： $3S_2 \rightarrow 3P_4$ ： $\lambda = 3.39 \mu m$ $A_{21} = 2.87 \times 10^6 s^{-1}$

$$\text{受激辐射截面 } \delta_{21} = \frac{\nu^2 A_{21}}{4\pi\nu_0^2 \Delta\nu_D} = 4.4 \times 10^{-15} m^2$$

$$\text{饱和光强 } I_s = \frac{h\nu_0}{\delta_{21}\tau_2} = 38 J m^{-2}$$

$2S_2 \rightarrow 2P_4$ ： $\lambda = 1.15 \mu m$ $A_{21} = 6.54 \times 10^6 s^{-1}$ 代入上面的公式

$$\delta_{21} = 3.85 \times 10^{-16} m^2 \quad I_s = 2.9 \times 10^3 J m^{-2}$$

$3S_2 \rightarrow 2P_4$ ： $\lambda = 632.8 nm$ $A_{21} = 6.56 \times 10^6 s^{-1}$

$$\delta_{21} = 6.55 \times 10^{-17} \text{ m}^2 \quad I_s = 3.1 \times 10^4 \text{ Jm}^{-2}$$

习题 9

解: 已知各种气体的压强比为 1: 1: 8

$$\Delta\nu_D = 61 \text{ MHz}$$

$$\Delta\nu_L = 57(\psi_{\text{CO}_2} + 0.73\psi_{\text{N}_2} + 0.6\psi_{\text{He}})P\left(\frac{300}{T}\right)^{1/2} \times 10^3$$

$$\text{又已知 } \lambda = 10.6 \mu\text{m} \quad T = 400 \text{ K} \quad K = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$\Delta\nu_D = \Delta\nu_L$$

即可求得 $P = 1.9 \text{ kPa}$

习题 11

解: 根据 $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_{nr}}$

$$\eta = \frac{A_{10}}{A_{10} + S_{10}}, \quad \tau_s = \frac{1}{A_{10}}, \quad \tau_{nr} = \frac{1}{S_{10}}$$

又已知 $\tau = 5 \times 10^{-9} \text{ s}$, $\eta = 0.87$

所以解得 $\tau_s = 5.747 \times 10^{-9} \text{ s}$

$$\tau_{nr} = 3.846 \times 10^{-8} \text{ s}$$

习题 12

解: 激励到 S_1 态的总粒子数为 $J\sigma n_0$, 其中通过自发辐射回到 S_0 态

的粒子数为 $J\sigma n_0 \eta_2$, 而到达三重态 T_1 的粒子数为 $Jn_0\sigma(1-\eta_2)$

在稳定状态下, S_1 和 T_1 态上粒子数达到平衡, 即到达的粒子数等于离开的粒子数:

$$Jn_0\sigma\eta_2 = n_1/\tau_1$$

$$Jn_0\sigma(1-\eta_2) = n_T/\tau_T$$

可得到: $n_0 = n_T / J\sigma(1-\eta_2)\tau_T$

$$n_1 = Jn_0\sigma\eta_2\tau_1 = \eta\tau_1 n_T / (1-\eta_2)\tau_T$$

代入公式 $n = n_0 + n_1 + n_T$, 经整理后可得

$$\frac{n_T}{n} = \frac{J\sigma(1-\eta_2)\tau_T}{1 + J\sigma(1-\eta_2)\tau_T + J\sigma\tau_1}$$

第十章习题 (1-3 题)

1. 设电子在导带中的有效质量为 m_c ，在价带中的有效质量为 m_v ，在 $k \rightarrow k + dk$ 单位波矢间隔内的电子态数为 $\rho(k)$ ，在 $E \rightarrow E + dE$ 单位能量间隔内的电子态密度为 $\rho(E)$ 。试利用 $\rho(k)dk/V = \rho(E)dE$ 求导带中和价带中单位能量间隔内的电子态密度 $\rho_c(E)$ 和 $\rho_v(E)$ 的表达式 (V 为半导体介质的体积)。

解：对于导带： $E_b = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} = E - E_c, dE = \frac{\hbar^2 k}{m_c} dk,$

$$\text{则： } \rho_c(E) = \frac{\rho(k)dk}{V} \frac{1}{dE} = \frac{m_c \sqrt{2m_c(E - E_c)}}{\pi^2 \hbar^3}$$

对于价带： $E_a = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} = E_v - E,$

$$\rho_v(E) = \frac{m_v \sqrt{2m_v(E_v - E)}}{\pi^2 \hbar^3}$$

2. 室温时 $KT = 0.026eV$ ， $GaAs$ 的禁带宽度为 $1.11eV$ ，它比 KT 大很多。如果费米能级距导带底和价带顶都足够远 (至少为 KT 的数倍)，则费米函数 $f(E)$ 可近似为一指数函数。证明导带中的电子密度 n 和价带中的空穴密度 p 可分别表示为

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{KT}\right) \quad p = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{KT}\right)$$

式中 N_c 和 N_v 为常数。

证明：导带中电子密度：

$$n = \int_{E_c}^{\infty} f(E)\rho_c(E) dE = \int_{E_c}^{\infty} e^{-\frac{E-E_F}{KT}} \sqrt{E - E_c} dE \frac{\sqrt{2m_c^3}}{\pi^2 \hbar^3} = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{KT}}$$

$$\text{其中 } N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_c KT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

价带中空穴密度：

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} (1 - f(E))\rho_v(E) dE = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{KT}}, \text{ 其中 } N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_v KT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. 利用上题之结果导出本征半导体的费米能级 E_F 的表达式，并说明如果电子在导带中

的有效质量等于它在价带中的有效质量，则费米能级 E_F 正好位于禁带的中心。

解：由于： $n = p$ 得： $N_c e^{\frac{E_c - E_F}{KT}} = N_v e^{\frac{E_F - E_v}{KT}}$

$$\exp\left(\frac{2E_F - E_c - E_v}{KT}\right) = \frac{N_v}{N_c} \Rightarrow E_F = \frac{E_c + E_v + KT \ln \frac{N_v}{N_c}}{2}$$

$$\therefore \frac{N_v}{N_c} = 1 \quad \therefore E_c - E_F = E_F - E_v = \frac{E_c - E_v}{2}$$

$$\text{又} \because E_a = E_b = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \therefore E_c - E_F - E_b = E_F - E_v - E_a$$

即费米能级位于禁带的中心。

4 处于非热平衡状态下的半导体材料在 0K 时导带中电子密度为 n ，价带中空穴密度为 p 。

试证明这时导带的准费米能级 E_{FC} 和价带的准费米能级 E_{FV} 可分别表示为：

$$E_{FC} = E_C + (3\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_c} n^{\frac{2}{3}}$$

$$E_{FV} = E_v - (3\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_v} n^{\frac{2}{3}}$$

证明：当 $T = 0$ 时，由 $f_c(E) = \frac{1}{e^{\frac{E - E_{FC}}{KT}} + 1}$ 知电子处于 $E_C \sim E_{FC}$ 的几率为 1，处于 $E_{FC} \sim \infty$

的几率为 0。

$$\text{则： } n = \int_{E_C}^{\infty} f_c(E) \rho_c(E) dE = \frac{2}{3} (E_{FC} - E_C)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2m_c^3}}{\pi^2 \hbar^3}$$

$$\text{得： } E_{FC} = E_C + (3\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_c} n^{\frac{2}{3}};$$

$$\text{同理可得： } E_{FV} = E_v - (3\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_v} n^{\frac{2}{3}}$$

5 一直接跃迁半导体的价带能级 E_1 与导带能级 E_2 间跃迁的频率为 ν 。证明：

(1) 在热平衡状态下，从导带到价带的跃迁（发射一个频率为 ν 的光子）的几率总比价带到导带的跃迁（吸收一个频率为 ν 的光子）的几率来得小。

(2) 在非热平衡状态下，为使从导带到价带跃迁的几率大于从价带到导带跃迁的几

率，则导带的准费米能级 E_{FC} 和价带的准费米能级 E_{FV} 应满足：

$$E_{FC} - E_{FV} >= h\nu$$

证明: $h\nu = E_b + E_a + E_g = (E_b + E_c) - (E_v + E_a) = E_2 - E_1$

在 $k \rightarrow k + dk$ 波矢范围内反转集居数密度为:

$$\begin{aligned} d(n_2 - n_1) &= \frac{\rho(k)}{V} dk \{f(E_2)[1 - f(E_1)] - f(E_1)[1 - f(E_2)]\} \\ &= \frac{\rho(k)}{V} dk [f(E_2) - f(E_1)] \end{aligned}$$

由 $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{KT}} + 1}$ 则: $f(E_2) < f(E_1), d(n_2 - n_1) < 0$ 。

即热平衡状态下, 吸收大于发射。

非热平衡状态下: $d(n_2 - n_1) = \frac{\rho(k)}{V} dk [f_c(E_2) - f_v(E_1)]$

并由 $f_c(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_{FC}}{KT}} + 1}$ 和 $f_v(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_{FV}}{KT}} + 1}$

为使 $d(n_2 - n_1) > 0$, 要求: $E_{FC} - E_{FV} > E_2 - E_1 = h\nu$

- 6 (1) 如果电磁场具有形式: $\vec{E}(r, t) = \vec{E}(x, y)e^{i(\omega t - kz)}$, $\vec{H}(r, t) = \vec{H}(x, y)e^{i(\omega t - kz)}$ 式中 ω 为圆频率; k 为传播常数。请用麦克斯韦方程组证明, 电磁场的横向分量 $E_x(x, y)$ 、 $E_y(x, y)$ 、 $H_x(x, y)$ 和 $H_y(x, y)$ 可用其纵向分量 $E_z(x, y)$ 和 $H_z(x, y)$ 来表示。

(2) 这一事实对于求解介质波导腔内的电磁场模式有何帮助?

- (1) 证明: 麦克斯韦方程组: $\nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$,

$$\text{其中 } \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

若: $\vec{E}(r, t) = \vec{E}(x, y)e^{i(\omega t - kz)}$, $\vec{H}(r, t) = \vec{H}(x, y)e^{i(\omega t - kz)}$

$$-\mu_0 i \omega H_x(x, y) = \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + ik E_y(x, y)$$

可得: $-\mu_0 i \omega H_y(x, y) = -ik E_x(x, y) - \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x}$

$$-\mu_0 i \omega H_z(x, y) = \frac{\partial E_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y)}{\partial y}$$

$$\varepsilon i \omega E_x(x, y) = \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} + ik H_y(x, y)$$

$$\varepsilon i \omega E_y(x, y) = -ik H_x(x, y) - \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x}$$

$$\varepsilon i \omega E_z(x, y) = \frac{\partial H_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(x, y)}{\partial y}$$

$$E_x(x, y) = \frac{i}{k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_0} \left(k \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$E_y(x, y) = \frac{i}{k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_0} \left(k \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \right)$$

经整理得:

$$H_x(x, y) = \frac{i}{k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_0} \left(k \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$H_y(x, y) = \frac{i}{k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_0} \left(k \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \right)$$

(2) (未完)

7 由式 (10.4.5) 求 Γ_m 的表达式 (10.4.6)。

$$\text{证明: 式 (10.4.5): } \Gamma_m = \frac{\int_0^d \cos^2(k_{2m} x) dx}{\int_0^d \cos^2(k_{2m} x) dx + \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \cos^2(k_{2m} x) e^{-2\gamma_m \left(x - \frac{d}{2}\right)} dx}$$

$$\text{而: } \int_0^d \cos^2(k_{2m} x) dx = \int_0^d \frac{\cos(2k_{2m} x) + 1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^d \cos(2k_{2m} x) dx + \frac{d}{4} = \frac{\sin(k_{2m} d)}{4k_{2m}} + \frac{d}{4}$$

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \cos^2(k_{2m} x) e^{-2\gamma_m \left(x - \frac{d}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} e^{-2\gamma_m \left(x - \frac{d}{2}\right)} dx + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} e^{-2\gamma_m \left(x - \frac{d}{2}\right) + i2k_{2m} x} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{4\gamma_m} + \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{ik_{2m} d}}{\gamma_m - ik_{2m}} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\gamma_m} + \frac{1}{4} \frac{\gamma_m \cos(k_{2m} d) - k_{2m} \sin(k_{2m} d)}{\gamma_m^2 + k_{2m}^2}$$

$$\text{(若 } k_{2m} \ll \gamma_m \text{ 时)} = \frac{1}{4\gamma_m} + \frac{\cos(k_{2m} d)}{4\gamma_m}$$

$$\text{故: } \Gamma_m = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma_m} \frac{1 + \cos(k_{2m}d)}{d + \frac{\sin(k_{2m}d)}{k_{2m}}}} = \left\{ 1 + \frac{\cos^2\left(k_{2m} \frac{d}{2}\right)}{\gamma_m \left[\frac{d}{2} + \frac{1}{k_{2m}} \sin\left(k_{2m} \frac{d}{2}\right) \cos\left(k_{2m} \frac{d}{2}\right) \right]} \right\}^{-1}$$

即式 (10.4.6)