电磁学基本公式

(1) 静电场

库仑定律 $f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} r_0$；

电场强度 $E = \frac{F}{q_0}$；

高斯定理 $\oint D \cdot dS = \sum q_0$，$D = \varepsilon_0 E + P$；

在各向同性的介质中 $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$；

极化电荷面密度 $\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) D$；

环路定理 $\oint E \cdot dl = 0$；

电势能	$E_{pa} = q_0 \int_a^{\text{电势能零点}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$;
电势	$U_a = \dfrac{E_{pa}}{q_0} = \int_a^{\text{电势零点}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$;
电势差	$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$;
电场力的功	$A_{ab} = q_0(U_a - U_b) = E_{pa} - E_{pb}$;
电场强度与电势的微分关系	$E_l = -\dfrac{\partial U}{\partial l}$;
电容器的电容	$C = \dfrac{q}{U_{ab}}$;

电容器的能量 $W=\frac{1}{2}CU^2$；

电场的能量 $W=\int_V \omega \mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V$；

（2）稳恒电流的磁场

磁感应强度 $B=\frac{F_m}{qv_\perp}$；

磁场的高斯定理 $\oint B\cdot \mathrm{d}S=0$；

磁场的环路定理 $\oint H\cdot \mathrm{d}l=\sum I_0$， $H=\frac{B}{\mu_0}-M$；

在各向同性的均匀介质中 $B=\mu_0\mu_r H$ ；

磁化电流密度 $j_s=(\mu_r-1)H$ ；

毕奥—萨伐尔定律

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\times r_0}{r^2};$$

直载流导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2),\begin{cases}\text{无限长，} & \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a},\\ \text{半无限长，} & \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a},\\ \text{延长线上，} & 0;\end{cases}$$

圆电流 $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$，$\begin{cases} 圆心， & \dfrac{\mu_0 I}{2R}， \\ \dfrac{1}{n}圆的圆心， & \dfrac{\mu_0 I}{2nR}； \end{cases}$

安培定律 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$ ；

磁力矩 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}_m \times \boldsymbol{B}$ ；

线圈的磁矩 $\boldsymbol{P}_m = N I S \boldsymbol{n}$ ；

磁力矩的功 $A = I\Delta\Phi$ ；

洛仑兹力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 。

（3） 电磁感应

法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$ ；

感应电流 $I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$ ；

通过导线的电量

$$q = \int I\,dt = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

动生电动势 $\varepsilon = \int_a^b (v \times B) \cdot dL$ ；

感生电动势 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$

自感电动势 $\varepsilon = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$；

互感系数 $N\Phi_1 = MI_2$，$M = \dfrac{N\Phi_1}{I_2}$；

互感电动势 $\varepsilon_1 = -M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$；

通电线圈的自感磁能

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \int \omega_m \,\mathrm{d}V = \int_V \frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V$$；

两通电线圈的互感磁能

$$W = MI_1I_2 = \int_V \frac{B_1 \cdot B_2}{\mu}\mathrm{d}V$$；

两通电线圈的总磁能

$$W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2=\int\frac{B_1^2}{2\mu}\mathrm{d}V+\int\frac{B_2^2}{2\mu}\mathrm{d}V+\int\frac{B_1\cdot B_2}{\mu}\mathrm{d}V.$$

（4）麦克斯韦圈的总磁场

涡旋电场 $\oint E_{涡}\cdot\mathrm{d}l=-\int\frac{\partial B}{\partial t}\cdot\mathrm{d}S$；

位移电流 $I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$；

麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\oint D\cdot\mathrm{d}S=\sum q_0,\\ \oint E\cdot\mathrm{d}l=-\int\frac{\partial B}{\partial t}\cdot\mathrm{d}S,\\ \oint B\cdot\mathrm{d}S=0,\\ \oint H\cdot\mathrm{d}l=I+\int\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}.\end{cases}$$

第12章：真空中的静电场

13.2 解题指导

（1）场强E、电势U的计算

场强和电势的计算可归纳为两大类题型：

第一类，场具有球、柱、面对称性.

先用高斯定理

$$\oint E \cdot dS = \frac{\sum q_0}{\varepsilon_0},$$ 求出E的分布.

再用电势公式

$$U_a = \int_a^{\infty} E \cdot dl$$ 计算电势分布

第二类，一般的场

原则：点电荷的场、叠加原理

点电荷的场 场强 电势

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} r_{i0} \qquad U_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

点电荷系的场 场强 电势

$$E = \sum_i E_i \qquad U = \sum_i U_i$$

连续带电体的场

场强

将带电体分成无穷多个点电荷，取一点电荷，其场强为

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r_0 ,$$

将d E分解到x方向和y方向

$$\mathrm{d}E = \begin{cases} \mathrm{d}E_x , \\ \mathrm{d}E_y ; \end{cases}$$

再对场强在x方向的分量及y方向的分量积分

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x , \qquad E_y = \int \mathrm{d}E_y .$$

电势

取一点电荷，其电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_0},$$

对所有点电荷产生的电势求和即求积分

$$U = \int dU.$$

求解连续带电体的场强需用矢量积分（上面已介绍了基本方法），一般计算较为复杂.此问题也可简化：先计算带电体在空间的电势（电势计算积分为标量积分，比场强矢量积分简单），然后用 $E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}$ 求场强.

(2) 运用$F=q_0E$计算电场力时，应注意E是除q_0以外的电荷产生的电场强度.

(3) 对高斯定理

$$\Phi_e=\oint E\cdot dS=\frac{\sum q_0}{\varepsilon_0}$$

中的每一个量，要有正确的理解.

Φ_e只跟封闭面包围的电量有关，而E则是封闭面（也称高斯面）内、外所有电荷产生的总场强，跟高斯面内、外电荷有关.

$\Phi_e>0$，说明高斯面内净电荷（正、负电荷相加）大于零（也即正电荷比负电荷多），不能说高斯面内只有正电荷.

(4) 电场与电势的关系

积分关系 $U_a=\int_a^{\infty}E\cdot dl$

微分关系 $E_l=-\dfrac{\partial U}{\partial l}$

电场强度E大的地方，电势的高低要看积分 $U_a=\int_a^{\infty}E\cdot dl$ 的值大还是小，即单位电量从a→电势零点电场力作功大还是小来决定.从微分关系看，E_l大，说明电势在l方向的方向导数 $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ 大，即电势U随l的变化率大，即单位长度电势的变化 ΔU大，反过来看电势高的地方也不能笼统地讲电场也强.

典型例题

13-1 对于高斯定理 $\Phi_e = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\sum q_0}{\varepsilon_0}$，举例说明下列说法是否正确：

(1) 若高斯面内无电荷，则通过高斯面的电通量必为零；

(2) 若高斯面内电荷的代数和不为零，则高斯面上的场强一定处处不为零；

(3) 若高斯面上的场强处处为零，则高斯面内一定处处无电荷；

(4) 若高斯面上的场强处处不为零，则高斯面内必有电荷.

$\sum$

答(1) 正确. 根据高斯定理 $\Phi_e=\dfrac{\sum q_0}{\varepsilon_0},\sum q_0=0,\Phi_e=0.$ 因电荷都分布在高斯面外，任一电力线穿入高斯面后必要穿出高斯面，所以总电通量必为零.

(2) 不正确. $\sum q_0\neq 0$,只能说明$\Phi_e\neq 0$，高斯面上的场强有些地方可以为零. 例：有两正点电荷(+q，+q)，高斯面通过两点电荷的中点O（如图13.3-1(a)），O点处的场强 = 0.

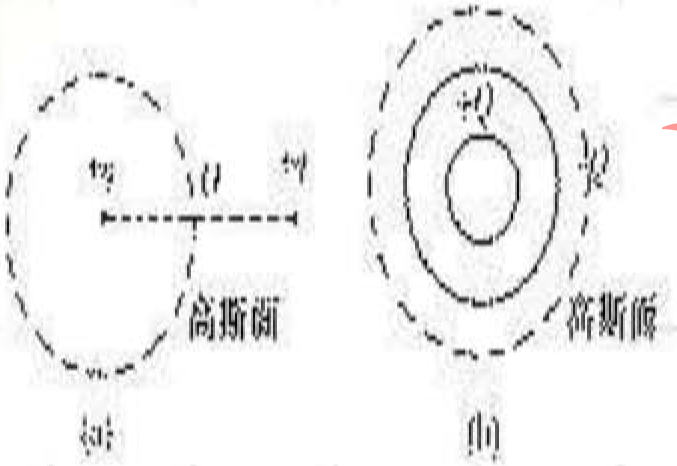


图 13.3-1

(3) 不正确.高斯面上的场强处处为零，说明 $\Phi_e=\oint E\cdot dS=\frac{\sum q_0}{\varepsilon_0}=0,\sum q_0=0$ 表明高斯面内净电荷 = 0，可能存在正、负电荷相加为0的情况.例：两同心球壳分别带有等量异号电荷+Q、－Q（如图13.3-1(b)所示），两球壳外的电场处处为0，高斯球面在两球壳外，高斯面内有电荷+Q、－Q.

(4) 不正确.例：高斯面外有一点电荷q，这时高斯面上场强处处不为零，而高斯面内无电荷.

读者还可列举出一些例子来说明以上问题，这样有助于对以上问题更深入的理解.

13-2　举例说明下列说法是否正确.

（1）场强大的地方，电势一定高；电势高的地方，场强一定大；

（2）带正电的物体电势一定是正的，电势等于零的物体一定不带电；

（3）场强大小相等的地方电势一定相等，等势面上场强的大小一定相等.

答(1) 不正确. 例如图13.3-2(a)中带等量异号电荷的平行板电容器，两平行板间的场强大小处处相等，但靠近正极的电势高，靠近负极的电势低.

(2)不正确. 例如两带电的同心球壳，如图13.3-2(b)所示. 内球的电势

$U_{R_1}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$， 只要 q' 足够大， U_{R_1} 可能为负值. 后一问也不对，电势为零的物体可能带电，如图12.3-2(a)中负板接地电势为零，但带负电.

(3)不正确. 如图12.3-2(a)中平行板间场强大小处处相等，但电势可能不相同. 后一问也不对，如图12.3-2(c)所示，两正、负点电荷，电量大小相等，它们的中垂面为等势面，但其上各点的场强大小不一定相等.

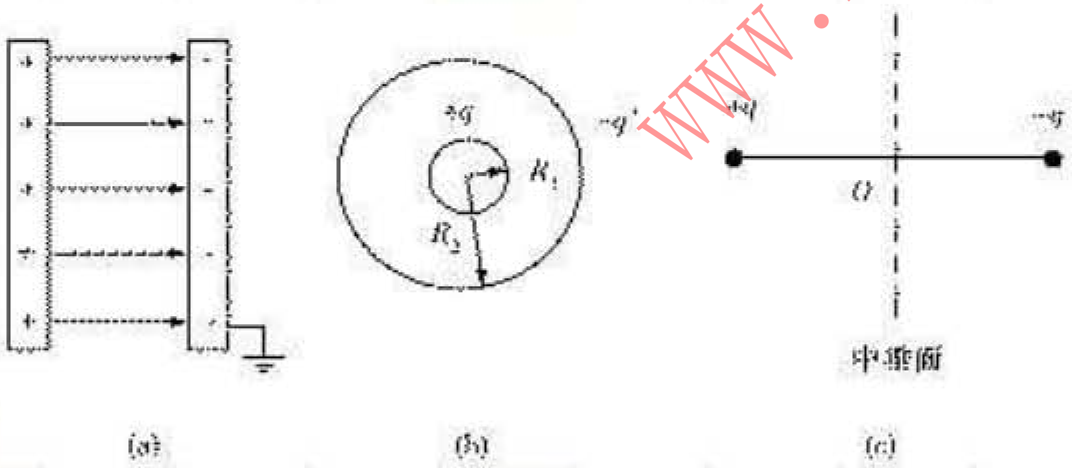


图 12.3-2

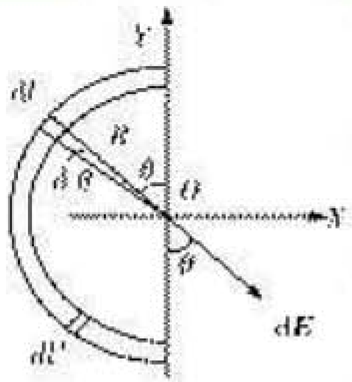


图 12.3-3

13-3　半径为R的半圆形带电细棒，均匀分布有总电荷q，求圆心O处的场强和电势.

解题思路　本题的电势分布不具有球、柱、面对称性，属求解一般场强和电势的问题. 解这种类型题的原则是：点电荷的场和叠加原理. 这里是一个连续带电的半圆环，用叠加原理时数学上用积分方法. 这里我们将对求连续带电体的场强、电势的方法作一介绍. ①将连续带电体分成无穷多小段，每一小段看成一点电荷；②任意取一小段dl（图12.3-3中所示），这一小段的电量为dq，dq在O点产生的电场强度dE的方向在图中标出，大小$dE=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$，将$dE$分解到$x$，$y$方向；③对无穷多小段的点电荷在$O$点产生的场求和即求积分，很多情况根据带电体对称性（对x轴，y轴对称情况），可直接看出一分量的场强为零.

解　如图13.3-3 所示取x，y坐标.

将半圆环分成无穷多小段，取一小段dl，带电量$dq=\dfrac{q}{\pi R}dl$，dq 在O点的场强

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\frac{q}{\pi R}dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

方向如图所示.

从对称性分析(跟x轴对称的一小段 dl')在y方向的场强相互抵消，只存在x方向的场强

$$dE_x = dE\cdot\sin\theta = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^3}\sin\theta\, dl,$$

$dl = R\,d\theta,$

$$dE_x = \frac{q\sin\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}d\theta,$$

$$E_x = \int dE_x = \int_0^\pi \frac{q\sin\theta\, d\theta}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

dq在圆心O的电势

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

总电势

$$U = \int dU = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

注意：在解连续带电体电场问题中容易犯的错误是，写出任一点电荷在O点的场强$\mathrm{d}E$后，不经分解就直接积分 $E=\int \mathrm{d}E$. 这里的积分是一个矢量积分，矢量积分的方法如下：

$$
\begin{aligned}
E &= \int \mathrm{d}E = \int(\mathrm{d}E_x i + \mathrm{d}E_y j + \mathrm{d}E_z k) = \left(\int \mathrm{d}E_x\right)i + \left(\int \mathrm{d}E_y\right)j + \left(\int \mathrm{d}E_z\right)k \\
&= E_x i + E_y j + E_z k.
\end{aligned}
$$

即要分别求x，y，z轴的分量

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x, \qquad E_y = \int \mathrm{d}E_y, \qquad E_z = \int \mathrm{d}E_z.$$

13-4　有一总电量为q，半径为R的均匀带电球面，求场强和电势的分布.

解题思路　这是一个电荷分布(或场)具有球对称性的问题，先用高斯定理求E的分布，再用$U_a=\int_a^{\infty}E\cdot dl$ 求电势.具体计算时要看场强分布可分成几个区域，如本题可分成$r<R$及 $r>R$两个区域，对不同区域分别求解.

解　$r>R$，取半径为r的同心球面作高斯面（如图13.3-4(b)所示），根据高斯定理，

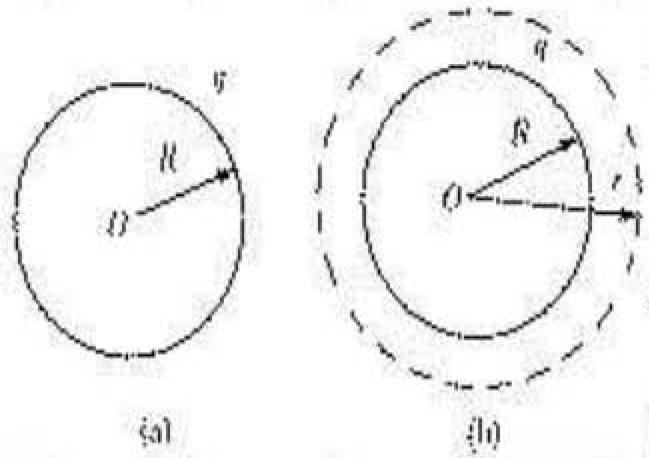


图 13.3-4

$$\oint E\cdot dS=\frac{\sum q_0}{\varepsilon_0},\qquad E\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0},\qquad E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$r\leq R$，（取半径为r的同心球面作高斯面，根据高斯定理

$$\oint E\cdot dS=\frac{\sum q_0}{\varepsilon_0}$$ ），

以上（ ）中内容跟$r>R$ 时相同，也可省去，写“同理”即可.

$$E\cdot 4\pi r^2=0,\qquad E=0.$$

电势计算：

$r > R_2$，球外，离球心为r 的a 点的电势

$$U_a = \int_a^\infty E \cdot \mathrm{d}r = \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_a}.$$

$r \leqslant R$，球壳内，任取一点b，

$$U_b = \int_b^\infty E \cdot \mathrm{d}r = \int_b^R E \cdot \mathrm{d}r + \int_R^\infty E \cdot \mathrm{d}r = \int_b^\infty 0 \cdot \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = 0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

说明：

（1）上面介绍了对球对称情况求电场和电势的基本方法. 对球对称问题可作如下变化：

①两同心的均匀带电球壳（如图13.3-4′(a)所示），这时

场分三个区域.

$r > R_2$，可得 $E = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$U = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$；

$R_1 < r < R_2$，$E = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$U = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$；

$r \leqslant R_1$，$E = 0$，$U = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$.

②均匀带电球体(如图13.3-4′(b))所示：

$r \leqslant R$，同理，

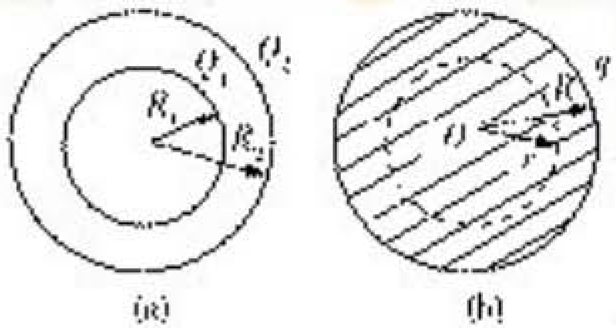


图 13.3-4’

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

$r > R$，

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

电势：

$r > R$，

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

$r \leqslant R$，

$$U = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

③对不均匀的带电球体，$\rho = \rho(r)$，这时求高斯面所包围的电量 $\sum q_0$ 要用积分方法.

$$\sum q_0 = \int \rho(r)\,\mathrm{d}V = \int \rho(r) 4\pi r^2\,\mathrm{d}r.$$

(2)电势的计算：

$r \leqslant R$, $U_b = \int_b^\infty E \cdot \mathrm{d}r$ ，这时积分路线是从b 积到∞，在积分路线中E有几种不同的表式，积分就要分几个积分相加，这点特别要提醒读者注意．在本题中，$r \leqslant R$，E=0，有些人就误认为 $U_b = \int_b^\infty E \cdot \mathrm{d}r = 0$.这时从b到∞电场分

$$r \le R, \qquad E_1 = 0; \quad r > R, \qquad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

积分要分两段进行 $$U_b = \int_b^\infty E \cdot \mathrm{d}r = \int_b^R E_1 \cdot \mathrm{d}r + \int_R^\infty E_2 \cdot \mathrm{d}r.$$

13-5　一个内、外半径分别为a和b的无限长圆柱体壳层，壳内电荷体密度为$\rho=\dfrac{A}{r}$，式中A为常数，r为壳内任一点到轴线的距离．轴线处有一电荷线密度为λ的无限长均匀带电直线．求A为何值时才能使壳内的场强大小恒定．

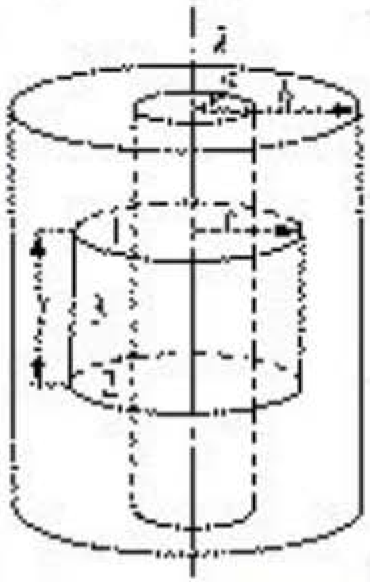


图　13.3-5

解题思路　本题电荷分布（或场）具有柱对称性，用高斯定理求解．

解　在壳内作半径r，高l的同轴柱封闭面作高斯面，根据高斯定理，

$$\oint E\cdot \mathrm{d}S=\frac{\sum q_0}{\varepsilon_0},$$

现在作的柱封闭面(高斯面)由1，2，3三个面组成，积分$\oint E\cdot \mathrm{d}S$应分成三个面积分．$\sum q_0$包括两部分电荷：轴上的电荷$l\lambda$及包围的壳内电荷$\int\rho\,\mathrm{d}V=\int_a^r\frac{A}{r}2\pi rl\,\mathrm{d}r$．所以上式变为

$$\int_1 E\cdot \mathrm{d}S+\int_2 E\cdot \mathrm{d}S+\int_3 E\cdot \mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(l\lambda+\int_a^r\frac{A}{r}2\pi rl\,\mathrm{d}r\right).$$

电场方向垂直轴线，一、二两个积分$E\cdot \mathrm{d}S=0$．

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}[l\lambda + 2\pi lA(r-a)],$$

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}[l\lambda + 2\pi lA(r-a)],$$

$$E = \frac{\lambda + 2\pi Ar - 2\pi Aa}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

要求E跟r无关，

$$\lambda - 2\pi Ar = 0, \quad A = \frac{\lambda}{2\pi a}.$$

说明：

(1) 对柱对称分布的电荷（无限长均匀带电直线，无限长均匀带电柱面，柱体，无限长同轴均匀带电柱面……）取高斯面为同轴柱封闭面，积分 $\oint E\cdot \mathrm{d}S$ 要分3个面积分进行，其中跟轴垂直的两个面1，2的积分为零，只存在对侧面的积分。

(2) 电荷分布不均匀时，$\sum q_0$ 一般要用积分计算。

(3) 对柱对称问题一般求得场强的形式为：

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

求场中某点的电势时，若取无穷远处电势为零，则会得出任一点的电势

$$U_a=\int_{r_a}^{\infty}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\infty,$$

这是不符合实际的．所以现在不能取无穷远处的电势为零．我们知道，电势零点的选取可随问题而定，这时我们选一点离轴线距离为 r_c 的电势为零，a点的电势 $U_a=\int_{r_a}^{r_c}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_c}{r_a}$．

13-6　两个无限长均匀带电共轴薄圆筒，内、外半径分别为 $R_1=1.5cm, R_2=3.0cm$ ．已知外筒和内筒间电势差 $U=138V$ ，求一个电子在离轴线垂直距离r=2 cm处受的电场力.

解题思路　电子在电场中所受的电场力$F=qE$，求出E即可得F. 对柱对称的电场用高斯定理可得 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, U_{12}=\int_{R_1}^{R_2} E\cdot \mathrm{d}r$ ，现已知电势差 U_{12} ，可倒过来求得E，再代入$F=qE$求得电场力.

解　根据高斯定理，两无限长带电薄圆筒间的场强

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

两筒间的电势差

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2} E\cdot \mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

所以

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{U_{12}}{r\cdot\ln\dfrac{R_2}{R_1}},$$

$$F=qE=\frac{qU_{12}}{r\cdot\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\frac{1.6\times10^{-19}\times138}{2\times10^{-2}\times0.69}=1.6\times10^{-15}\,(\mathrm{N}).$$

13-7　一无限大厚度为2d的均匀带电平板，单位体积中带电粒子数为n，每个粒子带电量q，求平板内外场强E及电势U的分布（设 $x=\pm d$ 处电势为零.）

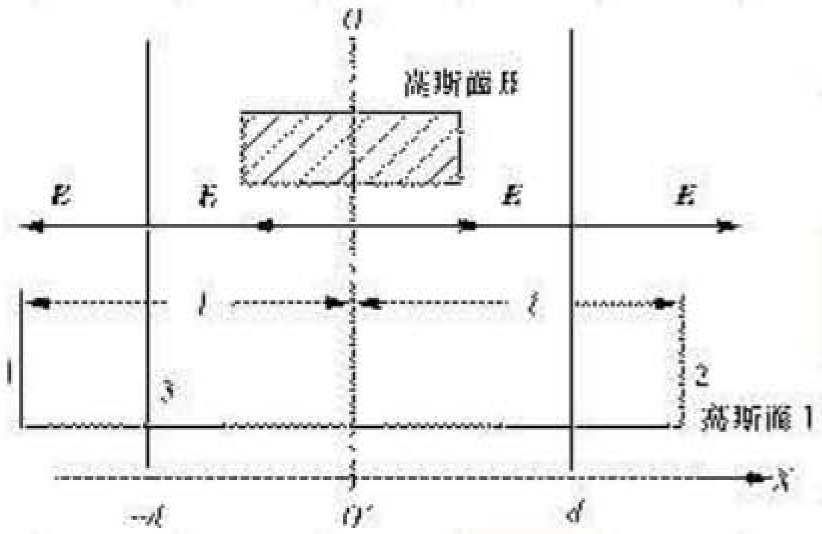


图 13.3-7

解题思路　对无限大均匀带电平板，电荷分布及电场有面对称性，取轴垂直于平板且底面平行于平板的柱封闭面为高斯面，利用高斯定理可求E的分布，再根据

$U_a=\int_a^{\text{零势能点}} E\cdot dl$ ，求出电势.

解　电力线垂直于中心面 OO' 指向外.

$|x|>d$ ，作长2l垂直中心面 OO' ，底面积为S的柱面（图13.3-7中I高斯面）作高斯面

根据高斯定理，

$$\oint E\cdot dS=\frac{\sum q_0}{\varepsilon_0}$$

高斯面有两个底面1，2和一个侧面3，

$$\oint E\cdot dS=\int_1 E\cdot dS+\int_2 E\cdot dS+\int_3 E\cdot dS$$

$\int_3 E\cdot dS=0,\int_1 E\cdot dS=ES,\int_2 E\cdot dS=ES$ ，所以 $2ES=\dfrac{2dnqS}{\varepsilon_0}$ ， $E=\dfrac{dnq}{\varepsilon_0}$

$|x| \le d$ ，作高斯面Ⅱ，同理可得

$$2ES = \frac{2xsnq}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{nq}{\varepsilon_0}x$$

电势：

$x \ge d$ ，$U = \int_x^d E \cdot \mathrm{d}x = \int_x^d \frac{dnq}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{dnq}{\varepsilon_0}(d-x)$ ，

$x \le -d$ ，$U = \int_x^{-d} E \cdot \mathrm{d}x = \int_x^{-d} -\frac{dnq}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{dnq}{\varepsilon_0}(d+x)$ ，

$|x| \le -d$ ，$U = \int_x^d \frac{nq}{\varepsilon_0}x\,\mathrm{d}x = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2 - x^2)$.

说明：

(1) 对面对称分布的电荷用高斯定理求解时，所取的高斯面应是中心面垂直且对称的封闭曲面.

(2) 对面对称的电场求电势时，也不能取无穷远处的电势为电势零点（若取无穷远处为电势零点，则场中各点的电势都为 ∞ ，失去实际意义），应先取定某点电势为零，再进行计算.

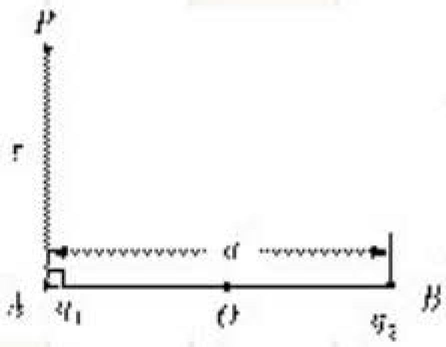


图 13.3-8

13-8 如图13.3-8所示，在A点处有点电荷 $q_1 = 2\times10^{-8}C$ ，在B点处有电荷 $q_2 = -2\times10^{-8}C$ ，O点为AB的中点，AB长为 $a = 0.80m$ ，P点与A点相距 $r = 0.6m$.求：

(1) 把电量 $q_3 = 5\times10^{-8}C$ 的点电荷从无限远处移到P点，电场力作功多少？电势能增加多少？

(2) 将 q_3 从P点移到O点，电场力作功多少？电势能增加多少？

解题思路　计算电场力的功及电势能的增量可用公式 $A_{ab}=q(U_a-U_b)=E_{Pa}-E_{Pb}$ ，将 U_a,U_b 计算后代入即可，一般不要用功的定义 $A_{ab}=\int_b^a F\cdot dr$ 计算，这样做会带来一些计算上的麻烦，而且花时间，也容易算错.

解：(1) $A_{\infty P}=q_3(U_\infty-U_P)=E_{P\infty}-E_{pP},U_\infty=0$

$$U_P=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$A_{\infty P}=5\times10^{-8}\left(0-\frac{2\times10^{-8}}{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times0.6}+\frac{2\times10^{-8}}{4\pi\times8.85\times10^{-12}\sqrt{0.8^2+0.6^2}}\right)$$

$$=-6\times10^{-6}(\mathrm{J}),$$

$$\Delta E_P=E_{pP}-E_{P\infty}=-A_{\infty P}=0.6\times10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

(2) $A_{P_O}=q_3(U_P-U_0)=-\Delta E_P,U_0=0,A_{P_O}=6\times10^{-6}\ \mathrm{J},\Delta E_P=-6\times10^{-6}\ \mathrm{J}$.

13-9　均匀带电细圆环，半径为R，带电量为 q，求圆环轴线上离环心为x处的任一点P的电势，利用电势梯度求该点的场强．

解题思路　本题电荷分布无球、柱、面对称性，为一般的场，而且为连续带电体，空间电场强度的计算比较复杂（需用对变量求积分及矢量积分的方法）．可先求P点的电势，再用场强电势的微分关系求场强进行简化．

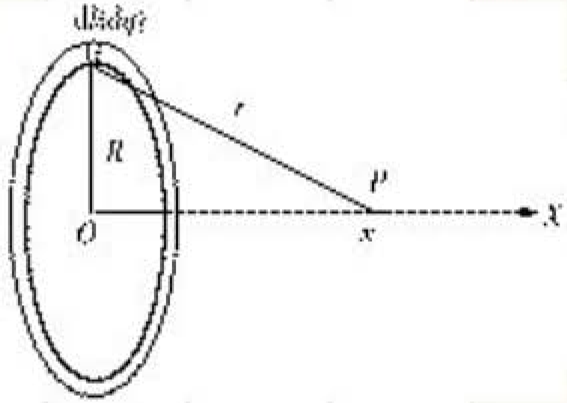


图 13.3-9

解　将带电圆环分成无穷多小段，取其中的任意的一小段 dl，所带的电量为 dq， dq 在P点的电势

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

整个圆环在P点产生的电势

$$U = \int dU = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_x = \frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}\right) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

1. 一无限长带电直线，电荷线密度分别为 $+\lambda(x<0)$ 和 $-\lambda(x>0)$，求 $P(0,a)$ 点处的场强E.

解　在正x轴上取一小段 $\mathrm{d}x$，离O点距离x，在P点的场强（方向如图中 $\mathrm{d}E_-$）

$$\mathrm{d}E_- = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)}$$

在负x轴上跟O对称取一小段 $\mathrm{d}x$，在P点的场强（方向如图 $\mathrm{d}E_+$）

$$\mathrm{d}E_+ = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)}$$

13.4　题解

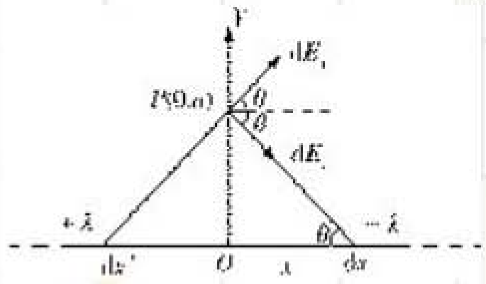


图 13.4-1

从对称性分析，在y方向成对抵消，只存在x方向的分量

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E_+\cdot\cos\theta = \frac{\lambda x\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E = E_x = 2\int \mathrm{d}E_x = 2\int\frac{\lambda x\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda\,\mathrm{d}x^2}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(-\frac{1}{2})(x^2+a^2)^{1/2}}\Bigg|_0^\infty = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

3. 一半径为a的半球壳，均匀地带有负电荷，电荷面密度为 σ . 求：球心O处的电场强度和电势.

解　将半球面分成无限多个圆环，取一圆环如图13.4-3所示，半径为r，到球心距离为x，所带电量绝对值

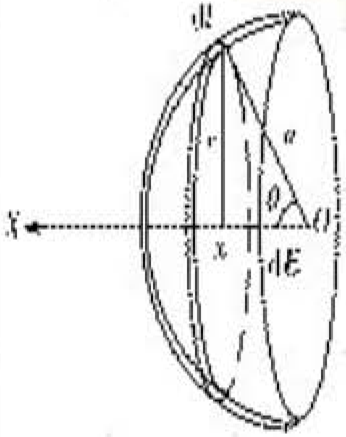


图 13.4-3

$$dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r dl.$$

在O点产生的场强（利用圆环在轴线上场公式）

$$dE_x = \frac{x dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

带电半球壳在O点的总场强

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{x dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \int \frac{x \cdot 2\pi r \sigma dl}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}},$$

其中，　$x = a\cos\theta, r = a\sin\theta, dl = a d\theta.$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

电势计算：

将半球壳分成无穷多小面元ds，所带电量 $dq=-\sigma ds$，，在O点的电势

$$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

带电半球壳在O点的总电势

$$U=\int dU=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int dq=\frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0 a}\int ds=\frac{-\sigma 2\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{-a\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

第13章 静电场中的导体和电解质

14. 2解题指导

（1）静电场中的导体

导体放在静电场中首先要考虑静电感应,然后用静电平衡条件（导体内部的场强为零,导体表面的场强垂直表面）解有关的问题.

（2）利用介质中的高斯定理求对称分布的电场的解题步骤

①首先用 $\oint D\cdot dS=\sum q_0$ 求出D的分布；

②再用 $D=\varepsilon E$ 求出E 的分布；

③求极化电荷密度 $\sigma'=(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})D$.

（3）求电容的方法

①先用高斯定理求出E的分布；

②用 $U_{ab}=\int_a^b E\cdot dl$ 求出电势差 U_{ab} ；

③用公式 $C=\dfrac{Q}{U_{ab}}$ 求出电容.

（4）电场能量

电容器的能量 $W=\dfrac{1}{2}CU^2$

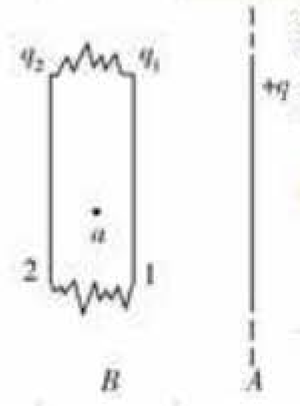
电场能量 $W=\int \omega \,dV=\int \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\,dV$ ；

对场是球分布 $dV=4\pi r^2\,dr$ ；

对场是柱分布 $dV=2\pi rl\,dr$.

14．3典型例题

14-1　一“无限大”均匀带电平面A，带电量为q，在它的附近放一块与A平行的金属导体板B，板B有一定厚度，如图14.3-1所示，则在板B的两个表面1和2上的感应电荷分别是多少？



14．3-1

解题思路　设B板两面的感应电荷分别 q_1,q_2 ，两个未知数需列出两个独立方程式求解：①感应电荷 $q_1+q_2=0$ ，②运用静电平衡条件，导体内部的电场为0，即 $+q,q_1,q_2$ 的三块平板在a点的合场强为0，

解　设B板两面的感应电荷分别为 q_1,q_2 ，有

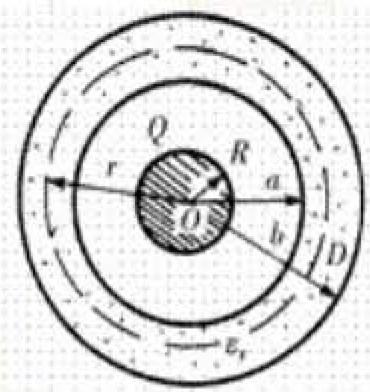
$$q_1+q_2=0$$

在导体板中任选一a点， $E_a=0$ （向左电场为正）：

$$E_a=\frac{q}{2\varepsilon_0 s}+\frac{q_1}{2\varepsilon_0 s}-\frac{q_2}{2\varepsilon_0 s}=0$$

从①②两式可解得

$$q_1=-\frac{q}{2},q_2=\frac{q}{2}$$



14. 3-2

14-2 一半径为R，带电量为Q 的金属球，球外有一层均匀电介质组成的同心球壳，其内、外半径分别为a, b介质的相对介电常数为 ε_r ，求：

（1）电介质内、外空间的电位移和电场强度；

（2）电介质两个表面上的极化电荷面密度.

解题思路 运用介质中的高斯定理 $\oint D \cdot dS = \sum q_0$ 先求出D, 然后用 $D = \varepsilon E$ 求E, 再求极化电荷面密度 $\sigma' = (1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r})D$

解 （1）介质内 $a \le r \le b$

作半径为r的同心球面作高斯面，根据介质中的高斯定理，

$$\oint D \cdot dS = \sum q_0, D \cdot 4\pi r^2 = Q, D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

对均匀电介质

$$D = \varepsilon E, E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

$R<r<a$, 同理

$$D=\frac{Q}{4\pi r^2},E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r>b$, 同理

$$D=\frac{Q}{4\pi r^2},E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

（2） $P=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})D=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi r^2},\sigma'=P\cdot n$

$r=a$, 介质内表面

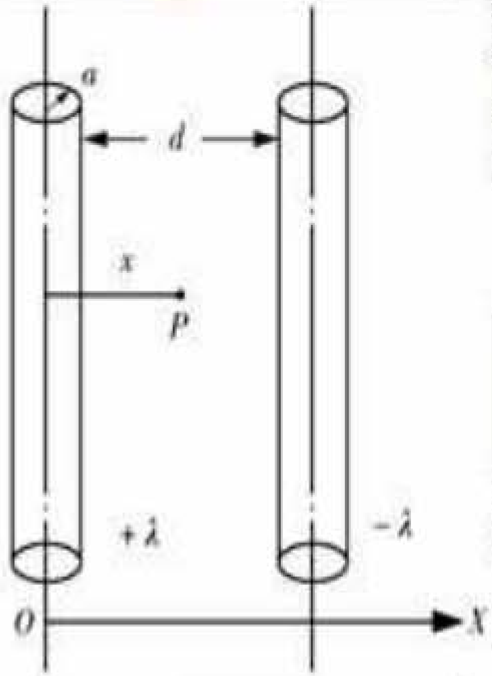
$$\sigma'_a=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{-Q}{4\pi r^2}\Big|_{r=a}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{-Q}{4\pi a^2}=-\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r a^2}$$

$r=b$, 介质外表面

$$\sigma'_b=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi r^2}\Big|_{r=b}=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r a^2}$$

14-3　两根平行长直导线，它们的半径都是a，两根导线相距为$d(d>a)$求单位长度的电容.

解题思路　将两长直导线分别带上线电荷密度为 $+\lambda,-\lambda$ 的电量，看成两无限长均匀带电圆柱，用高斯定理分别求出每根长直导线的场强，再求出两带电长直圆柱间的合场强，然后用电差公式求出两长直导线的电势差，代入电容公式求电容.



14. 3-3

解　设在两长直导线上分别带电荷线密度 $+\lambda,-\lambda$ ，坐标如图所示. 在两长直导线之间的P点的合场强（分别用高斯定理可求解得每根带电长直导线的场强）

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d+2a-x)},$$

两长直带电导线的电势差

$$U=\int_a^{a+d}E\cdot \mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+d}{a}$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+d}{a},$$

单位长度的电容

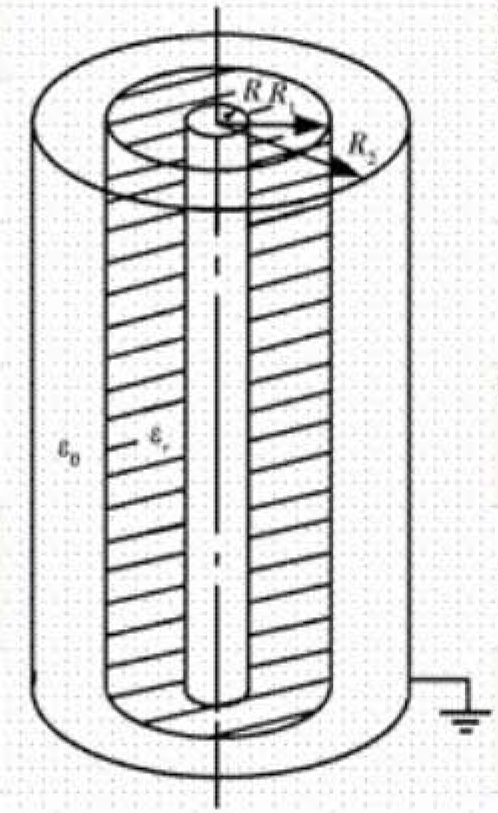
$$C=\frac{\lambda}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{a+d}{a}},$$

$$d>>a, C\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{a}}.$$

14-4　一圆柱形电容器，由截面半径为R的导体圆柱和与它共轴的导体圆管筒组成，圆筒半径 $R_2=8R$，在内圆柱与 $R_1=4R$ 之间充满相对介电常数 $\varepsilon_r=2$ 的均匀电介质，如14.3-4图所示，略去边缘效应．求：

（1）该电容器单位长度的电容；

（2）将该电容充电至两极板间的电势差为 U=100 V，则单位长度上的电场能量是多少？（圆筒接地）



14．3-4

解题思路　将圆柱和圆筒带上电量，利用高斯定理求出它们之间的场强，然后求出它们的电势差，再求电容．

求解电场能量有两种方法：①利用电容器电能公式 $W=\frac{1}{2}CU^2$；

②用电场能量公式 $W=\int \omega \mathrm{d}v=\int \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V$.

解　（1）设圆柱、圆筒分别带上电荷线密度 $+\lambda,-\lambda$ 的电量．根据高斯定理可求得：

$$R<r<4R,$$

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

$4R < r < 8R$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

$$U_{RR_2} = \int_R^{R_1} E_1 \cdot \mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot \mathrm{d}r = \int_R^{R_1} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 4 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2 = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln 2,$$

$$C = \frac{\lambda}{U_{RR_2}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln 2} = \frac{3.14\times 8.85\times 10^{-12}}{0.69} = 4\times 10^{-11}(F).$$

(2) 方法 I： $W = \frac{1}{2}CU_{RR_2}{}^2 = \frac{1}{2}\times 4\times 10^{-11}\times (10^2)^2 = 2\times 10^{-7}(J)$

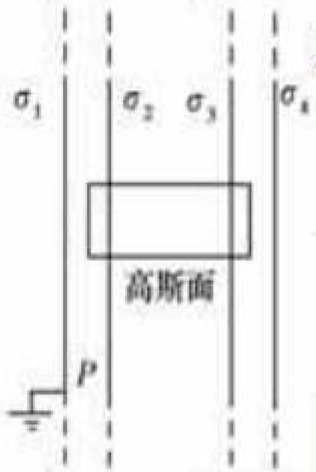
方法 II：

$$W = \int \omega \mathrm{d}V = \int \frac{\varepsilon E^2}{2}\mathrm{d}V = \int_R^{R_1} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}E_1{}^2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0}{2}E_1{}^2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_R^{R_1} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\left(\frac{U_{RR_2}}{4r\ln 2}\right)^2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U_{RR_2}}{2r\ln 2}\right)^2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\varepsilon_0\pi U_{RR_2}{}^2}{2\ln 2} = 2\times 10^{-7}(J).$$

1. 两平行金属板带有等量异号电荷，若两板的电势差为200V，两板间距为2.0mm，忽略边缘效应，求每一个金属板表面的电荷面密度是多少？

解　此题有四个未知数 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$，，要列出四个方程求解.



14．4-1

左板接地 $\sigma_1=0$. ①

作图示高斯面，根据高斯定理，

$$\oint E\cdot dS=\frac{(\sigma_2+\sigma_3)s}{\varepsilon_0}=0$$

所以 $\sigma_2+\sigma_3=0$. ②

左边金属板中P点场强为0，

$$\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4=0. \quad ③$$

解②③得　$\sigma_4=0$.

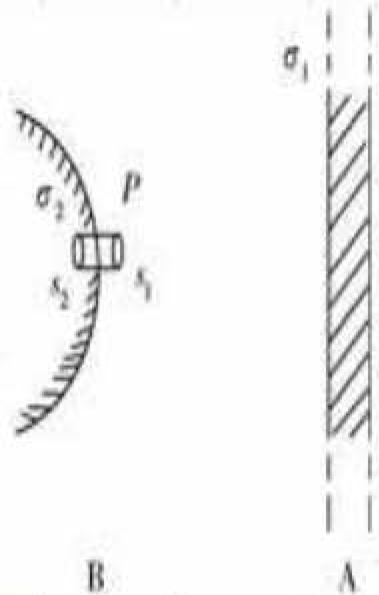
两板中间场强

$$E=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2\varepsilon_0},U=Ed=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2\varepsilon_0}d,$$

得 $\sigma_2-\sigma_3=\dfrac{2\varepsilon_0 U}{d}$.

$$\sigma_2=-\sigma_3=\frac{U\varepsilon_0}{d}=\frac{200\times8.85\times10^{-12}}{2\times10^{-3}}=8.85\times10^{-7}(C\cdot m^{-2}).$$

解②④得 $\begin{cases}\sigma_1=\sigma_4=0\\ \sigma_2=-\sigma_3=-8.85\times10^{-7}\,C\cdot m^{-2}.\end{cases}$



14. 4-2

2. 一无限大均匀带电介质板A，电荷面密度为 σ_1 ，介质板靠近一导体B，此时B导体外表面上靠近P点处的电荷面密度为 σ_2 ，求P点的电场强度.

解　在P点作垂直B　表面的圆柱高斯面（P点在高斯面度面上 s_1 ，）根据高斯定理，

$$\oint E \cdot \mathrm{d}S = \sum q_0 / \varepsilon_0 ,$$

静电平衡时，导体B内部的场强为0，表面的场强垂直表面，所以上式左边积分

$$\oint E \cdot \mathrm{d}S = E \cdot s_1, E_{s_1} = \frac{s_1 \sigma_2}{\varepsilon_0}, E = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

3. 一圆柱形电容器，由内筒半径 $R_1 = 5.0\,\mathrm{mm}$ ，外筒半径 $R_2 = 50\,\mathrm{mm}$ 两个共轴导体圆筒组成，两筒间充满了相对介质电常数 $\varepsilon_r = 3$ 的均匀介质，已知空气的击穿场强 $E' = 3\times10^4 (\mathrm{V\cdot cm^{-1}})$，则此电容器的最高耐压力为多少？

解 内、外圆筒分别带有线电荷密度为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 的电量，根据高斯定理，两筒间为空气时，两筒间的场强

$$E_0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ ; \qquad ①$$

两筒间充满均匀介质时，两筒间的场强

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\ ; \qquad ②$$

两筒间的电势差

$$U=\int_{R_1}^{R_2}E\cdot\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ln\frac{R_2}{R_1}\ . \qquad ③$$

将①式代入③式，

$$U=\frac{E_0 r}{\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

最高耐压

$$U=\frac{E'R_1}{\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{\frac{3\times10^4}{10^{-2}}\times5\times10^{-3}}{3}\times\ln\frac{50}{5}=1.15\times10^4(\text{V}).$$

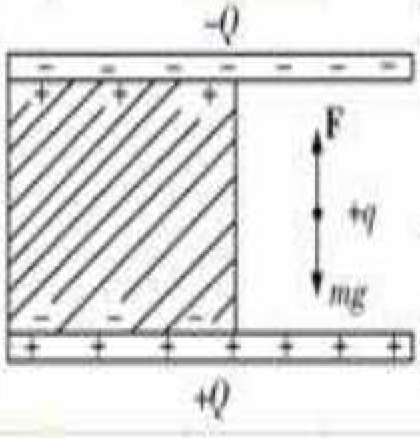
4. 一个大平行板电容器水平放置，两极板间的一半空间充有各向同性的均匀电介质，另一半为空气，如图14.4-4所示．当两极板带上恒定的等量异号电荷时，有一质量为m带电量+q的质点平衡在极板间的空气区域中，此后若把电介质抽去，则该质点将如何运动？（向上，向下，或保持不动）

解　介质抽出前，质点平衡，

$$mg=F=qE_0,$$

介质板上，下表面有极化电荷，如图14．4-4左半部所示．将介质板抽出的过程，外力克服电场力作功，使电场能量增加

$$W=\frac{1}{2}CU^2,$$



而介质抽出后电容器将减少，从上式看出两极板间的电压U将增高，而

$$U = Ed$$

引起两极板间电场强度增大，电场力增大，质点将向上运动.

14. 4-4

5. 电容器 C_1 和 C_2 串联后接上电动势恒定的电源充电，在电源不断开的情况下，若把一电介质充入 C_2 中，则 C_1 上的电势差将怎样变化？电容器 C_1 极板上的电量将怎样变化？（增大，减少，不变）

解 两电容 C_1,C_2 串联，总电容

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{C_1}{\frac{C_1}{C_2}+1},$$

电介质充入 C_2 后，C_2 将增大．从上式看，总电容C将增大，根据

$$Q = CU,$$

总电容增大，总电压不变，电量q也增大，所以 C_1 上的电量增多，根据

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1},$$

电容器 C_1 上的电势差增大．

13. 把电荷q放在一原来不带电的半径为 R_0 的肥皂泡的表面上, 由于肥皂泡表面上电荷相互排斥, 因此半径增至某一值R， 试证电量

$$q=[\frac{32}{3}\pi^2\varepsilon_0 pR_0R(R^2+R_0R+R_0{}^2)]^{1/2}$$

式中p为大气压强.

证　肥皂泡的电势和电容分别为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},\qquad C=4\pi\varepsilon_0 R$$

电势能为

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

当肥皂泡因电荷相互排斥，半径由 R_0 增至R时电场力作的功等于电势能的改变

$$A=W_{R_0}-W_R=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R})=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{R-R_0}{RR_0}).$$

电场力作的功等于肥皂泡膨胀时对大气作的功

$$A = p\Delta V = p \times \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0{}^3),$$

所以

$$W_{R_0} - W_R = p\Delta V$$

$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R - R_0}{RR_0}\right) = p \times \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0{}^3).$$

得

$$q = [\frac{32}{3}\pi^2\varepsilon_0 pR_0R(R^2 + R_0R + R_0{}^2)]^{1/2}.$$

第14章 稳恒电流的磁场

15.2　解题指导

（1）磁感应强度B的计算

磁感应强度B的计算分两类问题：

①磁场具有一定的对称性

用安培环路定理 $\oint B\cdot dl=\mu_0\sum I_0$ 求解，如对无限长载流导线、同轴电缆、螺绕环、无限大载流平面等，一般取环路是沿磁力线取闭合环路。

②一般的磁场

一般载流导线在空间产生的磁场计算，先将导线分成若干段，利用载流直导线及圆电流的磁场公式。

直载流导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\quad\begin{cases}\text{无限长，} & \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a},\\ \text{半无限长，} & \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a},\\ \text{延长线上，} & 0.\end{cases}$$

圆电流

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\quad\begin{cases}\text{圆心，} & \dfrac{\mu_0 I}{2R},\\[2ex] \dfrac{1}{n}\text{个圆的圆心，} & \dfrac{\mu_0 I}{2nR},\end{cases}$$

求出各段产生的磁场，然后进行矢量叠加而成。

(2) 磁通量 Φ_m 的计算

$$\Phi_m=\int_S B\cdot \mathrm{d}S.$$

首先将S面分成无穷多小块，然后取一小面积$\mathrm{d}S$(在所取的$\mathrm{d}S$中B值为常量)，通过面积元$\mathrm{d}S$的磁通量$\mathrm{d}\Phi_m=B\cdot\mathrm{d}S$，再将无穷多小块的磁通量加起来即求积分 $\Phi_m=\int \mathrm{d}\Phi_m=\int_S B\cdot \mathrm{d}S$. 若$B$为匀强磁场，则 $\Phi_m=B\cdot S$.

（3）计算通电导线在外磁场B中所受的安培力时，方法如下：

①先将通电导线分成无穷多小段；

②取其中的任意一小段，这一小段电流元所受的安培力$\mathrm{d}F=I\mathrm{d}l\times B$；

③对所有电流元求和即 $F=\int \mathrm{d}F$，这又是一个矢量积分。

做矢量积分的方法：

先将dF分解成 $\mathrm{d}F_x, \mathrm{d}F_y$ 即 $\mathrm{d}F\begin{cases}\mathrm{d}F_x,\\ \mathrm{d}F_y,\end{cases}$

再求 $F_x=\int \mathrm{d}F_x$， $F_y=\int \mathrm{d}F_y$， $F=F_x i+F_x j$.

（4）通电线圈在磁场中所受的磁力矩

①先求出通电线圈的磁矩

$$P_m = NISn \ ;$$

②再求磁力矩

$$M = P_m \times B \ ;$$

（5）运动电荷在磁场中受力——洛仑兹力

$$f = qv \times B.$$

注意－q在磁场中受力方向为－（ $v \times B$ ）方向。

$v /\!/ B, f = 0$ ；

$v \perp B$ ，作圆周运动，洛仑兹力提供它作圆周运动的向心力

$$q vB = m\frac{v^2}{R}.$$

半径 $R = \dfrac{mv}{qB}$ ；周期 $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$ 与 v 无关，v，B成 θ 角。

$$\begin{cases} v_{//} = v\cos\theta, \\ v_{\perp} = v\sin\theta, \end{cases}$$

作螺旋运动，螺矩

$$d = v_{//}T = v\cos\theta\frac{2\pi m}{qB}.$$

运动电荷在电场、磁场中时，总的受力

$$F = qE + qv \times B.$$

15－2 一无限长直导线在中间弯成 $\frac{5}{6}$ 圆弧形，如图15.3－2所示，通以电流I，求圆心O点的磁感应强度B.

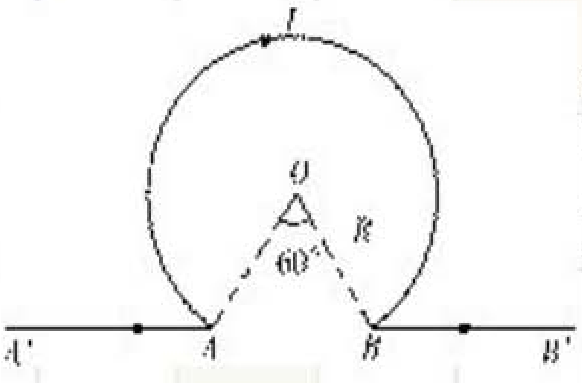


图 15.3—2

解题思路　此电流可分成三段，$A'A, BB'$ 为直导线，AB为 $\frac{5}{6}$ 的圆弧，分别求出各段在O点产生的磁感应强度，再将它们作矢量叠加。

解　$A'A$ 及 BB' 载流直导线在O点的

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{\sqrt{3}}{2}R}(\cos 0^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{12\pi R}$$

，方向朝外.

$\frac{5}{6}$ 圆弧在O点的

$$B_2 = \frac{5}{6} \times \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{5\mu_0 I}{12R}$$

，方向朝里。

垂直图面朝里为B的正方向，圆心O点的总磁感应强度

$$B_0 = B_2 - B_1 - B_3 = \frac{5\mu_0 I}{12R} - \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi R}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{R}\left(\frac{5}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6\pi}\right) = 0.325\frac{\mu_0 I}{R}.$$

15－3 有一电介质圆盘，其表面均匀带有电量Q，半径为a，可绕过圆心与盘面垂直的轴线转动，角速度为 ω_0 .求：

(1) 圆盘中心的磁感应强度B；

(2) 圆盘的磁矩 P_m ；

(3) 若将这转动的带电介质圆盘放入跟盘面平行的磁场 B_0 中，圆盘所受的磁力矩大小是多少？

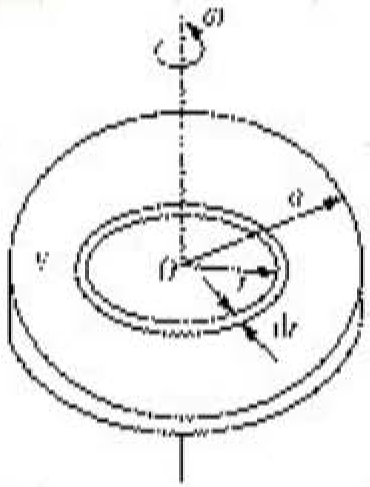


图 15.3—3

解 (1) 将圆盘分成无穷多个同心圆环，取其中任一圆环，半径为r，厚度为dr，此圆环旋转时在圆心产生的磁感应强度

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2r},\quad \mathrm{d}I=\frac{Q}{\pi a^2}2\pi r\cdot\mathrm{d}r\cdot\frac{\omega_0}{2\pi}$$

所以

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\omega_0 Q}{2\pi a^2}\mathrm{d}r.$$

无穷多个圆电流在O点的总磁感应强度

$$B_0=\int\mathrm{d}B=\int_0^a\frac{\mu_0\omega_0 Q}{2\pi a^2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\omega_0 Q}{2\pi a}.$$

(2) 其中半径为r、厚度为dr的圆电流的磁矩

$$\mathrm{d}P_m=S\,\mathrm{d}I=\pi r^2\frac{\omega_0 Q}{\pi a^2}\cdot r\cdot\mathrm{d}r=\frac{\omega_0 Q r^3}{a^2}\cdot\mathrm{d}r,$$

(3) $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}_0$

$$M = P_m \cdot B_0 = \frac{1}{4}\omega_0 Q a^2 B_0.$$

注意：对图 15.3-3′(a) 所示均匀带电细棒(长为L，电量Q)绕端点的轴作 ω_0 旋转及(b)中一均匀密绕的平面通电螺旋线圈(大圆半径R，小圆半径r，共N匝，电流I)的磁场和磁矩也可用同样方法计算。

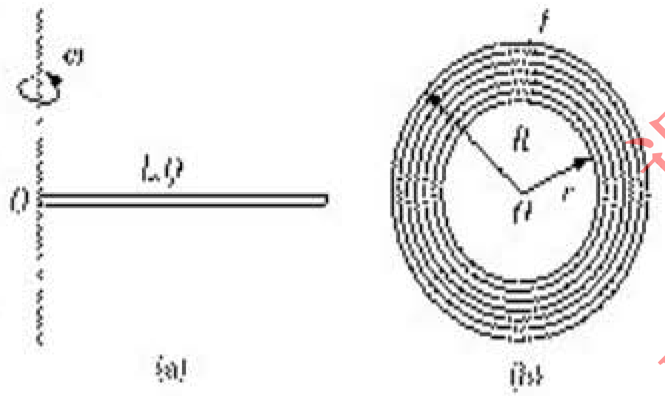


图 15.3−3′

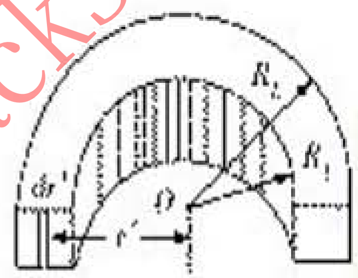


图 15.3−4

15-8　一矩形金属条通有电流I，放置于磁感应强度为B的均匀磁场中，如图15.3-8所示.（图中S为截面积，金属中单位体积内载流子数为n）求：

（1）金属条上侧面积积累什么电荷？

（2）载流子所受洛仑兹力是多少？

（3）该金属的霍耳系数是多少？

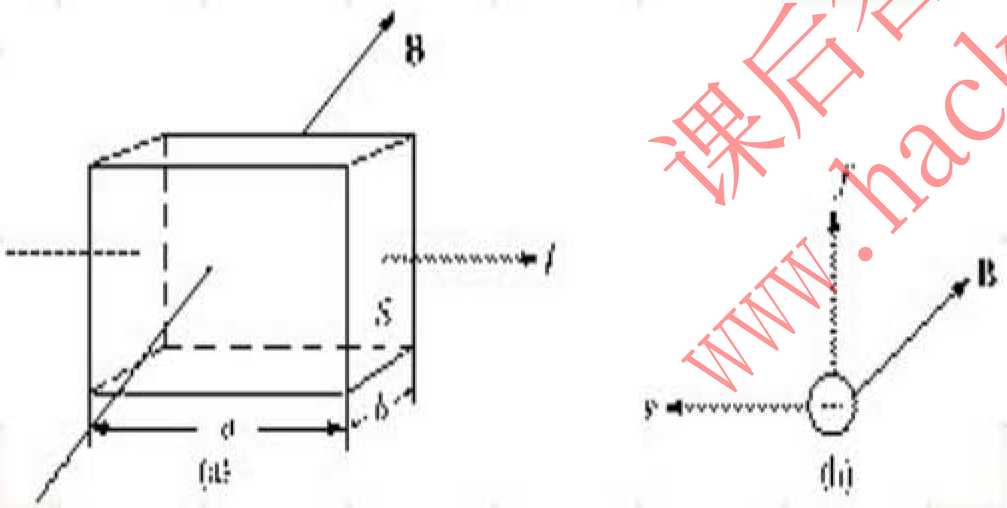


图 15.3-8

解 (1) 电子运动方向跟电流方向相反．根据洛仑兹力（金属中载流子为电子，电量 $-q$）方向向上，如图15.3-8(b)，上侧面积累负电荷．

(2) $f = evB$ （e为电子电量），$I = \frac{Q}{t} = evsn$，所以 $f = \frac{IB}{sn}$．

(3) $R_H = -\frac{1}{ne}$．

8、一无限长圆筒形铜导体（磁导率 μ_0 ），内径为 R_1 ，外径为 R_2 ，通有均匀分布的电流I，今取一矩形平面S（长为1m ，宽为2 R_2 ），如图15.4-8中画斜线部分所示，求通过该矩形平面的磁通量.

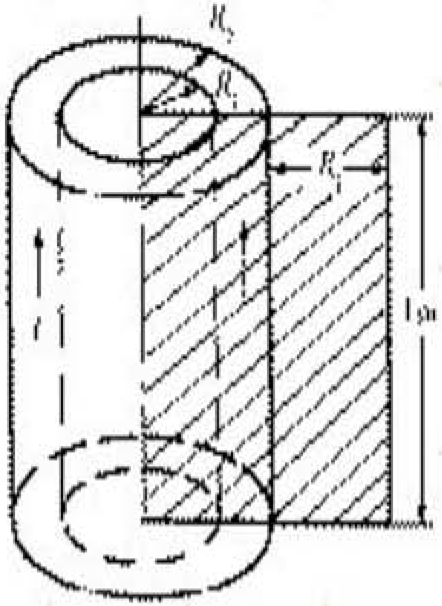


图 15.4-8

解　根据安培环路定理可求出B的分布.

$r < R_1$ ，　　B=0；

$R_1 < r < R_2$ ，　　$\oint B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 \sum I$ ，

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I\pi(r^2 - R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} ,$$

$$B = \frac{\mu_0 (r^2 - R_1^2) I}{2\pi r (R_2^2 - R_1^2)} ;$$

$r < R_2$ ，　　　　　　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ．

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int B \cdot \mathrm{d}S \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I (r^2 - R_1^2)}{2\pi r (R_2^2 - R_1^2)} \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{2R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathrm{d}r \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln 2\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(1.19 - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

磁介质的磁化

16.2 解题指导

有介质时运用磁场环路定理的解题步骤：

在磁场具有一定的对称性，并有各向同性的均匀磁介质情况：

① 用磁场环路定理 $\oint H\cdot \mathrm{d}l=\sum I$ 求出H的分布；

② 利用 $B=\mu H=\mu_0\mu_r H$ 求B的分布；

③ 磁化电流密度 $j_m=(\mu_r-1)H$.

16.3 典型例题

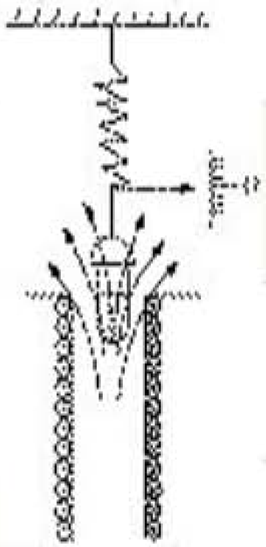


图 16.3-1

16-1 将磁介质样品装入试管中，用弹簧吊起来挂到一竖直螺线管的上端开口处（如图16.3-1所示）. 当螺线管通电流后，则可发现随样品的不同，它可能受到该处不均匀磁场的向上或向下的磁力. 这是一种区分样品是顺磁质还是抗磁质的精细的实验. 受到向上磁力的样品是顺磁质不审抗磁质.

答 是抗磁质.

实验中样品受到向上的磁力，说明样品在磁场中磁化后产生的磁场跟原磁场方向相反，产生相互排斥的磁力，这样样品处的磁场减弱， $\mu_r<1$ ，说明样品是抗磁质.

16-2　顺磁质和铁磁质的磁导率明显地依赖于温度，而抗磁质的磁导率几乎与温度无关，为什么？

答　顺磁质和铁磁质在外磁场中时，分子磁矩或磁畴（磁畴也即分子磁矩有规则排列的区域）转到跟外磁场一致的方向．当温度升高时，分子的无规则运动加剧，破坏了分子磁矩或磁畴的这种有规律的排列，使磁导率减小．而抗磁质在外磁场的反方向磁化，是靠电子因磁场的加入引起电磁感应现象使电子绕核运动速度改变，而产生跟外磁场相反的附加磁场而引起的，这种现象跟温度几乎无关，所以抗磁质的磁导率几乎与温度无关．

16-3　在铁磁质磁化特性的测量实验中，设所用的环形螺线管上共有N=1000匝线圈，平均半径r=15.0 cm，当通以2.0 A电流时，测得环内磁感应强度B=1.0 T，求：

(1) 螺绕环铁芯内的磁场强度H；

(2) 该铁磁质的磁导率 μ 和相对磁导率 μ_r；

(3) 已磁化的环形铁芯的面束缚电流密度.

解　(1) 根据安培环路定理

$$\oint H \cdot dl = \sum I_0,\quad H \cdot 2\pi r = NI,$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{1000 \times 2.0}{2\pi \times 0.15} = 2.12 \times 10^3 (\mathrm{A \cdot m^{-1}}).$$

(2) $B=\mu H,\ \mu=\dfrac{B}{H}=\dfrac{1}{2.12\times10^{3}}=4.71\times10^{-4}\,(\mathrm{H\cdot m^{-1}})$，

$\mu=\mu_0\mu_r,\ \mu_r=\dfrac{\mu}{\mu_0}=\dfrac{4.17\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}}=375$.

(3) $j_m=M=(\mu_r-1)H=(375-1)\times2.12\times10^{3}=7.96\times10^{5}(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$.

16-8　如图16.3-8所示的小磁针的磁矩为P，处在磁场强度为H的均匀外磁场中，此磁针可以绕它中心转动，转动惯量为I．当它在平衡位置附近作微小振动时，求振动周期是多少？

解　设某时刻，P与H成 θ 角，这时磁针所受的磁力矩

$$M=-PB\sin\theta=-P\mu_0 H\sin\theta\ ,$$

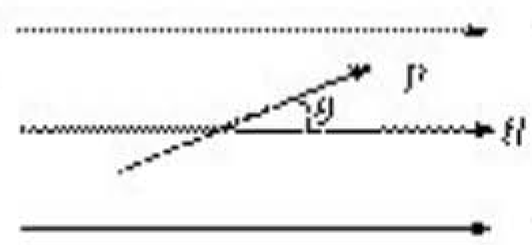


图　16.3-8

作微小振动　$\theta<5^\circ, \sin\theta\approx\theta$ ，

$$M=-P\mu_0 H\cdot\theta\ ,$$

根据转动定律

$$M=I\beta=I\frac{d^2\theta}{dt^2}\ ,$$

所以 $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-P\mu_0H\cdot\theta$ 为谐振动微分方程.

$$\omega=\sqrt{\frac{P\mu_0H}{I}},$$

周期 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{P\mu_0H}}.$$

第16章 电磁场

17.2 解题指导

(1)电动势的计算

感生电动势

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_m}{dt}$$

先求出通过线圈的磁通量 $\Phi_m(t)$ ，代入上式求出 ε .

动生电动势

将切割磁力线的导线分成无穷多小段，取其中任一小段 dl ，该小段的动生电动势为 $d\varepsilon=(v\times B)\cdot dl$ ，再对整根导线求积分

$$\varepsilon=\int(v\times B)\cdot dl$$

积分为正值表示电动势方向由 a 指向 b，积分为负值表示电动势方向由 b 指向 a

线圈内既有感生电动势又有动生电动势的情况：

先求出通过线圈的磁通量 $\Phi=\int B\cdot dS,\Phi$ 是时间的函数（$\Phi(t)$），再代入法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$ 即可.

上面各种情况也归根到底可归纳到法拉第电磁感应定律.

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{d}{dt}(BS\cos\theta)=-(S\cos\theta)\frac{dB}{dt}-(B\cos\theta)\frac{dS}{dt}-BS\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta,$$

第一项为感生电动势，第二项为动生电动势，第三项为交流发电机.

(2)涡旋电场的计算

根据磁场对称的情况，在垂直磁力线的平面内取涡旋电场的回路，用公式

$$\oint E_{涡} \cdot dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad 计算E_{涡}$$

(3)自感、互感计算

自感

先计算线圈的磁链 $N\Phi, L = \dfrac{N\Phi}{I}$.

互感

先计算互感磁链 $N_1\Phi_1, M = \dfrac{N_1\Phi_1}{I_2}$.

两线圈连接时总自感的计算(完全耦合)

两线圈自感分别为 L_1, L_2 ，完全耦合情况互感 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

两线圈顺接的总自感 $L = L_1 + L_2 + 2M$ ，

两线圈反接的总自感 $L = L_1 + L_2 - 2M$

(4)位移电流的计算

① $I_d = \dfrac{d\Phi_D}{dt}$， $\Phi_D = SD = S\varepsilon E$，

所以 $I_d = \dfrac{d\Phi_D}{dt} = \dfrac{d}{dt}(SD) = \dfrac{d}{dt}(S\varepsilon E)$.

已知D 或E，可直接用上公式求得位移电流 I_d；已知电荷分布，先求得D，E，再代入上式可求位移电流 I_d .

②位移电流密度

$$j_d = \frac{I_d}{S}$$

③电容器充放电时的位移电流

电容器充放电时，传导电流 I = 电容器两极板间的总位移电流

$$I_d = I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = C\frac{dU}{dt}$$

已知电容C 及电压随时间的变化率 $\dfrac{dU}{dt}$ ，可求出电容器充放电时的总位移电流 I_d .

(5)位移电流激发的磁场

用安培环路定理

$$\oint H \cdot dl = I_d$$

求H.

(6)变化的电场与变化的磁场之间的换算：

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H.$$

(7)电磁波的强度(即能流密度或称坡印亭矢量)的计算

$$S = E \times H.$$