# 边染色图中的匹配、圈及图的圆染色

王　光　辉

(山东大学数学与系统科学学院，济南 250100)

(法国巴黎南大学 (巴黎 11 大) 信息科学实验室， 91400)

## 中文摘要

图论的研究始于 200 多年前. 关于图论的第一篇论文是 1736 年 Euler 发表的，他用图的方法解决了哥尼斯堡 (Königsberg) 七桥问题. 二十世纪六十年代以来，图论在科学界异军突起，活跃非凡. 图论中有很多著名的问题，如哈密尔顿问题，四色问题，中国邮递员问题等. 并且，应用图论来解决化学，生物学，信息和计算机科学等学科问题已显示出极大的优越性. 同时，图论在工程技术领域及社会科学中也有着广泛的应用. 它作为离散数学的一个重要分支，受到了各方面的普遍重视.

我们用 $G$ 表示一个图，若 $G$ 的每条边都染上颜色，则称 $G$ 为边染色图. 给定一个边染色图 $G$, 关联于顶点 $v$ 的不同颜色的边的数目，称为顶点 $v$ 的色度，记为 $d^c(v)$. 如果把一般的未染色图看作是每条边都染不同颜色的边染色图，则顶点的色度就等于它的度. 除了在图论和算法上的重要应用外，边染色中的许多问题还出现在分子生物科学，心理学和网络通信等其它的领域中. 因此，近年来，这方面的研究变得活跃起来，主要集中在边染色图中某些特殊子图的存在性上. 边染色图中的子图，如果任意相邻的两条边的颜色都不相同，我们称之为交错子图，或者称为边正常染色子图. 进一步，如果该子图中所有边的颜色都不相同，我们称之为彩色子图. 这两类子图的研究尤其受到关注. 图的匹配，路和圈是图论中的基础研究领域，因此边染色图中的彩色的 (交错的) 匹配，路和圈就成了一个重要的研究方向.

图中过每个顶点的圈，称为图的哈密尔顿圈. 图的哈密尔顿圈问题，是图论中的一个经典问题. 其中一个著名的猜想是 Chvátal [20] 提出的如下猜想：韧度充分大的图有一个哈密尔顿圈. 对于许多特殊的图类，例如弦图和平面图，上述猜想被证明是成立的 [11, 12, 23]. 图 $G$ 的一条 $k$- 途径是指 $G$ 的一条经过每个顶点至多 $k$ 次的闭支撑途径. 图的一个哈密尔顿圈就是图的 1- 途径. 作为哈密尔顿圈的一个非常有趣的变形，图的 $k$-途径引起了很多人的兴趣. Jackson 和 Wormald

[54] 研究了 $k$- 途径，并猜想任意 1- 坚韧图都有一条 2- 途径. 这个猜想仍然没有得到证明，最好的结果是任意 4- 坚韧图都有一条 2- 途径 [37]. 自然地，我们会考虑如下问题：确定最小的整数 $k = k(\Delta)$ 使得对最大度为 $\Delta$ 的任意图都有一条 $k$-途径. 对于一般图，这个问题是平凡的，因为最大度为 $\Delta$ 的任意树都有 $\Delta$- 途径 [54], 但对于 $k < \Delta$, 不含任何 $k$- 途径. 但如果我们考虑无桥图 (2- 边连通图), 情况就不一样了. 我们在第五章中，讨论了这个问题.

另一方面，图的染色理论在图论中占有很重要的地位. 近年来，图的圆染色的研究变的异常活跃，得到了一系列漂亮的结果，也产生了许多新颖的研究方法，逐渐成为图的染色理论中的一个重要分支. 图的选择数 (列表色数) 是图的一个很重要的参数，其中一个著名的定理是 Thomassen[81] 的关于平面图的 5- 可选择性的证明. 最近， Zhu [89] 和 Mohar [69] 给出了圆选择数的概念，因此，对平面图的圆选择数的研究也就成了一个非常有意义的研究方向. 另外， Bokal 等 [69] 考虑了有向图的圆染色，把色数和圆色数的概念推广到有向图. 因此，许多关于无向图中的染色和圆染色方面的问题，我们都可以在有向图中考虑.

本文研究了图论中的几个问题，具体地，我们研究了边染色图中的匹配和圈，图的 $k$- 途径和图的圆染色. 全文共分为七章. 第一章，我们给出了一个简短但相对完整的综述. 首先，我们给出了一些基本的定义和术语，并且对上述三个方向的研究进展分别做了介绍. 最后，我们列出了本文的主要结果.

在第二章，我们考虑了边染色图中的彩色匹配问题. 边染色图中的一个彩色匹配是指任意两条边的颜色都不相同的一个匹配. 在一般的未染色图中，最大匹配问题 (找一个边数最多的匹配) 是多项式可解的 ([61]). 而在边染色图中，即使是在边染色二部图中，最大彩色匹配问题 (找一个边数最多的彩色匹配) 是 NP- 完全的 ([45]). 因此，彩色匹配的研究主要集中在边染色完全图和边染色完全二部图中. Erdős 和 Pósa [30] 研究了极值图论中的一个很基本的问题，他们证明了任意一个顶点个数至少为 $2k$, 最小度至少为 $k$ 的图，都有一个 $k$ 条边的匹配. 我们在边染色图中研究了类似的问题. 我们证明了若 $G$ 是一个边染色图，并且对任意点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq k \geq 4$, 则 $G$ 含有一个有 $\lceil \frac{5k-3}{12} \rceil$ 条边的彩色匹配. 我们还证明了若 $G$ 是一个边染色二部图，并且对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq k \geq 3$, 则 $G$ 有一个 $\lceil \frac{2k}{3} \rceil$ 条边的彩色匹配. 并且，我们给出了色邻域的概念，研究了边染色二部图中，满足某种色邻域条件的彩色匹配问题.

在第三章，我们研究了边染色图中的彩色圈. 首先，我们给出了边染色图存在彩色圈的色度条件. 并且，我们运用关于 Caccetta-Häggkvist 猜想 (有向图中有向

三角形存在性) 的一个结果，得到了边染色图存在彩色三角形或者彩色四边形的色度条件. 同时，我们还研究了边染色图中的长彩色圈.

在第四章，我们讨论了边染色图中色度和交错圈的关系，得到了边染色图中几类特殊交错圈存在的色度条件. 同时，我们还对 Bollobás-Erdős 猜想 (边染色完全图中的交错哈密尔顿圈的存在性) 做了研究，给出了满足 Bollobás-Erdős 条件的边染色完全图中，最长交错圈的圈长的一个下界.

在第五章，我们研究了图的 $k$- 途径，证明了最大度为 $\Delta$ 的任意无桥图 (2- 边连通图) 都有一条 $\lceil(\Delta+1)/2\rceil$- 途径，并且证明了这个界是最好可能的.

在第六章，我们考虑 Mohar [69] 提出的关于平面图的圆选择数的一个问题，研究了具有大围长的平面图的圆选择数. 我们证明了围长至少为 $\frac{10n+8}{3}$ 的平面图的圆选择数至多为 $2+\frac{2}{n}$, 从而改进了 [53] 中的结果. 另外，我们还讨论了几类特殊平面图 (系列平行图，外平面图，奇轮) 的圆选择数.

在第七章，我们沿用 [71] 中的定义，对有向图的染色和圆染色做了进一步的研究. 我们证明了如果一个有向图 $D$ 的补图不含有向的哈密尔顿圈，则 $D$ 的圆色数 $\chi_c(D)$ 等于它的色数 $\chi(D)$. 我们还得出，给定一个正常 $k$- 染色的有向图 $D$, $k=\chi(D)$, 则 $D$ 中存在有向路过这 $k$ 种颜色. 这些结果分别对无向图中的相应的结果做了推广.

另外，在每一章里面，我们都提出了几个可以进一步考虑的问题和未解决的猜想.

**关键词**: 彩色匹配；彩色圈；交错圈； $k$- 途径；圆选择数；圆色数.

# Matchings, Cycles in Edge-Colored Graphs and Circular Coloring

Guanghui Wang
(School of Math. & Sys. Sci., Shandong Univ., Jinan 250100)
(L.R.I, Paris-Sud University (Paris 11), Orsay, 91400, France)

## Abstract

The study of graph theory started over two hundreds years ago. The earliest known paper is due to Euler (1736) about the seven bridges of Königsberg. Since 1960s, graph theory has developed very fast and numerous results on graph theory sprung forth. There are many nice and celebrated problems in graph theory, such as Hamiltonian problem, four-color problem, Chinese postman problem, etc. Moreover, graph theory is widely applied in chemistry, computer science, social science, biology and other disciplines. As a subfield in discrete mathematics, graph theory has attracted much attention from all perspectives.

Let $G$ be a graph. If each edge of $G$ is assigned a color, then $G$ is an edge-colored graph. Given an edge-colored graph $G$, let $d^c(v)$, named the color degree of a vertex $v$, be defined as the maximum number of edges incident with $v$, that have distinct colors. If we regard an uncolored graph as an edge-colored graph for which all edges have different colors, then the color degree of a vertex is the degree of it. Recently, the problems in edge-colored graphs arouse an extensive interest, due to their great importance in theory and applications in various fields. Many of them can be described as follows: given a graphical structure (a hamiltonian cycle, for instance) with prescribed properties, does a given edge-colored graph contain it? A subgraph in an edge-colored graph is called alternating if any two adjacent edges have distinct colors, sometimes called a properly edge-colored subgraph. Moreover, if any two edges of it have different colors, then this subgraph is said to be heterochromatic, or rainbow, multicolored. These two kinds of subgraphs have received

increasing attention in the past decade. Matchings, paths and cycles are among the basic research fields of graph theory, thus it is of special interests to study the heterochromatic (alternating) matchings, paths and cycles in edge-colored graphs.

Another active area of graph theory is the study of Hamiltonian cycles. A cycle that contains every vertex of $G$ is called a Hamiltonian cycle of $G$. A well known conjecture by Chvátal [20] states that every sufficiently tough graph has a hamiltonian cycle. The above conjecture was proved to be true for some special graphs, such as chordal graphs and planar graphs (see, e.g., [11, 12, 23]). Another approach to Chvátal's conjecture is to show the existence of weaker substructures than Hamilton cycles. A $k$-walk of $G$ is a closed spanning walk visiting each vertex at most $k$ times. A Hamiltonian cycle is then a 1-walk. Being an interesting variation on the notion of a Hamilton cycle, $k$-walk has received considerable attention. Jackson and Wormald [54] investigated the $k$-walk and conjectured that every 1-tough graph has a 2-walk. The best result in this direction is that every 4-tough graph has a 2-walk [37]. A natural problem is to determine the least possible $k = k(\Delta)$ such that every graph of maximum degree $\Delta$ admits a $k$-walk. For general graphs, this problem is trivial since a tree of maximum degree $\Delta$ has a $\Delta$-walk [54], and it clearly does not admit any $k$-walk with $k < \Delta$. The situation changes if we restrict ourselves to bridgeless (i.e., 2-edge-connected) graphs. We consider this problem in Chapter 5.

On the other hand, the coloring theory of graphs has a central position in graph theory. The study of circular colorings has been very active in the past decade and the theory of circular coloring has become an important branch of coloring theory with many exciting results and new techniques. The choosablity of graphs is an extensively studied graph parameter. For example, we have the Thomassen's celebrated result, the 5-choosability of planar graphs [81]. Zhu [89] and Mohar [69] gave a natural circular version of choosability. And the study of the circular choosability for planar graphs, proposed by Mohar [69], is another interesting topic. Further, the circular chromatic number and the chromatic number have natural extensions in digraphs ([71]). Thus many interesting problems concerning the coloring and circular coloring of graphs can be considered in terms of digraphs.

This thesis is concerned with some problems of graph theory. More specifically, our aim is to discuss some topics on matchings, cycles in edge-colored graphs, $k$-walks and circular coloring of graphs. We have constructed our work in seven chapters. A short but relatively complete introduction is given in chapter 1. First, we give some basic definitions and notations. Then we describe some progress of above three topics. At last, we outline the main results of this thesis.

The main focus of Chapter 2 is to consider the heterochromatic matchings in edge-colored graphs. In uncolored graphs, the maximum matching problem (finding a maximum matching) is solvable in polynomial time ([61]). However, the maximum heterochromatic matching problem (finding a maximum heterochromatic matching) in edge-colored graphs is NP-complete, even for edge-colored bipartite graphs ([45]). Thus most of the existing results about it deal with the edge-colored complete graphs or edge-colored bipartite completes graphs. Erdős and Pósa [30] studied a fundamental question in extremal graph theory and showed that every graph of order at least $2k$ and minimum degree at least $k$ contains a matching with $k$ edges. We study the analogous problems in edge-colored graphs. In fact, we show that if $G$ is an edge-colored graph and $d^c(v) \geq k \geq 4$ for every vertex $v$ of $G$, then $G$ has a heterochromatic matching with $\lceil\frac{5k-3}{12}\rceil$ edges. And we also prove that if $G$ is an edge-colored bipartite graph and $d^c(v) \geq k \geq 3$ for every vertex $v$ of $G$, then $G$ has a heterochromatic matching with $\lceil\frac{2k}{3}\rceil$ edges. Moreover, we define the color neighborhood of a vertex set and study the large heterochromatic matchings in edge-colored bipartite graphs under some color neighborhood conditions.

In Chapter 3, we are interested in some color degree conditions that guarantee the existence of the heterochromatic cycles in edge-colored graphs. In particular, we obtain the color degree conditions in which an edge-colored graph contains one heterochromatic triangle or one heterochromatic quadrilateral. One of our main tools is a result for the Caccetta-Häggkvist's intriguing conjecture about the existence of the directed triangles in digraphs. Also, we investigate the long heterochromatic cycles in edge-colored graphs.

In Chapter 4, we discuss the alternating cycles with prescribed lengths in edge-colored graphs under the color degree conditions. Further, we consider a conjecture of Bollobás-Erdős, which involves the alternating Hamiltonian cycles in edge-colored complete graphs. We give a lower bound for the length of the longest alternating cycles, in edge-colored complete graphs satisfying the Bollobás-Erdős's condition.

In Chapter 5, we show that every bridgeless graph of maximum degree $\Delta$ has a $\lceil(\Delta+1)/2\rceil$-walk. In addition, we prove that the bound is best possible.

In Chapter 6, we prove that the circular choosability of planar graph with girth at least $\frac{10n+8}{3}$ is at most $2+\frac{2}{n}$, which improves a result in [53]. In addition, we give some results about the circular choosability of some special planar graphs.

In Chapter 7, following the definition in [71], we investigate the circular coloring and coloring of digraphs. We prove that, for a digraph, if its complement contains no directed Hamiltonian cycle, then its circular chromatic number equals to its chromatic number. We also show that there exist directed paths meeting all colors in digraphs with proper colorings. These generalize some interesting results in undirected graphs.

In addition, we present some unsolved problems and conjectures to be considered in Chapters 2,3,4,5,7.

**Keywords:** heterochromatic matching; heterochromatic cycle; alternating cycle; $k$-walk; circular choosability; circular chromatic number.

# 符号说明

设 $G$ 是一个图，其顶点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$. $(G,C)$ 是一个具有边染色 $C$ 的边染色图. 设 $D$ 是一个有向图，其顶点集合为 $V(D)$, 弧集合为 $A(D)$.

| | |
|---|---|
| $\lvert S\rvert$ | 集合 $S$ 的基数 |
| $\lfloor x\rfloor$ | 不大于 $x$ 的最大整数 |
| $\lceil x\rceil$ | 不小于 $x$ 的最小整数 |
| $V(G)$ | 图 $G$ 的顶点集 |
| $E(G)$ | 图 $G$ 的边集 |
| $\delta(G)$ | 图 $G$ 的最小度 |
| $\Delta(G)$ | 图 $G$ 的最大度 |
| $d_G(v)$ | 顶点 $v$ 的在 $G$ 中的度数 |
| $N_G(v)$ | 顶点 $v$ 在 $G$ 中的邻域 |
| $g(G)$ | 图 $G$ 的围长 |
| $G[S]$ | 图 $G$ 的由 $S$ 导出的子图 |

| | |
|---|---|
| $d^c(v)$ | 顶点 $v$ 在边染色图 $(G,C)$ 中的色度 |
| $N^c(S)$ | 顶点集合 $S$ 在边染色图 $(G,C)$ 中的一个最大色邻域 |
| $\chi(G)$ | 图 $G$ 的色数 |
| $\chi_c(G)$ | 图 $G$ 的圆色数 |
| $\chi_l(G)$ | 图 $G$ 的选择数 |
| $\chi_{c,l}(G)$ | 图 $G$ 的圆选择数 |
| $d^+_D(v)$ | 顶点 $v$ 在 $D$ 中的出度 |
| $d^-_D(v)$ | 顶点 $v$ 在 $D$ 中的入度 |
| $\chi(D)$ | 有向图 $D$ 的色数 |
| $\chi_c(G)$ | 有向图 $D$ 的圆色数 |

# 原 创 性 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：　　　日　期：2007.5.30

# 关于学位论文使用授权的声明

本人同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的印刷件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：　　　导师签名：　　　日　期：2007.5.30

# 第一章 绪 论

图论的研究始于 200 多年前. 关于图论的第一篇论文是 1736 年 Euler 发表的，他用图的方法解决了哥尼斯堡 (Königsberg) 七桥问题. 二十世纪六十年代以来，图论在科学界异军突起，活跃非凡. 图论中有很多著名的问题，如哈密尔顿问题，四色问题，中国邮递员问题等. 并且，应用图论来解决化学，生物学，信息和计算机科学等学科问题已显示出极大的优越性. 同时，图论在工程技术领域及社会科学中也有着广泛的应用. 它作为离散数学的一个重要分支，受到了各方面的普遍重视.

本文研究了图论中的如下问题：边染色图中的匹配和圈，图的 $k$- 途径和图的圆染色.

在这一章中，我们给出了一个简短但相对完整的综述，全章共分为五节. 在 1.1 节，我们给出了一些基本的概念和术语. 在 1.2, 1.3 和 1.4 节中，我们对上述三个方向的研究进展分别做了介绍. 在 1.5 节，我们列出了本文的主要结果.

## 1.1 基本概念和术语

### 1.1.1 图和有向图

一个图 $G$ 是指由非空点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 及 $\psi_G$ 构成的有序三元组 $(V(G), E(G), \psi_G)$, 其中关联函数 $\psi_G$ 是从边集到 $G$ 的无序点对的一个映射. 如果 $e$ 是一条边并且存在点 $u$ 和 $v$ 满足 $\psi_G(e) = uv$, 则称 $e$ 连接点 $u$ 和点 $v$; 点 $u$ 和 $v$ 称为边 $e$ 的端点.

在本文中，图 $G$ 具有有限的顶点集 $V$ 和有限的边集 $E$. 设 $S$ 是一个集合，$|S|$ 表示集合 $S$ 的基数. 对图 $G$ 中的顶点 $v$，$v$ 的度就是关联于 $v$ 的边的条数，我们记为 $d_G(v)$. 记 $\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$，$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$, 则 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 $G$ 的最小度和最大度. 对于 $G$ 中的顶点子集 $S$, $S$ 的邻域定义为和 $S$ 中的顶点相关联的所有顶点的集合，记为 $N_G(S)$. 若 $S = \{v\}$, 则 $v$ 的邻域记为 $N_G(v)$. 在不产生混淆的情况下，我们常用 $V, E, d(v), \delta, \Delta, N(S), N(v)$

分别代替 $V(G), E(G), d_G(v), \delta(G), \Delta(G), N_G(S), N_G(v)$ .

若 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 并且 $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$, 其中 $|$ 表示将映射 $\psi_G$ 限制到边集 $E(H)$ 上，则称图 $H$ 是图 $G$ 的子图. 在图 $G$ 中设子集 $S \subseteq V(G)$, 图 $G$ 的由顶点集 $S$ 导出的子图记为 $G[S]$, 其顶点集为 $S$, 边集是 $E' = \{uv \in E(G): u, v \in S\}$, 并且关联函数是 $\psi_G|_{E'}$. 设 $S_1 \subset V(G)$, 用 $G - S_1$ 表示图 $G$ 的删去点集 $S_1$ 和与其关联的边后得到的子图. 图 $G$ 的支撑子图 $H$ 是指图 $G$ 的子图且满足 $V(H) = V(G)$.

图 $G$ 的一个匹配 $M$ 是由不相邻的边组成的集合. 若匹配 $M$ 是 $G$ 的支撑子图，则称 $M$ 为 $G$ 的一个完美匹配，或者称为 $G$ 的 1- 因子. 图 $G$ 的一个 2- 因子是每个顶点的度都为 2 的支撑子图.

图 $G$ 的途径是一个有限非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$, 它为顶点和边的交错序列，且 $e_i$ $(1 \leq i \leq k)$ 的端点为 $v_{i-1}$ 和 $v_i$. 若 $W$ 中 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 都不相同，我们称它为迹. 若迹 $W$ 中 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 都不相同，我们称它为路. 若路 $W$ 中 $v_0 = v_k$ $(k \geq 2)$, 我们称它为圈. 过图 $G$ 中每个顶点的路 (圈), 我们称它为图 $G$ 的哈密尔顿路 (圈).

有向图 $D$ 是一个三元组 $(V(D), A(D), \psi_D)$, 其中 $V(D)$ 是非空的顶点集合，$A(D)$ 是弧的集合，且 $A(D)$ 与 $V(D)$ 无公共的元素；$\psi_D$ 是一个将 $A(D)$ 中的每一条弧和 $V(D)$ 中的有序对 (可以相同) 相联系的关联函数. 若 $a \in A(D), u, v \in V(D)$ 且 $\psi_D(a) = uv$, 则称 $a$ 连接 $u$ 和 $v$; $u$ 是 $a$ 的尾， $v$ 是 $a$ 的头. 一个有向图，若不含环，而且有相同端点的任意两条弧的方向不相同，则称该有向图是严格的.

若 $V(D') \subseteq V(D)$, $A(D') \subseteq A(D)$ 且 $\psi_{D'}$ 是 $\psi_D$ 在 $A(D')$ 上的一个限制，则称 $D'$ 是 $D$ 的子有向图. 一个有向图 $D$, 若对任意两点 $u$,$v$, 都有一条从 $u$ 到 $v$ 的有向路和一条从 $v$ 到 $u$ 的有向路，则称 $D$ 为强连通的. 一个有向图 $D$ 的极大强连通子有向图，称为 $D$ 的一个强连通分支.

若存在顶点 $u$ 使得 $uv \in A$, 则称 $u$ 为 $v$ 的一个入邻点. 若存在 $w$ 使得 $vw \in A$, 则称 $w$ 为 $v$ 的一个出邻点. 我们用 $N_D^-(v)$, $N_D^+(v)$ 分别表示 $v$ 的入邻点的集合 (称为 $v$ 的入邻域), 和出邻点的集合 (称为 $v$ 的出邻域). 记 $d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$, $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|$, 并分别称它们为 $v$ 的入度和出度. $D$ 的最小入度，最大入度，最小出度，最大出度分别记为 $\delta^-(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^+(D)$.

在本文中，除非特别说明，“图”都表示简单图，“有向图”都是严格的有向图. 还有许多概念我们将在用到时具体给出. 未作说明的概念和术语，参考 [16].

### 1.1.2 几类特殊图

若一个图中的任意两点都有边相连，则称该图为完全图. 我们用 $K_n$ 表示 $n$ 个顶点的完全图. 如果图 $G$ 的顶点集可以划分为两个不相交的点集 $(X, Y)$, 并且 $G$ 的每条边的端点分别属于 $X$ 和 $Y$, 则称图 $G$ 为二部图. 进一步，若 $|X| = |Y|$, 则称 $G$ 为平衡二部图. 若一个二部图的顶点划分为 $(X, Y)$, 且 $X$ 中的每一个顶点都和 $Y$ 中的每个顶点相邻，则称该二部图为完全二部图. 令 $K_{m,n}$ 表示 $|X| = m$, $|Y| = n$ 的完全二部图.

一个图，若可以将它嵌入到平面上，使它的边只在端点上相交，则称为可平面图. 一个可平面图的平面嵌入 $G$ 把平面划分成的几个区域，我们称为图 $G$ 的面，其中无界面称为外面，其它的面称为内面.

## 1.2 边染色图中的匹配和圈

设 $G = (V, E)$ 是一个图. 图 $G$ 的一个边染色就是一个函数 $C : E \to N$($N$ 是非负整数集合). 若 $G$ 中任意两条相邻的边的颜色不相同，则称边染色 $C$ 为正常的. 在本文中，若不特殊说明，通常说的边染色未必是正常的. 若 $G$ 被赋予染色 $C$, 则称 $G$ 为一个边染色图. 我们用 $(G, C)$ 表示该边染色图，在不引起混淆的情况下，有时候也简记为 $G$. 令 $C(e)$ 表示边 $e \in E$ 的颜色. 对于图 $G$ 的一个子图 $H$, 令 $C(H) = \{C(e) : e \in E(H)\}$.

设 $(G, C)$ 为一个边染色图. 对于顶点集合 $S$, $S$ 的色邻域是集合 $T \subseteq N(S)$, 使得存在 $|T|$ 条边连接 $S$ 中的点和 $T$ 中不同的点，并且这些边的颜色两两不同. $S$ 的一个最大色邻域，是 $S$ 的顶点个数最多的一个色邻域，记为 $N^c(S)$. 特别地，若 $S = \{v\}$, 则令 $d^c(v) = |N^c(v)|$, 并称之为 $v$ 的色度. 如果把一般的未染色图 $G$ 看作是每条边都染不同颜色的边染色图 $(G, C)$, 则顶点的色度就等于它的度，一个集合的最大色邻域就是它的邻域.

边染色图中的一个子图，若它的所有边都染同样的颜色，则称它为单色子图. 反之，若任意两条边的颜色都不相同，则称该子图为彩色的，或者称为彩虹的，多色的. 这两类子图已经被广泛研究，尤其是对彩色子图的研究，近年来受到了格外重视.

例如，Suzuki [79] 给出了 $n$ 个顶点的边染色连通图有一棵彩色支撑树的充分

必要条件：对任意 $r$ $(1 \le r \le n-2)$ 种颜色，去掉染这 $r$ 种颜色的所有边得到的图至多有 $r+1$ 个连通分支. Chen 和 Li [24] 证明了边染色图 $G$ 中，若每个顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \ge k \ge 6$, 则 $G$ 中存在一个长度为 $\lceil \frac{2k}{3} \rceil + 1$ 的彩色路. Hahn 和 Thomassen [50] 证明了存在常数 $c$, 若 $n \ge ck^3$, 则满足每种颜色至多用 $k$ 次的边染色完全图 $K_n$ 中有一条彩色的哈密尔顿路.

反 Ramsey 数的概念是由 Erdős, Simonovits 和 Sós ([33]) 在 1970 年提出的，用来研究边染色完全图中的彩色子图问题，他们证明了反 Ramsey 数与 Turán 数有非常密切的关系. 对于图 $H$ 和正整数 $n$, 用 $f(n,H)$ 表示给完全图 $K_n$ 边染色，若 $K_n$ 中不存在同构于 $H$ 的彩色子图，我们最多可用的颜色数，并称 $f(n,H)$ 为 $H$ 的反 Ramsey 数. 关于反 Ramsey 数的研究，参考 [3, 33, 57].

### 1.2.1 彩色匹配

边染色图中的一个彩色匹配是指任意两条边的颜色都不相同的一个匹配. 在一般的未染色图中，最大匹配问题 (找一个边数最多的匹配) 是多项式可解的 ([61]). 而在边染色图中，即使是在边染色二部图中，最大彩色匹配问题 (找一个边数最多的彩色匹配) 是 NP- 完全的 ([45]). 因此，彩色匹配的研究主要集中在边染色完全图和边染色完全二部图中.

Schiermeyer [74] 得到了边染色完全图 $K_n$ $(n \ge 3k+3)$ 中，存在彩色 $k$ $(k \ge 2)$ 条边的彩色匹配所需的颜色数. Kaneko 和 Suzuki [60] 证明了任意正常边染色的完全图 $K_{2n}$, $n \ge 3$, 都存在一个彩色的完美匹配.

另外，彩色匹配问题和图与组合理论 (如组合设计理论和超图理论) 中的其它有趣的问题都有着非常密切的关系.

假设 $L_n$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，每个元素都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的一个数. 若 $L_n$ 中的同一行中的元素互不相同，同一列中的元素也互不相同，则称 $L_n$ 为一个 $n \times n$ 的拉丁方. 拉丁方 $L_n$ 的横截是 $L_n$ 中的取自不同行不同列的 $n$ 个元素组成的集合. $L_n$ 的一个部分横截是一个横截的子集合. 一个 (部分) 横截中的任意两个元素都不相同，则称之为拉丁的. 关于拉丁方的详细介绍，参考 [78].

我们知道一个 $n \times n$ 拉丁方 $L_n$ 对应着完全二部图 $K_{n,n}$ 的一个由 $n$ 种颜色染成的正常边染色； $L_n$ 的一个横截对应于边染色完全二部图 $K_{n,n}$ 中的一个完美匹配；而 $L_n$ 的一个拉丁横截对应于边染色完全二部图 $K_{n,n}$ 中的一个彩色的完美匹配.

Shor [77] 证明了 $n\times n$ 拉丁方有一个至少有 $n-5.53(\log n)^2$ 个元素的部分横截. 也就是说，任何一个由 $n$ 种颜色染色得到的正常边染色的完全二部图 $K_{n,n}$, 有一个至少有 $n-5.53(\log n)^2$ 条边的彩色匹配.

另外，边染色二部图中的彩色匹配还可以转化为 3- 部 3- 一致超图中的匹配问题，详见第二章.

### 1.2.2 彩色圈

关于彩色圈的研究，大多集中在边染色完全图中. 例如， Erdős, Simonovits 和 Sós [32], Alon [3] 和 Jiang[58] 研究了关于圈的反 Ramsey 数，特别地，三角形的反 Ramsey 数为 $n-1$ [32].

在 [46] 中， Giraud 研究了边染色完全图中的单色三角形和彩色三角形的个数.

Albert, Frieze 和 Reed [2] 证明了当 $n$ 充分大时，若完全图 $K_n$ 的边染色满足每种颜色所染的边不超过 $\lceil cn\rceil$ 次，则 $K_n$ 有一个彩色的哈密尔顿圈，其中 $c<1/32$ 是一个常数.

Broersma, Li, Woegingerr 和 Zhang [18] 研究了一般的边染色图中彩色圈的存在性，尤其是彩色三角形和彩色四边形的存在性.

### 1.2.3 交错圈

边染色图中的圈 (路), 若相邻的边的颜色不相同，称为交错圈 (路). 除了在图论和算法中的重要应用外，交错路和交错圈还广泛应用在许多其它的领域中：基因科学 ([27, 28, 29]), 社会科学 ([25]) 等. 关于这方面的详细介绍，我们可以参考 Bang-Jensen 和 Gutin 的综述文章 [8].

边染色图 $G$, 若 $c(G)=c$, 我们称它为 $c$- 边染色图. $c$- 边染色图中的交错圈的存在性问题最早由 Grossman 和 Häggkvist [47] 研究的. 他们解决了 $c=2$ 的情况. Yeo [86] 解决了 $c\geq 3$ 的情况.

考虑边染色完全图，我们用 $K_n^c$ 表示顶点个数为 $n$ 的边染色完全图，所用的颜色集为 $\{1,2,\cdots,c\}$. 令 $\Delta(K_n^c)$ 表示 $K_n^c$ 中关联于同一个顶点相同颜色的边的最大数目. Bollobás 和 Erdős [13] 提出如下猜想.

**猜想 A.** (Bollobás 和 Erdős [13]) 若 $\Delta(K_n^c) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 则 $K_n^c$ 有一个交错的哈密尔顿圈.

Bollobás 和 Erdős 证明了若 $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{69}$, 则 $K_n^c$ 有一个交错的哈密尔顿圈. 这个结果被 Chen 和 Daykin [21] 改进到 $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{17}$, 又被 Shearer [75] 改进到 $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{7}$. 到目前为止, 最好的渐进的界是 Alon 和 Gutin [4] 得到的如下结果.

**定理 B.** (Alon 和 Gutin [4]) 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个正整数 $n_o = n_0(\epsilon)$, 使得对任意正整数 $n > n_o$, 满足 $\Delta(K_n^c) \le (1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\epsilon)n$ 的 $K_n^c$ 都有一个交错的哈密尔顿圈.

Bollobás 和 Erdős [13] 也提出了如下猜想：若对 $K_n^c$ 中的任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge \lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor$ 成立, 则 $K_n^c$ 有一个交错的哈密尔顿圈. 他们证明了若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \ge \frac{7n}{8}$ 成立, 则 $K_n^c$ 有一个交错的哈密尔顿圈. 后来, Shearer [75] 改进为 $d^c(v) > \frac{5n+8}{7}$ (对每个顶点 $v$).

## 1.3 图的 $k$- 途径

图的哈密尔顿圈的研究是图论中的一个很活跃的研究方向, 特别是关于图的连通性和图的哈密尔顿圈的存在性的关系. 其中一个著名的猜想是 Chvátal 提出的如下猜想：存在常数 $\alpha_0$ 使得任意 $\alpha_0$- 坚韧图含有一个哈密尔顿圈 [20]. 若对于任意非空顶点集合 $S$, $G-S$ 至多有 $\max\{1, \frac{|S|}{\alpha}\}$ 个连通分支, 则称图 $G$ 为 $\alpha$- 坚韧图. Bauer, Broersma 和 Veldman [10] 构造了一个非哈密尔顿的 $(\frac{9}{4}-\varepsilon)$- 坚韧图.

对于许多特殊的图类, 例如弦图和平面图, 上述猜想被证明是成立的 [11, 12, 23]. 图 $G$ 的一条 $k$- 途径是 $G$ 的一条经过每个顶点至多 $k$ 次的闭支撑途径. 作为哈密尔顿圈的一个非常有趣的变形, $k$- 途径受到了广泛的关注 ([36, 37, 44]). Jackson 和 Wormald [54] 猜想任何 1- 坚韧图都有一条 2- 途径. 这个猜想仍然没有得到证明, 最好的结果是任意 4- 坚韧图都有一条 2- 途径 [37].

自然地, 我们会考虑如下问题：确定最小的整数 $k = k(\Delta)$ 使得对最大度为 $\Delta$ 的任意图都有一条 $k$- 途径. 对于一般图, 这个问题是平凡的, 因为最大度为 $\Delta$ 的任意树都有 $\Delta$- 途径 [54], 但对于 $k < \Delta$, 不含任何 $k$- 途径. 但如果我们考虑无桥

图 (2- 边连通图), 情况就不一样了. 我们在第五章中，讨论了这个问题.

## 1.4 图的圆染色

图的染色理论是图论中的一个非常重要的部分. 近年来，图的圆染色的研究变得异常活跃，得到了很多漂亮的结果，也产生了许多新颖的研究方法，并逐渐成为图的染色理论中的一个重要的分支.

图 $G$ 的一个正常 $k$- 染色是用 $k$ 种颜色 $(1,2,\cdots,k)$, 给图 $G$ 的顶点染色，使得相邻的顶点所染的颜色不同. 事实上， $G$ 的一个正常的 $k$- 染色就是把 $G$ 的顶点集 $V$ 划分为 $k$ 个独立集 $(V_1,V_2,\cdots,V_k)$. 图 $G$ 的色数 $\chi(G)$, 是满足图 $G$ 有一个正常 $k$- 染色的最小正整数 $k$.

设 $p,q$ $(p\geq 2q)$ 是正整数. 图 $G$ 的一个 $(p,q)$- 染色是一个映射 $c:V\rightarrow \{0,1,,...,p-1\}$ 使对 $G$ 的任意一条边 $uv$, 都有 $q\leq |c(u)-c(v)|\leq p-q$. 图的 $(p,1)$- 染色就是图的 $p$- 染色. 图的圆色数有如下定义 ([91]):

$$\chi_c(G)=\inf\{\ \frac{p}{q}:\ G \text{ 存在一个 } (p,q)\text{- 染色}\}.$$

图的圆色数有几个等价的定义，我们给出另外一种常用的定义. 设 $r\geq 1$ 是一个实数， $S(r)$ 是平面上的周长为 $r$ 的圆周. 对于 $a,b\in S(r)$, 用 $|a-b|_r$ 表示 $a,b$ 两点在圆周上的距离较短的圆弧的长度. 图 $G$ 的一个圆 $r$- 染色是一个映射 $f:\ V\rightarrow S(r)$, 使得对于任意相邻的两点 $u,v$, 都有 $|f(u)-f(v)|_r\geq 1$. 圆染色的另一种定义 ([91]):

$$\chi_c(G)=\min\{\ r:G \text{ 有圆 } r\text{- 染色 }\}.$$

对任意图 $G$, 都有 $\chi(G)-1<\chi_c(G)\leq\chi(G)$ 成立 ([83, 91]). 图的圆色数是图的色数的一种近似，而且它比图的色数能更好地反映图的结构方面的性质. 关于圆染色的研究，我们可以参考 Zhu 的综述文章 [91].

### 1.4.1 平面图的圆选择数

图 $G$ 的一个 $k$- 列表就是一个函数 $L$ 使得每一个点都分配一个有 $k$ 种颜色的集合 $L$. 图 $G$ 的一个 $L$- 染色就是 $G$ 的一个正常染色 $f$ 使得对任意点 $v$, 都有

$f(v) \in L(v)$. 如果对于任意的 $k$- 列表 $L$, $G$ 都存在一个 $L$- 染色, 则称图 $G$ 是 $k$- 可选择的. 图的选择数 (列表色数) $\chi_l(G)$, 是满足 $G$ 是 $k$- 可选择的最小整数 $k$ ([6]). 图的选择数也是图的一个重要的研究参数, 其中一个著名的结果是 Thomassen [81] 对于平面图的 5- 可选择性的证明.

Zhu [89] 给出了一个列表染色的如下推广. 假设 $p, q$ $(p \geq 2q)$ 是正整数, $t$ $(t \geq 1)$ 是一个实数. 图 $G$ 的一个 $t$-$(p,q)$- 列表 $L$ 是一个列表 $L$, 满足对任意顶点 $v$, $L(v) \subseteq \{0, 1, \cdots, p-1\}$ 并且 $|L(v)| \geq tq$. 图 $G$ 的 $L$-$(p,q)$- 染色是 $G$ 的一个 $(p,q)$- 染色 $c$, 使得对任意顶点 $v$, 都有 $c(v) \in L(v)$. 如果对 $G$ 的任意 $t$-$(p,q)$- 列表 $L$, $G$ 都有一个 $L$-$(p,q)$- 染色，则我们称 $G$ 是圆 $t$-$(p,q)$- 可选择的. 如果对于任意正整数 $p, q$ $(p \geq 2q)$, $G$ 都是圆 $t$-$(p,q)$- 可选择的，我们称 $G$ 是圆 $t$- 可选择的. 图 $G$ 的圆选择数 (圆列表色数) 的定义如下：

$$\chi_{c,l}(G) = \inf\{\ t \geq 1:\ G \text{ 是圆 t- 可选择的 }\}.$$

对任意正整数 $n$, 若 $G$ 不是 $n$- 可选择的，则 $G$ 也不是圆 $(n-1)$- 可选择的，因此 $\chi_{c,l}(G) \geq \chi_l(G) - 1$. 但 $\chi_{c,l}(G) - \chi_l(G)$ 却可以任意大 [89].

Mohar [69] 给出了圆选择数的另一种等价定义，并提出如下问题：平面图的圆选择数是多少？ Havet, Kang, Müller 和 Sereni [53] 证明了任意平面图是圆 8- 可选择的，并且对于任意正整数 $n \geq 2$, 都存在一个圆选择数至少为 $6 - \frac{1}{n}$ 的平面图. 并且，他们研究了平面图的圆选择数和围长的关系，证明了如下结果：

**定理 C.** (Havet 等 [53]) 设 $G$ 是满足 $g(G) \geq 4n+2$ 的平面图, 则 $\chi_{c,l}(G) \leq 2 + \frac{2}{n}$.

### 1.4.2 有向图的圆染色

最近， Bokal 等人 [71] 把无向图的色数和圆色数的概念推广到了有向图. 设 $r$ $(r \geq 1)$ 是一个实数， $S(r)$ 表示一个周长为 $r$ 的圆. 对于 $S(r)$ 上的两点 $u, v$, 用 $d(u,v)$ 表示从 $u$ 到 $v$ 沿顺时针方向的圆弧的长度. 顶点集合 $S \subseteq V(D)$, 如果点导出子图 $D[S]$ 不含有向圈，则称 $S$ 是无圈集.

我们沿用 [71] 中的定义. 有向图 $D$ 的一个弱圆 $r$- 染色是一个映射 $f\colon V(D) \to S(r)$, 使得对 $D$ 的任意弧 $xy$, 或者 $f(x) = f(y)$ 或者 $d(f(x), f(y)) \geq 1$. 并且，对任意点 $u \in S(r)$, 颜色集 $f^{-1}(u)$ 是 $D$ 中的一个无圈集. 有向图 $D$ 的圆色数定义如下：

$$\chi_c(D) = \min\{r:\ D \text{ 有一个弱圆 } r\text{-染色}\}.$$

有向图的圆色数的定义引出了有向图的色数的定义：有向图 $D$ 的色数 $\chi(D)$ 就是使得 $V(D)$ 可以划分成 $k$ 个无圈集的最小正整数 $k$. 换言之，$\chi(D)$ 是使得 $D$ 有弱圆 $r$- 染色的最小整数 $r$. 有向图 $D$ 的一个正常 $k$- 染色，就是用 $k$ 种颜色 $(1, 2, \cdots, k)$ 给 $D$ 的顶点染色，使得具有同一种颜色的顶点构成的集合是无圈集. 如果把一个无向图 $G$ 的每条边用两条方向相反的弧来代替，得到有向图 $D$, 则 $\chi_c(D)$ 和 $\chi(D)$ 分别等于无向图 $G$ 的圆色数和色数. 从这个意义上讲，$\chi_c(D)$ 和 $\chi(D)$ 把圆色数和色数的概念从无向图推广到有向图. 因此，许多关于无向图中的染色和圆染色方面的问题，我们都可以在有向图中考虑，参考 [71, 92].

## 1.5 主要结果

我们列出本文的主要结果.

**第二章**. 首先，我们讨论了边染色图中满足一定色度条件下的彩色匹配问题，得到了如下结果.

(2.1). 设 $G$ 为边染色二部图，若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq k \geq 3$, 则 $G$ 中存在一个有 $\lceil \frac{2k}{3} \rceil$ 条边的彩色匹配.

(2.2). 设 $G$ 为边染色图，若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq k \geq 4$, 则 $G$ 中存在一个有 $\lceil \frac{5k-3}{12} \rceil$ 条边的彩色匹配.

我们同时也研究了满足某些色邻域条件下，边染色二部图中的彩色匹配问题.

(2.3). 设 $G$ 是边染色二部图，顶点划分为 $(X, Y)$, 且 $|X| = |Y| = n$. 若对任意集合 $S \subseteq X$ 或者 $S \subseteq Y$, 都有 $|N^c(S)| \geq |S|$ 成立，则 $G$ 存在一个有 $\lceil \frac{3n}{8} \rceil$ 条边的彩色匹配.

Aharoni [1] 证明了著名的 Ryser 的猜想对于 3- 部 3- 一致超图成立. 利用这个结果，我们改进了结论 (2.3) 中的界，得到如下结论，而且证明了这个结论是最

好可能的.

(2.4). 设 $G$ 是边染色二部图，顶点划分为 $(X,Y)$. 若对任意集合 $S\subseteq X$, 都有 $|N^c(S)|\geq|S|$ 成立，则 $G$ 中存在一个有 $\lceil\frac{|X|}{2}\rceil$ 条边的彩色匹配.

**第三章**. 我们研究了边染色图中彩色圈存在的色度条件，尤其是对于最短彩色圈和最长彩色圈. 对于正整数 $l$ $(l\geq 3)$, 令 $HC_l$ 表示长度为 $l$ 的彩色圈. 我们证明了如下结论.

(3.1). 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 3$. 若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v)\geq\frac{n+1}{2}$ 成立，则 $G$ 中存在一个彩色圈.

(3.2). 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 3$. 若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v)\geq(\frac{4\sqrt{7}}{7}-1)n+3-\frac{4\sqrt{7}}{7}$ 成立，则 $G$ 中或者存在一个 $HC_3$, 或者存在一个 $HC_4$

(3.3). 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 3$. 若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v)\geq\frac{\sqrt{7}+1}{6}n$ 成立，则 $G$ 中存在一个 $HC_3$.

(3.4). 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 8$. 若对每个顶点 $v$, 都有 $d^c(v)\geq d\geq\frac{3n}{4}+1$ 成立，则 $G$ 中存在一个彩色圈 $HC_l$, 其中 $l\geq d-\frac{3n}{4}+2$.

**第四章**. 我们介绍了关于边染色图中的交错圈的一些研究进展，并给出了几类特殊的交错圈存在的色度条件，得到了如下结论.

(4.1). 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图，$n\geq 3$. 若对 $G$ 中的任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)>\frac{n+1}{3}$, 则 $G$ 中存在一个交错圈，并且圈上的每种颜色在圈上至多出现两次.

(4.2). 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 3$. 若对 $G$ 的每一个顶点 $v$, 都有 $d^c(v)\geq\frac{37n-17}{75}$ 成立，则 $G$ 中或者存在一个交错的三角形，或者存在一个交错的四边形.

(4.3). 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图. 若对每一个顶点 $v$, 都有 $d^c(v)\geq d\geq 2$,

则 $G$ 中或者存在一条长度至少为 $2d$ 的交错路，或者存在一个长度至少为 $\lceil\frac{2d}{3}\rceil+1$ 的交错圈.

另外，我们还研究了满足 Bollobás-Erdős 条件的边染色完全图中的交错圈，并得到了如下结论.

(4.4). 若 $\Delta(K_n^c)<\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, 则 $K_n^c$ 中存在一个长度至少为 $\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+1$ 的交错圈.

**第五章**. 我们研究了无桥图 (2- 边连通图) 中的 $k$- 途径，得到了如下结论，并且证明了结论中的界是最好可能的.

(5.1). 最大度为 $\Delta$ 的任意无桥图，都有一条 $\lceil(\Delta+1)/2\rceil$- 途径.

**第六章**. 我们讨论了平面图的圆选择数，得到了如下结果，改进了定理 $C$ 中的界.

(6.1). 设 $G$ 是一个满足 $g(G)\geq\frac{10n+8}{3}$ 的平面图，则 $\chi_{c,l}(G)\leq 2+\frac{2}{n}$.

我们也讨论了几类特殊平面图 (系列平行图，外平面图和奇轮) 的圆选择数.

(6.2). 若 $G$ 是一个系列平行图并且 $g(G)\geq 4n+1$, 则 $\chi_{c,l}(G)\leq 2+\frac{1}{n}$.

(6.3). 若 $G$ 是一个外平面图并且 $g(G)\geq 2n+2$, 则 $\chi_{c,l}(G)\leq 2+\frac{1}{n}$.

(6.4). 对任意正整数 $k$, $\chi_{c,l}(W_{2k+1})=4$.

**第七章**. 我们介绍了有向图 $D$ 的圆色数 $\chi_c(D)$ 和色数 $\chi(D)$ 的定义和这方面的一些研究进展，并给出了有向图 $D$ 满足 $\chi_c(D)=\chi(D)$ 的一个充分条件，推广了 Fan [38] 的结果.

(7.1). 若有向图 $D$ 的补图不含有向的哈密尔顿圈，则 $\chi_c(D)=\chi(D)$.

设 $D$ 是一个具有正常 $k$- 染色的有向图，其中 $k=\chi(D)$. 设 $x_1\rightarrow x_2\rightarrow\cdots\rightarrow x_k$ 和 $x_1'\leftarrow x_2'\leftarrow\cdots\leftarrow x_k'$ 是 $D$ 中的两条有向路，如果对于所有的正整数 $i$, $1\leq i\leq k$, 顶点 $x_i$ 和 $x_i'$ 的颜色为 $i$, 则称 $x_1\rightarrow\cdots\rightarrow x_k$ 为一条花色前向路，$x_1'\leftarrow\cdots\leftarrow x_k'$ 称为一条花色后向路. 我们证明了下面的两个结论，分别推广了 Fung ([42]) 和 Li ([62]) 的结论.

(7.2). 设 $D$ 是一个有向图并且 $k=\chi(D)$. 对于 $D$ 的任意正常 $k$- 染色，$D$ 中都存在一条花色前向路和一条花色后向路.

(7.3). 设 $D$ 是一个强连通的有向图并且 $k=\chi(D)$. 对于 $D$ 的任意正常 $k$- 染色和 $D$ 的任意顶点 $v$, $D$ 中都存在两条有向路经过这 $k$ 种颜色，一条以 $v$ 为起点，另一条以 $v$ 为终点.

# 第二章 边染色图中的彩色匹配

设 $G$ 是一个边染色图. 图 $G$ 的一个彩色匹配是任意两条边的颜色都不相同的匹配. 在本章, 我们研究了边染色图中的彩色匹配.

## 2.1 介绍

设 $G=(V,E)$ 是一个图. 图 $G$ 的一个边染色就是一个函数 $C: E \to N$($N$ 是非负整数集合). 若 $G$ 被赋予染色 $C$, 则称 $G$ 为一个边染色图. 我们用 $(G,C)$ 表示该边染色图, 用 $C(e)$ 表示边 $e \in E$ 的颜色. 对于图 $G$ 的一个子图 $H$, 令 $C(H)=\{C(e): e \in E(H)\}$.

设 $(G,C)$ 为一个边染色图. 对于顶点集合 $S$, $S$ 的色邻域是集合 $T \subseteq N(S)$, 使得存在 $|T|$ 条边连接 $S$ 中的点和 $T$ 中不同的点, 并且这些边的颜色两两不同. $S$ 的一个最大色邻域 $N^c(S)$ 是 $S$ 的顶点个数最多的一个色邻域. 特别地, 若 $S=\{v\}$, 则令 $d^c(v)=|N^c(v)|$, 并称之为 $v$ 的色度. 给定集合 $S$ 和 $S$ 的一个色邻域 $T$, 令 $C(S,T)$ 表示连接 $S$ 中的顶点和 $T$ 中不同的顶点的边所染的 $|T|$ 种不同的颜色. 我们知道这样的颜色集合 $C(S,T)$ 不唯一. 在本章中, 若不引起混淆, $C(S,T)$ 一旦选择, 即为固定的颜色集.

边染色图中的一个匹配, 若其中的任意两条边的颜色都不相同, 则称之为彩色匹配. 在一般的未染色图中, 最大匹配问题是多项式可解的 ([61]), 而在边染色图中, 即使是边染色二部图中, 最大彩色匹配问题也是 NP- 完全的 ([45]). 因此, 对彩色匹配的研究大多集中在某些特殊边染色图中, 如边染色完全图和边染色完全二部图.

**定理 2.1.1** (Shor [77]) 任意一个 $n \times n$ 的拉丁方, 都存在一个至少有 $n-5.53(\log n)^2$ 个元素的部分横截. 也就是说, 任意一个正常边染色的完全二部图 $K_{n,n}$, 若所用颜色为 $n$ 种, 则它含有一个有至少 $n-5.53(\log n)^2$ 条边的彩色匹配.

Kancko 和 Suzuki 研究了边染色完全图中的彩色匹配问题, 并得到如下结果.

**定理 2.1.2** (Kaneko 和 Suzuki [60]) 任意边正常染色的完全图 $K_{2n}$, $n \geq 3$, 都有一个彩色的完美匹配.

## 2.2 主要结果

Erdős 和 Pósa [30] 研究了极值图论中的一个基本问题，得到了如下定理.

**定理 2.2.1** (Erdős 和 Pósa [30]) 任意顶点个数至少为 $2k$ 最小度至少为 $k$ 的图，都有一个 $k$ 条边的匹配.

我们研究了边染色图中的彩色匹配，并得到了如下定理.

**定理 2.2.2** 设 $G$ 为边染色二部图，若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq k \geq 3$, 则 $G$ 中存在一个有 $\lceil \frac{2k}{3} \rceil$ 条边的彩色匹配.

我们认为定理 2.2.2 中的界能被进一步改进，并提出如下猜想.

**猜想 2.2.3** 设 $G$ 为边染色二部图，满足对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq k$. 若 $k$ 为奇数，则 $G$ 中存在一个有 $k$ 条边的彩色匹配；若 $k$ 为偶数，则 $G$ 中存在一个有 $k-1$ 条边的彩色匹配.

上述猜想的一个特殊情况，是 Ryser 和 Stein 提出的如下猜想.

**猜想 2.2.4** (Ryser[73], Stein[78]) 设 $K_{n,n}$ 是一个具有正常边染色的完全二部图. 若 $n$ 为奇数，则 $K_{n,n}$ 中存在一个彩色的 1- 因子 (完美匹配); 若 $n$ 为偶数，则 $K_{n,n}$ 中存在一个有 $n-1$ 条边的彩色匹配.

我们也讨论了一般的边染色图中的彩色匹配，并得到如下结论.

**定理 2.2.5** 设 $G$ 为边染色图，若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq k \geq 4$, 则 $G$ 中存在一个有 $\lceil \frac{5k-3}{12} \rceil$ 条边的彩色匹配.

同样地，我们认为定理 2.2.5 中的界不是最好的，并提出如下猜想.

**猜想 2.2.6** 设 $G$ 为边染色图，若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq k \geq 4$, 则 $G$ 中存在一个有 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ 条边的彩色匹配.

对于 $k \geq 4$, 具有正常边染色的完全图 $K_{k+1}$, 满足对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) = k$, 而且 $K_{k+1}$ 的最大彩色匹配的边数不超过 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$. 因此若猜想 2.2.6 成立，则它是最好可能的.

图的匹配理论中，有如下著名的定理.

**定理 2.2.7** (Hall [51]) 设 $G$ 是一个二部图，顶点划分为 $(X,Y)$. 则 $G$ 中存在一个匹配包含 $X$ 中的所有点，当且仅当对任意 $S \subseteq X$, 都有 $|N(S)| \geq |S|$ 成立.

相应地，我们研究了边染色二部图中，满足色邻域条件下的彩色匹配问题，得到了如下结论.

**定理 2.2.8** 设 $G$ 是边染色二部图，顶点划分为 $(X,Y)$, 且 $|X| = |Y| = n$. 若对任意集合 $S \subseteq X$ 或者 $S \subseteq Y$, 都有 $|N^c(S)| \geq |S|$ 成立，则 $G$ 中存在一个有 $\lceil \frac{3n}{8} \rceil$ 条边的彩色匹配.

Aharoni [1] 证明了著名的 Ryser 猜想对 3- 部 3- 一致超图成立 (见 2.4 节). 利用这个结果，我们改进了定理 2.2.8, 并得到如下定理.

**定理 2.2.9** 设 $G$ 是边染色二部图，顶点划分为 $(X,Y)$. 若对任意集合 $S \subseteq X$, 都有 $|N^c(S)| \geq |S|$ 成立，则 $G$ 存在一个有 $\lceil \frac{|X|}{2} \rceil$ 条边的彩色匹配.

下面的例子证明了定理 2.2.9 中的界是最好可能的. 令 $G = (X,Y)$ 是一个二部图，其中 $X = \{x_1, x_1, \cdots, x_{2s}\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_{2s}\}$, $E(G) = \{x_i y_i | i = 1, 2, \cdots, 2s\} \cup \{x_{2i-1} y_{2i} | i = 1, 2, \cdots, s\} \cup \{x_{2i} y_{2i-1} | i = 1, 2, \cdots, s\}$. 给出 $G$ 的一个边染色 $C$: 对于 $i = 1, 2, \cdots, s$, 令 $C(x_{2i-1} y_{2i-1}) = C(x_{2i} y_{2i}) = 2i-1$, $C(x_{2i-1} y_{2i}) = C(x_{2i} y_{2i-1}) = 2i$. 显然 $(G,C)$ 满足定理 2.2.9 的条件，而且 $(G,C)$ 的最大彩色匹配的边数为 $s = \lceil \frac{2s}{2} \rceil$.

## 2.3 定理 2.2.2 和 2.2.5 的证明

首先我们给出几个概念. 设 $M$ 为图 $G$ 的一个彩色匹配，记 $V_M = V(M)$. 对于顶点 $v \in V(G - V_M)$，令 $b_M(v) = \{c : c \in C(M)$ 并且存在关联 $v$ 的边 $e \in E(G - V_M)$ 使得 $C(e) = c\}$. 对于集合 $V_1 \subseteq V(G - V_M)$，令 $b_M(V_1) = \{b_M(v) : v \in V_1\}$. 为了简便，记 $b_M = b_M(V(G - V_M))$.

<u>定理 2.2.2 的证明.</u>

反证法. 若结论不成立，我们选择一个彩色匹配 $M$ 使得:
$(R_1)$ $|M| = t$ 最大;
$(R_2)$ 满足 $(R_1)$ 的情况下，$|b_M|$ 最大.

显然 $t \le \lceil \frac{2k}{3} \rceil - 1$. 令 $C(M) = \{c_1, c_2, \cdots, c_t\}$. 为了简便，记 $S_x = X - X_M$, $S_y = Y - Y_M$. 设 $v_x \in S_x$, $v_y \in S_y$. 令 $N^c(v_x)$, $N^c(v_y)$ 分别为 $v_x$, $v_y$ 的最大色邻域. 记 $N^c(v_x) = Y_P \cup Y_Q$ $(Y_P \cap Y_Q = \phi)$, 其中 $C(v_x, Y_P) \cap C(M) = \phi$, $C(v_x, Y_Q) \subseteq C(M)$. 同样地，记 $N^c(v_y) = X_P \cup X_Q$ $(X_P \cap X_Q = \phi)$, 其中 $C(v_y, X_P) \cap C(M) = \phi$, $C(v_y, X_Q) \subseteq C(M)$. 显然 $|Y_Q| \le t$, $|X_Q| \le t$.

**断言 1.** $Y_P \subseteq Y_M$, $X_P \subseteq X_M$.

**证明.** 否则，存在一条边 $e \in E(S_x, S_y)$ 且 $C(e) \notin C(M)$, 则 $M \cup \{e\}$ 是有 $t + 1$ 条边的彩色匹配，得到矛盾. ■

对于彩色匹配 $M$, $G$ 的一条交错 3- 路 $AP_M$ 是路 $x'yxy'$ 使得 $xy \in E(M)$, $x' \in S_x$, $y' \in S_y$ 并且 $C(xy') = C(x'y) \notin C(M)$. 给定两条交错 3- 路 $AP_M^1 = x_1'y_1x_1y_1'$ 和 $AP_M^2 = x_2'y_2x_2y_2'$, 若 $C(x_1'y_1) \ne C(x_2'y_2)$ 且 $x_1y_1 \ne x_2y_2$, 则我们称 $AP_M^1$ 不同于 $AP_M^2$.

**断言 2.** $G$ 中存在一条 $AP_M$.

**证明.** 因为 $|N^c(v_x)| = |Y_P| + |Y_Q| \ge k$, 所以 $|Y_P| \ge k - |Y_Q| \ge k - t$. 同样地，有 $|X_P| \ge k - |X_Q| \ge k - t$ 成立. 因此 $|X_P| + |Y_P| \ge 2(k - t) = 2k - 2t > t = |X_M| =$

$|Y_M|$. 故存在一条边 $xy \in E(M)$ 使得 $x$ 和 $v_y$ 相邻，$C(xv_y) \notin C(M)$ 并且 $y$ 和 $v_x$ 相邻，$C(v_xy) \notin C(M)$. 若 $C(xv_y) \neq C(v_xy)$, 令 $M' = M \cup \{xv_y, v_xy\} - \{xy\}$, 则 $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'| = t+1$, 得到矛盾. 所以我们有 $C(xv_y) = C(v_xy)$, 故 $v_xyxv_y$ 是一条交错 3- 路 $AP_M$. ■

假设 $G$ 中顶点不相交的两两不同的 $AP_M$ 最多有 $l$ 个，显然 $1 \leq l \leq t$. 假设 $AP_M^i = y_i'x_iy_ix_i'$ 且 $C(x_iy_i') = C(x_i'y_i) = c_i' \notin C(M)$, 其中 $x_iy_i \in E(M)$, $x_i' \in S_x, y_i' \in S_y$.

令

$$
\begin{aligned}
&X_L = \{x_1', x_2', \cdots, x_l'\}, Y_L = \{y_1', y_2', \cdots, y_l'\},\\
&X_{M_l} = \{x_1, x_2, \cdots, x_l\} \subseteq X_M,\\
&Y_{M_l} = \{y_1, y_2, \cdots, y_l\} \subseteq Y_M,
\end{aligned}
$$

其中 $\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ly_l\} = E(M_l) \subseteq E(M)$. 我们记 $C_l = C(M_l) = \{c_1, c_2, \cdots, c_l\}$, $C_L = \{c_1', c_2', \cdots, c_l'\}$. 显然，$C(M) - C(M_l) = C(M - M_l)$.

为了简便，记 $S_x' = X - X_M - X_L$, $S_y' = Y - Y_M - Y_L$.

**断言** 3. $S_x', S_y' \neq \phi$.

**证明**. 若 $S_y' = \phi$, 则 $|Y| = t + l \geq k$. 因为 $t \leq \lceil \frac{2k}{3} \rceil - 1$, 所以 $l \geq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1$. 考虑顶点 $x_1', y_1'$, 我们有下面的事实.

**事实** 1. 若 $y_1'$ 同 $x_i$ 相邻，$2 \leq i \leq l$, 并且 $C(x_iy_1') \notin C(M - M_l)$, 则

(1) $C(x_iy_1') = c_i'$;

(2) $|b_M(x_i')| \geq 1$;

(3) $C_l \cap b_M(x_i') = \phi$.

**证明**. 若 $C(x_iy_1') \neq c_i'$, 则令

$$
M' = \begin{cases} M \cup \{x_iy_1', x_i'y_i\} - \{x_iy_i\} & C(x_iy_1') \notin C_l \text{ 或 } C(x_iy_1') = c_i; \\ M \cup \{x_iy_1', x_i'y_i, x_j'y_j\} - \{x_iy_i, x_jy_j\} & C(x_iy_1') = c_j, 1 \leq j \leq l,\ j \neq i. \end{cases}
$$

因此我们得到了一个有 $t+1$ 条边的彩色匹配，得到矛盾. 故 $C(x_iy_1') = c_i'$.

若存在边 $e \in E(G-V_M)$ 使得 $C(e)=c_i$, 则 $e=x_i'y_i'$. 否则，不妨假设 $e$ 不关联于顶点 $x_i'$, 则 $M'=M\cup\{x_i'y_i,e\}-\{x_iy_i\}$ 是一个彩色匹配且 $|M'|>t$, 得到矛盾. 若 $|b_M(x_i')|=0$, 令 $M'=M\cup\{x_i'y_i\}-\{x_iy_i\}$, 则 $M'$ 是一个彩色匹配满足 $|M'|=t$, 并且 $|b_{M'}|\geq|b_M|+|b_{M'}(x_i)|\geq|b_M|+1$, 与 $M$ 的选法矛盾. 因此 $|b_M(x_i')|\geq 1$.

若 $C_l\cap b_M(x_i')\neq\phi$, 我们假设 $c_j\in b_M(x_i')$, $1\leq j\leq l$. 则存在边 $x_i'z\in E(G-V_M)$ 使得 $C(x_i'z)=c_j$. 令

$$M'=\begin{cases} M\cup\{x_i'z,x_iy_1'\}-\{x_iy_i\} & j=i,z\neq y_1';\\ M\cup\{x_i'z,x_iy_i'\}-\{x_iy_i\} & j=i,z=y_1';\\ M\cup\{x_i'z,x_j'y_j\}-\{x_jy_j\} & j\neq i.\end{cases}$$

则 $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'|>t$, 得到矛盾. ■

类似地，我们也可以得到下面的事实，为了避免重复，我们省略了证明.

**事实** $1'$. 若顶点 $x_1'$ 与 $y_i$ 相邻, $2\leq i\leq l$, 且 $C(x_1'y_i)\notin C(M-M_l)$, 则
(1) $C(x_1'y_i)=c_i'$;
(2) $|b_M(y_i')|\geq 1$;
(3) $C_l\cap b_M(y_i')\neq\phi$.

设 $N^c(y_1')$ 为 $y_1'$ 的一个满足 $x_1\in N^c(y_1')$ 的最大色邻域. 令 $N^c(y_1')=X_1\cup X_2$ $(X_1\cap X_2=\phi)$, 其中 $C(y_1',X_1)\cap(C(M-M_l)\cup\{c_1\})=\phi$, $C(y_1',X_2)\subseteq C(M-M_l)\cup\{c_1\}$. 设 $X_1^1=X_1\cap X_{M_l}$, $|X_1^1|=t_1$, 记 $X_1^2=X_1\backslash X_1^1$.

类似地，设 $N^c(x_1')$ 为 $x_1'$ 的满足 $y_1\in N^c(x_1')$ 的一个最大色邻域. 令 $N^c(x_1')=Y_1\cup Y_2$ $(Y_1\cap Y_2=\phi)$, 其中 $C(x_1',Y_1)\cap(C(M-M_l)\cup\{c_1\})=\phi$, $C(x_1',Y_2)\subseteq C(M-M_l)\cup\{c_1\}$. 设 $Y_1^1=Y_1\cap Y_{M_l}$, $|Y_1^1|=s_1$, 并记 $Y_1^2=Y_1\backslash Y_1^1$.

不失一般性，我们假设 $X_1^1=\{x_{k_1}(x_{k_1}=x_1),x_{k_2},\cdots,x_{k_{t_1}}\}$. 记 $X_1^{1'}=\{x_{k_2}',\cdots x_{k_{t_1}}'\}$. 同样地，假设 $Y_1^1=\{y_{j_1}(y_{j_1}=y_1),y_{j_2}\cdots,y_{j_{s_1}}\}$, 并记 $Y_1^{1'}=\{y_{j_2}',\cdots y_{j_{s_1}}'\}$. 首先，我们假设 $X_1^{1'},Y_1^{1'}\neq\phi$.

进一步，我们假设 $b_M(X_1^{1'})=\{c_{l+1},c_{l+2},\cdots,c_{l+t_2}\}$, 并记 $Y_{M_t}=\{y_{l+1},y_{l+2},\cdots,y_{l+t_2}\}$. 同样地，假设 $b_M(Y_1^{1'})=\{c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_{s_2}}\}$, 并记 $X_{M_s}=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{s_2}}\}$.

**事实** 2. $|b_M(X_1^{1'})| \geq t_1 - 1$, $|b_M(Y_1^{1'})| \geq s_1 - 1$.

**证明.** 若 $|b_M(X_1^{1'})| < t_1 - 1$, 则令 $M' = M \cup \{x'_{k_2}y_{k_2}, \cdots, x'_{k_{t_1}}y_{k_{t_1}}\} - \{x_{k_2}y_{k_2}, \cdots, x_{k_{t_1}}y_{k_{t_1}}\}$. 显然 $M'$ 是一个彩色匹配, 满足 $|M'| = t$ 且 $|b_{M'}| \geq |b_M| + t_1 - 1 - |b_M(X_1^{1'})| > |b_M|$, 得到矛盾. 同样地，我们有 $|b_M(Y_1^{1'})| \geq s_1 - 1$. ■

**事实** 3.

(3.1) 若存在顶点 $v \in Y_{M_t}$ 同顶点 $x'_1$ 相邻，则 $C(x'_1v) \in C(M - M_l) \cup \{c_1\}$;

(3.2) 若存在顶点 $v \in X_{M_s}$ 同 $y'_1$ 相邻，则 $C(y'_1v) \in C(M - M_l) \cup \{c_1\}$.

**证明.** 根据对称性，我们只证明 (3.1). 反证法. 若结论不成立，不失一般性，我们假设 $x'_1$ 同 $y_{l+1}$ 相邻且 $C(x'_1y_{l+1}) \notin C(M - M_l) \cup \{c_1\}$. 因为 $c_{l+1} \in b_M(X_1^{1'})$, 我们假设 $c_{l+1} \in b_M(x'_{k_2})$. 根据 $b_M(x'_{k_2})$ 的定义，存在边 $x'_{k_2}z \in E(G - V_M)$ 使得 $C(x'_{k_2}z) = c_{l+1}$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{x'_1y_{l+1}, x'_{k_2}z\} - \{x_{l+1}y_{l+1}\} & C(x'_1y_{l+1}) \notin C_l; \\ M \cup \{x'_1y_{l+1}, x_{k_2}y'_{k_2}, x'_{k_2}z\} - \{x_{l+1}y_{l+1}, x_{k_2}y_{k_2}\} & C(x'_1y_{l+1}) = c_{k_2}, z \neq y'_{k_2}; \\ M \cup \{x'_1y_{l+1}, x_{k_2}y'_1, x'_{k_2}z\} - \{x_{l+1}y_{l+1}, x_{k_2}y_{k_2}\} & C(x'_1y_{l+1}) = c_{k_2}, z = y'_{k_2}; \\ M \cup \{x'_1y_{l+1}, x'_jy_j, x'_{k_2}z\} - \{x_{l+1}y_{l+1}, x_jy_j\} & C(x'_1y_{l+1}) = c_j, 2 \leq j \leq l, j \neq k_2. \end{cases}$$

则 $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'| > t$, 得到矛盾. ■

**事实** 4. $X_1^2 \subseteq X_M - X_{M_l} - X_{M_s}$, $Y_1^2 \subseteq Y_M - Y_{M_l} - Y_{M_t}$.

**证明.** 否则，若 $X_1^2 \subseteq X_M - X_{M_l} - X_{M_s}$ 不成立，则存在顶点 $z \in X_1^2$ 并且 $z \notin X_M - X_{M_l} - X_{M_s}$. 因为 $X_1^2 = X_1 \backslash X_1^1$, 所以 $z \notin X_{M_l}$, 且 $C(y'_1z) \notin C(M - M_l) \cup \{c_1\}$. 根据事实 3, 我们有 $z \notin X_{M_s}$. 故 $z \in X - X_M$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{y'_1z\} & C(y'_1z) \notin C_l; \\ M \cup \{y'_1z, x_jy'_j\} - \{x_jy_j\} & C(y'_1z) = c_j, 2 \leq j \leq l. \end{cases}$$

则 $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'| > t$, 得到矛盾. 因此我们有 $X_1^2 \subseteq X_M - X_{M_l} - X_{M_s}$. 同样地，我们有 $Y_1^2 \subseteq Y_M - Y_{M_l} - Y_{M_t}$ 成立. ■

因此，我们有 $|X_1^2\cap(X_M-X_{M_l}-X_{M_s})|\geq k-|X_2|-|X_1^1|\geq k-t+l-t_1-1$ 成立. 类似地，$|Y_1^2\cap(Y_M-Y_{M_l}-Y_{M_t})|\geq k-t+l-s_1-1$. 又因为 $t\leq\lceil\frac{2k}{3}\rceil-1$, $l\geq\lfloor\frac{k}{3}\rfloor+1$, 故

$$
\begin{aligned}
&|X_1^2\cap(X_M-X_{M_l}-X_{M_s})|+|Y_1^2\cap(Y_M-Y_{M_l}-Y_{M_t})|-[2(t-l)-t_2-s_2]\\
&\geq 2k-2t+2l-t_1-s_1-2-2t+2l+t_1+s_1-2\\
&\geq 2k+4(\lfloor\frac{k}{3}\rfloor-\lceil\frac{2k}{3}\rceil+2)-4\\
&>0.
\end{aligned}
$$

因此 $|X_1^2\cap(X_M-X_{M_l}-X_{M_s})|+|Y_1^2\cap(Y_M-Y_{M_l}-Y_{M_t})|>|X_M-X_{M_l}-X_{M_s}|+|Y_M-Y_{M_l}-Y_{M_t}|$, 得到矛盾. 若 $X_1^{1'}=\phi$ 或 $Y_1^{1'}=\phi$, 容易验证上述不等式同样成立，我们也得到矛盾. 故 $S_y'\neq\phi$. 同理，$S_x'\neq\phi$. 我们完成了断言 3 的证明. ■

取 $v_x'\in S_x'$, $v_y'\in S_y'$. 设 $N^c(v_x')$, $N^c(v_y')$ 分别是 $v_x'$, $v_y'$ 的最大色邻域. 记 $N^c(v_x')=Y_P'\cup Y_Q'$ $(Y_P'\cap Y_Q'=\phi)$, 其中 $C(v_x',Y_P')\cap C(M-M_l)=\phi$, $C(v_x',Y_Q')\subseteq C(M-M_l)$. 设 $Y_P^{1'}=Y_P'\cap Y_{M_l}$, $|Y_P^{1'}|=q_1$, 并记 $Y_P^{2'}=Y_P'\backslash Y_P^{1'}$.

类似地，记 $N^c(v_y')=X_P'\cup X_Q'$ $(X_P'\cap X_Q'=\phi)$, 其中 $C(v_y',X_P')\cap C(M-M_l)=\phi$, $C(v_y',X_Q')\subseteq C(M-M_l)$. 设 $X_P^{1'}=X_P'\cap X_{M_l}$, $|X_P^{1'}|=p_1$ 并记 $X_P^{2'}=X_P'\backslash X_P^{1'}$. 显然 $|Y_Q'|\leq t-l$, $|X_Q'|\leq t-l$.

**断言** 4. $X_P^{2'}\subseteq X_M-X_{M_l}$, $Y_P^{2'}\subseteq Y_M-Y_{M_l}$.

**证明**. 否则，若 $X_P^{2'}\subseteq X_M-X_{M_l}$ 不成立，则存在顶点 $z\in X_P^{2'}$ 且 $z\notin X_M-X_{M_l}$. 因为 $X_P^{2'}=X_P'\backslash X_p^{1'}$, 所以 $z\notin X_{M_l}$, 并且 $C(v_yz)\notin C(M-M_l)$. 令

$$
M'=\begin{cases} M\cup\{v_yz\} & C(v_yz)\notin C_l;\\ M\cup\{v_yz,x_jy_j'\}-\{x_jy_j\} & C(v_yz)=c_j,1\leq j\leq l.\end{cases}
$$

则 $M'$ 是一个彩色匹配，并且 $|M'|>t$, 得到矛盾. 故 $X_P^{2'}\subseteq X_M-X_{M_l}$. 类似地，我们有 $Y_P^{2'}\subseteq Y_M-Y_{M_l}$ 成立. ■

接下来，我们完成定理 2.2.2 的证明. 因为 $|N^c(v_x')|=|Y_P'|+|Y_Q'|\geq k$, 则 $|Y_P^{2'}|\geq k-|Y_Q'|-|Y_P^{1'}|\geq k-t+l-q_1$. 类似地，我们能得到 $X_P^{2'}\geq k-t+l-p_1$.

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&|X_P^{2'}|+|Y_P^{2'}|-|X_M-X_{M_l}| \\
&\geq 2k-2t+2l-p_1-p_2-(t-l) \\
&\geq 2l+1-p_1.
\end{aligned}
$$

故存在边 $x_0y_0\in E(M-M_l)$ 使得 $x_0\in Y_P^{2'}, y_0\in X_P^{2'}$, 并且 $C(x_0v_y^{'})\notin C_l\cup C_L$. 我们有 $C(v_x^{'}y_0)\notin C(M-M_l)$.

若 $C(v_x^{'}y_0)\in C_l$, 设 $C(v_x^{'}y_0)=c_i$, $1\leq i\leq l$. 令 $M^{'}=M\cup\{x_0v_y^{'}, v_x^{'}y_0, x_iy_i^{'}\}-\{x_iy_i, x_0y_0\}$, 则 $M^{'}$ 是一个彩色匹配且 $|M^{'}|>t$, 得到矛盾.

若 $C(v_x^{'}y_0)\notin C_l$ 并且 $C(v_x^{'}y_0)\neq C(x_0v_y^{'})$, 则 $M^{'}=M\cup\{x_0v_y^{'}, v_x^{'}y_0\}-\{x_0y_0\}$ 是一个彩色匹配且 $|M^{'}|>t$, 得到矛盾.

若 $C(v_x^{'}y_0)=C(x_0v_y^{'})$, 则路 $v_x^{'}y_0x_0v_y^{'}$ 满足 $C(v_x^{'}y_0)=C(x_0v_y^{'})\notin C(M)\cup C_L$, 其中 $x_0y_0\in E(M-M_l)$, $v_y^{'}\in S_y^{'}$, $v_x^{'}\in S_x^{'}$, 所以 $v_x^{'}y_0x_0v_y^{'}$ 是图 $G$ 的一条 $AP_M$. 因此， $G$ 中顶点不相交的两两不同的 $AP_M$ 的个数至少为 $l+1$, 得到矛盾.

定理 2.2.2 证毕. ■

定理 2.2.5 的证明.

我们给出定理 2.1.2 的一个推论，它将在我们的证明中用到.

**推论 2.3.1** 具有正常边染色的完全图 $K_m$, $m\geq 5$, 含有一个有 $\lceil\frac{m-1}{2}\rceil$ 条边的彩色匹配.

我们给出定理 2.2.5 的证明. 反证法. 否则，我们选择一个彩色的匹配满足：
$(R_1)$ $|M|=t$ 最大；
$(R_2)$ 在满足 $(R_1)$ 条件下， $|b_M|$ 最大.

设 $C(M)=\{c_1, c_2, \cdots, c_t\}$. 因为对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)\geq k\geq 4$, 并且 $t\leq\lceil\frac{5k-3}{12}\rceil-1$, 故 $|V(G-V_M)|\geq 2$. 取顶点 $v_x, v_y\in V(G-V_M)$. 设 $N^c(v_x), N^c(v_y)$ 分别是 $v_x, v_y$ 的最大色邻域. 记 $N^c(v_x)=S_1\cup S_2$ $(S_1\cap S_2=\phi)$, 其中 $C(v_x, S_1)\cap C(M)=\phi$, $C(v_x, S_2)\subseteq C(M)$. 令 $N^c(v_y)=S_3\cup S_4$ $(S_3\cap S_4=\phi)$, 其中 $C(v_y, S_3)\cap C(M)=\phi$, $C(v_y, S_4)\subseteq C(M)$. 显然， $|S_2|, |S_4|\leq t$.

**断言 1.** $S_1, S_3 \subseteq V_M$.

**证明**. 否则，存在顶点 $v \in V(G-V_M)$，使得 $C(v_xv)$(或 $C(v_yv)$) $\notin C(M)$，则 $M \cup \{v_xv\}$(或 $\{v_yv\}$) 是一个有 $t+1$ 条边的彩色匹配，得到矛盾. ■

图 $G$ 的一条长度为 3 的路 $x'yxy'$，若 $C(xy')=C(x'y) \notin C(M)$，$xy \in E(M)$ 并且 $x', y' \in V(G-V_M)$，则称之为 $G$ 的一条交错 3- 路，记为 $AP_M$. 给定 $G$ 的两条交错 3- 路 $AP_M^1 = x_1'y_1x_1y_1'$ 和 $AP_M^2 = x_2'y_2x_2y_2'$，若 $C(x_1'y_1) \neq C(x_2'y_2)$ 且 $x_1y_1 \neq x_2y_2$，则称 $AP_M^1$ 不同于 $AP_M^2$.

**断言 2.** $G$ 中存在一条 $AP_M$.

**证明**. 因为 $|N^c(v_x)| = |S_1| + |S_2| \geq k$，所以 $|S_1| \geq k - |S_2| \geq k-t$. 同样 $|S_3| \geq k - |S_4| \geq k-t$. 则 $|S_1| + |S_3| \geq 2(k-t) = 2k-2t > 2t = |V_M|$. 因此，存在 $xy \in M$ 使得 $x$ 与 $v_y$ 相邻， $y$ 同 $v_x$ 相邻，并且 $C(xv_y), C(v_xy) \notin C(M)$. 若 $C(xv_y) \neq C(v_xy)$，令 $M' = M \cup \{xv_y, v_xy\} - \{xy\}$，则 $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'| = t+1$，得到矛盾. 因此 $C(xv_y) = C(v_xy)$，则 $v_xyxv_y$ 是 $G$ 中的一条 $AP_M$. ■

假设 $G$ 中顶点不相交的 $AP_M$ 至多有 $l$ 条. 显然 $1 \leq l \leq t$. 对于 $1 \leq i \leq l$，假设 $AP_M^i = x_i'y_ix_iy_i'$，其中 $x_iy_i \in E(M)$，$x_i', y_i' \in V(G-V_M)$，并且 $C(x_iy_i') = C(x_i'y_i) = c_i' \notin C(M)$.

记 $V_L = \{x_1', x_2', \cdots, x_l'\} \cup \{y_1', y_2', \cdots, y_l'\}$，$V_{M_l} = \{x_1, x_2, \cdots, x_l\} \cup \{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$，其中 $\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ly_l\} = E(M_l) \subseteq E(M)$. 令 $C_l = C(M_l) = \{c_1, c_2, \cdots, c_l\}$，$C_L = \{c_1', c_2', \cdots, c_l'\}$. 显然 $C(M) - C(M_l) = C(M - M_l)$. 记 $S_0 = V - V_M - V_L$，我们有下面的断言.

**断言 3.** $|S_0| \geq 2$.

**证明**. 否则，我们有 $|S_0| \leq 1$. 若 $|S_0| = 1$，则我们设 $S_0 = \{u\}$. 因为对任意顶点 $v$，都有 $d^c(v) \geq k \geq 4$，故 $2(t+l)+1 \geq k+1$. 若 $2(t+l)+1 = k+1$，则 $G$ 是一个边染色完全图， $|V(G)| = k+1$，并且对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) = k \geq 4$. 也就是说， $G$ 是一个具有正常边染色的完全图，且顶点个数至少为 5，根据推论 2.3.1，$G$ 有一个

彩色匹配，边数至少为 $\lceil\frac{k}{2}\rceil \geq \lceil\frac{5k-3}{12}\rceil > t$, 得到矛盾. 所以我们有 $2(t+l) \geq k+1$, 即 $l \geq \frac{k+1}{2} - t$. 考虑顶点 $x_1', y_1'$, 我们有如下事实.

**事实 1.** 若存在顶点 $v \in V(M_l)\backslash\{x_1\}$ 与 $y_1'$ 相邻，并且 $C(y_1'v) \notin C(M-M_l)$, 不失一般性，我们假设 $v = x_i$ $(2 \leq i \leq l)$, 则
(1) $C(x_iy_1') = c_i'$;
(2) $|b_M(y_i')| \geq 1$;
(3) $C_l \cap b_M(x_i') = \phi$.

**证明.** 若 $C(x_iy_1') \neq c_i'$, 则令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{x_iy_1', x_i'y_i\} - \{x_iy_i\} & C(x_iy_1') \notin C_l \text{ 或 } C(x_iy_1') = c_i; \\ M \cup \{x_iy_1', x_i'y_i, x_j'y_j\} - \{x_iy_i, x_jy_j\} & C(x_iy_1') = c_j, 1 \leq j \leq l,\ j \neq i. \end{cases}$$

则我们得到了有 $t+1$ 条边的彩色匹配 $M'$, 得到矛盾. 故 $C(x_iy_1') = c_i'$.

若存在边 $e \in E(G-V_M)$ 使得 $C(e) = c_i$, 则 $e = x_i'y_i'$. 否则，不妨假设 $e$ 不关联于 $x_i'$, 则 $M' = M \cup \{x_i'y_i, e\} - \{x_iy_i\}$ 是一个彩色匹配且 $|M'| > t$, 得到矛盾. 若 $|b_M(x_i')| = 0$, 令 $M' = M \cup \{x_i'y_i\} - \{x_iy_i\}$, 则 $M'$ 是一个彩色匹配，满足 $|M'| = t$, $|b_{M'}| \geq |b_M| + |b_{M'}(x_i)| \geq |b_M| + 1$, 与 $M$ 的选法矛盾. 故 $|b_M(x_i')| \geq 1$.

若 $C_l \cap b_M(x_i') \neq \phi$, 我们假设 $c_j \in b_M(x_i')$, $1 \leq j \leq l$. 则存在边 $x_i'z \in E(G-V_M)$ 使得 $C(x_i'z) = c_j$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{x_i'z, x_iy_i'\} - \{x_iy_i\} & j = i, z = y_1'; \\ M \cup \{x_i'z, x_iy_1'\} - \{x_iy_i\} & j = i, z \neq y_1'; \\ M \cup \{x_i'z, x_j'y_j\} - \{x_jy_j\} & j \neq i, z = y_j'; \\ M \cup \{x_i'z, x_jy_j'\} - \{x_jy_j\} & j \neq i, z \neq y_j'. \end{cases}$$

显然 $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'| > t$, 得到矛盾. ∎

类似地，我们能得到如下事实，为了避免重复，我们省略了证明.

**事实 1$'$.** 若存在顶点 $v \in V(M_l)\backslash\{y_1\}$ 与 $x_1'$ 相邻，并且 $C(x_1'v) \notin C(M-M_l)$, 不失一般性，假设 $v = y_i$ $(2 \leq i \leq l)$, 则
(1) $C(x_1'y_i) = c_i'$;

(2) $|b_M(y_i')| \geq 1$;
(3) $C_l \cap b_M(y_i') = \phi$.

设 $N^c(y_1')$ 为 $y_1'$ 的一个满足 $x_1 \in N^c(y_1')$ 的最大色邻域. 记 $N^c(y_1') = P_1 \cup P_2$ $(P_1 \cap P_2 = \phi)$, 其中 $C(y_1', P_1) \cap (C(M - M_l) \cup \{c_1\}) = \phi$, $C(y_1', P_2) \subseteq C(M - M_l) \cup \{c_1\}$. 设 $P_1^1 = P_1 \cap (V(M_l) \backslash \{y_1\})$, $|P_1^1| = p_1$, 并记 $P_1^2 = P_1 \backslash P_1^1$. 显然, $|P_2| \leq t - l + 1$.

设 $N^c(x_1')$ 为 $x_1'$ 的一个满足 $y_1 \in N^c(x_1')$ 的最大色邻域. 记 $N^c(x_1') = P_3 \cup P_4$ $(P_3 \cap P_4 = \phi)$, 其中 $C(x_1', P_3) \cap (C(M - M_l) \cup \{c_1\}) = \phi$, $C(x_1', P_4) \subseteq C(M - M_l) \cup \{c_1\}$. 设 $P_3^1 = P_3 \cap (V(M_l) \backslash \{x_1\})$, $|P_3^1| = p_3$, 并记 $P_3^2 = P_3 \backslash P_3^1$. 显然 $|P_4| \leq t - l + 1$.

根据 $x_i$ 和 $y_i$ $(1 \leq i \leq l)$ 的对称性,我们不妨假设 $P_1^1 = \{x_{k_1}(x_{k_1} = x_1), x_{k_2} \cdots, x_{k_{p_1}}\}$, 记 $P_1^{1'} = \{x_{k_2}', \cdots x_{k_{p_1}}'\}$. 同样地, 假设 $P_3^1 = \{y_{j_1}(y_{j_1} = y_1), y_{j_2}, \cdots, y_{j_{p_3}}\}$, 记 $P_3^{1'} = \{y_{j_2}', \cdots y_{j_{p_3}}'\}$. 首先, 我们假设 $P_1^{1'}, P_3^{1'} \neq \phi$.

**事实 2.** $|b_M(P_1^{1'})| \geq p_1 - 1$, $|b_M(P_3^{1'})| \geq p_3 - 1$.

**证明.** 若 $|b_M(P_1^{1'})| < p_1 - 1$, 则 $M' = M \cup \{x_{k_2}' y_{k_2}, \cdots, x_{k_{p_1}}' y_{k_{p_1}}\} - \{x_{k_2} y_{k_2}, \cdots, x_{k_{p_1}} y_{k_{p_1}}\}$. 是一个彩色匹配, 满足 $|M'| = t$ 并且 $|b_{M'}| \geq |b_M| + p_1 - 1 - |b_M(P_1^{1'})| > |b_M|$, 与 $M$ 的选法矛盾. 故 $|b_M(P_1^{1'})| \geq p_1 - 1$. 同样地, 我们能得到 $|b_M(P_3^{1'})| \geq p_3 - 1$. ■

不失一般性,我们假设 $b_M(P_1^{1'}) = \{c_{l+1}, c_{l+2}, \cdots, c_{l+p_2}\}$. 记 $V(M_{p_2}) = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \cdots, x_{l+p_2}\} \cup \{y_{l+1}, y_{l+2}, \cdots, y_{l+p_2}\}$. 同样地, 假设 $b_M(P_3^{1'}) = \{c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_{p_4}}\}$. 记 $V(M_{p_4}) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{p_4}}\} \cup \{y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_{p_4}}\}$.

**事实 3.** 若 $y_1', x_1'$ 都同顶点 $v \in V(M_{p_4}) \cup V(M_{p_2})$ 相邻, 则 $C(y_1'v) \in C(M - M_l) \cup \{c_1\}$ 或者 $C(x_1'v) \in C(M - M_l) \cup \{c_1\}$.

**证明.** 反证法. 否则, $y_1', x_1'$ 都同顶点 $v \in V(M_{p_4}) \cup V(M_{p_2})$ 相邻,并且 $C(vy_1'), C(vx_1') \notin C(M - M_l) \cup \{c_1\}$. 不失一般性, 我们假设 $v = x_{i_1} \in V(M_{p_4})$. 因为 $c_{i_1} \in b_M(P_3^{1'})$, 进一步, 我们假设 $c_{i_1} \in b_M(y_{j_2}')$. 根据 $b_M(y_{j_2}')$ 的定义, 存在边 $y_{j_2}'z \in E(G - V_M)$, 使得 $C(y_{j_2}'z) = c_{i_1}$. 我们分以下三种情况讨论.

*情形 1.* $z = x_1'$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{x_{i_1}y_1', y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}\} & C(x_{i_1}y_1') \notin C_l; \\ M \cup \{x_{i_1}y_1', y_{j_2}'z, x_{j_2}'y_{j_2}\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_{j_2}y_{j_2}\} & C(x_{i_1}y_1') = c_{j_2}; \\ M \cup \{x_{i_1}y_1', x_j'y_j, y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_jy_j\} & C(x_{i_1}y_1') = c_j, 2 \le j \le l \text{ 且 } j \neq j_2. \end{cases}$$

*情形 2.* $z = y_1'$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{x_{i_1}x_1', y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}\} & C(x_{i_1}x_1') \notin C_l; \\ M \cup \{x_{i_1}x_1', y_{j_2}'z, x_{j_2}'y_{j_2}\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_{j_2}y_{j_2}\} & C(x_{i_1}x_1') = c_{j_2}; \\ M \cup \{x_{i_1}x_1', x_j'y_j, y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_jy_j\} & C(x_{i_1}x_1') = c_j, 2 \le j \le l \text{ 且 } j \neq j_2. \end{cases}$$

*情形 3.* $z \notin \{x_1', y_1'\}$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{x_{i_1}y_1', y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}\} & C(x_{i_1}y_1') \notin C_l; \\ M \cup \{x_{i_1}y_1', y_{j_2}'z, x_1'y_{j_2}\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_{j_2}y_{j_2}\} & C(x_{i_1}y_1') = c_{j_2}; \\ M \cup \{x_{i_1}y_1', x_jy_j', y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_jy_j\} & C(x_{i_1}y_1') = c_j, 2 \le j \le l, j \neq j_2, \text{且 } z \\ M \cup \{x_{i_1}y_1', x_j'y_j, y_{j_2}'z\} - \{x_{i_1}y_{i_1}, x_jy_j\} & C(x_{i_1}y_1') = c_j, 2 \le j \le l, j \neq j_2, \text{且 } z \end{cases}$$

以上三种情况，我们都得到彩色匹配 $M'$ 使得 $|M'| > t$, 得到矛盾. ■

为了简便，我们记 $V' = V(M - M_l)$.

**事实** 4. $P_1^2 \subseteq V' \cup \{y_1\}$, $P_3^2 \subseteq V' \cup \{x_1\}$.

**证明**. 否则, 若 $P_1^2 \subseteq V' \cup \{y_1\}$ 不成立, 则存在点 $z \in P_1^2$ 且 $z \notin V(M - M_l) \cup \{y_1\}$. 因为 $P_1^2 = P_1 \backslash P_1^1$, 则 $z \notin V(M_l)$ 且 $C(y_1'z) \notin C(M - M_l) \cup \{c_1\}$. 我们分情况讨论.

*情形 1.* $z \in V(G - V_M - V_L)$. 事实上, 若 $V(G - V_M - V_L) \neq \phi$, 则 $z = u$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{y_1'z\} & C(y_1'z) \notin C_l; \\ M \cup \{y_1'z, x_j'y_j\} - \{x_jy_j\} & C(y_1'z) = c_j, 2 \le j \le l. \end{cases}$$

*情形 2.* $z \in V_L$. 假设 $z = x_i'$ $(1 \le i \le l)$, 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{y_1'z\} & C(y_1'z) \notin C_l; \\ M \cup \{y_1'z, x_jy_j'\} - \{x_jy_j\} & C(y_1'z) = c_j, 2 \le j \le l. \end{cases}$$

以上两种情况，我们都得到了彩色 $M'$, 满足 $|M'| > t$, 得到矛盾. 所以 $P_1^2 \subseteq V' \cup \{y_1\}$. 同样地，我们有 $P_3^2 \subseteq V' \cup \{x_1\}$ 成立. ■

由事实 3 和 4, 我们得到

$$\begin{aligned} |P_1^2 \cap V'| + |P_3^2 \cap V'| &\leq 2|V'| - |M_{p_2}| - |M_{p_4}| \\ &\leq 4(t-l) - p_2 - p_4. \end{aligned}$$

另一方面， $|P_1^2 \cap V'| \geq k - |P_2| - |P_1^1| - |P_1^2 \cap \{y_1\}| \geq k - (t - l + 1) - p_1 - 1$, $|P_3^2| \geq k - |P_4| - |P_3^1 \cap \{x_1\}| \geq k - t + l - p_3 - 2$. 又因为 $t \leq \lceil \frac{5k-3}{12} \rceil - 1$, $l \geq \frac{k+1}{2} - t$, 所以

$$\begin{aligned} &|P_1^2 \cap V'| + |P_3^2 \cap V'| - [4(t-l) - p_2 - p_4] \\ &\geq 2k - 2t + 2l - p_1 - p_3 - 4 - 4t + 4l + p_1 + p_3 - 2 \\ &\geq 2k - 6t - 6l - 6 \\ &\geq 5k - 12t - 3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

得到矛盾. 若 $P_1^{1'} = \phi$ 或 $P_3^{1'} = \phi$, 容易验证上述两个不等式同样成立，同样得到矛盾.

所以我们有 $|S_0| \geq 2$, 从而完成了断言 3 的证明. ■

取 $w_1, w_2 \in S_0$. 设 $N^c(w_1)$ 为 $w_1$ 的一个最大色邻域. 假设 $N^c(w_1) = T_1 \cup T_2$ $(T_1 \cap T_2 = \phi)$, 其中 $C(w_1, T_1) \cap C(M - M_l) = \phi$, $C(w_1, T_2) \subseteq C(M - M_l)$. 记 $T_1^1 = T_1 \cap V(M_l)$, $|T_1^1| = t_1$, $T_1^2 = T_1 \backslash T_1^2$. 显然， $|T_2| \leq t - l$.

同样地，假设 $N^c(w_2)$ 为 $w_2$ 的一个最大色邻域. 记 $N^c(w_2) = T_3 \cup T_4$ $(T_3 \cap T_4 = \phi)$, 其中 $C(w_2, T_3) \cap C(M - M_l) = \phi$, $C(w_2, T_4) \subseteq C(M - M_l)$. 记 $T_3^1 = T_3 \cap V(M_l)$, $|T_3^1| = t_2$, $T_3^2 = T_3 \backslash T_3^1$. 显然， $|T_4| \leq t - l$.

**断言 4.** 若存在顶点 $v \in V(M_l)$ 与 $w$ $(w \in \{w_1, w_2\})$ 相邻，并且 $C(wv) \notin C(M - M_l)$, 不失一般性，设 $v = x_i$ $(1 \leq i \leq l)$, 则 $C(wx_i) = c_i'$.

**证明.** 否则，假设 $C(wx_i) \notin C(M - M_l)$，并且 $C(wx_i) \neq c_i'$，令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{wx_i, x_i'y_i\} - \{x_iy_i\} & C(wx_i) \notin C_l \text{ 或 } C(wx_i) = c_i; \\ M \cup \{wx_i, x_i'y_i, x_j'y_j\} - \{x_iy_i, x_jy_j\} & C(wx_i) = c_j, 1 \leq j \leq l,\ j \neq i. \end{cases}$$

则 $M'$ 是一个有 $t+1$ 条边的彩色匹配，得到矛盾. ∎

**断言** 5. $T_1^2 \subseteq V(M - M_l)$, $T_3^2 \subseteq V(M - M_l)$.

**证明.** 若 $T_1^2 \subseteq V(M - M_l)$ 不成立，则存在 $w_1z$ 使得 $C(w_1z) \notin C(M - M_l)$，其中 $z \in T_1^2$, $z \notin V(M - M_l)$. 因为 $T_1^2 = T_1 \backslash T_1^1$，所以 $z \notin V(M_l)$.

*情形 1.* $z \in V(G - V_M - V_L)$. 令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{w_1z\} & C(w_1z) \notin C_l; \\ M \cup \{w_1z, x_j'y_j\} - \{x_jy_j\} & C(w_1z) = c_j, 1 \leq j \leq l. \end{cases}$$

*情形 2.* $z \in V_L$. 不失一般性，假设 $z = x_1'$，令

$$M' = \begin{cases} M \cup \{w_1z\} & C(w_1z) \notin C_l; \\ M \cup \{w_1z, x_jy_j'\} - \{x_jy_j\} & C(w_1z) = c_j, 1 \leq j \leq l. \end{cases}$$

以上两种情况，我们都得到一个彩色匹配 $M'$ 满足 $|M'| > t$，得到矛盾. ∎

因为 $|N^c(w_1)| = |T_1| + |T_2| \geq k$，所以 $|T_1^2| \geq k - |T_2| - |T_1^1| \geq k - (t-l) - t_1$. 同样地，$|T_3^2| \geq k - (t-l) - t_2$.

故

$$\begin{aligned} & |T_1^2| + |T_3^2| - |V'| \\ & \geq 2k - 2t + 2l - t_1 - t_2 - 2(t-l) \\ & \geq 2k - 4t + 4l - t_1 - t_2 \\ & \geq 2l + 1. \end{aligned}$$

因此，存在边 $x_0y_0 \in E(M - M_l)$，其中 $x_0 \in T_1^2$, $y_0 \in T_3^2$ 并且 $C(w_1x_0) \notin C_l \cup C_L$. 我们知道 $C(w_1x_0), C(w_2y_0) \notin C(M - M_l)$.

若 $C(w_2y_0) \in C_l$，设 $C(w_2y_0) = c_i$, $1 \leq i \leq l$. 则 $M' = M \cup \{w_1x_0, w_2y_0, x_iy_i'\} - \{x_iy_i, x_0y_0\}$ 是一个彩色匹配且 $|M'| > t$，得到矛盾.

若 $C(w_2y_0)\notin C_l$ 且 $C(w_2y_0)\neq C(w_1x_0)$，令 $M'=M\cup\{w_1x_0,w_2y_0\}-\{x_0y_0\}$. $M'$ 是一个彩色匹配且 $|M'|>t$, 得到矛盾.

若 $C(w_2y_0)=C(w_1x_0)$, 我们得到了一个交错 3- 路 $AP_M=w_2y_0x_0w_1$, 其中 $C(w_2y_0)=C(w_1x_0)\notin C(M)\cup C_L$, $x_0y_0\in E(M-M_l)$, $w_1,w_2\in V(G-V_M)$. 因此 $G$ 中顶点不相交的两两不同的 $AP_M$ 的数目至少为 $l+1$, 得到矛盾.

定理 2.2.5 证毕. ■

## 2.4 定理 2.2.8, 2.2.9 的证明

<u>定理 2.2.8 的证明.</u>

首先我们给出几个定义. 设 $M$ 是 $G$ 的一个彩色匹配, 记 $b_M=\{c:\ c\in C(M)$ 并且存在边 $e\in E(G-V_M)$ 满足 $C(e)=c\}$, 令 $X_M\cup Y_M$ 表示关联于 $M$ 中的边的顶点集合，其中 $X_M\subseteq X$, $Y_M\subseteq Y$.

对于彩色匹配 $M$, 图 $G$ 的一个交错 4- 圈 $AC_M$, 是一个圈 $xyx'y'x$ 使得 $C(xy)=C(x'y')$, $C(xy')=C(x'y)\notin C(M)$, 其中 $xy\in E(M), x'y'\in E(G-V_M)$.

现在我们给出定理 2.2.8 的证明. 反证法. 假设结论不成立，我们选择彩色匹配 $M$ 满足:

$(R_1)$ $|M|=t$ 最大;

$(R_2)$ 在满足 $(R_1)$ 的情况下， $|b_M|$ 最大.

根据假设， $t<\frac{3n}{8}$. 假设图 $G$ 的顶点不相交的 $AC_M$ 的最大个数为 $l_1$. 显然 $0\leq l_1\leq t$. 若 $l_1\geq 1$, 假设第 $i$ 个交错 4- 圈 $AC_M^i=x_iy_ix_i'y_i'ix_i$, $C(xy)=C(x_i'y_i')=c_i\in C(M)$, $C(x_iy_i')=C(x_i'y_i)=c_i'\notin C(M)$, 其中 $xy\in E(M)$, $x_i'\in X-X_M$, $y_i'\in Y-Y_M$.

记

$$
\begin{aligned}
&X_{L_1}=\{x_1',x_2',\cdots,x_{l_1}'\}, Y_{L_1}=\{y_1',y_2',\cdots,y_{l_1}'\},\\
&X_{M_{l_1}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_{l_1}\}\subseteq X_M,\\
&Y_{M_{l_1}}=\{y_1,y_2,\cdots,y_{l_1}\}\subseteq Y_M,
\end{aligned}
$$

其中 $\{x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_{l_1}y_{l_1}\}=E(M_{l_1})\subseteq E(M)$.

下面我们定义一个 “繁殖” 过程.

对于 $i \geq 1$, 若存在边 $x^iy^i \in E(M - M_{l_1+i-1})$ 使得 $x^i$ 同 $y^{i'}$ 相邻， $y^i$ 同 $x^{i'}$ 相邻，且 $C(x^{i'}y^{i'}) = C(x^iy^i)$, 其中 $x^{i'} \in X - X_M - X_{L_1+i-1}$, $y^{i'} \in Y - Y_M - Y_{L_1+i-1}$; 并且，若 $C(x^iy^{i'}) \in C(M)$, 则 $C(x^iy^{i'}) \in C(M_{l_1+i-1})$, 若 $C(x^{i'}y^i) \in C(M)$, 则 $C(x^{i'}y^i) \in C(M_{l_1+i-1})$; 则我们进行如下的第 $i$ 次繁殖 (第 $i$ 步).

记 $c_{l_1+i} = C(x^iy^i)$, $x_{l_1+i} = x^i$, $y_{l_1+i} = y^i$, $x'_{l_1+i} = x^{i'}$, $y'_{l_1+i} = y^{i'}$. 并且令 $X_{M_{l_1+i}} = X_{M_{l_1+i-1}} \cup \{x_{l_1+i}\}$, $Y_{M_{l_1+i}} = Y_{M_{l_1+i-1}} \cup \{y_{l_1+i}\}$, $X_{L_1+i} = X_{L_1+i-1} \cup \{x^{i'}\}$, $Y_{L_1+i} = Y_{L_1+i-1} \cup \{y^{i'}\}$, $M_{l_1+i} = M_{l_1+i-1} \cup \{x_{l_1+i}y_{l_1+i}\}$.

我们假设经过 $k$ 步后，繁殖过程停止. 令 $l = l_1+k$, 记 $X_L = X_{L_1+k}, Y_L = Y_{L_1+k}$, $X_{M_l} = X_{M_{l_1+k}}, Y_{M_l} = Y_{M_{l_1+k}}$. 并记 $C_l = \{c_1, c_2, \cdots, c_l\}$, $C_L = \{c : c \in C(AC^i_M)$ 并且 $c \notin C_l, 1 \leq i \leq l\}$. 显然 $C(M) - C(M_l) = C(M - M_l)$. 假设 $|C_L| = l'$.

**断言 1.** $l' \leq l$.

**证明.** 在第 $i$ ($i \geq 1$) 步繁殖过程中，我们有 $C(x^iy^{i'}) \in C(M)$ 或者 $C(x^{i'}y^i) \in C(M)$. 否则，若 $C(x^iy^{i'}) \neq C(x^{i'}y^i)$, 则 $M^1 = M \cup \{x^iy^{i'}, x^{i'}y^i\} - \{x^iy^i\}$ 是一个含有至少 $|M|+1$ 条边的彩色匹配，得到矛盾. 若 $C(x^iy^{i'}) = C(x^{i'}y^i)$, 则 $x^iy^ix^{i'}y^{i'}x^i$ 是一个 $AC_M$, 因此 $G$ 中的顶点不相交的 $AC_M$ 的个数至少为 $l_1+1$, 得到矛盾. 故 $l' \leq l$. ∎

记 $S_x = X - X_M - X_L$, $S_y = Y - Y_M - Y_L$.

**断言 2.**

(2.1) 对任意顶点 $v_x \in S_x$, 若存在边 $v_xv_y$ 使得 $C(v_xv_y) \notin C(M - M_l)$, 则 $v_y \in Y_M - Y_{M_l}$;

(2.2) 对任意顶点 $y \in S_y$, 若存在边 $xy$ 使得 $C(xy) \notin C(M - M_l)$, 则 $x \in X_M - X_{M_l}$.

**证明.** 根据对称性，我们只证明 (2.1). 反证法. 否则，存在边 $v_xv_y$ 使得 $C(v_xv_y) \notin C(M - M_l)$, 其中 $v_x \in S_x$, $v_y \notin Y_M - Y_{M_l}$. 我们分以下几种情况讨论，每种情况我们都得到一个边数多于 $|M|$ 的彩色匹配， 从而得到矛盾.

*情形 1.* $C(v_xv_y) \notin C(M)$. 令

$$M^1 = \begin{cases} M \cup \{v_xv_y\} & v_y \in Y - Y_M; \\ M \cup \{v_xv_y, x'_iy'_i\} - \{x_iy_i\} & v_y = y_i, 1 \leq i \leq l. \end{cases}$$

*情形 2.* $C(v_xv_y) \in C_l$ 并且 $v_y \notin Y_{M_l}$. 设 $C(v_xv_y) = c_i, 1 \le i \le l$. 若 $C(x_i'y_i) \notin C(M)$, 则 $M^1 = M \cup \{v_xv_y, x_i'y_i\} - \{x_iy_i\}$. 否则, 根据繁殖规则, 我们有 $C(x_i'y_i) = c_{j_1}$, 其中 $j_1 < i$. 若 $C(x_{j_1}'y_{j_1}) \notin C(M)$, 则令 $M^1 = M \cup \{v_xv_y, x_i'y_i, x_{j_1}y_{j_1}\} - \{x_iy_i, x_{j_1}y_{j_1}\}$. 否则, 我们有 $C(x_{j_1}'y_{j_1}) = c_{j_2}$, 其中 $j_2 < j_1$. 接着考虑 $C(x_{j_2}'y_{j_2}), \cdots$. 最后, 我们能找到 $j_k(1 \le j_k < j_{k-1} < \cdots < j_1 < i)$ 使得 $C(x_{j_k}'y_{j_k}) \notin C(M)$, 则令 $M^1 = M \cup \{v_xv_y, x_i'y_i, x_{j_1}'y_{j_1}, \cdots, x_{j_{k-1}}'y_{j_{k-1}}, x_{j_k}'y_{j_k}\} - \{x_iy_i, x_{j_1}y_{j_1}, \cdots, x_{j_k}y_{j_k}\}$.

*情形 3.* $C(v_xv_y) \in C_l$ 并且 $v_y \in Y_{M_l}$. 设 $v_y = y_j, 1 \le j \le l$. 令 $M' = M \cup \{x_j'y_j'\} - \{x_jy_j\}$, 用情形 2 中的同样的方法, 我们能得到彩色匹配 $M^1$, 所含边数大于 $|M|$. ■

若 $b_M \backslash C_l \neq \phi$, 不失一般性, 我们假设 $b_M \backslash C_l = \{c_{l+1}, c_{l+2}, \cdots, c_{l+d}\}$; 进一步, 我们假设 $C(x_{l+i}y_{l+i}) = c_{l+i}$, $1 \le i \le d$. 记 $X_{M_d} = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \cdots, x_{l+d}\}$, $Y_{M_d} = \{y_{l+1}, y_{l+2}, \cdots, y_{l+d}\}$, $M_d = \{x_{l+1}y_{l+1}, \cdots, x_{l+d}y_{l+d}\}$.

**断言 3.** 若存在边 $v_xy_i$ 使得 $C(v_xy_i) \notin C(M - M_l)$, 其中 $v_x \in S_x$, $y_i \in Y_{M_d}$, 则
(3.1) $E(G - V_M)$ 中具有颜色 $c_i$ 的边都关联于顶点 $v_x$;
(3.2) 若存在边 $x_iv_y$, 其中 $v_y \in S_y$, 则 $C(x_iv_y) \in C(M - M_l)$.

**证明.** 因为 $y_i \in Y_{M_d}$, 根据 $Y_{M_d}$ 的定义, 存在边 $e \in E(G-V_M)$ 使得 $C(e) = C(x_iy_i)$. 若 $e$ 不关联于顶点 $v_x$, 我们分如下两种情况讨论.

*情形 1.* $C(v_xy_i) \notin C(M)$. 令 $M^1 = M \cup \{e, v_xy_i\} - \{x_iy_i\}$, 则 $M^1$ 是一个彩色匹配且 $|M^1| > |M|$, 得到矛盾.

*情形 2.* $C(v_xy_i) \in C_l$. 假设 $C(v_xv_y) = c_j, 1 \le j \le l$. 用断言 2 中同样的方法, 我们找到 $j_k$ 使得 $C(x_{j_k}y_{j_k}')$ (或者 $C(x_{j_k}'y_{j_k})) \notin C(M)$, 并令 $M^1 = M \cup \{e, v_xy_i, x_j'y_j(\text{或 } x_jy_j'), x_{j_1}'y_{j_1}(\text{或 } x_{j_1}y_{j_1}'), \cdots, x_{j_k}'y_{j_k}(\text{或 } x_{j_k}y_{j_k}')\} - \{x_iy_i, x_jy_j, x_{j_1}y_{j_1}, \cdots, x_{j_k}y_{j_k}\}$ 这里若 $e$ 关联于 $x_{j_r}'$, 则我们选择 $x_{j_r}y_{j_r}'$, 其中 $0 \le r \le k$, $j_0 = j$. 所以, 我们得到彩色匹配 $M^1$ 满足 $|M^1| > |M| + 1$, 得到矛盾, 从而完成了 (3.1) 的证明.

对于 (3.2), 若结论不成立, 则 $C(x_iv_y) \notin C(M - M_l)$. 同样地, $E(G - V_M)$ 中具有颜色 $C(x_iy_i)$ 的边都关联于顶点 $v_y$. 故 $C(v_xv_y) = C(x_iy_i)$.

若 $C(x_iv_y), C(v_xy_i) \notin C(M)$ 且 $C(x_iv_y) \neq C(v_xy_i)$, 则 $M^1 = M \cup \{x_iv_y, v_xy_i\} - \{x_iy_i\}$ 是一个彩色匹配且 $|M^1| > |M|$, 得到矛盾.

若 $C(x_iv_y), C(v_xy_i) \notin C(M)$ 且 $C(x_iv_y) = C(v_xy_i)$, 则 $x_iy_iv_xv_yx_i$ 是一个 $AC_M$.

故 $G$ 中的顶点不相交的 $AC_M$ 的个数至少为 $l_1+1$, 矛盾.

因此，我们有 $C(x_iv_y)\in C_l$ 并且 $C(v_xy_i)\notin C(M)$, 或者 $C(v_xy_i)\in C_l$ 并且 $C(x_iv_y)\notin C(M)$, 或者 $C(x_iv_y),C(v_xy_i)\in C_l$, 则我们可以继续进行我们的繁殖过程，从而得到矛盾. (3.2) 证毕. ■

令 $Y_{M_{d_1}}=\{v:v\in Y_{M_d}$, 存在顶点 $v_x\in S_x$ 同 $v$ 相邻且 $C(v_xv)\notin C(M-M_l)\}$, 记 $|Y_{M_{d_1}}|=d_1$. 设 $X_{d_1}{'}=\{v:v\in S_x$, 存在顶点 $v_y\in Y_{M_d}$ 同 $v$ 相邻且 $C(vv_y)\notin C(M-M_l)\}$, $|X_{d_1}{'}|=d_1{'}$. 根据断言 3, $d_1{'}\le d_1$.

对于顶点 $v\in V(G-V_M)$, 令 $b_{M_d}(v)=\{c:\ c\in C(M_d)$, 存在边 $e\in E(G-V_M)$ 关联于 $v$ 使得 $C(e)=c\}$. 对于 $V_1\subseteq V(G-V_M)$, 记 $b_{M_d}(V_1)=\{b_{M_d}(v):\ v\in V_1\}$. 令 $Y'$ 表示满足 $b_{M_d}(V)=b_{M_d}(S_y)$, 且 $V\subseteq S_y$ 的具有最少顶点数的集合 $V$. 显然，$|Y'|\le d$. 记 $Y''=Y-Y_M-Y_L-Y'$.

令 $N^c(Y'')$ 是 $Y''$ 的一个最大色邻域, 并设 $N^c(Y'')=X_P\cup X_Q$ $(X_P\cap X_Q=\phi)$, 其中 $C(Y'',X_P)\cap(C(M)\cup C_L)=\phi$, $C(Y'',X_Q)\subseteq C(M)\cup C_L$. 显然，$|X_Q|\le t+l'$, 因此 $|X_P|\ge|Y''|-|X_Q|\ge n-t-l-d-(t+l')\ge n-2t-2l-d$.

令 $N^c(S_x)$ 为 $S_x$ 的一个最大色邻域. 设 $N^c(S_x)=Y_P\cup Y_Q$ $(Y_P\cap Y_Q=\phi)$, 其中 $C(S_x,Y_P)\cap C(M-M_l)=\phi$, $C(S_x,Y_Q)\subseteq C(M-M_l)$. 显然 $|Y_Q|\le t-l$, 故 $|Y_P|\ge|S_x|-|Y_Q|\ge n-t-l-(t-l)\ge n-2t$.

**断言** 4. $d_1\ge 2n-5t-l$.

**证明.** 根据断言 2, 我们有 $X_P\subseteq X_M-X_{M_l}$, $Y_P\subseteq Y_M-Y_{M_l}$. 根据 $Y''$ 的定义和断言 3, 有 $X_P\cap X_{M_d}=\phi$. 因此 $X_P\subseteq X_M-X_{M_l}-X_{M_d}$. 由断言 3 和 $Y_{M_{d_1}}$ 的定义，我们得到 $Y_P\cap(Y_{M_d}\backslash Y_{M_{d_1}})=\phi$. 因此，$Y_P\subseteq Y_M-Y_{M_l}-(Y_{M_d}\backslash Y_{M_{d_1}})$.

若 $|X_P|+|Y_P|>|Y_M-Y_{M_l}-(Y_{M_d}\backslash Y_{M_{d_1}})|$, 则存在边 $x_jy_j\in E(M-M_l-M_d)$ 使得 $x_j\in X_P$, $y_j\in Y_P$. 根据定义，存在边 $x_jv_y$, $v_xy_j$ 使得 $C(x_jv_y)\notin C(M)\cup C_L$, $C(v_xy_j)\notin C(M-M_l)$, 其中 $v_x\in S_x$, $v_y\in Y''$.

若 $C(v_xy_j)\in C_l$, 设 $C(v_xy_j)=c_i$ $(1\le i\le l)$. 用断言 2 中的证明方法，我们能找到 $j_k$ 使得 $C(x_{j_k}y_{j_k}')\notin C(M)$, 并令 $M^1=M\cup\{x_jv_y,v_xy_j,x_i'y_i,x_{j_1}'y_{j_1},\cdots,,x_{j_k}'y_{j_k}\}-\{x_jy_j,x_iy_i,x_{j_1}y_{j_1},\cdots,x_{j_k}y_{j_k}\}$. 则 $M^1$ 是一个彩色匹配满足 $|M^1|>|M|$, 得到矛盾

若 $C(v_xy_j)\notin C_l$, 并且 $C(v_xy_j)\ne C(x_jv_y)$, 则 $M^1=M\cup\{v_xy_j,x_jv_y\}-\{x_jy_j\}$ 是一个有 $|M|+1$ 条边的彩色匹配，得到矛盾.

所以我们有 $C(v_x y_j) = C(x_j v_y)$, 则 $M^1 = M \cup \{x_j v_y\} - \{x_j y_j\}$ 是一个彩色匹配，并且 $|M^1| = |M|$, $|b_{M^1}| > |b_M|$, 与 $M$ 的选法矛盾.

故 $|X_P| + |Y_P| \leq |Y_M - Y_{M_l} - (Y_{M_d} \backslash Y_{M_{d_1}})|$, 进而 $n - 2t - 2l - d + n - 2t \leq t - l - (d - d_1)$, 即 $d_1 \geq 2n - 5t - l$. ■

**断言 5.** $|Y_M - Y_{M_l} - Y_{M_d}| \geq n - 2t - d_1$.

**证明.** 根据断言 2, 有 $Y_P' \subseteq Y_M - Y_{M_l}$. 由断言 3 和 $S_x'$ 的定义，我们得到 $Y_P' \cap Y_{M_d} = \phi$. 所以 $Y_P' \subseteq Y_M - Y_{M_l} - Y_{M_d}$, 因此 $|Y_M - Y_{M_l} - Y_{M_d}| \geq |Y_P'| \geq n - 2t - d_1$.
■

现在我们得到

$$
\begin{aligned}
t &\geq |Y_M - Y_{M_l} - Y_{M_d}| + |Y_{M_d}| + |Y_{M_l}| \\
&\geq n - 2t - d_1 + d + l \\
&\geq n - 2t + 2n - 5t - l + l \\
&\geq 3n - 7t.
\end{aligned}
$$

故 $t \geq \frac{3n}{8}$, 得到矛盾. 定理 2.2.8 证毕. ■

定理 2.2.9 的证明.

首先，我们给出几个概念. 一个超图 $H = (V, E)$ 由有限的点集合 $V$ 和超边集合 $E$ 组成，一条超边就是 $V$ 的一个子集合. 若超图的每条边都含 $r$ 个顶点，则我们称之为 $r$- 一致超图. 一个 $r$- 一致超图 $H$, 若 $H$ 的顶点集合能够划分成 $V_1, \cdots, V_r$, 使得每条超边都恰好包含每个 $V_i$ 中的一个点，我们称该 $r$- 一致超图是 $r$- 部的.

超图的一个匹配是指它的不相交的超边的集合. 超图 $H$ 的匹配数， $\nu(H)$, 是指超图 $H$ 的最大匹配中超边的个数.

超图 $H$ 的一个覆盖，是 $V(H)$ 的一个子集合，满足和每条超边都相交. $H$ 的覆盖数， $\tau(H)$, 是指 $H$ 的最小覆盖的顶点个数. 显然，对任意超图都有 $\tau \geq \nu$. 对于 $r$- 一致超图，有 $\tau \geq r\nu$, 因为一个最大匹配的并就构成了一个覆盖.

Ryser 给出了下面的猜想.

**猜想 2.4.1** (Ryser) 任意一个 $r$- 部 $r$- 一致超图 $(r>1)$, 都有 $\tau \le (r-1)\nu$.

上述猜想，出现在 Ryser 的学生 Henderson 的博士论文中. 对于 $r=3$ 的情况, 上述猜想被广泛研究, 依次得到如下结果: $\tau \le \frac{25}{9}\nu$[52], $\tau \le \frac{8}{3}\nu$[80], $\tau \le \frac{5}{2}\nu$[82]. 后来， Aharoni [1] 证明了上述猜想对 $r=3$ 时成立，得到如下结果.

**引理 2.4.2** (Aharoni [1]) 对于 3- 部 3- 一致超图，有 $\tau \le 2\nu$ 成立.

现在我们给出定理 2.2.9 的证明. 设 $G$ 满足定理 2.2.9 条件的一个边染色图. 我们用如下的方法构造一个 3- 部 3- 一致超图 $H$. 令 $V_1=X, V_2=Y$, $V_3=C(G)$. $e=\{x,y,c\}\in E(H)$, 当且仅当在图 $G$ 中， $x\in X, y\in Y$ 并且 $C(xy)=c$. 显然，超图 $H$ 的一个匹配对应着 $G$ 的一个彩色匹配. 设 $M$ 是 $G$ 的一个最大彩色匹配，则 $|M|=\nu(H)$.

若 $\tau(H)\ge |X|$ 不成立, 设 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ 是 $H$ 的一个覆盖且 $|D|\le |X|-1$, 其中 $D_1\in V_1, D_2\in V_2$, $D_3\in V_3$. 在图 $G$ 中考虑集合 $F=X\backslash D_1$, 则存在 $F$ 的色邻域 $N^c(F)$ 使得 $|N^c(F)|\ge |F|=|X|-|D_1|$. 因此，在超图 $H$ 中，存在一个超边的集合 $E_1$ 使得 $|E_1|\ge |F|$, 且满足:

(i) 对任意超边 $e=\{x,y,c\}\in E_1$, 都有 $x\in F$;

(ii) 对任意两条超边 $e=\{x,y,c\}$, $e'=\{x',y',c'\}$, 有 $y\ne y'$, $c\ne c'$ 成立.

由 (i), 我们得到 $D_1$ 与 $E_1$ 中的所有超边都不相交. 又因为 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ 是 $H$ 的一个覆盖, 所以 $D_2\cup D_3$ 与 $E_1$ 中的每一条超边都相交. 根据 (ii) 和 $D_2\cap D_3=\phi$, 我们得到 $|D_2|+|D_3|\ge |E_1|\ge |F|=|X|-|D_1|$. 故 $|D_1|+|D_2|+|D_3|\ge |X|$, 得到矛盾，所以有 $\tau(H)\ge |X|$ 成立. 根据引理 2.4.2, $|X|=\tau(H)\le 2\nu(H)=2|M|$. 因此 $|M|\ge \frac{|X|}{2}$, 定理 2.2.9 证毕. ■

# 第三章　边染色图中的彩色圈

在本章，我们考虑了边染色图中的彩色圈问题. 在 3.1 节中，我们首先介绍了一些概念和关于彩色圈的已有的一些结果. 在 3.2 节，我们给出了本章的主要结果和几个相关的猜想. 主要结果的证明，我们在 3.3 节和 3.4 节中给出.

## 3.1　介绍

设 $G=(V,E)$ 是一个图. 图 $G$ 的一个边染色就是一个函数 $C:E\rightarrow N$($N$ 是非负整数集合). 若 $G$ 被赋予染色 $C$, 则称 $G$ 为一个边染色图. 令 $C(e)$ 表示边 $e\in E$ 的颜色， $CN(v)$ 表示顶点 $v$ 所关联的边所染的颜色的集合. 对于图 $G$ 的一个子图 $H$, 令 $C(H)=\{C(e):e\in E(H)\}$, $c(H)=|C(H)|$.

边染色图中的一个圈，若它的任意两条边都染不同的颜色，则称之为彩色圈. 对于正整数 $l$ ($l\geq 3$), 令 $HC_l$ 表示长度为 $l$ 的彩色圈. Broersma, Li, Woeginger 和 Zhang [18] 研究了彩色圈的存在性，得到了如下结果.

**定理 3.1.1**(Broersma 等 [18]) 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图，若 $c(G)\geq n$, 则 $G$ 有长度至少为 $\frac{2c(G)}{n-1}$ 的彩色圈.

**定理 3.1.2** (Broersma 等 [18]) 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 4$. 若对任意一对顶点 $u,v$ 都有 $|CN(u)\cup CN(v)|\geq n-1$ 成立，则 $G$ 含有一个 $HC_3$ 或者含有一个 $HC_4$.

## 3.2　主要结果

首先，我们给出几个概念. 对于顶点 $v\in V(G)$, $v$ 的一个色邻域是集合 $T$, $T\subseteq N(v)$, 使得连接 $v$ 和 $T$ 中的点组成的边所染的颜色两两不同. 我们用 $C(v,T)$ 表示连接 $v$ 和 $T$ 中的顶点的边所染的染色的集合. 顶点 $v$ 的一个最大色邻域 $N^c(v)$

是 $v$ 的一个顶点个数最多的色邻域. 令 $d^c(v) = |N^c(v)|$, 并称之为 $v$ 的色度，显然 $d^c(v) = |CN(v)|$.

我们感兴趣是彩色圈存在的 Dirac 类型的条件 (也就是最小色度条件), 尤其是对于最短彩色圈和最长彩色圈.

我们首先研究了一下彩色圈的存在性. 在定理 3.1.1 中，若 $c(G) \geq n$, 则 $G$ 存在一个彩色的圈. 在色度条件下，我们得到了下面的结果.

**定理 3.2.1** 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图，$n \geq 3$. 若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq \frac{n+1}{2}$ 成立，则 $G$ 含有一个彩色圈.

并且，我们得到了关于边染色图中存在 $HC_3$ 或 $HC_4$ 的色度条件.

**定理 3.2.2** 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图，$n \geq 3$. 若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq (\frac{4\sqrt{7}}{7} - 1)n + 3 - \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 成立，则 $G$ 或者有一个 $HC_3$, 或者有一个 $HC_4$.

其中 $\frac{4\sqrt{7}}{7} - 1 = 0.515\cdots$, $3 - \frac{4\sqrt{7}}{7} = 1.488\cdots$.

**定理 3.2.3** 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图，$n \geq 3$. 若对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq \frac{\sqrt{7}+1}{6}n$ 成立，则 $G$ 含有一个 $HC_3$.

其中 $\frac{\sqrt{7}+1}{6} = 0.608\cdots$. 我们认为定理 3.2.3 中的界不是紧的，并提出如下猜想.

**猜想 3.2.4** 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图，$n \geq 3$. 若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq \frac{n+1}{2}$ 成立，则 $G$ 含有一个 $HC_3$.

下面的例子说明了上述猜想若成立，则是最好可能的. 对任意偶数 $n$, 令 $B_{n/2,n/2}$ 是顶点个数为 $n$ 的具有正常边染色的平衡完全二部图. 则对每一顶点 $v$, 都有 $d^c(v) = \frac{n}{2}$, 而且 $B_{n/2,n/2}$ 不含 $HC_3$.

关于彩色圈的存在性，我们自然地会想到如下问题：对任意顶点个数为 $n$ 的边染色图 $G$, 确定一个尽可能小的函数 $f(n)$, 使得若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq f(n)$, 则 $G$ 中存在一个彩色圈. 接下来的两个命题说明了 $f(n)$ 肯定要大于 $\log_2 n$.

**命题 3.2.5** 对任意正整数 $k$, 都存在一个顶点个数为 $n=2^k$ 的边染色二部图 $B$, 使得对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)=k=\log_2 n$, 并且 $B$ 不含彩色圈.

我们递归地构造下面的例子来证明命题 3.2.5. 令 $G_1$ 是一条边 $e$, 并且 $C(e)=1$. 给定 $G_i$, $i\geq 1$, 我们构造 $G_{i+1}$. 首先令 $G_i'$ 为 $G_i$ 的一个复制. 对于 $G_i$ 中的每一个顶点 $u$, 连接 $uu'$, 其中 $u'$ 是 $u$ 在 $G_i'$ 中的复制, 并将新增加的边的颜色染为 $i+1$.

则 $B=G_i$ 是顶点个数为 $n=2^i$ 的边染色二部图，并且对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)=i=\log_2 n$. 显然 $B$ 不含任何彩色圈.

**命题 3.2.6** 对任意正整数 $k$, 都存在一个顶点个数为 $n=2^k$ 的边染色完全图 $K$, 使得对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)=k=\log_2 n$, $K$ 不含彩色圈.

我们的构造方法和前面的例子稍微不同. 令 $G_1^*$ 为一条边 $e$ 构成的图，并且 $C(e)=1$. 给定 $G_i^*$, $i\geq 1$, 我们用如下方法构造图 $G_{i+1}^*$. 令 $G_i^{**}$ 为 $G_i^*$ 的一个复制. 对任意两点 $u\in V(G_i^*), u'\in V(G_i^{**})$, 增加新边 $uu'$, 并令 $C(uu')=i+1$.

则 $K=G_i^*$ 是顶点个数为 $n=2^i$ 的边染色完全图，并且对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)=i=\log_2 n$. 显然 $K$ 不含彩色圈.

关于长彩色圈，我们得到了如下结果.

**定理 3.2.7** 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n\geq 8$. 若对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v)\geq d\geq \frac{3n}{4}+1$ 成立，则 $G$ 含有一个彩色圈 $HC_l$, 其中 $l\geq d-\frac{3n}{4}+2$.

## 3.3 定理 3.2.1, 3.2.2 和 3.2.3 的证明

首先我们给出一些预备知识. Caccetta 和 Häggkvist [19] 曾提出如下猜想.

**猜想 3.3.1** (Caccetta 和 Häggkvist [19]) 任意一个顶点个数为 $m$ 最小出度为 $r$ 的有向图 $D$, 都含有一个长度至多为 $\lceil\frac{m}{r}\rceil$ 的有向圈.

上述猜想的一个非常有趣的特殊情况仍然没有被解决：任意一个顶点个数为

$m$ 最小出度至少为 $\frac{m}{3}$ 的有向图，都含有一个有向的三角形. 为了证明这个猜想，我们寻找尽可能小的实数 $\alpha$, 使得任意顶点个数为 $m$ 最小出度至少为 $\alpha m$ 的有向图，都含有一个有向三角形. Caccetta 和 Häggkvist 证明了 $\alpha \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\cdots$. Bondy [14] 改进到 $\alpha \leq \frac{2\sqrt{6}-3}{5} = 0.3797\cdots$. Shen [76] 得到了如下结果.

**引理 3.3.2** (Shen [76]) 若 $\alpha = 3-\sqrt{7} = 0.3542\cdots$, 则顶点个数为 $m$ 最小出度至少为 $\alpha m$ 的任意有向图，都含有一个有向的三角形.

下面，我们给出一个简单的结果，我们在定理的证明中要用到.

**引理 3.3.3** 最小出度至少为 1 的简单有向图，都含有一个有向圈.

定理 3.2.3 的证明.

反证法. 假设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图, 对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq \frac{\sqrt{7}+1}{6}n$, 且 $G$ 不含彩色三角形. 设 $v$ 是 $G$ 的任意顶点, $N^c(v)$ 是 $v$ 的一个最大色邻域. 假设 $T = N^c(v) = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, 其中 $k = d^c(v)$. 因为 $G$ 不含彩色三角形，若 $e = v_iv_j \in E(G[T])$, $1 \leq i, j \leq k$, 则 $C(e) = vv_i$ 或 $C(e) = vv_j$.

按照如下规则对图 $G[T]$ 进行定向：对于边 $e = v_iv_j$, 若 $C(e) = vv_i$, 则 $v_iv_j$ 的定向为从 $v_j$ 指向 $v_i$; 否则 $v_iv_j$ 的定向为从 $v_i$ 指向 $v_j$. 经过定向后所得到的有向图记为 $D$. 对于任意顶点 $u \in V(D)$, 令 $N_D^+(u)$ 表示 $u$ 在 $D$ 中的出邻域，记 $d_D^+(u) = |N_D^+(u)|$.

**断言 1.** 设 $q$ $(q \geq 3)$ 是一正整数. 若 $D$ 中存在一个有向圈 $\overrightarrow{C_q}$, 则 $C_q$ 是 $G$ 中的一个彩色圈.

**证明.** 不失一般性，我们假设 $D$ 中的有向圈为 $\overrightarrow{C_q}: v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_q \to v_1$. 由前面的定向规则，我们知道，对于 $1 \leq i \leq q-1$, 有 $C(v_iv_{i+1}) = C(vv_{i+1})$ 且 $C(v_qv_1) = C(vv_1)$. 因为 $T = N^c(v)$ 是 $v$ 的一个最大色邻域，所以若 $i \neq j$ 则 $C(vv_i) \neq C(vv_j)$. 故 $C_q$ 是 $G$ 中的一个彩色圈. ∎

因为 $G$ 不含彩色三角形，根据断言 1, $D$ 不含有向三角形. 根据引理 3.3.2,

$D$ 中存在顶点 $v_i$ 使得 $d_D^+(v_i) < \alpha V(D) = \alpha d^c(v)$, 其中 $\alpha = 3-\sqrt{7}$. 令 $G_0 = G[T \cup \{v\}]$, $N_{G_0}^c(v_i)$ 表示 $G_0$ 中 $v_i$ 的一个最大色邻域. 根据前面的定向规则, $|N_{G_0}^c(v_i)| = |N_D^+(v_i)| + |v| = |d_D^+(v_i)| + 1 < \alpha d^c(v) + 1$. 设 $N^c(v_i)$ 是 $v_i$ 在 $G$ 中的一个最大色邻域. 则 $|N^c(v_i)\backslash(T \cup \{v\})| \geq d^c(v_i) - |N_{G_0}^c(v_i)| > d^c(v_i) - \alpha d^c(v) - 1$. 因此

$$n \geq |N^c(v_i)\backslash(T \cup \{v\})| + |T| + |v| > d^c(v_i) + (1-\alpha)d^c(v) \geq (2-\alpha)\frac{\sqrt{7}+1}{6}n = n.$$

得到矛盾，定理 3.2.3 证毕. ■

定理 3.2.1 的证明.

我们运用和定理 3.2.3 的证明中相同的技巧. 反证法. 若结论不成立，令 $G$ 是一个边染色图，对任意顶点 $v$ 都满足 $d^c(v) \geq \frac{n+1}{2}$, 且 $G$ 不含彩色圈. 设 $v$ 是 $G$ 的任意顶点， $N^c(v)$ 为 $v$ 的一个最大色邻域. 因为 $G$ 不含彩色圈，根据前面同样的定向规则，我们得到一个有向图 $D_0$. 同样地，我们得出 $D_0$ 不含有向圈.

根据引理 3.3.3, $D_0$ 中存在顶点 $v_j$, 使得 $d_{D_0}^+(v_j) = 0$. 设 $N^c(v_j)$ 是 $v_j$ 在 $G$ 中的一个最大色邻域，则 $|N^c(v_j)\backslash(T \cup \{v\})| \geq d^c(v_j) - 1$. 因此

$$n \geq |N^c(v_j)\backslash(T \cup \{v\})| + |T| + |v| \geq d^c(v_j) - 1 + d^c(v) + 1 \geq 2(\frac{n+1}{2}) = n+1.$$

得出矛盾，定理 3.2.1 证毕. ■

定理 3.2.2 的证明.

反证法. 假设 $G$ 是边染色图，对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq (\frac{4\sqrt{7}}{7}-1)n+3-\frac{4\sqrt{7}}{7}$, 且 $G$ 不含 $HC_3$ 也不含 $HC_4$.

对 $G$ 中的任意一条边 $uv$, 我们用 $N_1^c(u), N_1^c(v)$ 分别表示 $u, v$ 的满足下面条件的最大色邻域： $v \in N_1^c(u), u \in N_1^c(v)$ 并且 $|N_1^c(u) \cup N_1^c(v)|$ 最大. 令 $N^c(u,v)$ 表示 $N_1^c(u) \cup N_1^c(v)$. 我们选择边 $uv \in E(G)$ 使得 $|N^c(u,v)|$ 最大.

假设 $N_1^c(u) = \{v, u_1, u_2, \cdots, u_s\}$, $N_1^c(v)\backslash N_1^c(u) = \{u, v_1, v_2, \cdots, v_t\}$, 其中 $s = d^c(u) - 1$. 令 $X = \{u_1, \cdots, u_s, v_1, \cdots, v_t\}$, 则 $|N^c(u,v)| = s+t+2$. 考虑图 $G[X]$, 我们有下面的断言.

**断言 1.** 若 $e \in E(G[X])$，下面结论成立：
(i) 若 $e = u_iu_j$ $(1 \le i, j \le s)$，则 $C(e) \in \{C(uu_i), C(uu_j)\}$；
(ii) 若 $e = v_iv_j$ $(1 \le i, j \le t)$，则 $C(e) \in \{C(vv_i), C(vv_j)\}$；
(iii) 若 $e = u_iv_j$ $(1 \le i \le s, 1 \le j \le t)$ 且 $C(uu_i) \ne C(vv_j)$，则 $C(e) \in \{C(uu_i), C(vv_j), C(uv)\}$.

**证明.** 若 (i) 或 (ii) 不成立，则我们得到一个 $HC_3$，得到矛盾，故 (i) 和 (ii) 成立.

若 (iii) 不成立，则存在边 $e = u_iv_j$ $(1 \le i \le s, 1 \le j \le t)$ 使得 $C(uu_i) \ne C(vv_j)$ 且 $C(e) \notin \{C(uu_i), C(vv_j), C(uv)\}$. 因为 $v, u_i \in N_1^c(u)$，故 $C(uu_i) \ne C(uv)$. 同样地，我们得出 $C(vv_j) \ne C(uv)$. 因此我们得到一个 $HC_4 = uvv_ju_iu$，得到矛盾. ■

接下来，我们用如下的方法构造有向图.

(1) 在图 $G[X]$ 中，进行如下删除操作：若 $C(e) = C(uv)$ 或者 $C(uu_i) = C(vv_j)$，其中 $1 \le i \le s$, $1 \le j \le t$，则删除边 $e = v_iu_j$. 删除操作完成后，所得到的图记为 $G_1[X]$.

(2) 给出图 $G_1[X]$ 的一个定向：对边 $xy \in E(G_1[X])$，若 $C(xy) = C(uy)$ 或者 $C(xy) = C(vy)$，则 $xy$ 的定向为从 $x$ 到 $y$；否则根据断言 1，$C(xy) = C(ux)$ 或 $C(xy) = C(vx)$，则 $xy$ 的定向为从 $y$ 到 $x$.

定向操作完成后，所得到的有向图记为 $D_1$. 对于点 $w \in V(D_1)$，令 $N_{D_1}^+(w)$ 表示 $w$ 在 $D_1$ 中的出邻域，并令 $d_{D_1}^+(w) = |N_{D_1}^+(w)|$. 记 $G_0 = G[X \cup \{u, v\}]$.

**断言 2.** 若 $D_1$ 中存在有向三角形 $\overrightarrow{C_3}$，则 $C_3$ 是 $G$ 中的一个彩色三角形.

**证明.** 假设 $\overrightarrow{C_3}: x \to y \to z \to x$ 是 $D_1$ 中的有向三角形. 若 $x, y, z \in N_1^c(u)$，根据定向规则，有 $C(xy) = C(uy)$, $C(yz) = C(uz)$ 且 $C(zx) = C(ux)$. 根据 $N_1^c(u)$ 的定义，我们知道 $C(ux), C(uy), C(uz)$ 是两两不同的. 因此，$C_3 = xyzx$ 是 $G$ 中的彩色三角形. 同理，若 $x, y, z \in N_1^c(v) \backslash N_1^c(u)$，则 $C_3$ 也是 $G$ 中的一个彩色三角形.

因此，不失一般性，我们假设 $x, y \in N_1^c(u)$ 且 $z \in N_1^c(v) \backslash N_1^c(u)$. 由前面的定向规则，我们有 $C(xy) = C(uy), C(yz) = C(vz)$，且 $C(zx) = C(ux)$. 根据 $N_1^c(u)$ 的定义和断言 1(iii)，$C(ux), C(uy)$ 和 $C(vz)$ 是两两不同的，故 $C_3$ 是 $G$ 中的一个彩色三角形. ■

令 $\alpha = 3-\sqrt{7}$. 根据断言 2, $D_1$ 中不存在有向三角形. 根据引理 3.3.2, $D_1$ 中存在顶点 $w$ 使得 $d^+_{D_1}(w) < \alpha|V(D_1)| = \alpha(s+t) = \alpha(d^c(u)+t-1)$. 不妨假设 $w \in N^c_1(u)$. 令 $N^c_{G_0}(w)$ 表示 $w$ 在 $G_0$ 中的一个最大色邻域. 在删除操作中，至多有两条关联 $w$ 的边被删除. 故 $|N^c_{G_0}(w)| \le |N^+_{D_1}(w)| + |v|$(或 $|u|$) $+2 = d^+_{D_1}(w)+3$. 令 $N^c(w)$ 表示 $w$ 在 $G$ 中的一个最大色邻域. 因此

$$|N^c(w)\backslash(X\cup\{u,v\})| \ge d^c(w) - |N^c_{G_0}(w)| > d^c(w) - \alpha(d^c(u)+t-1) - 3.$$

若 $d^c(w)-\alpha(d^c(u)+t-1)-3 > t$, 考虑边 $uw$. 我们有

$$\begin{aligned}|N^c(u,w)| &\ge |\{u_1,u_2,\cdots,u_s\}\cup\{v\}| + |N^c(w)\backslash(X\cup\{u,v\})| + |u|\\ &> s+t+2\\ &= |N^c(u,v)|,\end{aligned}$$

与边 $uv$ 的选法矛盾.

所以我们有 $d^c(w)-\alpha(d^c(u)+t-1)-3 \le t$, 则 $t \ge \frac{d^c(w)}{1+\alpha} - \frac{\alpha d^c(u)}{1+\alpha} + \frac{\alpha-3}{1+\alpha}$. 因此

$$\begin{aligned}n &\ge |X|+|u|+|v|+|N^c(w)\backslash(X\cup\{u,v\})|\\ &> d^c(u)+t-1+2+d^c(w)-\alpha(d^c(u)+t-1)-3\\ &\ge (1-\alpha)d^c(u)+d^c(w)+(1-\alpha)(\frac{d^c(w)}{1+\alpha}-\frac{\alpha d^c(u)}{1+\alpha}+\frac{\alpha-3}{1+\alpha})+\alpha-2\\ &\ge \frac{1-\alpha}{1+\alpha}d^c(u)+\frac{2}{1+\alpha}d^c(w)+\frac{3\alpha-5}{1+\alpha}.\end{aligned}$$

因为对 $G$ 中的任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge (\frac{4\sqrt{7}}{7}-1)n+3-\frac{4\sqrt{7}}{7}$. 故上述不等式为

$$n > \frac{3-\alpha}{1+\alpha}[(\frac{4\sqrt{7}}{7}-1)n+3-\frac{4\sqrt{7}}{7}]+\frac{3\alpha-5}{1+\alpha} \ge n.$$

得出矛盾，定理 3.2.2 证毕.

## 3.4 定理 3.2.7 的证明

反证法. 因为对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq \frac{3n}{4}+1 > \frac{n+1}{2}$, 由定理 3.2.1, $G$ 存在一个彩色圈. 我们取最长的彩色圈 $HC_l$ 长度为 $l$. 若结论不成立, 则 $l < d - \frac{3n}{4}+2$. 此时有 $d > \frac{3n}{4}+1$.

任取边 $xy \in E(HC_l)$. 令 $N^c(x), N^c(y)$ 分别为 $x, y$ 的最大色邻域. 我们选择集合 $S_x$ 使得

$(R_1)$ $S_x \in N^c(x) \backslash V(HC_l)$;

$(R_2)$ 对任意顶点 $v \in S_x$, $C(xv) \notin C(HC_l)$;

$(R_3)$ 在满足 $(R_1), (R_2)$ 的情况下， $|S_x|$ 最大.

同样地，选择 $S_y$ 满足

$(R_1')$ $S_y \in N^c(y) \backslash V(HC_l)$;

$(R_2')$ 对任意顶点 $v \in S_y$, $C(yv) \notin C(HC_l)$;

$(R_3')$ 在满足 $(R_1'), (R_2')$ 的情况下， $|S_y|$ 最大.

令 $P = S_x \cap S_y$, $p = |P|$. 我们有下面的断言.

**断言 1.** $p \geq 2d - n + 6 - 3l > 0$.

**证明.** 显然 $|S_x| \geq d^c(x) - l - (l-3) \geq d + 3 - 2l$. 同样地， $|S_y| \geq d+3-2l$. 则 $p \geq |S_x| + |S_y| - (n-l) \geq 2d - n + 6 - 3l > 0$. ■

**断言 2.** 若 $u \in P$, 则 $C(ux) = C(uy)$.

**证明.** 否则，若 $C(ux) \neq C(uy)$, 因为 $C(ux), C(uy) \notin C(HC_l)$, 则我们能得到彩色圈 $HC_l \cup \{xu, uy\} \backslash \{xy\}$, 长度为 $l+1$, 得到矛盾. ■

**断言 3.** 若 $uv \in E(G[P])$, 则 $C(uv) \in \{C(ux), C(vy), C(HC_l) \backslash C(xy)\}$.

**证明.** 若 $uv \in E(G[P])$, 根据断言 2, $C(ux) = C(uy)$ 且 $C(vx) = C(vy)$. 显然， $C(ux) \neq C(vy)$. 若 $C(uv) \notin \{C(ux), C(vy), C(HC_l) \backslash C(xy)\}$, 我们得到彩色圈 $HC_l \cup \{xu, uv, vy\} \backslash \{xy\}$, 长度为 $l+2$, 得到矛盾. ■

用如下的方法构造有向图.

(1) 在图 $G[P]$ 中，做如下删除操作：若边 $uv$ 满足 $C(uv) \in C(HC_l) \backslash C(xy)$,

则删除 $uv$. 删除操作完成后，所得到的图记为 $G_1[P]$.

(2) 对 $G_1[P]$ 进行定向：对边 $uv \in E(G_1[P])$, 若 $C(uv) = C(xu)$, 则 $uv$ 的定向从 $v$ 指向 $u$; 否则，根据断言 3, 有 $C(uv) = C(xv)$, 则 $uv$ 的定向为从 $u$ 指向 $v$.

经过定向后，所得到的有向图记为 $D_2$. 令 $v_0$ 为图 $D_2$ 中具有最小出度的顶点，记 $d^+_{D_2}(v_0)$ 为 $v_0$ 在 $D_2$ 中的出度. 显然，$d^+_{D_2}(v_0) \le \frac{p-1}{2}$. 令 $N^c(v_0)$ 为 $v_0$ 在 $G$ 中的一个最大色邻域. 记 $N^c(v_0) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, 其中

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{v : v \in P \text{ 并且 } C(v_0v) \notin C(HC_l)\},\\
V_2 &= \{v : v \in V(HC_l) \text{ 并且 } C(v_0v) \notin C(HC_l)\},\\
V_3 &= \{v : v \in P \cup V(HC_l) \text{ 并且 } C(v_0v) \in C(HC_l)\},\\
V_4 &= \{v : v \notin P \cup V(HC_l)\},
\end{aligned}
$$

并且对 $1 \le i \ne j \le 4$, 有 $V_i \cap V_j = \phi$. 我们知道 $|V_1| \le d^+_{D_2}(v_0) + 1 \le \frac{p-1}{2} + 1$ 且 $|V_3| \le l$.

**断言 4.** $|V_1| + |V_2| \le \frac{p-1}{2} + \frac{l-1}{2}$.

**证明.** 首先，我们有 $|V_2| \le \frac{l-1}{2}$ 成立. 否则若 $|V_2| > \frac{l-1}{2}$, 根据 $C(xv_0) = C(yv_0) \notin C(HC_l)$, 则存在 $HC_l$ 上的两个连续的顶点 $v_i, v_{i+1}$, 使得 $C(v_0v_i), C(v_0v_{i+1}) \notin C(HC_l)$ 且 $C(v_0v_i) \ne C(v_0v_{i+1})$. 因此我们得到了一个长度为 $l+1$ 的彩色圈 $HC_l \cup \{v_iv_0, v_0v_{i+1}\} \backslash \{v_iv_{i+1}\}$, 得到矛盾. 若 $|V_1| \le \frac{p-1}{2}$, 则 $|V_1| + |V_2| \le \frac{p-1}{2} + \frac{l-1}{2}$.

进一步，若 $|V_1| = \frac{p-1}{2} + 1$, 则 $C(xv_0) \in C(v_0, V_1)$. 又因为 $N^c(v_0)$ 为 $v_0$ 的一个最大色邻域，且 $V_1 \cap V_2 = \phi$, 所以 $C(xv_0) \notin C(v_0, V_2)$. 因此若 $|V_2| > \frac{l-3}{2}$, 用前面同样的方法我们能得到一个长度为 $l+1$ 的彩色圈，得到矛盾. 所以有 $|V_2| \le \frac{l-3}{2}$, 从而 $|V_1| + |V_2| \le \frac{p-1}{2} + \frac{l-1}{2}$. ■

现在我们完成定理 3.2.7 的证明. 因为 $\sum_{i=1}^{4} |V_i| = d^c(v_0) \ge d$ 并且对于 $1 \le i \ne j \le 4$ 有 $V_i \cap V_j = \phi$, 则 $|V_4| \ge d - \sum_{i=1}^{3} |V_i| \ge d - l - \frac{p-1}{2} - \frac{l-1}{2}$. 显然 $V_4 \subseteq V(G) \backslash (P \cup V(HC_l))$. 所以我们有 $d - l - \frac{p-1}{2} - \frac{l-1}{2} \le n - p - l$, 进而 $p \le 2(n-d) + l - 2$. 根据断言 1, $p \ge 2d - n + 6 - 3l$. 故 $l \ge d - \frac{3n}{4} + 2$, 得到矛盾. 定理得证. ■

# 第四章　边染色图中的交错圈

在本章，我们讨论了边染色图中的交错圈. 我们研究了几类特殊交错圈存在的色度条件. 另外，我们也考虑了边染色完全图中的长交错圈.

## 4.1 介绍

设 $G=(V,E)$ 是一个图. 图 $G$ 的一个边染色就是一个函数 $C:E\to N$($N$ 是非负整数集合). 若 $G$ 被赋予染色 $C$, 则称 $G$ 为一个边染色图. 令 $C(e)$ 表示边 $e\in E$ 的颜色. 对于图 $G$ 的一个子图 $H$, 令 $C(H)=\{C(e):e\in E(H)\}$, $c(H)=|C(H)|$. 对于颜色 $i\in C(H)$, 令 $i_H=|\{e:C(e)=i$ 且 $e\in E(H)\}|$, 我们称颜色 $i$ 在 $H$ 上出现 $i_H$ 次. 对于一个边染色图 $G$, 若 $c(G)=c$, 我们称之为 $c$- 边染色图.

设 $v$ 为边染色图 $G$ 的一个顶点，$v$ 的一个色邻域是集合 $T$, $T\subseteq N(v)$, 使得连接 $v$ 和 $T$ 中的点组成的边所染的颜色两两不同. 顶点 $v$ 的一个最大色邻域 $N^c(v)$ 是 $v$ 的一个顶点个数最多的色邻域. 我们记 $d^c(v)=|N^c(v)|$, 并且称 $d^c(v)$ 为 $v$ 的色度.

若 $P=v_1v_2\cdots v_p$ 是一条路，令 $P[v_i,v_j]$ 表示子路 $v_iv_{i+1}\cdots v_j$, 令 $P^-[v_i,v_j]$ 表示子路 $v_jv_{j-1}\cdots v_i$. 路的长度就是路上边的条数.

边染色图中的一条路 (圈), 若它上面相邻的边所染色颜色不相同，我们称它为交错路 (圈). 除了在图论和算法中的重要应用外，交错路和交错圈还广泛应用在许多其它的领域中：基因科学 ([27, 28, 29]), 社会科学 ([25]) 等. 关于这方面的详细介绍，我们可以参考 Bang-Jensen 和 Gutin 的综述文章 [8].

Grossman 和 Häggkvist [47] 是最早研究 $c$- 边染色图中交错圈的存在性问题的. 他们证明了下面的定理 4.1.1 中 $c=2$ 的情况. Yeo [86] 证明了 $c\geq 3$ 的情况. 设 $v$ 是一个边染色图 $G$ 中的割点，如果 $G-v$ 中不存在连通分支，通过至少两种不同颜色的边连接 $v$, 则我们称 $v$ 把颜色分开.

**定理 4.1.1** (Grossman 和 Häggkvist [47], Yeo [86]) 设 $G$ 是一个 $c$- 边染色图，$c\geq 2$, 并且任意顶点所关联的边至少有两种不同的颜色. 则或者 $G$ 有一个把颜色分开的割点，或者 $G$ 有一个交错圈.

我们用 $K_n^c$ 表示一个顶点数为 $n$ 的边染色完全图,所用的颜色的集合为 $\{1,2,\cdots,c\}$. 令 $\Delta(K_n^c)$ 表示 $K_n^c$ 中每个顶点所关联的相同颜色的边的最大数目. Bollobás 和 Erdős [13] 曾提出如下猜想.

**猜想 4.1.2** (Bollobás 和 Erdős [13]) 若 $\Delta(K_n^c) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 则 $K_n^c$ 有一个交错的哈密尔顿圈.

Bollobás 和 Erdős 证明了若 $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{69}$, 则 $K_n^c$ 含有一个交错的哈密尔顿圈. 这个界被 Chen 和 Daykin [21] 改进到 $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{17}$, 又被 Shearer [75] 改进到 $\Delta(K_n^c) < \frac{n}{7}$. 到目前为止，最好的渐进的界是 Alon 和 Gutin [4] 得到的如下结果.

**定理 4.1.3** (Alon 和 Gutin[4]) 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个正整数 $n_0 = n_0(\epsilon)$, 使得对任意正整数 $n > n_0$, 满足 $\Delta(K_n^c) \leq (1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon)n$ 的 $K_n^c$ 都含有一个交错的哈密尔顿圈.

## 4.2 主要结果

我们首先研究了具有某种性质的交错圈的存在性，得到了如下定理.

**定理 4.2.1** 设 $G$ 是一个顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n \geq 3$. 若对 $G$ 中的每一个顶点 $v$, 都有 $d^c(v) > \frac{n+1}{3}$, 则 $G$ 含有一个交错圈 $AC$, 使得圈上的每种颜色在圈上至多出现两次.

并且，对于交错圈的存在性，我们有如下的命题.

**命题 4.2.2** 对任意正整数 $i$, 都存在一个边染色图 $G_i$, 满足对任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) \geq i$ 成立，并且 $G_i$ 不含交错圈.

下面我们递归地构造一类图来证明上面的命题. 令 $G_1$ 为一条边 $e$ 且 $C(e) = 1$. 给定 $G_i$, 接下来我们构造 $G_{i+1}$. 首先，复制 $(i+1)$ 次图 $G_i$, 把它们记为 $G_i^1, G_i^2, \cdots, G_i^{i+1}$. 令 $\{c_1^i, c_2^i, \cdots, c_{i+1}^i\}$ 是满足 $\{c_1^i, c_2^i, \cdots, c_{i+1}^i\} \cap C(G_i) = \phi$ 的颜色

集. 增加点 $v_{i+1}$. 对每一个图 $G_i^j$, $1 \le j \le i+1$, 连接 $v_{i+1}$ 和 $G_i^j$ 中的每一个顶点，并把这些边的颜色染为 $c_j^i$. 所得到的新的边染色图，记为 $G_{i+1}$.

则 $G_i$ 是一个边染色图，满足对所有的顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge i$ 成立. 显然 $G_i$ 不含交错圈.

关于短交错圈，我们得到了如下的结果.

**定理 4.2.3** 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n \ge 3$. 若对 $G$ 的每一个顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge \frac{37n-17}{75}$ 成立，则 $G$ 或者含有一个交错的三角形，或者含有一个交错的四边形.

我们也考虑了长交错圈和交错路的情况.

**定理 4.2.4** 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n \ge 3$. 若对每一个顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge d \ge 2$, 则 $G$ 或者有一条长度至少为 $2d$ 的交错路，或者含有一个长度至少为 $\lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$ 的交错圈.

由上述定理，我们得到如下推论.

**推论 4.2.5** 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n \ge 4$. 若对每个顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge \frac{n}{2}$, 则 $G$ 含有一个长度至少为 $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ 的交错圈.

事实上，我们认为上述结果仍然可以被改进，故并提出如下猜想.

**猜想 4.2.6** 设 $G$ 是顶点个数为 $n$ 的边染色图， $n \ge 3$. 若对每个顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \ge \frac{n}{2}$, 则 $G$ 含一个交错的哈密尔顿圈.

下面的例子证明了如果上述猜想成立，它是最好可能的. 对于任意正整数 $m$, 令 $K_m, K'_{m+1}$ 是两个顶点个数分别为 $m$ 和 $m+1$ 的边正常染色的完全图. 任选一点 $u' \in K'_{m+1}$. 对每一顶点 $u \in K_m$, 增加边 $uu'$, 并令 $C(uu') = c_0$, 其中 $c_0 \notin C(K_m)$. 所得到的新边染色图记为 $B$. 显然， $|V(B)| = n = 2m+1$. 对 $B$ 的任意顶点 $v$, $d^c(v) \ge m = \frac{n-1}{2}$, $B$ 不含交错的哈密尔顿圈.

我们还考虑了满足 Bollobás-Erdős 条件的边染色完全图中的交错圈，得到了如下结果.

**定理 4.2.7** 若 $\Delta(K_n^c) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 则 $K_n^c$ 包含一个长度至少为 $\lceil \frac{n+2}{3} \rceil + 1$ 的交错圈.

我们在 4.3 节中给出定理 4.2.1, 4.2.3 的证明，定理 4.2.5, 4.2.7 的证明分别在 4.4 节和 4.5 节中给出.

## 4.3 定理 4.2.1, 4.2.3 的证明

定理 4.2.3 的证明.

反证法. 假设 $G$ 是一个边染色图，对任意顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq \frac{37n-17}{75}$, 且 $G$ 既不含交错的三角形，也不含交错的四边形.

对 $G$ 中的任意一条边 $uv$, 我们用 $N_1^c(u), N_1^c(v)$ 分别表示 $u, v$ 的满足下面条件的最大色邻域： $v \in N_1^c(u)$, $u \in N_1^c(v)$ 并且 $|N_1^c(u) \cup N_1^c(v)|$ 最大. 令 $N^c(u,v)$ 表示 $N_1^c(u) \cup N_1^c(v)$. 我们选择边 $uv \in E(G)$ 使得 $|N^c(u,v)|$ 最大.

不失一般性, 我们假设 $N_1^c(u) = \{v, u_1, u_2, \cdots, u_s\}$, $N_1^c(v) \backslash N_1^c(u) = \{u, v_1, v_2, \cdots, v_t\}$, 其中 $s = d^c(u) - 1$. 令 $X = \{u_1, \cdots, u_s, v_1, \cdots, v_t\}$, 则 $|N^c(u,v)| = s + t + 2$. 考虑图 $G[X]$, 我们有如下的断言.

**断言 1.** 设 $e \in E(G[X])$, 则下面结论成立：
(i) 若 $e = u_iu_j$ $(1 \leq i, j \leq s)$, 则 $C(e) \in \{C(uu_i), C(uu_j)\}$;
(ii) 若 $e = v_iv_j$ $(1 \leq i, j \leq t)$, 则 $C(e) \in \{C(vv_i), C(vv_j)\}$;
(iii) 若 $e = u_iv_j$ $(1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t)$ 且 $C(uu_i) \neq C(vv_j)$, 则 $C(e) \in \{C(uu_i), C(vv_j)\}$.

**证明.** 若 (i) 或者 (ii) 不成立，则我们很容易得到一个 $G$ 的交错三角形，得到矛盾，故 (i) 和 (ii) 成立.

若 (iii) 不成立，则存在一条边 $e = u_iv_j$ $(1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t)$ 使得 $C(uu_i) \neq C(vv_j)$ 且 $C(e) \notin \{C(uu_i), C(vv_j)\}$. 因为 $v, u_i \in N_1^c(u)$, 则 $C(uu_i) \neq C(uv)$. 同样

地,. $C(vv_j) \neq C(uv)$. 则 $uvv_ju_iu$ 为 $G$ 中的交错四边形，得到矛盾. ■

我们用如下的方法构造一个有向图.

(1) 在 $G[X]$ 中，进行如下删除操作：若 $C(uu_i) = C(vv_j)$, $1 \leq i \leq s$ 且 $1 \leq j \leq t$, 则删除边 $e = u_iv_j$. (若 $C(uu_i) = C(vv_j)$ 且 $u_iv_j \in E(G[X])$, 则 $C(u_iv_j) = C(uu_i) = C(vv_j)$). 进行完删除操作后，所得到的图记为 $G_1[X]$.

(2) 给 $G_1[X]$ 的边进行定向：对于边 $xy \in E(G_1[X])$, 若 $C(xy) = C(uy)$ 或 $C(xy) = C(vy)$, 则 $xy$ 的方向为从 $x$ 指向 $y$; 否则，根据断言 1, 我们有 $C(xy) = C(ux)$ 或者 $C(xy) = C(vx)$, 则 $xy$ 的方向为从 $y$ 指向 $x$.

定向操作后，所得到的有向图记为 $D_1$. 对任一顶点 $w \in V(D_1)$, 令 $N^+_{D_1}(w)$ 表示 $w$ 在 $D_1$ 中的出邻域, $d^+_{D_1}(w) = |N^+_{D_1}(w)|$. 记 $G_0 = G[X \cup \{u, v\}]$.

**断言 2.** 若 $D_1$ 中存在一个有向圈 $\overrightarrow{C_p}$, 则 $C_p$ 是 $G$ 中的交错圈，而且 $C(C_p)$ 上的每种颜色在 $C_p$ 上最多出现 2 次.

**证明.** 首先我们证明 $C_p$ 是 $G$ 中的交错圈. 设 $xy$ 和 $yz$ 是 $C_p$ 上相邻的任意两条边，并且假设在 $\overrightarrow{C_p}$ 上, $xy$ 和 $yz$ 的方向分别为从 $x$ 指向 $y$, 从 $y$ 指向 $z$. 根据定向的规则，我们得出 $C(xy) = C(uy)$ 或 $C(xy) = C(vy)$, $C(yz) = C(uz)$ 或 $C(yz) = C(vz)$.

若 $C(xy) = C(uy)$ 且 $C(yz) = C(uz)$, 或 $C(xy) = C(vy)$ 且 $C(yz) = C(vz)$, 根据最大色邻域的定义, $C(uy) \neq C(uz)$, $C(vy) \neq C(vz)$. 所以我们有 $C(xy) \neq C(yz)$.

因此，不失一般性，假设 $C(xy) = C(uy)$ 且 $C(yz) = C(vz)$. 根据 (1) 和断言 1(iii), 我们得出 $C(uy) \neq C(vz)$. 故 $C(xy) \neq C(yz)$.

因此 $C_p$ 是 $G$ 中的交错圈. 并且根据 $N^c(u,v)$ 的定义，我们知道圈 $C_p$ 上的每种颜色在圈 $C_p$ 上至多出现两次. ■

若 $D$ 是一个含有向圈的有向图, $D$ 的围长是 $D$ 中的最短有向圈的长度. 因为 $G$ 不含交错的三角形和交错的四边形，所以 $D_1$ 的围长至少为 5.

**引理 4.3.1** (Häggkvist [19]) 若 $D$ 是一个顶点个数是 $m$ 围长至少为 5 的有向图，则 $\delta^+(D) < \frac{9(m-1)}{28}$.

令 $\alpha = \frac{9}{28}$. 由引理 4.3.1, $D_1$ 中存在顶点 $w$ 使得 $d^+_{D_1}(w) < \alpha(|V(D_1)| - 1) = \alpha(s + t - 1) = \alpha(d^c(u) + t - 2)$. 不妨假设 $w \in N^c_1(u)$. 令 $N^c(w), N^c_{G_0}(w)$ 分别表示 $w$ 在 $G$ 和 $G_0$ 中的最大色邻域. 则 $|N^c_{G_0}(w)| = |N^+_{D_1}(w)| + |u| = d^+_{D_1}(w) + 1$. 我们有

$$|N^c(w) \backslash (X \cup \{u, v\})| \geq d^c(w) - |N^c_{G_0}(w)| > d^c(w) - \alpha(d^c(u) + t - 2) - 1.$$

若 $d^c(w) - \alpha(d^c(u) + t - 2) - 1 > t$, 考虑边 $uw$, 我们得到

$$\begin{aligned} |N^c(u, w)| &\geq |\{v, u_1, u_2, \cdots, u_s\}| + |N^c(w) \backslash (X \cup \{u, v\})| + |u| \\ &> s + t + 2 \\ &= |N^c(u, v)|, \end{aligned}$$

与边 $uv$ 的选择矛盾.

所以 $d^c(w) - \alpha(d^c(u) + t - 2) - 1 \leq t$, 也就是 $t \geq \frac{d^c(w)}{1+\alpha} - \frac{\alpha d^c(u)}{1+\alpha} + \frac{2\alpha - 1}{1+\alpha}$. 所以，我们有

$$\begin{aligned} n &\geq |X| + |u| + |v| + |N^c(w) \backslash (X \cup \{u, v\})| \\ &> d^c(u) + t - 1 + 2 + d^c(w) - \alpha(d^c(u) + t - 2) - 1 \\ &\geq \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} d^c(u) + \frac{2}{1 + \alpha} d^c(w) + \frac{5\alpha - 1}{1 + \alpha}. \end{aligned}$$

又因为对 $G$ 中的每一个顶点 $v$, 都有 $d^c(v) \geq \frac{37n - 17}{75}$ 且 $\alpha = \frac{9}{28}$, 上述不等式为

$$n > \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{37n - 17}{75} + \frac{5\alpha - 1}{1 + \alpha} \geq n.$$

得到矛盾，定理 4.2.3 证毕. ■

定理 4.2.1 的证明.

我们的证明技巧和定理 4.2.3 的证明一样，所以我们省略了很多细节. 反证法. 假设 $G$ 是一个边染色图，都任意顶点 $v$ 都有 $d^c(v) > \frac{n+1}{3}$, 并且 $G$ 不含满足性质的交错圈.

同样地，我们选择边 $uv \in E(G)$ 使得 $|N^c(u, v)|$ 最大. 设 $N^c(u, v) = N^c_1(u) \cup N^c_1(v) = X \cup \{u, v\}$. 在图 $G[X]$ 上做同样的删除和定向操作，得到有向图记为 $D_1$.

类似地，我们可以证明 $D_1$ 中不含有向圈. 我们有下面的显然成立的引理.

**引理 4.3.2** 最小出度至少为 1 的任意简单有向图都有一个有向圈.

根据引理 4.3.2, 存在点 $w$ 使得 $d^+_{D_1}(w)=0$. 不妨假设 $w\in N^c_1(u)$. 令 $N^c(w)$ 为 $w$ 在 $G$ 中的一个最大色邻域，则 $|N^c(w)\backslash(X\cup\{u,v\})|\geq d^c(w)-1$. 因此，根据 $uv$ 的选法，我们有 $d^c(w)-1\leq t$. 故

$$\begin{aligned} n &\geq |X|+|u|+|v|+|N^c(w)\backslash(X\cup\{u,v\})| \\ &\geq d^c(u)+t-1+2+d^c(w)-1 \\ &\geq d^c(u)+2d^c(w)-1 \\ &> 3(\frac{n+1}{3})-1=n \end{aligned}$$

得到矛盾，证毕. □

## 4.4 定理 4.2.4 的证明

若 $d=2$, 定理 4.2.4 显然成立. 所以我们假设 $d\geq 3$. 反证法. 否则，不失一般性，设 $P_l=v_1v_2\cdots v_l$ 为 $G$ 中最长的交错路，显然 $l\leq 2d$. 我们选择 $v_1$ 的一个最大色邻域 $N^c(v_1)$ 使得 $v_2\in N^c(v_1)$. 根据 $P_l$ 的选择，我们有 $N^c(v_1)\subseteq V(P_l)$. 因为 $|N^c(v_1)|=d^c(v)\geq d$, 所以 $l\geq d+1$.

选择正整数 $s$ 满足

$(R_1)$ $v_s\in N^c(v_1)$;

$(R_2)$ $s\geq\lceil\frac{2d}{3}\rceil+1$;

$(R_3)$ 在满足 $(R_1),(R_2)$ 的前提下，$s$ 尽可能小.

因为 $d\geq 3$ 且 $d+1>\lceil\frac{2d}{3}\rceil+1$, 所以 $s<l$. 我们有下面的断言成立.

**断言 1.** 若 $v_i\in N^c(v_1)$ 且 $i\geq s$, 则 $C(v_iv_{i+1})\neq C(v_1v_i)$.

**证明.** 否则，存在 $i\geq s$ 使得 $C(v_iv_{i+1})=C(v_1v_i)$. 因为 $P_l$ 是一条交错路，所以 $C(v_{i-1}v_i)\neq C(v_iv_{i+1})$, 因此 $P[v_1,v_i]v_iv_1$ 是一个交错圈，它的长度至少为

$i \geq s \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, 得到矛盾. ■

我们选择 $v_l$ 的最大色邻域 $N^c(v_l)$ 使得 $v_{l-1} \in N^c(v_l)$. 同样地，$N^c(v_l) \subseteq V(P_l)$. 我们选择正整数 $t$ 满足

$(R_1')$ $v_t \in N^c(v_l)$;

$(R_2')$ $t \leq l - \lceil \frac{2d}{3} \rceil$;

$(R_3')$ 在满足 $(R_1'), (R_2')$ 的条件下， $t$ 尽可能大.

同样地，我们有 $t > 1$ 和下面的断言 2 成立，这里我们省略了证明.

**断言 2.** 若 $v_i \in N^c(v_l)$ 且 $i \leq t$, 则 $C(v_{i-1}v_i) \neq C(v_i v_l)$.

**断言 3.** $s < t$.

**证明.** 否则，我们有 $s \geq t$. 若 $s > t$, 则 $AC^0 = v_1 v_s P[v_s, v_l] v_l v_t P^-[v_t, v_1]$ 是一个交错圈. 而且 $|AC^0| = |V(P[v_s, v_l])| + |V(P[v_1, v_t])| \geq 2(d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1) = 2(\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 1) = 2\lfloor \frac{d}{3} \rfloor + 2 \geq \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, 得到矛盾.

所以我们有 $s = t$. 如果存在 $v_j \in N^c(v_1)$ 使得 $s + 1 \leq j \leq l - 1$, 则存在交错圈 $AC^1 = v_1 v_j P[v_j, v_l] v_l v_s P^-[v_s, v_1]$, 长度为 $|AC^1| \geq 2 + |V(P[v_1, v_s])| \geq 3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, 从而得到矛盾. 同样地，若存在 $v_j \in N^c(v_l)$ 使得 $2 \leq j \leq s - 1$, 我们得到交错圈 $v_1 v_s P[v_s, v_l] v_l v_j P^-[v_j, v_1]$, 长度为 $3 + \lceil \frac{2d}{3} \rceil$, 也得到矛盾.

故若 $s + 1 \leq j \leq l - 1$, 则 $v_j \notin N^c(v_1)$; 若 $2 \leq j \leq s - 1$, 则 $v_j \notin N^c(v_l)$. 另一方面，根据 $(R_3)$, $V(P[v_{s+1}, v_l]) \cap N^c(v_1)$ 中至少存在 $d - \lceil \frac{2d}{3} \rceil = \lfloor \frac{d}{3} \rfloor \geq 1$ 顶点，故 $v_l \in N^c(v_1)$. 同样地， $v_1 \in N^c(v_l)$. (这时，我们有 $d = 3$). 也就是说，$C(v_1 v_l) \neq C(v_1 v_2)$ 且 $C(v_1 v_l) \neq C(v_{l-1} v_l)$. 则 $P[v_1, v_l] v_l v_1$ 是一交错圈，且长度至少为 $l \geq d + 1 > \lceil \frac{2d}{3} \rceil + 1$, 得到矛盾. ■

**断言 4.**

(4.1) 若 $2 \leq j \leq s - 1$, 则 $v_j \notin N^c(v_l)$;

(4.2) 若 $t + 1 \leq j \leq l - 1$, 则 $v_j \notin N^c(v_1)$.

**证明.** 根据对称性，我们只证明 (4.1). 若结论不成立，则存在 $2 \leq j \leq s - 1$, 使得 $v_j \in N^c(v_l)$ . 显然 $j \leq t$, 根据断言 2, 我们有 $C(v_{j-1} v_j) \neq C(v_j v_l)$. 因此我们

得到交错圈 $AC^2 = v_1v_sP[v_s, v_l]v_lv_jP^-[v_j, v_1]$，并且 $|AC^2| \geq |V(P[v_s, v_l])| + 2 \geq \lfloor\frac{2d}{3}\rfloor + 2 \geq \lceil\frac{2d}{3}\rceil + 1$，得到矛盾. ■

令 $A = N^c(v_1) \cap V(P[v_s, v_t])$, $B = N^c(v_l) \cap V(P[v_s, v_t])$.

**断言 5.** $|A| + |B| \geq 2\lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 1$.

**证明.** 根据 $(R_1)$, $N^c(v_1) \cap V(P[v_s, v_l])$ 中的顶点数至少为 $d - (|P[v_1, v_{s-1}]| - 1) \geq d - (\lceil\frac{2d}{3}\rceil - 1) = \lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 1$. 根据断言 4, 我们有 $N^c(v_1) \cap V(P[v_s, v_l]) = N^c(v_1) \cap (V(P[v_s, v_t]) \cup \{v_l\}) = A \cup (N^c(v_1) \cap \{v_l\})$. 因此 $|A| \geq \lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 1 - |N^c(v_1) \cap \{v_l\}|$. 同样地，我们可以得到 $|B| \geq \lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 1 - |N^c(v_l) \cap \{v_1\}|$. 因此 $|A| + |B| \geq 2\lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 2 - (|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| + |N^c(v_l) \cap \{v_1\}|)$.

若 $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| + |N^c(v_l) \cap \{v_1\}| = 2$, 则 $v_l \in N^c(v_1)$, $v_1 \in N^c(v_l)$. 由最大色邻域的定义，我们得出 $C(v_1v_l) \neq C(v_1v_2)$, $C(v_1v_l) \neq C(v_{l-1}v_l)$. 因此 $P[v_1, v_l]v_lv_1$ 是一个交错圈，长度为 $l \geq d+1$，得到矛盾. 故我们有 $|N^c(v_1) \cap \{v_l\}| + |N^c(v_l) \cap \{v_1\}| \leq 1$，进而 $|A| + |B| \geq 2\lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 1$. ■

接下来我们完成定理的证明. 我们有 $|V(P[v_s, v_t])| \leq l - |V(P[v_1, v_{s-1}])| - |V(P[v_{t+1}, v_l])| \leq l - \lceil\frac{2d}{3}\rceil - \lceil\frac{2d}{3}\rceil \leq 2d - 2\lceil\frac{2d}{3}\rceil \leq 2\lfloor\frac{d}{3}\rfloor$. 根据断言 5, $|N^c(v_1) \cap V(P[v_s, v_t])| + |N^c(v_l) \cap V(P[v_s, v_t])| = |A| + |B| \geq 2\lfloor\frac{d}{3}\rfloor + 1$, 则存在 $v_j$ $(s+1 \leq j \leq t)$ 使得 $v_j \in N^c(v_1)$ 且 $v_{j-1} \in N^c(v_l)$. 所以我们得到一个交错圈 $v_1v_jP[v_j, v_l]v_lv_{j-1}P^-[v_{j-1}, v_1]$，长度为 $l \geq d + 1 \geq \lceil\frac{2d}{3}\rceil + 1$，得到矛盾. ■

## 4.5 定理 4.2.7 的证明

**引理 4.5.1** (Bang-Jensen, Gutin 和 Yeo[9]) 若 $K_n^c$ 包含一个边正常染色的 2- 因子，则它含有一条交错的哈密尔顿路.

Häggkvist [49] 证明了满足 Bollobás-Erdős 条件的边染色完全图有一个边正常染色的 2- 因子. 由引理 4.5.1 和 Häggkvist 的结果，我们得出任意一个满足 Bollobás-Erdős 条件的边染色完全图都有一条交错的哈密尔顿路.

定理 4.2.7 的证明.

若 $n=3$, 结论显然成立. 所以我们不妨假设 $n\geq 4$. 反证法. 假设结论不成立，则令 $P=v_1v_2\cdots v_n$ 是 $K_n^c$ 的一条交错的哈密尔顿路. 选择正整数 $s$ 满足:
$(R_1)$ $C(v_1v_s)\neq C(v_1v_2)$;
$(R_2)$ $s\geq\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+1$;
$(R_3)$ 在满足 $(R_1),(R_2)$ 的情况下， $s$ 尽可能小.

**断言 1.**
(1.1) $s\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lceil\frac{n+2}{3}\rceil-1$;
(1.2) 对 $i\geq s$, 若 $C(v_1v_i)\neq C(v_1v_2)$, 则 $C(v_1v_i)\neq C(v_iv_{i+1})$.

**证明**. 根据 $(R_3)$, 对于 $\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+1\leq j\leq s-1$, 我们有 $C(v_1v_j)=C(v_1v_2)$. 若 $s\geq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lceil\frac{n+2}{3}\rceil$, 则至少有 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lceil\frac{n+2}{3}\rceil-(1+\lceil\frac{n+2}{3}\rceil)+1\geq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 条染颜色 $C(v_1v_2)$ 关联于 $v_1$, 与 $\Delta(K_n^c)<\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 矛盾.

因为 $P$ 是一条交错的哈密尔顿路, 所以 $C(v_{i-1}v_i)\neq C(v_iv_{i+1})$. 如果存在 $i\geq s$ 使得 $C(v_1v_i)\neq C(v_1v_2)$ 且 $C(v_1v_i)=C(v_iv_{i+1})$, 则 $P[v_1,v_i]v_iv_1$ 是一个交错圈，长度至少为 $i\geq s\geq\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+1$, 从而得到矛盾. ■

我们选择正整数 $t$ 满足:
$(R_1')$ $C(v_tv_n)\neq C(v_{n-1}v_n)$;
$(R_2')$ $t\leq n-\lceil\frac{n+2}{3}\rceil$;
$(R_3')$ 在满足 $(R_1'),(R_2')$ 的情况下， $t$ 尽可能大.

同样地，我们有下面的断言，为了避免重复，我们省略了证明.

**断言 2.**
(2.1) $t\geq\lceil\frac{n}{2}\rceil-\lceil\frac{n+2}{3}\rceil+2$;
(2.2) 对 $i\leq t$, 若 $C(v_iv_n)\neq C(v_{n-1}v_n)$, 则 $C(v_iv_n)\neq C(v_{i-1}v_i)$.

**断言 3.** $s<t$.

**证明**. 否则，我们有 $s\geq t$. 若 $s>t$, 则 $AC^0=v_1v_sP[v_s,v_n]v_lv_tP^-[v_t,v_1]$ 是一

个交错圈，而且 $|AC^0| = |V(P[v_s, v_n])| + |V(P[v_1, v_t])| \geq (n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 2) + (\lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 2) = 2(\lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil) + 4 \geq \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1$, 得到矛盾.

所以我们有 $s = t$. 对于 $s+1 \leq j \leq n-1$, 有 $C(v_1v_j) = C(v_1v_2)$ 成立. 否则，我们得到一个交错圈 $AC^1 = v_1v_jP[v_j, v_n]v_nv_sP^-[v_s, v_n]$, 长度为 $|AC^1| \geq 2 + |V(P[v_1, v_s])| \geq 3 + \lceil\frac{n+2}{3}\rceil$, 得到矛盾. 同样地，对 $2 \leq j \leq s-1$, 有 $C(v_jv_n) = C(v_{n-1}v_n)$ 成立. 由 $\Delta(K_n^c) < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, 考虑顶点 $v_1$ 和颜色 $C(v_1v_2)$, 则 $n - s < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, 故 $s > \lceil\frac{n}{2}\rceil$. 同样地，考虑顶点 $v_n$ 和颜色 $C(v_{n-1}v_n)$, 我们得到 $s - 1 < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, 故 $s < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1$, 得到矛盾. ■

**断言 4.**
(4.1) 若 $2 \leq j \leq s-1$, 则 $C(v_nv_j) = C(v_{n-1}v_n)$;
(4.2) 若 $t+1 \leq j \leq n-1$, 则 $C(v_1v_j) = C(v_1v_2)$.

**证明.** 根据对称性，我们只证明 (4.1). 否则，存在 $2 \leq j \leq s-1$ 使得 $C(v_jv_n) \neq C(v_{n-1}v_n)$. 显然，$j \leq t$. 根据断言 2, $C(v_{j-1}v_j) \neq C(v_jv_n)$. 我们得到交错圈 $AC^2 = v_1v_sP[v_s, v_n]v_nv_jP^-[v_j, v_1]$, 并且 $|AC^2| \geq |V(P[v_s, v_n])| + 2 \geq |V(P[v_t, v_n])| + 3 \geq \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 3$, 得到矛盾. ■

令 $A = \{v : C(v_1v) \neq C(v_1v_2)\}$, $B = \{v : C(v_nv) \neq C(v_{n-1}v_n)\}$.

**断言 5.** $|A \cap V(P[v_s, v_t])| + |B \cap V(P[v_s, v_t])| \geq 2(\lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1)$.

**证明.** 根据 $(R_1)$, $|A \cap V(P[v_s, v_n])| \geq n - (\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1) - (\lceil\frac{n+2}{3}\rceil - 1) \geq \lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 2$. 由断言 4, 我们得到 $A \cap V(P[v_s, v_n]) = A \cap (V(P[v_s, v_t]) \cup \{v_n\}) = (A \cap V(P[v_s, v_t])) \cup (A \cap \{v_n\})$. 故 $|A \cap V(P[v_s, v_t])| \geq \lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1$. 同样地，$|B \cap V(P[v_s, v_t])| \geq \lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1$. 所以 $|A \cap V(P[v_s, v_t])| + |B \cap V(P[v_s, v_t]| \geq 2(\lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1)$.
■

接下来我们完成定理 4.2.7 的证明. 我们有 $|V(P[v_s, v_t])| \leq n - |V(P[v_1, v_{s-1}])| - |V(P[v_{t+1}, v_l])| \leq n - 2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil$. 根据断言 5, $|A \cap V(P[v_s, v_t])| + |B \cap V(P[v_s, v_t])| = |A| + |B| \geq 2(\lceil\frac{n}{2}\rceil - \lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1) > n - 2\lceil\frac{n+2}{3}\rceil + 1 > |V(P[v_s, v_t])|$, 因此存在 $v_j$ $(s+1 \leq j \leq t)$ 使得 $v_j \in A$, $v_{j-1} \in B$. 因此，我们得到一个交错的哈密尔顿圈

$v_1v_jP[v_j,v_n]v_nv_{j-1}P^-[v_{j-1},v_1]$, 得到矛盾. 证毕. ■

# 第五章 无桥图的 $k$- 途径

在这一章，我们证明了最大度为 $\Delta$ 的任意无桥图都有一条 $\lceil(\Delta+1)/2\rceil$- 途径，同时证明了这个界是最好可能的.

## 5.1 介绍

我们沿用 Jackson 和 Wormald [54] 的定义，图 $G$ 的一条 $k$- 途径就是 $G$ 中过每个顶点至多 $k$ 次的闭支撑途径，其中 $k\geq 1$ 是整数. 作为图的哈密尔顿圈的一个推广，图的 $k$- 途径的研究受到了广泛关注，参考 [36, 37, 44].

自然地，我们会考虑如下问题：确定最小的整数 $k=k(\Delta)$, 使得最大度为 $\Delta$ 的任意图都有一条 $k$- 途径. 对于一般图，这个问题是平凡的，因为最大度为 $\Delta$ 的任意树都有 $\Delta$- 途径 [54], 但不含任何 $k$- 途径，对于 $k<\Delta$. 所以我们考虑无桥图 (2- 边连通图), 并证明了下面的结果.

**定理 5.1.1** 最大度为 $\Delta$ 的任意无桥图，都有一条 $\lceil(\Delta+1)/2\rceil$- 途径.

事实上，我们在 5.2 节中证明了一个比定理 5.1.1 更强的结果 (定理 5.2.4). 在 5.3 节中，我们证明了定理 5.1.1 中的界是最好可能的.

## 5.2 上界

在这一章中，我们考虑无环的有限图，但允许有重边出现. 我们用 $G$ 表示一个图，它的顶点集合和边集合分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$. 如果 $W$ 是图 $G$ 的一条途径，我们用 $p_W(x)$ 表示 $W$ 经过点 $x\in V(G)$ 的次数. 图 $G$ 的一个边割，是一个极小意义下的边集合 $E_1$, 满足 $G-E_1$ 不连通. 设 $v$ 是图 $G$ 的一个顶点， $e_1,e_2$ 是关联顶点 $v$ 的两条不同的边. 令 $v_i$ 表示边 $e_i$ 的不同于 $v$ 的端点. 增加一个点 $v^*$, 用 $e_1^*,e_2^*$ 取代 $e_1,e_2$, 其中 $e_i^*$ 的端点为 $v^*$ 和 $v_i$, 得到的图记为 $G(v,e_1,e_2)$, 这个操作称为从顶点 $v$ 分离 $e_1$ 和 $e_2$. 下面，我们给出 Fleischner 分离引理 [40] (或参考

[88, 定理 A.5.2]) 的一个直接推论:

**引理 5.2.1** 设 $v$ 是无桥图 $G$ 的一个顶点，而且 $v$ 的度至少为 4, 则存在两条关联于 $v$ 的边 $e_1, e_2$, 使得 $G(v, e_1, e_2)$ 是无桥图.

**引理 5.2.2** 设 $v$ 是图 $G$ 的一个顶点，$e_1, e_2$ 是关联于 $v$ 的两条边，$H = G(v, e_1, e_2)$, 如果 $W$ 是 $H$ 的一条闭支撑途径，而且满足 $p_W(v^*) \leq 2$ (其中 $v^*$ 是前面定义的)，则 $G$ 有一条闭途径 $\tilde{W}$ 满足:
(i) 对所有的顶点 $z \in V(G)\backslash\{v\}$, $p_{\tilde{W}}(z) \leq p_W(z)$, 并且
(ii) $1 \leq p_{\tilde{W}}(v) \leq p_W(v) + 1$.

**证明.** $W$ 经过的顶点依次记为

$$W = x_0 x_1 \ldots x_\ell,$$

其中 $x_0 = x_\ell$. 对顶点的下标的所有操作都对 $\ell$ 取模. $W$ 的一条子途径记为:

$$[x_i, x_j] = x_i x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_j.$$

我们记 $[x_i, x_j]^-$ 为子途径 $x_i x_{i-1} \ldots x_{j+1} x_j$.

若 $p_W(v^*) = 1$, 则令 $\tilde{W} = W$ 即满足条件. 所以，我们不妨假设 $p_W(v^*) = 2$. 设 $v^*$ 在 $W$ 上为 $x_i$ 和 $x_j$, 其中 $i < j$. $v_1$ 和 $v_2$ 的定义同我们在前面分离操作的定义中一样. 假设 $x_i$ 在 $W$ 上的邻点都是 $v_1$, 即 $[x_{i-1}, x_{i+1}] = v_1 v^* v_1$. 令

$$\tilde{W} = [x_0, x_{i-1}][x_{i+2}, x_{j-1}]v[x_{j+1}, x_\ell]$$

(见图 1a). 因为 $x_{i+2}$ 是 $x_{i-1} = x_{i+1}$ 的邻点，故我们可以连接子途径 $[x_0, x_{i-1}]$ 和 $[x_{i+2}, x_{j-1}]$. 容易验证 $\tilde{W}$ 满足条件 (i)-(ii). 根据对称性，我们可以假设 $x_i$, $x_j$ 在 $W$ 上的邻点为 $v_1$ 和 $v_2$. 我们分下面两种情形.

*情形 1:* $[x_{i-1}, x_{i+1}] = [x_{j-1}, x_{j+1}] = v_1 v^* v_2$. 令

$$\tilde{W} = [x_0, x_{i-1}][x_{j-2}, x_{i+2}]^-[x_{j+1}, x_\ell]$$

(见图 1b), 条件 (i)-(ii) 满足. 根据对称性，这也包括了 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 和 $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ 都为 $v_2 v^* v_1$ 的情形.

*情形 2:* $[x_{i-1}, x_{i+1}] = [x_{j-1}, x_{j+1}]^{-} = v_1 v^* v_2$. 因为 $W$ 是支撑子图，存在 $k$ 使得 $x_k = v$. 我们不妨假设 $i < k < j$, 因为其它的情况 ($k < i$ 或 $k > j$) 是对称的. 途径

$$\tilde{W} = [x_0, x_{i-1}]\, v\, [x_{k-1}, x_{i+2}]^{-}\, [x_{j-1}, x_{k+1}]^{-}\, v\, [x_{j+1}, x_\ell]$$

(见图 1c) 满足条件.

证毕. ■

图的一条闭支撑途径，可以看成图的一个边权函数. 设 $w$ 是一个函数，使得对每一条边 $e \in E(G)$ 都有一个非负权 $w(e)$. 对任意集合 $X \subset E(G)$, 我们定义

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e).$$

若对 $G$ 的任意一个边割 $C$, $w(C)$ 都是一个正偶数，则称 $w$ 为欧拉权. 若 $w$ 是一个欧拉权，则每个顶点 $v$ 都关联一条有非负权的边，因为

$$\partial v = \{\, e :\ e \text{ 关联于 } v\}$$

包含一个边割.

**引理** 5.2.3 设 $G$ 是一个图， $k \geq 1$ 是一个正整数. 图 $G$ 有一条 $k$- 途径当且仅当 $G$ 有一个欧拉权 $w$, 使得对 $G$ 的每一个顶点 $v$, 都有

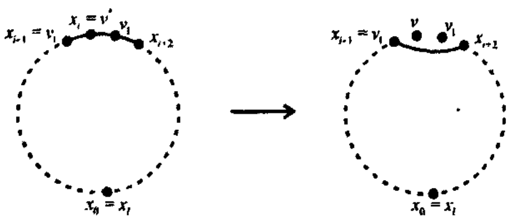
$$w(\partial v) \leq 2k. \tag{1}$$

**证明**. 若 $G$ 有一条 $k$- 途径 $W$, 则把 $W$ 经过每条边的次数 (任意方向) 作为这条边的权，我们就得到一个满足 (1) 的欧拉权. 相反地，设 $w$ 是 $G$ 的一个任意欧拉权，若把 $G$ 的每一条边 $e$ 用 $w(e)$ 条平行边来代替 (若 $w(e) = 0$, 则去掉 $e$), 我们就得到了一个最大度为 $2k$ 的 (连通的) 欧拉图. 所得到的新图的任意的一条欧拉迹就是图 $G$ 的一条 $k$- 途径. ■

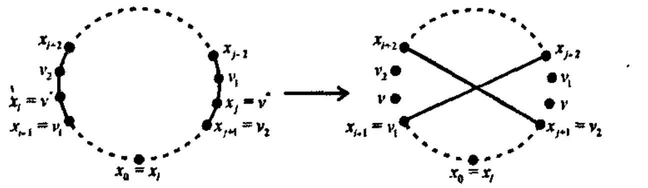
现在我们证明本章的主要结果.

**定理** 5.2.4 任意无桥图都含有一条闭的支撑途径 $W$, 使得对任意顶点 $x$,

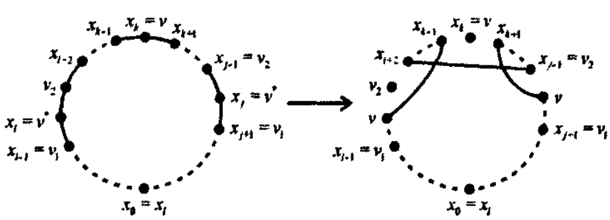
$$p_W(x) \leq \left\lceil \frac{d(x)+1}{2} \right\rceil. \tag{2}$$



(a)W 包含子途径 $v_1v^*v_1$.



(b)W 包含两个子途径 $v_1v^*v_2$



(c)W 包含子途径 $v_1v^*v_2$ 和 $v_2v^*v_1$

图 1: 引理 5.2.2 的证明中的几种可能性. 我们用虚线表示途径，实线表示边. 在每一种情况中，右边的图表示图 $G$ 的途径 $\tilde{W}$.

**证明**. 我们对 $s(G)$ 进行归纳，其中

$$s(G) = \sum_{\substack{v \in V(G) \\ d(v) \geq 4}} d(v).$$

首先假设 $s(G) = 0$, 则 $\Delta(G) \leq 3$. 若 $G$ 是一个圈，显然结论成立. 因为 $G$ 的最小度至少为 2, 我们不妨假设 $G$ 是一个无桥的 3- 正则图 $H$ 的一个剖分. 由著名的 Petersen 定理 (见 [26, 推论 2.2.2]), $H$ 有个 1- 因子 $F$. 令 $w: E(G) \longrightarrow \{1,2\}$ 是一个函数，若 $H$ 中 $e$ 对应的边属于 $F$, 则 $w(e)$ 的值为 2, 否则为 1. 容易验证 $w$ 是一个 $G$ 的欧拉权. 根据引理 5.2.3, $G$ 有一条 2- 途径.

接下来，假设 $\Delta(G) \geq 4$, 并且对于满足 $s(G') < s(G)$ 的所有图 $G'$, 都有 (2) 成立. 我们证明对图 $G$, 有 (2) 成立.

设 $v$ 为度为 $\Delta(G)$ 的任意顶点. 根据引理 5.2.1, 存在两条边 $e_1$, $e_2$ 使得 $G(v, e_1, e_2)$ 是无桥图. 因为 $G(v, e_1, e_2)$ 的度为 $\Delta(G)$ 的顶点比 $G$ 的要少，根据归纳法 $G(v, e_1, e_2)$ 有一条闭的支撑途径 $W_0$ 满足 (2). 根据引理 5.2.2, 我们能找到 $G$ 的一条闭的支撑途径 $\tilde{W}_0$ 使得对任意顶点 $x \in V(G) \backslash \{x\}$, $p_{\tilde{W}_0}(x) \leq p_{W_0}(x)$ 并且

$$1 \leq p_{\tilde{W}_0}(v) \leq p_{W_0}(v) + 1.$$

显然 $\tilde{W}_0$ 是 $G$ 中的一条闭支撑途径，对所有的顶点 $x \neq v$, (2) 成立，并且

$$p_{\tilde{W}_0}(v) \leq p_{W_0}(v) + 1 \leq \left\lceil \frac{(d(v)-2)+1}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{d(v)+1}{2} \right\rceil.$$

则 $W = \tilde{W}_0$ 对 $G$ 中所有的顶点，满足 (2). ■

## 5.2 下界

**定理 5.3.1** 对任意偶数 $\Delta \geq 4$, 存在一个 2- 连通图 $G$ 满足 $\Delta(G) = \Delta$, 并且 $G$ 不含 $(\Delta/2)$- 途径.

**证明**. 设 $k = \Delta - 1$. 对 $i \in \{1, \ldots, 9\}$, 令 $H_i$ 为完全二部图 $K_{2,k}$, 度数为 $k$ 的顶点分别记为 $a_i$ 和 $b_i$.

图 $G$ 由不相交的 $H_1, \ldots, H_9$ 增加两个顶点 $a$ 和 $b$, 和以下的边

$$\{aa_i:\ i \in \{1,4,7\}\} \cup \{bb_i:\ i \in \{3,6,9\}\} \cup \{b_i a_{i+1}:\ i \in \{1,2,4,5,7,8\}\}$$

构成 ($k=3$ 的例子见图 2), 则 $G$ 的最大度为 $k+1=\Delta$.

我们现在证明 $G$ 不含 $(\Delta/2)$- 途径. 否则，根据引理 5.2.3, 存在欧拉权 $w$, 使得对任意顶点 $v$, 都有

$$w(\partial v) \leq \Delta. \tag{3}$$

因为 $w(\partial a)$ 是偶数, 所以存在一条关联于 $a$ 的边的权是偶数. 我们不妨假设 $w(aa_1)$ 是偶数. 因为

$$C = \{aa_1, b_1a_2, b_2a_3, b_3b\}$$

中的任意一对边都构成边割，所以至多有一条边 $e \in C$ 满足 $w(e)=0$. 相应地，对某一个 $i \in \{1,2,3\}$, $C$ 中关联 $a_i$ 或者 $b_i$ 的边的权，都是由 $w$ 确定的正偶数. 设令 $C_i$ 表示这两条边组成的集合. 根据 (3), 我们有

$$w(E(H_i)) = w(\partial a_i) + w(\partial b_i) - w(C_i) \leq 2\Delta - 4. \tag{4}$$

对 $H_i$ 中的度为 2 的任意顶点，$\partial d$ 是一个边割，其中 $w(\partial d) \geq 2$. 则

$$w(E(H_i)) \geq 2k = 2\Delta - 2,$$

与 (4) 矛盾. 所以 $G$ 不含 $(\Delta/2)$- 途径. ■

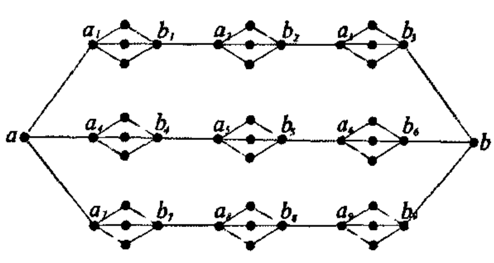



图 2: 不含 2- 途径的最大度为 4 的 2- 连通图

我们知道图的一条迹就是一条经过每条边至多一次的途径. 根据 Jaeger [55, 56] 的一个著名的结果，任意 4- 边连通图 $G$ 都有一条闭的支撑迹. 如果图 $G$ 的最

大度为 $\Delta$, 则这条迹就是 $G$ 的一条 $\lceil\Delta/2\rceil$- 途径. 若 $\Delta$ 为偶数，这比定理 5.1.1 中的界改进了 1. 在定理 5.3.1 的证明中，我们构造的例子多次用到 2 条边组成的边割. 对于 3- 边连通图 $G$, 上述界是否可能改进？故我们提出如下问题：

**定理** 5.3.2 最大度为 $\Delta$ 的任意 3- 边连通图是否都有一条 $\lceil\Delta/2\rceil$- 途径？

# 第六章　平面图的圆选择数

这一章，我们证明了围长至少为 $\frac{10n+8}{3}$ 的平面图的圆选择数至多为 $2+\frac{2}{n}$，从而改进了 [53] 中的结果. 另外，我们还讨论了几类特殊平面图 (系列平行图，外平面图，奇轮) 的圆选择数.

## 6.1　介绍

设 $G=(V,E)$ 是一个图，$p,q$ $(p\geq 2q)$ 是正整数. 图 $G$ 的一个 $(p,q)$- 染色是一个映射 $c:V\rightarrow\{0,1,,...,p-1\}$ 使对 $G$ 的任意一条边 $uv$，都有 $q\leq|c(u)-c(v)|\leq p-q$. 图 $G$ 的 $(p,1)$- 染色就是 $G$ 的一个正常的 $p$- 染色. 图 $G$ 的圆色数有如下定义

$$\chi_c(G)=\inf\{\ \frac{p}{q}:\ G\text{ 存在一个 }(p,q)\text{- 染色}\}.$$

我们知道对任意图 $G$，有 $\chi(G)-1<\chi_c(G)\leq\chi(G)$ 成立 ([91]).

图 $G$ 的一个 $k$- 列表就是一个函数 $L$，使得 $G$ 中每一个顶点 $v$ 都分配一个 $k$ 种颜色的集合 $L(v)$. 图 $G$ 的一个 $L$- 染色就是 $G$ 的一个正常染色 $f$，使得对任意顶点 $v$，都有 $f(v)\in L(v)$. 如果对于任意的 $k$- 列表 $L$，$G$ 都存在一个 $L$- 染色，图 $G$ 被称为 $k$- 可选择的. 图的选择数 (列表色数) $\chi_l(G)$，是满足 $G$ 是 $k$- 可选择的最小整数 $k$ ([6]).

Zhu [89] 给出了列表染色的如下推广. 假设 $p,q$ $(p\geq 2q)$ 是正整数， $t$ $(t\geq 1)$ 是一个实数. 图 $G$ 的一个 $t$-$(p,q)$- 列表 $L$ 是一个列表 $L$，满足对任意顶点 $v$，$L(v)\subseteq\{0,1,\cdots,p-1\}$ 并且 $|L(v)|\geq tq$. 图 $G$ 的 $L$-$(p,q)$- 染色是 $G$ 的一个 $(p,q)$- 染色 $c$，满足对任意顶点 $v$，都有 $c(v)\in L(v)$. 如果对 $G$ 的任意 $t$-$(p,q)$- 列表 $L$，$G$ 都有一个 $L$-$(p,q)$- 染色，则我们称 $G$ 是圆 $t$-$(p,q)$- 可选择的. 如果对于任意正整数 $p,q$ $(p\geq 2q)$，$G$ 都是圆 $t$-$(p,q)$- 可选择的，我们称 $G$ 是圆 $t$- 可选择的. 图 $G$ 的圆选择数 (圆列表色数) 的定义如下：

$$\chi_{c,l}(G)=\inf\{\ t\geq 1:\ G\text{ 是圆 t- 可选的 }\}.$$

对于任意正整数 $k$, $G$ 是 $k$- 可选择的，等价于，对任意正整数 $p$, $G$ 是圆 $k$-$(p,1)$-可选择的. 因此

$$\chi_l(G)=\min\{\ k:\ \text{对任意正整数 } p,\ G \text{ 是圆 } k\text{-}(p,1)\text{- 可选择的 }\}.$$

图的圆色数有几个等价的定义. 我们给出另一个常用的定义. 设 $G=(V,E)$ 是一个图，$r\geq 1$ 是一个实数. 我们用 $S(r)$ 表示平面上的周长为 $r$ 的圆周. 对于 $S(r)$ 上的任意两点 $a,b$, 用 $|a-b|_r$ 表示 $a,b$ 在圆周上的距离. 我们把 $S(r)$ 看成区间 $[0,r)$, 并且假设任意两点在区间上的位置是确定的，则 $|a-b|_r=\min\{|a-b|_r, r-|a-b|_r\}$. 令 $(a,b)$ 定义如下：如果 $a<b$, 则 $(a,b)=\{x\in[0,r): a<x<b\}$ (所以 $(a,a)=\phi$); 如果 $a>b$, 则 $(a,b)=\{x\in[0,r): a<x<r\}\bigcup\{x\in[0,r): 0\leq x<b\}$. 类似地，我们可以定义闭区间 $[a,b]$. 图 $G$ 的圆 $r$- 染色是一个映射 $f:\ V\to S(r)$, 使得对于任意相邻的两点 $u,v$, 都有 $|f(u)-f(v)|_r\geq 1$. 圆染色的另一种定义 [91]:

$$\chi_c(G)=\min\{\ r: G\ \text{ 有圆 } r\text{- 染色 }\}.$$

上述圆色数定义也可以自然地推广到圆选择数 (圆列表色数). 下述圆选择数的定义是由 Mohar [69] 给出的. 如果 $U$ 是 $S(r)$ 上有限的开的圆弧的并，我们称 $U$ 是可分配的. 这些开的圆弧的长度的总和称为 $(U)$ 的长度. 如果对于图 $G$ 任一顶点 $v$, 我们都给 $v$ 分配 $S(r)$ 上的一个可分配的子集 $L(v)$, 称 $L$ 为 $G$ 的一个圆列表 (相对于 $r$ 的). 如果对于 $G$ 的任意顶点 $v$ , $L(v)$ 的长度至少为 $t$, 则称 $L$ 为 $G$ 的一个 $t$- 圆列表 (相对于 $r$ 的). 图 $G$ 的圆 $L$- 染色是一个从 $V$ 到 $S(r)$ 的映射 $c$, 满足对于任意顶点 $v$, $c(v)\in L(v)$, 并且对于任意相邻的顶点 $u,v$, 有 $|c(u)-c(v)|_r\geq 1$ 成立.

**命题 6.1.1** (Zhu [89]) 设 $G$ 是一个图，$t$ 是正实数. 如果对于任意的 $t$- 圆列表 $L$, $G$ 都有圆 $L$- 染色，则 $G$ 是圆 $t$- 可选择的. 反之，如果 $G$ 是圆 $t$- 可选择的，则对任意 $\epsilon>0$, 任意 $(t+\epsilon)$- 圆列表 $L$, $G$ 都有圆 $L$- 染色.

圆选择数的另一种定义为 ([89]):

$$\chi_{c,l}(G)=\inf\{\ t: \text{对任意 } t\text{- 圆列表 } L, G \text{ 都有圆 } L\text{- 染色 }\}.$$

由定义，我们可以得出如下两个命题.

**命题 6.1.2** (Zhu [89]) 对任意图 $G$, 有 $\chi_c(G) \le \chi_{c,l}(G)$.

**命题 6.1.3** (Zhu [89]) 对任意图 $G$, 有 $\chi_l(G) - 1 \le \chi_{c,l}(G)$.

Zhu [89] 证明了对任意有限 $k$- 可消去图 $G$, $\chi_{c,l}(G) \le 2k$, 并且对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k$- 可消去图不是圆 $(2k-\varepsilon)$- 可选择的. 因为对任意 $k$- 可消去图 $G$ 都有 $\chi_l(G) \le k+1$ 成立，所以 $\chi_{c,l}(G) - \chi_l(G)$ 可以任意大.

## 6.2 具有大围长的平面图的圆选择数

Mohar [69] 提出如下问题：使得任意平面图都是圆 $t$- 可选择的的最小实数 $t$ 是多少？ Havet, Kang, Müller 和 Sereni 证明了如下定理.

**定理 6.2.1** (Havet 等 [53]) 任意平面图都是圆 8- 可选择的.

**定理 6.2.2** (Havet 等 [53]) 对于任意正整数 $n$ $(n \ge 2)$, 存在平面图 $G_n$ 满足 $\chi_{c,l}(G_n) \ge 6 - \frac{1}{n}$.

我们自然会想到平面图的圆选择数和围长的关系， Havet 等人 [53] 研究了具有大围长的平面图的圆选择数，得到了如下结果.

**定理 6.2.3** (Havet 等 [53]) 设 $G$ 是满足 $g(G) \ge 4n+2$ 的平面图, 则 $\chi_{c,l}(G) \le 2+\frac{2}{n}$.

我们证明了如下结论.

**定理 6.2.4** 设 $G$ 满足 $g(G) \ge 3n+1$, 如果 $G$ 的任意子图的平均度都小于 $2+\frac{6}{5n+1}$, 则 $\chi_{c,l}(G) \le 2+\frac{2}{n}$.

**推论 6.2.5** 如果 $G$ 是围长不小于 $\frac{10n+8}{3}$ 的平面图，或者是围长大于 $\frac{10n+8}{3}$ 并且能够嵌入到圆环面或者克莱因瓶上的图，则 $\chi_{c,l}(G) \le 2+\frac{2}{n}$.

**证明**. 显然， $\frac{10n+8}{3}\geq 3n+1$, 并且图 $G$ 的任意子图的围长不小于图 $G$ 的围长. 因此，若我们的结论不成立，根据定理 6.2.4, 图 $G$ 的平均度至少为 $2+\frac{6}{5n+1}$, 则我们有 $|E(G)|\geq\frac{5n+4}{5n+1}|V(G)|$. 设 $\nu, e$ 分别表示图 $G$ 的顶点数和边数. 令 $f$ 是 $G$ 到欧拉特征值为 $N$ 的表面嵌入的面数. 根据欧拉公式,

$$2-N=\nu-e+f\leq e\left(\frac{5n+1}{5n+4}-1+\frac{2}{g(G)}\right)=e\left(\frac{2}{g(G)}-\frac{3}{5n+4}\right).$$

对于上述提及的三个面， $N\leq 2$. 所以有 $\frac{2}{g(G)}\geq\frac{3}{5n+4}$. 也就是说， $g(G)\leq\frac{10n+8}{3}$, 并且只有当 $N=2$ 时，等号成立，得到矛盾，从而结论成立. ■

从推论 6.2.5 和命题 6.1.2, 我们可以得到下面的推论，从而改进了定理 6.2.3 中的结果.

**推论 6.2.6** 设 $G$ 是一个满足 $g(G)\geq\frac{10n+8}{3}$ 的平面图，则 $\chi_c(G)\leq\chi_{c,l}(G)\leq 2+\frac{2}{n}$.

<u>定理 6.2.4 的证明.</u>

我们先介绍一下证明方法. 如果结论不成立，则 $G$ 不是圆 $(2+\frac{2}{n})$- 可选择的；我们将证明图 $G$ 的平均度至少为 $2+\frac{6}{5n+1}$, 从而得出矛盾. 我们受 [17] 中的证明方法的启发，用的方法是 " 放电法 " .

首先我们给出一个 [53] 中的重要的引理. 正如 [53] 中一样，在下面的引理 6.2.7 中，我们给定：图 $G$, 正整数 $p, q(p\geq 2q)$, 实数 $t(t\geq 1)$ 和 $G$ 的 $t$-$(p,q)$- 列表 $L$. 并且假设 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 已经有 $L$-$(p,q)$- 染色. 我们的目的是把该 $L$-$(p,q)$- 染色按照某种顺序 $(v_1=u_1,\cdots,v_k=u_k,v_{k+1},\cdots,v_{|V(G)|})$ 推广到 $G$ 上. 而且，我们要求在此顺序中，每一个未被染色的顶点至多有一个邻点的标号比它的标号大. 如果 $\{v_1,v_2,\cdots,v_j\}$ 的导出子图存在某种 $L$-$(p,q)$- 染色 $c$, 使得 $c(v_j)=a$, $a\in L(v_j)$, 并且 $c$ 与 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{j-1}\}$ 上的染色一致，则我们称颜色 $a\in L(v_j)$ 是可扩展的. 若图 $G$ 的每一个顶点都有一种可扩展的颜色，则 $G$ 有 $L$-$(p,q)$- 染色.

**引理 6.2.7** (Havet 等 [53]) 假设在上述序列中， $v_j$ 的邻点中标号比 $v_j$ 的标号小的顶点集合为 $F=\{w_1,\cdots,w_k\}$. 对任意 $i$, 如果 $w_i$ 至少有 $x_i\geq 1$ 种可扩展的颜色，则 $v_j$ 至少有 $|L(v_j)|-\sum_{i:x_i<2q}(2q-x_i)$ 种可扩展的颜色.

如果 $\chi_{c,l}(G) > t$, 并且对于图 $G$ 的任意真子图 $H$, 都有 $\chi_{c,l}(H) \leq t$ 成立，则称图 $G$ 为 $t$- 临界的. 我们用 $L_e(v)$ 表示顶点 $v$ 的可扩展的颜色. 在下面的证明中，我们假设 $G$ 是一个 $(2+\frac{2}{n})$- 临界图. 显然， $G$ 的最小度至少为 2.

图 $G$ 的一条线是内部顶点的度都为 2 的一条路，它的长度就是内部点的个数. 如果两个点是一条线的端点，我们称这两个点为弱相邻的，其中一个称为另一个的弱邻域 (这包括相邻的点，因为线的长度可以为 0). 下面的断言 1 在 [53] 中已经证明.

**断言 1.** (Havet 等 [53]) 图 $G$ 的每条线的长度至多为 $n-1$.

显然，由断言 1 我们可以得到下面的断言.

**断言 2.** 图 $G$ 不存在度至少为 3 的两两弱相邻的 3 个点，而且没有两条线有相同的端点.

**证明.** 否则，根据断言 1, $G$ 有一个长度至多为 $3n$ 的圈，与 $g(G) \geq 3n+1$ 矛盾. ∎

若 $u$ 和 $v$ 是弱相邻的，我们用 $l_{uv}$ 表示连接 $u,v$ 的最短的线的长度. (若 $u,v$ 相邻，则 $l_{uv}=0$). 令 $Y=\{v\in V(G): d(v)\geq 3\}$, $u$ 是 $v$ 的一个弱邻点，若 $u\in Y$, 则称 $u$ 为 $v$ 的一个弱 $Y$- 邻点；否则称 $u$ 为 $v$ 的一个弱 2- 邻点.

对于顶点 $v\in V(G)$, 用 $N_Y(v)$ 表示 $v$ 的弱 $Y$- 邻点集. 对 $v\in Y$, 令 $f(v) = -n-1+\sum_{u\in N_Y(v)}(n-l_{vu})$.

下面的两个断言分别给出了 $f(v)$ 和 $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u)$ 的下界.

**断言 3.** 若 $v\in Y$, 则 $f(v)\geq 1$.

**证明.** 因为 $\chi_{c,l}(G) > 2+\frac{2}{n}$, 所以存在 $\varepsilon > 0$, 正整数 $p,q$ $(p\geq 2q)$, 和 $G$ 的一个 $(2+\frac{2}{n}+\varepsilon)$- 列表 $L$ 使得 $G$ 不存在 $L$-$(p,q)$- 染色. 根据 $G$ 的临界性， $G$ 的每一个真子图 $H$ 都存在 $L$-$(p,q)$- 染色，因此 $\chi_{c,l}(H)\leq 2+\frac{2}{n}$. 令 $t=2+\frac{2}{n}+\varepsilon$.

$G$ 中去掉顶点 $v$ 和 $v$ 的所有的弱 2- 邻点，得到的子图记为 $H$. 根据 $G$ 的临界性， $H$ 存在 $L$-$(p,q)$- 染色.

考虑顶点 $u\in N_Y(v)$. 对每一条连接 $u,v$ 的线，我们应用引理 6.2.7. 如果存在

顶点 $u \in N_Y(v)$ 和正整数 $j$, $1 \le j \le l_{uv}$, 使得 $1+j\frac{2q}{n} \ge 2q$, 我们假设连接 $u,v$ 的线上的顶点依次为 $u, v_1, v_2, \cdots, v_{l_{uv}}, v$. 我们选择最小的整数 $j$ 满足 $1+j\frac{2q}{n} \ge 2q$. 令 $H' = G - \{v_1, \cdots, v_j\}$, 考虑限制在 $H'$ 上的 $L$-$(p,q)$- 染色. 根据引理 6.2.7, 我们有 $|L_e'(v_{j-1})| \ge 1+(j-1)\frac{2q}{n} \ge 2q - \frac{2q}{n}$ 和 $|L_e'(v_{j+1})| \ge 1 (v_{l_{uv}+1} = v)$. 所以 $|L_e'(v_j)| \ge tq-(2q-1)-(2q-1-(j-1)\frac{2q}{n}) \ge tq-2q+1-(2q-(2q-\frac{2q}{n})) \ge 1+\varepsilon q \ge 1$. 因此 $H'$ 上的 $L$-$(p,q)$- 染色可以扩展到整个 $G$, 得到矛盾. 所以我们假设对任意 $j$ $(1 \le j \le \max\{l_{uv} : u \in N_Y(v)\})$, 都有 $1+j\frac{2q}{n} < 2q$ 成立.

根据引理 6.2.7, 如果 $u_j$ 是连接 $u,v$ 的线上的 $v$ 的邻点, 则 $|L_e(u_j)| \ge 1+l_{uv}\frac{2q}{n}$. 因此,

$$\begin{aligned}
|L_e(v)| &\ge tq - \sum_{u\in N_Y(v)} \left(2q - (l_{uv}\frac{2q}{n}+1)\right) \\
&\ge n\frac{2q}{n} + \frac{2q}{n} + \varepsilon q - \sum_{u\in N_Y(v)} (n-l_{uv})\frac{2q}{n} + \sum_{u\in N_Y(v)} 1 \\
&\ge d(v) + \varepsilon q - f(v)\frac{2q}{n} \\
&> 1 - f(v)\frac{2q}{n}.
\end{aligned}$$

如果 $f(v) \le 0$, 则 $v$ 至少有 1 种可扩展的颜色；进而 $G$ 存在 $L$-$(p,q)$- 染色，从而得到矛盾，所以 $f(v) \ge 1$. ■

**断言** 4. 如果 $v \in Y$, 则 $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \ge n+2$.

**证明**. 类似于前面断言的证明，我们假设存在一个 $t$-$(p,q)$- 列表 $L$, 其中 $t = 2 + \frac{2}{n} + \varepsilon$, 使得 $G$ 没有 $L$-$(p,q)$- 染色. 对于顶点 $u \in N_Y(v)$, 如果 $f(u) \le n - l_{uv}$, 则我们称 $u$ 为 $v$- 自由的. 去掉顶点 $v$, 以及 $v$- 自由的邻点，和它们的所有的弱 2- 邻点，得到的图记为 $H$. 由 $G$ 的临界性可知， $H$ 存在 $L$-$(p,q)$- 染色.

若 $u$ 是 $v$- 自由的, 对除了连接 $u,v$ 的线之外的每条从 $u$ 出发的线, 应用引理 6.2.7. 类似于前面的证明，对于 $w \in N_Y(u) - \{v\}$, 我们假设对于任意 $j$ $(1 \le j \le \max\{l_{uw} : w \in N_Y(u), u \in N_Y(v)\})$, 都有 $1+j\frac{2q}{n} \le 2q$. 根据归纳，设 $u_j$ 是连接 $u,w$ 的线上的 $u$ 的邻点，则 $|L_e(u_j)| \ge 1+l_{uw}\frac{2q}{n}$. 所以

$$|L_e(u)| \quad \ge tq - \sum_{w\in N_Y(u)-\{v\}} \left(2q - (l_{uw}\frac{2q}{n}+1)\right)$$

$$\begin{aligned}&\geq n\frac{2q}{n}+\frac{2q}{n}+\varepsilon q-\sum_{w\in N_Y(u)-\{v\}}(n-l_{uw})\frac{2q}{n}+\sum_{w\in N_Y(u)-\{v\}}1\\&\geq d(u)-1+\varepsilon q+(n-l_{vu}-f(u))\frac{2q}{n}.\end{aligned}$$

由于 $f(u)\leq n-l_{vu}$, 故 $|L_e(u)|\geq 1$. 对连接 $u,v$ 的线 : $uv_1^uv_2^u\cdots v_{l_{uv}}^u$ 应用引理 6.2.7. 根据归纳, 有 $|L_e(v_i^u)|\geq d(u)-1+\varepsilon q+(n-l_{vu}-f(u))\frac{2q}{n}+i\frac{2q}{n}$ 成立. 如果存在 $i$ $(1\leq i\leq l_{uv})$, 使得 $d(u)-1+\varepsilon q+(n-l_{vu}-f(u))\frac{2q}{n}+i\frac{2q}{n}\geq 2q$ 成立, 则去掉 $\{u\}$ 和 $u$ 的 $\{v_{i+1}^u,\cdots,v_{l_{uv}}^u\}$ 之外的弱 2- 邻点所得到的图记为 $H'$. 同样地, 我们有 $|L_e'(v_{i+1}^u)|=1$. 因此 $|L_e'(v_i^u)|\geq d(u)-1+\varepsilon q+(n-l_{vu}+i-f(u))\frac{2q}{n}-(2q-1)\geq 2q-(2q-1)=1$, 所以 $G$ 存在 $L$-$(p,q)$- 染色, 得到矛盾. 故我们假设对然每一个 $v$-自由的顶点 $u$ 和 $i$ $(1\leq i\leq l_{uv})$, 都有 $d(u)-1+\varepsilon q+(n-l_{vu}-f(u))\frac{2q}{n}+i\frac{2q}{n}<2q$ 成立. 所以对于 $v$ 的属于上面提到的连接 $u,v$ 的线上的邻点 $v_{l_{uv}}^u$, 有下面的式子成立

$$\begin{aligned}|L_e(v_{l_{uv}}^u)|\quad&\geq d(u)-1+\varepsilon q+(n-l_{vu}-f(u))\frac{2q}{n}+l_{uv}\frac{2q}{n}\\&\geq d(u)-1+\varepsilon q+(n-f(u))\frac{2q}{n}\\&>(n-f(u))\frac{2q}{n}.\end{aligned}$$

如果 $u\in N_Y(v)$ 不是 $v$- 自由的, 则 $|L_e(u)|\geq 1$. 对连接 $u,v$ 的线应用引理 6.2.7, 同样地, 对 $v$ 在该线上的邻点 $v_{l_{uv}}^u$, 我们有 $|L_e(v_{l_{uv}}^u)|\geq 1+l_{uv}\frac{2q}{n}\geq 1+(n-f(u))\frac{2q}{n}>(n-f(u))\frac{2q}{n}$ 成立.

现在考虑顶点 $v$. 我们有

$$\begin{aligned}|L_e(v)|\quad&\geq tq-\sum_{u\in N_Y(v)}\left(2q-(n-f(u))\frac{2q}{n}\right)\\&\geq n\frac{2q}{n}+\frac{2q}{n}+\varepsilon q-\sum_{u\in N_Y(v)}f(u)\frac{2q}{n}\\&\geq\left(n+1-\sum_{u\in N_Y(v)}f(u)\right)\frac{2q}{n}+\varepsilon q\\&>\left(n+1-\sum_{u\in N_Y(v)}f(u)\right)\frac{2q}{n}.\end{aligned}$$

因此我们有 $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \geq n+2$ 成立. 否则，若 $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \leq n+1$, 则 $|L_e(v)| \geq 1$, $G$ 有 $L$-$(p,q)$- 染色，得到矛盾. ■

我们用放电方法完成定理的证明. 设 $G$ 的每个顶点 $v$ 最初的电荷数目为 $d(v)$. 我们将从一个顶点移动电荷到另一个顶点，从而不改变电荷的总量，这个过程称为 " 放电 ". 通过下面的两个断言，我们要证明通过放电以后，$G$ 的每个顶点 $v$ 的电荷数目 $d^*(v) \geq 2+\frac{4d(v)-2}{5n+5}$. 从而

$$2|E(G)| = \sum_{v\in V(G)} d^*(v) \geq \sum_{v\in V(G)} \left(2+\frac{4d(v)-2}{5n+5}\right) = 2\left(1-\frac{1}{5n+5}\right)|V(G)| + \frac{8}{5n+5}|E(G)|,$$

因此 $\frac{5n+4}{5n+5}|V(G)| \leq \frac{5n+1}{5n+5}|E(G)|$, 则 $G$ 的平均度至少为 $2+\frac{6}{5n+1}$, 从而得到矛盾.

**放电原则.**

a. 每一个 $Y$ 中的顶点 $v$ 传给它的每个弱 2- 邻点的电荷是 $\frac{3}{5n+5}$.

b. 每一个 $Y$ 中的顶点 $v$ 传给它的每个弱 $Y$- 邻点的电荷是 $\frac{3f(v)+(n+2)(d(v)-3)}{(5n+5)d(v)}$.

**断言 5.** 每一个 $Y$ 中的顶点从它的弱 $Y$- 邻点得到的电荷至少为 $\frac{n+2}{5n+5}$.

**证明.** 如果每一个顶点 $u \in N_Y(v)$ 传给 $v$ 的电荷至少为 $\frac{f(u)}{5n+5}$, 则根据断言 4, $v$ 从 $N_Y(v)$ 得到的电荷至少为 $\frac{1}{5n+5}\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \geq \frac{n+2}{5n+5}$.

否则，存在某一顶点 $u \in N_Y(v)$, 满足 $\frac{3f(u)+(n+2)(d(u)-3)}{(5n+5)d(u)} < \frac{f(u)}{5n+5}$. 也就是 $(n+2)(d(u)-3) < f(u)(d(u)-3)$. 这样我们得到 $d(u) \geq 4$ 和 $f(u) > n+2$, 所以 $u$ 本身传给 $v$ 的电荷至少为 $\frac{3f(u)+(n+2)(d(u)-3)}{(5n+5)d(u)} \geq \frac{3(n+2)+(n+2)(d(u)-3)}{(5n+5)d(u)} = \frac{n+2}{5n+5}$. 并且，对任意顶点 $y \in N_Y(v)$, 有 $d(y) \geq 3$ 且 $f(y) \geq 1$, 因此 $Y$ 中的任意顶点 $y$ 传给 $v$ 的电荷都是非负的. 从而证明了上述断言. ■

**断言 6.** 放点结束后，对所有的点 $v \in V(G)$, 都有 $d^*(v) \geq 2+\frac{4d(v)-2}{5n+5}$ 成立.

**证明.** 若 $d(v)=2$, 则 $v$ 传出去的电荷为零，$v$ 从它的每个弱 $Y$- 邻点中接收的电荷为 $\frac{3}{5n+5}$, 因此 $d^*(v) = 2+\frac{6}{5n+5} = 2+\frac{4d(v)-2}{5n+5}$.

现在考虑 $Y$ 中的顶点 $v$. 根据放电原则，顶点 $v$ 传给它的弱 2- 邻点的电荷为 $\frac{3}{5n+5}\sum_{w\in N_Y(v)} l_{vw}$, 传给它的弱 $Y$- 邻点的电荷为 $\frac{3f(v)+(n+2)(d(v)-3)}{5n+5}$. 根据断言 5, $v$

从它的弱 $Y$- 邻点收到的电荷至少为 $\frac{n+2}{5n+5}$. 因此

$$
\begin{aligned}
d^*(v) &\geq d(v) - \frac{3}{5n+5}\sum_{w\in N_Y(v)} l_{wv} - \frac{3f(v)+(n+2)(d(v)-3)}{5n+5} + \frac{n+2}{5n+5} \\
&= d(v) - \frac{3}{5n+5}\left(-n-1+\sum_{w\in N_Y(v)}(n-l_{wv}+l_{wv})\right) - \frac{(n+2)(d(v)-4)}{5n+5} \\
&= \frac{d(v)}{5n+5}[5n+5-3n-(n+2)] + \frac{1}{5n+5}[3n+3+4(n+2)] \\
&= \frac{(n+3)d(v)+7n+11}{5n+5}.
\end{aligned}
$$

又因为 $d(v)\geq 3$, 我们有

$$(n+3)d(v)+7n+11=(d(v)-3)n+3d(v)+3+10n+8\geq 4d(v)+10n+8.$$

所以，$\frac{(n+3)d(v)+7n+11}{5n+5}\geq 2+\frac{4d(v)-2}{5n+5}$. 我们完成了断言 6 的证明，进而证明了定理 6.2.4. ■

## 6.3 几类特殊平面图的圆选择数

这一节，我们讨论了几类特殊的平面图的圆选择数. 系列平行图是不含 $K_4$ 的剖分的一类图. 一个简单的系列平行图 $G$, 有 $\delta(G)\leq 2$ 成立. 系列平行图是平面图的一种，而且它的对偶图也是系列平行图.

**定理 6.3.1** 设 $G$ 是一个系列平行图并且 $g(G)\geq 4n+1$, 则 $\chi_{c,l}(G)\leq 2+\frac{1}{n}$.

外平面图是指所有的顶点都出现在外面上的平面图.

**定理 6.3.2** 设 $G$ 是一个外平面图并且 $g(G)\geq 2n+2$, 则 $\chi_{c,l}(G)\leq 2+\frac{1}{n}$.

设 $C_{2k+1}$ 是一个奇圈，它的顶点为 $u_0,u_1,\cdots,u_{2k}$, 边为 $u_iu_{i+1}, i=0,1,\cdots,2k$ ($u_{2k+1}=u_0$). 给定孤立点 $u$, 连接 $u$ 和 $C_{2k+1}$ 上的每一个顶点 $u_i$, 得到的图记为

$W_{2k+1}$，并称该图为奇轮.

**定理 6.3.3** 对任意正整数 $k$, $\chi_{c,l}(W_{2k+1})=4$.

在本节中，线和线的长度的定义和上一节一致，我们给出下面的引理.

**引理 6.3.4** 设 $L$ 为图 $G$ 的 $(2+\frac{1}{n})$-$(p,q)$- 列表，$v_0v_1v_2\cdots v_{2n+1}$ 是图 $G$ 的一条线，则 $G-\{v_1,\cdots,v_{2n}\}$ 上的任意一种 $L$- $(p,q)$- 染色都可以扩展到 $G$ 上.

**证明**. 因为 $v_0$ 至少有 1 种可扩展的的颜色，根据引理 6.2.7, $v_1$ 至少有 $(2+\frac{1}{n})q-2q+1=1+\frac{q}{n}$ 种可扩展的颜色. 根据归纳法，顶点 $v_i$ $(i<2n)$ 至少有 $i\frac{q}{n}+1$ 种可扩展的颜色. 又因为 $v_{2n+1}$ 至少有 1 种可扩展的颜色，则 $v_{2n-1}$ 至少有 $1+(2n-1)\frac{q}{n}=1+2q-\frac{q}{n}$ 种可扩展的颜色，因此 $v_{2n}$ 至少有 $(2+\frac{1}{n})q-(2q-2q+\frac{q}{n}-1)-(2q-1)=2$ 种可扩展的颜色. 故 $G-\{v_1,\cdots,v_{2n}\}$ 上的任意一种 $L$-$(p,q)$- 染色都可以扩展到整个图 $G$ 上. ■

根据上述引理，我们很容易得到下面的推论.

**推论 6.3.5** 设 $L$ 是长度为 $m$ $(m\geq 2n+2)$ 的圈 $C_m$ 的一个 $(2+\frac{1}{n})$-$(p,q)$- 列表，则相邻的两个顶点上的任意一种 $L$-$(p,q)$- 染色，都可以扩展到整个圈 $C_m$ 上.

定理 6.3.1 的证明.

设 $G$ 是一个系列平行图并且 $g(G)\geq 4n+1$, $L$ 是 $G$ 的任意一个 $(2+\frac{1}{n})$-$(p,q)$- 列表. 我们要证明 $G$ 存在 $L$-$(p,q)$- 染色. 我们对图 $G$ 的顶点个数进行归纳. 当 $|V(G)|=1,2$, 结论显然成立. 所以我们假设 $|V(G)|\geq 3$, 而且假设结论对顶点个数小于 $|V(G)|$ 的所有图都成立.

如果 $G$ 有度为 0 或度为 1 的顶点 $v$, 我们去掉顶点 $v$ 对图 $G-\{v\}$ 用归纳法，则 $G-\{v\}$ 存在一个 $L$-$(p,q)$- 染色，因此我们很容易得到 $G$ 的一个 $L$-$(p,q)$- 染色.

所以，我们假设 $G$ 的最小度至少为 2. 令 $G^*$ 表示 $G$ 的对偶图，则 $G^*$ 也是一个系列平行图 (可能含有重边). 令 $H$ 为 $G^*$ 所对应的简单图. 因为 $H$ 也是一个

系列平行图，所以 $H$ 含有度不大于 2 的顶点 $v$. 因为 $G^*$ 的最小度恰好为图 $G$ 的围长，所以顶点 $v$ 在图 $G^*$ 中至少有 $4n+1$ 条边与它关联，但至多只有两个相邻的顶点. 因此至少有一个邻点通过至少 $\lceil\frac{4n+1}{2}\rceil = 2n+1$ 条平行边与 $v$ 相邻. 这些 $G^*$ 中的平行边对应着 $G$ 中长度至少为 $2n$ 的一条线 $P$. 我们不妨假设 $P$ 的长度恰好为 $2n$, $P$ 上的顶点依次为： $v_0, v_1, \cdots, v_{2n+1}$. 我们对 $G-\{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}\}$ 用归纳法，得到 $G-\{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}\}$ 上的一个 $L$-$(p,q)$- 染色. 由引理 6.3.4, 我们能把这种染色扩展到整个图 $G$ 上，从而得到了 $G$ 的一个 $L$-$(p,q)$- 染色. 证毕. ■

定理 6.3.2 的证明.

设 $G$ 是一个外平面图， $G$ 的一个拟对偶图 $T_G$, 是 $G$ 的对偶图去掉外面所对应的顶点，和该顶点所关联的边所得到的图.

在下面的证明中，我们只考虑 $G$ 的内面. 设 $F$ 表示 $G$ 的一个面，用 $V(F)$ 表示面 $F$ 上的顶点，并且令 $d(F) = |V(F)|$.

**引理 6.3.6** (Chen 等 [22]) 设 $T_G$ 是一个 2- 连通外平面图 $G$ 的对偶图，则 $T_G$ 是一棵树.

下面我们给出定理 6.3.2 的证明. 设 $L$ 是 $G$ 的任意一个 $(2+\frac{1}{n})$-$(p,q)$- 列表. 我们将证明 $G$ 存在 $L$-$(p,q)$- 染色. 若 $G$ 有割点，我们可以依次考虑它的各个块，所以为了简便，我们假设 $G$ 是一个 2- 连通的外平面图.

我们任意选择一个面 $F$, 显然 $d(F) \geq 2n+2$. 根据推论 6.3.5, 我们能够得到 $F$ 的 $L$-$(p,q)$- 染色. 接下来，我们考虑和 $F$ 相邻的面，把它们记为： $F_1, F_2, ..., F_s$. 根据引理 6.3.6, $G$ 的拟对偶图 $T_G$ 是一棵树，所以 $F_1, F_2, ..., F_s$ 都通过一条边和 $F$ 相邻. 根据推论 6.3.5, 每一个面都有一个 $L$-$(p,q)$- 染色. 然后，我们再考虑和 $F_1$ 相邻的面，依次类推. 根据广度优先搜索，我们能染完所有的面，进而得到 $G$ 的 $L$-$(p,q)$- 染色. 证毕. ■

定理 6.3.3 的证明.

因为 $\chi_c(W_{2k+1}) = 4$ [91], 根据命题 6.1.2, 我们有 $\chi_{c,l}(W_{2k+1}) \geq 4$ 成立. 接下来我们将证明 $\chi_{c,l}(W_{2k+1}) \leq 4$. 我们使用 [89] 中的方法. 设 $L$ 是 $G$ 的 4- 圆列表.

令 $v_0 = u$. 不失一般性，我们假设 $0 \in L(u)$. 令 $c(v_0) = 0$. 我们将依次给其他顶点染色. 假设我们已经选择的顶点依次为： $v_0, v_1, \cdots, v_i$, 并且 $v_j$ 的颜色为 $c(v_j)$, 其中 $j = 0, 1, \cdots, i$. 对任意顶点 $v \notin \{v_0, v_1, \cdots, v_i\}$, 令

$$L_i(v) = \{x \in L(v) : \text{对所有的和 } v \text{ 相邻的 } v_j \ (0 \le j \le i) \text{ 都满足 } x - c(v_j) \ge 1\}$$

并且令

$$l_i(v) = \inf L_i(v).$$

设 $v_{i+1}$ 是满足

$$l_i(v_{i+1}) = \min\{l_i(v) : v \in V(G) \backslash \{v_0, v_1, \cdots, v_i\}\}.$$

的顶点. 我们给顶点 $v_{i+1}$ 染颜色 $l_i(v_{i+1})$, 也就是说，$c(v_{i+1}) = l_i(v_{i+1})$. 因为 $L(v_{i+1})$ 是一个开集，并且 $c(v_{i+1})$ 是 $L(v_{i+1})$ 的子集的下确界，所以可能 $c(v_{i+1}) \notin L(v_{i+1})$.

下面我们证明 $L_i(v)$ 非空，进而染色 $c$ 有意义. 由上面的定义，我们知道 $c(v_0) \le c(v_1) \le \cdots \le c(v_{2k+1})$.

**断言.** 假设顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_i$ 已经被染色，顶点 $v$ 还未被染色，$L_i(v)$ 和 $l_i(v)$ 是上面所定义的. 如果 $v$ 有 $t$ (显然 $t \le 3$) 个邻点在 $\{v_0, v_1 \cdots, v_i\}$ 中，则 $L(v) \cap [0, l_i(v)]$ 的长度至多为 $t \le 3$, 因此 $L_i(v)$ 的长度至少为 $4 - t \ge 1$.

**证明.** 我们对 $i$ 进行归纳. 先考虑 $i = 0$ 的情况. 我们知道 $v_0 = u$. 如果 $v$ 和 $v_0$ 不相邻，则 $L_0(v) = L(v)$, 并且 $l_0(v) = \inf L(v)$, 因此 $L(v) \cap [0, l_0(v)]$ 长度为 0. 若 $v$ 和 $v_0$ 相邻，则 $L_0(v) = \{x \in L(v) : x \ge 1\}$ 且 $l_0(v) = \inf L_0(v)$, 因此 $L(v) \cap [0, l_0(v)]$ 长度至多为 1.

设 $i \ge 1$. 假设 $v$ 未被染色，而且有 $t$ 个邻点在 $\{v_0, v_1, \cdots, v_i\}$ 中. 进一步，我们假设 $v$ 有 $t'$ 个邻点在 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{i-1}\}$ 中. 根据归纳假设，$L(v) \cap [0, l_{i-1}(v)]$ 的长度之多为 $t'$. 根据 $v_i$ 的选法，我们有 $l_i(v) \ge l_{i-1}(v_i) = c(v_i)$. 若 $v$ 和 $v_i$ 不相邻，则 $t = t'$, $L_i(v) = L_{i-1}(v)$ 并且 $l_i(v) = l_{i-1}(v)$. 因此 $L(v) \cap [0, l_i(v)]$ 的长度至多为 $t = t'$. 若 $v$ 和 $v_i$ 相邻，则 $t = t' + 1$. 由定义我们可以得到 $L(v) \cap [c(v_i), l_i(v)]$ 的长度至多为 1. 因为 $c(v_i) \le l_{i-1}(v)$ 并且 $L(v) \cap [0, l_{i-1}(v)]$ 的长度至多为 $t'$, 则 $L(v) \cap [0, l_i(v)]$ 的长度至多为 $t' + 1 = t$. 又因为 $L(v)$ 的长度至少为 4, 而且 $t \le 3$, 我们得出 $L_i(v)$ 的长度至少为 $4 - t \ge 1$. 证毕. ■

这样我们得到了 $W_{2k+1}$ 的一种染色 $c$, 满足若 $x,y$ 相邻，则 $|c(x)-c(y)|\geq 1$ 并且 $c(v_0)\leq c(v_1)\leq\cdots\leq c(v_{2k+1})\leq r-1$ (因为 $L_{2k}(v_{2k+1})$ 长度至少为 1). 因此对任意相邻的两顶点 $x,y$, 都有 $|c(x)-c(y)|_r\geq 1$ 成立. 并且，若 $c(v)\notin L(v)$, 则 $c(v)$ 是 $L(v)$ 上的弧的左端点 (下确界的定义). 若存在 $c(v)\notin L(v)$, 对所有的的顶点 $v$, 我们令 $c^{'}(v)=c(v)+\varepsilon$. 若 $\varepsilon\geq 0$ 充分小，则 $c$ 是 $W_{2k+1}$ 上的圆 $L$- 染色. ■

# 第七章 有向图的圆染色

在这一章，我们讨论了有向图的圆染色. 设 $D$ 是一个有向图，我们证明了若 $D$ 的补图不含有向的哈密尔顿圈，则 $\chi_c(D)=\chi(D)$. 同时，我们得到了关于正常染色的有向图中过所有颜色的有向路的两个结果.

## 7.1 介绍

我们用 $D$ 表示有向图，用 $G$ 表示无向图. 无向图的圆染色理论有很多漂亮的结果和许多新颖的技巧，它已经变成了图的染色理论的一个重要的分支，我们可以参考 Zhu 的综述文章 [91]. 最近，圆染色这一概念被推广到有向图 ([71]).

我们沿用 [71] 中的定义. 设 $S(r)$ 表示一个周长为 $r$ 的圆. 对于 $S(r)$ 上的两点 $u,v$, 用 $d(u,v)$ 表示从 $u$ 到 $v$ 沿顺时针方向的圆弧的长度. 如果 $D$ 的顶点集合 $S$ 的导出子图 $D[S]$ 不含有向圈，则称 $S$ 为 $D$ 中的无圈集.

有向图 $D$ 的一个弱圆 $r$- 染色是一个映射 $f: V(D)\to S(r)$, 使得对 $D$ 的任意弧 $xy$, 有 $f(x)=f(y)$ 或者 $d(f(x),f(y))\geq 1$ 成立；并且对任意点 $u\in S(r)$, 颜色集 $f^{-1}(u)$ 是 $D$ 中的无圈集. 有向图 $D$ 的圆色数的定义如下：

$$\chi_c(D)=\min\{r:\ D\ \text{有一个弱圆}\ r\text{-染色}\}.$$

有向图 $D$ 的圆色数的定义引出了有向图 $D$ 的色数 $\chi(D)$ 的定义： $\chi(D)$ 是满足 $V(D)$ 可以划分成 $k$ 个无圈集的最小正整数 $k$. 换言之， $\chi(D)$ 是使得 $D$ 存在弱圆 $r$- 染色的最小正整数 $r$. 有向图 $D$ 的一个正常 $k$- 染色，就是用 $k$ 种颜色 $(1,2,\cdots,k)$ 给 $D$ 的顶点染色，使得具有同一种颜色的顶点构成的集合是无圈集. 对于任意有向图 $D$, 有下面的定理成立.

**定理 7.1.1** (Bokal 等 [71]) $\chi(D)-1<\chi_c(D)\leq\chi(D)$.

如果一个无向图 $G$ 的每条边用两条方向相反的弧来代替，得到的有向图记为 $D$, 则有向图 $D$ 的圆色数和色数分别等于无向图 $G$ 的圆色数和色数. 从这个意义上讲， $\chi_c(D)$ 和 $\chi(D)$ 把圆色数和色数的概念从无向图推广到有向图.

$\vec{K}_{k/d}$ 是如下定义的有向图：顶点集 $V(\vec{K}_{k/d}) = \{0, \cdots, k-1\}$，它的弧从任意顶点 $i$ 指向 $i+d, i+d+1, \cdots, i+k-1$ (加法运算对 $k$ 取模). 注意到 $\vec{K}_{n/n-1} \simeq \vec{C}_n$ 就是长度为 $n$ 的有向圈.

**定理 7.1.2** ([71]) $\chi_c(\vec{K}_{k/d}) = \frac{k}{d}$.

从 $D$ 到 $D'$ 的一个无圈同构是指一个映射 $\phi : V(D) \to V(D')$ 使得：
(1) 对任意弧 $uv \in A(D)$, 或者 $\phi(u) = \phi(v)$, 或者 $\phi(u)\phi(v) \in A(D')$, 并且
(2) 对于任意顶点 $v \in V(D')$, $\phi^{-1}(v)$ 是 $D$ 中的无圈集.

**定理 7.1.3** ( [71]) 有向图 $D$ 的圆色数不超过 $\frac{k}{d}$ 当且仅当存在一个从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}$ 的无圈同构.

容易验证无圈同构的复合也是无圈同构. 因此，我们也可以有这样的定义：有向图的圆色数就是满足存在从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}$ 有无圈同构的最小的有理数 $\frac{k}{d}$ ($k, d$ 是正整数，并且 $d \le k$) ([71]).

考虑如下判定问题：对于某一固定有向图 $F$, 任意给定有向图 $D$, 是否存在一个从 $D$ 到 $F$ 的无圈同构？ Feder, Hell 和 Mohar [15] 证明了如果 $F$ 是无圈的，则这个问题是多项式可解的；否则这个问题是 $NP$- 完全的. 因此，对于任意的 $r > 1$, 判定一个任意有向图是否满足 $\chi_c(D) \le r$ 是 $NP$- 完全的 [15].

## 7.2 有向图的色数等于圆色数的一个充分条件

一个有向图，若任意不同的两个顶点 $x, y$ 之间，都存在弧 $xy$ 和 $yx$, 则称该有向图是完全有向图. 我们用 $D_n$ 表示 $n$ 个顶点的完全有向图. 若 $D = (V, A)$ 是有 $n$ 个顶点的有向图，我们称 $D_n - A$ 为 $D$ 的补图.

在无向图中，满足 $\chi_c(G) = \chi(G)$ 的图 $G$ 具有特殊的意义. 在 [91] 中， Zhu 列出了满足 $\chi_c(G) = \chi(G)$ 的许多充分条件. 例如，若 $G$ 的补图是不连通的，则 $\chi_c(G) = \chi(G)$ ([90]). Fan [38] 给出了如下的一个充分条件.

**定理 7.2.1** (Fan [38]) 若图 $G$ 的补图不是哈密尔顿的，则 $\chi_c(G) = \chi(G)$.

我们在有向图中考虑同样的问题，得到如下结果，从而推广了上述结论.

**定理 7.2.2** 若有向图 $D$ 的补图不含有向的哈密尔顿圈，则 $\chi_c(D)=\chi(D)$.

用 [90, 定理 3.1] 中的同样方法，我们能够得到下面的引理，我们这里省略了证明.

**引理 7.2.3** 对于有向图 $\vec{K}_{k/d}$, 如果 $gcd(k,d)=1$, 则对于任意顶点 $v$, 都有 $\chi_c(\vec{K}_{k/d}-\{v\})<\frac{k}{d}$ 成立.

**推论 7.2.4** 假设 $D$ 是一个有向图，$\chi_c(D)=\frac{k}{d}$, 其中 $gcd(k,d)=1$. 若 $f:V(D)\to Z_k(Z_k=\{0,1,\cdots,k-1\})$ 是一个从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}$ 的无圈同构，则 $f$ 是一个从 $V(D)$ 到 $Z_k$ 的满射. 特别地，我们有 $k\le|V(D)|$.

**证明**. 从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}$ 的无圈同构 $f$ 是一个从 $V(D)$ 到 $Z_k$ 的映射. 如果 $f$ 不是满射，则 $f$ 是从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}-\{v\}$ 的一个无圈同构，其中 $v$ 是 $V(\vec{K}_{k/d})$ 中的某一顶点. 根据引理 7.2.3, $\chi_c(D)\le\chi_c(\vec{K}_{k/d}-\{v\})<\frac{k}{d}$, 与我们的假设 $\chi_c(D)=\frac{k}{d}$ 矛盾. ■

有向图 $D$ 的一个 $(k,d)$- 划分，是把顶点集 $V(D)$ 划分成 $(X_0,X_1,\cdots,X_{k-1})$, 使得对任意 $j$, $0\le j\le k-1$, 有如下结论成立：

$$\forall x\in X_j,\forall y\in X_{j+1}\cup\cdots\cup X_{j+d-1}$$

不存在从 $x$ 指向 $y$ 的弧，加法运算对 $k$ 取模. (这里我们允许 $X_i=\phi$). 有向图 $D$ 的一个正常 $k$- 染色就是一个 $(k,1)$- 划分，也就是说把 $V(D)$ 划分成 $(V_1,V_2,\cdots,V_k)$, 使得每个 $V_i$ $(1\le i\le k)$ 都是无圈集.

**引理 7.2.5** 如果 $\chi_c(D)=\frac{k}{d}$ 并且 $gcd(k,d)=1$, 则有向图 $D$ 有一个 $(k,d)$- 划分使得对每个 $0\le i\le k-1$, 都有 $X_i\ne\phi$.

**证明**. 因为 $\chi(D)=\frac{k}{d}$, 所以存在从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}$ 的无圈同构 $f$. 根据推论 7.2.4, $f$ 是一个满射. 令 $X_i=f^{-1}(i)$. 显然，它是 $D$ 的一个 $(k,d)$- 划分，并且对于所有的 $i$, $0\le i\le k-1$, 都有 $X_i\ne\phi$. ■

**引理 7.2.6** 若 $D$ 是不含有向圈的有向图，则 $D$ 的补图中存在一条有向的哈密尔顿路.

**证明.** 若 $D$ 不含有向圈，则 $D$ 存在一个无圈序列 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使得若 $i > j$, 则不存在弧 $v_iv_j$. 显然，在 $D$ 的补图中， $v_n \to v_{n-1} \to \cdots \to v_2 \to v_1$ 就是一条有向的哈密尔顿路.

我们给出定理 7.2.2 的证明. 反证法. 若 $\chi_c(D) < \chi(D)$, 我们假设 $\chi_c(D) = \frac{k}{d}$, 其中 $d \geq 2$ 并且 $gcd(k,d) = 1$. 则存在一个从 $D$ 到 $\vec{K}_{k/d}$ 的无圈同构. 因此， $D$ 有一个 $(k,d)$- 划分 $\{X_0, X_1, \cdots, X_{k-1}\}$, 使得对于任意 $j$, $0 \leq j \leq k-1$, 都有下面的结论成立:

$$\forall x \in X_j, \forall y \in X_{j+1} \cup \cdots \cup X_{j+d-1}$$

不存在从 $x$ 指向 $y$ 的弧. 根据引理 7.2.5, $X_i \neq \phi, 0 \leq i \leq k-1$. 又因为 $d \geq 2$, 对于任意 $x \in X_i$, 任意 $y \in X_{i+1}, 0 \leq i \leq k-1$, $(X_k = X_0)$, 不存在从 $x$ 指向 $y$ 的弧. 所以，在 $D$ 的补图中，对任意 $x \in X_i$, 任意 $y \in X_{i+1}$, 都存在从 $x$ 指向 $y$ 的弧. 又因为每一个 $X_i$ 都是无圈集，根据引理 7.2.6, 在 $X_i$ 的补图中，存在一条有向的哈密尔顿路. 因此 $D$ 的补图中存在一条有向的哈密尔顿圈, 得到矛盾, 从而定理得证. ■

由定理 7.2.2, 我们能得到如下两个推论.

**推论 7.2.7** 若 $D$ 的补图不是强连通的，则 $\chi_c(D) = \chi(D)$.

**推论 7.2.8** 设 $D$ 是 $n$ 个顶点的有向图. 如果存在顶点 $v$ 满足 $d^+(v)$(或 $d^-(v)$) $= n-1$, 则 $\chi_c(D) = \chi(D)$.

## 7.3 具有正常染色的有向图中过所有颜色的有向路

设 $D$ 是一个具有正常 $k$- 染色的有向图，其中 $k = \chi(D)$. 设 $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_k$ 和 $x_1' \leftarrow x_2' \leftarrow \cdots \leftarrow x_k'$ 是 $D$ 中的两条有向路，如果对于所有的正整数 $i$, $1 \leq i \leq k$, 顶点 $x_i$ 和 $x_i'$ 的颜色为 $i$, 则称 $x_1 \to \cdots \to x_k$ 为一条花色前向路,

$x_1' \leftarrow \cdots \leftarrow x_k'$ 称为一条花色后向路.

在无向图中，过所有颜色的路己经被广泛研究过．下面的著名的 Gallai-Roy 定理是由 Roy [72] 和 Gallai [43] 独立得到的，它给出了最长路和色数的关系.

**定理 7.3.1** (Gallai-Roy [43, 72]) 设 $D$ 是图 $G$ 的一个定向，则 $D$ 有一条长度是 $\chi(G)-1$ 的有向路.

设 $G$ 是具有正常 $k$- 染色的无向图， $x_1x_2\cdots,x_{\chi(G)}$ 是 $G$ 中的一条路．如果对于所有的正整数 $i$, $1\le i\le k$, 顶点 $x_i$ 的颜色为 $i$, 则称 $x_1x_2\cdots x_{\chi(G)}$ 为一条花色路． Fung [42] 考虑了无向图中的花色路并得到了如下结果.

**定理 7.3.2** (Fung [42]) 若 $G$ 是一个图并且 $k=\chi(G)$, 对于 $G$ 的任意正常 $k$- 染色， $G$ 中都存在一条花色路.

Li [62] 也给出了 Gallai-Roy 定理的如下推广.

**定理 7.3.3** (Li [62]) 设 $G$ 是一个连通图并且 $k=\chi(G)$. 对于 $G$ 的任意正常 $k$- 染色和图 $G$ 的任意一个顶点 $v$, $G$ 中都存在一条以 $v$ 为起点的路, 经过这 $k$ 种颜色.

Lin [68] 给出了定理 7.3.2 和 7.3.3 的简单证明．我们给出了这两个定理在有向图中的如下推广.

**定理 7.3.4** 设 $D$ 是一个有向图并且 $k=\chi(D)$. 对于 $D$ 的任意正常 $k$- 染色， $D$ 中存在一条花色前向路和一条花色后向路.

**定理 7.3.5** 设 $D$ 是一个强连通的有向图并且 $k=\chi(D)$. 对于 $D$ 的任意正常 $k$- 染色和 $D$ 中的任意顶点 $v$, $D$ 中都存在两条有向路经过这 $k$ 种颜色，一条以 $v$ 为起点，另一条以 $v$ 为终点.

定理 7.3.4 的证明.

给定一个有向图 $D$ 的正常 $k$- 染色．对于 $i=1,2,\cdots,k$, 设 $C_i$ 是染颜色 $i$ 的

点集. 根据定义，每一个 $C_i$ 是非空的无圈集. 令 $C_1'=C_1$, 并且对于 $i=2,\cdots,k$, 定义 $C_i'=\{x\in C_i$: 存在弧从 $x$ 指向 $C_{i-1}'$ 中的点 $\}$.

现在, 我们证明 $C_k'$ 非空. 对于 $i=1,2,\cdots,k-1$, 定义 $D_i=C_i'\cup(C_{i+1}-C_{i+1}')$. 显然，每一个集合 $D_i$ 是无圈的，并且 $C_k'$ 也是无圈的. 所以 $V(D)$ 可以划分成 $k$ 个无圈集： $D_1,D_2,\cdots,D_{k-1},C_k'$. 因为 $\chi(D)=k$, 所以 $C_k'$ 非空.

选择 $x_k\in C_k'$. 根据每一个 $C_i'$ 的定义, 我们可以依次选择 $x_{k-1}\in C_{k-1}',x_{k-2}\in C_{k-2}',\cdots,x_2\in C_2',x_1\in C_1'$, 从而得到一条花色后向路： $x_k\to x_{k-1}\to\cdots\to x_2\to x_1$.

同样地，令 $C_1''=C_1$, 并且对于 $i=2,\cdots,k$, 定义 $C_i''=\{x\in C_i$: 存在弧从 $C_{i-1}''$ 中的点指向 $x\}$, 我们能得到一条花色前向路. ■

定理 7.3.5 的证明.

我们对 $\chi(D)$ 进行归纳. 如果 $\chi(D)=1$, 结论显然成立. 设 $D$ 是强连通有向图并且 $\chi(D)=k\geq 2$. 假设结论对于色数小于 $k$ 的强连通有向图成立. 设 $x$ 是 $D$ 中的任意顶点， $c$ 是 $D$ 的一个正常染色，所用颜色为 $1,2,\cdots,k$. 假设 $x$ 被染颜色 $i$, 并设 $U$ 是染颜色 $i$ 的点集. 记 $D'=D-U$, 则 $\chi(D')=k-1$. 设 $D''$ 是 $D'$ 中满足 $\chi(D'')=\chi(D')$ 的一个强连通分支，则 $D$ 中存在两条有向路： $x\to x_1'\to\cdots\to x_p'\to y_1$ 和 $y_2\to x_1''\to\cdots\to x_q''\to x$, 其中 $y_1,y_2\in V(D'')$ 并且 $x_1',\cdots,x_p',x_1'',\cdots,x_q''\in V(D)-V(D'')$. 我们用 $c'$ 记 $c$ 限制在 $D''$ 上的染色，显然 $c'$ 是 $D''$ 上的一个正常染色，所用颜色为 $1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k$, 因此 $\chi(D'')=k-1$. 根据归纳假设， $D''$ 中存在两条有向路 $y_1\to y_1'\to\cdots\to y_m'$ 和 $y_1''\to\cdots\to y_s''\to y_2$ 都经过颜色 $1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k$. 因此， $D$ 中存在两条有向路 $x\to x_1'\to\cdots x_p'\to y_1\to y_1'\to\cdots\to y_m'$ 和 $y_1''\to\cdots\to y_s''\to y_2\to x_1''\to\cdots\to x_q''\to x$ 都经过颜色 $1,2,\cdots,k$. ■

## 7.4 相关的问题

在无向图中，平面图的色数 (四色问题) 是图的染色理论中的一个重要的问题. 同样地，在有向图中， Škrekovski 提出如下猜想.

**猜想 7.4.1** (Škrekovski [71]) *若 $D$ 是不含有向的 2- 圈的平面有向图，则 $\chi(D) \leq 2$. 也就是说， $V(D)$ 可以划分成 $(V_1, V_2)$, 使得 $V_1$, $V_2$ 都是无圈集.*

# 参考文献


[1] R. Aharoni, Ryser's conjecture for tri-partite 3-graphs, *Combinatorica*, 21(1)(2001), 1–4.

[2] M. Albert, A. Frieze and B. Reed, Multicolored Hamilton cycles, *Electronic J.Combin.*, 2(1995), Research Paper R10.

[3] N. Alon, On a conjecture of Erdős, Simonovits and Sós concerning anti-Ramsey theorems, *J. Graph Theory*, 7(1983), 91–94.

[4] N. Alon and G. Gutin, Properly colored Hamiltonian cycles in edge colored complete graphs, *Random Structures and Algorithms*, 11(1997), 179–186

[5] N. Alon, T. Jiang, Z. Miller and D. Pritikin, Properly colored subgraphs and rainbow subgraphs in edge-colored graphs with local constraints, *Random Structtures and Algorithms*, 23(4)(2003), 409–433.

[6] N. Alon and M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs, *Combinatorica*, 12(1992), 125–134.

[7] J. Bang-Jeng and G. Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Application, Springer-Verlag, London, 2000.

[8] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Alternating cycles and paths in edge-colored multigraphs: a survey, *Discrete Math.*, 165-166(1997), 39–60.

[9] J. Bang-Jeng, G. Gutin and A. Yeo, Properly coloured Hamiltonian paths in edge-coloured complete graphs, *Discrete Appl. Math.*, 82(1998), 247–250

[10] D. Bauer, H. J. Broersma and H. J. Veldman, Not every 2-tough graph is hamiltonian, *Discrete Appl. Math.*, 99(2000), 317–321.

[11] D. Bauer, G. Y. Katona, D. Kratsch and H. J. Veldman, Chordality and 2-factors in tough graphs, *Discrete Appl. Math.*, 99(2000), 323–329.

[12] T. Böhme, J. Harant and M. Tkáč, More than 1-tough chordal planar graphs are hamiltonian, *J. Graph Theory*, 32(1999), 405–410.

[13] B. Bollobás and P. Erdős, Alternating Hamiltonian cycles, *Israel J. Math.*, 23(1976), 126–131.

[14] J.A. Bondy, Counting subgraphs: a new approach to the Caccetta-Häggkvist conjecture, *Discrete Math.*, 165-166(1997), 71–80.

[15] J.A. Bondy and P. Hell, A note on the star chromatic number, *J.Graph Theory*, 14(1990), 479–482.

[16] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan Press[M]. New York, 1976.

[17] O.V. Borodin, S.-J. Kim, A.V. Kostochka and D.B. West, Homomorphisms from sparse graphs with large girth, *J. Combin. Theory Ser. B*, 90(2004), 147–159.

[18] H.J. Broersma, X. Li, G. Woegingerr and S. Zhang, Paths and cycles in colored graphs, *Australian J. Combin.*, 31(2005), 297-309.

[19] L. Caccetta and R. Häggkvist, On minimal digraphs with given girth, in "*Proceedings, Ninth S-E Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1978*", 181–187.

[20] V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuits, *Discrete Math.*, 5(1973) 215–228.

[21] C.C. Chen ands D.E. Daykin, Graphs with Hamiltonian cycles having adjacent lines different colors, *J. Combin. Th. Ser. B*, 21(1976),135–139.

[22] D. Chen, J. Wu and S. Wang, A structural theorem on outer planar graphs, *Journal of Shandong Institute of Mining and Technology (Natural Science)*, 18(4)(1999), 41–43.

[23] G. Chen, H. S. Jacobson, A. E. Kezdy and J. Lehel, Tough enough chordal graphs are hamiltonian, *Networks.*, 31(1998), 29–38.

[24] H. Chen and X. Li, Long heterochromatic paths in edge-colored graphs, *The Electronic J. Combin.*, 12(1)(2005), Research Paper R33.

[25] W.S. Chow, Y. Manoussakis, O. Megalakaki, M. Spyratos and Z. Tuza, Paths through fixed vertices in edge-colored graphs, *J. des Mathematqiues, Informatique et Science, Humaines*, 32(1994), 49–58.

[26] R. Diestel, Graph Theory, Springer-Verlag, New York, 2000.

[27] D. Dorninger, On permutations of chromosomes, in: Contributions to General Algebra, vol. 5(*Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien; Teubner, Stuttgart*, 1987) 95–103.

[28] D. Dorninger, Hamiltonian circuits determing the order of chromosomes, *Discrete Appl. Math.*, 50(1994), 159–168.

[29] D. Dorninger and W. Timischl, Geometrical constraints on Bennett's predictions of chromosome order. *Heredity*, 58(1987), 321–325.

[30] P. Erdős and L. Pósa, On the maximal number of disjoint circuits of a graph, *Publ. Math. Debrecen.*, 9(1962), 3–12.

[31] P. Erdős and M. Simonovts, A limit theorem in graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1(1996), 51–57.

[32] P. Erdős, M. Simonovits and V.T. Sós, Anti-Ramsey theorems, *Colloq. Math. Soc. Janos. Bolyai*, Vol. 10, Infinite an Finite Sets, Keszthely (Hungary), (1973), 657–665.

[33] P. Erdős, M. Simonovits and V.T. Sós, Anti-Ramsey theorems, in: A. Hajnal, R. Rado and V.T. Sós (Eds), Infinite and Finite Sets, Vol.II, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 10(1975), 633–643.

[34] P. Erdős, A.H. Stone, On the structure of linear graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52(1996), 1087–1091.

[35] P. Erdős and Zs. Tuza, Rainbow subgraphs in edge-colorings of complete graphs, *Ann. Discrete Math.*, 55(1993), 81–83.

[36] M.N. Ellingham, Spanning paths, cycles, trees and walks for graphs on surfaces, Surveys in graph theory (San Francisco, CA, 1995), *Congr. Numer.*, 115(1996), 55–90.

[37] M.N. Ellingham and X. Zha, Toughness, trees, and walks, *J. Graph Theory*, 33(2000), 125–137.

[38] G.H. Fan, Circular chromatic number and mycielski graphs, *Combinatorica*, 24(1)(2004), 127–135.

[39] T. Feder, P. Hell and B. Mohar, Acyclic homomorphism and circular coloring of digraphs, *SIAM J. Discrete Math.*, 17(2003), 161–169.

[40] H. Fleischner, Eine gemeinsame Basis für die Theorie der eulerschen Graphen und den Satz von Petersen, *Monatsh. Math.*, 81(1976), 267–278.

[41] A.M. Frieze and B.A. Reed, Polychromatic Hamilton cycles, *Discrete Math.*, 118(1993), 69–74.

[42] T.-S Fung, A colorful path, *The Mathematical Gazette*, 73(1989), 186–188.

[43] T. Gallai, On directed paths and circuits, *Theory of graphs*, P. Erdös, P. Katona, Tihany New York: Academic press 1968, 115–118.

[44] Z. Gao, B.R. Richter and X. Yu, 2-walks in 3-connected planar graphs, *Australas. J. Combin.*, 11(1995), 117–122.

[45] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Comuters and Intractability, A Guide to the Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman and Co., New York, 1979, Pages 203. GT55: Multiple Choice Matching Problem.

[46] G. Giraud, Sur les proportions respectives de triangles uni, bi ou tricolores dans un tricoloiage des arêtes du n-emble, *Discrete Math.*, 16(1)(1976), 13–28.

[47] J.W. Grossman and R. Häggkvist, Alternating cycles in edge-partitioned graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 34(1983), 77–81.

[48] D.R. Guichard, Acyclic homomorphism and the complexity of the star chromatic number, *J. Graph Theory*, 17(1993), 129–134.

[49] R. Häggkvist, A talk at Intern. Colloquium on Combinatorics and Graph Theory at Balatonlelle, Hungary, July 15–19, 1996.

[50] G. Hahn and C. Thomassen, Path and cycle sub-Ramsey numbers and edge-coloring conjecture, *Discrete Math.*, 62(1)(1986), 29–33.

[51] P. Hall, On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10(1935), 26–30.

[52] P.E. Haxell, A note on a conjecture of Ryser, *Periodica Mathemathikai Lapok*, 30(1995), 73–79.

[53] F. Havet, R.J. Kang, T. Müller and J-S. Sereni, Circular choosability. http://hal.inria.fr/docs/00/08/83/74/PDF/RR-5957.pdf.

[54] B. Jackson and N.C. Wormald, $k$-walks in graphs, *Australas. J. Combin.*, 2(1990), 135–146.

[55] F. Jaeger, On nowhere-zero flows in multigraphs, Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference 1975, *Congr. Numer.*, 15(1975), 373–378.

[56] F. Jaeger, Flows and generalized coloring theorems in graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, 26(1979), 205–216.

[57] T. Jiang, Edge-colorings with no large polychromatic stars, *Graphs and Combin.*, 18(2002), 303–308.

[58] T. Jiang and D.B. West, On the Erdős-Simonovits-Sós Conjecture on the anti-Ramsey number of a cycle, *Combin. Probab. Comput.*, 12(2003), 585–598.

[59] T. Kaiser, R. Kužel, H. Li and G. Wang, A note on k-walks in bridgeless graphs, *Graphs and Combinatorics* (to appear).

[60] M. Kano, Some Results and Problems on Colored Graphs, Lecture in Nankai University, Nov 25, 2006.

[61] E.L. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[62] H. Li, A generation of the Gallai-Roy Theorem, *Graphs and Combin.*, 17(2001), 681–685.

[63] H. Li, X. Li, G. Liu and G. Wang, The heterochromatic matchings in edge-colored bipartite graphs, *Ars Combinatoria* (to appear).

[64] H. Li and G. Wang, Color degree and heterochromatic matchings in edge-colored bipartite graphs, *Utilitas Mathematica* (to appear).

[65] H. Li and G. Wang, Color degree and heterochromatic cycles in edge-colored graphs, *Rapport de Recherhe*, 1460(2006), LRI, CNRS-Université de Paris-Sud, France .

[66] H. Li and G. Wang, Color degree and alternating cycles in edge-colored graphs, *Rapport de Recherhe*, 1461(2006), LRI, CNRS-Université de Paris-Sud, France .

[67] H. Li, G. Wang and S. Zhou, Long alternating cycles in edge-colored complete graphs, *Lecture Notes in Computer Science* (to appear).

[68] C. Lin, Simple proofs of results on paths reresenting all colors in proper vertex-colorings, *Graphs and Combin* (to appear).

[69] B. Mohar, Choosability for the circular chromatic number, http://www.fmf.uni-lj.si/ mohar/Problems/P0201ChoosabilityCircular.html, 2003.

[70] B. Mohar, Circular colorings of edge-weighted graphs, *J. Graph Theory*, 43(2)(2003), 107–116.

[71] B. Mohar, The circular chromatic number of a digraph, *J. Graph Theory*, 46(3)(2004), 227–240.

[72] B. Roy, Nombre chromoatique et plus longs chemins d'un graph. *Rev. AFIRO.*, 1(1967), 127–132.

[73] H.J. Ryser, Neuere probleme der kombinatorik, in "*Vortrage uber Kombinatorik Oberwolfach*", Mathematiches Forschungsinstitut Oberwolfach, Juli1997, 24–29.

[74] I. Schiermeyer, Rainbow numbers for matchings and complete graphs, *Discrete Math.*, 286(2004), 157–162.

[75] J. Shearer, A property of the colored complete graph. *Discrete Math.*, 25(1979), 175–178.

[76] J. Shen, Directed triangles in digraphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, 74(1998), 405–407.

[77] P.W. Shor, A lower bound for the length of a partial transversal in a latin square, *J. Combin. Theory Ser. A*, 33(1982), 1–8.

[78] S.K. Stein, Transversals of latin squares and their generalizations, *Pacific J. Math.* 59(2)(1975), 567–575.

[79] K. Suzuki, A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Heterochromatic Spanning Tree in a Graph, *Graph and Combin.*, 22(2006), 261–269.

[80] E. Szemeredi and Zs. Tuza, Upper bound for transversals of tripartite hypergraphs, *Period. Math. Hung.*, 13(1982), 321–323.

[81] C. Thomassen, Every planar graph is 5-choosable, *J. Combin. Theory Ser. B*, 62(1)(1994), 180–181.

[82] Zs. Tuza, On the order of vertex sets meeting all edges of a 3-partite hypergraph, *Ars Combin.*, 24(1987), A, 59–63.

[83] A. Vince, Star chromatic number, *J. Graph Theory*, 12(4)(1988), 551–559.

[84] G. Wang and G. Liu, Circular choosability of planar graphs with large girth, *Ars Combinatorica* (to appear).

[85] G. Wang, G. Liu and J. Yu, Circular list colorings of some graphs, *J. Appl. Math. Comput.*, 20(1-2)(2006), 149–156.

[86] A. Yeo, Alternating cycles in edge-coloured graphs, *J.Combin. Theory Ser B*, 69(1997), 222–225.

[87] J. Yu, G. Wang and G. Liu, Girth and Circular Choosability of Series-Parallel Graphs, *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 26(3)2006, 495–498.

[88] C.-Q. Zhang, Integer Flows and Cycle Covers of Graphs, Dekker, New York, 1997.

[89] X. Zhu, Circular choosability of graphs, *J. Graph Theory*, 48(3)(2005), 210–218

[90] X. Zhu, Star chromatic numbers and products of graphs, *J. Graph Theory*, 16(6)(1992), 557–569.

[91] X. Zhu, Circular chromatic number: a survey, *Discrete Math.*, 229(1-3)(2001), 371–410.

[92] X. Zhu, Recent developments in circular colouring of graphs, In M. Klazar, J. Kratochvil, J. Matousek, R. Thomas, and P. Valtr, editors, *Topics in Discrete Mathematics*, 497–550. Springer, 2006.

# 致 谢

在我六年的研究生学习和生活中，不断得到来自老师、同学、朋友和家人的无私的帮助、支持与鼓励. 在此我衷心的对他们表示深深的谢意.

- 首先，我衷心感谢我的两位导师刘桂真教授和李皓教授. 他们严谨的治学态度，诲人不倦的工作作风，始终督促和激励我刻苦学习，努力进取. 他们严以律己，宽以待人的高尚风格，更使我受益终生，使我努力做一个有真才实学，正直高尚的人. 我所取得的点滴进步和成绩都凝聚着导师的宝贵心血和辛勤劳动. 在此，我向两位导师表示深深的敬意和衷心的感谢.

- 同时，衷心感谢尊敬的刘家壮教授，史开泉教授，李国君教授，崔玉泉教授，吴建良教授，胡发胜副教授，颜谨副教授，李乐学副教授，宿洁博士以及各位专业课和基础课的老师，感谢他们几年来对我的指导和帮助，他们将渊博的知识无私地传授给我，使我受益终生. 感谢山东大学数学与系统科学学院的各位领导和老师，为我提供了良好的学习环境.

- 感谢法国巴黎南大学信息科学实验室的各位领导和老师们对我的关心和热情帮助，也感谢我的朋友 Tomáš Kaiser 和 Roman Kužel 给予我的支持和帮助.

- 我还要感谢我的同学王纪辉，蔡建生，张霞，侯建锋，朱燚，李萍，周珊，缪惠芳，陈爱莲，刘礼等，感谢我的好朋友刘甲国，周俊华，范玉杰，楼峰等，他们在学习和生活方面给了我极大的帮助和支持.

- 最后，非常感谢我的父母，我的弟弟和我的妻子，他们给了我最大的支持和动力.

# 作者简介

**姓名：**王光辉　　**导师：** 刘桂真教授，　李皓教授

**性别：**男　　**出生年月：**1979 年 11 月

**学院：**山东大学数学与系统科学学院，法国巴黎南大学 (巴黎 11 大) 信息科学实验室

**专业：**运筹学与控制论，信息科学

**研究方向：**图论及其应用

**电子邮件：**wgh@lri.fr

**教育经历：**

- 1997 年 9 月 ~2001 年 7 月，山东大学数学与系统科学学位攻读本科，获得理学学士学位．：
- 2001 年 9 月 ~2003 年 7 月，山东大学数学与系统科学学院，硕士阶段 (硕博连读).
- 2003 年 9 月 ~2005 年 10 月，山东大学数学与系统科学学院，攻读博士学位.
- 2005 年 11 月至今，法国巴黎南大学 (巴黎 11 大) 信息科学实验室，攻读博士学位.

**读博士期间发表的及提交的论文：**

1. 王光辉，外平面图的围长和分数色数，山东大学学报， 38(5)(2003), 61-65.
2. 王光辉，禹继国，系列平行图的围长和分数色数，山东大学学报，39(6)(2004), 63-66.
3. Jiguo Yu, Guanghui Wang and Guizhen Liu, The circular choosability and girth of series parallel graphs, *Journal of Mathematical Research & Exposition*, 26(3)(2006), 495-498.

4. Guanghui Wang, Guizhen Liu and Jiguo Yu, Circular list colorings of some graphs, *J. Appl. Math. & Computing*, 20(1-2)(2006), 149-156 (EI).

5. Hao Li and Guanghui Wang, Color degree and heterochromatic cycles in edge-colored graphs, *Rapport de Recherhe*, 1460(2006), LRI, CNRS-Université de Paris-Sud, France.

6. Hao Li and Guanghui Wang, Color degree and alternating cycles in edge-colored graphs, *Rapport de Recherhe*, 1461(2006), LRI, CNRS-Université de Paris-Sud, France.

7. Guanghui Wang and Guizhen Liu, Circular choosability of planar graphs with large girth, *Ars Combinatorica*, (to appear) (SCI).

8. Hao Li and Guanghui Wang, Color degree and heterochromatic matchings in edge-colored bipartite graphs, *Utilitas Mathematica*, (to appear) (SCI).

9. Tomáš Kaiser, Roman Kužel, Hao Li and Guanghui Wang, A note on $k$-walks in bridgeless graphs, *Graphs and Combinatorics*, (to appear) (SCI).

10. Hao Li, Xueliang Li, Guizhen Liu and Guanghui Wang, The heterochromatic matchings in edge-colored bipartite graph, *Ars Combinatorica*, (to appear) (SCI).

11. Hao Li, Guanghui Wang and Shan Zhou, Long alternating cycles in edge-colored complete graphs, *Lecture Notes in Computer Science*, (to appear) (EI, ISTP).

12. Guanghui Wang and Guizhen Liu, The circular choosability of planar graphs, *Acta Mathematica Scientia* (submitted).

13. Hao Li and Guanghui Wang, Heterochromatic matchings in edge-colored graphs, *Discrete Mathematics* (submitted).