通 知

1 新教材不考内容： §3.2， §4.3, §4.4.3, §4.5, § 6.2.5， §7.4.4及后面章节；一般，§5.1及§6.1的经验分布函数也不考。

2 考试时间：

3 答疑：考试头天晚上7: 00－8: 00， 科技南楼715。最后一次作业照交。

4 复习材料：教材、练习册和浙大教材；复习技巧：先系统复习再做以前的统考题，注重客观题。

例1　一批外形相同的产品，由6件正品和4件次品组成，考察下面事件的概率：

E_1：有放回地任取三件，A_1={恰有两件次品} $P(A_1)=\dfrac{C_3^2\,4*4*6}{10*10*10}$

E_2：不放回地任取三件，A_2={只第1、3件为次品} $P(A_2)=\dfrac{4*6*3}{10*9*8}$

E_3：不放回地任取三件，A_3={恰有两件为次品} $P(A_3)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}$

总结：有放回 (元素可同)：考虑可重复排列数。

无放回 (元素不同)：事件与顺序有关时，考虑不重复排列数；

事件与顺序无关时，考虑组合数。

例4 一批同类产品共有 N件，其中次品 $M(M < N)$ 件。现从中随机抽取 n 件(取后不放回)，问这 n 件中恰有 k 件次品的概率是多少?

解 设 $A=\{$任取的n件中恰有k件次品$\}$. 用组合求解，有

$$P(A)=\frac{C_M^k \bullet C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

其中 $0 \le n \le N$, $0 \le k \le M$, $0 \le n-k \le N-M$.

推广 从$N=N_1+N_2+\ldots+N_l$类物品中任取n件，则取到的每类物品件数分别为 $n_1+n_2+\ldots+n_l=n$ 的概率是

$$P(A)=\frac{\prod_{i=1}^{l} C_{N_i}^{n_i}}{C_N^n}$$

例5 设有 m 个人和 M 间房，每人均等可能地走进 M 间房的任一间内，试求 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$。

（ i ）$A=\{指定的m间房中各一人\}\ (m\le M)$

（ ii ）$B=\{恰有m间房，其中各一人\}\ (m\le M)$

（iii）$C=\{指定的一间房内恰有l个人(l\le m)\}$

解 （ i ） $P(A)=\dfrac{m!}{M^m}$ （ ii ） $P(B)=\dfrac{C_M^m \bullet m!}{M^m}$

（iii） $P(C)=\dfrac{C_m^l \bullet (M-1)^{m-l}}{M^n}$

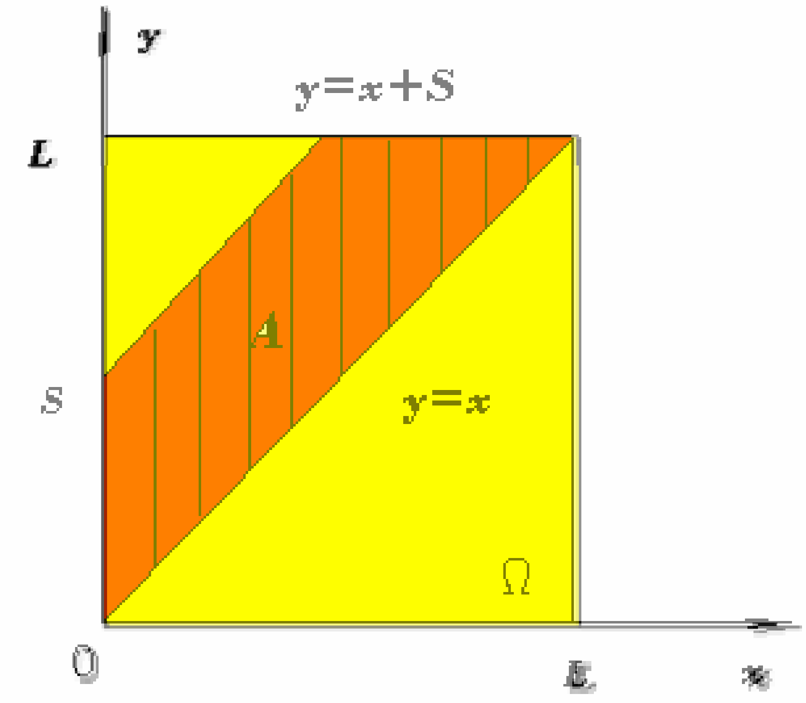
例7 设某吸毒人员戒毒期满后在家接受监控。监控期为L单位时间，该期间内随时会提取尿样化验。设该人员随时可能复吸且复吸后在$S(\leqslant L)$单位时间内尿样呈阳性反应。求该人员复吸一次且检验一次能被检验出来的概率

解 设 x为复吸时间（$0\leqslant x\leqslant L$）； y为检测时间（$0\leqslant y\leqslant L$）

即 $\Omega=\{(x,y): 0\leqslant x,y\leqslant L\}$

A={复吸一次且被检测出}

$=\{(x,y): 0\leqslant x,y\leqslant L，0\leqslant y-x\leqslant S\}$



故 $$P(A)=\frac{L^2-[\frac{1}{2}L^2+\frac{1}{2}(L-S)^2]}{L^2}$$

$$=1-\frac{\frac{1}{2}[L^2+(L-S)^2]}{L^2}$$

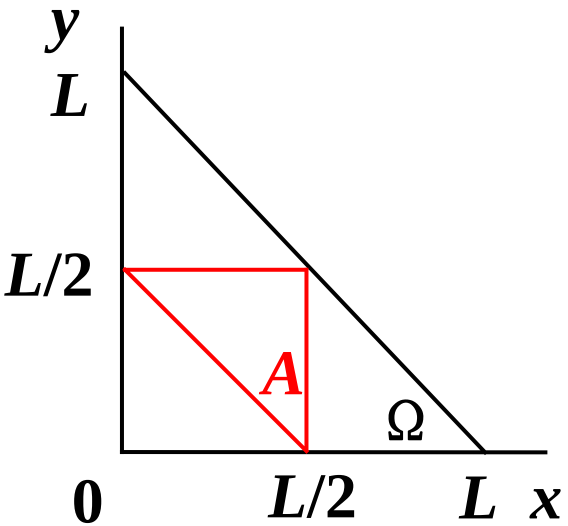
$$=1-P(\overline{A})$$

课堂练习　将一段长为L的线段截成三段，求它们能构成三角形的概率。

解　记A={三线段能构成三角形}，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq L\}$$

$$A=\left\{(x,y)\mid 0\leq x\leq \frac{L}{2}, 0\leq y\leq \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\leq x+y\leq L\right\}$$



故所求概率为

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

习题选讲

练习1 把$\boldsymbol{a}$只白球和$\boldsymbol{b}$只黑球随机地进行排列。求排在后面的若干个是黑球的概率。

解 **E：**考虑$\boldsymbol{a+b}$只球的不重复排列。并记$\boldsymbol{A}$={最后剩下的全是黑球}，$\boldsymbol{B}$={最后一个排的是黑球}，则

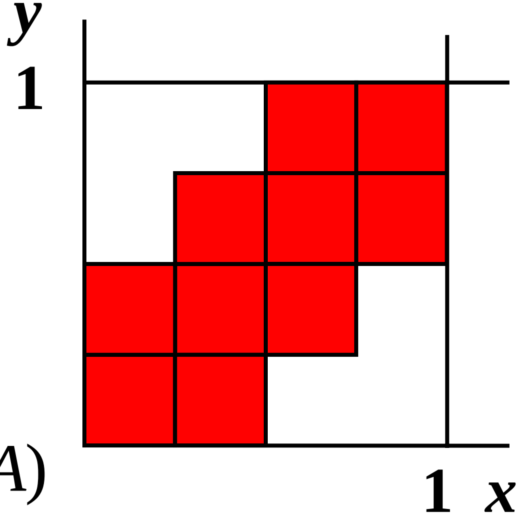
$$A \subset B \qquad B \subset A \qquad \text{即} \boldsymbol{A=B}$$

故 $$P(A)=P(B)=\frac{P_a^1 \cdot P_{a+b-1}^{a+b-1}}{P_{a+b}^{a+b}}=\frac{a}{a+b}$$

习题选讲

练习2 甲、乙约定下午1点~2点间到某车站乘车，该时间段内有4班车，每刻钟一辆。若(1)见车就乘；(2)最多等一班车。求二人乘同一车的概率。

解 记A={见车就乘时二人乘同一车}， B={最多等一班车时二人乘同一车}，则



法1 几何概型

$$P(A)=\frac{4}{16},\quad P(B)=\frac{10}{16}$$

法2 古典概型

$$P(A)=\frac{4}{16},\quad P(B)=P(A)+P(B-A)$$

$$=\frac{4}{16}+\frac{2*3}{16}=\frac{10}{16}$$

习题选讲

练习4　n个座位依次从1号编到n号，把1号至n号的n个号码分给n个人，每个人一个号码，这n个人随意地坐到座位上，求至少有一个人手里的号码恰好与座位的号码相同的概率，且当n很大时，给出这个概率的近似值。

解　记B={至少有一个人的号码恰好与座位的号码相同}，B_i={第i个人的号码恰好与座位的号码相同}，$i=1,2,\ldots,n$，则

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}B_i,\quad P(B_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$P(B_iB_j)=\frac{(n-2)!}{n!},\ i\neq j,\quad \cdots,\quad P(B_1B_2\cdots B_n)=\frac{1}{n!}$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)-\sum_{i\neq j}P(B_iB_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(B_1B_2\cdots B_n)$$

$$=n*\frac{1}{n}-C_n^2*\frac{(n-2)!}{n!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\ =\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

$$\underset{n\to\infty}{=}1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\underset{n\to\infty}{=}1-\frac{1}{e}$$

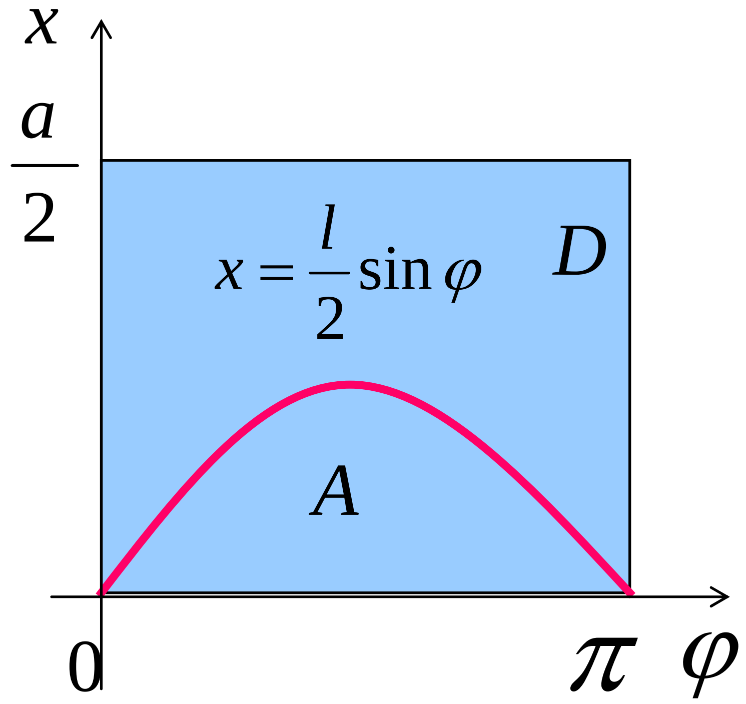
练习5 (习题1.11) **(**蒲丰投针问题）平面上有一族平行线。其中任何相邻的两线距离都是 ***a*****(*****a*****>0)**。向平面任意投一长为 ***l*****(*****l*****<a)** 的针，试求针与一条平行线相交的概率。

解　设 ***x*** 是针的中点 ***M*** 到最近的平行线的距离，φ是针与此平行线的交角，投针问题就相当于在平面区域 ***D*** 取点的几何概型。

$$D=\{(\varphi,x)\,|\,0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

$$A=\{(\varphi,x)\,|\,0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$$

$$P=\frac{A\text{的面积}}{D\text{的面积}}=\frac{\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$



注

Ⅰ. 已知某事件已发生，此时求另一事件的概率则为求条件概率。

Ⅱ. 已知每种原因出现的概率及每种原因导致某结果出现的条件概率，则由全概率公式，可求得某结果出现的概率**P(*B*)(**非条件概率**)**；由**Bayes**公式，可求得结果***B***是由某原因引起的**(**后验**,** 条件**)**概率。

Ⅲ.应用全概率公式和**Bayes**公式时要注意其条件**(**原因都两两不相容**)**。

相互独立的性质：若n个事件相互独立，则其中任意m个事件也相互独立；把其中任意m个事件换成对立事件以后，所得的n个事件也相互独立。

注：互不相容与相互独立是两个不同的概念

互不相容：$AB=\phi$　　(一般二者不同时成立)

相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$

是非题1　(如几何概型中任一基本事件概率为0)　。

练习2 讨论两事件互不相容与相互独立的关系。

练习3　一架长(zhang)机带两架僚机飞往某地进行轰炸，只有长机能确定具体目标。在到达目标上空之前，必须经过敌高炮防空区，这时任一架飞机被击落的概率为0.2，到达目标上空之后，各飞机将独立地进行轰炸，炸毁目标的概率都是0.3。试求目标被炸毁的概率。

练习2 讨论互不相容与相互独立的关系。

解 (1) 若$P(A)\cdot P(B)\neq 0$, 则二者不可能同时成立. 因为

(a) 若A、B互不相容，即$AB=\phi$，则

$0=P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$, 即$A$、$B$ 不相互独立;

(b) 若A、B 相互独立，即$P(AB)=P(A)\cdot P(B)\neq 0$，则

$AB\neq\phi$， 即A、B相容。

(2) 若$P(A)\cdot P(B)=0$, 则二者有可能同时成立. 因为

(a) 若A、B互不相容，即$AB=\phi$，则

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0$，即 A、B独立;

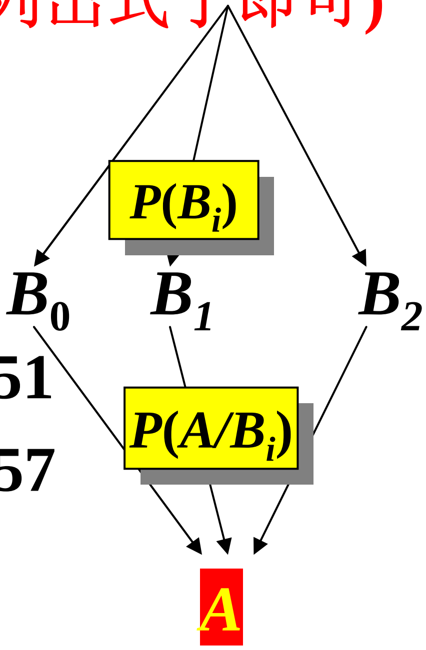
(b) 若A、B相互独立，即$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0$

$\not\Rightarrow AB=\phi$。

练习3　一架长(zhang)机带两架僚机飞往某地进行轰炸，只有长机能确定具体目标。在到达目标上空之前，必须经过敌高炮防空区，这时任一架飞机被击落的概率为**0.2**，到达目标上空之后，各飞机将独立地进行轰炸，炸毁目标的概率都是**0.3**。试求目标被炸毁的概率。**(列出式子即可)**

解　记B_i为长机与i架僚机到达目标上空，

i=0,1,2，　A为目标被炸毁。则



$P(B_0)=0.8*0.2^2=0.032$　　$P(A/B_0)=0.3$

$P(B_1)=2*0.8^2*0.2=0.256$,　$P(A/B_1)=1-0.7^2=0.51$

$P(B_2)=0.8^3=0.512$　　$P(A/B_2)=1-0.7^3=0.657$

故　$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A/B_i)=\mathbf{0.4765}$$

或　$$=1-[0.2+0.8*0.2^2*0.7+2*0.8^2*0.2*0.7^2+0.8^3*0.7^3]$$

习题讲评

练习题1 设某长途汽车在起点站有**20**位乘客上车，每位乘客在以后的**10**个车站等可能地下车。求没有三位及三位以上的乘客在同一车站下车的概率。

解　记**A**＝**{**每个车站恰有两位乘客下车**}**，则

$$P(A)=\frac{C_{20}^{2}C_{18}^{2}C_{16}^{2}\cdots C_{2}^{2}}{10^{20}}$$

第一章小结

随机试验

样本空间 Ω={所有ω}

随机事件 $A\subset\Omega$

关系：$A\subset B$，$AB=\phi$，$B=\bar{A}$

运算：$A\cup B$，AB，$A-B=A\bar{B}=A-AB$

公理化定义

1. $P(A)\geqslant 0$

2. $P(\Omega)=1$

3. $P(\sum A_i)=\sum P(A_i)$

$P(\bar{A})=1-P(A)$

$A\supset B\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

统计古典几何概率

条件概率 $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

公式 $P(AB)=P(A)P(B/A)$

独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A/B)=P(A)$

全概率公式 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$

Bayes公式 $P(A_i/B)=\dfrac{P(A_iB)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)}$

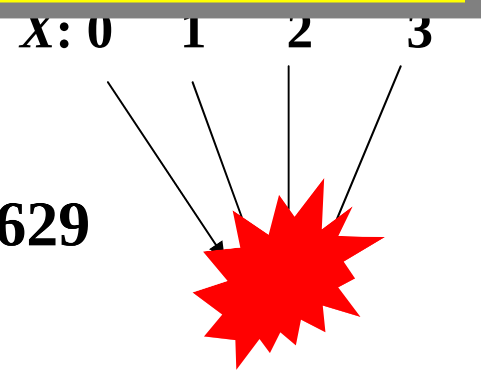
3 导弹问题　设某种导弹的命中率为**99%**，但过期后便只有**5%**。又设某目标被击中三枚导弹方可摧毁。现从混有**4**枚过期导弹的**100**枚导弹中任取**3**枚独立地向目标发射，求目标被摧毁的概率。

解　记X为取出的3枚导弹中含的过期导弹数，B={目标被摧毁}，则

$$P(X=k)=\frac{C_4^k C_{96}^{3-k}}{C_{100}^3}$$ ***k*=0,1,2,3**　　超几何分布

$$P(B)=\sum_{k=0}^{3}P(X=k)P(B/X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\frac{C_4^k C_{96}^{3-k}}{C_{100}^3}\times 0.05^k\times 0.99^{3-k}=\mathbf{0.8629}$$



注 全概率公式，独立性

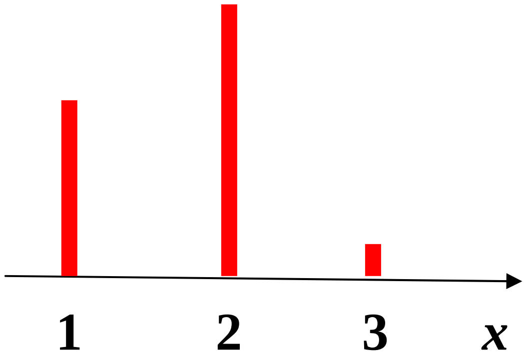
练习1　设有3个人4种就业机会，每人可随机选取任一个就业机会，求各个就业机会最多有1人、2人、3人选择的概率各是多少？

解　记X为选择人数最多的就业机会所含的人数，则

$$P(X=1)=\frac{4*3*2}{4^3}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^1C_3^2*3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$



验算：和为1。

是非题

1 泊松分布不是一个单独存在的分布. ×

2 取值为非负整数的随机变量~**P(λ).** × √

3 $\boldsymbol{f(x)}$为概率密度←→积分为1. 及 $\boldsymbol{f(x)\geqslant 0}$ √

4 P(A)=0 √× ←→ $A=\phi$ 如**C.R.V.X, 有P($X=a$)=0**

5 连续型随机变量的分布函数处处连续. 是，但非处处可导

6 若密度为 0 f_1 f_2 0 (x_1, x_2, x_3)，则$\boldsymbol{F(x)}$为

四 分段函数，√ $F(x)=\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx+\int_{x_2}^{x} f_2(x)dx,\quad x\in(x_2,x_3]$

7 $f_1(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $f_2(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$, 则$F_1(x)\neq F_2(x)$.

直接积分得 $\boldsymbol{F_1(x)\equiv F_2(x)}$，事件概率也同。

一般，若 $f_1(x)\overset{a.s.}{=}f_2(x)$，则视为同一密度。

§ 2.3.2讨论题(广义反函数除外)

1 若$X \sim U[a, b]$, 则$P(c<X<d)=(d-c)/(b-a)$?它描述了几维几何概型? Ω=? 一维; $\Omega=[a, b]$

2 指数分布的分布函数是否严格单增? 非; $F'(x) = f(x)$不恒>0

3 泊松分布和指数分布的根本区别是?

4 若$X \sim E(\lambda)$, 则$P(X>t+t_0/X>t_0)=P(X>t)$? 无记忆性, 新旧一样

5 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 问$F(x)$能否积出?转换公式为 $F(x)$=? $= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

P $(a<X<b)$=? $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

7 受多个微小因素的影响的C.R.V.~正态分布. 例: 误差, 噪声…

6 若$X \sim N(0,1)$, 且$P(X<x)=p$已知, 如 $p>0.5$, 反查正态分布表得 $x=\Phi^{-1}(p)$. 若$p<0.5$, 则 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) > 0.5$

8 例2.18, 习题2.27(4), 2.28.

构造一个二项分布.

例2 设一大型设备在任何长为t时间内发生故障的次数 $N(t)$~$P(\lambda t)$。

(1) 求相继两次故障之间的时间间隔T的概率分布；

(2) 求在设备无故障工作7小时的条件下，再无故障工作9小时的概率p。

事件转换

解（1） $F(t)=P(T\le t)=P(N(t)\ge 1)=1-P(N(t)=0)$

$$=1-\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t} \qquad t\geqslant 0$$

$t<0$时， $F(t)=P(\phi)=0$ 即 T~$E(\lambda)$

（2） $$p=P(T>16/T>7)=\frac{P(T>16,T>7)}{P(T>7)}=\frac{P(T>16)}{P(T>7)}$$

$$=\frac{1-F(16)}{1-F(7)}=\frac{e^{-16\lambda}}{e^{-7\lambda}}=e^{-9\lambda}=P(T>9)$$ 无记忆性

(3) 三台设备中至少有两台设备的寿命超过9小时的概率。

(二项分布，习题2.10，2.14，2.17(P38))

例5 若$F(x)$为C.R.V.X的严格单增的分布函数，则R.V.$Y=F(X)\sim U[0，1]$。如若$X\sim N(0, 1)$，则$\Phi(X)\sim U[0，1]$。

解 $0<y<1$ 时，$F_Y(y) = P(Y\leqslant y) = P(F(X)\leqslant y)$

$$= P(X \le F^{-1}(y))$$

$$= F(F^{-1}(y)) = y,$$

$y\leqslant 0$时，$F_Y(y) = P(Y\leqslant y) = 0,$

$y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = P(Y\leqslant y) = 1,$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

故$F(X)\sim U[0，1]$。

课堂练习(统考题)

设 $X \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$, 求 σ 使**$P(1<X<e)$**最大。

转换

解　$P(1<X<e)=F(e)-F(1)=\Phi(e/\sigma)-\Phi(1/\sigma)$

$$\triangleq g(\sigma)$$

用求导的链导法则，解

$$g'(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(e/\sigma)^2}{2}}\left(-\frac{e}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(1/\sigma)^2}{2}}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)=0$$

得所求为 $\sigma=\sqrt{\dfrac{e^2-1}{2}}.$

§ 2.3 连续型随机变量复习题

1 均匀分布刻画了<u>几何</u>概型.

2 指数分布具有无后效性, 即 <u>P(X>t+s | X>s)=P(X>t)</u>.

3 指数分布跟Poission分布的关系是?

4 指数和正态分布的密度都是指数形式, 二者的区别是?

5 设*X*: $f_X(x)=\exp\{-x^2+x-A\}$, A=1/4 + (ln π)/2,正态分布

§ 2.4 随机变量函数的分布

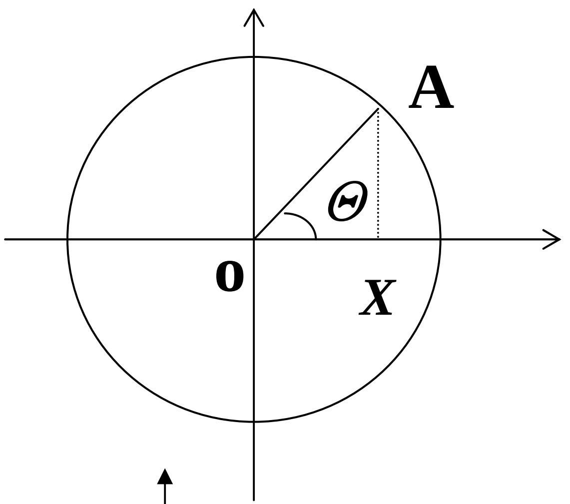
一、问题

1. $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow aX+b \sim ?$

2. $R \sim \mathrm{U}[0,r] \Rightarrow S=\pi R^2 \sim ?$

泊松过程从 *k*变到 *k* +1之间所需要的时间服从指数分布

例6 设C是以原点为圆心的单位圆周，A为C上的任意一点，求A的横坐标的分布。



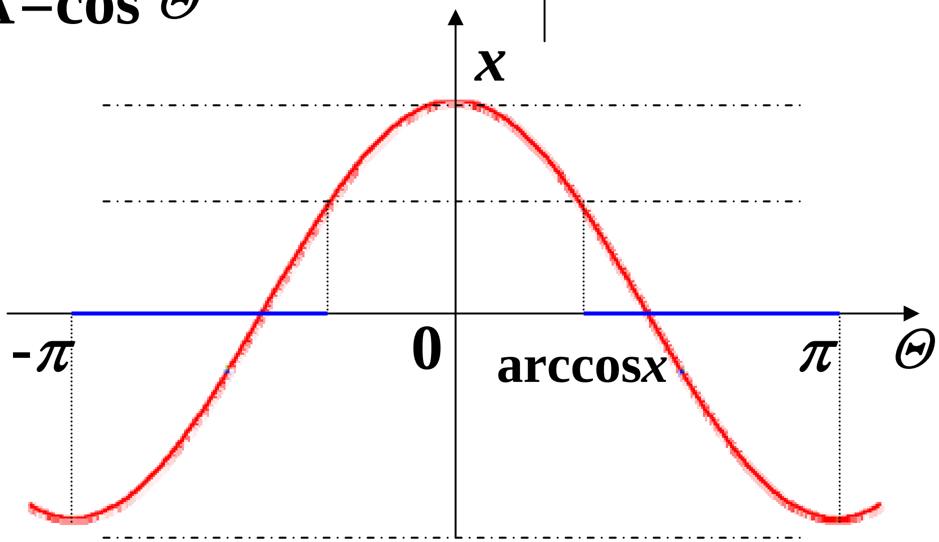
能否用公式法？否。用分布函数法

解 记 Θ为OA与x轴的夹角，

由题意 Θ~U[- π, π]，则X=cos Θ

$$F_X(x)=P(\cos\Theta\le x)$$

$$=\begin{cases}0 & x\le -1\\ p & -1<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$



$$p=P(-\pi<\Theta\le -\arccos x)$$
$$+P(\arccos x\le\Theta\le\pi)$$

$$=\frac{2(\pi-\arccos x)}{2\pi}$$

$$f_X(x)=F'_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

几何概率---长度比

课堂练习　设 $\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求***X***的分布.

解　记***Y***=ln***X***, 则***X***=e^{Y}. 由分布函数法得:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(e^Y \le x) \qquad x>0$$

$$= P(Y \le \ln x) = F_Y(\ln x)$$

求导得:　$f_X(x) = f_Y(\ln x)(\ln x)'$

可正可负？ $= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$

$$f_X(x) = 0,\ x \le 0$$

称***X***服从对数正态分布.

例1 设整数X等可能地在1，2，3，4中取值，另一整数Y等可能地在1~X中取值，求$(X，Y)$的联合及边缘分布列.

解 **(1)** $P(X=i,Y=j) = P(X=i)P(Y=j/X=i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}$

$1\le j\le i=1,2,3,4$ $\qquad P(Y=j)=p_{.j}=\sum_{i=j}^{4}\frac{1}{4i},\ j=1,2,3,4$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i.}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$1/4$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$1/4$
3	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$1/4$
4	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$1/4$
$P_{.j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	**1**

或

(2) 直接求

$P(X=i)=\frac{1}{4}$

$i=1,2,3,4$

$P(Y=j)=\sum_{i=j}^{4}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}$

$j=1,2,3,4$

(全概率公式)

练习八 **5.** 设随机变量***X***的密度函数为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

求随机变量***Y=g(X)***的概率分布，其中 $g(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$

解 $P(Y=1)=P(X\geq 0)=\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx=\frac{2}{\pi}\arctan e^{x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

$$P(Y=-1)=1-P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

Y	**-1**	**1**
P	**0.5**	**0.5**

例2 设某医院一天出生的婴儿数为X，其中男婴数为Y，已知(X,Y)的联合分布列为：

$$P(X=n,Y=m)=e^{-14}\frac{7.14^m}{m!}\cdot\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}\qquad \begin{array}{l} n=0,1,\cdots \\ m=0,1,\cdots,n \end{array}$$

求X与Y的边缘分布。

解 $$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}7.14^m 6.86^{n-m}\frac{e^{-14}}{n!}=\frac{14^n}{n!}e^{-14}$$

$n=0,1,\cdots$ 即 $\boxed{X\sim P(14)}$ $\boxed{Y\sim P(7.14)}$

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}\times\frac{7.14^m}{m!}e^{-14}=\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14}\qquad m=0,1,\cdots$$

条件分布？ $P(Y=m\mid X=n)=\dfrac{P(X=n,Y=m)}{P(X=n)}$ 二项分布

$$=C_n^m\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m},\quad m=0,1,\cdots,n$$

习题选讲

例3 设每次实验有l个互不相容的结果$A_1, A_2, \ldots, A_l$，一次实验中发生的概率分别为$p_1, p_2, \ldots, p_l$。现将该实验独立重复地进行n次，记$X_i\,(i=1, 2, \ldots, l)$为n次实验中事件$A_i\,(i=1, 2, \ldots, l)$发生的次数，求其联合分布列。

解 该实验是伯努利实验的推广，其分布是二项分布的推广，称为多项分布 $\mathbf{M}\,(n;\ p_1, p_2, \ldots, p_l)$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_l = k_l)$$

$$= C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{n-k_1-\cdots-k_{l-1}}^{k_l}\ p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots\ p_l^{k_l}$$

$$(k_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n; \sum_{i=1}^{l} k_i = n)$$

问题：$X_i \sim B(n, p_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$

课堂练习 设楼房有六层，每个乘电梯的人在2,3,4,5,6层下的概率分别为0.08，0.14，0.20，0.26，0.32，试求在一楼乘上电梯的15人中，恰好有1, 2, 3, 4, 5人分别在2, 3, 4, 5, 6层下电梯的概率p。

解 记X_i为在第i+1层下电梯的人数，i=1,2,3,4,5，则其联合分布为多项分布M(15; 0.08, 0.14, 0.20, 0.26, 0.32).

$$P(X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=4, X_5=5)$$

$$= C_{15}^1 C_{14}^2 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5\ 0.08^1\, 0.14^2\, 0.20^3\, 0.26^4\, 0.32^5 = 0.073$$

注：X_i ~ 二项分布B(15, p_i).

2、二维C.R.V.的边缘密度

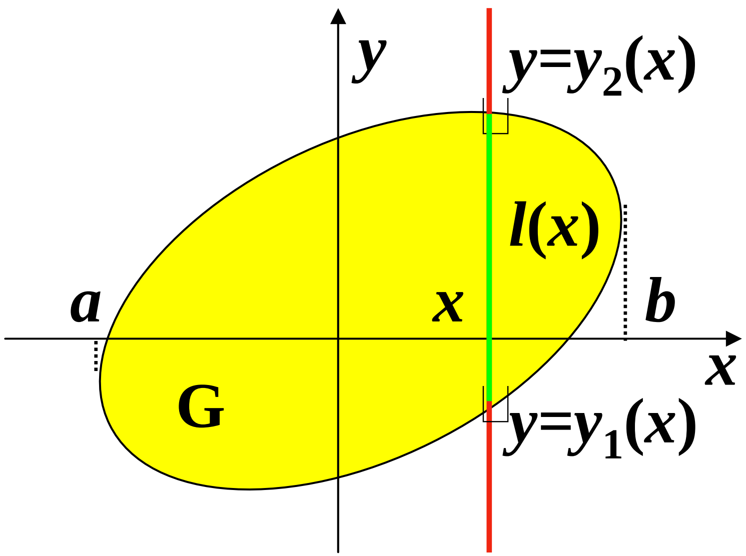
$g(u)$

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv]du$$

X的边缘密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy,$

$$a<x<b$$

Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx$



作图、定限再计算、验证

(单变量、非负和规范性)

记 G： $f(x,y)\neq 0$

2

考虑从含***m***个黑球和***n***个白球的袋中任取***k***个球的组合数，有 $\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$

独

立，

解 $-i)$

$$\sum_{i=0} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} C_n^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i}$$

$Z \sim B(m+n, p)$

$$= \left[\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} \right] p^k (1-p)^{m+n-k}$$

$$= C_{m+n}^k p^k (1-p)^{m+n-k} \quad k = 0,1,2\cdots, m+n$$

二　C.R.V. 函数的分布(概率密度)

原理：等价事件替换

已知(X, Y)的概率密度 $f(x, y)$, 求$Z = g(X, Y)$的概率密度.

1　分布函数法

1)　$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(g(X, Y) \leqslant z)$　作图求出积分.

$$= \iint\limits_{(g(x,y)\le z)\cap G} f(x, y)\,dxdy$$

其中G：　$f(x, y) \neq 0$.

注 交有几种形状，则有几个表达式

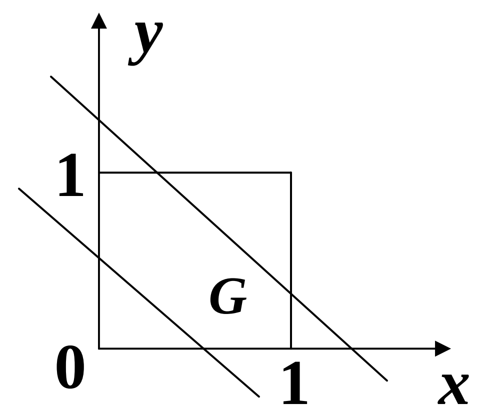
2)　$f_Z(z) = F_Z'(z)$.

2　公式法（和、最大、最小）←分布函数法

例4(常考题型) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x,y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量$Z=X+Y$的密度函数$f_Z(z)$。



解　法一　分布函数法

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint\limits_{(x+y\le z)\bigcap G} f(x.y)dxdy$$

$$=\begin{cases} \int_0^z dx\int_0^{z-x}(x+y)dy=z^3/3,\ 0<z\le 1 \\ 1-\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1(x+y)dy=z^2-(z^3+1)/3,\ 1<z\le 2 \end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(\phi)=0,\ z\le 0;\ F_Z(z)=P(\Omega)=1,\ z>2$$

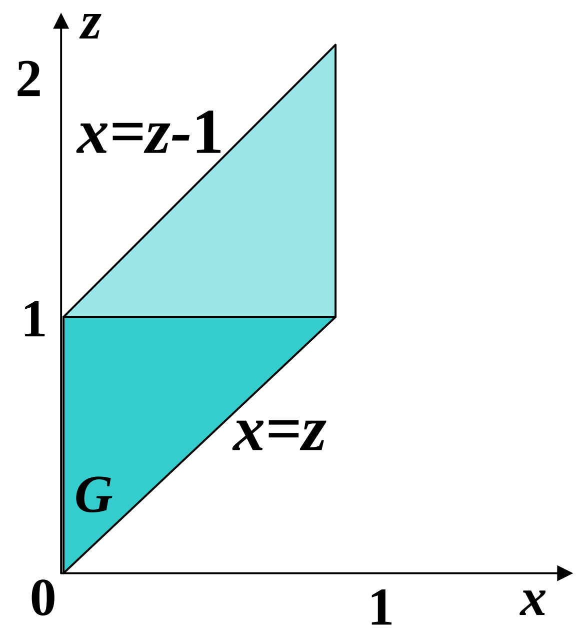
$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} z^2,\ 0<z\le 1 \\ z(2-z),\ 1<z\le 2 \\ 0,\ 其它 \end{cases}$$

法二 (公式法)：注意到被积函数的非零区域G为：$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le 1 \end{cases}$

能否用 $f_Z(z) \cancel{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$?

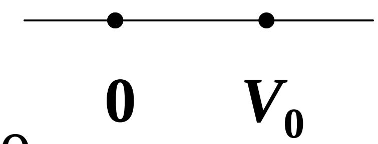
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^z [x+(z-x)]dx=z^2, & 0\le z<1 \\ \int_{z-1}^1 [x+(z-x)]dx=z(2-z), & 1\le z<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



练习1. 某电路的电压**V~E(λ)**，电压表的最大读数为$\boldsymbol{V_0}$。求测试电压***X的***分布函数，并判断随机变量的类型。

解 $X=\min(V,V_0),\ F_X(x)=P(X\le x)$



$$=\begin{cases} P(\phi),\ x<0 \\ P(V\le x),\ 0\le x<V_0 \\ P(\Omega),\ x\ge V_0 \end{cases}=\begin{cases} 0,\ x<0 \\ 1-e^{-\lambda x},\ 0\le x<V_0 \\ 1,\ x\ge V_0 \end{cases}$$

因***X***的可能取值不止可列个，且

$$P(X=V_0)=F_X(V_0)-F_X(V_0-0)$$

$$=P(V\ge V_0)=e^{-\lambda V_0}\ne 0$$

故***X***属于混合型随机变量，不存在分布列和密度。

练习 设R.V. X~N(μ，σ^2)和 Y(P(Y=-1)=1/3, P(Y=1)=2/3) 独立。求Z=XY的分布。

解 $$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$$
$$=P(Y=-1,-X\le z)+P(Y=1,X\le z)$$
$$=P(Y=-1)\cdot P(X\ge -z)+P(Y=1)\cdot P(X\le z)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(1-F_X(-z))+\frac{2}{3}\cdot F_X(z)$$

故 $$f_Z(z)=F_z'(z)=\frac{1}{3}f_X(-z))+\frac{2}{3}\cdot f_X(z)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(z+\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

习题选讲

练习2 设*A*，*B*是两个随机事件，定义随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\\ -1, & \overline{A}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\\ -1, & \overline{B}\end{cases}$$

证明：**Cov(*X*,*Y*)=0** $\Leftrightarrow$ ***A*与*B*相互独立。**

证　设**P(*A*)=*p***，**P(*B*)=*q***，**P(*AB*)=p_{11}**，则**(*X*,*Y*)**的联合分布列为

$X \backslash Y$	1	-1	$p_{i\bullet}$
1	p_{11}	$p-p_{11}$	p
-1	$q-p_{11}$	p_{22}	$1-p$
$p_{\bullet j}$	q	$1-q$	1

$$E(XY)=(p_{11}+p_{22})+(-1)\cdot(p_{12}+p_{21})$$

$$=4p_{11}-2p-2q+1$$

$$(p_{22}=1-p-q+p_{11})$$

$$E(X)E(Y)=[p-(1-p)][q-(1-q)]$$

$$=4pq-2p-2q+1$$

故 $Cov(X,Y)=0\ \Leftrightarrow\ p_{11}=pq\ \Leftrightarrow$ ***A*与*B*独立**

习题选讲

练习 设X与Y独立，都服从$N(0,1)$，以$f(x,y)$表示(X,Y)的联合密度函数，证明：函数

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y)+\dfrac{xy}{100}, & x^2+y^2\le 1 \\ f(x,y), & x^2+y^2>1 \end{cases}$$

是二维概率密度函数，若随机变量(U,V)有密度函数$g(x,y)$，证明：U,V都服从$N(0,1)$，但(U,V)不服从二维正态分布。

解 $$\iint_{R^2} g(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}[f(x,y)+\frac{xy}{100}]dxdy+\iint_{x^2+y^2>1} f(x,y)dxdy=1$$

当$x^2+y^2\le 1$时，$g(x,y)\geqslant \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}-\frac{x^2+y^2}{200}\geqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{e}}-\frac{1}{200}>0$

$$\because \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{100}dy=0,\ \forall |x|<1 \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dy\equiv\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\varphi(x),$$

同理 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dx=\varphi(y)$ 但 $g(x,y)\neq f(x,y)$ 否，见本题反例

问题：边缘分布为正态分布，则联合分布也必为正态分布吗？

第三章测试

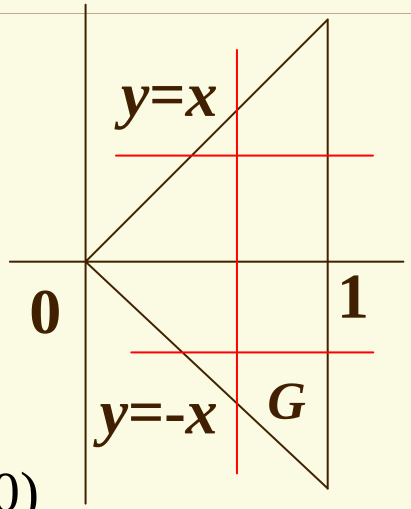
Exer1. 设**R.V.** (X, Y)在区域G: $0< x <1, -x < y < x$ 上服从均匀分布，求边缘概率密度函数、判断独立性、求和的分布

Exer2. 设**R.V.** $X\sim E(\lambda)$和 $Y\sim E(\mu)$独立。求$Z=(X-Y)/2$的密度。

Exer3. 设**R.V.** $X\sim N(\mu, \sigma^2)$和 Y($P(Y=-1)=1/3$, $P(Y=1)=2/3$)独立。求$Z=X-Y$的分布。

Exer1. 设**R.V. (*X*, *Y*)**在区域***G*: 0< *x* <1, - *x* < *y* < *x*** 上服从均匀分布，求边缘概率密度函数、判断独立性、求和的分布。

解 $$f(x,y)=\begin{cases}1/S=1, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

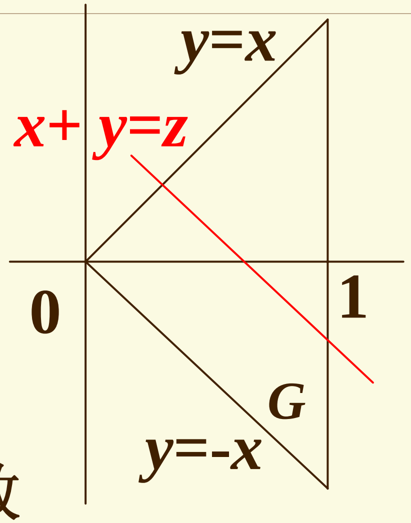


$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} dy=2x, \ x\in(0,1)\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1} dx=1+y, \ y\in(-1,0)\\ \int_{y}^{1} dx=1-y, \ y\in(0,1)\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

因在区域*G*内 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故不独立。

Exer1. 设R.V. (X, Y)在区域G: $0< x <1, -x < y < x$ 上服从均匀分布，求边缘概率密度函数、判断独立性、求和的分布。



解 $F_{X+Y}(z) = \iint\limits_{\{x+y\le z\}\cap G} f(x,y)dxdy$

$$= 1 - \int_{z/2}^{1} dx \int_{z-x}^{x} dy = 1-(1-z/2)^2$$

$$= z - z^2/4, 0 < z < 2$$

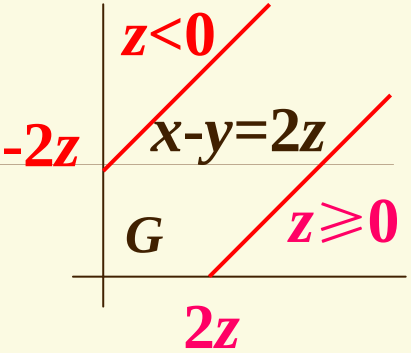
$z\leqslant 0$时，$F_{X+Y}(z)=0$；$z\geqslant 2$时，$F_{X+Y}(z)=1$. 故

$$f_{X+Y}(z) = F'_{X+Y}(z) = 1 - z/2, 0 < z < 2$$

或用公式法，有

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \int_{z/2}^{1} dx = 1 - z/2, 0 < z < 2$$

Exer2. 设R.V. $X\sim E(\lambda)$和 $Y\sim E(\mu)$独立。求$Z=(X-Y)/2$的密度。



解1　用分布函数法。

$$F_Z(z)=P((X-Y)/2\le z)=P((X-Y)\le 2z)$$

$$=\iint_{\{x-y\le 2z\}\cap G} f_X(x)f_Y(y)dxdy,\qquad f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y+2z}\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mu e^{-\mu y}dx,\ z\ge 0\\ \int_0^{+\infty}dx\int_{x-2z}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mu e^{-\mu y}dy,\ z<0\end{cases};\qquad =\begin{cases}\dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-2\lambda z},\ z\ge 0\\ \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{2\mu z},\ z<0\end{cases}$$

解2　用公式法。显然有

$$f_Z(z)=2\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-2z)dx$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y+2z)f_Y(y)dy$$

需要先推

第三章小结

D.R.V.(X,Y): P($X=x_i$, $Y=y_j$)=p_{ij}, i, j=1, 2, …

↓

P($X=x_i$)=$p_{i.}$, i=1, 2, …

P($Y=y_j$)=$p_{.j}$, j=1, 2, …

或直接求

$g(X,Y)$的分布列
二项泊松分布
独立时可加性

独立性：
$p_{ij}= p_{i.}\,p_{.j}$

第三章小结

函数的分布 → 分布函数法

公式法：$Z = X + Y,\ Max(X_1, X_2, \cdots, X_n),\ Min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$C.R.V.(X,Y): f(x,y) \Rightarrow P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{(x,y)\in D\cap G} f(x,y)dxdy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

作图、定限、计算、验　　证

二维均匀、二维正态分布；
独立时正态分布的线性性

独立性：$f(x,y) \overset{a.e.}{=} f_X(x)f_Y(y)$

§4.1 数学期望思考题

本章重点: 定理4.1---定理4.3.

1 数字特征的直观含义、优缺点?

2 对比例4.1、例4.16(二项分布的分解技巧)

3 期望的直观意义?六种重要分布各参数的相应含义是?实例? p, np, λ, $(a+b)/2$, $1/\lambda$, μ

4 期望总存在? 满足可加性?可积性?单调性?

5 (1) 已知(X, Y)的$f(x, y)$; (2)已知X的$f_X(x)$ 及$Y=h(X)$。求$E(g(X,Y))$, $E(Y)$, $E(Y^2)$, $E(g(Y))$

6 例4.13中求进货量使得平均利润达到最大。

已知一维分布，求期望用定理4.1，已知联合分布用定理4.2

习题选讲

练习12.3 在长为 l 的线段上任取两点，求两点间距离的期望及方差。

解I 设此两点为X和Y，则(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\begin{cases}1/l^2, & 0\le x,y\le l\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(|X-Y|)=\int_0^l\int_0^l|x-y|\tfrac{1}{l^2}dxdy$$

$$=\int_0^l[\int_0^x\tfrac{x-y}{l^2}dy]dx+\int_0^l[\int_0^y\tfrac{y-x}{l^2}dx]dy\ =\frac{l}{3}$$

$$E(|X-Y|^2)=\int_0^l\int_0^l(x-y)^2\tfrac{1}{l^2}dxdy\ =\frac{l^2}{6}$$

$$D(|X-Y|)=\frac{l^2}{6}-(\frac{l}{3})^2=\frac{l^2}{18}$$

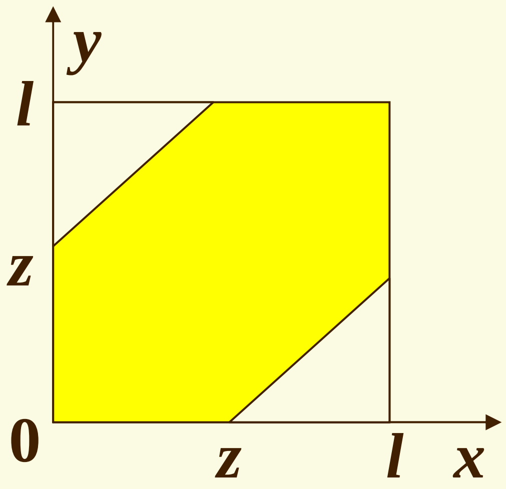
习题选讲

练习12.3 在长为 l 的线段上任取两点，求两点间距离的期望及方差。

解II 设此两点为X和Y，则 $Z=|X-Y|$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(|X-Y|\le z)=\iint_{(|x-y|\le z)\cap G} f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases} 0, & z<0 \\ [l^2-(l-z)^2]/l^2, & 0\le z\le l \\ 1, & z>1 \end{cases}$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2(l-z)/l^2 \qquad 0\le z\le l$$

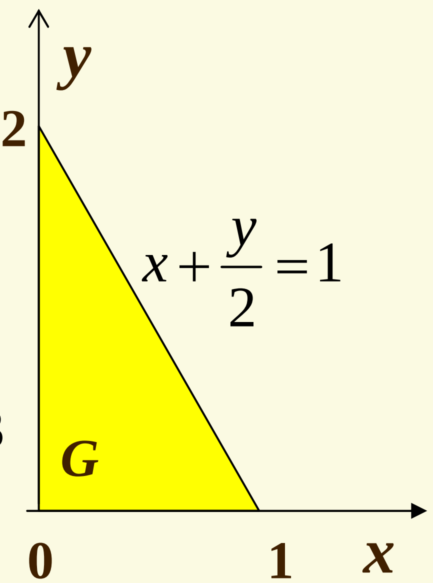
$$E(Z)=\int_0^1 z\times 2(l-z)/l^2dz=l/3$$

$$E(Z^2)=\int_0^1 z^2\times 2(l-z)/l^2dz=l^2/6 \qquad D(Z)=l^2/18$$

例7 设(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A是由直线$x=0$，$y=0$和 $x+y/2$ 围成的三角形区域. 求$E(X)$、$E(Y)$、$E(X+Y)$、$E(XY)$。

解
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}dy=2(1-x), 0<x<1\\ 0, \qquad \text{其它}\end{cases}$$



$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=1/3$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} ydxdy=2/3$$

注 已知$f(x,y)$求$E(g(X))$、$E(g(Y))$也用定理4.2.

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1/3+2/3=1$$

$$E(XY)=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} xydxdy=\int_0^2\frac{y}{2}(1-\frac{y}{2})^2dx=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$$

Exer3. 设**R.V.** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$和 **Y(P(Y=-1)=1/3, P(Y=1)=2/3)** 独立。求**$Z=X-Y$**的分布。

解 $$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X - Y \le z)$$

$$= P(Y = -1, X - (-1) \le z) + P(Y = 1, X - 1 \le z)$$

$$= P(Y = -1) \cdot P(X \le z - 1) + P(Y = 1) \cdot P(X \le z + 1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot F_X(z-1)) + \frac{2}{3} \cdot F_X(z+1)$$

故 $$f_Z(z) = F_z'(z) = \frac{1}{3} f_X(z-1)) + \frac{2}{3} \cdot f_X(z+1)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(z-\mu-1)^2}{2\sigma^2} \right\} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(z-\mu+1)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

习题选讲

练习11.3　从一大批产品中逐个随机抽取检查，一旦发现废品就认为该批产品不合格而停止检查，若抽查到第$\boldsymbol{n_0}$件仍未发现废品就认为该批产品合格而停止检查。设产品的废品率为$\boldsymbol{p}$，问平均要检查多少件产品？

解　设X为所检查产品的件数，则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,\cdots,n_0-1$$

$$P(X=n_0)=(1-p)^{n_0-1}p+(1-p)^{n_0}=(1-p)^{n_0-1}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n_0-1}k(1-p)^{k-1}p+n_0(1-p)^{n_0-1}$$

$$=p(\sum_{k=1}^{n_0-1}q^k)'+n_0q^{n_0-1}\Big|_{q=1-p}=p(\frac{1-q^{n_0}}{1-q}-1)'+n_0q^{n_0-1}$$

$$=\frac{1-(1-p)^{n_0}}{p}$$

练习11.2，11.5，11.6？

练习1 某学生沿操场400米跑道跑步，他最多跑600米，会在途中任一处停下来，然后再沿着跟起点最近的一侧跑道跑回去，求其跑回来的平均距离。

练习2 设X~N(0, 1)与Y~N(0, 1)相互独立，ξ = max(X, Y), η=min(X, Y). 求E(ξ), E (η)

练习3 设n 个人从n顶帽子中任取一顶，X为取到自己帽子的人数，求E(X).

练习1 某学生沿操场400米跑道跑步，他最多跑600米，会在途中任一处停下来，然后再沿着跟起点最近的一侧跑道跑回去，求其跑回来的平均距离。

解　记X为其首次跑过的路程，Y为其跑回的路程，则 X~U(0，600)，且

$$Y=g(X)=\begin{cases} X,\ 0\le X<200, \\ 400-X,\ 200\le X<400, \\ X-400,\ 400\le X<600. \end{cases}$$

$$EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$ **(定理4.1)**

$$=\frac{1}{600}\left[\int_0^{200} xdx+\int_{200}^{400}(400-x)dx+\int_{400}^{600}(x-400)dx\right]$$

$$=\frac{20000+20000+20000}{600}=100.$$

练习2　设X~N(0, 1)与Y~N(0, 1)相互独立，ξ=max(X, Y), η=min(X, Y)。求E(ξ)、E (η)。

解　求E(ξ)用定理4.2，见教材P110。

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) f(x, y)dxdy$$

$$= \iint_{x \ge y} xf_X(x)f_Y(y)dy + \iint_{x<y} yf_X(x)f_Y(y)dy$$

$$= 2\iint_{x \ge y} xf_X(x)f_Y(y)dy = \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy\int_{y}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \eta = X + Y - \xi$$

$$E\eta = EX + EY - E\xi = -1/\sqrt{\pi}$$

练习3 设*n* 个人从*n*顶帽子中任取一顶，*X*为取到自己帽子的人数，求E(*X*).

解 $X_i=\begin{cases}1, 第i个人取到了自己的帽子\\0, 第i个人未取到自己的帽子\end{cases}$， $i=1,2,\cdots,n$。则

(非独立同0-1分布) $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 从而

$$EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i$$ **(定理4.3)**

$$=\sum_{i=1}^{n}[1\cdot P(X_i=1)+0\cdot P(X_i=0)]=n\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

例1 将 r 只球随机放入 n 个盒子中, 求平均空盒子数.

解 设总的空盒子数为X

$$X_i=\begin{cases}1, 第i个盒子为空\\0, 第i个盒子不空\end{cases}, \quad i=1,2,\cdots,n。则$$

(非独立同0-1分布) $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 从而

$$EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=\sum_{i=1}^{n}[1\cdot P(X_i=1)+0\cdot P(X_i=0)]$$

$$=n\left(\frac{n-1}{n}\right)^r$$

例2 设产品尺寸$X \sim N(\mu,1)$, 利润 $T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & 12<X\end{cases}$

求μ使销售一个零件的平均利润最大。

解

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x)f(x)dx=-1\cdot P(X<10)+20\cdot P(10\le X\le 12)$$

$$-5\cdot P(X>12)\ =-F(10)+20[F(12)-F(10)]-5[1-F(12)]$$

$$=-21F(10)+25F(12)-5$$

$$=-21\Phi(10-\mu)+25\Phi(12-\mu)-5$$

$$\frac{dE(T)}{d\mu}=21\varphi(10-\mu)-25\varphi(12-\mu)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\varphi(10-\mu)}{\varphi(12-\mu)}=e^{\frac{1}{2}[(12-\mu)^2-(10-\mu)^2]}=\frac{25}{21}\ \Rightarrow\ \mu=10.9128$$

§ 4.2 方差

$$E[X-E(X)]^2$$

定义　若$E(X^2)$存在，则称 **$D(X)=E(X-EX)^2$**为X的方差。

$\sqrt{D(X)}$ 称为X的均方差或标准差。

$$D(X)=E[X^2-2(EX)X+(EX)^2]=E(X^2)-(EX)^2$$

已知一维分布，由定理4.1求解：

D.R.V：　$D(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i-(EX)^2$

C.R.V：　$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(EX)^2$

(连续型对称分布)　　　(其它)

已知联合分布，由定理4.2求解…

第四章测试题

Exer1 设市场每月对某商品的需求量X(吨) ~ U[2000, 4000], 售出3万元/吨, 未售出需保管费1万元/吨. 问应组织多少吨货源才能使平均收益最大?

Exer2 设随机变量X ~ N(0, 0.5)与 Y ~ N(0, 0.5)相互独立。求E$|X-Y|$和 D$|X-Y|$.

Exer3 设导弹弹着点(X，Y)~ N(0, 0, σ^2, σ^2,0). 求弹着点到目标(原点)的平均距离.

Exer2 提示 法1 先求得联合概率密度，再用定理4.2求解; 法2 先求得X-Y的分布，再用定理4.1求解(见P69例4.26).

独立时, $aX + bY + c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$

Exer1 **设市场每月对某商品的需求量*X*(吨) ~ U[2000, 4000], 售出3万元/吨, 未售出需保管费1万元/吨. 问应组织多少吨货源才能使平均收益最大?**

解 设应组织***a***吨货源. 收益

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3X - (a - X), 2000 \le X < a \\ 3a, a \le X \le 4000 \end{cases}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{2000}[\int_{2000}^{a} (4x - a) dx + \int_{a}^{4000} 3a dx]$$

$$= -\frac{1}{1000} a^2 + 7a - 4000$$

令导数为**0**，得***a*****=3500**吨。

Exer3 设导弹弹着点**(*X*，*Y*)~ N(0, 0,** σ^2**,** σ^2**,0).** 求弹着点到目标**(**原点**)**的平均距离**.**

解 因 ρ**=0**，故***X***、***Y***独立。于是平均距离为

$$E(\sqrt{X^2+Y^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\, f_X(x) f_Y(y)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma}(\sigma^2+0^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

习题 设随机变量X_1， $X_2, \ldots,$ X_n相互独立，且期望和方差分别为 μ，$\sigma^2 \neq 0$, 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 求$X_i-\overline{X}$和$X_j-\overline{X}$**的相关系数。**

解 $$Cov(X_i-\overline{X}, X_j-\overline{X})$$

$$=Cov(X_i, X_j)-Cov(X_i,\overline{X})-Cov(\overline{X}, X_j)+Cov(\overline{X},\overline{X})$$

$$=\begin{cases} 0-2Cov(X_i,\dfrac{X_i}{n})+Cov(\overline{X},\overline{X}), & i\neq j \\ \sigma^2-2Cov(X_i,\dfrac{X_i}{n})+Cov(\overline{X},\overline{X}), & i=j \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0-\dfrac{2}{n}D(X_i)+D(\overline{X})=-\dfrac{1}{n}\sigma^2, & i\neq j \\ \sigma^2-\dfrac{2}{n}D(X_i)+D(\overline{X})=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2, & i=j \end{cases} \quad (D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\rho_{X_i-\overline{X}, X_j-\overline{X}}=\frac{Cov(X_i-\overline{X}, X_j-\overline{X})}{\sqrt{D(X_i-\overline{X})D(X_j-\overline{X})}}=\begin{cases} 1, & i=j \\ -\dfrac{1}{n-1}, & i\neq j \end{cases}$$

Exer1 设 $X_t = A\cos(\omega t+\Phi)$, $A \sim N(\mu, \sigma^2), \Phi \sim U[0, 2\pi]$,

且二者独立。求 $E(X_t)$和$\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$.

解

$$E(X_t) = E(A)\cdot E[\cos(\omega t+\Phi)]$$

$$= \mu\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)d\varphi = 0$$

$$E(X_t X_s) = E(A^2)\cdot E[\cos(\omega t+\Phi)\cos(\omega s+\Phi)]$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega s+\varphi)d\varphi$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)\cos[(\omega(t-s)]$$

$$Cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)\cos[(\omega(t-s)]$$

第五章小结

重点：两个中心极限定理--定理5.4，定理5.5;

题型：近似求解多个随机变量和(包括二项分布)的分布和概率问题

习题选讲

练习**14.4**　某地区拟建一个新停车场。统计资料表明，该地区日平均停车n=**1600**辆，且估计有**3/4**的车将停放在新建的停车场，问应设计多少个停车位可使空车位≥**200**的概率不超过**0.1**？

$X \sim B(1600, 3/4)$

解　设X为新停车场的停车数，则 $\overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$

设计N个车位应满足：$P(N-X \geq 200) \leq 0.1$

$$P(X \leq N-200) = F(N-200) \approx \Phi\left(\frac{(N-200)-1600\times\frac{3}{4}}{\sqrt{1600\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{N-1400}{10\sqrt{3}}\right) \leq 0.1 \Rightarrow -\frac{N-1400}{10\sqrt{3}} \geq \Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$$

$$\Rightarrow N \leq 1377.8, \quad N = 1377$$

练习 某保险公司有1万人参加寿险，每人每年付保费120元。设一个人一年内死亡的概率为0.003，死亡时其家属可在保险公司领取保费2万元。求保险公司亏本的概率p_1及一年内利润不少于40万元的概率p_2。

解 设X为参加寿险的人中死亡的人数，则

$$X \sim B(10000, 0.003),\quad X \overset{\bullet}{\sim} N(30, 29.91).$$

$$p_1 = P(120 - 2X \le 0) = P(X \ge 60)$$

$$= 1 - F(60) = 1 - \Phi\left(\frac{60-30}{\sqrt{29.91}}\right) \approx 0$$

$$p_2 = P(120 - 2X \ge 40) = P(X \le 40)$$

$$= F(40) = \Phi\left(\frac{40-30}{\sqrt{29.91}}\right) \approx \Phi(1.83) = 0.9664$$

常用统计量(已知样本)

1、样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{\text{辛钦大数定律}} E(X)$

2、样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \to D(X)=E(X-EX)^2$

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$

3、样本**k**阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \quad \to \quad E(X^k)$

$A_1=\overline{X}$

4、样本**k**阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \to \quad E(X-EX)^k$

$B_2=\frac{n-1}{n}S^2=\tilde{S}^2$

问题：如何估计E($g(X)$)和E($g(X-EX)$)？

答：对n个样本 $g(X_i)$和$g(X_i-\bar{X})$取算术平均值。

5、顺序统计量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \to X_1^* \le X_2^* \le \cdots \le X_n^*$

注意：X_i^*并不是 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 中固定的一个。

$X_1^* = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n), X_n^* = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

分别称为极小和极大统计量。 分布？

$$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, F_{\max}(x) = F^n(x)$$

R.V.X的 α 上侧分位数 λ_α：P($X>\lambda_\alpha$)= α. 其中0< α <1.

因$F(\lambda_\alpha)$ = P($X\leqslant\lambda_\alpha$)= 1－ α, 故 $\lambda_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$.

N(0,1)分布的 α 上侧分位数记为u_α，则$\boxed{u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)}$.

练 习

1 $F_{0.90}(25,10) = 1/F_{0.10}(10,25) = \dfrac{1}{1.87} = 0.5348$

2 设$X \sim$ N(0,1)，则$X^2 \sim$ $\chi^2(1)$.

3 设$T \sim t\,(n)$，则$T^2 \sim$ $F(1,n)$. $T^{-2} \sim F(n,1)$.

4 设$X \sim$ N(0,1)与$Y \sim$ N(0,1) 独立，则 $X^2/Y^2 \sim$ $F(1,1)$.

5 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$是来自N($0,\ \sigma^2$**)的样本，则**

$$(1)\ Y_1 = \frac{X_1^2 + X_3^2 + \cdots X_{2n-1}^2}{X_2^2 + X_4^2 + \cdots X_{2n}^2} \sim F(n,n).$$

$$(2)\ Y_2 = \frac{X_1 + X_3 + \cdots X_{2n-1}}{\sqrt{X_2^2 + X_4^2 + \cdots X_{2n}^2}} \sim t(n).$$

例1 设$\boldsymbol{X_1}$，$\boldsymbol{X_2}$，…，$\boldsymbol{X_n}$是取自总体$\boldsymbol{N}(0,\ \sigma^2)$的样本，则

$E(\overline{X}/S)=?$

解： $\dfrac{\overline{X}}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1) \longrightarrow E(\dfrac{\overline{X}}{S}\sqrt{n})=0 \longrightarrow E(\dfrac{\overline{X}}{S})=0.$

或 $\overline{X}\sim N(0,\sigma^2/n)$, $\overline{X}$与S^{-1}独立$\longrightarrow E(\overline{X}/S)=E(\overline{X})E(1/S)=0.$

§7.2 点估计

一、矩法（设总体有l个未知参数）

1、理论依据：大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\right) = 1$

2、基本原则：

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{估计}} \alpha_k = E(X^k)$$

令 $\hat{\alpha}_k = A_k, k = 1,2,\cdots,l \Rightarrow \hat{\theta}$

3、求解步骤：①由总体分布求出$\alpha_k = E(X^k) = g_k(\theta_1,\cdots\theta_l)$

②由方程组① 解出$\theta_k = h_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_l), k = 1,2,\cdots,l$

③两边取估计得：$\hat{\theta}_k = h_k(\hat{\alpha}_1,\cdots,\hat{\alpha}_l) = h_k(A_1,\cdots,A_l),$

$$k = 1,2,\cdots,l$$

注 1 矩估计基本原则可增加：用 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$ 估计

$$\beta_k=E(X-EX)^k$$

2 总体各阶理论矩的矩估计即为其对应的样本矩，如任一总体期望 θ_1=$E(X)$和方差 θ_2=$D(X)$的矩估计为

$$\hat{E}(X)=\overline{X},\hat{D}(X)=\tilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

练习1：求N(1, σ^2) 分布中参数的矩估计。

解 法1 用原点矩。

$X \sim N(1, \sigma^2)$, 则$E(X) = 1$, $E(X^2) = \sigma^2+1$. 于是

$\sigma^2 = E(X^2) - 1$. 其矩估计

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{E}(X^2) - 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1 \neq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \tilde{S}^2.$$

$$\because \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}). \quad \therefore P(\bar{X} = \mu) = 0,$$

法2 用中心矩。 $D(X) = E[(X-EX)^2] = \sigma^2$，故

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2. \text{ 或 } \hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

注 矩估计不唯一。

极大似然原则：参数空间中使得样本观察值出现的概率(或概率密度)达到最大的参数作为参数的极大似然估计。

似然函数：设样本观察值为$x_1, x_2, \dots, x_n$, 则

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}P_\theta(X=x_i) & \text{其中}P_\theta(X=x_i)\text{为}X\text{的分布律}\\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta) & \text{其中}f(x,\theta)\text{为}X\text{的密度函数}\end{cases}$$

θ的极大似然估计值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$:

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta)\Leftrightarrow \ln L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}\ln L(\theta)$$ (自变量 θ)

θ的极大似然估计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

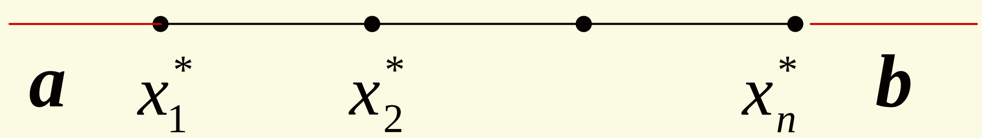
通常由似然方程 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0 \quad i=1,2,\cdots,l$ 解出 $\hat{\theta}_i$

注 若无驻点，则在 θ 的不可导点或边界点处达到。

例3 设总体 **$X \sim U[a,b]$**，试求**a** 和**b** 的极大似然估计量

解 $L(a,b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;a,b)=\dfrac{1}{(b-a)^n},\ x_i\in[a,b],\ i=1,2,\cdots,n$

$\because$ 在 $a\le x_1,x_2,\cdots x_n\le b$下(注意自变量为$a,b$),



注 观测值与参数空间有关。$b-a$取$\min$时,$L(a,b)$取$\max$.

$\therefore$ 当$a=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\},\ b=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$时, $L(a,b)=\max$

即**a, b**的极大似然估计值为 $\hat{a}=x_1^*,\ \hat{b}=x_n^*$

及**a, b**的极大似然估计量为 $\hat{a}=X_1^*,\ \hat{b}=X_n^*$

与矩估计不同。

性质：若$\hat{\theta}$为θ的极大似然估计，则$\hat{u}=u(\hat{\theta})$为$\boldsymbol{u=u(\theta)}$的极大似然估计。

例3　设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求σ的极大似然估计。

解　由$\sigma>0$，$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$有反函数，再由例2知$\hat{\sigma}^2=\tilde{S}^2$

故　$\hat{\sigma}=\tilde{S}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

注意：矩法估计的原理和极大似然估计不同；矩法估计先求估计量再求估计值，极大似然估计则相反。

例2 证明样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是总体方差 **$D(X)=\sigma^2$** 的无偏估计。

证明 $E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)]$

$$=\frac{1}{n-1}[nE(X^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$\xrightarrow{D(X)=E(X^2)-(EX)^2}=\frac{1}{n-1}[n(\sigma^2+\mu^2)-n(D(\overline{X})+E^2(\overline{X})]$$

$$=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2+n\mu^2-n(\sigma^2/n+\mu^2)]=\sigma^2$$

注：直接求也可

注1 例2说明$\tilde{S}^2$不是σ²的无偏估计 ~ 渐近无偏估计

$$\because \quad E(\tilde{S}^2)=E(\frac{n-1}{n}S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$$

注2 $\hat{\theta}$ 为θ的无偏估计，但$u(\hat{\theta})$不一定是$u(\theta)$的无偏估计。

一般，函数的期望不等于期望的函数，即$E(g(X))\neq g(E(X))$.

如：若$D(X)>0$，虽$\overline{X}$为$\mu=E(X)$的无偏估计，但$\overline{X}^2$非μ^2的无偏估计。

$$\because E[(\hat{\mu})^2]=E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\neq\mu^2$$

注3 无偏估计不唯一，如X_1和$\overline{X}$ 均为$\mu=E(X)$的无偏估计。

事实上对任何$c_1, c_2, \dots, c_n$，当$c_1+c_2+\dots+c_n=1$时，有

$$E(\sum_{i=1}^n c_i X_i)=\mu$$

练习 1　分别求总体 **P (λ)** 和 **E (λ)**中参数 λ 的矩估计和极大似然估计量，并判断无偏性。

解　**1** $X \sim P(\lambda)$，则 $E(X) = \lambda$ ，$\hat{\lambda} = \hat{E}X = \bar{X}$.

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda} \Big/ \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

由　$d \ln(L(\lambda)) / d\lambda = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}, \hat{\lambda} = \bar{X}$.

由　$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = \lambda$ 估计量是无偏的。

2 $X \sim E(\lambda)$，则 $\hat{\lambda} = 1/\hat{E}X = 1/\bar{X}$.

$E(\hat{\lambda}) = +\infty \neq 1/\hat{E}\bar{X} = \lambda$, 估计量不是无偏的。

（习题7.7：设 μ 已知）提示：①先求得 $\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$；

② $P(\bar{X} < t) = F(t) = \Phi(\dfrac{t-\mu}{\sqrt{\sigma^2 / n}}) = \Phi(\dfrac{t-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}) \longleftrightarrow \dfrac{t - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \longleftrightarrow \sigma$.

求解置信区间的步骤如下:

1 寻找分布已知的随机变量 $g(\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \theta)$;

2 构造概率为**1－** α 的事件，使

$$P(a < g(\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \theta) < b) = 1 - \alpha$$

3 根据上式得等价事件，解出置信区间

$$P(\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = 1 - \alpha$$

一、$N(\mu,\sigma^2)$ 中 μ 的置信区间

1、σ^2已知

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)\qquad P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

2、σ^2未知

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)\qquad P(|T|<t_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha$$

二、$N(\mu,\sigma^2)$ 中σ^2的置信区间

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha$$

Exer1. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$为来自正态总体的样本,

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_{2i-1}/n,\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i-1}-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(X_{2i}-\mu)^2}\sim F(n-1,n-1)$$

Exer2. 设$X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

μ已知，求σ^2的极大似然估计并判断无偏性。

解 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(X_i-\mu)^2\neq\tilde{S}^2$,显然无偏性成立，因

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}E(X_i-\mu)^2=DX=\sigma^2.\text{或}$$

$$2n\hat{\sigma}^2/\sigma^2=\sum_{i=1}^{2n}[(X_i-\mu)/\sigma]^2\sim\chi^2(2n)\Rightarrow E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2.$$

注：因 $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$, 故 $P(\overline{X}=\mu)=0$

Exer3. 求双参数指数分布参数的极大似然估计并判断无偏性

Exer4. 推导正态总体参数的双侧置信区间。