H矩阵的新型判定方法和应用及一类

矩阵AOR迭代的收敛条件

杨亚强

摘要：本文主要讨论了 H 矩阵的一种新型判定方法和应用及一类特殊矩阵AOR迭代法的收敛条件。众所周知，在线性代数方程组的讨论中，往往假设方程组的系数矩阵为H矩阵，而在实际工作中的确有许多矩阵为H矩阵，早在1976年人们研究JOR、SOR、AOR等迭代时发现这些迭代法的收敛性和H矩阵有非常重要的关系，即：只要所讨论的矩阵是H矩阵，则$L_{r,w}(G)$，$S_{r,w}(G)$等迭代矩阵是都是收敛的。因此快速而准确的判定一个矩阵是不是H矩阵对于讨论一个迭代矩阵的收敛性是非常重要的，本文就以此为基础来进行研究，给出了一个新型的H矩阵的判定方法，这个方法仅与所给矩阵本身的元素有关，方便可行。并将此方法推广应用到矩阵范数的估计上，得到了$\|M^{-1}N\|_\infty$的一个新的估计式，推广了其适用的范围。其次对于 AOR 迭代本文在总结已有的收敛条件的基础上，特别对当Jacobi特征值为复数的情况进行了讨论，并给出了一个收敛条件，扩大了AOR迭代收敛的范围。

正文的内容包括第一章、第二章、第三章及第四章。第一章是序言部分，主要讨论了现有的H矩阵的一些判定方法、现有的矩阵范数的估计及近几年的发展情况。第二章是重点，主要讨论了H矩阵的一个新型判定方法及推广。第三章是应用，主要讨论了H矩阵的判定方法和结果在范数估计上的应用。第四章也是重点，讨论了当Jacobi特征值为复数的情况下AOR迭代法收敛的范围。其内容详细说明如下：

第二章中，首先研究了文献[2-6]中关于H矩阵的判定方法和近几年专家学者对于H矩阵判定的探索，然后给出了一个H矩阵新的判定方法，这个方法只与所给矩阵的本身元素有关，而且可以程序化处理，简单且容易操作，再以这个新的判定方法为基础给出了不可约矩阵、含有非零元素链的矩阵为H矩阵的判定方法，并通过数值例子可以看出来这种判定方法是十分方便和有效的。

第三章中，先对已有的$\|A^{-1}\|_\infty$、$\|M^{-1}N\|_\infty$的估计进行研究（其中M要求严格对角占优），然后利用第二章的结论，给出了一个新的$\|A^{-1}\|_\infty$、$\|M^{-1}N\|_\infty$的估计式（其中M不要求是严格对角占优）通过数值例子比较可以看出来，这个估计不但

比已有的估计精确而且适用范围要广的多。

第四章中，首先总结了在 Jacobi 迭代矩阵的特征值全为零、全为实数、全为纯虚数和为实数及纯虚数时收敛的充要条件。然后重点讨论了 Jacobi 迭代矩阵的特征值为特殊复数的情况下 AOR 迭代法的收敛范围，并给出了一个充分条件，通过具体的数值例子可以看出来这个收敛条件是有效的，但是由于这只是充分条件所以对其最优参数的讨论还需要进一步研究。

关键词： 非奇异 H 矩阵；对角占优；拟严格对角占优；AOR 迭代；M 矩阵；

A New Judgement and Application of H Matrix and the Convergence condition of AOR Iterative Method

Yang Yaqiang

Abstract: This paper mainly discusses a new judgement and application of H matrix and the convergence condition of AOR iterative method .As we all know, in the discussion of the linear systems, the coefficient matrix of the linear systems is usually assumed to be H matrix. There really exist many H matrices in practice. In 1976, people did much research on iterative methods of JOR, SOR and AOR.They found that the convergence of these iterative methods were closely related to H matrices ,That is, if the discussed matrix is H matrix, the iterative matrices $L_{r,w}(G), S_{r,w}(G)$ are all converged. Thus, when we discuss the convergence of iterative methods, it is very important to make a quick and accurate judgement on whether a matrix is H matrix or not. On the basis of this theory, the author have done much research work and offered the judgement about a new H matrix. This method is only related to elements of given matrix itself. It's very convenient and feasible. The author applies this method to the estimation of matrix norm and gets a new estimation formula $\|M^{-1}N\|_{\infty}$, which broadens the range of its application. On the basis of the summary of existing convergence condition, the author have mainly discussed the situation that the eigenvalues of Jacobi are complex numbers, and offered a convergence condition ,which have the convergent range of AOR iterative method.

The Main part of this paper includes 4 chapters. The first chapter is prelude, which mainly discusses some judgement of H matrices, estimation of matrix norm and the development in recent years. The second chapter is a major part, which mainly discusses the new judgement and application of H matrices. The third chapter is application, which mainly discusses the application of the judgement and the estimation norms of H matrices. The forth chapter is also a major part, which discusses the convergent range of AOR iterative method when the eigenvalues of Jacobi are complex numbers. The details are as following:

In the second part, the author firstly studies the judgement about H matrix from the literature [2-6] and the explorations which the experts have done on the judgement of H matrix in recent years. The author offers a new judgement about H matrix. This method is only related to the element of existing matrix itself. Meanwhile, managed

process can be simple and easy to operate. On the basis of this new judgement, the author offers the judgement that irreducible matrix and matrix which contains element chains of non-zero is H matrix, from the comparison of examples of numerical value. It is clear that this judgement is very convenient and effective.

In the third part, the author firstly studies the given estimation of $\|A^{-1}\|_{\infty}$ and $\|M^{-1}N\|_{\infty}$ (M is strict diagonal dominant matrix), secondly, the author offers a new estimation formula of $\|A^{-1}\|_{\infty}$ and $\|M^{-1}N\|_{\infty}$ by using the conclusion of second part. (M is not necessarily for strict diagonal dominant matrix). From the comparison of numerical examples, this estimation is much more accurately than the existing one .What is more, it has a wider range of application.

In the forth part, the author firstly sums up the necessary and sufficient conditions of convergence when the eigenvalues of Jacobi iterative matrix are all zero, real number, pure imaginary as well as real number and pure imaginary. Secondly, it focuses on discussing the convergence range when the evgenvalues of Jacobi iterative matrix are special complex number and numerical values differently. We can see that this convergence condition is effective. However, it is merely practical condition. Therefore we need a further discussion on the optimum parameter.

Key words: nonsingular H-matrix; diagonal dominance; generalized strictly diagonal dominance; AOR iteration; M-matrix

学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，论文中不包含其他个人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得陕西师范大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确说明并表示谢意。

作者签名：杨亚强　　　　日期：2006.5

学位论文使用授权声明

本人同意研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属陕西师范大学。本人保证毕业离校后，发表本论文或使用本论文成果时署名单位仍为陕西师范大学。学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其它指定机构送交论文的电子版和纸质版；有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆、院系资料室被查阅；有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索；有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。

作者签名：杨亚强　　　　日期：2006.5

第一章 引 言

在线性代数方程组的讨论中，往往假设方程组的系数矩阵为 H 矩阵，而在实际工作中的确有许多矩阵为 H 矩阵，很早在 1976 年 Varga 和 Alefeld 对 Jacobi、JOR、SOR、SSOR 等迭代矩阵以及 Plemmon 在 1977 年对一般的正规分裂迭代矩阵$M^{-1}N$进行的讨论中，都得到一致的结论：这些迭代矩阵的收敛和 H 矩阵有非常重要的关系，即只要所讨论的矩阵是 H 矩阵，则$L_{r,w}(G)$、$S_{r,w}(G)$等许多迭代矩阵是收敛的。因此快速而准确的判定一个矩阵是不是 H 矩阵对于讨论一个矩阵迭代的收敛性是非常重要的，为了解决这个问题，国内外一大批专家学者进行了大量的讨论，也给出了许多重要的结果，如王川龙 2000 年给出的 H 矩阵的判定方法：

设$A\in M_n(C)$，$r=\max\limits_{i\in N_1}\dfrac{R_i}{|a_{ii}|}$ 若

$|a_{kk}|>l_k+\sum\limits_{j\in N_1}|a_{kj}|\dfrac{rl_j+r_j}{|a_{jj}|}$，$k\in N_2$ 则 A 为 H 矩阵。这些判定方法都有一个共同的问题就是需要进行大量繁琐的计算，本文第二章中从 H 矩阵的定义出发，给出了一个新型判定方法：$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若满足

$$|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}| \qquad (\forall\, i\in N_1\ )$$

$$|a_{ii}|>\frac{R_i(A)}{R_i(A)-H_i}\Big[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\Big] \qquad (\forall\, i\in N_2\ )$$

其中 $H_i=\min\limits_j\{\ |a_{ij}|>0\}$ $i,\ j=1,2\cdots\cdots n$ ，N_1，N_2分别为均势和劣势的行，

则 A 是非奇异 H 矩阵。这个判定方法是从矩阵本身元素出发进行判定，不需要引入其它参数，而且可以程序化，简单易行，从实际例子也可以看出来这个新型判定方法是非常有效的，而且判定范围明显扩大。

在此基础之上，由 H 矩阵的判定方法还给出了不可约矩阵、含有非零元素链的矩阵为 H 矩阵的判定方法。

另外，在第三章中以 H 矩阵的判定方法为基础给出了一个新的矩阵无穷范数的估计式：

$\|A^{-1}\|_\infty \le \max_i (L_{ij})\ i=1,2,3$ 此时 $j\in N_i$

$\|A^{-1}\|_\infty \ge \min_{i\in N_3} \frac{1}{|a_{ii}|+R_i(A)}$ 其中 $R_i(A)=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|$

其中 $L_{1j}=[|a_{jj}|-(\sum_{t\in N_1,t\ne j}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|)]^{-1} \qquad j\in N_1$

$L_{2j}=[\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{jj}|-(\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2,t\ne j}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|)]^{-1} \quad j\in N_2$

$L_{3j}=[\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{jj}|-(\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3,t\ne j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|)]^{-1} \qquad j\in N_3$

从具体数值例子中可以看出来这是一个比较精确的估计。比较这个无穷范数的估计式，结合 $M^{-1}N$ 的估计，从而可以得到 $M^{-1}N$ 的一个新的估计式：

$\|M^{-1}N\|_\infty \le m\|N\|_\infty$，其中 $m=\max_i(L_{ij})$，通过比较可以看出来这个估计比以往给出来的估计式估计效果要好。

最后，文章的第四章中从 Jacobi 矩阵和 AOR 迭代矩阵特征值的关系出发讨论 AOR 迭代矩阵 $L_{r,\omega}=(D-rL)^{-1}[(1-\omega)D+(\omega-r)L+\omega U]$ 的收敛范围。

在 Jacobi 迭代矩阵的特征值全为零、全为实数、全为纯虚数和为实数及纯虚数时讨论了收敛的充要条件。并重点讨论了当 Jacobi 迭代矩阵的特征值 μ_j 为特殊复数（$\mu_j=\mu_{1j}+i\mu_{2j}$，且 $|\mu_j|^2=\alpha$（常数），μ_{2j} 不为零）时的收敛条件。在这个讨论中，引入新的方法，并得到了一个 AOR 迭代收敛的充分条件

ω 满足 $\quad 0<w<\min_j \frac{2(1-x_j)}{(1-x_j)^2+{y_j}^2}$

（$j=1,2\cdots\cdots n$，其中 x_j,y_j 的含义为 $L_{r,1}$ 迭代矩阵的特征值:$\lambda_{r,1}=x_j+iy_j$ 的实部与虚部）

r满足　(i) $(1-r)^2 < \frac{1}{\alpha^2}$

$$\text{(ii)}\ \frac{\alpha|r|}{[1-\alpha^2(1-r)^2]} < \min_j \frac{1}{|1+(1-r)\bar{\mu}_j^2|} \qquad j=1,2\cdots n$$

这个收敛条件讨论的 Jacobi 特征值是复数，比以往的讨论前进了一步，但是这个讨论仅仅是对于 Jacobi 特征值是特殊的复数的情况，而且给出的是收敛的充分条件，因此无法进一步讨论最优参数的选取问题，所以对于更一般的复数的情况和收敛的充要条件的讨论还需要我们去更进一步研究和探讨。

第二章　H 矩阵新型判定方法及其应用

在本章中，我们考虑了一类特殊矩阵—H 矩阵的判定条件，并给出了一个新型、简单的判定方法，使得判定范围明显扩大，并且这个判定方法只与给定的矩阵本身元素有关，避免了一些判定([文献 4-5])中要计算 Jacobi 特征值与特征向量的繁琐过程，从而解决了 H 矩阵的一个判定问题。

§2.1 预备知识

在矩阵分析中，H 矩阵是目前研究的热门课题之一，包括数学物理在内的许多实际问题均可归纳为大型稀疏矩阵的线性方程组的求解，而线性方程组的讨论中往往假设系数矩阵是非奇异的 H 矩阵，因为在许多迭代法中的迭代矩阵对于 H 矩阵都是收敛的(见文献[1])，因而简捷、迅速地判定一个矩阵是否是 H 矩阵，便成为理论和应用中一个十分有意义的问题。

自 1993 年以来，国内、国外有一大批专家、学者致力与 H 矩阵判定的研究，也发表了数篇 H 矩阵判定的文章(文献[2—6])，近年来众多专家学者的研究大多均以电子科技大学的黄廷祝教授于 1993 年发表的《非奇异 H 矩阵的简捷判据[J]》为基础进行的。最近几年又有诸如冉瑞生等人发表的《非奇异 H 矩阵判定条件的推广》等文章，这些都是对 H 矩阵的判定进行了新的探索，本文主要也是以此为基础，对 H 矩阵的判定进行了研究,并给出了一个新的判定方法,这个方法对 H 矩阵的范围进行了进一步的推广，并将这个判定方法推广到不可约矩阵和有非零元素链的矩阵，从实际例子也可以看出来这是对现有的理论的进一步推广，是具有十分重要的理论和实际作用。

§2.2 主要结果及证明

2.2.1 定义及预备定理

定义 1[1] 若 $A\in R^{n\times n}$，且 A 可以表示为 $A=sI-B$，其中 I 为阶单位矩阵，$B\geq 0$，当 $s\geq\rho(B)$ 时称 A 为 M 矩阵，特别当 $s>\rho(B)$ 时称 A 为非奇异 M 矩阵。

定义 2[1] 若 $A\in C^{n\times n}$，$D=diagA$，$A=D-C$，则称 $|D|-|C|$ 为 A 的比较矩阵，且记作 $\mathfrak{M}(A)$，若 $\mathfrak{M}(A)$ 为 M 矩阵，则称 A 为 H 矩阵。

定义 3[1] 设$A\in C^{n\times n}$，$D=diagA$,若A的比较矩阵为非奇异M矩阵，则称A为非奇异H矩阵。

定义 4[1] 设$A\in C^{n\times n}$，$A=(a_{ij})$，若$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ （$i,j=1,2\cdots\cdots n$）则称A为对角占优矩阵，若$|a_{ij}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$，（$i,j=1,2\cdots\cdots n$）则称$A$为严格对角占优矩阵。

定义 5[1] 设$A\in C^{n\times n}$，$A=(a_{ij})$，若$n>1$，且存在$N=\{1,2,\cdots\cdots n\}$的一个非空不交的分划S,T，$S\cup T=N$，使得对$\forall i\in S, j\in T$有$a_{ij}=0$，则称A为可约的，否则A为不可约的。

定义 6[1] 设$A\in C^{n\times n}$，若有正对角矩阵设Q，使得$\tilde{A}=AQ(QA)$为行（列）严格对角占优矩阵，则称A为行（列）拟严格对角占优矩阵又称为广义对角占优矩阵(即 A 为非奇异 H 矩阵)。

定义 7[6] 如果矩阵$A=(a_{ij})\in M_n(C)$满足$|a_{ii}|\geq R_i(A)$，$(\forall i\in N)$且上式中至少有一个严格不等式成立，以及对每一个等式成立的下标i存在非零元素链

$a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$，满足$|a_{j_kj_k}|>R_{j_k}(A)$，则称$A$为具有非零元素链的对角占优矩阵。

引理 1 若A为严格对角占优矩阵，则A为非奇异H矩阵。

引理 2 若A为不可约对角占优矩阵，则A为非奇异H矩阵。

证明：若A为不可约对角占优矩阵，则显然$a_{ii}\neq 0$（$i,j=1,2\cdots\cdots n$），（否则若存在$i_0\in N$使得$a_{i_0i_0}=0$则由$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$，（$i,j=1,2\cdots\cdots n$）可以得到

$a_{i_0j}=0,\quad j=1,2\cdots\cdots n$ 这与A是不可约矩阵相矛盾）。为了证明A非奇异，只需要证明$AX=0$只有零解即可，将$AX=0$改写为：

其中 $a'_{ij}=\begin{cases}0 & j=i\\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & j\neq i\end{cases}$ 记 $M=\max|x_i|=|x_{i_0}|$， $x_i=-\sum_{j\neq i}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j=\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}x_j$

则有

$$M=|x_{i0}|\le\sum_{j=1}^{n}|a'_{i_0j}||x_j|\le M\sum_{j=1}^{n}|a'_{i_0j}|, \tag{1}$$

若A是奇异矩阵，则对$AX=0$的非零解有$M\neq 0$，由（1）式可以推出$\sum_{j=1}^{n}|a'_{i_0j}|=1$，且$|a'_{i_0j}|\neq 0$时，$|x_j|=M$，由对角占优的定义知$|x_j|=M$，于是由$A$不可约导出对于$i_0,k$有 $i_1,i_2\cdots,i_m$使$a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots\cdots a_{imk}\neq 0$从而$a'_{i_0i_1}a'_{i_1i_2}\cdots\cdots a'_{imk}\neq 0$，由$a'_{i_0i_1}\neq 0$导出$|x_{i_1}|=M$，再由$a'_{i_1i_2}\neq 0$导出$|x_{i_2}|=M$，……重复上面的步骤可以得到:$|x_k|=M$，进而得到$\sum_{j=1}^{n}|a'_{kj}|=1$，这与$A$为对角占优矩阵的条件相矛盾，故$A$非奇异。

又由A为不可约对角占优矩阵，取 $A=D-B$，（$D=diagA$），则比较矩阵也为不可约对角占优且L矩阵，从而比较矩阵为M矩阵，故A为H矩阵，综上所述可知A为非奇异H矩阵。

引理 3[7] 设$A\in C^{n\times n}$，且A为具有非零元素链对角占优矩阵，则A为非奇异H矩阵。

引理 4[1] 设$A\in M_n(C)$，如果存在正对角矩阵X，使得AX是非奇异H矩阵，则A也是非奇异H矩阵。

引理 5[1] 设A为不可约矩阵，X为正对角矩阵，若有$B=AX$，则B也为不可约矩阵。

2.2.2 非奇异H矩阵的判定方法

1、设$M_n(C)$为 n 阶复矩阵的集合， $M_n(R)$为 n 阶实矩阵的集合，

$A=(a_{ij})\in M_n(C)$ $\qquad R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\quad i,j=\{1,2,\cdots\cdots n\}$

$$N_1=\{i\in N:0<|a_{ii}|=R_i(A)\}$$

$$N_2=\{i\in N:0<|a_{ii}|<R_i(A)\}$$

$$N_3=\{i\in N:|a_{ii}|>R_i(A)\}$$

显然 $N_1\cap N_2=\phi,\ N_1\cap N_3=\phi,\ N_2\cap N_3=\phi,\ N_1\cup N_2\cup N_3=N$，规定 $\sum_{i\in\phi}\bullet=0$，则显然当 $N_1\cup N_2=\phi$ 时，A 为严格对角占优矩阵，即为非奇异 H 矩阵，反之若 A 是非奇异 H 矩阵，则 A 至少有一个严格对角占优的行，因此 $N_3\neq\phi$，由此我们总可以假设 N_3，$N_1\cup N_2$ 非空。

定理 1. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 若

$$|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\qquad(\forall\, i\in N_1)\tag{1}$$

$$|a_{ii}|>\frac{R_i(A)}{R_i(A)-H_i}[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|]\quad(\forall i\in N_2)\tag{2}$$

其中 $\quad H_i=\min_j\{\ |a_{ij}|>0\}\quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$

则 A 是非奇异 H 矩阵。

证明：由假设 $\forall\ \ i\in N_1$ 则有

$$L_i=\frac{1}{\sum_{t\in N_3}|a_{it}|}[|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|-\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|]>0\tag{3}$$

$$L_i=\frac{1}{\sum_{t\in N_3}|a_{it}|}[\frac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1}|a_{it}|-\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|-\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|]>0\tag{4}$$

当 $\sum_{t\in N_3}|a_{it}|=0$ 时，记 $L_i=+\infty$，显然 $\forall\ i\in N_1\cup N_2\quad L_i>0$，因此一定存在充分小的 $\varepsilon>0$，使得

$$0<\varepsilon<\min_{i\in N_1\cup N_2}L_i\leq+\infty\tag{5}$$

构造 $X = diag(x_1, x_2 \cdots\cdots x_n) \quad \forall x_i > 0$ 其中

$$x_i = \begin{cases} 1 & i \in N_1 \\ \dfrac{R_i(A) - H_i}{R_i(A)} & i \in N_2 \\ \varepsilon + \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|} & i \in N_3 \end{cases}$$

其中 $H_i = \min\limits_j \{ |a_{ij}| > 0 \} \quad i, j = 1, 2 \cdots\cdots n$

因为 $\varepsilon \neq +\infty$ 故 $x_i \neq +\infty$ 显然 X 为正对角矩阵，记 $B = AX = (b_{ij})$，则 $b_{ij} = x_j a_{ij} \quad i, j = 1, 2, \cdots\cdots n$，下面只需要证明 B 严格对角占优即可。

1）$\forall i \in N_1$ 当 $\sum\limits_{t \in N_3} |a_{it}| = 0$ 时 $\forall t \in N_3 \quad a_{it} = 0$ 由（1）得

$$R_i(B) = \sum_{t \in N_1, t \neq i} x_t |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} x_t |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}|$$

$$= \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \frac{R_t(A) - H_t}{R_t(A)} |a_{it}|$$

$$< |a_{ii}| = |b_{ii}|$$

当 $\sum\limits_{t \in N_3} |a_{it}| \neq 0$ 时，由（3）和（5）得

$$R_i(B) = \sum_{t \in N_1, t \neq i} x_t |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} x_t |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} x_t |a_{it}|$$

$$= \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \frac{R_t(A) - H_t}{R_t(A)} |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} (\varepsilon + \frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}) |a_{it}|$$

$$= (\sum_{t \in N_3} |a_{it}|) \varepsilon + \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2} \frac{R_t(A) - H_t}{R_t(A)} |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} \frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}) |a_{it}|$$

$$< \frac{\sum\limits_{t \in N_3} |a_{it}|}{\sum\limits_{t \in N_3} |a_{it}|} [|a_{ii}| - \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| - \sum_{t \in N_2} \frac{R_t(A) - H_t}{R_t(A)} |a_{it}| - \sum_{t \in N_3} \frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}) |a_{it}| + \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| +$$

$$\sum_{t \in N_2} \frac{R_t(A) - H_t}{R_t(A)} |a_{it}| + \sum_{t \in N_3} \frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}) |a_{it}|]$$

$=|a_{ii}|=|b_{ii}|$

2）当 $\forall i\in N_2$ $\quad \sum_{t\in N_3}|a_{it}|=0$ 时，$\forall t\in N_3$ $\quad a_{it}=0$ 由（2）得

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t\neq i}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|$$

$$=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|$$

$$<\frac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

当 $\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\neq 0$ 时，由（4）和（5）得

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t\neq i}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|$$

$$=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}(\varepsilon+\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|})|a_{it}|$$

$$=(\sum_{t\in N_3}|a_{it}|)\varepsilon+\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|$$

$$<\frac{\sum_{t\in N_3}|a_{it}|}{\sum_{t\in N_3}|a_{it}|}[\frac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1}|a_{it}|-\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|-\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|})|a_{it}|+$$

$$\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|})|a_{it}|]$$

$$=\frac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

3）当 $j\in N_3$，$\forall t\in N_2$ ，$0<\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}<1$，

$\forall t\in N_3$ $\quad 0<\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}<1$ 所以

$$\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|-R_j(A)<0$$

而 $\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left|a_{jt}\right|>0$

故

$$m_j=\frac{1}{\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left|a_{jt}\right|}\Big[\sum_{t\in N_1}\left|a_{jt}\right|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}\left|a_{jt}\right|+\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{\left|a_{tt}\right|}\left|a_{jt}\right|-R_j(A)\Big]<0$$

由 $\varepsilon>0$ 得 $\varepsilon>m_j$ （6）

$\forall j\in N_3$ 由（6）得

$$\left|b_{jj}\right|-R_j(B)=x_j\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_1}x_j\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_2}x_j\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}x_j\left|a_{jt}\right|$$

$$=(\varepsilon+\frac{R_j(A)}{\left|a_{jj}\right|})\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_1}\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}(\varepsilon+\frac{R_t(A)}{\left|a_{tt}\right|})\left|a_{jt}\right|$$

$$=\varepsilon(\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left|a_{jt}\right|)+R_j(A)-\sum_{t\in N_1}\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}\left|a_{jt}\right|$$

$$>\frac{\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left|a_{jt}\right|}{\left|a_{jj}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\left|a_{jt}\right|}\Big[\sum_{t\in N_1}\left|a_{jt}\right|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}\left|a_{jt}\right|+\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{\left|a_{tt}\right|}\left|a_{jt}\right|-R_j(A)$$

$$+R_j(A)-\sum_{t\in N_1}\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}\left|a_{jt}\right|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{\left|a_{tt}\right|}\left|a_{jt}\right|\Big]=0$$

即 $\left|b_{jj}\right|>R_j(B)$

综上所述，$\forall i\in N$ 都有 $\left|b_{jj}\right|>R_j(B)$ 故，B 为严格对角占优矩阵，由定义 6，A 为拟对角占优矩阵，即为非奇异 H 矩阵。

推论：设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，且满足定理 1 的条件，其中 $H_i=\min_j\{\left|a_{ij}\right|>0\}$，$i,\ j=1,2\cdots\cdots n$，若 $H_i=\left|a_{ii}\right|$即为文献[6]的结果。

2、数值例子

例 1

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&3&3&0&10\\0&0&8&10&0\\0&0&1&20&0\\0&0&0&1&10\end{bmatrix}$$ 其中 $N_1=\{\ 1\ \}$ $N_2=\{\ 2,\ 3\ \}$ $N_3=\{\ 4,\ 5\ \}$

由定理[1]的判定条件可得：

$$|a_{11}|=1>\frac{13}{14}=\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{12}|+\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{15}|$$

$$|a_{22}|=3>2.8=\frac{R_2(A)}{R_2(A)-H_2}[|a_{21}|+\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{25}|]$$

$$|a_{33}|=8>\frac{5}{2}=\frac{R_3(A)}{R_3(A)-H_3}[|a_{31}|+\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{32}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{34}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{35}|]$$

由于矩阵 A 满足定理 1 的条件，所以 A 为非奇异 H 矩阵。

但

$$|a_{22}|=3<\frac{182}{55}=\frac{R_2(A)}{R_2(A)-|a_{22}|}[|a_{21}|+\frac{R_3(A)-|a_{33}|}{R_3(A)}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{25}|]$$

所以用文[6]的定理无法判定。

$$|a_{11}|=1=1=|a_{12}|+|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{15}|$$

$$|a_{22}|=3<5=|a_{21}|+|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{25}|$$

所以用文[5]的定理无法判定。

$$|a_{22}|=3<\frac{77}{5}=\frac{R_2(A)}{|a_{22}|}[\frac{|a_{11}|}{R_1(A)}|a_{21}|+\frac{|a_{33}|}{R_3(A)}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{25}|]$$

所以用文[9]的定理无法判定。

由此可见定理[1]的确是对 H 矩阵判定方法作了推广。

例 2

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&5&-4&0&1\\0&0&3&5&0\\1&0&1&10&0\\0&0&0&5&10\end{bmatrix}$$

其中　$N_1=\{1,2\}$　　$N_2=\{2\}$　$N_3=\{4,5\}$

而　$|a_{11}|=1>\frac{2}{5}=|a_{12}|+\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{15}|$

$$|a_{22}|=5>\frac{21}{10}=|a_{21}|+\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{25}|$$

$$|a_{33}|=3>\frac{5}{2}=\frac{R_3(A)}{R_3(A)-H_3}[|a_{31}|+|a_{32}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{34}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{35}|]$$

故它满足定理 1 的条件，因此这个矩阵是非奇异 H 矩阵，由此可以看出这个方法只与矩阵本身元素有关，计算起来也比较简单，确实方便可行。

2.2.3 不可约矩阵为 H 矩阵的判定方法

1、本节内容给出了一个不可约但满足一定条件的矩阵为 H 矩阵的判定方法，从而将上一节的判定方法推广到不可约的情形，其中符号规定与上一节一样。

定理 2 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且不可约，若

$$|a_{ii}|\geq\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\qquad(\forall i\in N_1)\qquad(1)$$

$$|a_{ii}|\geq\frac{R_i(A)}{R_i(A)-H_i}[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|]\quad(\forall i\in N_2)\qquad(2)$$

且上述两个式子中至少有一个严格不等式成立，则 A 是非奇异 H 矩阵。

证明：构造一个对角矩阵 $X=diag(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)$　$\forall x_i>0$　其中

$$x_i=\begin{cases}1 & i\in N_1\\ \dfrac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)} & i\in N_2 \quad \text{其中} \quad H_i=\min\limits_j\{\,|a_{ij}|>0\}\quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n\\ \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|} & i\in N_3\end{cases}$$

记 $B=AX=(b_{ij})$，则$b_{ij}=x_j a_{ij}$ ，$i,j=1,2,\cdots\cdots n$ 下面只需要证明 B 为不可约对角占优矩阵即可。

1）$\forall i\in N_1$ 由（1）得

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t\neq i}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|$$

$$=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|$$

$$\leq|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

2）$\forall i\in N_2$ 由（2）得

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|$$

$$=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|$$

$$\leq\frac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

3）当 $j\in N_3$，$\forall t\in N_2$ $0<\dfrac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}<1$， $\forall t\in N_3$ $0<\dfrac{R_t(A)}{|a_{tt}|}<1$

所以$R_j(A)-\sum\limits_{t\in N_1}|a_{jt}|-\sum\limits_{t\in N_2}\dfrac{R_t(A)-H_j}{R_t(A)}|a_{jt}|-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq j}\dfrac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|>0$

则 $|b_{jj}|-R_j(B)=x_j|a_{jj}|-\sum\limits_{t\in N_1}x_j|a_{jt}|-\sum\limits_{t\in N_2}x_j|a_{jt}|-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq j}x_j|a_{jt}|$

$$=\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{jj}|-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|$$

$$=R_j(A)-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|>0$$

综上 1)，2)，3）可知，$\forall j\in N$ 都有 $|b_{jj}|\geq R_j(B)\quad j=1,2\cdots n$ 且至少有一个严格不等式成立，则 B 为对角占优矩阵，而 A 又不可约，由引理 5 知道，B 为不可约对角占优矩阵，再由引理 2 知 B 为非奇异 H 矩阵，则由引理 4，显然 A 为非奇异 H 矩阵。

这个定理是针对不可约矩阵提出了判别非奇异 H 矩阵的方法，使定理 1 的适用范围更加广泛，具有十分重要的实际意义。

2、数值例子

例 1

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0.75 & i & 0 \\ 0.5 & -1 & 16 & 1.5i \\ -1 & 1 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

其中 $N_1=\{\ 1\ \}\quad N_2=\{\ 2\ \}\quad N_3=\{\ 3,\ 4\ \}$

而：$a_{12}=0,$但是 $a_{13}a_{32}\neq 0$，$a_{21}=0,$但是 $a_{23}a_{31}\neq 0$，$a_{24}=0,$但是 $a_{23}a_{34}\neq 0$，$a_{43}=0,$但是 $a_{42}a_{23}\neq 0$ 因此这是一个不可约且不严格对角占优的矩阵，但是：

$$|a_{11}|=2>=\frac{47}{80}=\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{12}|+\frac{R_3(A)}{|a_{33}|}|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|$$
$$=\frac{1-0.75}{1}\times 0+\frac{3}{16}\times 1+\frac{2}{5}\times 1=\frac{47}{80}$$

$$|a_{22}|=0.75=0.75=\frac{R_2(A)}{R_2(A)-H_2}[|a_{21}|+\frac{R_3(A)}{|a_{33}|}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|]$$
$$=\frac{1}{1-0.75}[0+\frac{3}{16}\times 1+\frac{2}{5}\times 0]=\frac{3}{4}$$

故有上边的判断可以知道满足定理 2 的条件，所以这也是一个非奇异 H 矩阵。

2.2.4 具有非零元素链的矩阵为H矩阵的判定方法

1、本节内容是在定理1的基础之上，将其判定方法推广到具有非零元素链的特殊矩阵，并依此推导出了具有非零元素链的矩阵为H矩阵的判定方法。其中符号约定如第一节。

定理3 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 如果满足：

$$|a_{ii}|\ge\sum_{t\in N_1,t\ne i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}| \quad (\forall\, i\in N_1) \tag{1}$$

$$|a_{ii}|\ge\frac{R_i(A)}{R_i(A)-H_i}\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\ne i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\right] \quad (\forall\, i\in N_2) \tag{2}$$

其中 $H_i=\min\limits_j\{\,|a_{ij}|>0\}\quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$

且上面两个式子中至少有一个严格不等式成立，对于每一个等式成立的i或N_3中的i存在非零元素链$a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}k}\ne0$且满足：

$$k\in N_1\ \text{且}\ |a_{kk}|>\sum_{t\in N_1,t\ne k}|a_{kt}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{kt}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{kt}|$$

或 $k\in N_2$ 且

$$|a_{kk}|>\frac{R_k(A)}{R_k(A)-H_k}\left[\sum_{t\in N_1}|a_{kt}|+\sum_{t\in N_2,t\ne k}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{kt}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{kt}|\right]$$

$H_i=\min\limits_j\{\,|a_{ij}|>0\}\quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$

则A是非奇异H矩阵。

证明：构造一个对角矩阵$X=diag(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)$ $\forall x_i>0$ 其中

$$x_i=\begin{cases}1 & i\in N_1\\ \dfrac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)} & i\in N_2\\ \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|} & i\in N_3\end{cases}\qquad \text{其中}\quad H_i=\min_j\{\,|a_{ij}|>0\}\quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$$

记 $B=AX=(b_{ij})$，则 $\quad b_{ij}=x_j a_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots\cdots n$

1）$\forall i\in N_1$ 时，由题目条件得:

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t\neq i}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|$$

$$=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|$$

$$\le|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

2）$\forall i\in N_2$ 时，由题目已知条件得:

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}x_t|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|$$

$$=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|$$

$$\le\frac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

3）$\forall t\in N_2$ 时 $\quad 0<\dfrac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}<1$，$\forall t\in N_3 \quad 0<\dfrac{R_t(A)}{|a_{tt}|}<1$

所以 $R_j(A)-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_2}\dfrac{R_t(A)-H_j}{R_t(A)}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\dfrac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|\ge 0$

$$|b_{jj}|-R_j(B)=x_j|a_{jj}|-\sum_{t\in N_1}x_j|a_{jt}|-\sum_{t\in N_2}x_j|a_{jt}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}x_j|a_{jt}|$$

$$=\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{jj}|-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|$$

$$=R_j(A)-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|-\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|\ge 0$$

由 1)，2)，3）可知，$\forall j\in N$ 都有 $|b_{jj}|\ge R_j(B) \quad j=1,2\cdots n$，但由非零元素链的条件可以知道，$\exists\ i_0\in N_1\cup N_2$，使得 $|b_{i_0i_0}|>R_{i_0}(B)$，因此由定义可知 B 为具有非零元素链的对角占优矩阵，又引理 3，B 为非奇异 H 矩阵，再由引理 4，A 为

非奇异H矩阵。

2、数值例子

例 1

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3i & 0 \\ 1 & -i & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3i \end{bmatrix} \quad 其中 \quad N_1=\{1\} \quad N_2=\{2\} \quad N_3=\{3,4\}$$

而：$a_{12}=0$,但是 $a_{12}a_{23}\neq 0$，$a_{14}=0$,但是 找不到一个非零元素链使得：

$a_{1j_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_k4}\neq 0$, $a_{24}=0$但是找不到一个非零元素链使得 $a_{2j_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_k4}\neq 0$,

$a_{34}=0$,也找不到一个非零元素链使得：$a_{3j_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_k4}\neq 0$,因此由矩阵可约的定义知道这是一个可约矩阵且是不严格对角占优的矩阵，但是：

$$\begin{aligned}|a_{11}|=1>\frac{2}{3}&=\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{12}|+\frac{R_3(A)}{|a_{33}|}|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|\\&=\frac{3-1}{3}\times 1+\frac{2}{9}\times 0+\frac{1}{3}\times 0=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|a_{22}|=1=1&=\frac{R_2(A)}{R_2(A)-H_2}[|a_{21}|+\frac{R_3(A)}{|a_{33}|}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|]\\&=\frac{3}{3-1}[0+\frac{2}{9}\times 3+\frac{1}{3}\times 0]=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1\end{aligned}$$

且对于等式成立的$i=2$，存在非零元素链：$a_{23}a_{31}\neq 0$而，此时$k\in N_1,k=1$，且满足：

$$|a_{11}|>\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{12}|+\frac{R_3(A)}{|a_{33}|}|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|$$

故有上边的判断可以知道满足定理 3 的条件，所以定理 3 的结果可以知道这是一个非奇异H矩阵。

第三章 一类特殊矩阵无穷范数的估计

在矩阵计算中，经常要对某个矩阵的特征值进行估计，因此对一个矩阵范数的估计尤为重要，在这一章里我们先讨论一类特殊矩阵逆的无穷范数的估计。在文献[1，10-16]中对$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的讨论往往假设$A$为严格对角占优矩阵，得到了许多结果，如胡家赣在《矩阵分析》中提到的一个估计：$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} \le \dfrac{1}{\alpha}$，$\alpha = \min\limits_{i}\{|a_{ii}| - \sum\limits_{j \ne i}|a_{ij}|\}$，其中要求$A$为严格对角占优矩阵。但在实际中所讨论的矩阵往往是弱对角优势矩阵甚至没有对角优势的矩阵，在1976年，Varga曾对A为H矩阵的情形给出了一个$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$上界的估计，但是此上界比较抽象不便于实际应用，后来胡家赣在文[1]中也给出了两个估计：

结论一：若$A=(a_{ij})$为不可约H矩阵，则：

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} \le \frac{\max\limits_{i}(q_i)}{\min\limits_{i}(|a_{ii}|q_i)(1-\rho(|J|))}$$

此处$q=(q_1,q_2,\cdots q_n)^T$为$|J|$的与特征值$\rho(|J|)$相对应的正的特征向量。

结论二：若$A=(a_{ij})$为可约H矩阵，其法式为

$$P^TAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k-1} & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k-1} & A_{2k} \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & A_{k-1k-1} & A_{k-1k} \\ & & & & A_{kk} \end{bmatrix}$$

此处P为一个排列矩阵，又设

$Q = diag(Q_1,Q_2,\cdots Q_k)^T$为一个块对角矩阵，其对角块$Q_1,Q_2\cdots Q_k$分别与$P^TAP$的对角块有相同的阶，则：$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} \le \dfrac{\|Q\|_{\infty}\max\left\|\tilde{A}_{ii}^{-1}\right\|_{\infty}}{1-\left\|\tilde{D}^{-1}\tilde{C}\right\|_{\infty}}$

这两个结论可以对$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$作处估计，但是他们每一个都要进行大量的计算，

因为要计算出 $\rho(|J|)$ 及对应的特征向量与构造 Q 都需要大量的计算。本节主要利用了矩阵范数的定义给出了一个 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的估计，并且不要求 A 为严格对角占优矩阵，在估计式子中，只与矩阵本身的元素有关，因此可以说是一种比较简便和实用的估计公式。

§3.1 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界的估计

定理 4 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且满足：

$$|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}| \qquad (\forall\, i\in N_1\ )$$

$$|a_{ii}|>\frac{R_i(A)}{R_i(A)-H_i}[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{it}|\ ] \quad (\forall\, i\in N_2\ )$$

则 $\|A^{-1}\|_\infty\le\max\limits_i(L_{ij}) \qquad i=1,2,3 \quad$ 此时 $j\in N_i$

其中 $\quad H_i=\min\limits_j\{\ |a_{ij}|>0\} \quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$

$$L_{1j}=[|a_{jj}|-(\sum_{t\in N_1,t\neq j}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|)]^{-1} \qquad j\in N_1$$

$$L_{2j}=[\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{jj}|-(\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2,t\neq j}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|)]^{-1} \quad j\in N_2$$

$$L_{3j}=[\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{jj}|-(\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(A)-H_t}{R_t(A)}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_3,t\neq j}\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}|a_{jt}|)]^{-1} \qquad j\in N_3$$

证明：构造一个对角矩阵 $X=diag(x_1,x_2\cdots\cdots x_n) \quad \forall x_i>0 \quad$ 其中

$$x_i=\begin{cases}1 & i\in N_1\\ \dfrac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)} & i\in N_2\\ \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|} & i\in N_3\end{cases} \qquad \text{其中} \quad H_i=\min_j\{\ |a_{ij}|>0\} \quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$$

记 $B=AX=(b_{ij})$，则 $b_{ij}=x_ja_{ij}$， $i,j=1,2,\cdots\cdots n$ （1）

同第二章定理1的证明过程，可以知道B为严格对角占优矩阵，即为非奇异H矩阵，由文[1]第78页定理可知：

$$\|B^{-1}\|_\infty \le \max_i\{\frac{1}{|b_{ii}|-\sum_{j\ne i}^{n}|b_{ij}|}\}$$

而由（1）可知

$$b_{ii}=\begin{cases}|a_{ii}| & i\in N_1\\ \dfrac{R_i(A)-H_i}{R_i(A)}|a_{ii}| & i\in N_2\\ \dfrac{R_i(A)}{|a_{ii}|}|a_{ii}| & i\in N_3\end{cases}$$

$\sum_{j\ne i}|b_{ij}|=\sum_{t\in N_1,j\ne i}|a_{ij}|+\sum_{t\in N_2,j\ne i}\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{ij}|+\sum_{t\in N_3,j\ne i}\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{ij}|)$ 又$B=AX$，则

$A=BX^{-1}$，即 $A^{-1}=XB^{-1}$故由矩阵无穷范数的定义可以得到：

$\|A^{-1}\|_\infty=\|XB^{-1}\|_\infty\le\|X\|_\infty\|B^{-1}\|_\infty$ 由X的构造可以知道$\|X\|_\infty=1$，因此上式可以变为：

$$\|A^{-1}\|_\infty=\|XB^{-1}\|_\infty\le\|X\|_\infty\|B^{-1}\|_\infty=\|B^{-1}\|_\infty\le\max_i\frac{1}{|b_{ii}|-\sum_{j\ne i}|b_{ij}|}=\max_i(L_{ij})$$

$i=1,2,3$ 时 $j\in N_i$

定理证明完毕。

说明：通过这个方法得到的$\|A^{-1}\|_\infty$上界的估计式是精确的。

例如：取$A=I-B$，且$B=0$，则显然$|a_{ii}|=1$，$X=diag(1,1,1\cdots\cdots1)$，有

$\forall i \quad \sum_{j\ne i}^{n}|b_{ij}|=0$，则由上界估计式有：$\|A^{-1}\|_\infty\le 1$。

而事实上，$\lambda_i(A^{-1})=1$，而 $\lambda_i(A^{-1})\le\|A^{-1}\|_\infty$

故有：$1\le\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\le 1$，所以有$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}=1$。

§ 3.2 $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ 下界的估计

定理 5[15]、若A非奇异则有：

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\ge\min_{i\in N_3}\frac{1}{|a_{ii}|+R_i(A)}\quad 其中\ R_i(A)=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|$$

定理 6 设$A\in Z$, 且 $A^{-1}\ge 0$，N_3表示全体严格对角占优的行，则：

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\ge\min_{i\in N_3}\frac{1}{|a_{ii}|-R_i(A)}\quad 其中\ R_i(A)=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|$$

证明：设$\alpha=N-N_3$，则A^{-1}的行和分别为：$x_1,x_2,\cdots x_n$，

记：$x_{i_0}=\min\limits_{i\in\alpha}x_i$，$x_{j_0}=\min\limits_{j\in N_3}x_j$，$r_i=\sum\limits_{j\ne i,j\in\alpha}|a_{ij}|$ $\quad\delta_i=\sum\limits_{j\ne i,j\in N_3}|a_{ij}|$

由$AX=e$，（$e=(1,1,1,\cdots\cdots 1)^T$，可以推出：

$$a_{i_0i_0}x_{i_0}-(x_{i_0}r_{i_0}+\delta_{i_0}x_{j_0})\ge 1$$

若$x_{i_0}\le x_{j_0}$，则上式可表示为：$a_{i_0i_0}x_{i_0}-R_{j_0}(A)x_{i_0}\ge 1$，则 $i_0\in N_3$，与$i_0\in\alpha$矛盾。故$x_{i_0}>x_{j_0}$，从而 $(a_{j_0j_0}-R_{j_0}(A))x_{j_0}\ge 1$，因此可以得到：

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\ge x_{j_0}\ge\frac{1}{|a_{j_0j_0}|-R_{j_0}(A)}\ge\min_{i\in N_3}\frac{1}{|a_{ii}|-R_i(A)}$$

定理证毕。

1、数值例子

例 1

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&4&4&4&0\\0&0&8&10&0\\0&0&1&20&0\\0&0&0&1&10\end{bmatrix}\quad 其中N_1=\{\ 1\ \}\qquad N_2=\{\ 2,\ \ 3\ \}\ N_3=\{\ 4,\ \ 5\ \}$$

由定理[1]的判定条件可得：

$$|a_{11}|=1>\frac{1}{2}=\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{12}|+\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}|a_{13}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{14}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{15}|$$

$$|a_{22}|=4>\frac{7}{10}=\frac{R_2(A)}{R_2(A)-H_2}[|a_{21}|+\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}|a_{23}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{24}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{25}|$$

$$|a_{33}|=8>\frac{5}{2}=\frac{R_3(A)3}{R_3(A)-H_3}|a_{31}|+\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}|a_{32}|+\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}|a_{34}|+\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}|a_{35}|$$

故A满足定理的条件。

$$L_{11}=[|a_{11}|-(\sum_{j\in N_2}\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{1j}|+\sum_{j\in N_3}\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{1j}|]^{-1}$$

$$=(1-\frac{8-4}{8}\times1+0+0)^{-1}=2$$

$$L_{22}=[|a_{22}|\frac{R_2(A)-H_2}{R_2(A)}-(\sum_{j\in N_1}|a_{2j}|+\sum_{j\in N_2,j\neq2}\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{2j}|+\sum_{j\in N_3}\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{2j}|]^{-1}$$

$$=(2-\frac{4}{5}-\frac{1}{5})^{-1}=1$$

$$L_{23}=[|a_{33}|\frac{R_3(A)-H_3}{R_3(A)}-(\sum_{j\in N_1}|a_{3j}|+\sum_{j\in N_2,j\neq3}\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{3j}|+\sum_{j\in N_3}\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{3j}|]^{-1}$$

$$=[8\times\frac{10-8}{10}-(0+\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{20}\times10+0)]^{-1}=\frac{10}{11}$$

$$L_{34}=[|a_{44}|\frac{R_4(A)}{|a_{44}|}-(\sum_{j\in N_1}|a_{4j}|+\sum_{j\in N_2}\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{4j}|+\sum_{j\in N_3,j\neq4}\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{4j}|]^{-1}$$

$$=[20\times\frac{1}{20}-(0+\frac{8-4}{8}\times0+\frac{10-8}{10}\times1+0)]^{-1}=1.25$$

$$L_{35}=[|a_{55}|\frac{R_5(A)}{|a_{55}|}-(\sum_{j\in N_1}|a_{5j}|+\sum_{j\in N_2}\frac{R_j(A)-H_j}{R_j(A)}|a_{5j}|+\sum_{j\in N_3,j\neq5}\frac{R_j(A)}{|a_{jj}|}|a_{5j}|]^{-1}$$

$$=[10\times\frac{1}{10}-(0+0+0+\frac{1}{20}\times1)]^{-1}=\frac{20}{19}$$

由本节的估值定理可得：$\|A^{-1}\|_\infty\le\max_i(L_{ij})$

即 $\|A^{-1}\|_\infty\le2$

现在我们采用结论二的方法对这个例子进行估计：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&4&4&4&0\\0&0&8&10&0\\0&0&1&20&0\\0&0&0&1&10\end{bmatrix}$$

则构造正对角矩阵Q：$Q=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

由$\tilde{A}=AQ$可得：$\tilde{A}=\begin{bmatrix}5&4&0&0&0\\0&16&8&4&0\\0&0&16&10&0\\0&0&2&20&0\\0&0&0&1&10\end{bmatrix}$ 其中：$\tilde{C}=\begin{bmatrix}0&-4&0&0&0\\0&0&-8&-4&0\\0&0&0&-10&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-1&0\end{bmatrix}$

应用 MATLAB 计算可得到：

$$\tilde{D}^{-1}\tilde{C}=\begin{bmatrix}0&-\frac{4}{5}&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&0\\0&0&0&-\frac{5}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{10}&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{10}&0\end{bmatrix}\quad 且\tilde{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0.2&-0.05&0.0253&-0.0027&0\\0&0.0625&-0.0317&0.0033&0\\0&0&0.0667&-0.0333&0\\0&0&-0.0067&0.0533&0\\0&0&0.007&-0.0053&0.1\end{bmatrix}$$

由结论二的估计式可以得到：

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le\frac{\|Q\|_\infty\max\left\|\tilde{A}_{ii}^{-1}\right\|_\infty}{1-\left\|\tilde{D}^{-1}\tilde{C}\right\|_\infty}=\frac{5\times0.2}{1-\frac{4}{5}}=5$$

显然定理 4 的估计结果比结论二的估计结果要好。事实上通过 MATLAB 实际计算可以得到：$\left\|A^{-1}\right\|_\infty=1.39$ 由这个结果也可以看出来定理 4 的估计结果是比较精确的。

例 2 现在我们来看对矩阵A下界的估计

$$A=\begin{bmatrix} 1.4000 & -0.3000 & -0.5000 & -0.5000 \\ -0.0001 & 0.1000 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.3000 & -0.1000 & 1.0000 & -0.6000 \\ -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & 1.4000 \end{bmatrix}$$

其中　$N_1=\{\ 3\ \}$　　$N_2=\{\ 4\ \}$　$N_3=\{\ 1,\ 2\ \}$

显然A是一个满足定理 6 条件的矩阵，由定理 6 的结论可以知道：

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \geq \min_{i\in N_3}\frac{1}{|a_{ii}|-R_i(A)}=\min\{\frac{1}{1.4-1.3},\frac{1}{0.1-0.0003}\}=10$$

即由范数下界的估计定理 6 可得: $\left\|A^{-1}\right\|_\infty \geq 10$

而事实上由 MATLAB 计算可得：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1.2893 & 9.6788 & 1.1152 & 0.9391 \\ 0.0029 & 10.0308 & 0.0042 & 0.0036 \\ 0.8451 & 10.3475 & 2.0044 & 1.1616 \\ 0.7633 & 10.7347 & 1.1156 & 1.4658 \end{bmatrix}$$

则　　$\left\|A^{-1}\right\|_\infty=14.3586$

可见这个估计也是比较精确的。

§3.3 $M^{-1}N$ 范数的估计

1、在讨论差分方程的稳定性我收敛性、线性方程组的迭代解法的收敛性的问题中，往往都需要估计$\left\|M^{-1}N\right\|$，$\rho(M^{-1}N)$等一些量，但在以往的文献中还缺乏这种有效的估计，Varga 在 1975 年和 1976 年曾经给出过这样的估计式：

$$\left\|M^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\alpha}\qquad \text{此处}\quad \alpha=\min_i\{|m_{ii}|-\sum_{j\neq i}|m_{ij}|\}>0$$

更早的结果有六十年代的 Douglas 引理，这虽然也是一种估计，但是这种方法对要估计的对象要求过严，而且计算复杂，不是很理想的方法。

近年来也提出了许多比较好方法，其代表是 1983 年胡家赣在《线性方程组的迭代解法》中给出的结论：

结论：设$M=(m_{ij})$为$n\times n$阶矩阵，$N=(n_{ij})$为$n\times m$阶矩阵，M为严格对角占优矩阵，则：

$$\|M^{-1}N\|_\infty \le \max_i\{\frac{\sum_{j=1}^{m}|n_{ij}|}{(|m_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{m}|m_{ij}|)}\}$$

这个结果是比较精确的，但是对M矩阵的要求也是严格的，必须要求其为严格对角占优矩阵，而实际中许多这样的矩阵是弱对角占优或者不具有对角占优的矩阵，对于这些矩阵这个定理是无法估计的，本节则主要是对这个结果进行了进一步扩充，去掉了严格对角占优这个条件，使得定理适用范围明显扩大，是十分有意义的。

定理 7 设 $M,N\in M_n(C)$ 且M满足：

$$|m_{ii}|>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|m_{it}|+\sum_{t\in N_2}\frac{R_t(M)-H_t}{R_t(M)}|m_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(M)}{|m_{tt}|}|m_{it}| \quad (\forall\, i\in N_1\ ) \tag{1}$$

$$|m_{ii}|>\frac{R_i(M)}{R_i(M)-H_i}[\sum_{t\in N_1}|m_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\frac{R_t(M)-H_t}{R_t(M)}|m_{it}|+\sum_{t\in N_3}\frac{R_t(M)}{|m_{tt}|}|m_{it}|\ ]\ (\forall\, i\in N_2\ ) \tag{2}$$

其中 $H_i=\min_j\{\ |m_{ij}|>0\}\quad i,\ j=1,2\cdots\cdots n$

L_{ij}如上一节所定义，且令：$\max_i(L_{ij})=m \qquad i=1,2,3$ 此时 $j\in N_i$

则有：$\|M^{-1}N\|_\infty\le m\|N\|_\infty$

证明：由于M矩阵满足定理的条件，由定理 4 的证明过程可以知道：

$\|M^{-1}\|_\infty\le m$

再由矩阵范数的定义可以得到：

$\|M^{-1}N\|_\infty\le\|M^{-1}\|_\infty\|N\|_\infty\le m\|N\|_\infty$

定理证明完毕。

注：在这个定理给出的估计中不需要一定是严格对角占优矩阵。

2、数值例子

例 1

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&4&4&4&0\\0&0&8&10&0\\0&0&1&20&0\\0&0&0&1&10\end{bmatrix},\qquad N=\begin{bmatrix}0&0&0.05&0.05&0.5\\0&0.05&0&0.005&0\\-0.5&0.02&0.05&0&0\\-0.1&0.1&0&0.02&0.1\\0.02&0&0&-0.11&0.1\end{bmatrix}$$

由上一节定理4的例子证明可以知道，M 满足定理6所给的条件，并且$m=2$，且$\|N\|_\infty=0.6$ ，由本节定理的结果可以得到：

$$\|M^{-1}N\|_\infty\le\|M^{-1}\|_\infty\|N\|_\infty\le m\|N\|_\infty=2\times0.6=1.2$$

而事实上通过 MATLAB 计算$M^{-1}N$：

$$M^{-1}N=\begin{bmatrix}-0.0620&-0.0113&0.0563&0.0372&0.4987\\0.0620&0.0113&-0.0063&0.0128&0.0013\\-0.0600&-0.0040&0.0067&-0.0013&-0.0067\\-0.0020&0.0052&-0.0030&0.0011&0.0053\\0.0022&-0.0005&0&-0.0111&0.0095\end{bmatrix}$$

$\|M^{-1}N\|_\infty=0.6655$，可见这种估计是比较精确的。

说明：本节给出的估计定理去掉了严格对角占优这个条件，的确是对原有的估计定理的一个推广，但是由于在证明的过程中采用了矩阵范数估计公式：$\|M^{-1}N\|_\infty\le\|M^{-1}\|_\infty\|N\|_\infty$ ，由于应用这个公式有时会使得估计的结果失之过宽，因此要想得到更为精确的估计结果，还需要更进一步的改进。

3、应用

定理 6 给出了一个满足一定条件的矩阵范数的估计公式：

$$\|M^{-1}N\|_\infty\le\|M^{-1}\|_\infty\|N\|_\infty\le m\|N\|_\infty \tag{1}$$

然而通过对（1）式的研究我们发现，利用这个公式可以判断对于一个正规分裂的迭代法是不是收敛的，因为只要（1）式的右端小于 1 即可，另外我们还可以在给定M 矩阵的基础之上，构造一个矩阵，使得这个矩阵的正规分裂迭代法是收

敛的，即有如下推论：

推论 1 设 $M,N \in M_n(C)$, $A=M-N$ 且 M 满足定理 7 的条件，若 $\|N\|_\infty < \frac{1}{m}$，则 A 的正规分裂迭代法是收敛的。

推论 2 设 $M \in M_n(C)$, 且 M 满足定理 7 的条件，则存在 $N \in M_n(C)$, 使得 $A=M-N$，且 A 的正规分裂迭代法是收敛的。

我们只证明推论 1：

证明：由于 $M \in M_n(C)$, 且 M 满足定理 7 的条件，则由定理 7 的结果知：

$$\|M^{-1}N\|_\infty \le \|M^{-1}\|_\infty \|N\|_\infty \le m\|N\|_\infty \tag{2}$$

将条件 $\|N\|_\infty < \frac{1}{m}$ 代入（2）式即可得到：

$$\|M^{-1}N\|_\infty \le \|M^{-1}\|_\infty \|N\|_\infty < m \times \frac{1}{m} = 1 \tag{3}$$

而 $|\lambda_i(M^{-1}N)| \le \|M^{-1}N\|_\infty$ 则由（3）可知：$\rho(M^{-1}N)<1$，即 A 的正规分裂迭代法是收敛的。

4、数值例子

例 2

$$M=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

由例 1 的计算我们知道：$\|M^{-1}\|_\infty \le 2$，同时若取 N 为

$$N=\begin{bmatrix} 0.10 & 0 & 0.04 & 0.05 & 0.30 \\ 0.10 & 0.05 & 0 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.02 & 0.05 & 0.10 & 0.05 \\ 0.02 & 0.10 & 0 & 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.10 & 0 & 0.11 \end{bmatrix}$$

则显然由 MATLAB 计算可得:$\|N\|_\infty = 0.49$，显然 $\|N\|_\infty = 0.49 < 0.5 = \dfrac{1}{m}$，

再若 $A = M - N$，则有:

$$A = \begin{bmatrix} 0.90 & -1.00 & -0.04 & -0.05 & -0.30 \\ -0.10 & 3.95 & -4.00 & -4.05 & -0.05 \\ -0.05 & -0.02 & 7.95 & -10.10 & -0.05 \\ -0.02 & -0.10 & -1.00 & 19.98 & -0.01 \\ -0.01 & -0.01 & -0.10 & -1.00 & 9.89 \end{bmatrix}$$

由矩阵正规分裂的定义可知这种分裂为 A 的正规分裂，则由推论 1 的结果可知 A 的这种正规分裂迭代法是收敛的。

而事实上由 MATLAB 计算上述 A 的正规分裂迭代矩阵 $M^{-1}N$ 为:

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0.1344 & 0.0273 & 0.0470 & 0.0789 & 0.3207 \\ 0.0344 & 0.0273 & 0.0007 & 0.0289 & 0.0207 \\ 0.0080 & 0.0093 & 0.0067 & 0.0147 & 0.0073 \\ 0.0014 & 0.0055 & 0.0003 & 0.0017 & 0.0009 \\ 0.0011 & 0.0015 & 0.0100 & 0.0002 & 0.0110 \end{bmatrix}$$

且 $\lambda_1(M^{-1}N) = 0.1527$

$\lambda_2(M^{-1}N) = 0.0163 + 0.0169i$ $\qquad$ $\lambda_3(M^{-1}N) = 0.0163 - 0.0169i$

$\lambda_4(M^{-1}N) = -0.0021 + 0.0050i$ $\qquad$ $\lambda_5(M^{-1}N) = -0.0021 - 0.0050i$

显然 $\rho(M^{-1}N) < 1$，即 A 的正规分裂迭代法是收敛的。

第四章 矩阵迭代法及一类特殊矩阵的AOR迭代的收敛性

§4.1 引言

在许多大型的实际计算中，往往需要计算一个矩阵的特征值，在现在的研究领域，解决这类问题的方法有两种：直接法和迭代法。直接法以矩阵分解为基础，将稀疏矩阵（阶数大于 200，零元素比较多，非零元素较少）对应的线性方程组的求解化为三角线性方程组的求解，对于阶数不太高的线性方程组，用直接法较好，很快可以得到想要的结果。而对于一般阶数比较高的稀疏线性方程组，在进行矩阵分解时，将引入填入元，特别是对从三维问题离散得到的稀疏线性方程组，由于填入元的大量增加，存储需求与计算量一般相当大，直接法很难克服这个存储的问题，因此，为了解决这个问题就引入了迭代法，迭代法可以不必存储系数矩阵的零元素，因此可以解决这个问题。

在迭代法中单步定常线性迭代：$x^k = Gx^{(k-1)} + c \quad k = 1,2,\cdots$ 扮演这个重要的角色，该迭代法对方程组的求解是有构造出来的矩阵序列$\{x^k\}$的极限达到的，因此迭代法一般不能得到线性方程组的精确解。

§4.2 矩阵迭代法介绍

考虑一个线性方程组

$$AX = b \tag{1}$$

这里A是$n\times n$阶方阵，x和b是n维向量，对于方程组（1），当A是大型稀疏矩阵如A为（1，1）相容次序阵，M矩阵、H矩阵、L矩阵等通常都采用迭代法求解。

对于A的任意一个分裂$A = M - N$，M非奇异的，求解线性方程组（1）的基本迭代格式是：

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b \quad k = 1,2,\cdots$$

其中$M^{-1}N$称为迭代矩阵。我们在求解过程中，通常假设$A = D - L - U$，其中D，$-L$，$-U$分别是矩阵A的对角矩阵、严格下三角矩阵和严格上三角矩阵。

Jacobi 在 1846 年，首先提出了求解对称矩阵的近似特征值的 2 个迭代法，也就是我们所熟悉的 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法。

Jacobi 方法的基本迭代矩阵为：$J = D^{-1}(L+U)$，

Gauss-Seidel 方法的基本迭代矩阵为：$G = (D-L)^{-1}U$，

由迭代法收敛的定义可以知道上述迭代法收敛的充要条件是$\rho(G)<1$，而且$\rho(G)$越接近 1，收敛速度越慢，事实上，Jacobi 方法和 Gauss-seidel 方法的收敛速度是比较慢的，为了改进这种收敛效果，，许多数学工作者不断的探询更好的收敛方法，在此基础之上，人们通过引入松弛因子ω以加快收敛速度，即逐次超松弛迭代法，

其基本迭代矩阵为：$L_{\omega} = (I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U]$

这就是*SOR*方法。在文献[1，18-19]中已经对这种方法的收敛性作了详细的讨论，也给出了许多重要的结果。

在人们不断探索的同时，1978 年由 A.Hadjidimos 提出了双参数的快速超松弛迭代法（简称*AOR*方法见文献[20]）

其基本迭代矩阵为：$L_{r,\omega} = (D-rL)^{-1}[(1-\omega)D+(\omega-r)L+\omega U]$

此后，国内外学者对这个方法进行了大量的研究，1989 年全国数值代数会议上也有许多文章专门讨论*AOR*方法的收敛问题，然而在许多给出的收敛条件中，都假设 Jacobi 矩阵的特征值是实数，这在实际中是不够的，本章就以这种方法为出发点进行讨论，在讨论中，Jacobi 矩阵的特征值可以是实数、纯虚数、零和一些特殊的复数，不但总结了现有的一些结果，也推导了一些新的收敛理论，对原来的收敛条件进行了扩充。

§4.3 主要引理

引理 1[1] 设*AOR*方法的迭代矩阵为

$L_{r,\omega} = (D-rL)^{-1}[(1-\omega)D+(\omega-r)L+\omega U]$，则当$\omega=1$时有：

$L'_{r,1} = (D-rL)^{-1}[(1-r)L+\omega U]$

即：$L_{r,\omega} = (1-\omega)I+\omega L_{r,1}$

引理 2[21] 若T为一迭代矩阵，其特征值t_j $(j=1,2\cdots,n)$的实部为x_j，虚部为y_j，即$t_j=x_j+iy_j$，$i=\sqrt{-1}$，$j=1,2\cdots,n$，n为矩阵T的阶。又设

$$G_\omega=(1-\omega)I+\omega T$$

为T的外插矩阵，此处I为单位矩阵，ω为一实参数，则存在ω使G_ω收敛（$\rho(G_\omega)<1$）的充分必要条件是：

$x_j<1$ 或 $x_j>1$，其中 $(j=1,2\cdots,n)$

引理 3[21] 在引理 2 的条件下，若$x_j<1$ $(j=1,2\cdots,n)$，则$\rho(G_\omega)<1$的充分必要条件是：

$$0<\omega<\min_j\{\frac{2(1-x_j)}{(1-x_j)^2+y_j^2}\}$$

若$x_j>1$ $(j=1,2\cdots,n)$，则$\rho(G_\omega)<1$的充分必要条件是：

$$0>\omega>\max_j\{\frac{2(1-x_j)}{(1-x_j)^2+y_j^2}\}$$

引理 4[20] 设A为（1，1）相容次序矩阵，其对角元素全不为零，则它的AOR迭代矩阵$L_{r,\omega}$的特征值λ和 Jacobi 迭代矩阵的特征值μ有以下关系：

$$(\lambda-1+\omega)^2=\omega\mu^2[\omega+(\lambda-1)\gamma] \tag{1}$$

引理 5[22] 对于二次方程 $x^2-bx+c=0$，b,c都是复常数，其根 x_1，x_2满足：

$\max(|x_1|,|x_2|)<1$，当且仅当 $|b-\bar{b}c|<1-|c|^2$

而 $\max(|x_1|,|x_2|)=1$，当且仅当 $|b-\bar{b}c|=1-|c|^2$

§4.4 主要结果

本章的讨论都是假设矩阵A为对角元非零的相容次序矩阵，并且在公式（1）的前提下进行的，其中对$\omega=0$我们不做讨论，因为在$\omega=0$时，AOR方法即为SOR方法。

1、讨论 Jacobi 迭代矩阵的特征值全为零时的收敛条件

定理1[1] 设A为对角元非零的（1，1）相容次序矩阵，若其Jacobi迭代矩阵的特征值$\mu_j=0$，$j=1,2\cdots n$，则A的AOR迭代法收敛的充分必要条件是：

$0<\omega<2$ ，γ为任意实数

证明：由引理4知AOR迭代矩阵$L_{r,\omega}$的特征值λ和Jacobi迭代矩阵的特征值μ有以下关系：

$$(\lambda-1+\omega)^2=\omega\mu^2[\omega+(\lambda-1)\gamma] \tag{2}$$

又 $\mu_j=0,\ j=1,2\cdots n$，则代入（2）可得：

$\lambda-1+\omega=0$，即 $\lambda=1-\omega$，

则 AOR迭代收敛等价于：$|\lambda|<1\Leftrightarrow|1-\omega|<1$，

即$0<\omega<2$，γ为任意。

2、讨论Jacobi迭代矩阵的特征值全为实数的收敛条件

定理2[18] 设A为对角元非零的（1，1）相容次序矩阵，若其Jacobi迭代矩阵的特征值$\mu_j\in R,\ j=1,2\cdots n$，且不含零特征值，则$A$的$AOR$迭代法收敛的充分必要条件是：$0<\mu_j^2<1$，且$\omega$和$\gamma$满足下面二者之一：（其中$j=1,2\cdots n$）

（i）$$\begin{cases}\max\limits_j\left(\dfrac{-2}{\sqrt{1-\mu_j^2}}\right)<\omega<0\\[2ex] \max\limits_j\left(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^2}\right)<\gamma<\min\limits_j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^2}\right)\end{cases}$$

（ii）$$\begin{cases}0<\omega<\dfrac{2}{\sqrt{1-\mu_j^2}}\\[2ex] \max\limits_j\left(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^2}\right)<\gamma<\min\limits_j\left(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^2}\right)\end{cases}$$

证明：由引理4知AOR迭代矩阵$L_{r,\omega}$的特征值λ和Jacobi迭代矩阵的特征值

μ 有以下关系：

$$(\lambda-1+\omega)^2=\omega\mu^2[\omega+(\lambda-1)\gamma] \tag{3}$$

（3）式可变形为：$\lambda^2+[2(\omega-1)-\gamma\omega\mu^2]\lambda+[(\omega-1)^2-(\omega-\gamma)\omega\mu^2]=0$ （4）

由引理 5 可知：$|\lambda|<1$ 即 二次方程的系数满足：

$\begin{cases}|b|<1+c\\|c|<1\end{cases}$ 由（4）式即：

$$\begin{cases}\left|(1-\omega)^2-(\omega-\gamma)\omega\mu^2\right|<1\\ \left|2(\omega-1)-\gamma\omega\mu^2\right|<1+[(\omega-1)^2-(\omega-\gamma)\omega\mu^2]\end{cases} \tag{5}$$

解之得：$\begin{cases}\omega\gamma\mu^2<\omega(2-\omega)+\omega^2\mu^2\\ \omega\gamma\mu^2>\omega^2\mu^2-(\omega-1)^2-1\\ \omega\gamma\mu^2>\dfrac{\omega^2\mu^2}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2}\\ \mu^2<1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\omega\gamma\mu^2<\omega(2-\omega)+\omega^2\mu^2\\ \omega\gamma\mu^2>\omega^2\mu^2-(\omega-1)^2-1\\ \dfrac{\omega^2\mu^2}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2}<\omega^2\mu^2+\omega(2-\omega)\\ \mu^2<1\end{cases}$

上式等价：
$$\begin{cases}\mu^2<1\\ \dfrac{\omega^2\mu^2}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2}<\omega\gamma\mu^2<\omega^2\mu^2+\omega(2-\omega)\\ \omega^2(1-\mu^2)<4\end{cases} \tag{6}$$

而(6)式等价于：
$$\begin{cases}0<\mu^2<1\\ \dfrac{-2}{\sqrt{1-\mu^2}}<\omega<0\\ \omega+\dfrac{2-\omega}{\mu^2}<\gamma<\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu^2}\end{cases} \tag{7.1}$$

或者 $\begin{cases}0<\mu^2<1\\ 0<\omega<2\\ \dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu^2}<\gamma<\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu^2}\end{cases}$ (7.2)或者 $\begin{cases}0<\mu^2<1\\ 2\le\omega<\dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}}\\ \dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu^2}<\gamma<\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu^2}\end{cases}$ (7.3)

计算可知道（7.1）等价于：
$$\begin{cases}0<\mu^2<1\\ \max\limits_j \dfrac{-2}{\sqrt{1-\mu_j^{\ 2}}}<\omega<0\\ \max\limits_j(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^{\ 2}})<\gamma<\min\limits_j(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^{\ 2}})\end{cases} \tag{8.1}$$

（7.2）等价于：
$$\begin{cases}0<\mu^2<1\\ 0<\omega<2\\ \max\limits_j(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^{\ 2}})<\gamma<\min\limits_j(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^{\ 2}})\end{cases} \tag{8.2}$$

（7.3）等价于：
$$\begin{cases}0<\mu^2<1\\ 2\le\omega<\min\limits_j \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu_j^{\ 2}}}\\ \max\limits_j(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^{\ 2}})<\gamma<\min\limits_j(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^{\ 2}})\end{cases} \tag{8.3}$$

综合（8.1），（8.2），（8.3）即得定理的结果。

推论：在定理 2 的条件下，如果存在$i_0\in N$，使得 $\mu_{i_0}=0$，则A的AOR迭代法收敛的充分必要条件是：$0<\mu_j^{\ 2}<1$，且ω和γ满足的条件（其中$j=1,2\cdots n$）

$$\begin{cases}0<\omega<2\\ \max\limits_j(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^{\ 2}})<\gamma<\min\limits_j(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^{\ 2}})\end{cases}$$

3、讨论 Jacobi 迭代矩阵的特征值全为纯虚数的收敛条件

定理 **3**[18] 设A为对角元非零的（1，1）相容次序矩阵，若其 Jacobi 迭代矩阵的特征值μ_j为纯虚数（$\mu_j^2=-\alpha_j^2$，$\alpha\in R$），且不含零特征值，则A的AOR迭代法收敛的充分必要条件是ω和γ满足下面二者之一：（其中$j=1,2\cdots n$）

(i) $\begin{cases} \max\limits_j \dfrac{-2}{\sqrt{1+\alpha_j^{\ 2}}} < \omega < 0 \\ \max\limits_j \{\dfrac{(\omega-2)^2+\omega^2\alpha_j^{\ 2}}{2\omega\alpha_j^{\ 2}}\} < \gamma < \min\limits_j \{\dfrac{\omega^2\alpha_j^{\ 2}+\omega(\omega-2)}{\omega\alpha_j^{\ 2}}\} \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 0 < \omega < \min\limits_j \dfrac{2}{\sqrt{1+\alpha_j^{\ 2}}} \\ \max\limits_j \{\dfrac{\omega^2\alpha_j^{\ 2}+\omega(\omega-2)}{\omega\alpha_j^{\ 2}}\} < \gamma < \min\limits_j \{\dfrac{(\omega-2)^2+\omega^2\alpha_j^{\ 2}}{2\omega\alpha_j^{\ 2}}\} \end{cases}$

证明：由题目所给的条件，Jacobi 迭代矩阵的特征值μ_j为纯虚数，则可以设$\mu_j^2=-\alpha_j^2$，$\alpha \in R$，且不含零特征值，则将其代入（1）式，可以得到 Jacobi 迭代矩阵的特征值μ关系式可以变形为：

$$\lambda^2+[2(\omega-1)+\gamma\omega\alpha^2]\lambda+[(\omega-1)^2+(\omega-\gamma)\omega\alpha^2]=0 \tag{9}$$

则由引理 5 可知A的AOR迭代法收敛等价于：

$$\begin{cases} \left|(1-\omega)^2+(\omega-\gamma)\omega\alpha^2\right|<1 \\ \left|2(\omega-1)+\gamma\omega\alpha^2\right|<1+[(\omega-1)^2+(\omega-\gamma)\omega\alpha^2] \end{cases} \tag{10}$$

（10）式等价于：

$$\begin{cases} \omega(2-\omega)+\omega^2\alpha^2<\omega\gamma\alpha^2<\dfrac{\omega^2\alpha^2}{2}+\dfrac{(\omega-2)^2}{2} \\ \omega^2\alpha^2+\omega(2-\omega)<\dfrac{\omega^2\alpha^2}{2}+\dfrac{(\omega-2)^2}{2} \end{cases} \tag{11}$$

解（11）式则可等价于：

$$\begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{1+\alpha^2}}<\omega<0 \\ \dfrac{(\omega-2)^2+\omega^2\alpha^2}{2\omega\alpha^2}<\gamma<\dfrac{\omega^2\alpha^2+\omega(\omega-2)}{\omega\alpha^2} \end{cases} \tag{12}$$

$$\text{或者}\begin{cases}0<\omega<\dfrac{-2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\\ \dfrac{\omega^2\alpha^2+\omega(\omega-2)}{\omega\alpha^2}<\gamma<\dfrac{(\omega-2)^2+\omega^2\alpha^2}{2\omega\alpha^2}\end{cases}\tag{13}$$

$$\text{即：}\begin{cases}\max\limits_j\dfrac{-2}{\sqrt{1+\alpha_j^2}}<\omega<0\\ \max\limits_j\{\dfrac{(\omega-2)^2+\omega^2\alpha_j^2}{2\omega\alpha_j^2}\}<\gamma<\min\limits_j\{\dfrac{\omega^2\alpha_j^2+\omega(\omega-2)}{\omega\alpha_j^2}\}\end{cases}\quad j=1,2\cdots n\tag{14}$$

$$\begin{cases}0<\omega<\min\limits_j\dfrac{2}{\sqrt{1+\alpha_j^2}}\\ \max\limits_j\{\dfrac{\omega^2\alpha_j^2+\omega(\omega-2)}{\omega\alpha_j^2}\}<\gamma<\min\limits_j\{\dfrac{(\omega-2)^2+\omega^2\alpha_j^2}{2\omega\alpha_j^2}\}\end{cases}\quad j=1,2\cdots n\tag{15}$$

这即为即定理 3 的结果。

推论：在定理 3 的条件下，如果存在$i_0\in N$，使得 $\mu_{i_0}=0$，则A的AOR迭代法收敛的充分必要条件是：且ω和γ满足的条件（其中$j=1,2\cdots n$）

$$\begin{cases}0<\omega<\min\limits_j\dfrac{2}{\sqrt{1+\alpha_j^2}}\\ \max\limits_j(\omega-\dfrac{2-\omega}{\alpha_j^2})<\gamma<\min\limits_j\{\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\alpha_j^2}\}\end{cases}$$

4、讨论 Jacobi 迭代矩阵的特征值为实数和纯虚数的收敛条件

定理 4 设A为对角元非零的（1，1）相容次序矩阵，若其 Jacobi 迭代矩阵的特征值μ_j只有实数和纯虚数，且不含零特征值，则A的AOR迭代法收敛的充分必要条件是ω和γ满足下面的条件：

$$\begin{cases}0<\mu_j^2<1\quad j\in N_1\\ 0<\omega<\min\limits_{j\in N_2}\{\dfrac{2}{\sqrt{1+\alpha_j^2}}\}\\ \max\limits_j\{\max\limits_{j\in N_1}(\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^2}),\max\limits_{j\in N_2}(\omega-\dfrac{2-\omega}{\alpha_j^2})\}<\gamma<\min\limits_j\{\min\limits_{j\in N_1}(\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu_j^2}),\min\limits_{j\in N_2}(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\alpha_j^2})\}\end{cases}\tag{16}$$

其中

$j \in N_1$时, $\mu_j \in R$, $j \in N_2$时, $\mu_j \in C$, 且 $\mathrm{Re}\,\mu_j = 0$, $N_1 \cup N_2 = N, N_1 \cap N_2 = \phi$

证明：由定理的条件可以假设：若 $\mu_j \in R$ ，则 $j \in N_1$，

若 $\mu_j \in C$, 且 $\mathrm{Re}\,\mu_j = 0$, 则 $j \in N_2$，且 $N_1 \cup N_2 = N, N_1 \cap N_2 = \phi$，

由前面定理 2 的讨论知道，当 $\mu_j \in R$ 时，对于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_j$，（ $j \in N_1$），要使得

$|\lambda_j| < 1$ 则有 $0 < \mu_j^2 < 1$，且 ω 和 γ 满足下面两个条件之一：

$$\text{(i)} \begin{cases} \max\limits_j\left(\dfrac{-2}{\sqrt{1-\mu_j^2}}\right) < \omega < 0 \\ \max\limits_j\left(\omega + \dfrac{2-\omega}{\mu_j^2}\right) < \gamma < \min\limits_j\left(\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^2}\right) \end{cases} \quad j \in N_1 \qquad (17)$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} 0 < \omega < \min\limits_j\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-\mu_j^2}}\right) \\ \max\limits_j\left(\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j^2}\right) < \gamma < \min\limits_j\left(\omega + \dfrac{2-\omega}{\mu_j^2}\right) \end{cases} \quad j \in N_1 \qquad (18)$$

而当 $j \in N_2$ 时，要使得 $|\lambda_j| < 1$，由定理 3 的讨论有：

$$\text{(i)} \begin{cases} \max\limits_j \dfrac{-2}{\sqrt{1+\alpha_j^{\,2}}} < \omega < 0 \\ \max\limits_j\left\{\dfrac{(\omega-2)^2 + \omega^2\alpha_j^{\,2}}{2\omega\alpha_j^{\,2}}\right\} < \gamma < \min\limits_j\left\{\dfrac{\omega^2\alpha_j^{\,2} + \omega(\omega-2)}{\omega\alpha_j^{\,2}}\right\} \end{cases} \quad j \in N_2 \qquad (19)$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} 0 < \omega < \min\limits_j \dfrac{2}{\sqrt{1+\alpha_j^{\,2}}} \\ \max\limits_j\left\{\dfrac{\omega^2\alpha_j^{\,2} + \omega(\omega-2)}{\omega\alpha_j^{\,2}}\right\} < \gamma < \min\limits_j\left\{\dfrac{(\omega-2)^2 + \omega^2\alpha_j^{\,2}}{2\omega\alpha_j^{\,2}}\right\} \end{cases} \quad j \in N_2 \qquad (20)$$

故当 $j \in N_1 \cup N_2$ 时，AOR 迭代法收敛的充分必要条件是 ω 和 γ 满足下面的条

件：

$$\begin{cases} 0<\mu_j^2<1 \qquad j\in N_1 \\ \max\limits_j\{\max\limits_{j\in N_1}(\frac{-2}{\sqrt{1-\mu_j^2}}),\max\limits_{j\in N_2}(\frac{-2}{\sqrt{1+\alpha_j^2}})\}<\omega<0 \\ \max\limits_j\{\max\limits_{j\in N_1}(\omega+\frac{2-\omega}{\mu_j{}^2}),\max\limits_{j\in N_2}(\frac{\omega}{2}+\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\alpha_j{}^2})\}<\gamma<\min\limits_j\{\min\limits_{j\in N_1}(\frac{\omega}{2}-\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j{}^2}),\min\limits_{j\in N_2}(\omega-\frac{2-\omega}{\alpha_j{}^2})\} \end{cases} \tag{21}$$

或者

$$\begin{cases} 0<\mu_j^2<1 \qquad j\in N_1 \\ 0<\omega<\min\limits_{j\in N_2}\{\frac{2}{\sqrt{1+\alpha_j{}^2}},2\} \\ \max\limits_j\{\max\limits_{j\in N_1}(\frac{\omega}{2}-\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j{}^2}),\max\limits_{j\in N_2}(\omega-\frac{2-\omega}{\alpha_j{}^2})\}<\gamma<\min\limits_j\{\min\limits_{j\in N_1}(\omega+\frac{2-\omega}{\mu_j{}^2}),\min\limits_{j\in N_2}(\frac{\omega}{2}+\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\alpha_j{}^2})\} \end{cases} \tag{22}$$

解（21）：$\frac{\omega}{2}+\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\alpha_j{}^2}<\omega-\frac{2-\omega}{\alpha_j{}^2}$ ：即 $\frac{\omega^2(1+\alpha_j^2)}{\omega}>0$，而 $\omega<0$ 这明显是矛盾的。

即在定理 4 的条件下 A 的 AOR 迭代法收敛的充分必要条件是 ω 和 γ 满足下面的条件：

$$\begin{cases} 0<\mu_j^2<1 \qquad j\in N_1 \\ 0<\omega<\min\limits_{j\in N_2}\{\frac{2}{\sqrt{1+\alpha_j{}^2}}\} \\ \max\limits_j\{\max\limits_{j\in N_1}(\frac{\omega}{2}-\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\mu_j{}^2}),\max\limits_{j\in N_2}(\omega-\frac{2-\omega}{\alpha_j{}^2})\}<\gamma<\min\limits_j\{\min\limits_{j\in N_1}(\omega+\frac{2-\omega}{\mu_j{}^2}),\min\limits_{j\in N_2}(\frac{\omega}{2}+\frac{(2-\omega)^2}{2\omega\alpha_j{}^2})\} \end{cases} \tag{23}$$

即为定理 4 的结果。

5、讨论特 Jacobi 迭代矩阵的特征值为复数时的收敛条件

（其中 J 的特征值为 μ_j （$\mu_j=\mu_{1j}+i\mu_{2j}$），且$|\mu_j|^2=\alpha$（常数），μ_{2j}不为零）

注：当$\mu_{2j}=0$时即为定理 2 的结果，$\mu_{1j}=0$时即为定理 3 的结果。

定理 5　$A\in C^{n\times n}$为(1,1)相容次序矩阵，且对角线元素均不为零，μ_j为 Jacobi 迭代矩阵 J 的复数特征值，且$|\mu_j|^2=\alpha$（常数），则 AOR 迭代矩阵$L_{r,\omega}$收敛的一个充分条件是:（ω,r为实数，）

ω满足　$0<w<\min\limits_j \dfrac{2(1-x_j)}{(1-x_j)^2+y_j{}^2}$　（$j=1,2\cdots\cdots n$，其中x_j,y_j的含义为$L_{r,1}$迭代矩阵的特征值:$\lambda_{r,1}=x_j+iy_j$　的实部与虚部）

r满足　(i) $(1-r)^2<\dfrac{1}{\alpha^2}$

(ii) $\dfrac{\alpha|r|}{[1-\alpha^2(1-r)^2]}<\min\limits_j \dfrac{1}{|1+(1-r)\bar{\mu}_j^2|}$　　　$j=1,2\cdots n$

证明：由引理 4 知AOR迭代矩阵$L_{r,\omega}$的特征值λ和 Jacobi 迭代矩阵的特征值μ有以下关系：

$$\lambda^2+[2(w-1)-rw\mu^2]\lambda+[(w-1)^2-(w-r)w\mu^2]=0 \tag{24}$$

由引理 1 知道AOR的迭代矩阵$L_{r,w}=(D-rL)^{-1}[(1-w)D+(w-r)L+wU]$等价于

$$L_{r,w}=(1-w)I+wL_{r,1} \tag{25}$$

其中$L_{r,1}=(D-rL)^{-1}[(1-r)L+U]$

由这个关系我可以通过以下两步来研究AOR迭代的收敛情况。

第一步我们首先讨论迭代矩阵$L_{r,1}$的收敛情况。

在（24）式中$w=1$的情形，此时（24）式可变为：

$$\lambda^2-r\mu^2\lambda-(1-r)\mu^2=0 \tag{26}$$

对于这个方程我们分以下三种情况来讨论：

1） 若$r=1$，则AOR方法就退化为$G-S$方法，并且（26）变为$\lambda^2-\mu^2\lambda=0$ 故此时AOR方法收敛的充要条件为 $\rho(L_{r,w})=\left|\mu^2\right|<1$ 即 Jacobi 迭代法收敛即可。

2） 若$r<1$，此时（25）式可变为：

$$(\frac{\lambda}{\sqrt{1-r}})^2-\frac{r\mu^2}{\sqrt{1-r}}\frac{\lambda}{\sqrt{1-r}}-\mu^2=0 \tag{27}$$

令 $\lambda'=\frac{\lambda}{\sqrt{1-r}}$ 则上式可变为：

$$\lambda'^2-\frac{r\mu^2}{\sqrt{1-r}}\lambda'-\mu^2=0 \tag{28}$$

考虑满足 $|\lambda'|<m$ 及（4）的条件 且取 $\frac{r}{\sqrt{1-r}}=n$ （m为正常数，n为常数）作变换

$\lambda'=mz$，则（28）式变为：$z^2-\frac{n\mu^2}{m}z-\frac{\mu^2}{m^2}=0$ （29）

将引理 5 应用到（29）式则可得到：$\left|\frac{n\mu^2}{m}+\frac{n\bar{\mu}^2\mu^2}{m^3}\right|<1-\frac{\alpha^2}{m^4}$

$$\text{即有}\ |n|<\frac{|m|^3(1-\frac{\alpha^2}{m^4})}{\alpha(|m^2+\bar{\mu}_j{}^2|)} \tag{30}$$

若记 $\min\limits_j(\frac{|m|^3(1-\frac{\alpha^2}{m^4})}{\alpha(|m^2+\bar{\mu}_j{}^2|)})=a$， $j=1,2\cdots\cdots n$ 则有 $|n|<a$

由引理 5 知道方程（26）的根λ_1,λ_2满足$\max(|\lambda_1|,|\lambda_2|)<m\left|\sqrt{1-r}\right|$ 的充要条件为：

(i) $\alpha^2<m^4$

(ii) $\max\limits_{j}\frac{-a\sqrt{a^2+4}-a^2}{2}<r<\min\limits_{j}\frac{a\sqrt{a^2+4}-a^2}{2} \quad j=1,2\cdots n$ （31）

特别如果取 $m=\left|\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right|$ 则得到$r<1$时$L_{r,1}$收敛的一个充要条件：

定理 5.1 $A\in C^{n\times n}$为（1,1）相容次序矩阵，其对角线元素均不为零，μ_j为Jacobi 迭代矩阵的复数特征值，且$\left|\mu_j\right|^2=\alpha$（常数），则当$r<1$,迭代矩阵 $L_{r,1}$收敛的充分必要条件是：

(i) $(1-r)^2<\frac{1}{\alpha^2}$

(ii) $\frac{\alpha|r|}{[1-\alpha^2(1-r)^2]}<\min\limits_{j}\frac{1}{\left|1+(1-r)\bar{\mu}_j^2\right|} \quad j=1,2\cdots n$ （32）

3） 若$r>1$，将（25）式改为$\lambda^2-r\mu^2\lambda+(r-1)\mu^2=0$ ，用相同的方法我们可以得到 $r>1$时$L_{r,1}$收敛的一个的充分必要条件：

定理 5.2 $A\in C^{n\times n}$为(1,1)相容次序矩阵,其对角线元素均不为零，μ_j为 Jacobi 迭代矩阵的复数特征值，且$\left|\mu_j\right|^2=\alpha$（常数），则当$r>1$,迭代矩阵 $L_{r,1}$收敛的充分必要条件是：

(i) $(1-r)^2<\frac{1}{\alpha^2}$

(ii) $\frac{\alpha|r|}{[1-\alpha^2(1-r)^2]}<\min\limits_{j}\frac{1}{\left|1+(1-r)\bar{\mu}_j^2\right|} \quad j=1,2\cdots n$ （33）

综合 1），2），3）的情况及引理 3，引理 4 可以得到：

定理 5.3 $A\in C^{n\times n}$为(1,1)相容次序矩阵,其对角线元素均不为零，μ_j为 Jacobi 迭代矩阵的复数特征值，且$\left|\mu_j\right|^2=\alpha$（常数），则迭代矩阵 $L_{r,1}$收敛的充分必要条件是：

(i) $(1-r)^2<\frac{1}{\alpha^2}$

(ii) $\dfrac{\alpha|r|}{[1-\alpha^2(1-r)^2]} < \min\limits_j \dfrac{1}{\left|1+(1-r)\bar{\mu}_j^2\right|} \qquad j=1,2\cdots n \qquad (34)$

到此我们已经将$L_{r,1}$的收敛情况研究清楚，即其中的参数r满足（34）式的条件

现在我们进行第二步通过（24）式讨论 AOR 迭代矩阵$L_{r,\omega}$的收敛范围。

设$L_{r,1}$迭代矩阵的特征值为

$$\lambda_{r,1} = x_j + iy_j \qquad j=1,2\cdots\cdots n, \qquad (35)$$

则对任意满足定理 5.3 条件的矩阵，及r均有$\rho(L_{r,1})<1$，此时记AOR迭代矩阵的特征值为$\lambda_{r,w}$，则由 （25）式可知$\lambda_{r,w}$与$\lambda_{r,1}$之间有如下关系：

$$\lambda_{r,w} = 1-w+w\lambda_{r,1} = (1-w)+wx_j+wiy_j \qquad j=1,2\cdots\cdots n$$

故 AOR迭代矩阵收敛只需要：

$\left|\lambda_{r,w}\right| = \left|1-w+w\lambda_{r,1}\right| = \left|(1-w)+wx_j+wiy_j\right| < 1$ 即可 (36)

由 $\left|\lambda_{r,1}\right|<1$知道 $\left|x_j\right|<1, \left|y_j\right|<1$，故 （36）式等价于：

$w^2(x_j-1)^2+2w(x_j-1)+w^2y_j^{\ 2}<0$ 解之可得：

$$0<w<\min_j \frac{2(1-x_j)}{(1-x_j)^2+y_j^{\ 2}} \qquad j=1,2\cdots\cdots n \qquad (37)$$

显然（37）式的右端是大于 1 的。即只要给定的矩阵满足定理 1 的条件，并且r的取值满足（34）式，ω的取值满足（37）式，则 AOR 迭代矩阵$L_{r,\omega}$就是收敛的，即综合第一步、第二步的结果便可得定理 5 的内容，定理证明完毕。

2、数值例子

例 1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.125 & 0.25 \\ 0.3333 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.75 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$

$$L=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0.3333 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.375 & 0 & 0\\ 0 & -0.75 & 0.25 & 0\end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix}0 & 0 & -0.125 & 0.25\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}C=\begin{pmatrix}0 & 0 & -0.125 & 0.25\\ -0.667 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0 & 0\\ 0 & -0.75 & 0.25 & 0\end{pmatrix}$$

则可以计算 Jacobi 的特征值为：

$\lambda_1=-0.5i \qquad \lambda_2=0.5i \qquad \lambda_3=-0.5 \qquad \lambda_1=0.5$

满足定理 5 的条件，由（33）可以计算出 r 的范围，并由（36）计算 ω 的范围。我们取 $r=\dfrac{1}{2}$， $w=\dfrac{1}{4}$ 则

$$L_{r,w}=\begin{pmatrix}0.75 & 0 & -0.0625 & -0.125\\ 0.0833 & 0.75 & 0.0208 & 0.0417\\ -0.0625 & 0.1875 & 0.7344 & -0.0312\\ -0.0391 & 0.1172 & -0.0410 & 0.7305\end{pmatrix}$$

由 MATLAB 计算可以知道 $L_{r,w}$ 的特征值为：

$\lambda_1=0.5488 \qquad \lambda_2=0.8193+0.0790i$

$\lambda_3=0.8193-0.0790i \qquad \lambda_4=0.7775$

显然 AOR 迭代矩阵 $|\rho(L_{r,\omega})|<1$，即 AOR 迭代矩阵是收敛的。

例 2 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -0.125 & -0.25\\ -0.6667 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.375 & 0.25 & 0\\ 0 & -0.75 & -0.5 & 1\end{pmatrix}$

$$L=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0.6667 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.375 & 0 & 0\\ 0 & 0.75 & 0.5 & 0\end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.125 & 0.25\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.125 & 0.25\\ 1.3333 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.75 & 0.25 & 0\end{pmatrix}$$

则可以计算 Jacobi 的特征值为：

$\lambda_1=0.5-0.5i \qquad \lambda_2=0.5+0.5i$

$\lambda_3=-0.5-0.5i \qquad \lambda_1=-0.5+0.5i$

满足定理 5 的条件，由（33）可以计算出r的范围，并由（36）计算ω的范围。我们仍取$r=\frac{1}{2}$，　$w=\frac{1}{4}$则

$$L_{r,w}=\begin{pmatrix}0.75 & 0 & 0.0625 & 0.125\\ -0.1667 & 0.75 & 0.0417 & 0.0833\\ 0.125 & 0.1875 & 0.7187 & -0.0625\\ -0.0313 & -0.0469 & -0.0547 & 0.7656\end{pmatrix}$$

由 MATLAB 计算可以知道$L_{r,w}$的特征值为：

$\lambda_1=0.5585 \qquad \lambda_2=0.7931+0.1112i$

$\lambda_3=0.7931-0.1112i \qquad \lambda_4=0.8396$

显然 AOR 迭代矩阵$\left|\rho(L_{r,\omega})\right|<1$，即 AOR 迭代矩阵是收敛的。

总 结

本文的内容主要包括H矩阵的判定方法、矩阵范数的估计、一类特殊矩阵的AOR迭代收敛条件等三个部分。文章主要包括以下几个方面：

（1）在第一章的引言部分，主要介绍了与H矩阵的判定和矩阵范数估计及AOR迭代收敛相关的情况，并提出了本文的主要内容。

（2）第二章是正文的重点，在研究已有的H矩阵的判定基础上给出了新的H矩阵的判定方法：第二章定理1，这个方法只与所给矩阵的本身元素有关，而且可以程序化处理，简单且容易操作。再以这个新的判定方法为基础给出了不可约矩阵、含有非零元素链的矩阵为H矩阵的判定方法，分别见第二章定理2、定理3，通过数值例子可以看出来这种判定方法是十分方便和有效的。

（3）第三章是H矩阵判定方法的一个应用。利用第二章的结论，给出了一个新的$\|A^{-1}\|_\infty$、$\|M^{-1}N\|_\infty$的估计式（其中M不要求是严格对角占优）见第三章定理4、6、7，通过数值例子比较可以看出来，这个估计不但比已有的估计精确而且适用范围要广的多。

（4）第四章总结了在Jacobi迭代矩阵的特征值全为零、全为实数、全为纯虚数和为实数及纯虚数时收敛的充要条件(第四章定理1、2、3、4)，然后重点讨论了Jacobi迭代矩阵的特征值为特殊复数的情况下AOR迭代法的收敛范围，并给出了一个充分条件（第四章定理5），通过具体的数值例子可以看出来这个收敛条件是有效的。

参考文献

[1] 胡家赣，线性方程组迭代解法[M]，北京：科学出版社，1991.

[2] 黄廷祝，Ostrowski 定理的推广与非奇异 H 矩阵的条件[J]，计算数学，1994（16）1：19-24.

[3] 李继成，张文修，H 矩阵的判定[J]，高等学校计算数学学报，1999，3：264-268.

[4] 高中喜，黄廷祝，王广彬，非奇异 H-矩阵的充分条件[J]，数学物理学报，2005，3：409-413.

[5] 黄廷祝，非奇异 H 矩阵的简捷判据[J]，计算数学，1993，3：318-328.

[6] 干泰彬，非奇异 H 矩阵的实用充分条件[J]，计算数学，2004，1：109-116.

[7] Plemmons R J, Berman A, Nonnegative matrices in the mathematical sciences [M], SIAM Press: Philalehophia, 1994.

[8] 孙玉祥，广义对角占优矩阵的充分条件[J]，高等学校计算数学学报，1997，193：216-223.

[9] 逄明贤，广义对角占优的判定及应用[J]，数学年刊，1985（6A），3：323-330.

[10]孙丽英，许兴业，H-矩阵的刻划及一类实矩阵逆的上下界的估计[J]，云南大学学报，2005，4：285-288.

[11]张家驹，某些矩阵的行列式与特征值的界[J]，数学的实践与认识，1981，3：19-25.

[12]丁双双，关于某些迭代矩阵谱半径的上界[J]，曲阜师范大学学报，Vol.25，No.2，1999.

[13]胡家赣，尺度变换和矩阵分解的收敛性[J]，计算数学，1983，1：72-78.

[14]胡家赣，$\|B^{-1}A\|_\infty$ 的估计及应用[J]，计算数学，1982（4），3：272-282.

[15]胡家赣，$M^{-1}N$ 特征值模的上、下界估计[J]，计算数学，1986（7），2：41-46.

[16]黄廷祝，游兆泳，$\|B^{-1}A\|_\infty$ 的估计和 H 矩阵的充分条件[J]，应用数学，1996，3：108-109.

[17]R. S Varga on reurring thorems on diagonal dominance [J], lin Alg Appl., 1976, 13：1-9

[18]沈光星，特殊形状的 SOR、AOR 迭代[J]，杭州师范学院学报，第六期，2000，4-10.

[19]李春光，刘人丽，确定分块 SOR 迭代法收敛域的一般方法[J]，四川师范大学学报，Vol.20，No.2，1977，44-53.

[20]A Hadjidimos, Accelerated Overrelaxation Method [J] ,math, comp., Vol .32 ,No,141,1978.

[21]胡家赣，线性方程组迭代解法[M]，北京：科学出版社，1999,164-172.

[22]张玉海，朱本仁，两步定长线性迭代法的收敛区域及最优参数的选取[J]，计算数学，. Vol .23，,No,2，2001，239-245.

[23]W. Li, On Nekrasov matrices[J], Lin Alg Appl， 1998, 281：87-96.

[24]冉瑞生，杨鹏，黄廷祝，非奇异 H 矩阵判别条件的推广[J]，电子科技大学学报，1（2004），102-104.

[25]徐成贤，徐宗本，矩阵分析[M]，西安：西北工业大学出版社，1991.

[26]王川龙，王华，H 矩阵的充分条件[J]，工程数学学报，2000，1：121-124.

[27]游兆泳，非奇 M 矩阵[M]，华中理工学院，1981.

[28]沈光星，连对角占优矩阵的一些性质[J]，计算数学，V90，12：132-135.

[29] MEUMAIER A ， on the comparison of H-matrices[J],Linear Algebra Appl, 1986,83：135-141.

[30]李庆春，广义严格对角占优矩阵的判定[J]，高等学校计算数学学报，1999，1：87-92.

[31]高益明，广义对角占优矩阵与 M 矩阵的判定[J]，高等学校计算数学学报，1992，14：233-239.

[32]高益明，矩阵广义对角占优和非奇的判定[J]，东北师大学报，1982，3：23-28.

[33]T .A. mantenffel ,Optimal D arameters for Linear Second-degree seationary Iterative Methods[J], SIAM J,Nnmer.Anal., 1982, 19：833-839.

[34]A Hadjidimos and A.K.Yeyios, Sorre Recent Results On the Modified SOR theory [J], LAA, 1991, 154：5-21.

[35]陈培贤，AOR 方法的收敛性[J]，计算数学，1983，1：66-71.

[36]李宝家，宫义山，AOR 与 Jacobi 迭代矩阵关系的研究，沈阳工业大学学报，Vol.20，No.6,(1998),65-67.

[37] D.M.Yong, Iterative Solution of Large Linear Systems Academic [J] Press, New, York and London, 1971.

[38]黄廷祝，王广彬，AOR 方法的收敛性定理[J]，应用数学和力学，Vol .23，11（2002）

[39]胡家赣，AOR 收敛的一个充分必要条件[J]，数值计算与计算机应用，1992，4：273-280.

[40]沈光星，AOR 迭代的收敛域[J]，杭州师范学院学报，1995，3：8-13.

[41]胡家赣，推广的迭代矩阵的收敛性[J]，计算数学，1984，2：174-181.

[42]曹志浩等，矩阵计算和方程求根[M]，北京：高等教育出版社，1984.

[43]A.Hadjidimos, A.Yeyios, The Principal of extrapolation in connection with the accelerated over relaxation method [J], Lin.Alg.Appl,3(1980).

[44]蔡大用，数值代数[M]，北京：清华大学出版社，1987.

[45]程云鹏，矩阵论[M]，西北工业大学出版社，2004.

攻读学位期间的研究成果

[1] 杨亚强，畅大为，李爱娟，一个非奇异H矩阵实用充分条件的改进，2005，25（3），宝鸡文理学院学报.

[2] 杨亚强，于建伟，一类特殊矩阵的AOR迭代收敛条件，2005，34（2），内蒙古师范大学学报.