

合肥工业大学

---

硕士学位论文

---

形位误差测量的不确定度评定

---

姓名：连慧芳

---

申请学位级别：硕士

---

专业：测试计量技术及仪器

---

指导教师：陈晓怀

---

20100401

# 形位误差测量的不确定度评定

## 摘 要

形位误差是评定机械零件的重要指标，它对产品的使用性能和装配质量有着很大的影响，在生产中要加以测量和控制。一个科学的测量结果需要包括其测量不确定度，但是目前对于形位误差测量结果的不确定度评定并没有系统深入的研究。因此，系统地研究形位误差的测量不确定度评定具有重要意义。

本文较为系统地对形位误差的测量不确定度评定进行了研究。对形位误差测量不确定度的国内外研究现状进行分析，并对各形位误差的测量方法、评定方法进行了系统的学习。以坐标测量法进行测量，并基于最小二乘原理进行形位误差的数学建模。结合上述方法，对形位误差的测量不确定度进行评定。

主要工作内容和研究成果如下：

(1) 对形位误差的测量方法进行总结和分类，并对测量过程中的不确定度来源进行分析。

(2) 依据最小二乘原理，在直角坐标系下建立各形位误差的数学模型，对于回转类的形位误差，如圆度误差和圆柱度误差，还建立了其在极坐标系下的最小二乘数学模型。

(3) 根据不确定度评定表示指南（GUM）进行不确定度评定。计算了形位误差中各参数的单点不确定度、传递系数和参数间的相关性，最后利用不确定度合成公式求出形位误差的标准不确定度。

(4) 根据蒙特卡罗方法的原理，产生随机数来构成一个概率分布来仿真测量值，然后进行不确定度的评定。

(5) 实验验证所得到的理论结果。使用三坐标测量机和圆度仪等测量设备，对各形位误差进行测量，然后利用MATLAB编程对测量结果进行处理，得到不同方法下的测量不确定度，并比较不同方法的优缺点。

以上研究成果对计量学和测量误差理论的深入，具有重要的科学意义，在机械制造中的行为误差测量与控制领域，具有重要的实用价值。

关键词：形位误差；最小二乘法；测量不确定度；蒙特卡罗

# **Evaluation of Measurement Uncertainty in Result of Form and Position Errors**

## **ABSTRACT**

The errors of form and position are parameters for the evaluation of mechanical components. It has great influence on the performance of products and the quality of assembly, which should be measurement and controlled. Measurement uncertainty should be contained in a scientific measurement result. However, today's uncertainty evaluation methods to the results of position and form errors have not been deeply and systematically studied. Thus, a systematic research on that topic is of great significance.

More systematic research of the evaluation of measurement uncertainty in form and position errors was proposed in this paper. The research status of home and abroad on this subject were surveyed and analyzed. And the measurement methods and the evaluation methods of form and position errors were systematically studied. In this paper, based on least square principle a mathematic model was established from measurement results of coordinate measuring method. According to the mentioned results, the uncertainties of form and position errors were assessed.

The main results of work and achievement are as follows:

(1) The measurement methods of form error were summarized and classified. And the sources of measurement uncertainty were analysed.

(2) Based on the least-squares principle, the mathematical models of form and position errors were established in the Cartesian coordinate. To the form and position errors for the rotational, such as roundness error and cylindrical error, the mathematical models of form and position errors were also established in the polar coordinates.

(3) The uncertainty evaluation was based on Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM). The uncertainty of the parameters of form and position errors, transmission coefficients and parameters of the correlation were Calculated. Then the standard uncertainty of form and position errors was evaluated based on GUM.

(4) A probability distribution was established from the random numbers generated based on the principle of Monte Carlo Method in order to simulate the measured values and the uncertainties were evaluated later.

(5) The theoretical results were verified by Experiments. Measuring the form and position errors and then using MATLAB programming to process the measurement results by different methods of measurement uncertainty. And the performance of different methods was compared

The results and achievements in this paper have important scientific significance for the metrology and measuring error theory, and would have practical worth for the measurement and control to the form and position error of machinery manufacturing.

**Keywords:** Form and position error; Uncertainty; Least squares; Monte Carlo

## 插图清单

图 2-1 平面内直线度最小二乘模型.....	7
图 2-2 空间直线度的最小二乘模型.....	8
图 2-3 平面度的最小二乘模型.....	10
图 2-4 直角坐标系下圆度的最小二乘模型.....	11
图 2-5 极坐标系下圆度的最小二乘模型.....	12
图 2-6 圆柱度的最小二乘模型.....	14
图 2-7 平面度误差示意图.....	15
图 3-1 形位误差测量中测量不确定度的影响因素.....	19
图 4-1 蒙特卡罗方法评定形位误差图示.....	37
图 5-1 测量点到最小二乘中线距离示意图.....	41
图 5-2 直线度误差的概率分布.....	43
图 5-3 测量点和最小二乘圆的示意图.....	46
图 5-4 圆度误差的概率分布.....	47

## 表格清单

表 1-1 形位公差项目及符号.....	1
表 5-1 直线度误差测量结果.....	39
表 5-2 各点到最小二乘直线的距离.....	40
表 5-3 两种不确定度评定方法的比较.....	43
表 5-4 圆度误差测量结果.....	44
表 5-5 两种不确定度评定方法的比较.....	47

# 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标志和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得合肥工业大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签字：连慧芳

签字日期：2010年4月30日

# 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解合肥工业大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅或借阅。本人授权合肥工业大学可以将学位论文的全部或部分论文内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：连慧芳

导师签名：彭显松

签字日期：2010年4月30日

签字日期：2010年4月30日

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：

电话：

通讯地址：

邮编：

## 致 谢

本论文的撰写是在我的导师陈晓怀教授的悉心指导和关心下完成的，从课题的选择、方案制定、工作实施到论文的撰写修改无不渗透着陈老师的心血。导师渊博的专业知识，严谨的治学态度，精益求精的工作作风，诲人不倦的高尚师德，严以律己、宽以待人的崇高风范，朴实无华、平易近人的人格魅力对我影响深远。不仅使我树立了远大的学术目标、掌握了基本的研究方法，还使我明白了许多待人接物与为人处事的道理。本论文从选题到完成，每一步都是在导师的指导下完成的，倾注了导师大量的心血。在此，谨向导师表示崇高的敬意和衷心的感谢！

此外，论文工作还得到了同学及好友在学习上和生活中的帮助，在此也向他们表示感谢。

在硕士论文即将完成的时候，我要深切感谢我的父母，正是他们的理解、支持和无私的奉献，使我能够把全部的精力投入到课题的研究和论文的撰写中，在此向他们致以深深的谢意！再一次感谢所有关心、帮助和支持过我的家人和朋友！

作者：连慧芳

2010年3月30日



# 第一章 绪论

## 1.1 评定形位误差测量不确定度的意义

### 1.1.1 形位误差简介

形位误差包括形状和位置误差，它是指实际被测要素对其理想要素的变动量<sup>[1]</sup>。










形状误差是指实际形状对理想形状的变动量。这个变动量就是实际得到的误差值。它是用来表示零件表面的一条线，或一个面，加工后本身所产生的误差，是实际测得值。测量时理想形状相对于实际形状的位置，应按最小条件来确定。

位置误差是实际位置与理想位置之间的距离，它用来表示零件上的两个或两个以上的线面加工完成后其自身所产生的误差，是实际测量值。测量时，理想位置是由相对于基准的理想形状位置面确定的，基准的理想位置应符合最小条件。

图纸上所给出的几何形状叫理想形状，它是根据机器的结构和性能要求确定的。零件加工后，实际所具有的形状叫做实际形状。而图纸上所给出零件的两个或两个以上点线面之间相对几何位置叫理想位置。它是相对于基准而确定的，它是根据机器性能要求确定，零件加工后，零件上各点线面实际所处位置叫做实际位置。由于加工过程中各种因素的影响，零件的实际形状不可能得到理想形状，零件的实际位置不可能达到理想位置，而产生误差，只要这个误差在给定的公差范围内，零件就为合格品。

形位误差是形位公差的控制对象。因此，与形位公差项目相对应，国家标准GB1958-80《形状和位置公差 检测规定》中规定的形位误差共包含14个项目，其中形状误差6项，位置误差8项。形状误差分为直线度，圆度，平面度，线轮廓度，圆柱度，面轮廓度。位置误差分为定向误差、定位误差和跳动。具体为平行度，垂直度，倾斜度，同轴度，对称度，位置度，圆跳动，全跳动。以下是形位公差项目及符号：

表 1-1 形位公差项目及符号

	公差项目	符号	公差项目	符号	公差项目	符号
形状公差	直线度	—	圆度	○	线轮廓度	
	平面度		圆柱度		面轮廓度	
位置公差	平行度	//	同轴度		圆跳动	
	垂直度	⊥	对称度		全跳动	
	倾斜度	∠	位置度			

### 1.1.2 测量不确定度与其评定方法的介绍

国家计量技术规范JJF 1001-1998《通用计量术语及定义》中给出测量结果的不确定度定义为：表征合理赋予的被测量之值的分散性，与测量结果相关联的参数。被测量之值的分散性，也就是说它表示被测量之值的可能分布的范围或区间，是对测量结果可能误差的度量，也是定量说明测量结果质量好坏的一个参数，因此它是一个与测量结果相关联的参数。一个完整的测量结果，除了应给出被测量的最佳估计值外，还应同时给出测量结果的不确定度。测量不确定度用标准偏差（或其倍数）表示，或用置信区间的半宽度表示。不确定度越小，测量结果与真值越靠近，其质量越高，使用价值也就越高。反之，不确定度越大，测量结果与真值越远离，质量越低，使用价值也就越低。在科学实验中进行着大量的测量工作，测量结果的质量如何，要用不确定度来说明。不确定度必须正确评价，评价过大，会为了提高测量精度再进行投资，产生不必要的浪费。评价得过小，会把不合格的认定为合格的，危害产品质量。国家计量技术规范JJF1059-1999《测量不确定度评定与表示》（简称GUM）规定了测量不确定度的评定与表示的通用规则，它对科学研究、工程技术、以及商贸中大量存在的测量结果的处理和表示，均具有适用性。所以说，不确定度如何评定与表示，是个极其重要的问题<sup>[2]</sup>。

自20世纪80年代以来，国际计量委员会建议的不确定表示方法已经在世界各国许多实验室和计量机构使用。国际计量委员会建议的不确定度评定方法通过《测量不确定度评定表示指南》（简称GUM）的发行而被广泛应用。GUM方法是在七个国际组织的支持下起草完成的。这七个国际组织分别是国际计量局、国际电工委员会、国际临床化学联合会、国际标准化组织、国际理论化学与应用化学联合会、国际理论物理与应用物理联合会、国际法制计量组织。1993年，ISO正式出版发行《测量不确定度表示指南》。1995年进行了修改，并重新印刷。而且，测量不确定度不仅可以在计量部门中使用，也可以应用于一切使用测量结果的领域。形位误差的不确定度GUM评定方法是指GUM中所规定的评定方法进行评定。第三章将以GUM为依据建立各形位误差的测量不确定度的数学模型。

根据测量不确定度的定义，在测量实践中如何对测量不确定度进行合理的评定只是必须解决的基本问题。对于一个实际测量过程，影响测量结果的精度有多方面因素，因此测量不确定度一般由多个分量组成，其中一些分量可以由一系列实验数据的统计分布评定，以实验标准偏差表征；另一些分量是基于经验或其他信息假定的概率分布评定，也可用标准偏差表示。为了表达方便，把用统计方法评定的分量称为A类评定，所评定的不确定度称为A类不确定度；用其他方法（非统计方法）评定称为B类评定，所评定的不确定度分量称为B类不确定度。测量结果不确定度的评定和表示方法，经过20多年的争论、研究和发

展，业已趋于成熟，许多发达国家和发展中国家已经普遍采用，国际间的量值比对和试验数据的比较，更是要求提供包含因子或置信水准约定的测量结果的不确定度。所以说不确定度的研究具有深远意义<sup>[3][4]</sup>。

### 1.1.3 形位误差的测量不确定度的研究意义

零件的形状和位置误差，对仪器、机器、工具和量具等，各种产品的连接强度，工作精度，密封性，运动平稳性，耐磨性以及寿命，噪音等都产生很大影响。特别对于高速高温高压重载荷条件下工作的精密机器和仪器更为重要。因此，形状误差是保证零件实现互换，满足使用性能所提出的一项重要技术要求，是评定产品质量的一项重要指标。

形位误差是指被测提取要素对其拟合要素的变动量。对于任何一个加工后的零件，它的形位误差符合设计要求与否，要通过准确地测量和利用测量数据进行误差评定后才能知道。因而，准确地测量和评定零件的形位误差，不但可作为零件验收合格的依据，还可以用来分析形位误差产生的原因，为提高零件加工精度和装配精度提供可靠的数据。尤其在机械工业产品制造业，形位误差的测量不确定度评定更为重要。不能正确评定形位误差的测量不确定度，会为生产带来重大影响，如果测量不确定度评价过高，会为了提高产品精度再进行投资，产生不必要的浪费。评价得过小，会把不合格的产品认定为合格的，危害产品质量。与长度误差、角度误差的测量与评定相比，形位误差的测量与评定难度较大。而在我国着手研究的时间较短，只是从70年代末至80年代初才开始。但它已经对我国的工业现代化生产和科学技术发展起到了很大的促进作用。因此，对于形位误差测量结果的不确定度的研究有待深入，建立一套成熟的形位误差测量不确定度评定系统，不仅为计量学的发展有帮助，更有利于在生产中保证产品质量，具有重大的现实意义。

## 1.2 国内外研究现状

目前，国内并未对形位误差测量结果的不确定度展开系统研究，只有零星的理论成果，而且这些成果也主要是在针对某种特定的测量环境、测量方法和评定方法下进行的。并未建立一个形位误差测量不确定度研究系统。其结论也具有局限性。例如：王金星在《空间直线度坐标测量的不确定度计算》中、倪骁骅在《空间直线度最小二乘评定结果的不确定度估计》中对于直线度的坐标测量时测量不确定度评定提出了见解；方福来在《测量平面度误差时不确定度的相关计算方法》中给出了当采用节距法进行平面度误差测量时，测量不确定度的计算方法，王金星在《平面度坐标测量的不确定度计算》中给出了采用坐标测量法时如何计算测量不确定度；张德芬在《圆参数坐标测量法的优化方法及误差传递关系》中对于采用坐标测量法和最小二乘评定法时，测量不确定度

如何计算。所有这些都是针对特定测量环境下，采用特定评定方法时，测量不确定度如何计算，并不具备一般情况的代表性。因此，需要进一步对形位误差的测量不确定度展开系统的研究，建立起一套适用于各种情况的测量不确定度评定系统<sup>[5]</sup>。

形位误差的测量不确定度的研究，国外学者对此要比国内进行的早，但研究成果基本上是某一项形位误差的某种测量方法和测量环境下，对测量不确定度评定进行研究，并没有系统对的形位误差的测量不确定度进行评定，归纳总结。因此说，国外的研究现状虽然领先于国内现状，但是也并没有对形位误差测量不确定度评定进行系统研究，没有建立一套理论系统，适用于所有形位误差的测量不确定度评定，为任何形位误差的不同测量方法下的不确定度评定提供依据。因此，其理论研究也是需要进一步完善<sup>[6]~[14]</sup>。

### 1.3 课题的主要工作内容

形位误差包括形状误差和位置误差。其中直线度误差、平面度误差、圆度误差、圆柱度误差、线轮廓度误差、面轮廓度误差等属于形状误差；平行度、垂直度、倾斜度、同轴度、对称度、圆跳动、全跳动等属于位置误差。本课题主要针对典型的形位误差进行评定，即选择对直线度、平面度、圆度、圆柱度、平行度和同轴度进行评定。形位误差的评定方法主要有最小二乘法 and 最小条件法。本课题主要是基于最小二乘原理来进行评定，然后根据所建立的最小二乘数学模型对其不确定度进行评定。主要工作内容可分为以下几部分：

(1) 掌握各种形位误差的测量原理和测量方法，并且分析测量方法和测量环境等对形位误差不确定度产生的影响，再综合合成不确定度，从而得到直接测量点的单点测量不确定度。

(2) 在直角坐标系下建立各形位误差的数学模型，对于回转类的形位误差，主要有圆度误差和圆柱度误差。不仅要建立其直角坐标系下的数学模型，还要建立其在极坐标系下的数学模型。

(3) 根据不确定度评定表示指南（GUM）进行不确定度评定。计算形位误差中个参数的单点不确定度、传递系数和参数间的相关性，利用不确定度合成公式求出形位误差的标准不确定度。

(4) 探讨利用其他方法来进行形位误差的不确定度评定。研究蒙特卡罗方法的原理，并利用蒙特卡罗方法，产生随机数来构成一个概率分布，进行不确定度的评定，并得到各种方法的优缺点。

(5) 用实验来验证所得到的理论结果。使用三坐标测量机和圆度仪等测量设备，对各形位误差进行测量。对采样得到的数据，利用计算机软件来进行数据处理，本课题采用MATLAB来进行数据处理，主要因为MATLAB具有强大的计算功能和仿真功能，符合本课题的要求。

## 第二章 形位误差测量与评定方法

形位误差测量方法和其他参数测量方法的主要区别在于：长度、温度等参数可直接由测量得到，而形位误差的测量多采用间接测量，即并不是由测量结果直接得到形位误差，而是要经过计算转换后才能得到。因此形位误差的测量较为困难，其评定方法也显得尤为重要。本章将对各个形位误差的测量方法进行简单的介绍，并对形位误差的评定方法做一介绍，重点以最小二乘方法为例，进行形位误差分析，建立各形位误差的数学模型。

### 2.1 直线度误差的测量和评定方法

#### 2.1.1 直线度测量方法概述

直线度误差的定义为实际被测直线对理想直线的变动量。直线度误差的测量方法有间隙法、指示器法、水平仪法、自准直仪法、跨步仪法和坐标测量法。

按照其测量原理不同，直线度测量方法可分为三种方法：

第一种方法是定性检验法，主要有涂色检验法和量规检验法，此种方法只能检验产品是否合格，并不能的到具体的直线度为多少；

第二种方法是能直接读出直线度误差值，并不需要被测要素各点的数据，也不需要中间计算的测量方法。这种测量方法主要有光隙法，干涉法；

第三种方法是需要先获得分段处的测量点数据，再经过计算得到直线度误差值的测量方法。只有第三种方法需要对测得数据进行分析，才能获得直线度误差。

在进行直线度测量时，第三种方法的应用最为广泛，我们重点讨论第三类方法的单点测量不确定度。根据处理测得数据的方法的不同，第三类方法又可分为两类：

一类测量点测量结果不需要经过累积计算或坐标转换等处理，与直接测量方法相对应，测量点测量结果可看作是相互独立的，如坐标测量机法、光轴法、钢丝法，使用最多的是坐标测量机法；

第二类测量点直接测量的结果需要经过累积计算或坐标转换等处理，与间接测量方法相对应，此时测量点的测量结果或者与前面的测量或后面的测量有关，如水平仪法、自准直仪法、跨步仪法等。

根据测量原理不同，测量点直接测量不确定度的评定也不相同。下一章对坐标法和自准直仪法进行分析，从而得到测量点直接测量不确定度。

#### 2.1.2 直线度评定方法概述

直线度误差分为给定平面内、给定方向和任意方向的直线度误差等三种形

式。本节分别讨论这三类直线度误差的评定方法<sup>[17]</sup>。

### 1. 给定平面内直线度误差的评定方法

#### (1) 最小包容区域法

根据给定平面内直线度误差的定义，由两条平行直线包容实际被测直线S时，成“高、低、高”或者“低、高、低”三极点相接触，则这两条平行直线之间的区域就是最小包容区域U（简称最小区域）。这成为给定平面内直线度误差最小区域判别准则。他们之间的宽度 $f_{MZ}$ 即为符合定义的误差值。

#### (2) 最小二乘中线法

最小二乘中线 $l_{LS}$ 是一条穿过实际被测直线S的理想直线，它所处的位置使实际被测直线上各点至它的距离的平方之和为最小。以该理想直线作为评定基准，取得各点相对于它的偏离值中的最大偏离值 $h_{max}$ 和最小偏离值 $h_{min}$ 之差作为直线度误差值。在它上面的测点的偏离值取正值；在它下面的测点的偏离值取负值。

#### (3) 两端点连线法

以实际被测直线S的首、末两点的连线 $l_{BE}$ 作为评定基准，取测得各点相对于它的偏离值中的最大偏离值 $h_{max}$ 和最小偏离值 $h_{min}$ 之差作为直线度误差值。在它上面的测点的偏离值取正值；在它下面的测点的偏离值取负值。

### 2. 给定方向的直线度误差的评定方法

根据给定方向直线度公差带的形状，由两个平行平面包容实际被测空间直线S时，沿主方向(长度方向)上成“高一低一高”或“低一高一低”三极点相接触，则这两个平行平面之间的区域就是最小区域U。也可按投影方向进行判别，其投影方向应垂直于主方向和给定方向。这称为给定方向的直线度误差最小区域判别准则。这两个平行平面之间的宽 $f_{MZ}$ 即为符合定义的误差值。

评定给定方向的直线度误差，也可采用最小二乘中线法和两端点连线法，按垂直于主方向和给定方向的投影方向确定数值，方法同给定平面的直线度。

### 3. 任意方向的直线度误差的评定方法

#### (1) 最小包容区域法

根据任意方向直线度误差的定义，由圆柱面包容实际被测直线时，其中具有最小直径 $f_{MZ}$ 的圆柱面内的区域就是最小区域。该圆柱面的直径即为符合定义的误差值。

#### (2) 最小二乘中线法

用轴线平行于实际被测轴线S的最小二乘中线 $l_{LS}$ 的圆柱面包容该实际被测轴线时，取其中具有最小直径的圆柱面的直径 $f_{LS}$ 作为误差值。

#### (3) 两端点连线法

用轴线平行于实际被测轴线S两端点连线 $l_{BE}$ 的圆柱面包容该实际被测轴线时，取其中具有最小直径的圆柱面的直径 $f_{BE}$ 作为误差值。

上面分别介绍了直线度误差的评定方法，其中最小包容区域法最为严格准确，但计算相对复杂，两端点两线法虽然计算简单，但精度不高。因此最小二乘中线法应用最为广泛。下一节以最小二乘中线法为例介绍直线度的评定过程。因为给定方向和给定平面的直线度评定方法相同，所以分为给定平面的直线度和空间任意方向的直线度两部分进行分析。

### 2.1.3 直线度的最小二乘模型

#### 1. 给定平面内直线度模型<sup>[15]</sup>

根据直线度的测量方法介绍，这部分我们对所测得的数据进行处理，得到其误差模型。如图2-1所示，在直角坐标系中得到直线上n个点的坐标值。

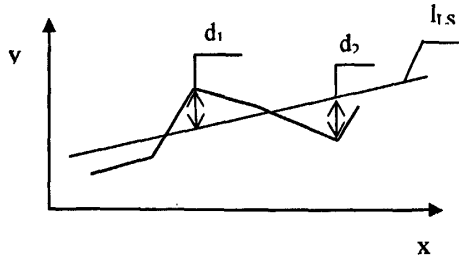


图 2-1 平面内直线度最小二乘模型

设  $(x_i, y_i), i=1,2,\dots,n$  是所测得的点，最小二乘理想直线方程为  $y = kx + b$ ，其中  $k, b$  为待定参数。令残余误差为： $\varepsilon_i = y_i - (kx_i + b), i=1,2,\dots,n$ ，最小二乘法的目标函数为： $J(k, b) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ ，约束条件是： $J(k, b) \rightarrow \min$ 。得最小二乘直线的待定参数  $k$  和  $b$  为：

$$\begin{cases} b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i y_i) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \\ k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n (x_i y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \end{cases} \quad (2-1)$$

测得点到最小二乘拟合直线的距离  $d_i = \frac{y_i - (kx_i + b_i)}{\sqrt{1 + k^2}}$ 。假设取样点中对于最小二乘直线的距离最大的点为  $(x_M, y_M, z_M)$ ，距离最小的点为  $(x_L, y_L, z_L)$ 。

直线度误差值为：

$$f = d_M - d_L = \frac{y_M - y_L - k(x_M - x_L)}{\sqrt{1 + k^2}} \quad (2-2)$$

## 2. 任意方向上的直线度模型<sup>[16]</sup>

如图2-2所示，在空间直角坐标系中得到直线上n个点的坐标值。

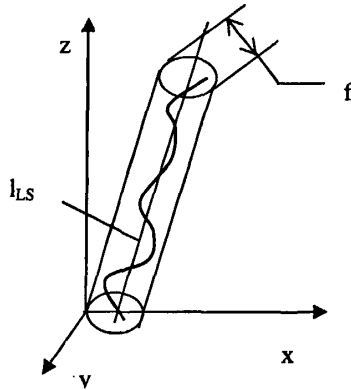


图 2-2 空间直线度的最小二乘模型

设  $(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, \dots, n$  是所测得的点，最小二乘理想直线方程为

$\begin{cases} x = k_1 z + b_1 \\ y = k_2 z + b_2 \end{cases}$ ，根据最小二乘原理得最小二乘直线的待定参数  $k_1, b_1, k_2, b_2$  为：

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i z_i) \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n x_i}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \\ k_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n z_i - n \sum_{i=1}^n (x_i z_i)}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \\ b_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i z_i) \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \\ k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i - n \sum_{i=1}^n (y_i z_i)}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \end{cases}$$

测得点到最小二乘拟合直线的距离

$d_i = \sqrt{(x_i - b_1 - k_1 z_i)^2 + (y_i - b_2 - k_2 z_i)^2}$ ，假设取样点中对于最小二乘直线的距离最大的点为  $(x_M, y_M, z_M)$ 。

直线度误差值为：

$$f = 2 \max d_M = \sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2} \quad (2-3)$$



## 2.2 平面度误差测量与评定方法

### 2.2.1 平面度的测量与评定方法概述

平面度误差是指实际被测平面与理想平面的距离。平面度误差的测量方法和直线度误差的测量方法类似。包括间隙法、指示器法、光轴法、干涉法、液面法、水平仪法、自准直仪法和坐标测量法。与直线度误差测量方法类似，平面度测量方法按照其测量原理可分为相同的三种方法。只有第三种方法需要对测得数据进行分析，才能获得平面度误差。根据处理测量数据方法的不同，又可分为两类。一类是测量点的测量结果不需要经过累积计算或坐标转换等处理，测量点测量结果可看作是相互独立的，如坐标测量机法、光轴法、钢丝法。另一类测量点直接测量的结果需要经过累积计算或坐标转换等处理如水平仪法、自准直仪法等。其单点测量不确定度的确定方法也和直线度误差相同，下一章进行介绍。

平面度的评定方法包括最小包容区域法、最小二乘平面法、对角线平面法和三远点平面法<sup>[17]</sup>。

#### 1. 最小区域法

最小区域法是指用相互平行的两个平面包容实际被测平面，这两个平面的距离的最小值即为最小区域法评定出的平面度误差。这两平面遵循的原则是这两平行平面和被测平面至少有四个接触点。这四个点需满足交叉准则或三角形准则。最小区域法评定出的误差值最小，作为最后仲裁依据。

#### 2. 最小二乘平面法

用最小二乘法评定平面度误差时，评定的基准平面是最小二乘平面  $S_{LS}$ ，最小二乘平面确定是利用各测量点到平面的距离的平方和为最小值。取得各点相对于该平面的偏离值中的最大偏离值和最小偏离值之差作为平面度误差值。点在平面上方为正，在平面下方为负。

#### 3. 对角线法和三远点法

对角线法的基准平面是包含实际表面的一条对角线的两个对角点，并且和另一条对角线平行的平面  $S_{DL}$ 。

三远点法的基准平面是包含实际平面上距离较远的三个点的平面  $S_{TP}$ ，平面  $S_{TP}$  的方程可由三点的坐标直接求得。

评定基准平面  $S_{DL}$ 、 $S_{TP}$  求得以后，再取得各点相对于该平面的偏离值中的最大偏离值和最小偏离值之差作为平面度误差值。点在平面上方为正，在平面下方为负。

综上所述，最小二乘平面法计算方便简洁，以最小二乘平面法为例介绍平面度的评定过程。

## 2.2.2 平面的最小二乘模型<sup>[19]</sup>

如图2-3所示，在直角坐标系中得到平面上n个点的坐标值。

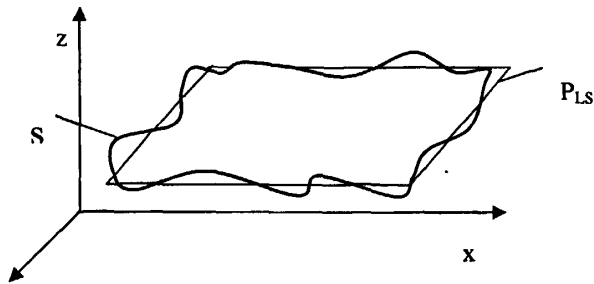


图 2-3 平面的最小二乘模型

假定测得点坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ ，最小二乘平面为： $z = ax + by + c$ ，其中  $a, b, c$  为

待定参数。根据最小二乘原理得最小二乘平面的待定参数  $a, b, c$  为：

$$a = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum z_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i z_i & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum y_i z_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum z_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i z_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i z_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \sum z_i & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i z_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i z_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}$$

取坐标距离的最大值  $(x_M, y_M, z_M)$  和最小值  $(x_L, y_L, z_L)$ ，则平面度误差为：

$$f = d_M - d_L = \frac{(z_M - z_L) - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad (2-4)$$

## 2.3 圆度误差的测量和评定方法

### 2.3.1 圆度测量与评定方法概述

圆度误差是指回转体的同一正截面上实际被测轮廓对其理想圆的变动量。圆度误差的测量方法大多采用坐标测量法，其中又分为极坐标法和直角坐标法。极坐标即为采用圆度仪进行测量，圆度仪的基本原理是基于极坐标测量的方法，将被测零件放入它允许的测量空间中，依据零件上的设计基准，建立一个极坐

标系，精确地测量出组成被测要素空间点的极坐标值，将这些点的极坐标数值进行数据处理，从而得到圆度误差。直角坐标法即采用三坐标测量机进行测量，三坐标测量机的基本原理基于直角坐标测量的方法，将被测零件放入它允许的测量空间中，依据零件上的设计基准，建立一个空间直角坐标系，精确地测量出组成被测要素空间点的直角坐标值，将这些点的坐标值进行数据处理，得到圆度误差。实际中多采用圆度仪进行测量。也有采用直角坐标和极坐标相结合的方法。下一章将对这两种方法分别进行单点的测量不确定度评定<sup>[17]</sup>。

圆度的评定方法有最小包容区域法、最小二乘圆法、最小外接圆法和最大内切圆法<sup>[20]</sup>。最小区域法是根据定义进行评定，评定出的误差值最小，作为最后仲裁依据。其他三种方法都是首先确定基准圆，然后计算测量点到基准圆心最大距离和最小距离之差，所得即为圆度误差。这三种方法的区别主要在于基准圆的确定，分别以最小二乘圆，最小外接圆和最大内切圆作为基准。其中最小二乘圆法计算方便简洁，精度比较高，应用比较广泛。下一节以最小二乘圆法为例介绍圆度误差的评定过程。

### 2.3.2 圆度的最小二乘模型

因为圆度的坐标测量法分为直角坐标和极坐标两种方法，因此圆度的评定也分为直角坐标系和极坐标系下两部分进行评定。

#### 1. 直角坐标系下<sup>[21]</sup>

如图2-4所示，在直角坐标系下建立圆度的最小二乘模型。设 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n, n > 3$  为被测实际圆周上的测量采样点。设待求最小二乘圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ，其中 $(a, b)$  为最小二乘圆的圆心， $R$  为最小二乘圆的半径。

采样点到最小二乘圆的径向偏差为 $E_i = r_i - R = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R$ ；

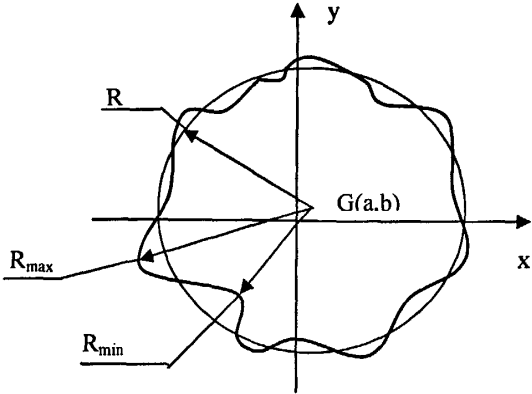


图 2-4 直角坐标系下圆度的最小二乘模型

在圆度误差的实际测量与评定过程中,要求测量采样点满足以下约束条件:

测量采样点在被测圆周上等间距分布；测量采样点的数目为偶数。在此约束条件下最小二乘圆圆心为：

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

假定距离最小二乘圆心最大和最小的点分别为： $(x_M, y_M)$ ， $(x_L, y_L)$

则圆度误差可表示为：

$$f = \sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2} - \sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2} \quad (2-5)$$

## 2.极坐标系下

如图2-5所示，在极坐标系下建立圆度的最小二乘模型<sup>[22]</sup>。

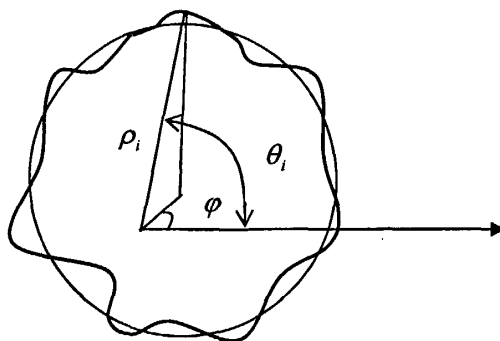


图 2-5 极坐标系下圆度的最小二乘模型

设  $(r_i, \theta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n > 3$  为被测实际圆周上的测量采样点。设最小二乘圆圆心的极坐标为  $(e, \varphi)$ ，直角坐标为  $(a, b)$ ，最小二乘半径为  $R$ ，采样点到最小二乘圆心的距离为  $R_i$ 。

$$R_i = r_i - e \cos(\theta_i - \varphi) = r_i - a \cos \theta_i - b \sin \theta_i$$

根据最小二乘原理得：

$$\begin{cases} a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \cos \theta_i \\ b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \sin \theta_i \\ R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \end{cases}$$

假定距离最小二乘圆心最大和最小的采样点分别为： $(r_M, \theta_M)$ ， $(r_L, \theta_L)$ ，则圆度误差数学模型为：

$$f = R_{\max} - R_{\min} = r_M - a \cos \theta_M - b \sin \theta_M - r_L + a \cos \theta_L + b \sin \theta_L \quad (2-6)$$

## 2.4 圆柱度误差的测量和评定方法

### 2.4.1 圆柱度测量与评定方法概述

圆柱度误差是指实际被测圆柱面对其理想圆柱面的变动量。圆柱度误差的测量方法大多采用坐标测量法，其中又分为极坐标法和直角坐标法。实际中多采用圆度仪进行测量。也有采用直角坐标和极坐标相结合的方法。

圆柱度的评定方法有最小包容区域法、最小二乘法、最小外接圆柱法和最大内切圆柱法。最小区域法是根据定义进行评定，评定出的误差值最小，作为最后仲裁依据。其他三种方法都是首先确定基准圆柱面，然后计算测量点到基准圆柱轴线最大距离和最小距离之差，所得即为圆柱度误差。这三种方法的区别主要在于基准圆柱面的确定，分别以最小二乘圆柱面，最小外接圆柱面和最大内切圆柱面作为基准。其中最小二乘圆柱面法计算方便简洁，精度比较高，应用比较广泛。下节以最小二乘圆柱面法为例介绍圆柱度误差的评定过程<sup>[17]</sup>。

### 2.4.2 圆柱度的最小二乘模型

圆柱度的评定分为两步，首先根据最小二乘法原理确定被测实际圆柱面的最小二乘轴线，然后以此轴线作为评定圆柱度误差的基准轴线，做两个将被测实际圆柱面包容在其间的同轴理想圆柱面，这两个同轴理想圆柱面的半径差就是该被测实际圆柱面的圆柱度误差。

#### 1. 最小二乘轴线

如图2-6所示，将被测实际零件置于空间直角坐标系OXYZ中。将被测圆柱面分成与Z轴垂直的n个采样截面，在每个采样截面轮廓上又分别取m个采样点。

根据空间直线度误差评定的分析得：最小二乘轴线为  $\begin{cases} x = k_1 z + b_1 \\ y = k_2 z + b_2 \end{cases}$ ，其中

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i z_i) \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n x_i}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \\ k_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n z_i - n \sum_{i=1}^n (x_i z_i)}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i z_i) \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \\ k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i - n \sum_{i=1}^n (y_i z_i)}{(\sum_{i=1}^n z_i)^2 - n \sum_{i=1}^n z_i^2} \end{cases}$$

#### 2. 求圆柱度误差

假设圆柱面上的任意一个采样点的坐标为  $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ ， $i=1, 2, \dots, m$ ； $j=1, 2, \dots, n$ 。横截面圆的圆心是  $O_i(x_i, y_i, z_i)$ 。圆柱度误差最小二乘评定的结果

可以表示为  $f = \max d_{ij} - \min d_{ij}$ 。

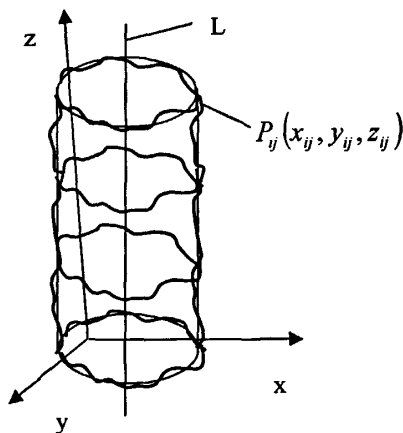


图 2-6 圆柱度的最小二乘模型

假定采样点  $(x_M, y_M, z_M)$  到最小二乘轴线的距离最大，采样点  $(x_L, y_L, z_L)$  到最小二乘轴线的距离最小。则圆柱度误差可表示为：

$$f = \sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2} - \sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2} \quad (2-7)$$

## 2.5 平行度误差的测量和其评定方法

### 2.5.1 平行度测量与评定方法的概述

位置误差包括定向误差、定位误差和跳动三部分。本文每部分选择一个典型误差进行分析。定向误差分为平行度误差、垂直度误差和倾斜度误差。本节就平行度误差的测量进行分析。平行度误差是被测实际要素对其平行于基准的理想要素的变动量。平行度的测量包括面对面平行度、面对线平行度、线对面平行度和线对线平行度测量。测量的方法主要有直接比较法、坐标法、尺寸差法、水平仪法和光轴法。本文以面对面平行度坐标测量方法为例来进行分析。坐标法测量面对面平行度误差是使用坐标测量仪器、圆柱度仪和圆度仪测量，利用这些仪器上的空间直角坐标系或圆柱面坐标系，测量实际基准平面和实际被测平面上若干测点的坐标值，然后经过计算，得到实际基准平面的数学模型，并计算各个实际被测平面上的测点至实际基准平面的距离，距离最大的和距离最小的之差即为平行度误差<sup>[27]</sup>。

这四类平行度误差的评定方法基本相同，首先要确定基准，然后计算被测点到基准的距离最大值和最小值，最大值和最小值之差即为平行度误差。

面对面的平行度误差：基准为平面，被测要素也为平面，首先确定基准平面的方程，可采用平面度评定的方法确定，然后用平行于基准平面的两平行平

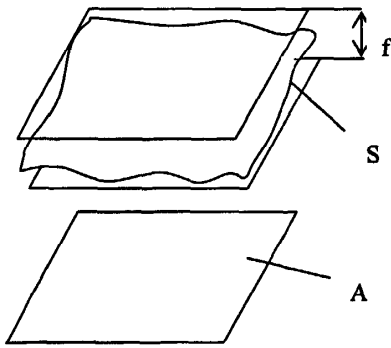
面包容被测平面，这两平行平面的距离即为最小区域法评定的平行度误差。

线对面的平行度误差：基准为平面，被测要素为直线，首先确定基准平面的方程，可采用平面度评定的方法确定，然后用平行于基准平面的两平行平面包容被测直线，这两平行平面的距离即为最小区域法评定的平行度误差。

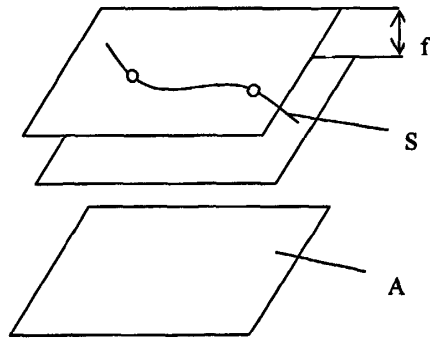
面对线的平行度误差：基准为直线，被测要素为平面，首先确定基准直线的方程，可采用直线度评定的方法确定，然后用平行于基准直线的两平行平面包容被测平面，这两平行平面的距离即为最小区域法评定的平行度误差。

线对线的平行度误差：基准要素和被测要素均为直线。首先评定基准直线A，可采用直线度评定的方法确定，然后建立新坐标系 $x'o'y'z'$ ，新坐标系以基准直线A为 $z'$ 轴，然后将被测要素的各测量点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 进行坐标变换，在新坐标系里的坐标值为 $P_i'(x_i', y_i', z_i')$ ，将新点 $P_i'(x_i', y_i', z_i')$ 投影到垂直于基准轴线的平面 $x'o'y'$ 上。最后求包容投影点的最小外接圆，则该最小外接圆的直径即为式线对线的平行度误差。

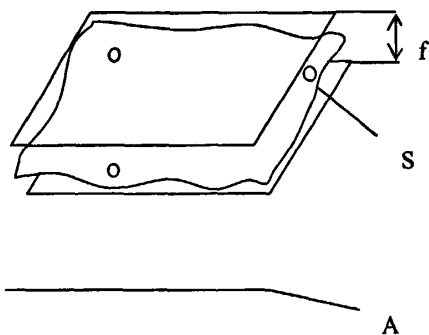
平行度评定方法可参考下图所示：



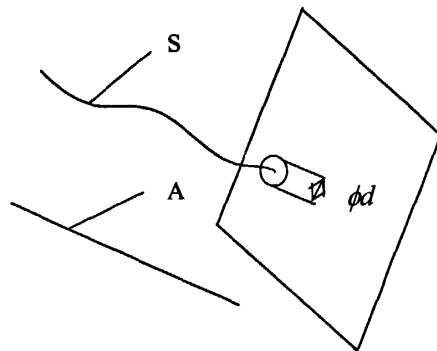
(a) 面对面的平行度误差示意图



(b) 线对面的平行度误差示意图



(c) 面对线的平行度误差示意图



(d) 线对线的平行度误差示意图

图 2-7 平行度误差示意图

本节分别介绍了这四类平行度的评定方法，下一节针对面对面的平行度进行数学建模。

### 2.5.2 平行度的最小二乘模型

对于面对面的平行度误差，建立误差模型时也需要以下三个步骤：

- (1) 根据测量点的坐标值求得实际基准平面的数学模型；
- (2) 求出实际被测平面各点到基准平面的距离；
- (3) 评定平行度误差。

具体评定过程如下：

将被测工件放置于空间直角坐标系中，对实际基准要素选取  $n$  个点进行采样，假设测得点的坐标为  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 。然后对实际被测要素选取  $N$  个点进行采样，假设测得点的坐标为  $Q_l(x_l, y_l, z_l)$ 。

注： $i$ ——实际基准要素第  $i$  个采样点；

$l$ ——实际被测要素第  $l$  个采样点；

根据测量点的坐标值求得实际基准平面的数学模型。

由平面度评定知，最小二乘平面为  $z = ax + by + c$

$$\text{其中 } a = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum z_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i z_i & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum y_i z_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum z_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i z_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i z_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \sum z_i & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i z_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i z_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}}$$

- (2) 求出实际被测平面各点到基准平面的距离。

$$Q_l(x_l, y_l, z_l) \text{ 点到实际基准平面的距离为: } d_l = \frac{z_l - (ax_l + by_l + c)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

- (3) 评定平行度误差。

假设距离的最大的点为  $(x_M, y_M, z_M)$ ，距离最小的点为  $(x_L, y_L, z_L)$ ，则平行度误差模型为：

$$f = d_M - d_L = \frac{(z_M - z_L) - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad (2-8)$$



## 2.6 同轴度误差的测量与其评定的方法

### 2.6.1 同轴度测量与评定方法概述

定位误差包括同轴度、对称度和位置度。本文针对同轴度进行分析。同轴度误差是指被测实际轴线对其理想轴线（即基准轴线）的变动量。同轴度误差的测量方法主要有坐标法、对径双侧头测量法、反向法和壁厚差法等。通常采用的是坐标法测量同轴度误差，所以重点分析坐标测量法。坐标法测量同轴度误差是指使用坐标测量仪器、圆柱度仪和圆度仪测量，利用这些仪器得到空间直角坐标值或极坐标值，首先确定基准轴线，然后计算其他被测点到基准轴线的距离，距离最大值的二倍即为同轴度误差<sup>[27]</sup>。

同轴度误差是指被测实际轴线对其理想轴线（即基准轴线）的变动量。评定同轴度误差时，首先要确定被测实际轴线的位置，然后与基准轴线（即理想轴线）作位置上的比较，从而求得同轴度误差值。所以评定同轴度误差时，需要以下三个步骤：

- (1) 确定基准要素和被测实际要素各采样截面的圆心；
- (2) 确定基准轴线；
- (3) 评定同轴度误差。

### 2.6.2 同轴度的最小二乘模型

将被测工件放置于空间直角坐标系中，对基准实际要素在OZ方向将圆柱分成  $n$  个采样横截面，在每个采样截面上取  $m$  个点进行测量。设  $i=1,2,\dots,m$ ， $j=1,2,\dots,n$ 。则测得点的坐标为  $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ ，各采样截面的圆心坐标为  $O_j(a_j, b_j, z_j)$ 。

对被测实际要素在OZ方向将圆柱分成  $N$  个采样横截面，在每个采样截面上取  $M$  个点进行测量。设  $I=1,2,\dots,M$ ， $J=1,2,\dots,N$ 。则测得点的坐标为  $Q_{IJ}(x_{IJ}, y_{IJ}, z_{IJ})$ ，各采样截面的圆心坐标为  $O_J(a_J, b_J, z_J)$ 。

- 注： $i$ ——基准实际要素各采样面的第  $i$  个采样点；  
 $j$ ——基准实际要素第  $j$  个采样截面；  
 $I$ ——被测实际要素各采样面的第  $I$  个采样点；  
 $J$ ——被测实际要素第  $J$  个采样截面。

- (1) 确定基准要素和被测实际要素各采样截面的最小二乘圆心。

根据圆度评定的计算公式得，基准实际要素和被测实际要素的圆心为：

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ij} \\ b_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ij} \end{cases} \quad \begin{cases} a_J = \frac{1}{M} \sum_{I=1}^M x_{IJ} \\ b_J = \frac{1}{M} \sum_{I=1}^M y_{IJ} \end{cases}$$

- (2) 确定基准最小二乘轴线。

根据  $O_j$  点的坐标值求得基准最小二乘轴线。

最小二乘理想直线方程为  $\begin{cases} x = k_1 z + l_1 \\ y = k_2 z + l_2 \end{cases}$ ，根据最小二乘原理得：

$$\begin{cases} l_1 = \frac{\sum_{j=1}^n (a_j z_j) \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^n z_j^2 \sum_{j=1}^n a_j}{\left(\sum_{j=1}^n z_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n z_j^2} \\ k_1 = \frac{\sum_{j=1}^n a_j \sum_{j=1}^n z_j - n \sum_{j=1}^n (a_j z_j)}{\left(\sum_{j=1}^n z_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n z_j^2} \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = \frac{\sum_{j=1}^n (b_j z_j) \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^n z_j^2 \sum_{j=1}^n b_j}{\left(\sum_{j=1}^n z_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n z_j^2} \\ k_2 = \frac{\sum_{j=1}^n b_j \sum_{j=1}^n z_j - n \sum_{j=1}^n (b_j z_j)}{\left(\sum_{j=1}^n z_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n z_j^2} \end{cases}$$

(3) 评定同轴度误差。

被测实际要素的采样点到最小二乘拟合直线的距离为

$$d_i = \sqrt{(x_{ij} - l_1 - k_1 z_{ij})^2 + (y_{ij} - l_2 - k_2 z_{ij})^2}$$

假设采样点中对于最小二乘直线的距离最大的点为  $(x_M, y_M, z_M)$ ，则同轴度误差模型为：

$$f = 2\sqrt{(x_M - l_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - l_2 - k_2 z_M)^2} \quad (2-9)$$

### 第三章 形位误差测量不确定度分析

形位误差测量中测量不确定度的影响因素很多，其主要影响来源于测量过程和评定过程中。测量过程中影响测量不确定度的主要有仪器的随机误差，系统误差，以及工件的形位误差。评定过程中产生的测量不确定度由采用何种算法决定的，测量不确定度来源主要有各参数的测量不确定度以及各参数间的相关系数。见图3-1所示。

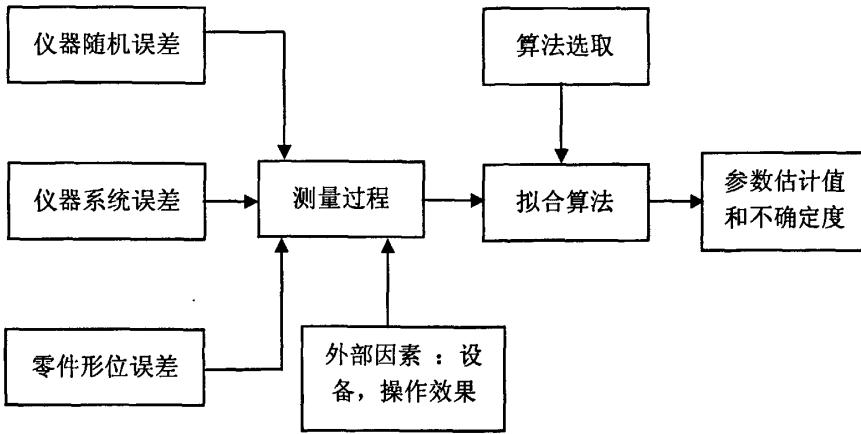


图 3-1 形位误差测量中测量不确定度的影响因素

从上图可以看出形位误差的测量结果的不确定度主要是在测量过程和评定过程中产生。上一章分析了测量方法和评定方法，本章根据具体的测量和评定方法，分析各形位误差的测量不确定度。在形位误差测量中，多数情况下采用坐标测量法。坐标测量的原理是：任何形状都是由几何点组成的，所有的几何测量都可以归结为空间点的测量。坐标测量的基本原理就是将被测物体放入允许的测量空间，精确的测出被测零件表面的点在空间的三个坐标的数值，再将这些点的坐标数值经过计算机数据处理，拟合形成测量元素，并得到其形状和位置误差及其它所需的几何量数据。使用最多的测量仪器是三坐标测量机和圆度仪两类，三坐标测量机是在直角坐标系下对测量点进行测量，而圆度仪是在极坐标系下进行测量，适用于回转体，如圆度、圆柱度等。测量过程中产生的不确定度主要是由测量仪器造成的，首先本节分别介绍这两种仪器并分析其误差源，从而得到形位误差的单点测量不确定度。

### 3.1 直线度的不确定度评定

#### 3.1.1 直线度测量过程中的测量不确定度

根据上章介绍的直线度误差的测量和评定方法，本文以坐标测量法进行直线度误差的测量，通常采用的是三坐标测量机进行测量，本节对三坐标测量机进行不确定度来源分析，从而得到直线度误差测量过程中所产生的测量不确定度<sup>[27][28]</sup>。

三坐标测量机的测量不确定度来源主要有：

- (1) 三坐标测量机测量重复性引入的不确定度分量  $u_1$ ；
- (2) 三坐标测量机示值误差引入的不确定度分量  $u_2$ ；
- (3) 测力变形引入的不确定度分量  $u_3$ ；
- (4) 量具与三坐标测量机标尺间的温度差引入的不确定度分量  $u_5$ 。

采用三坐标测量机的直线度误差的单点测量不确定度，测量时都是直接读出直角坐标或极坐标值，测量点测量结果不需要经过累积计算或坐标转换等处理，各测量点直接测量结果可看作彼此是不相关的，在相同的测量环境下，可以认为所得各测量点测量结果的不确定度是相同的和固定的，以  $u_0$  记，任一点测量结果的不确定度以  $u_{0i}$  记，于是有  $u_{01} = u_{02} = \dots = u_{0i} = u_0$ 。

结合三坐标测量机误差源分析，直线度误差测量过程中所产生的不确定度的计算公式为：

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} \quad (3-1)$$

#### 3.1.2 直线度评定过程中的测量不确定度

##### 1. 给定平面内直线度的不确定度评定

给定平面内直线度模型为  $f = d_M - d_L = \frac{y_M - y_L - k(x_M - x_L)}{\sqrt{1+k^2}}$ ，根据GUM规定，对其不确定度进行分析。

要计算直线度的测量不确定度，首先要确定直线度误差模型中各参数的传递系数和单点测量不确定度。

##### a. 各参数传递系数的计算公式：

$$\frac{\partial f}{\partial x_M} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y_M} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}};$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_L} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y_L} = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial k} = \frac{x_M - x_L}{\sqrt{1+k^2}};$$

##### b. 各参数测量不确定度分别为：

$$u_{x_M} = u_{x_L} = u_{y_M} = u_{y_L} = u_0$$

$$u_k = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2} u_0^2 \quad \text{式中 } \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\sum x_i - nx_k}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}$$

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_M} u_{x_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_L} u_{x_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_M} u_{y_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_L} u_{y_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k} u_k\right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3-2)$$

即可求得直线度的测量不确定度。

## 2. 任意方向上的直线度的不确定度评定<sup>[29] [30]</sup>

空间直线度最小二乘评定模型为  $f = 2\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}$ ，根据GUM规定，对其不确定度进行分析：

$$\text{令 } \varepsilon_1 = x_M - b_1 - k_1 z_M \quad \varepsilon_2 = y_M - b_2 - k_2 z_M, \quad \text{则 } f = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$$

由于上式具有明显的非线性，因此在用不确定度传递公式计算合成不确定度时应该加入泰勒级数展开中的高次二阶项，即：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j)$$

此时n=2。根据不确定度的合成公式，直线度f的不确定度 $u_f$ 的计算公式为：

$$u_f = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right)^2 u^2(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j) \right\}^{1/2}$$

### a. 求传递系数：

由式  $f = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$  得：

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} = \frac{2\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1^2} = \frac{2\varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_2^2} = \frac{2\varepsilon_1^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_1^3} = -\frac{6\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_2^3} = -\frac{6\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_1 \varepsilon_2^2} = -\frac{2\varepsilon_1^3 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_2 \varepsilon_1^2} = -\frac{2\varepsilon_2^3 - 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{5/2}}.$$

b. 计算各参数测量不确定度  $u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2}$

由前面分析知  $\varepsilon_1 = x_1 - b_1 - k_1 z_1$   $\varepsilon_2 = x_1 - b_2 - k_2 z_1$ , 则:

$$u_{\varepsilon_1} = \sqrt{u_0^2 + u_{b_1}^2 + z_1 u_{k_1}^2 + 2z_1 u_{b_1 k_1}} \quad u_{\varepsilon_2} = \sqrt{u_0^2 + u_{b_2}^2 + z_1 u_{k_2}^2 + 2z_1 u_{b_2 k_2}}$$

$u_0$  为第一部分所求得的测量过程中的不确定度,  $u_{b_1}, u_{k_1}, u_{b_2}, u_{k_2}$  可由

$b_1, k_1, b_2, k_2$  的计算公式及不确定度传递公式求得,  $u_{b_1 k_1}, u_{b_2 k_2}$  可由  $b_1, k_1$  和  $b_2, k_2$  的协方差求得。计算如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{b_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_1}{\partial x_k} \right)^2 u_{x_k}^2} \\ u_{b_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_2}{\partial y_k} \right)^2 u_{y_k}^2} \\ u_{k_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial k_1}{\partial x_k} \right)^2 u_{x_k}^2} \\ u_{k_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial k_2}{\partial y_k} \right)^2 u_{y_k}^2} \end{array} \right. \quad \text{式中} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial b_1}{\partial x_k} = \frac{\partial b_2}{\partial y_k} = \frac{z_k \sum z_i - \sum z_i^2}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \\ \frac{\partial k_1}{\partial x_k} = \frac{\partial k_2}{\partial y_k} = \frac{\sum z_i - n z_k}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \end{array}$$

由上述分析可得  $u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2}$ 。

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right)^2 u^2(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j) \right\}^{1/2} \quad (3-3)$$

即可求得空间直线度的测量不确定度。

## 3.2 平面度的不确定度评定

### 3.2.1 平面度测量过程中的测量不确定度

平面度误差和直线度误差的测量方法类似, 因此平面度误差测量过程中所产生的测量不确定度分析方法也和直线度误差方法类似。平面度的测量多采用三坐标测量机, 主要分析三坐标测量机的不确定度来源。和上一节相同, 结合三坐标测量机误差源分析, 直线度误差测量过程中所产生的不确定度的计算公式为:

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2}$$

### 3.2.2 平面度评定过程中的测量不确定度

平面度误差的数学模型为  $f = d_M - d_L = \frac{(z_M - z_L) - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$ ，根

据GUM规定，对其不确定度进行分析<sup>[31]</sup>：

要计算平面度的测量不确定度，首先要确定平面度误差模型中各参数的传递系数和单点测量不确定度。

a. 各参数传递系数的计算公式：

$$\frac{\partial f}{\partial x_M} = \frac{-a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_L} = \frac{-a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_M} = \frac{-b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y_L} = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_M} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial z_L} = \frac{-1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{x_L - x_M}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} - \frac{a[z_M - z_L - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)]}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{y_L - y_M}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} - \frac{b[z_M - z_L - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)]}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

b. 各参数测量不确定度分别为：

因为x,y在平面度的非敏感方向，所以不考虑其不确定度，只分析z的不确定度，z值的测量不确定度等于单点测量不确定度。由a和b的计算公式知，所有测量点的坐标值计算得到a和b，而实际测量中，测量点较多，因此a和b的相关系数近似为零。A和b的不确定度推导得：

首先对a, b进行化简，令  $V = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix}$ ,

$$p = \sum x_i, q = \sum y_i, r = \sum x_i^2, s = \sum y_i^2, t = \sum x_i y_i \text{ 整理得:}$$

$$V = nrs + 2pqt - q^2r - p^2s - nt^2;$$

$$a = [(tq - ps)\sum z_i + (ns - q^2)\sum x_i z_i + (pq - nt)\sum y_i z_i] / V;$$

$$b = [(pt - qr)\sum z_i + (pq - nt)\sum x_i z_i + (nr - p^2)\sum y_i z_i] / V$$

则  $u_{z_M} = u_{z_L} = u_0$ ;

$$u_a = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial z_i}\right)^2} u_0 = \frac{(tq - ps) + (ns - q^2)p + (pq - nt)q}{V} u_0;$$

$$u_b = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)^2} u_0 = \frac{(pt - qr) + (pq - nt)p + (nr - p^2)q}{V} u_0。$$

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z_M} u_{z_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_L} u_{z_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a} u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} u_b\right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3-4)$$

即可求得平面度的测量不确定度。

### 3.3 关于圆度的测量不确定度评定

#### 3.3.1 在圆度测量过程中的测量不确定度

根据上章介绍的圆度误差的测量和评定方法，本文以坐标测量法进行圆度误差的测量。若采用直角坐标测量方法，通常采用三坐标测量机进行测量，其测量过程中所产生的不确定度利用3.1式即可求出；若采用极坐标测量法，通常采用的是圆度仪进行测量，本节重点分析采用极坐标测量方法时，测量过程中所产生的不确定度。首先对圆度仪进行介绍，然后分析其不确定度来源，从而得到圆度误差测量过程中所产生的测量不确定度。

圆度仪的原理和三坐标测量机的原理相同，都是对点进行测量，从而得到所需要的测量结果。不同的是在于三坐标测量机在直角坐标系下对点进行测量，得到的是直角坐标值；而圆度仪是在极坐标系下对点进行测量，得到的是极坐标值。对于回转类误差，通常采用圆度仪对其进行测量。另外，通常利用圆度仪对圆度、圆柱度、平行度和同轴度等进行测量。因此，圆度仪是在进行形位误差测量时最常用到的测量设备。

圆度仪从其主轴的布局形式有转台式和转轴式两种。

转轴式是将传感器安装在回转轴的主轴上，测量时工件不动，传感器与工件被测实际表面接触并转动。这种形式的圆度仪的基准轴精度不会因被测件重量的大小而变化，但结构较复杂，适用于大而重的工件，工件宜静放。

转台式是指将被测件安装在回转工作台上。测量时，被测件随工作台转动，因旋转工作台的承载能力有限，这种圆度仪不能测量较重的零件，所以适用于测量重量较轻，尺寸较小的工件。因为它的体积小，实现测量控制和误差修正比较方便，而且可以比较方便的组合测量除圆度以外的一些形位参数，如直线度、平行度、垂直度、同轴度等<sup>[32][33]</sup>。

圆度仪的测量不确定度来源主要有：



- (1)圆度仪测量重复性引入的不确定度分量  $u_1$ ;
- (2)圆度仪示值误差引入的不确定度分量  $u_2$ ;
- (3)测力变形引入的不确定度分量  $u_3$ ;
- (4)圆度仪径向误差引入的不确定度分量  $u_4$ ;
- (5)基准回转轴线与Z轴导轨的平行度引入不确定度分量  $u_5$ ;
- (6)量具与圆度仪标尺间的温度差引入的不确定度分量  $u_6$ 。

结合圆度仪误差源分析，圆度误差在测量过程中所产生的不确定度计算公式为：

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} \quad (3-5)$$

### 3.3.2 圆度评定过程中的测量不确定度

#### 1.直角坐标系下

圆度误差的直角坐标数学模型为

$f = \sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2} - \sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}$ ，根据GUM规定，对其不确定度进行分析<sup>[34]</sup>：

要计算圆度的测量不确定度，首先要确定圆度误差模型中各参数的传递系数和单点测量不确定度。

#### a. 各参数传递系数的计算公式：

$$\frac{\partial f}{\partial x_M} = \frac{x_M - a}{\sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y_M} = \frac{y_M - b}{\sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_L} = -\frac{x_L - a}{\sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y_L} = -\frac{y_L - b}{\sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{x_L - a}{\sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2}} - \frac{x_M - a}{\sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{y_L - b}{\sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2}} - \frac{y_M - b}{\sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2}}。$$

#### b. 各参数测量不确定度分别为：

实际测量中，各测量点都是在相同测量环境下得到的，各点的不确定度相等，都等于单点测量不确定度。由a和b的计算公式知，所有测量点的坐标值计算得到a和b，而实际测量中，测量点较多，因此a和b的相关系数近似为零。A和b的不确定度推导得：

$$u_a = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2} u_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} u_0; \quad u_b = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2} u_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} u_0。$$

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial x_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_L} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y_L} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y_M} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}^{1/2} u_0 \quad (3-6)$$

即可求得圆度的测量不确定度。

## 2. 极坐标系下

圆度误差的极坐标数学模型为

$f = R_{\max} - R_{\min} = r_M - a \cos \theta_M - b \sin \theta_M - r_L + a \cos \theta_L + b \sin \theta_L$ ，根据GUM规定，对其不确定度进行分析：

要计算圆度的测量不确定度，首先要确定圆度误差模型中各参数的传递系数和单点测量不确定度。

### a. 各参数传递系数的计算公式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r_M} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_M} = a \sin \theta_M - b \cos \theta_M; \quad \frac{\partial f}{\partial a} = -\cos \theta_M + \cos \theta_L; \\ \frac{\partial f}{\partial r_L} = -1; \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_L} = -a \sin \theta_L + b \cos \theta_L; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = -\sin \theta_M + \sin \theta_L. \end{aligned}$$

### b. 各参数测量不确定度分别为：

实际测量中，各测量点都是在相同测量环境下得到的，各点的不确定度相等，都等于单点测量不确定度。由a和b的计算公式知，所有测量点的坐标值计算得到a和b，而实际测量中，测量点较多，因此a和b的相关系数近似为零。由a、b的计算公式得到其不确定度如下：

$$u_{r_M} = u_{r_L} = u_r; \quad u_{\theta_M} = u_{\theta_L} = u_\theta;$$

$$u_a = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial r_i} \right)^2 u_r^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial \theta_i} \right)^2 u_\theta^2} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n [(u_r \cos \theta_i)^2 + (u_\theta r_i \sin \theta_i)^2]};$$

$$u_b = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial r_i} \right)^2 u_r^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial \theta_i} \right)^2 u_\theta^2} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n [(u_r \sin \theta_i)^2 + (u_\theta r_i \cos \theta_i)^2]}$$

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \sqrt{\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial r_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial r_L} \right)^2 \right] u_r^2 + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_L} \right)^2 \right] u_\theta^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 u_a^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 u_b^2} \quad (3-7)$$

即可得圆度误差的测量不确定度。

### 3.4 圆柱度的不确定度评定

#### 3.4.1 圆柱度测量过程中的测量不确定度

圆柱度误差的测量方法同圆度误差的测量方法。若采用直角坐标测量法，其测量过程中所产生的不确定度利用3-1式计算，若采用极坐标测量法，其测量过程中所产生的不确定度利用3-5式计算。

#### 3.4.2 圆柱度评定过程中的测量不确定度

圆柱度误差的数学模型为

$f = \sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2} - \sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}$ ，根据GUM规定，对其不确定度进行分析<sup>[35]</sup>：

要计算圆柱度的测量不确定度，首先要确定圆柱度误差模型中各参数的传递系数和单点测量不确定度。

a. 各参数传递系数的计算公式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_M} &= \frac{x_M - b_1 - k_1 z_M}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial x_L} &= -\frac{x_L - b_1 - k_1 z_L}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial y_M} &= \frac{y_M - b_2 - k_2 z_M}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial y_L} &= -\frac{y_L - b_2 - k_2 z_L}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial z_M} &= -\frac{k_1(x_M - b_1 - k_1 z_M) + k_2(y_M - b_2 - k_2 z_M)}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial z_L} &= \frac{k_1(x_L - b_1 - k_1 z_L) + k_2(y_L - b_2 - k_2 z_L)}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial b_1} &= \frac{x_L - b_1 - k_1 z_L}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}} - \frac{x_M - b_1 - k_1 z_M}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial b_2} &= \frac{y_L - b_2 - k_2 z_L}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}} - \frac{y_M - b_2 - k_2 z_M}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial k_1} &= \frac{z_L(x_L - b_1 - k_1 z_L)}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}} - \frac{z_M(x_M - b_1 - k_1 z_M)}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_2} = \frac{z_L(y_L - b_2 - k_2 z_L)}{\sqrt{(x_L - b_1 - k_1 z_L)^2 + (y_L - b_2 - k_2 z_L)^2}} - \frac{z_M(y_M - b_2 - k_2 z_M)}{\sqrt{(x_M - b_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - b_2 - k_2 z_M)^2}}$$

b. 各参数测量不确定度分别为：

实际测量中，各测量点都是在相同测量环境下得到的，各点的不确定度相等，都等于单点测量不确定度。由 $k_1$ ， $k_2$ ， $b_1$ 和 $b_2$ 的计算公式知，所有测量点的坐标值计算得到 $k_1$ ， $k_2$ ， $b_1$ 和 $b_2$ ，而实际测量中，测量点较多，因此 $k_1$ ， $k_2$ ， $b_1$ 和 $b_2$ 的相关系数近似为零。 $k_1$ ， $k_2$ ， $b_1$ 和 $b_2$ 的不确定度推导得：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{b_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_1}{\partial x_k} \right)^2} u_{x_k}^2 \\ u_{b_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_2}{\partial y_k} \right)^2} u_{y_k}^2 \\ u_{k_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial k_1}{\partial x_k} \right)^2} u_{x_k}^2 \\ u_{k_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial k_2}{\partial y_k} \right)^2} u_{y_k}^2 \end{array} \right. \quad \text{式中} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial b_1}{\partial x_k} = \frac{\partial b_2}{\partial y_k} = \frac{z_k \sum z_i - \sum z_i^2}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \\ \frac{\partial k_1}{\partial x_k} = \frac{\partial k_2}{\partial y_k} = \frac{\sum z_i - n z_k}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \end{array}$$

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_M} u_{x_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y_M} u_{y_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z_M} u_{z_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_L} u_{x_L} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y_L} u_{y_L} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z_L} u_{z_L} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial k_1} u_{k_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b_1} u_{b_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial k_2} u_{k_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b_2} u_{b_2} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (3-8)$$

即可得圆柱度误差的测量不确定度。

### 3.5 平行度的不确定度评定

#### 3.5.1 平行度测量过程中的测量不确定度

根据第二章可知，平行度误差的测量也通常采用坐标测量法。若采用直角坐标测量法，其测量过程中所产生的不确定度利用3.1式计算，若采用极坐标测量法，其测量过程中所产生的不确定度利用3.2式计算。

#### 3.5.2 平行度评定过程中的测量不确定度

平行度的误差模型为  $f = d_M - d_L = \frac{(z_M - z_L) - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$ ，可以看

出，其和平面度的数学模型类似，所以不确定度的评定方法也和平面度评定方法相同。平行度的不确定度评定可参照平面度的不确定度评定<sup>[36]</sup>。

a. 传递系数的推导如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_M} &= \frac{-a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; & \frac{\partial f}{\partial x_L} &= \frac{-a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial y_M} &= \frac{-b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; & \frac{\partial f}{\partial y_L} &= \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial z_M} &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; & \frac{\partial f}{\partial z_L} &= \frac{-1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{x_L - x_M}{\sqrt{1+a^2+b^2}} - \frac{a[z_M - z_L - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)]}{(1+a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{y_L - y_M}{\sqrt{1+a^2+b^2}} - \frac{b[z_M - z_L - a(x_M - x_L) - b(y_M - y_L)]}{(1+a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

b. 各参数测量不确定度分别为:

$$\begin{aligned}\text{设 } p &= \sum x_i, q = \sum y_i, r = \sum x_i^2, s = \sum y_i^2, t = \sum x_i y_i \\ u_a &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial z_i}\right)^2} u_0 = \frac{(tq - ps) + (ns - q^2)p + (pq - nt)q}{V} u_0; \\ u_b &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial z_i}\right)^2} u_0 = \frac{(pt - qr) + (pq - nt)p + (nr - p^2)q}{V} u_0.\end{aligned}$$

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z_M} u_{z_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_L} u_{z_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a} u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} u_b\right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3-9)$$

即可得平行度误差的测量不确定度。

### 3.6 同轴度的不确定度评定

#### 3.6.1 同轴度测量过程中的测量不确定度

根据第二章可知,同轴度误差的测量也通常采用坐标测量法。若采用直角坐标测量法,其测量过程中所产生的不确定度利用3.1式计算,若采用极坐标测量法,其测量过程中所产生的不确定度利用3.2式计算。

#### 3.6.2 同轴度评定过程中的测量不确定度

同轴度误差模型为  $f = 2\sqrt{(x_M - l_1 - k_1 z_M)^2 + (y_M - l_2 - k_2 z_M)^2}$ , 根据GUM规

定，对其不确定度进行分析<sup>[37]</sup>：

$$\text{令 } \varepsilon_1 = x_M - l_1 - k_1 z_M \quad \varepsilon_2 = y_M - l_2 - k_2 z_M, \quad \text{则 } f = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$$

由于上式具有明显的非线性，因此在用不确定度传递公式计算合成不确定度时应该加入泰勒级数展开中的高次二阶项，即：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j)$$

此时  $n=2$ 。根据不确定度的合成公式，同轴度的不确定度  $u_f$  的计算公式为：

$$u_f = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right)^2 u^2(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j) \right\}^{1/2}$$

a. 传递系数的推导如下：

由式  $f = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$  得：

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} = \frac{2\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1^2} = \frac{2\varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_2^2} = \frac{2\varepsilon_1^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_1^3} = -\frac{6\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_2^3} = -\frac{6\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_1 \varepsilon_2^2} = -\frac{2\varepsilon_1^3 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_2 \varepsilon_1^2} = -\frac{2\varepsilon_2^3 - 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{5/2}}.$$

b. 各参数测量不确定度分别为：

由前面分析知  $\varepsilon_1 = x_M - l_1 - k_1 z_M$ ， $\varepsilon_2 = y_M - l_2 - k_2 z_M$  则：

$$u_{\varepsilon_1} = \sqrt{u_0^2 + u_{l_1}^2 + z_M u_{k_1}^2 + 2z_M u_{l_1 k_1}}, \quad u_{\varepsilon_2} = \sqrt{u_0^2 + u_{l_2}^2 + z_M u_{k_2}^2 + 2z_M u_{l_2 k_2}}$$

由  $l_1$ 、 $k_1$ 、 $l_2$  和  $k_2$  的计算公式知，所有测量点的坐标值计算得到  $l_1$ 、 $k_1$ 、 $l_2$  和  $k_2$ ，而实际测量中，测量点较多，因此  $l_1$ 、 $k_1$ 、 $l_2$  和  $k_2$  的相关系数近似为零。上式可化为

$$u_{\varepsilon_1} = \sqrt{u_0^2 + u_{l_1}^2 + z_M u_{k_1}^2}, \quad u_{\varepsilon_2} = \sqrt{u_0^2 + u_{l_2}^2 + z_M u_{k_2}^2}。u_0 \text{ 为第一部分所求得的测量过}$$

程中的不确定度， $u_{l_1}, u_{k_1}, u_{l_2}, u_{k_2}$  可由  $l_1, k_1, l_2, k_2$  的计算公式及不确定度传递公式求得。计算如下：

$$\begin{cases} u_{l_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial l_1}{\partial a_k} \right)^2} u_{a_k}^2 \\ u_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial l_2}{\partial b_k} \right)^2} u_{b_k}^2 \\ u_{k_1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial k_1}{\partial a_k} \right)^2} u_{a_k}^2 \\ u_{k_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial k_2}{\partial b_k} \right)^2} u_{b_k}^2 \end{cases}$$

$$\text{式中 } \begin{cases} \frac{\partial l_1}{\partial a_k} = \frac{\partial l_2}{\partial b_k} = \frac{z_k \sum z_i - \sum z_i^2}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \\ \frac{\partial k_1}{\partial a_k} = \frac{\partial k_2}{\partial b_k} = \frac{\sum z_i - n z_k}{(\sum z_i)^2 - n \sum z_i^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{a_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_{ij}} \right)^2} u_0 = \frac{1}{\sqrt{m}} u_0 \\ u_{b_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial b_j}{\partial y_{ij}} \right)^2} u_0 = \frac{1}{\sqrt{m}} u_0 \end{cases}$$

由上述分析可得  $u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2}$ 。

把推导出来的传递系数和单点测量不确定度的公式代入

$$u_f = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \right)^2 u^2(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial^3 f}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j^2} \right] u^2(\varepsilon_i) u^2(\varepsilon_j) \right\}^{1/2} \quad (3-10)$$

即可求得同轴度的测量不确定度。

## 第四章 基于蒙特卡罗方法评定形位误差不确定度

### 4.1 蒙特卡罗方法简介

蒙特卡罗(Monte Carlo)方法,或称计算机随机模拟方法,是一种基于“随机数”的计算方法。这一方法源于美国在第二次世界大战中研制原子弹的“曼哈顿计划”。该计划的主持人之一、数学家冯·诺伊曼用驰名世界的赌城—摩纳哥的Monte Carlo—来命名这种方法,为它蒙上了一层神秘色彩。蒙特卡罗方法亦称统计模拟方法,有时也称作随机抽样技术或统计试验方法。是二次世界大战期间为解决与原子弹有关的中子输运过程由Metropolis所提出的一种方法。目前已经广泛应用于多种学科关于随机过程的模拟,如计算多重积分、解线性代数方程组、解积分方程,中子在介质中的扩散等。其基本思想是产生大样本的伪随机数组来模拟实际数据,该随机数组需要满足该参数的分布状态和数字特征。根据所得到的数据,利用统计方法得到所求解的参数,从而最终解决实际问题。蒙特卡罗方法应用非常广泛,特别是计算机的出现,通过计算机软件方法使许多运算通过计算机完成,大大提高了蒙特卡罗方法的应用范围和实验效率。

在解决实际问题的時候应用蒙特卡罗方法主要有两部分工作:

一是用蒙特卡罗方法模拟某一过程时,需要产生各种概率分布的随机变量;根据具体问题,分析所有影响结果的参数以及分布状态,产生各参数的随机变量数组,该数组服从各参数的分布状态,能够精准的模拟这一过程;

二是用统计方法把模型的数字特征估计出来,从而得到实际问题的数值解。根据所产生的模拟某一过程的数组,利用统计方法,计算出期望、方差等需要的数字特征,最终解决实际问题。

随着计算机软件的高速发展,蒙特卡罗方法的应用越来越简便。利用计算机产生符合各种分布状态的伪随机数十分便捷,因此能够良好的模拟实际问题,为蒙特卡罗方法的推广做出了巨大贡献。下面我们就Monte Carlo方法进行不确定度评定做一些介绍。

### 4.2 利用蒙特卡罗方法进行不确定度评定

本世纪初,计量学界将蒙特卡罗方法应用于测量中的不确定度评定。由于测量过程包含很多随机因素,使用蒙特卡罗方法进行不确定度评定得到了普遍应用。根据概率的概念知,概率表示为大量试验中某事件发生的频率,因此当为大样本时,该事件的发生频率可以认定为其概率。在实际的测量中,通常为多次重复测量,可分析各测量数据的均值及分布状况,就可以利用蒙特卡罗方法产生大样本的随机数组来模拟实际测量结果,从而根据伪随机数得到测量不



确定度。蒙特卡罗方法应用于测量不确定度评定中就是根据此思路进行评定的。

利用蒙特卡罗方法对测量不确定度进行评定时，并不需要考虑状态函数是否非线性，随机变量之间有何种相关性，只要确定参数的分布状态和期望值，就可以产生大样本伪随机数来进行较为精准的模拟。特别形位误差不确定度评定中，误差模型往往非线性，传递系数和参数间的关系难以求得，用此方法思路简单易于编制程序，所得结果符合要求。

利用蒙特卡罗方法进行不确定度评定主要可以分为两类，一是已知误差传递系数；二是误差传递系数未知或难以求出。本节分这两种情况举例进行介绍，并和GUM方法做一比较，得到其可行性。

#### 4.2.1 误差传递系数已知

例子1：测量圆柱体体积时，测量圆柱体的高度 $h$ 和直径 $D$ ，由函数关系式计算出圆柱体的体积 $V = \frac{\pi D^2}{4} h$ ，由分度值为0.01mm的测微仪重复6次测量直径 $D$ 和高度 $h$ ，测得数据如下：

$D_i/mm$	10.075	10.085	10.095	10.060	10.085	10.080
$h_i/mm$	10.105	10.115	10.115	10.110	10.110	10.115

计算高度 $h$ 和直径 $D$ 的测量平均值得： $D=10.080mm$ ， $h=10.110mm$ ，则体积

$V$ 的测量结果估计值为 $V = \frac{\pi D^2}{4} h = 806.8mm^3$ 。

1. 利用蒙特卡罗方法进行不确定度评定  
分别计算各主要因素引起的不确定度，得：

直径 $D$ 的测量标准不确定度： $u_D = \sigma_D = 0.0048mm$ ；

高度 $h$ 的测量标准不确定度： $u_h = \sigma_h = 0.0026mm$ ；

由仪器说明书获得测微仪的市值范围为 $\pm 0.01mm$ ，取均匀分布。

直径 $D$ 的误差用数列 $\Delta D = [\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_M]$ 表示；

高度 $h$ 的误差用数列 $\Delta h = [\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_M]$ 表示；

测微仪的示值误差用数列 $\Delta s = [\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_M]$ 表示。

一般认为测量误差服从正态分布，则 $\Delta D \sim N(0, 0.0048^2)$ ， $\Delta h \sim N(0, 0.0026^2)$ ， $\Delta s$ 在区间 $[-1, +1]$ 上服从均匀分布。用蒙特卡罗方法对上述误差分布进行仿真抽

样，样本容量为  $M=1000$ ，然后通过下面公式进行误差传递：

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{\partial V}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial V}{\partial D} \Delta s + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta s \\ &= \frac{\pi D h}{2} \Delta D + \frac{\pi D^2}{4} \Delta h + \frac{\pi D h}{2} \Delta s + \frac{\pi D^2}{4} \Delta s\end{aligned}$$

得到  $\Delta V$  数列，可求出其均值和方差，方差即为体积  $V$  的测量标准不确定度。则体积  $V$  测量标准不确定度为  $1.33\text{mm}$ 。

## 2. 利用GUM方法进行不确定度评定

分析测量方法可知，对体积  $V$  的测量不确定度影响显著的因素主要有：高度和直径的测量重复性引起的不确定度  $u_1$ ， $u_2$ ；测微仪示值误差引起的不确定度  $u_3$ 。下面分别计算各主要因素引起的不确定度分量。

直径  $D$  的测量重复性引起的标准不确定度分量  $u_1$ ：

$$u_1 = \left| \frac{\partial V}{\partial D} \right| u_D = 0.77\text{mm}^3$$

高度  $h$  的测量重复性引起的标准不确定度分量  $u_2$ ：

$$u_2 = \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| u_h = 0.21\text{mm}^3$$

直径  $D$  的测量重复性引起的标准不确定度分量  $u_3$ ：

由仪器说明书得测微仪的示值误差范围  $\pm 0.01\text{mm}$ ，取均匀分布，则

$$u_{\text{仪}} = \frac{0.01\text{mm}}{\sqrt{3}} = 0.0058\text{mm}。由此引起的直径和高度的测量标准不确定度为$$

$$u_{3D} = \left| \frac{\partial V}{\partial D} \right| u_{\text{仪}}, \quad u_{3h} = \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| u_{\text{仪}}。由测微仪其示值所引起的体积测量不确定度为$$

$$u_3 = \sqrt{(u_{3D})^2 + (u_{3h})^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi D}{2} h\right)^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} u_{\text{仪}} = 1.04\text{mm}^3。$$

不确定度合成：

因不确定度分量  $u_1$ ， $u_2$  和  $u_3$  相互独立，即  $\rho_{ij} = 0$ ，则体积测量的合成标准

$$\text{不确定度为 } u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1.31\text{mm}^3$$

比较这两种方法的测量结果，利用蒙特卡罗方法的标准不确定度为  $1.33\text{mm}^3$ ，利用GUM方法的标准不确定度为  $1.31\text{mm}^3$ 。两种方法结果基本一致，证明蒙特卡罗方法（误差传递系数已知）进行不确定度评定具有可行性。

#### 4.2.2 误差传递系数未知

根据测量方法的不同，可以分为直接测量和间接测量。直接测量是指利用测量仪器直接测得被测量的测量方法。间接测量是指通过测量与被测量有函数关系的其他量，才能得到被测量值的测量方法。例如上一节的例子，要得到圆柱体体积这个测量量，就需要先测量出直径和高度这两个参数，通过公式得到体积参数。对于间接测量的不确定度评定，按照GUM方法需要根据函数关系式求出传递系数才能进行不确定度评定。如果函数关系式比较复杂或非线性，传递系数无法求出或难以求出，就不能依据GUM给出的方法进行评定，就需要采用新的方法进行不确定度评定，本节就采用蒙特卡罗方法对于误差传递系数未知的情况下进行不确定度评定。仍然以上节中求圆柱体体积例进行介绍。

直径D的误差用数列  $\Delta D = [\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_M]$  表示；

高度h的误差用数列  $\Delta h = [\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_M]$  表示；

测微仪的示值误差用数列  $\Delta s = [\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_M]$  表示。

一般认为测量误差服从正态分布，则  $\Delta D \sim N(0, 0.0048^2)$ ， $\Delta h \sim N(0, 0.0026^2)$ ， $\Delta s$  在区间  $[-1, +1]$  上服从均匀分布。利用蒙特卡罗方法，根据上述分布产生随机数，样本容量M取值1000。则

$$D'_i = \bar{D} + \Delta D_i + \Delta s_i; \quad h'_i = \bar{h} + \Delta h_i + \Delta s_i \quad i=1, 2, \dots, M。$$

得到直径和高度的伪测量数据，代入函数式  $V'_i = \frac{\pi D_i'^2}{4} h'_i$  得到一组容量为M的数组，求得这组数组的期望和方差，方差即为所要求的圆柱体体积的标准不确定度。求得  $u = 1.32 \text{mm}^3$ 。

和上一节的计算结果比较，利用蒙特卡罗方法（已知误差传递系数）的标准不确定度为  $1.33 \text{mm}^3$ ，利用GUM方法的标准不确定度为  $1.31 \text{mm}^3$ ，利用蒙特卡罗方法（未知误差传递系数）的标准不确定度为  $1.32 \text{mm}^3$ 。这三种方法的计算结果具有一致性，都符合精度要求，可以根据实际评定情况进行选择。如果函数关系式较为简单，并且误差传递系数容易求得，通常会采用GUM方法进行不确定度评定，如果函数关系式较为复杂，并且误差传递系数无法求出或难以求出，则采用蒙特卡罗方法进行评定。

形位误差测量属于间接测量，在第三章已分析了具体的形位误差的数学模型，很多误差模型是非线性的，比如圆度的误差模型，此时，利用蒙特卡罗方法的思想问题就变得较为简便。所以把蒙特卡罗方法应用于形位误差的不确定度评定中必定为形位误差的不确定度评定带来了便捷。

### 4.3 利用蒙特卡罗法评定形位误差的测量不确定度

形位误差的测量多是单次测量，因此形位误差的不确定度评定多采用B类评定。如果想采用A类统计方法进行评定，必须要多次测量，这给测量过程带来了较大的工作量，在实际测量中并不可行。上一节介绍的蒙特卡罗方法应用于间接测量中，会使测量不确定度评定简便很多。形位误差测量也属于间接测量，因此若能采用蒙特卡罗方法，找到测量点的分布规律，利用蒙特卡罗伪随机数来模拟实际测量数据，从而得到形位误差的测量不确定度，这种方法简便易行。

根据形位误差的数学模型，假设为  $f = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，利用蒙特卡罗伪随机数的方法产生  $n$  个  $M$  维数组  $[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1M}]$ ,  $[x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2M}]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nM}]$ 。每个数组都服从均值等于测量值  $x_i$ ，方差等于单点标准不确定度  $u_{x_i}$  的正态分布的随机值序列，用这组伪随机数来模拟实际测量量，从而求解出形位误差测量的不确定度。

具体操作如下：

(1) 分析形位误差测量不确定度的来源，判断其分布类型及分布区间，通常不确定度来源主要有坐标点测量不确定度，示值误差引起的不确定度，环境因素等引起的不确定度；

(2) 推导各形位误差的最小二乘模型，确定形位误差模型式中  $n$  个变量的期望值和方差值，期望值即为其测量值，方差值即为其单点不确定度；

(3) 以这  $n$  个变量的期望和方差值生成  $n$  维的随机数组来模拟形位误差测量值，样本的容量为  $m$ ，通常采用大样本来进行形位误差测量不确定度评定，样本容量越大，越能真实的模拟出实际测量值；

(4) 根据以上随机序列，代入形位误差模型，求得  $m$  个形位误差  $f$  的值。根据这组  $f$  的值，构造一个概率分布，判断其分布类型，求出其期望和方差，期望值即为形位误差的值，方差值即为所要求的各形位误差测量的标准不确定度。

利用蒙特卡罗方法评定形位误差的不确定度的示意图如下所示<sup>[39]</sup>：

$x_1, x_2, \dots, x_n$  为决定形位误差的主要参数，蒙特卡罗方法首先要分析这几个参数的测量估计值和测量不确定度，然后产生符合各参数分布状态的随机数，代入形位误差模型，构成  $f$  的概率分布，根据  $f$  的概率分布，求出其期望值和方差，即为所求的形位误差和测量标准不确定度。

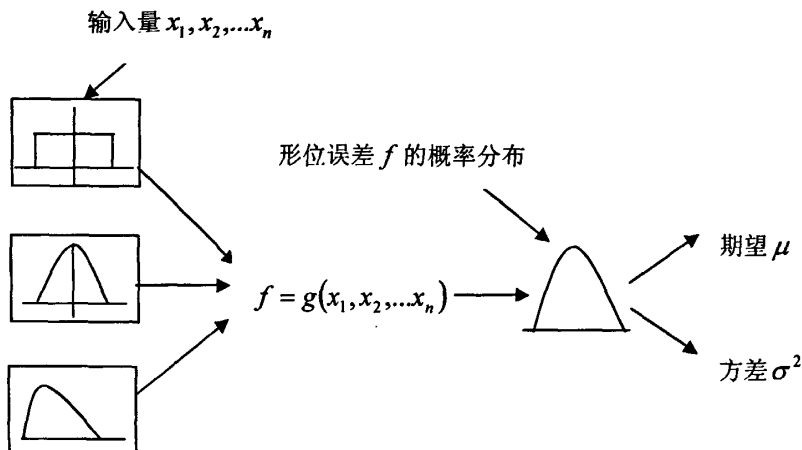


图 4-1 蒙特卡罗方法评定形位误差图示

以圆度为例利用蒙特卡罗方法进行不确定度评定，此圆度评定是在直角坐标系下进行评定的，具体步骤如下<sup>[40]</sup>：

(1) 分析圆度误差测量不确定度的来源，判断其分布类型及分布区间，通常不确定度来源主要有坐标点测量不确定度，其单点测量不确定度可根据2.2.2部分得到；

(2) 由2.3.3知，圆度的最小二乘模型为

$$f = \sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2} - \sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2} \text{ , 其中有 } x_M, y_M, x_L, y_L, a, b \text{ 六个}$$

变量， $x_M, y_M, x_L, y_L$  的测量值可求得，不确定可根据三坐标测量机的不确定度来

源得到，设为  $u_0$ ， $a, b$  的值可根据式 
$$\begin{cases} a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$
 求得，其不确定度为  $\frac{1}{\sqrt{n}} u_0$ 。

(3) 根据这六个变量的期望和方差值生成六维的随机数组来模拟圆度误差  $x_M, y_M, x_L, y_L, a, b$  这六个测量值，样本的容量为  $m$ ，通常采用大样本来进行圆度误差测量不确定度评定，样本容量越大，越能真实的模拟出实际测量值。随机数组的产生式利用MATLAB中随机数生成命令，生成期望分别为

$x_M, y_M, x_L, y_L, a, b$ ，方差分别为  $u_0, u_0, u_0, u_0, \frac{1}{\sqrt{n}} u_0, \frac{1}{\sqrt{n}} u_0$  的正态分布的随机数组：

$$x_{M1}, x_{M2}, \dots, x_{Mm}; \quad y_{M1}, y_{M2}, \dots, y_{Mm};$$

$$x_{L1}, x_{L2}, \dots, x_{Lm}; \quad y_{L1}, y_{L2}, \dots, y_{Lm};$$

$$a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m;$$

(4) 根据以上随机序列，代入圆度误差模型

$$f = \sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - b)^2} - \sqrt{(x_L - a)^2 + (y_L - b)^2},$$
求得m个形位误差  $f$  的值。根据

这组  $f$  的值，构造一个概率分布，判断其分布类型，求出其期望和方差，期望值即为圆度误差的值，方差值即为所要求的圆度误差测量的标准不确定度。

综合以上介绍，可以看出利用蒙特卡罗方法进行形位误差的不确定度评定时，不要求其传递系数和参数间的相关系数，在计算式更为简便。尤其在误差模型为非线性，且参数间相关性难以确定时，利用此方法更显示出其简便性，因此，在精度范围允许的情况下，在形位误差测量不确定度的评定中，重视蒙特卡罗方法的应用具有重要的现实意义。

## 第五章 形位误差测量实验及数据处理

前面三章，分别介绍了形位误差的测量方法、误差评定方法和测量不确定度评定方法。本章通过具体的实验进行形位误差测量不确定度的评定。形位误差包含直线度、平面度、圆度、圆柱度、平行度、同轴度等。本章以直线度和圆度误差为例进行分析，分别使用三坐标测量机和圆度仪进行测量。首先对不确定度来源进行分析，然后求出直线度和圆度误差的值，最后利用两种不同的方法进行测量不确定度评定，得到其测量不确定度并比较这两种方法。

### 5.1 直线度误差的测量及数据处理

#### 5.1.1 直线度误差的测量

使用德国ZEISS公司的MC850型三坐标测量机对某工件的一边进行直线度测量和评定。将被测工件放置于给定的平面XOY内，并且使被测的一边平行于X轴，然后对直线度误差进行测量。被测工件长200mm，在X轴的方向均匀取10个点进行坐标测量，测量结果如下表所示：

表 5-1 直线度误差测量结果

测量点	X 坐标/mm	Y 坐标/mm	测量点	X 坐标/mm	Y 坐标/mm
1	0.2581	-2.8327	6	100.2538	-2.8331
2	20.2594	-2.8333	7	120.2528	-2.8327
3	40.2542	-2.8335	8	140.2586	-2.8331
4	60.2531	-2.8329	9	160.2510	-2.8330
5	80.2580	-2.8328	10	180.2562	-2.8329

#### 5.1.2 不确定度来源分析

本次试验采用的MC850型单边驱动桥式三坐标测量机，其量程范围是 $850mm \times 700mm \times 600mm$ ，该仪器处于良好的工作状态，温度和湿度恒定，因此忽略环境对其的影响。其测量不确定度来源主要有以下几个方面：

##### (1) 重复性引起的不确定度分量：

在直线度的不确定度评定过程中，要考虑三坐标测量机的重复性引起的不确定度。因为在直线度测量时，工件是平行于x轴放置的，直线度误差的主要影响因素是y轴坐标值，因此，只需考虑y轴坐标测量的重复性误差。在直

线度测量范围内取4个点进行重复性误差实验，利用贝塞尔公式  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$ ，求出各点的重复性误差，取最大值作为重复性所引起的不确定度。则y轴坐标测量重复性引起的不确定度分量为  $u_1 = 0.049 \mu\text{m}$ ；

(2) 示值误差引入的不确定度分量：

根据三坐标测量机的产品资料知，示值误差小于  $3 \mu\text{m}$ ，分布状态服从正态分布，不确定度分量为： $u_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} = 1.732 \mu\text{m}$ ；

(3) 测力变形引入的不确定度分量：

由于在实际测量中，各部件都具有较高的刚性，所以测力变形引入的误差近似为零，不确定度分量可以忽略不计，即  $u_3 = 0$ ；

(4) 温度变化所引起的不确定度分量：

本实验是在恒温和恒湿的条件下进行的，温度对其影响很小，因此温度变化所引起的不确定度分量忽略不计，即  $u_4 = 0$ ；

综合以上分析，得直线度的单点测量不确定度为：

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = 1.733 \mu\text{m} \quad (5-1)$$

### 5.1.3 直线度误差的测量数据处理

#### 1. 直线度误差的计算

根据测得数据，首先代入2-1式，求出  $k$  和  $b$ ，即可得最小二乘直线线，然后求出各点到最小二乘直线的距离。各点到最小二乘直线的距离如下表所示：

表 5-2 各点到最小二乘直线的距离

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
结果/ $\mu\text{m}$	0.4	-0.2	-0.4	0.2	0.3	0	0.4	0	0.1	0.2

下图为十个测量点和最小二乘中线的示意图，横坐标表示各点的  $x$  坐标值，纵坐标表示各点的  $y$  坐标值：

由图和表格可得，距离最小二乘直线的最大距离的点和最小距离的点为第一个点和第三个点，即

$$x_M = 0.2581\text{mm}, y_M = -2.8327\text{mm}, x_L = 40.2542\text{mm}, y_L = -2.8335\text{mm}。$$



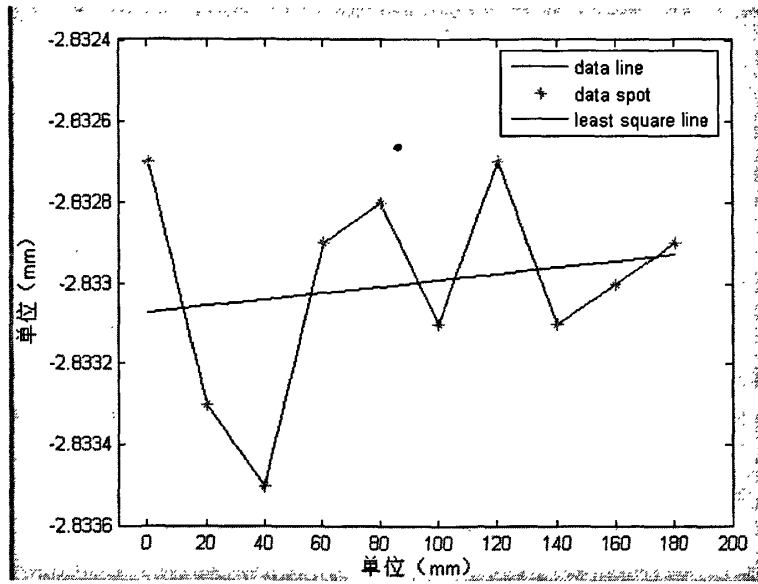


图 5-1 测量点和最小二乘直线示意图

代入直线度误差公式

$$f = d_M - d_L = \frac{y_M - y_L - k(x_M - x_L)}{\sqrt{1 + k^2}} = 0.8 \mu\text{m} \quad (5-2)$$

## 2. 基于GUM方法的不确定度评定

已知:  $u_0 = 1.733 \mu\text{m}$ ,  $k \approx 0$ ,  $b = -2.8331 \text{mm}$ ,

$$x_M = 0.2581 \text{mm}, y_M = -2.8327 \text{mm}, x_L = 40.2542 \text{mm}, y_L = -2.8335 \text{mm}$$

代入误差传递公式:

$$\frac{\partial f}{\partial x_M} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y_M} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_L} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y_L} = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}} = -1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{x_M - x_L}{\sqrt{1+k^2}} = -39.9961;$$

代入单点测量不确定度计算公式:

$$u_{x_M} = u_{x_L} = u_{y_M} = u_{y_L} = u_0 = 1.733 \mu\text{m}$$

$$u_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial k}{\partial y_i}\right)^2} u_0^2 = 0.0095 \mu\text{m}$$

式中  $\frac{\partial k}{\partial y_i} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j - nx_i}{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n x_j^2}$ ，把所得数据代入3-2式，得：

$$u_f = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_M} u_{x_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_L} u_{x_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_M} u_{y_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_L} u_{y_L}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k} u_k\right)^2 \right\}^{1/2} = 2.4808 \mu\text{m}$$

(5-3)

### 3. 基于蒙特卡罗方法的不确定度评定

利用蒙特卡罗方法进行直线度评定时，需首先求得影响直线度误差的各参数的值和不确定度。根据直线度误差模型  $f = d_M - d_L = \frac{y_M - y_L - k(x_M - x_L)}{\sqrt{1+k^2}}$ ，可

知影响直线度误差的参数有  $x_M, y_M, x_L, y_L, k$ 。根据前面可知

$$x_M = 0.2581\text{mm}, y_M = -2.8327\text{mm}, x_L = 40.2542\text{mm}, y_L = -2.8335\text{mm}, k \approx 0;$$

$$u_{x_M} = u_{x_L} = u_{y_M} = u_{y_L} = 1.733 \mu\text{m}, u_k = 0.0095 \mu\text{m}。$$

因此，利用MATLAB中normrnd函数生成服从正态分布的五维随机数组，每一维数组的期望分别为各参数的测量值，方差分别为各参数的不确定度，并且服从正态分布，即：

$$[x_{M_1}, x_{M_2}, \dots, x_{M_m}] \sim N(0.2581\text{mm}, 1.733 \mu\text{m});$$

$$[y_{M_1}, y_{M_2}, \dots, y_{M_m}] \sim N(-2.8327\text{mm}, 1.733 \mu\text{m});$$

$$[x_{L_1}, x_{L_2}, \dots, x_{L_m}] \sim N(40.2542\text{mm}, 1.733 \mu\text{m});$$

$$[y_{L_1}, y_{L_2}, \dots, y_{L_m}] \sim N(-2.8335\text{mm}, 1.733 \mu\text{m});$$

$$[k_1, k_2, \dots, k_m] \sim N(0, 0.0095 \mu\text{m})。$$

样本容量为m，本次试验m取10000。由于样本很大，随机数列不一一列出。

根据所得随机数，代入  $f = d_M - d_L = \frac{y_M - y_L - k(x_M - x_L)}{\sqrt{1+k^2}}$  式，即可求出10000个

直线度误差的值，构建直线度误差概率分布，其概率分布根据MATLAB中的直

方图（横轴为直线度误差的值，纵轴为其分布概率）来构建，求出这组数据的期望和方差值，即为直线度测量的直线度误差和标准不确定度。

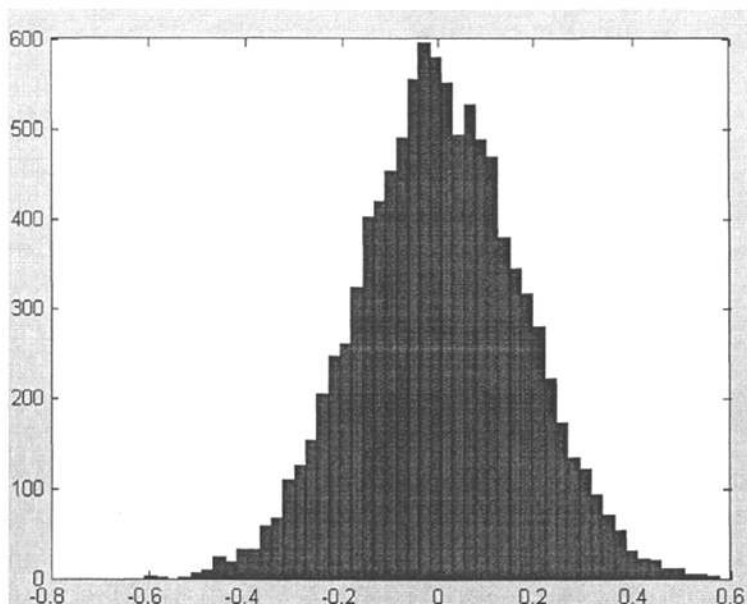


图 5-2 直线度误差的概率分布

求得： $f = 0.8\mu\text{m}$ ， $u_f = 2.4955\mu\text{m}$ 。

综上，使用两种方法求得直线度误差的测量不确定度，比较这两种方法所得到的结果：

表 5-3 两种不确定度评定方法的比较

	直线度误差/ $\mu\text{m}$	直线度测量的不确定度/ $\mu\text{m}$
GUM 方法	0.8	2.4804
蒙特卡罗方法	0.8	2.4955

## 5.2 圆度误差的测量及数据处理

### 5.2.1 圆度误差的测量

在科技楼中心实验室，使用Talyrond 365型圆度仪对某工件的圆截面进行测量和评定。该圆截面半径为38.1150mm，在被测工件圆截面的圆周上均匀取72个点测量其半径变化量 $r$ ，测量值 $r, \theta$ 服从正态分布。测量结果如表5-4所示。

表 5-4 圆度误差测量结果

角度 /°	径向 变化 /μm	角度 /°	径向 变化 /μm	角度 /°	径向 变化 /μm	角度 /°	径向 变化 /μm	角度 /°	径向 变化 /μm
0	-0.879	75	0.058	150	0.436	225	1.384	300	0.547
5	0.167	80	-1.248	155	0.648	230	-0.146	305	-0.485
10	0.985	85	-1.434	160	1.697	235	0.493	310	-1.985
15	0.681	90	-2.695	165	2.930	240	-0.606	315	-1.782
20	0.276	95	-2.222	170	2.109	245	-0.629	320	-1.839
25	3.032	100	-2.264	175	1.094	250	-0.010	325	-2.082
30	3.269	105	-2.226	180	0.422	255	0.966	330	-2.478
35	2.567	110	-2.863	185	1.225	260	1.790	335	-1.472
40	3.013	115	-0.936	190	0.607	265	1.634	340	-1.477
45	1.745	120	-1.153	195	-0.443	270	2.522	345	-1.821
50	2.354	125	-0.713	200	-1.110	275	0.335	350	-0.827
55	1.962	130	-1.287	205	-2.400	280	1.736	355	0.008
60	3.338	135	-0.365	210	-1.452	285	0.126		
65	1.022	140	0.776	215	-2.132	290	0.048		
70	-0.080	145	0.028	220	-0.997	295	-0.166		

### 5.2.2 不确定度来源分析

圆度仪有工作台旋转型和轴旋转型两种类型，本次试验采用的Talyrond 365型圆度仪是工作台旋转型的，该仪器处于良好的工作状态，温度和湿度恒定，忽略环境对其的影响。其测量不确定度来源主要有以下几个方面：

(1) 重复性引起的不确定度分量：

在圆度的不确定度评定过程中，要考虑圆度仪的重复性引起的不确定度。对圆度影响的主要是半径变化量，因此，需考虑半径变化量测量的重复性误差。在圆度测量范围内取4个点进行重复性误差实验，每个点分别测量八组半

径变化量，利用贝塞尔公式  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$ ，求出各点的重复性误差，取最大值。

则半径变化量测量重复性引起的不确定度分量为  $u_1 = 0.073\mu\text{m}$ ；

(2) 示值误差引入的确定度分量：

根据圆度仪的相关资料知，示值误差小于 $0.01\ \mu\text{m}$ ，分布状态服从正态分布，

不确定度分量为： $u_2 = 0.1/\sqrt{3} = 0.00577\ \mu\text{m}$ ；

(3) 测力变形引入的不确定度分量：

由于对圆度测量的测量点是呈对称分布的，所以其相对误差近似为零，可以忽略不计；

(4) 圆度仪径向误差引入的不确定度分量：

根据圆度仪的相关资料知，圆度仪的径向误差小于 $0.05\ \mu\text{m}$ ，分布状态为均匀分布， $k$ 取 $\sqrt{3}$ ，不确定度分量为： $u_3 = 0.05/\sqrt{3} = 0.029\ \mu\text{m}$ ；

(5) 基准回转轴线与Z轴导轨的平行度引入的不确定度分量：

根据圆度仪的相关资料知，圆度仪基准回转轴线与Z轴导轨的平行度误差小于 $0.30\ \mu\text{m}$ ，分布状态为均匀分布， $k$ 取 $\sqrt{3}$ ，不确定度分量为：

$$u_4 = 0.30/\sqrt{3} = 0.173\ \mu\text{m}。$$

根据资料和以上分析得它的单点测量不确定度为

$$u_r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = 0.190\ \mu\text{m}, \quad u_\theta = 20'' = \frac{\pi}{180^2}。$$

### 5.2.3 圆度误差的测量数据处理

#### 1. 圆度误差的计算

首先把圆度误差测量数据代入式  $\begin{cases} a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$  中，得到圆心坐标。各数据代

入点到圆心距离公式可得，各点距离圆心的距离。图5-3表示各测量点和拟合的最小二乘圆。

由图5-3可以看出，距离圆心的最远和最近的点分别为第13个点和第23个点，即：

$$r_M = 3.338\ \mu\text{m}, \theta_M = 60^\circ, r_L = -2.863\ \mu\text{m}, \theta_L = 110^\circ$$

代入圆度误差公式

$$f = R_{\max} - R_{\min} = r_M - a \cos \theta_M - b \sin \theta_M - r_L + a \cos \theta_L + b \sin \theta_L = 6.2007\ \mu\text{m}$$

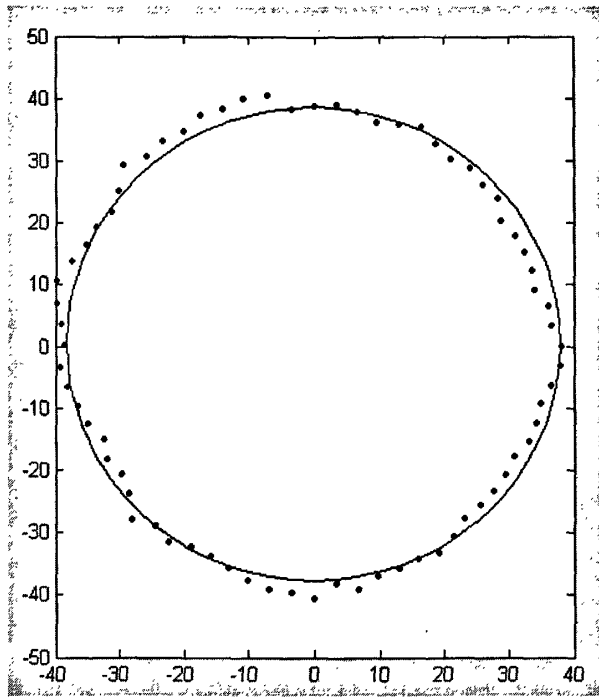


图 5-3 测量点和最小二乘圆的示意图

## 2. 基于GUM方法的不确定度评定

由5.2.2知,  $u_r = 0.190\mu\text{m}$ ,  $u_\theta = 20'' = \frac{\pi}{180^2}$ 。

$$r_M = 3.338\mu\text{m}, \theta_M = 60^\circ, r_L = -2.863\mu\text{m}, \theta_L = 110^\circ$$

代入下式误差传递公式和单点测量不确定度计算公式, 可得误差传递系数和单点测量不确定度, 代入

$$u_f = \sqrt{\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial r_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial r_L} \right)^2 \right] u_r^2 + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_L} \right)^2 \right] u_\theta^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 u_a^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 u_b^2} = 0.2687\mu\text{m}$$

## 3. 基于蒙特卡罗方法的不确定度评定

利用MATLAB中normrnd函数生成服从正态分布的六维随机数组, 样本容量为m, 本次试验m取10000。由于样本很大, 随机数列不一一列出。根据所得随机数, 求出10000个f的值后, 构建圆度误差概率分布, 其概率分布根据MATLAB中的直方图(横轴为圆度误差的值, 纵轴为其分布概率)来构建, 求出这组数据的期望和方差值, 即为圆度测量的圆度误差和标准不确定度。

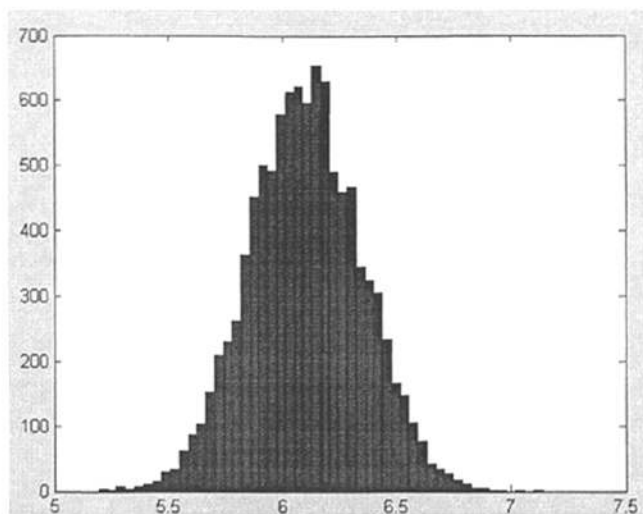


图 5-4 圆度误差的概率分布

求得  $f = 6.2007 \mu\text{m}$ ， $u_f = 0.2718 \mu\text{m}$ 。

综上，利用两种方法求得圆度误差的测量不确定度，比较这两种方法所得到的结果：

表 5-5 两种不确定度评定方法的比较

	圆度误差/ $\mu\text{m}$	圆度测量的不确定度/ $\mu\text{m}$
GUM方法	6.2007	0.2687
蒙特卡罗方法	6.2007	0.2718

综合以上两个实验，对于测量不确定度的评定都采用了GUM方法和蒙特卡罗方法。这两种方法的结果相近，蒙特卡罗方法用于不确定度评定完全可以满足精度要求，这两种方法都是可行的。比较这两种方法的优缺点，传统方法，也就是GUM方法，完全依据国际标准来进行评定，评定结果精度较高，但在误差模型非线性，参数间相关系数难以求出时，很难得到评定结果。蒙特卡罗方法使用起来计算简便，借助于计算机软件很容易实现，简化了传统方法的不确定度评定，尤其在误差模型非线性，参数间相关性难以确定时，更显现出其简便的优势。在精度要求允许的范围内，可以较多采用此方法。

## 第六章 总结与展望

### 6.1 总结

本文介绍了形位误差不确定度的概念、分析了形位误差测量不确定度来源、形位误差及其测量不确定度如何进行评定。在研究了形位误差的测量方法和评定之后，分别基于GUM和蒙特卡罗方法进行形位误差的不确定度的评定并对评定结果进行比较。

本文主要研究内容如下：

(1) 学习了各种形位误差的测量原理和测量方法，并且分析了测量方法和测量环境等对形位误差不确定度产生的影响，并进行不确定度合成，从而得到直接测量点的单点测量不确定度。

(2) 在直角坐标系下建立各形位误差的最小二乘数学模型，对于回转类的形位误差，圆度误差和圆柱度误差，不仅建立了其直角坐标系下的最小二乘数学模型，还建立了其在极坐标系下的最小二乘数学模型。

(3) 根据不确定度评定表示指南（GUM）进行不确定度评定。计算了形位误差中各参数的单点不确定度、传递系数和参数间的相关性，最后利用不确定度合成公式求出形位误差的标准不确定度。

(4) 探讨利用其他方法来进行形位误差的不确定度评定。研究了蒙特卡罗方法的原理，并利用蒙特卡罗方法，产生随机数来构成一个概率分布来仿真测量值，然后进行不确定度的评定。

(5) 用实验来验证所得到的理论结果。使用三坐标测量机和圆度仪等测量设备，对各形位误差进行测量，然后利用MATLAB编程对测量结果进行处理，得到不同方法的测量不确定度，并比较不同方法的优缺点。

### 6.2 工作展望

由于本课题所涉及的范围比较广，包括形位误差的测量、形位误差的数学建模和形位误差的测量不确定度评定方法，时间仓促且本人能力有限，还有很多工作需要进一步深入开展：

(1) 本文只是对通常采用的形位误差测量方法进行不确定度评定。对于不是采用坐标测量法的形位误差就无法用本文所建立的模型来进行不确定度评定，所以说对于采用其他方法进行测量的形位误差的不确定度需要进一步研究。

(2) 对于形位误差的评定方法，不仅有最小二乘法，还有最小区域法以及对于不同形位误差还有不同的方法。本文是针对最小二乘原理进行数学建模，后续还可以对采用其他方法进行形位误差评定时所产生的测量不确定度进行研究。



(3) 本文对基于蒙特卡罗方法的形位误差的测量不确定度评定进行了探索, 并比较了这种方法的优缺点。对于形位误差的处理不确定度评定, 还可以尝试其他的方法, 比如遗传算法等。故还需要进一步探索, 找到更为简便且满足精度要求的方法。

(4) 本文采用MATLAB对测量结果进行数据处理, 直接得到所要的形位误差的测量不确定度的值。还需要进一步开发出一套直接用于测量仪器如三坐标测量机和圆度上的软件系统, 实现更为便捷的测量。

## 参考文献

- [1] 甘永立. 形状和位置误差检测[M]. 国防工业出版社, 1995
- [2] 国家质量技术监督局计量司, 测量不确定度评定与表示指南[M]. 中国计量出版社, 2000
- [3] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 机械工业出版社, 2004
- [4] 刘智敏. 不确定度及其实践[M]. 中国标准出版社, 2001
- [5] 侯学锋, 黄富贵, 田树耀. 形位误差测量不确定度研究状况[J]. 工具技术, 2008 (7): 7~9
- [6] Tohru Kanada and Soichiroh Suzuki. Application of several computing techniques for minimum zone straightness[J]. Precision Engineering , 1993 (15) :135~149
- [7] Chia-Hsiang Meng , Hong-Tzong Yau , Gwan-Ywan lai. Statistical evaluation of tolerance using discrete measurement data[J]. Advances In Integrated Product Design and Manufacturing , 1996 , 47 :1351
- [8] P Bourdet , C Lague , F Leveaux. Effects of data point distribution and mathematical model on finding the best-fit sphere to data[J]. Precision Engineering , 1993 , 15 (31) :150~157
- [9] S D Phillips , B Borchardt , W T Esteler *et al* . The estimation of measurement uncertainty of small circular features measured by coordinate measuring machine[J]. Precision Engineering , 1998 , 22 (2) :87~99
- [10] Woncheol Choi , Thomas R Kurfess. Uncertainty of extreme fit evaluating for three-dimensional measurement data analysis[J]. Computer-aided Design , 1998 , 31 (7) :54~57
- [11] E Cappello. The effect of sampling in circular substitute geometries evaluation[J]. International Journal of Machine Tool & Manufacture , 1999 (39) :55~85
- [12] F M M Chan. The influence of sampling strategy on a circular feature in coordinate measurement[J]. Measurement , Vol. 19.No. 2 (1996) :73~81
- [13] P.B.Dhanish, Jose Mathew. Effect of CMM point coordinate uncertainty on uncertainties in determination of circular features[J]. Measurement 39(2006):522~531
- [14] Changcai Cui, Shiwei Fu, fugui Huang, Research on the uncertainties from different form error evaluation methods by CMM sampling[J]. Int J Adv ManufTechnol(2009)43:136~145
- [15] Defen Zhang, Paul G.Maropoulos, Martyn Hill. Random uncertainty

- propagation in estimates of sphere parameters from coordinate measurements[J], international journal of machine tools & manufacture, Volume 46, Issues 12-13, October 2006, Pages 1362-1368
- [16] 黄富贵, 崔长彩. 评定直线度误差的最小二乘法与最小包容区域法精度之比较[J]. 光学精密工程, Vol.15 No.6
- [17] 李淑娟. 基于坐标测量数据的形状误差评定软件包的开发[D]. 西安理工大学学位论文, 2006
- [18] 迟彦孝, 王守城. 直线度误差的评定方法及其数学证明[J]. 机械制造与研究, 2003, (5):14~16
- [19] 张昉. 平面度误差的最小二乘法分析[J]. 机械制造与研究, 2002, (3):17~19
- [20] 程飞月. 计算圆度误差的几种方法[J]. 中国水运, 2006 (5)
- [21] JJF 429-2000, 圆度、圆柱度测量仪检定规程[S]
- [22] 侯宇. 坐标测量机圆度评定的一种新算法[J]. 计量技术, 1993, (10):1-3
- [23] 徐国旺, 廖明潮. 拟合圆的几种方法[J]. 武汉工业学院学报, 2002, (4):104~106
- [24] 陈立杰, 张镭, 张玉. 直角坐标采样时的圆柱度误差数学模型[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2005, (7):677~679
- [25] 阎荫棠, 王秀兰. 平行度测量总不确定度的评估实例曹[J]. 计量技术, 1996.2:37~38
- [26] 陈立杰, 张镭, 张玉. 同轴度误差的数模研究[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2007, Vol.28 No.4:549~551
- [27] 杨金霞. 基于坐标测量数据的位置误差评定软件包的开发[D]. 西安理工大学学位论文, 2008
- [28] 张国雄. 三坐标测量机[M]. 天津大学出版社, 1999
- [29] 王金星, 蒋向前, 徐振高, 李柱. 空间直线度坐标测量的不确定度计算[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2005, Vol.22 No.12: 1~3
- [30] 杨将新, 茅健, 曹衍龙, 徐旭松. 基于新一代GPS体系的直线度不确定度研究[J]. 计量学报, 2008, (1): 14~16
- [31] 王金星, 蒋向前, 马利民, 徐振高, 李柱. 平面度坐标测量的不确定度计算[J]. 中国机械工程, 2005, Vol.16 No.19: 1701~1703
- [32] 潘秀亮, 王雨海. 圆度仪在形状和位置误差测量中的应用[J]. 国防技术基础, 2009, (3): 24~30
- [33] 段留英, 刘亚民, 许勇. Talyrond 265圆度仪使用技巧[J]. 计量技术, 2004, (10): 55~56
- [34] 侯学锋, 黄富贵, 田树耀. 圆度最小二乘评定结果的不确定度估计[J]. 工具技术, 2008 (42): 102~104

- [35] 张根法. 圆柱度的测量不确定度分析与评定[J]. 现代车用动力, 2004 (1): 50~51
- [36] 阎荫棠, 王秀兰. 平行度测量总不确定度的评估实例[J]. 计量技术, 1996 (2): 37~38
- [37] 田树耀, 黄富贵, 侯学锋. 一种新的同轴度误差评定方法及其误差分析[J]. 工具技术, 2008 (42): 82~85
- [38] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海科学技术出版社
- [39] 陈晓怀, 薄晓静, 王洪涛. 基于蒙特卡罗方法的测量不确定度合成[J]. 仪器仪表学报, 2005 (suppl.1)
- [40] Jean-Pierre Kruth, NickWan Gestel et al. Uncertainty determination for CMMs by Monte Carlo simulation integrating feature form deviations[J]. CIRP Annals–Manufacturing Technology 58(2009)
- [41] 苏金明, 阮沈勇. Matlab实用教程[M]. 电子工业出版社, 2005
- [42] 陈永鹏. 基于MATLAB优化工具箱的机械产品形状误差评定系统研究[D]. 四川大学硕士学位论文, 2003

## 攻读硕士学位期间发表的论文

1. 连慧芳, 陈晓怀. 基于蒙特卡罗方法的圆度测量的不确定度评定. 《工具技术》已录用