

摘 要

混沌同步是很活跃的一个研究领域，但迄今为止提出的许多实现混沌同步的方法多限于线性控制方法。第三章在介绍非线性反馈方法原理的基础上，应用非线性控制的基本思想及 Lyapunov 函数方法，将解析法与数值法相结合，分别对气象学中著名的 Hadley 环流和物理学中的 LFRBM 系统进行研究，找到了一类非线性反馈函数，实现了混沌自同步，并利用 Mathematica 软件进行仿真实验，数值结果说明了该方法的有效性。第四章讨论非线性动力系统的时滞全局混沌同步。考虑到接收系统存在时滞的问题，第一节对 WINDMI 系统进行时滞全局混沌同步，以 Lyapunov 稳定理论和矩阵论为基础，提出了一种切实可行的方案，使得响应系统在 t 时刻的状态渐近地趋向于驱动系统在 $t-\tau$ 时刻的状态。并用 Mathematic 软件给出了数值模拟结果，证明了该方法的有效性。第二节讨论时滞系统的时滞同步情况，以 WINDMI 为例给出数值仿真结果。第五章运用双向耦合同步方案对 WINDMI 系统进行了同步研究，采用简单的线性耦合方式，讨论其复杂的混沌同步行为，给出了数值仿真结果。

关键词： Hadley 系统，LFRBM 系统，非线性反馈法，
混沌自同步，WINDMI 系统，轨道时滞，线性反馈法，
全局混沌同步

ABSTRACT

Chaos synchronization is an active research field. But the most offered methods for realizing chaos synchronization are confined in linear control methods. In the third chapter, using the methods of nonlinear feedback functions and Lyapunov functions and combining analytical with numerical methods, the nonlinear feedback methods are introduced and the synchronizations of chaos in Hadley system of aerographs and LFRBM system of physics are realized. Some of nonlinear feedback functions are constructed. The Mathematical software is used to prove the effectiveness of this method. The forth chapter discusses the global time-delay synchronization of nonlinear dynamical system. in the first section, we addresses a practical issue in chaos synchronization of WINDMI system which is based on the Lyapunov stabilization theory and matrix measure, such that the state of the slave system at time t is asymptotically synchronizing with the master at time $t - \tau$. The Mathematical software is used to prove the effectiveness of this method. The second section discusses the synchronization with channel time-delay for chaotic time-delay system, taking WINDMI as example gives the numerical result. In the fifth chapter, the synchronization between two WINDMI systems with bidirectional coupling is studied. We apply simple linear-coupled method to discuss the complex behavior of the system and give the numerical result.

KEY WORDS: Hadley system, LFRBM system, nonlinear feedback functional method, Self-Synchronization of chaos, WINDMI system, channel time-delay, global chaos synchronization

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学位保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权江苏大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

学位论文作者签名：王復霞

2005年3月30日

指导教师签名：

2005年3月30日

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已注明引用的内容以外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：王俊霞

日期：2005年 3月 30日

第1章 绪论

1.1 本课题的研究背景

所谓混沌是指在确定性系统中出现的一种貌似无规则、类似随机的现象,是非线性动力学系统所特有的一种运动形式,它广泛地存在于自然界诸如物理、化学、生物学、地质学以及技术科学、社会科学等各种科学领域。一般而言,混沌现象隶属于确定性系统而难以预测,隐含于复杂系统但又不可分解,以及呈现多种“混乱无序”却又颇有规则的图像。产生混沌的机制往往是简单的非线性,是丝毫不带随机因素的固定规则。由混沌所表示的无序和不规则状态指出了在确定性系统中的随机现象,由事物的混沌现象又揭示了在自然界和人类社会中普遍存在着确定性和随机性的统一,有序和无序的统一,正是这种在确定性和随机性之间的由此及彼的桥梁作用,使得混沌学被誉为 20 世纪科学发展的第三个里程碑。从数学上讲,对于确定的初始值,由动力系统就可以推知该系统长期行为甚至追溯其过去性态。但在 20 世纪 60 年代,美国气象学家 Lorenz 在研究大气时发现,当选取一定参数的时候,一个由确定的三阶常微分方程组描述的大气对流模型,变得不可预测了,这就是有趣的“蝴蝶效应”。在研究的过程中, Lorenz 观察到了这个确定性系统的规则行为,同时也发现了同一系统出现的非周期无规则行为。通过长期反复地数值试验和理论思考, Lorenz 揭示了该结果的真实意义,在耗散系统中首先发现了混沌运动,这为以后的混沌研究开辟了道路。

长期以来人们觉得混沌是不可控的,不可靠的,因而是无法应用的怪物,在应用及工程领域中总被回避和抵制。但是上世纪九十年代以来国际上混沌控制的突破性进展,由此激发起来的理论与实验应用研究的蓬勃开展,使混沌的可能应用出现了契机,为人们展现了十分诱人的应用与发展的美好前景。

混沌控制主要是指对混沌这种复杂,“麻烦”现象的抑制,是由美国马里兰大学物理学家 Ott, Grebogi 和 Yorke 从理论上提出了参数小微扰方法(简称为 OGY 方法),使混沌控制引起了世界性的广泛关注。同年, Ditto 及其同事很快利用 OGY 方法首次在一个物理系统上,即对磁弹性体混沌系统实现了周期一

的稳定控制。这些先驱性的工作，立即激起了混沌控制的研究热潮。在自然界及实验室里，由于学科、领域、部门的不同，非线性系统多种多样，混沌行为千奇百怪，相应的混沌控制及其应用也是多彩多姿。迄今，混沌控制的目标有两种：一种是基于在混沌奇怪吸引子内存在无穷多的周期轨道，控制的目标是对其中某个不稳定周期轨道进行有效的稳定控制，根据人们的意愿逐一控制所需的周期轨道，该控制的特点是不改变系统中原有的周期轨道而只是将轨道固定，优点是可以把系统从混沌状态控制在周期轨道上，而且不改变系统的结构，具有良好的轨道跟踪能力和稳定性，缺点是要有一个目标函数或给定轨道，实现起来比较困难；另一种控制目标则不要求必须控制原系统中的周期轨道，而只要通过可能的策略，方法及途径，达到有效控制得到我们所需的周期轨道即可，或抑制掉混沌行为，即通过对系统的控制获得人们所需的新的动力学行为，包括各种周期态及其他图样等，这类控制的优点是设计简单，不需特定轨道，易于实现，缺点是无法确保控制过程的稳定性。从实现控制的原理上可分为反馈控制和无反馈控制。反馈控制分为：参数微扰 OGY 法及 OGY 的各种改进法；偶然正比技术(OPF)法；跟踪法；连续变量反馈法；正比变量脉冲反馈；线性和非线性反馈；直接反馈法；变量反馈法等等。无反馈控制分为：自适应控制法；参数共振法；神经网络法；人工智能法；外加强迫法；混沌信号同步法等等。

在自然界及实验室里存在着大量的同步现象，并有相当大的普遍性。所谓同步，通俗地说就是指动态系统中步调一致的现象。但混沌系统又有一特点，即：在两个完全相同的混沌系统中，当它们的初始条件有一微小差异时，两系统的运动轨迹在同一相空间将会变得毫不相关。因此，许多人认为混沌系统要想达到同步似乎是完全不可能的。在通过长期不懈的研究中，很多事实打破了传统的观念。在科学史上，最早观察到的同步现象是在 1665 年，荷兰物理学家惠更斯在一次实验中偶然看到两个并排钟摆的振荡居然达到了完全同步。正是这一发现开辟了数理科学中的一个分支——耦合振子理论，推动了人们对自然界中相当普遍的同步现象及其机理，尤其是生物体内外的同步现象的研究。但是发现混沌同步现象，却是 20 世纪 90 年代初的事情，1990 年美国海军实验室的学者 Pecora 和 Carroll 在电子学线路的设计实验中首次观察到了混沌同步的现象。他们发现一个混沌系统的某些相同的子系统在特定的条件下可以做到相

互同步，这里的两个系统同步，是指一个系统的轨道将收敛于另一个系统轨道的同一值，它们之间始终保持步调一致，并且这种同步是结构稳定的。他们在理论上提出了同步原理，极大地推动了混沌同步的理论研究，奠定了混沌同步研究的理论基础。

混沌同步总体上来说大致可以分为两种类型，即驱动—响应同步与控制同步。所谓驱动—响应同步就是指同步的两个系统之间存在着驱动—响应关系，或称主役关系。这种类型的同步方法有自同步法和主动—被动同步法等；所谓控制同步就是指从控制论的观点出发，通过对非线性系统引入某种控制律，以改变受控系统轨道的演变，使受控系统的运动状态稳定到人们期望的状态上。这种类型的同步方法有线性反馈法和自适应控制法等。

混沌同步从总体上来说属于混沌控制的范畴。根据目前的文献报道，在混沌同步中应用较多的有如下几种类型：第一种类型是 1990 年 Pecora-Carroll 提出的驱动-响应同步方案。该类型的最大特点是同步的两个子系统之间存在驱动与响应关系，响应行为取决于驱动系统，而驱动系统的行为与响应系统无关。这种类型的同步具有原理简单，思路清晰，实用性强的优点。1991 年，Pecora 和 Carroll 应用该方案实现了基于 Mewcomb 等人研究的三阶自治电路产混沌同步，1992 年和 1993 年，Oppenheim 和 Cuomo 采用 Pecora-Carroll 同步方案设计并实现了基于 Lorenz 系统的保密通讯实验。第二种类型是耦合同步方案。1994 年，美国学者 Roy 及日本学者 Sygawara 等人分别独立地从实验中证实了耦合激光阵列中的同步现象，Kapitaniak 和 Chua 等人也用相互耦合的方法使两个 Chua 氏电路达到了混沌同步。第三种类型是由 K. Pyragas 提出的连续变量微扰反馈方案。后来他与 Tamasevicius 又从实验上进一步验证了此法用于两个混沌系统的同步行之有效。第四种类型为 Huberman 和 Lumer 在 1990 年提出的自适应控制方案。这种方法引进了可得到的系统参数的变化，所有的系统变量自由地演化，没有必要知道动力学吸引子的详细知识。1994 年，John 和 Amitkar 对 Huberman 和 Lumer 所提出的自适应控制方法进行了改进，使得非线性系统通过施加这种控制机制，不但可以实现处于稳定的周期或不动点的系统同步，同时也可以使处于不稳定的周期，如混沌系统控制同步。计算机模拟结果证明此法对三阶 Lorenz 系统是有效的。1996 年，Leon O. Chua 及 Tao Yang 等人运用

自适应控制算法, 实现具有时变参数及时变信道的两个蔡氏电路的混沌同步, 同时指出自适应控制对实际通讯系统的时变信道及时变参数可以做出有益的补偿。1997年, Alexander. L. Fradkov 应用自适应控制的梯度算法实现了参数未知的混沌系统的控制同步。这无疑更加激起了人们对混沌同步应用研究的极大兴趣。另外还有噪声感应同步, 主动—被动同步等。由于超混沌吸引子的高度不稳定性及其结构的复杂性, 实现超混沌系统同步的难度之大, 可想而知。

1.2 本课题的研究现状

充分利用和发展非线性系统理论中的控制方法并将其应用于控制混沌已取得很好的效果。目前研究和应用的控制方案, 包括输送控制的新发展参数开闭环控制或者是镇定控制的一般形式, 控制机制都比较简单, 均为局部线性反馈控制, 充分应用非线性系统理论(包括随机自适应控制和人工神经网络)并综合利用混沌的特点(初值的敏感性, 各态历经性和吸引子几何结构等)尚有待深入研究。

混沌同步也属于混沌控制的范畴, 近年来竞争最激烈的应用研究是将混沌同步用于保密通讯中。已经发现, 当秘密通讯的双方都有完全相同的混沌电路时, 在特定的条件下可以实现秘密信号从发射机的编码到接收机的解码的全过程信息解密, 即达到了两个系统的混沌同步。这里两个系统的同步, 是指一个系统的轨道将完全收敛于另一个系统轨道的同一值, 它们之间将始终保持步调一致, 并且这种步调是结构稳定的。为此, Pceora 和 Carroll 研制了一种能产生混沌的非线性电路, 并可以分成一个稳定的子系统及一个不稳定的子系统, 然后, 把具有负的 Lyapunov 指数的稳定部分复制成一个响应系统, 而原系统称为驱动系统, 这样响应系统是稳定的而且是驱动系统的复制品, 其轨道就不受初始条件微小波动的影响, 而将与驱动系统收敛于同一轨道。这样将非线性映射所产生的混沌序列作为载波, 把有用的信号作为调制信号并混合在混沌信号中发射出去; 在接收端, 利用混沌序列的发生规则从接收信号中提取混沌载波, 再经过简单的信号处理恢复出有用的信号。

混沌同步化与控制混沌关系密切, 理论和实验研究都表明采用反馈和自适应控制可以实现混沌同步化。事实上, OGY 方法的一种变形可控制混沌而产生

任意非周期轨道,进行稳定性分析和利用压缩映像原理论证都表明控制混沌和混沌同步有相同的数学基础。此外,控制混沌的逆问题,即瞬态混沌向混沌的转化和混沌的保持也有待研究。另一类重要的问题——湍流的反馈控制也与控制混沌相关。控制混沌的应用特别值得重视,大量研究表明混沌无处不在,如存在于多种工程系统:航天器姿态动力学、车辆动力学、船舶晃动动力学、机床动力学等,也存在于物理、化学、生物、经济等自然系统与社会系统。混沌控制都具有广阔的应用前景。此外,混沌和混沌控制在数据分析和信息处理中更具有直接的应用,已受到广泛重视。随着控制混沌方法的完善和普及,它的应用领域也在不断的扩大和深入。

1.3 本文的研究内容及意义

本文对非线性动力系统的混沌同步问题进行讨论,主要分三个部分:

第一部分,我们在第三章讨论用非线性反馈法实现混沌系统自同步。完全相同的动力系统耦合后的动力系统,近年来已被广泛、透彻地研究并发现了其丰富的动力学行为,其中最常见的行为之一是:当耦合参数满足一定条件时两个混沌系统能达到完全同步。在系统参数固定的情况下,耦合方式以及耦合参数的变化对系统的同步行为起着很大的影响。近年来,混沌同步的研究得到了迅速发展,但迄今为止已经提出的许多实现混沌同步的方法多限于线性控制方法。近年来非线性控制正在兴起,特别是非线性反馈控制,它不仅应用于混沌控制,而且还可以应用于混沌同步,因此已经成为人们关注的一个重要研究方向。为此,我们应用非线性反馈控制的基本思想分别对 Hadley 系统和 LFRBM 系统混沌同步进行研究,讨论其复杂的混沌同步行为,最后给出数值仿真结果。我们感兴趣的是,在系统达到完全同步时耦合参数的具体取值范围。

第二部分,我们在第四章讨论了非线性动力系统的全局时滞混沌同步。本章分二节,第一节提出了带有常数延迟的混沌同步的一种方案,应用反馈控制的基本思想对 WINDMI 系统混沌同步进行研究,给出数值仿真结果。理论分析和数值计算结果表明,该方法具有同步时间短,适应性广等优点。第二节讨论时滞系统的时滞同步情况,给出同步原理,然后以 WINDMI 为例给出数值仿真结果。

第三部分，我们在第五章对双向耦合同步方案进行研究，找出了 WINDMI 系统双向耦合同步的一般条件，最后给出数值仿真结果。WINDMI 系统为耗散激励系统，属于大气物理学的范畴，有着丰富的动力学行为。文献[6]将 WINDMI 系统描述为通过太阳风驱动电磁层和电离层所产生的能量流。太阳风是太阳的外层大气持续不断地向外膨胀从而形成由太阳径向外的等离子体流。彗星美丽的彗尾和高纬区看到的多彩的极光现象都是由太阳风引起的。我们研究 WINDMI 系统的同步对物理学家研究太阳风湍流的特征和本质及预测太阳风对天体的影响有着重大意义。

第 2 章 基本概念和理论基础

2.1 混沌同步的定义

考虑两个混沌系统，一个混沌系统为：

$$\dot{X} = F(X, t) \quad (2.1)$$

该系统可以称为驱动系统，或者在通讯中称为发射系统。

另一个混沌系统为：

$$\dot{Y} = F'(Y, t) + G \quad (2.2)$$

其中 G 为任意一个控制器，通常该系统称为响应系统，或者在通讯中称为接收系统。这里 t 为时间，矢量 $X, Y \in R^n$ ，它们分别具有 n 维分量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 及 (y_1, y_2, \dots, y_n) 。上面两个系统可以是完全相同的 ($F(X, t) = F'(Y, t)$)，也可以是不同的，但是它们的初始条件都不同。

如果两个系统通过控制器 G 的某种方式联系，令 $X(t; t_0; X_0)$ 和 $Y(t; t_0; Y_0)$ 分别为(2.1)和(2.2)的解，并满足函数光滑条件，当存在 R^n 的一个子集 $D(t_0)$ 时，使得初值 $X_0, Y_0 \in D(t_0)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，若存在：

$$\zeta = \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t; t_0; X_0) - Y(t; t_0; Y_0)\| \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

则称响应系统(2.2)与驱动系统(2.1)达到同步。显然，控制器 G 起关键作用，人们可以设计各种不同的控制器 G ，于是就有各种同步方法。

混沌同步可以分为两大类型：1，恒等同步：对于参数和变量完全相同的两个或多个非线性混沌系统，即 $F(X, t) = F'(Y, t)$ ，当它们系统相应的信号不仅幅度大小而且相位大小都完全相同时，这时达到了混沌同步，称为恒等同步。2，广义同步：对于两个或多个完全不同的混沌系统，即 $F(X, t) \neq F'(Y, t)$ ，当它们相应的信号或者只是相位同步，或者只是频率同步，或者只是它们的幅度之间或者两个系统变量之间存在一定的函数关系，这种同步则称为广义同步。或者两个系统变量之间存在一定的函数关系，这种同步则称为广义同步。

2.2 混沌同步原理

2.2.1 Pecora-Carroll 混沌同步原理(驱动-响应同步原理)

1990年, Pecora 和 Carrol 为了阐明实验上观察到的混沌同步现象, 对响应系统的稳定性及同步原理进行了理论分析, 提出了实现混沌同步的 Pecora-Carroll 自同步原理。这个方法的**最大特点**是: 由驱动系统与响应系统通过驱动变量构成总体动力学系统, 响应系统的行为取决于驱动系统, 而驱动系统的行为与响应系统无关。

设一个 n 维自治动力学系统:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.4)$$

其中, $x \in R^n, f: R^n \rightarrow R^n$

将系统分解为激励部分 D 和响应部分 R, 则相应的状态变量可表示为

$$x = \begin{bmatrix} x_D \\ x_R \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中, $x_D \in R^{m_1}, x_R \in R^{m_2}, m_1 + m_2 = n$

从而可以分解为两个子系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_D = g(x_D, x_R) \\ \dot{x}_R = h(x_D, x_R) \end{cases} \quad (2.6)$$

其中:

$$\begin{aligned} x &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \\ x_D &= \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T \\ x_R &= \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\}^T \\ f &= \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T \\ g &= \{f_1, f_2, \dots, f_m\}^T \\ h &= \{f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n\}^T \end{aligned}$$

称(2.6)式为驱动系统。现在复制一个响应系统:

$$\dot{x}'_R = h(x_D, x'_R) \quad (2.7)$$

并且用同一信号来作为激励, 式中 x_D 为驱动变量, 它由驱动系统(2.6)产生, 用来驱动响应系统。(2.6)与(2.7)构成一个总体系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_D &= g(x_D, x_R) \\ \dot{x}_R &= h(x_D, x_R) \\ \dot{x}'_R &= h(x_D, x'_R) \end{aligned} \quad (2.8)$$

定义 $\Delta x_R = x'_R - x_R$, 如果当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x_R \rightarrow 0$, 那么称 x'_R 与 x_R 渐近同步, 而且与初始条件无关。

Pecora 和 Carrol 对响应系统的稳定性及同步原理进行了分析, 发展了混沌信号驱动系统的稳定性理论, 即所谓的条件 Lyapunov 指数稳定性判据, 给出如下同步定理: 只有当响应系统(2.7)的所有条件 Lyapunov 指数都是负时, 才能达到响应系统和驱动系统同步。即:

$$\Delta x_R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x'_R(t) - x_R(t)\| = 0 \quad (2.9)$$

或者构造 x_R :

$$\Delta \dot{x}_R = D_{x_R} g(x_D, x_R) \Delta x_R = o((\Delta x_R)^2) \quad (2.10)$$

其中, $D_{x_R} g(x_D, x_R)$ 是系统 g 对 x_R 的雅可比矩阵。如果此雅可比矩阵的特征值全部具有负实部, 那么, 这个系统是收敛的, 这可用条件 Lyapunov 指数来衡量。如果条件 Lyapunov 指数均为负, 则可以确定 x_R 是收敛的。

综上所述, Pecora-Carrol 驱动-响应同步原理可以表述为: 一个自治的混沌系统, 可以将它分解为激励部分和响应部分, 只有当响系统的所有条件 Lyapunov 指数均为负时, 才能达到响应系统与驱动系统的混沌同步。

随着人们对混沌研究的深入, 人们进一步将驱动——响应同步原理推广到超混沌系统中, 其同步机理与混沌同步机理类似, 只是超混沌同步的条件有所改变。当将此同步原理推广到超混沌同步系统中时, 得到的同步条件为: 当响应系统所有条件均为负时, 能够达到驱动系统与响应系统渐近同步; 当响应系

统仅有一个正的 Lyapunov 指数, 而且小于驱动系统的最大 Lyapunov 指数时, 即响应系统要比驱动系统相对稳定时, 响应系统也能够与驱动系统达到渐近同步。

2.2.2 耦合同步原理

由于驱动-响应同步的混沌系统之间存在驱动与被驱动的关系, 它是用驱动变量替换响应系统中相应的变量, 因此也称作替换型同步, 这就要求构造可同步的子系统将原始系统(即驱动系统)进行分解: 一个是稳定的子系统另一个是不稳定的子系统, 显然这一操作步骤大大限制了这一原理的实际应用范围, 加为在自然界中, 许多客观存在的实际系统在物理本质上是不可分割的, 即使在理论上可以分解, 在实际上也不一定能办到。

对于这些广泛存在而本质上又无法分解的系统, 能否通过耦合实现非线性混沌系统之间的同步? 这个问题早在 20 世纪 80 年代就引起了广大科学家的极大兴趣。许多研究也证明, 相互耦合的混沌系统在一定条件下同样能达到混沌同步。

相互耦合的非线性系统广泛存在于众多学科中, 如物理、化学、生物等, 而且它具有非常丰富和令人感兴趣的动力学行为。深入研究各种相互耦合系统的同步, 必将会促进混沌同步的各种实际应用。

耦合混沌系统的同步, 实质上是要把耦合系统稳定到状态空间 $(x, y) \in R^{2n}$ 中的一个低维流形 $S = \{(x, y): y = x\}$ 上, 流形 S 称为同步流形或吸引域。耦合系统之间的同步是通过两个系统之间的信号差来实现的。

假设 n 维自治系统可用下列微分方程来描述

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.11)$$

其中 $x \in R^n$ 为状态变量。

另有一个与式(2.11)所述系统结构及参数均相同的系统, 我们令它为:

$$\dot{y} = f(y) \quad (2.12)$$

其中, $y \in R^n$ 为状态变量。

耦合项分别用 u, v 表示, 这里

$$\begin{cases} u = k_i(y_i - x_i) \\ v = k_i(x_i - y_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m \leq n$$

则相互耦合的系统可表述为:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{y} = f(y, v) \end{cases} \quad (2.13)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 若有 $\|x = y\| \rightarrow 0$ 成立, 则表明耦合系统已实现了同步。此时耦合项 u, v 均趋于零。因此通过耦合实现混沌或超混沌系统之间的同步, 并不改变原来非线性系统的动力学特性。

相互耦合的非线性系统, 具有十分复杂的动力学行为。虽然对这类系统的同步现象进行了不少研究, 但还是没有一个普适性的理论, 不过选择合适的耦合系数是实现耦合同步的关键。

2.2.3 连续变量反馈原理

1993 年, 德国学者 K.Pyragas 提出了对非线性连续混沌系统实行连续变量微扰反馈的控制方法, 后来这一思想被用来研究两个混沌系统的同步。其原理可用图 (2-1) 表示。

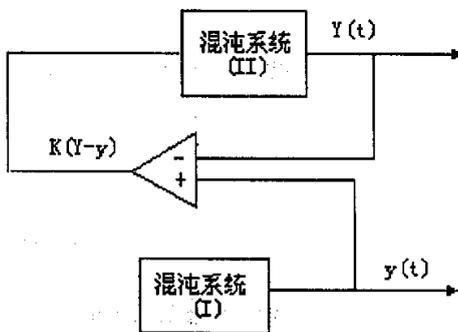


图 2-1 线性反馈同步方案

Fig. 2-1 The scheme of synchronization with linear feedback controllers

设混沌系统(I)和混沌系统(II)分别为: $\dot{y} = P(y, x), \dot{x} = Q(y, x)$, 这里, $x, y \in R^n$, 它们的同步原理可用如下方程表示:

$$\begin{cases} \dot{Y} = P(y, x) + F(t) \\ \dot{x} = Q(y, x) \\ F(t) = k[y(t) - Y(t)] \end{cases} \quad (2.14)$$

这里, $k = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n]^T$, 将此变为数学上的等价问题:

$$\text{驱动系统: } \begin{cases} \dot{y} = P(y, x) \\ \dot{x} = Q(y, x) \end{cases}$$

$$\text{响应系统: } \begin{cases} \dot{Y} = P(Y, X) + k[y - Y] \\ \dot{X} = Q(y, x) \end{cases}$$

可由下列响应系统的变分方程:

$$\begin{cases} \delta_y = \frac{\partial}{\partial y} P(y, x) + \frac{\partial}{\partial x} P(y, x) - k\delta_y \\ \delta_x = \frac{\partial}{\partial y} Q(y, x) + \frac{\partial}{\partial x} Q(y, x) \end{cases} \quad (2.15)$$

确定条件 Lyapunov 指数, 其中 $\delta_y = Y - y$, $\delta_x = X - x$, 这是两个系统的混沌轨道的偏差。当(2.14)中的 $k = 0$ 时, 则由此确定的条件 Lyapunov 指数便退化为通常的 Lyapunov 指数, 随着 k 的增加, 小反馈微扰项引起 $\lambda(k)$ 的减少, 最终可导致初始的 Lyapunov 指数 λ 从正值变为负值, 从而达到稳定同步控制。

应用变量反馈微扰使得两个系统达到混沌同步的实例已有不少, 例如: 两个 Chua 氏混沌电路; 用 Maxwell-Bloch 方程描述的两个激光系统; 两个 Duffing 振荡器以及两个 Van De Pol 振荡系统等。

2.2.4 自适应同步原理

Huberman 及 Lumer 于 1990 年提出用自适应原理控制混沌的方法。John 和 Amritker 在原方法的基础上做了改进, 用来控制混沌系统的相空间轨迹与所期望的不稳定轨道达到同步。

具体地说, 自适应同步方法就是利用自适应控制技术来自动调整系统的某些参数, 使系统达到混沌同步的目的。应用这一主法有两个前提条件: 1, 系统至少有一个或多个参数可以得到; 2, 对于所期望的轨道, 这些参数是已知的。系统中受控参数的调整还取决于两个因素: 1, 系统输出变量与所期望轨道的相

应变量的差值；2，受控参数值与所期望的轨道相应的参数值之间的差值。

考虑一个 n 维的自治系统

$$\dot{u} = f(\mu, u) \quad (2.16)$$

其中， $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ 是系统状态变量， $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}^T$ 是系统参数集，

$f(\mu, u) = \{f_1(\mu, u), f_2(\mu, u), \dots, f_n(\mu, u)\}^T$ 是 n 维矢量函数。令 $F(v)$ 为所期望的且为系统的一个自然不稳定轨道， v 表示所期望的变量。如何用自适应方法来控制系统(2.16)使得变量 u 与变量 v 同步？

现在引入参数 μ 的小微扰来修改方程(2.16)的演化。

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(\mu, u) \\ \dot{\mu}_i &= -\sum h \left\{ \varepsilon (u_j - v_j), \operatorname{sgn} \left[\frac{\partial f_j}{\partial u_j} \right] \right\} - \delta g [\mu_i - \mu_i^*] \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中， μ_i 为相应于轨道 $F(v)$ 的参数 μ_i 的值， μ_j 相应于 μ_i 参数下整个方程中的变量， ε, δ 为常数， h 和 g 分别是 $(u_j - v_j)$ 与 $(\mu_i - \mu_i^*)$ 的连续函数， $\operatorname{sgn}(x)$ 表示 x 的符号函数。为了能更好和更快地使系统的实际输出达到同步， h, g 的函数形式的选择十分重要。理论上说，函数 h, g 有多种选择形式，但实际中一般都取：

$$\begin{cases} h \left\{ \varepsilon \cdot (u_j - v_j), \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) \right\} = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) \cdot (u_j - v_j) \\ g(\mu_i - \mu_i^*) = \mu_i - \mu_i^* \end{cases} \quad (2.18)$$

研究表明：只要方程(2.17)的 Lyapunov 指数都为负值，则变量 u 与 v 就可以同步，因此，可由最大的 Lyapunov 指数为 0 这一条件来确定方程(2.17)的两个常数 ε, δ 。

2.3 李雅普诺夫指数

表征非线性系统的混沌行为的主要特征量是所谓的李雅普诺夫指数 σ ，它刻划了系统对初始条件的高度敏感性，从宏观上对系统的混沌吸引子进行了刻

划。混沌运动的基本特点是运动对初始条件极为敏感，两个极靠近的初值所产生的轨道，随时间推移按指数方式分离，李雅普诺夫指数是定量描述这一现象的量。

首先来看一维情形。在一维动力系统 $x_{n+1} = F(x_n)$ 中，初始两点在迭代一次后，如果 $|\frac{dF}{dx}| > 1$ ，迭代使两点分开，如果 $|\frac{dF}{dx}| < 1$ ，迭代使两点靠拢。但是，在不断的迭代过程中， $|\frac{dF}{dx}|$ 之值要随时变化，时而分离时而靠拢，为了表示从整体看相邻两状态分离的情况，必须对时间（或迭代次数）取平均。为此，设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 σ ，则原来相距为 ε 的两点经过 n 次迭代后距离为

$$\varepsilon e^{n\sigma(x_0)} = |F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0)|$$

取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ ， $n \rightarrow \infty$ ，上式变为

$$\sigma(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0)}{\varepsilon} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{dF^n(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} &= \frac{dF(F^{n-1}(x))}{dF^{n-1}(x)} \cdot \frac{dF(F^{n-2}(x))}{dF^{n-2}(x)} \cdots \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} \\ &= \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_{n-1}} \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_{n-2}} \cdots \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} \end{aligned}$$

可得

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

上式中的 σ 即称为李雅普诺夫指数，它表示在多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离中的指数。

由以上讨论知，当 $\sigma < 0$ 时，相邻点终归要靠拢合并成一点，这对应于稳定的不动点或周期点，如果 $\sigma > 0$ ，则意味着运动轨道的局部不稳定，相邻点的轨道最终按指数方式分离，如果轨道有整体的稳定因素（例如有捕捉区域，耗散等），则在此作用下反复折叠，形成混沌吸引子。因此， $\sigma > 0$ 可以作为混沌行

为的判据。

对于高维离散动力系统可以类似的定义李雅普诺夫指数。设 F 是 $R^m \rightarrow R^m$ 的 m 维映射，决定以下的 m 维离散动力系统 $x_{n+1} = F(x_n)$ 。将系统的初始条件取为一个无穷小 m 维的球，由于演变过程中的自然变形，球将变成椭球。将椭球的所有主轴按其长度顺序排列，那么第 i 个 Lyapunov 指数根据第 i 个主轴的长度 $P_i(n)$ 的增加速率定义为 Lyapunov 指数

$$\sigma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_i(n)}{P_0(n)} \right|, i = 1, 2, \dots, m$$

这样 Lyapunov 指数是与相空间的轨线收缩或扩张的性质相关联的，在 Lyapunov 指数小于零的方向上轨道收缩，运动稳定，对初始条件不敏感，而在 Lyapunov 指数为正的方向上，轨道迅速分离，对初值敏感。注意椭球的主轴长度按 e^{σ_1} 增加，由前二个主轴定义的区域面积按 $e^{(\sigma_1+\sigma_2)}$ 增加，由前三个主轴定义的区域体积按 $e^{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}$ 增加，如此等等，这个特性表达了 Lyapunov 指数的另一个含义，即前 j 个指数的和由前 j 个主轴定义的 j 维立体体积指数增加的长期平均速率确定。用上述无限小状态球的演变来计算 Lyapunov 指数是不能在计算机上实现的，因为计算机不能表示无穷小量。另一个问题是球的扭曲程度也指数地加速增加，因而所有主轴向量的方向将向最大 Lyapunov 方向靠拢，无论计算机的精度如何，都无法区分这些主轴向量的方向。为此，我们可以采用线性代数中的 GSR 方法追踪发散轴的行为，可以用相空间各维上的体积元素的长期增长速率来计算 Lyapunov 指数。但是在实际计算中还是很困难的，不过为了判断 m 维离散动力系统是否出现混沌，并无必要去计算一切李雅普诺夫指数。1983 年格里波基证明只要最大的李雅普诺夫指数大于零，就可以肯定混沌的存在，而计算最大的李雅普诺夫指数可以采用下面的 Nicolis 方法。

用 $\|\cdot\|$ 表示 m 维空间的距离，则最大李雅普诺夫指数满足

$$\begin{aligned} \|\alpha x_0\| e^{n\sigma_1} &= \|F^n(x_0 + \alpha x_0) - F^n(x_0)\| \\ &\approx \|J(x_{n-1})J(x_{n-2}) \cdots J(x_0)\alpha x_0\| \end{aligned}$$

为计算 σ_1 , 选取 αx_0 为 $d_0 e_0$, 其中 d_0 表示模, 而 e_0 表示一单位向量。 $J(x_0)e_0$ 也为一向量, 设为 $d_1 e_1$, d_1 为模, e_1 为一单位向量。 $J(x_1)e_1$ 也为一向量, 设为 $d_2 e_2$, d_2 为模, e_2 为一单位向量。 以次类推, 得到 $J(x_{n-1})e_{n-1} = d_n e_n$, e_n 为一单位向量。

则

$$\sigma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |d_n d_{n-1} \cdots d_2 d_1|$$

2.4 李雅普诺夫函数

两个非线性系统的混沌同步问题, 通常用的方法之一是将其转化为两个系统的误差系统的零点的稳定性问题来考虑, 也即考虑微分方程组零解的稳定性问题。 可以借助构造一个特殊的函数 $V(x, y)$, 并利用 $V(x, y)$ 及其通过方程组的全导数 $\frac{dV(x, y)}{dt}$ 便确定了方程组零解的稳定性, 这就是李雅普诺夫第二方法的思想。

考虑非线性驻定微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{2.19}$$

其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad \text{假设 } F(0) = 0, \quad \text{且 } F(x) \text{ 在区域}$$

$G = \{(x_1, \dots, x_n) : \|x\| \leq a\}$ 内有连续的偏导数。

定义 1 假设 $V(x)$ 为区域 $\|x\| \leq a$ 内定义的一个实连续函数, $V(0) = 0$. 如果在此区域内恒有 $V(x) \geq 0$, 则称函数 $V(x)$ 为常正的。 如果对一切 $x \neq 0$ 都有 $V(x) > 0$. 且 $V(0) = 0$, 则称 $V(x)$ 为定正的。 如果函数 $-V(x)$ 是定正(常正)的, 则称 $V(x)$ 为定负(常负)的。

进一步假设函数 $V(x)$ 关于所有变元的偏导数存在且连续, 以方程 (2.19)

的解代入，然后对 t 求导

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(11)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, \dots, x_n)$$

这样求得的导数 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(2.19)}$ 称为 $V(x)$ 关于方程 (2.19) 的全导数。

定理 1 对于方程 (2.19)，如果存在一个定正的函数 $V(x)$ ，其关于方程的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 为常负函数或恒等于零，则方程 (2.19) 的零解为稳定。

定理 2 对于方程 (2.19)，如果存在一个定正的函数 $V(x)$ ，其关于方程的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 是定负的，则方程 (2.19) 的零解为渐近稳定。

定理 3 对于方程 (2.19)，如果存在一个函数 $V(x)$ ，其关于方程的全导数可以表示为

$$\frac{dV}{dt} = \mu V(x) + W(x)$$

且当非负常数 $\mu \neq 0$ 时， W 为常正函数或恒等于零， $\mu = 0$ 时， W 是定正函数，又在 $x = 0$ 的任意小领域内都至少存在某个 \bar{x} ，使得 $V(\bar{x}) > 0$ ，那么方程 (2.19) 的零解是不稳定的。

定理 4 如果存在一个定正的函数 $V(x)$ ，其关于方程 (2.19) 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 为常负，但使 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的点 x 的集合中，除零解 $x = 0$ 外，并不包含方程 (2.19) 的其它解，则方程 (2.19) 的零解渐近稳定。

李雅普诺夫第二方法将稳定性的问题转化为李雅普诺夫函数的构造问题，寻找和建立满足上述诸定理的函数 $V(x)$ ，实质上需要高度的技巧。李雅普诺夫和他的后继者也已经提供了某些建立李雅普诺夫函数的方法，他们可以成功的解决许多具体问题，归集起来，有类比法、能量函数法、变量分离法、变梯度法、广义能量法、首次积分线性组合与加权法等。

第3章 用非线性反馈法实现混沌系统自同步

反馈技术是工程上普遍应用的一种方法。利用反馈技术可以实现混沌系统的控制，如将系统稳定到不稳定的不动点、周期轨道等。一般来说，在混沌同步中，用到的反馈方法可以分为参数反馈和状态变量反馈两种。参数反馈是指利用反馈的误差信号去调整系统的参数，这是因为混沌系统对参数的破端敏感性。可以通过调整参数就可使两个混沌系统实现同步化，这类似于混沌控制的 OGY 方法。状态变量反馈指的是反馈的信号直接加到响应系统的状态变量上去，不必改变系统的参数。状态变量反馈可以有多种形式，可以是线性的，也可以是非线性的。

近年来，混沌同步的研究得到了迅速发展，但迄今为止已经提出的许多实现混沌同步的方法多限于线性控制方法。值得注意的是，近年来非线性控制正在兴起，特别是非线性反馈控制，它不仅应用于混沌控制，而且还可以应用于混沌同步，因此已经成为人们关注的一个重要研究方向^[1-5]。文献[3]分析了一类混沌系统的追踪控制与同步，对 Chua' s 混沌系统提出了一种控制方案。文献[4]从理论上用非线性反馈函数法研究蔡电子线路的混沌同步，但没给出数值仿真结果。文献[5]研究了离散系统的轨道控制。

本章首先将非线性反馈法做一简单介绍，然后应用非线性反馈控制的基本思想分别对 Hadley 系统^[6]和 LFRBM 系统^[7]混沌同步进行研究，最后给出数值仿真结果。理论分析和数值计算结果表明，该方法具有同步时间短，适应性广等优点。

3.1 方法原理

现考虑二个 n 维非线性动力学系统:

$$\dot{X} = F(t, X) \quad (3.1)$$

$$\dot{Y} = F(t, Y) + G(X, Y) \quad (3.2)$$

其中: $X, Y \in R^n$, F 为 n 维非线性函数, G 为 n 维输入控制函数。这里, G

为非线性反馈函数。显然, 当 $G=0$ 时, 系统 (3.2) 是系统 (3.1) 的复制系统。通常, 称系统 (3.1) 为驱动系统, 系统 (3.2) 为响应系统。从通讯角度说, 前者称为发射机系统, 后者称为接收机系统。如果能选择合适的 $G(X, Y)$, 使得 $t \rightarrow \infty$ 时, $G(X, Y) \rightarrow 0$, $Y(t) \rightarrow X(t)$ 。

即当 $G(X, Y) \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0 \quad (3.3)$$

也就是说, 式 (3.2) 的解渐近地趋向式 (3.1) 的解, 从而使系统 (3.2) 与系统 (3.1) 达到同步。

为了应用李雅普诺夫方法讨论混沌同步, 可将上述问题转变为研究式 (3.1) 与式 (3.2) 的误差动力学方程:

$$\dot{e} = \dot{X} - \dot{Y} = F(t, X) - F(t, Y) - G(X, Y) \quad (3.4a)$$

即

$$\sum_{i=1}^n \dot{e}_i = \sum_{i=1}^n [F_i(t, X) - F_i(t, Y)] - \sum_{i=1}^n G_i(X, Y), \quad (3.4b)$$

倘若找到一个正定的李雅普诺夫函数, 它对于时间 t 的由式 (3.4b) 构成的全导数

为负定, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - x_i(t)\| = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$$

由式 (3.3) 知, 式 (3.2) 与式 (3.1) 已达到同步。

对二个混沌系统同步的上述论证是直接应用李雅普诺夫关于运动稳定的一般理论得出的, 与 He 和 Vaidya 用李雅普诺夫函数方法对混沌同步的论证以及 Pecora 和 Carroll 的同步原理实质上都是等价的。

3.2 Hadley 环流的自同步

3.2.1 控制器的设计及证明

Hadley 环流是大气环流的一种，它的基本状况决定着气候系统未来的变化趋势，因此研究 Hadley 系统的同步对气象预报很有意义。

Hadley 系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \dot{y} = xy - bxz - y + g \\ \dot{z} = bxy + xz - z \end{cases} \quad (3.6)$$

对式 (3.6) 带有反馈函数 $G(X, Y) = [G_1, G_2, G_3]^T$ 的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{u} = -v^2 - w^2 - au + aF + G_1 \\ \dot{v} = uv - buw - v + g + G_2 \\ \dot{w} = buv + uw - w + G_3 \end{cases} \quad (3.7)$$

由文献[6]知：当参数分别取 $a = 0.25, b = 4, F = 8, g = 1$ 时，其李雅普诺夫指数为 $(0.1665, 0, -4.4466)$ ，系统 (3.6) 处于混沌态。（见图 3-1）

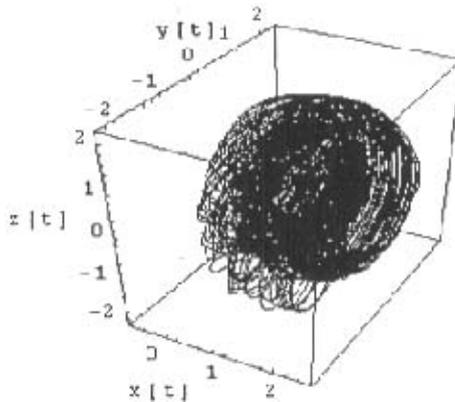


图 3-1 Hadley 环流的吸引子

Fig. 3-1 The attractor of Hadley system

要实现系统的同步，关键是构造一个合适的 Lyapunov 函数。这里，我们取

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \geq 0 \quad (3.8)$$

则

$$\dot{L} = -ae_1^2 - (1-x)e_2^2 - (1-x)e_3^2 - (y+bw)e_1e_2 - (z-bv)e_1e_3 - G_1e_1 - G_2e_2 - G_3e_3 \quad (3.9)$$

选择如下的非线性反馈函数:

$$G_1 = ke_1 - (v+bz)e_2 + (by-w)e_3, G_2 = (k+u)e_2, G_3 = (k+u)e_3 \quad (3.10)$$

其中, k 为反馈系数。

将式 (3.10) 代入式 (3.9), 有

$$\dot{L} = -(a+k)e_1^2 - (1+k)e_2^2 - (1+k)e_3^2 \quad (3.11)$$

当 k 满足下面条件

$$\begin{cases} a+k > 0 \\ 1+k > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

时, 对任意 e_1, e_2, e_3 , 有 $\dot{L} \leq 0$. 把 $a=0.25$ 代入, 解得 $k > -0.25$.

因此, 当 $k > -0.25$ 时, $\dot{L} \leq 0$, 在非线性反馈式 (3.11) 控制下, Hadley 系统式 (3.6) 与式 (3.7) 达到了混沌同步。

3.2.2 数值仿真

我们选取 $k=1$, 满足式 (3.12) 的条件, 驱动系统 (3.6) 的初值为 $x(0)=0, y(0)=0, z(0)=1.3$, 响应系统 (3.7) 的初值为 $u(0)=-10, v(0)=11, w(0)=1.2$, 结果表明虽然两系统的初值不同, 但最终实现了两个 Hadley 混沌系统的同步, 同步情况见图 3-2, 图 3-3, 图 3-4.

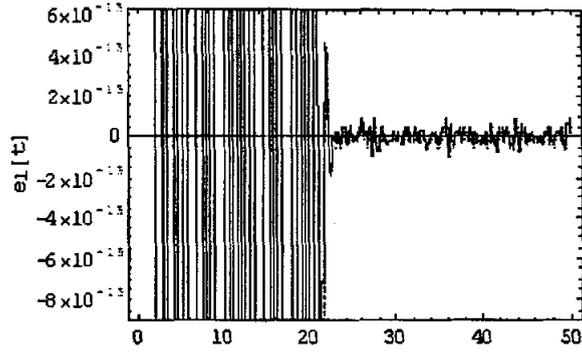


图 3-2 误差 e_1 随时间的演化过程

Fig. 3-2 Time evolution of valuable $e_1(t)$

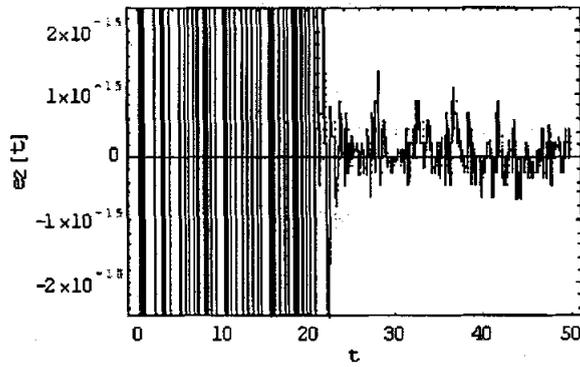


图 3-3 误差 e_2 随时间的演化过程

Fig. 3-3 Time evolution of valuable $e_2(t)$

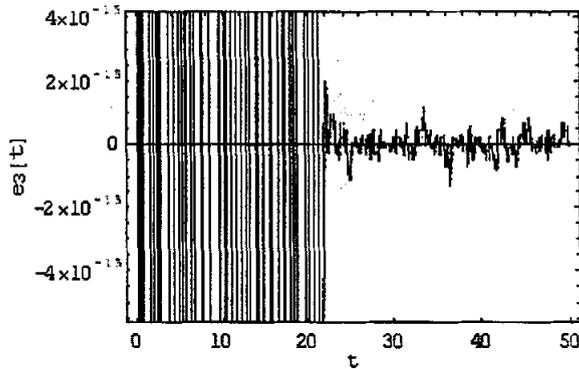


图 3-4 误差 e_3 随时间的演化过程

Fig. 3-4 Time evolution of valuable $e_3(t)$

3.3 LFRBM 系统的混沌自同步

3.3.1 控制器的设计及证明

LFRBM 系统为线性反馈刚体系统, 是物理学中发现的一个系统, 其动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.4x + y + 10yz \\ \dot{y} = -x - 0.4y + 5xy \\ \dot{z} = az - 5xy \end{cases} \quad (3.13)$$

对式 (3.13) 带有反馈函数 $G(X, Y) = [G_1, G_2, G_3]^T$ 的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{u} = -0.4u + v + 10vw + G_1 \\ \dot{v} = -u - 0.4v + 5uv + G_2 \\ \dot{w} = aw - 5uv + G_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

由文献[7]知: 当参数取 $a = 0.175$ 时, 其李雅普诺夫指数为 $(0.1421, 0, -0.7671)$, 该系统处于混沌态。

构造李雅普诺夫函数

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \geq 0 \quad (3.15)$$

对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -0.4e_1^2 - (0.4 - 5x)e_2^2 + ae_3^2 + (10w + 5v)e_1e_2 + (10y - 5v)e_1e_3 \\ & - 5xe_2e_3 - G_1e_1 - G_2e_2 - G_3e_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

我们取

$$G_1 = ke_1 + (10z + 5y)e_2 + (10v - 5y)e_3, \quad G_2 = (5u + k)e_2 - 5ue_3, \quad G_3 = ke_3 \quad (3.17)$$

当 k 满足条件

$$\begin{cases} k + 0.4 > 0 \\ k - a > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

时, $\dot{L} \leq 0$, 则在式 (3.17) 的控制下, LFRBM 系统式 (3.13) 与式 (3.14) 达到了混沌同步。

3.3.2 数值仿真

我们选取 $k=0.2$ ，满足式 (3.18) 的条件，驱动系统 (3.13) 的初值为 $x(0)=0.1, y(0)=0, z(0)=0$ ，响应系统 (3.14) 的初值为 $u(0)=-1, v(0)=-1, w(0)=-1$ 结果表明虽然两系统的初值不同，但最终实现了两个 LFRBM 混沌系统的完全同步，同步情况见图 3-5，图 3-6，图 3-7

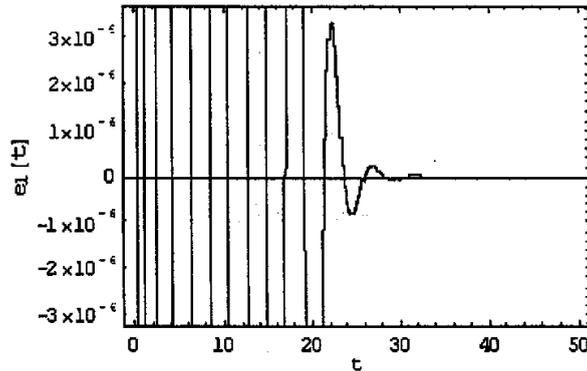


图 3-5 误差 e_1 随时间的演化过程

Fig. 3-5 Time evolution of valuable $e_1(t)$

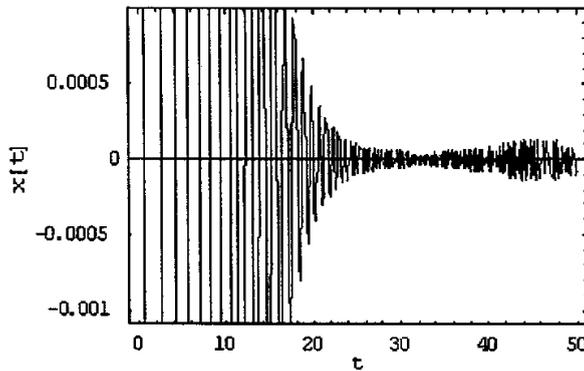


图 3-6 系统 (14) 中 $x(t)$ 的时间演化过程

Fig. 3-6 Time evolution of valuable $x(t)$ in system(3.14)

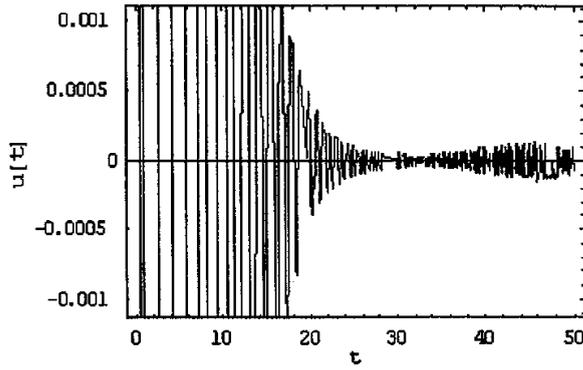


图 3-7 系统(15)中 $u(t)$ 的时间演化过程

Fig. 3-7 Time evolution of valuable $u(t)$ in system(3.15)

第 4 章 非线性动力系统的时滞同步

近几十年来,混沌同步引起了人们的关注。混沌及其同步在通信系统^[8-10]等工程应用中发挥着巨大的作用。关于驱动-响应系统中信号传播带有常数延迟的情况,近年来受到了人们的广泛关注^[15,16,17,18]。文献[15]指出,时滞的存在,将使同步受到破坏,并将此称为相敏感性,文献[17]在时滞的情况下研究了两个混沌电路的同步和分岔现象,文献[16]用实验验证了带有时滞的两个混沌电路的同步,为了得到这个问题的理论分析,近来 Yalcin 在文献[18]中进一步研究了 Lure 系统的驱动-响应同步下时滞的影响,提出了静态误差反馈和时滞的同步方案,在 L-K 条件下给出了 Lure 系统的带有时滞的驱动-响应同步的一些充分条件,人们发现,当延迟量是非常小时,可以实现混沌同步。

在工程上,时滞总是存在,而且时滞变量的值事先未知,严格地说,在信号传播的实际环境中,不可能要求响应系统和驱动系统在同一时间达到同步。就像电话通讯系统,人们在时间 t 听到的另一端的的声音,实际上是输出端在时间 $t-\tau$ 时发出的声音。由于这个原因,文献[11]对混沌同步重新定义为响应系统在时间 t 将渐近地趋向于驱动系统在时间 $t-\tau$ 的状态,即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t-\tau) - \tilde{X}(t)\| = 0$$

这里 X , \tilde{X} 分别是驱动系统和响应系统的状态。控制信号利用的是驱动系统在时间 $t-\tau$ 和响应系统在时间 t 的误差输出,即 $X(t-\tau) - \tilde{X}(t)$ 。

本章分二部分,第一部分提出了混沌系统信号传播带有常数延迟的同步的一种方案,应用反馈控制的基本思想对 WINDMI 系统混沌同步进行研究,给出数值仿真结果。理论分析和数值计算结果表明,该方法具有同步时间短,适应性广等优点。第二部分讨论时滞系统的时滞同步情况,给出同步原理,然后以 WINDMI 为例给出数值仿真结果。

4.1 全局时滞混沌同步

4.1.1 方法原理

考虑下面混沌系统的状态方程：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + g(X(t)) \quad (4.1)$$

这里 $X(t) \in R^n$ 是状态变量， $A \in R^{n \times n}$ 为常矩阵， $g(X)$ 为连续非线性函数。假设

$$g(X(t_1)) - g(\tilde{X}(t_2)) = M_{X, \tilde{X}}(X(t_1) - \tilde{X}(t_2)) \quad (4.2)$$

有界矩阵 $M_{X, \tilde{X}}$ 由 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 决定。由文献[11]可知，多数已知的混沌系统可由式 (4.1) 和式 (4.2) 描述。

从单向耦合线性误差反馈方法出发，将时滞考虑进去，基于混沌系统 (4.1) 的响应系统 (见图 4-1) 可表示为：

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A\tilde{X}(t) + g(\tilde{X}(t)) + L(X(t-\tau) - \tilde{X}(t)) \quad (4.3)$$

这里， τ 为未知的有限延迟常量， $L \in R^{n \times m}$ 为要设计的实现同步的耦合矩阵。

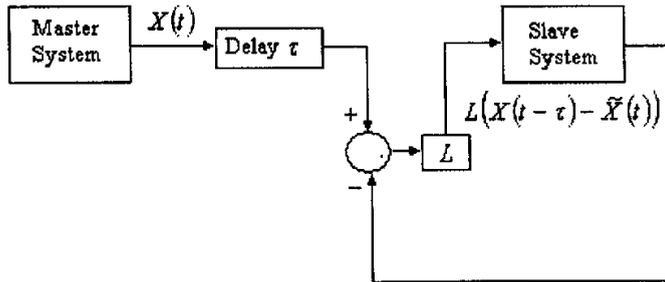


图 4-1 带有时滞的混沌同步方案

Fig. 4-1 The schematic of chaos synchronization with time-delay

在图 4-1 和方程 (4.3) 中，误差 $X(t-\tau) - \tilde{X}(t)$ 用来作为控制， $X(t-\tau)$ 通过轨道从驱动系统输出，这样同响应系统接收到的信号相比它有了时间延迟，而时间延迟量 τ 对于执行控制行为并不要求知道。

定义误差信号：

$$e(t) = X(t-\tau) - \tilde{X}(t) \quad (4.4)$$

这是 $t-\tau$ 时刻驱动系统与 t 时刻响应系统的状态误差。 τ 为未知的常数，同步要求 $t \rightarrow \infty$ 时， $\|e(t)\| \rightarrow 0$ 。

将式 (4.1) 中的 t 换为 $t-\tau$.则 $t-\tau$ 时刻驱动系统表示为

$$\dot{X}(t-\tau) = AX(t-\tau) + g(X(t-\tau)) \quad (4.5)$$

由式 (4.3) 和式 (4.5), 可得出误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + g(X(t-\tau)) - g(\tilde{X}(t)) - Le(t) \\ &= Ae(t) + M_{X,\bar{X}}e(t) - Le(t) \\ &= (A + M_{X,\bar{X}} - L)e(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

通过利用 Lyapunov 函数方法, 最终可实现系统 (4.3) 和(4.5)的全局渐近同步。

4.1.2 WINDMI 系统的时滞混沌同步

WINDMI 系统为耗散激励系统, 属于大气物理学的范畴, 有着丰富的动力学行为。文献[13]将 WINDMI 系统描述为通过太阳风驱动电磁层和电离层所产生的能量流。太阳风是太阳的外层大气持续不断地向外膨胀从而形成由太阳径向向外的等离子体流。彗星美丽的彗尾和高纬区看到的多彩的极光现象都是由太阳风引起的。它的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -az - y + b - e^x \end{cases} \quad (4.7)$$

由文献[6]知: 当参数分别取 $a = 0.7, b = 2.5$ 时, 其李雅普诺夫指数为 (0.0755, 0, -0.7755), 系统(4.7)处于混沌态(见图 4-2)。

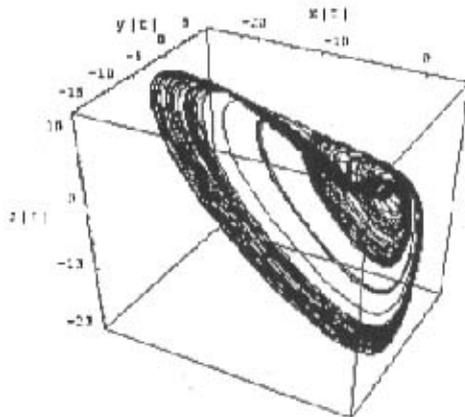


图 4-2 WINDMI 系统的吸引子

Fig.4-2. The attractor of WINDMI system

这里有

$$e^x - e^{\tilde{x}} = k_{x,\tilde{x}}(x - \tilde{x}) \quad (4.8)$$

其中, $k_{x,\tilde{x}}$ 的取值依赖于 x 和 \tilde{x} . 我们选取 x 和 \tilde{x} , 使 $k_{x,\tilde{x}}$ 在区间 $[0, 1]$ 内变动,

即 $0 < k_{x,\tilde{x}} < 1$

由 (4.3) 构造式 (4.7) 的响应系统:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \tilde{y}(t) + l_1(x(t-\tau) - \tilde{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \tilde{z}(t) + l_2(y(t-\tau) - \tilde{y}(t)) \\ \hat{z}(t) = -a\tilde{z}(t) - \tilde{y}(t) + b - e^{\tilde{x}(t)} + l_3(z(t-\tau) - \tilde{z}(t)) \end{cases} \quad (4.9)$$

式(4.7)在时刻 $t - \tau$ 的状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t-\tau) = y(t-\tau) \\ \dot{y}(t-\tau) = z(t-\tau) \\ \dot{z}(t-\tau) = -az(t-\tau) - y(t-\tau) + b - e^{x(t-\tau)} \end{cases} \quad (4.10)$$

式(4.10)减式(4.9), 得:

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = e_y(t) - l_1 e_x(t) \\ \dot{e}_y(t) = e_z(t) - l_2 e_y(t) \\ \dot{e}_z(t) = -a e_z(t) - e_y(t) - k_{x,\tilde{x}} e_x(t) - l_3 e_z(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

这里, $e_{x(t)} = x(t-\tau) - \tilde{x}(t)$, $e_y(t) = y(t-\tau) - \tilde{y}(t)$, $e_z(t) = z(t-\tau) - \tilde{z}(t)$. 上式也可以写为:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + g(X(t-\tau)) - g(\tilde{X}(t)) - Le(t) \quad (4.12)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}, \quad e(t) = \begin{bmatrix} x(t-\tau) - \tilde{x}(t) \\ y(t-\tau) - \tilde{y}(t) \\ z(t-\tau) - \tilde{z}(t) \end{bmatrix}, \quad g(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b - e^x \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} g(X(t-\tau)) - g(\tilde{X}(t)) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b - e^x - b + e^{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{x,\tilde{x}} e_x(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{x,\tilde{x}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau) - \tilde{x}(t) \\ y(t-\tau) - \tilde{y}(t) \\ z(t-\tau) - \tilde{z}(t) \end{bmatrix} = M_{x,\tilde{x}} e(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中

$$M_{x, \tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{x, \tilde{x}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 1 如果存在一个正定对称常矩阵 P , 使得

$$(A-L+M_{x, \tilde{x}})^T P + P(A-L+M_{x, \tilde{x}}) \leq \mu I < 0 \quad (4.14)$$

对相空间中所有的 X, \tilde{X} 都成立, 这里 μ 为负数, I 为单位矩阵。则误差系统(4.12)

在零点全局指数稳定, 从而系统 (4.9) 和系统 (4.10) 全局渐近同步。

证明: 选择 Lyapunov 函数

$$V = e(t)^T P e(t) \quad (4.15)$$

P 为正定对称矩阵, 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \\ &= [(A-L+M_{x, \tilde{x}})e(t)]^T P e(t) + e(t)^T P [(A-L+M_{x, \tilde{x}})e(t)] \\ &= e(t)^T [(A-L+M_{x, \tilde{x}})^T P + P(A-L+M_{x, \tilde{x}})] e(t) \\ &\leq \mu \|e(t)\|^2 \\ &< 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

这里 $\|\cdot\|$ 为欧几里得范数。

根据 Lyapunov 稳定理论, 系统 (4.12) 在零点全局指数稳定, 这样, 系统 (4.9) 和系统 (4.10) 全局渐近同步。

定理 1 从理论上证明了该方法的有效性, 问题的关键就在于确定 L 的范围。

令 $Q = (A-L+M_{x, \tilde{x}})^T P + P(A-L+M_{x, \tilde{x}})$, λ_i , $i=1,2,3$ 为 Q 的特征值。

若式(4.14)成立, 则

$$\lambda_i \leq \mu < 0 \quad i=1,2,3 \quad (4.17)$$

故我们选取 L , 使其满足式(4.17)。

定理 2 选取 $P = \text{diag}(p_1, p_2, p_3)$, 使其满足

$$l_i \geq \frac{1}{2p_i}(\bar{a}_{ii} + R_i - \mu) \quad i=1,2,3 \quad (4.18)$$

其中,

$$P(A + M_{x, \bar{x}}) + (A + M_{x, \bar{x}})^T P = [\bar{a}_{ij}] \quad R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 |\bar{a}_{ij}|$$

这样, 混沌系统 (4.9) 和系统 (4.10) 就全局渐近同步。

$$\begin{aligned} \text{证明: } Q &= (A - L + M_{x, \bar{x}})^T P + P(A - L + M_{x, \bar{x}}) \\ &= P(A + M_{x, \bar{x}}) + (A + M_{x, \bar{x}})^T P - LP - PL \\ &= P(A + M_{x, \bar{x}}) + (A + M_{x, \bar{x}})^T P - 2LP \end{aligned} \quad (4.19)$$

由矩阵论中的盖尔圆定理我们知道, 矩阵 Q 的任一特征值都在其盖尔圆内, 即 $\lambda_i - \bar{a}_{ii} - 2l_i p_i \leq R_i$, 而 $\mu \geq \lambda_i$, 即 μ 在 Q 的所有盖尔圆外, 故 $\mu - \bar{a}_{ii} - 2l_i p_i \geq R_i$, 这样我们就得到

$$l_i \geq \frac{1}{2p_i}(\bar{a}_{ii} + R_i - \mu)$$

定理 2 得证。

特别地, 选取 $P = I$ 可得

$$\begin{aligned} (A + M_{x, \bar{x}}) + (A + M_{x, \bar{x}})^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{x, \bar{x}} & -1 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_{x, \bar{x}} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -k_{x, \bar{x}} \\ 1 & 0 & 0 \\ -k_{x, \bar{x}} & 0 & -2a \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

我们可以选取

$$\begin{aligned} l_1 &\geq \frac{1}{2}(1 + k_{x, \bar{x}} - \mu) \\ l_2 &\geq \frac{1}{2}(1 - \mu) \\ l_3 &\geq \frac{1}{2}(-2a + k_{x, \bar{x}} - \mu) \end{aligned} \quad (4.21)$$

由 $0 < k_{x,\bar{x}} < 1$, 我们只要取

$$\begin{aligned} l_1 &\geq \frac{1}{2}(2-\mu) \\ l_2 &\geq \frac{1}{2}(1-\mu) \\ l_3 &\geq \frac{1}{2}(-2a+1-\mu) \end{aligned} \tag{4.22}$$

由定理 1, 我们可以实现系统(4.9)与(4.10)的全局渐近同步。

4.1.3 数值仿真

取 $\mu = -1$, 耦合参数 $l_1 = 1.51$, $l_2 = 1.1$, $l_3 = 0.32$, 则不等式(4.21)成立。

取驱动系统(4.10)的初值为 $x[0] = 0, y[0] = 0.8, z[0] = 0$, 响应系统(4.9)的初值为 $\bar{x}[0] = -0.1, \bar{y}[0] = 0.7, \bar{z}[0] = 0.1$, 结果表明虽然两系统的初值不同, 但最终实现了两个 WINDMI 混沌系统的时滞同步, 见图 4-3. 在数值模拟的过程中还发现, 当状态变量 $x(t-\tau)$ 和 $\bar{x}(t)$ 达到完全同步时, 在相同的参数和初值条件下, 状态变量 $y(t-\tau)$ 和 $\bar{y}(t)$, $z(t-\tau)$ 和 $\bar{z}(t)$ 也达到近似同步, 见图 4-4, 图 4-5。

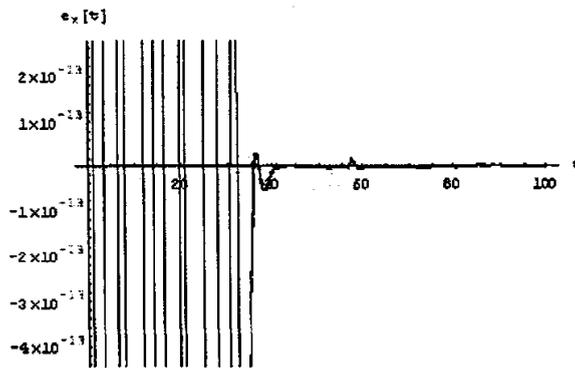
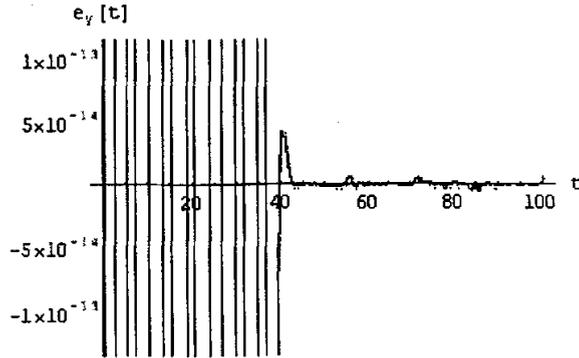
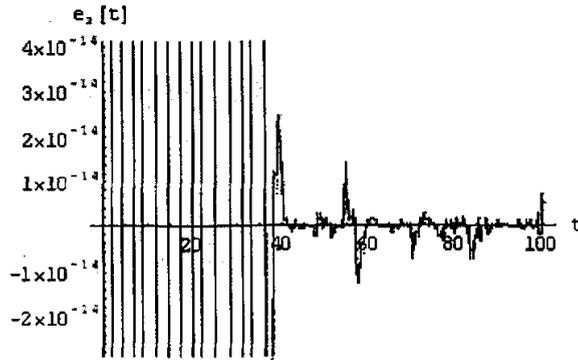


图 4-3 误差 e_x 随时间的演化过程

Fig. 4-3 Time evolution of valuable $e_x(t)$

图 4-4 误差 e_y 随时间的演化过程Fig. 4-4 Time evolution of valuable $e_y(t)$ 图 4-5 误差 e_z 随时间的演化过程Fig. 4-5 Time evolution of valuable $e_z(t)$

4.2 时滞混沌系统的时滞同步

第一部分我们介绍了驱动系统和响应系统当存在时间差时达到同步的情况，但在很多系统中，一个系统的不同状态变量之间也存在时间差。我们将讨论这类时滞系统的时滞同步情况，先给出同步原理，然后以 WINDMI 为例给出数值仿真结果。

4.2.1 方法原理

我们考虑下面的时滞混沌系统

$$\dot{x} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + g(x(t), x(t-\tau), t) \quad (4.23)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是系统的 n 维状态变量, τ 为时间延迟量, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n}$ 为常矩阵, $g: R^n \times R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ 为连续的非线性函数。假设

$$\begin{aligned} &g(x(t_1), x(t_1 - \tau), t_1) - g(\tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_2 - \tau), t_2) \\ &= M_1(x, \tilde{x})(x(t_1) - \tilde{x}(t_2)) + M_2(x, \tilde{x})(x(t_1 - \tau) - \tilde{x}(t_2 - \tau)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

有界矩阵 $M_i(x, \tilde{x})$ 和由 $x(t)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 决定 ($i=1,2$)。从单向耦合线性误差反馈方法, 将时滞考虑进去, 基于混沌系统 (4.23) 的响应系统可表示为:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{x}(t-\tau) + g(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau), t) + L(x(t-\eta) - \tilde{x}(t)) \quad (4.25)$$

这里, η 为未知的有限延迟常量, $L \in R^{n \times m}$ 为要设计的实现同步的耦合矩阵。

定义误差信号:

$$e(t) = x(t-\eta) - \tilde{x}(t) \quad (4.26)$$

这是 $t-\eta$ 时刻驱动系统与 t 时刻响应系统的状态误差。 η 为未知的常数, 同步要求 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|e(t)\| \rightarrow 0$

将式 (4.23) 中的 t 换为 $t-\eta$, 这样, $t-\eta$ 时刻驱动系统表示为

$$\dot{x} = Ax(t-\eta) + Bx(t-\tau-\eta) + g(x(t-\eta), x(t-\tau-\eta), t-\eta) \quad (4.27)$$

由式 (4.25) 和式 (4.27), 可得出误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + Be(t-\tau) + g(x(t-\eta), x(t-\tau-\eta), t-\eta) - g(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau), t) - Le(t) \\ &= (A + M_1(x, \tilde{x}) - L)e(t) + (B + M_2(x, \tilde{x}))e(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.28)$$

现在我们引入矩阵测度的概念。实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的测度定义为

$$\mu(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \varepsilon A(t)\| - 1}{\varepsilon}$$

其中, I 为单位矩阵。

当矩阵范数分别为下面时

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

我们有分别有下面的矩阵测度

$$\mu_1(A) = \max_j \left\{ a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right\}, \quad \mu_\infty = \max_i \left\{ a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}$$

定理 3 如果存在矩阵测度 μ , 使得

$$\mu(A + M_1(x, \tilde{x}) - L) + \|B + M_2(x, \tilde{x})\| < 0$$

则误差时滞系统(4.28)在初值全局渐近稳定, 即两个时滞混沌系统(4.23)和(4.25)全局渐近同步。

证明: 令 $\|\cdot\|$ 为向量范数, $\|\cdot\|$ 为由向量范数推出的矩阵范数。符号 $\mu(\cdot)$ 为由矩阵范数 $\|\cdot\|$ 推出的矩阵测度。令 $e(t)$ 为误差时滞系统(4.28)的解, 则

$$\begin{aligned} & \frac{d|e|}{dt} - \mu(A + M_1(x, \tilde{x}) - L)|e| - \|B + M_2(x, \tilde{x})\| \cdot |e(t - \tau)| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [|e(t + \varepsilon)| - \|I + \varepsilon(A + M_1(x, \tilde{x}) - L)\| \cdot |e(t)| - \varepsilon \|B + M_2(x, \tilde{x})\| \cdot |e(t - \tau)|] \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [|e(t + \varepsilon)| - [I + \varepsilon(A + M_1(x, \tilde{x}) - L)] \cdot e(t) - \varepsilon(B + M_2(x, \tilde{x}))e(t - \tau)] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \frac{e(t + \varepsilon) - e(t)}{\varepsilon} - (A + M_1(x, \tilde{x}) - L)e(t) - (B + M_2(x, \tilde{x}))e(t - \tau) \right| \end{aligned}$$

因为式(4.28)成立, 则

$$\frac{d|e|}{dt} \leq \mu(A + M_1(x, \tilde{x}) - L)|e| + \|B + M_2(x, \tilde{x})\| \cdot |e(t - \tau)| \quad (4.29)$$

将文献[14]的引理用到式(4.29)上, 我们能够证明定理 3 能够保证下面的式子渐近稳定

$$\frac{d|e|}{dt} = \mu(A + M_1(x, \tilde{x}) - L)|e| + \|B + M_2(x, \tilde{x})\| \cdot |e(t - \tau)|$$

这样, 我们证得时滞系统(4.23)和(4.25)全局渐近同步。

推论 1 如果至少满足下面其中一个条件, 时滞系统(4.23)和(4.25)全局渐近同步。

$$(1) \max_j \left\{ \tilde{a}_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |\tilde{a}_{ij}| \right\} < -\|B + M_2(x, \tilde{x})\|_1$$

$$(2) \max_i \left\{ \tilde{a}_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |\tilde{a}_{ij}| \right\} < -\|B + M_2(x, \tilde{x})\|_\infty$$

其中, $A + M_1(x, \tilde{x}) - L = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$

4.2.2 WINDMI 系统的时滞混沌同步

作为特殊情况, 我们研究 $B = M_2(x, \tilde{x}) = 0$ 的情况。这样问题就转化为研究第一部分中系统(4.9)与(4.10)的全局渐近同步。其中, $M_1(x, \tilde{x})$ 相当于第一部分中的 $M_{x, \tilde{x}}$ 在第一部分中,

$$A + M_{x, \tilde{x}} - L = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ 0 & -l_2 & 1 \\ -k_{x, \tilde{x}} & -1 & -a - l_3 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

这样, 应用推论 1, 我们只要选取 l_1, l_2, l_3 , 使得

$$\begin{aligned} \max\{-l_1 + k_{x, \tilde{x}}, -l_2 + 2, -a - l_3 + 1\} < 0 \quad \text{或者} \\ \max\{-l_1 + 1, -l_2 + 1, -a - l_3 + k_{x, \tilde{x}} + 1\} < 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

这样可以确定出 l_1, l_2, l_3 的范围。选取适当的参数, 可实现混沌同步

我们选取 $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 0.3$, 驱动系统(4.10)的初值分别取为 $x[0] = 0, y[0] = 0.8, z[0] = 0$, 响应系统(4.9)的初值分别取为 $\tilde{x}[0] = 0.01, \tilde{y}[0] = 0.69, \tilde{z}[0] = -0.01$, 也实现了两个 WINDMI 混沌系统的时滞同步, 见图 4-6, 图 4-7, 图 4-8。

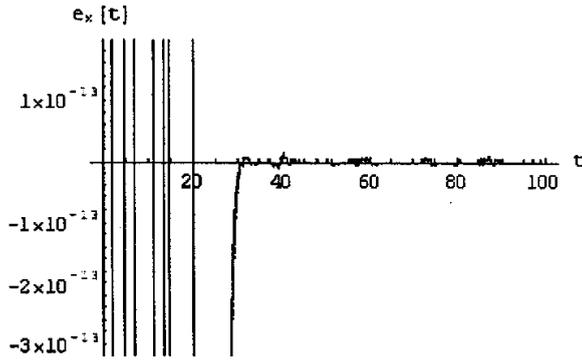


图 4-6 误差 e_x 随时间的演化过程

Fig.4-6 Time evolution of valuable $e_x(t)$

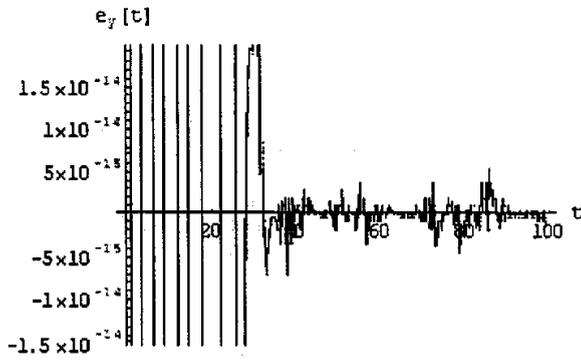


图 4-7 误差 e_y 随时间的演化过程

Fig. 4-7 Time evolution of valuable $e_y(t)$

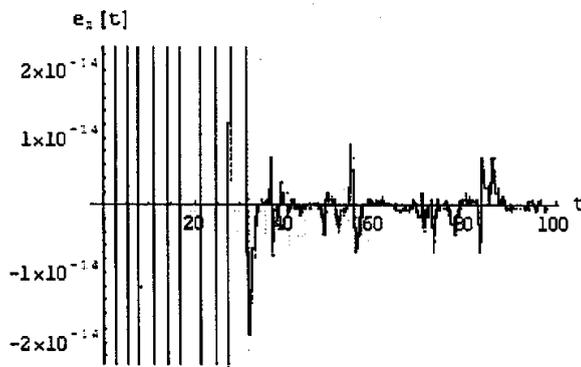


图 4-8 误差 e_z 随时间的演化过程

Fig. 4-8 Time evolution of valuable $e_z(t)$

第5章 非线性动力系统的双向耦合同步

自从发现混沌同步现象以来,人们对其进行了深入的研究,很大一部分是对同一耦合系统自同步的研究,根据耦合信号条件的不同,它们可以化分为双向耦合与单向耦合两部分。

由于结构简单,易于实行,在很多系统中都采用了线性误差反馈方案,这种方案的关键在于确定耦合参数,文献[19, 20, 21]对特定的系统确定耦合参数给出了一些特定的结果,文献[22, 23]对运用线性误差反馈方案研究单向耦合系统提出了全局混沌同步的条件,本章将对双向耦合同步方案进行研究,找出了 WINDMI 系统双向耦合同步的一般条件,最后给出数值仿真结果。

5.1 方法原理

同一混沌系统的双向耦合方案具有下面的形式:

$$\dot{x} = Ax + g(x) + D_1(y - x) \quad (5.1)$$

$$\dot{y} = Ay + g(y) + D_2(x - y) \quad (5.2)$$

其中, x 和 y 为混沌系统的 n 维状态向量, $A \in R^{n \times n}$ 为常数矩阵, $g: R^n \rightarrow R^n$ 为连续的非线性函数。 D_1 和 D_2 为双向耦合矩阵。

令 $e = x - y$, 我们得到系统 (5.1) 和 (5.2) 的误差系统

$$\dot{e} = (A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))e \quad (5.3)$$

其中, $g(x) - g(y) = M_{x,y}e$, $M_{x,y} = M(x, y)$ 为有界矩阵。

定理 1 如果存在一个正定对称矩阵 P 和一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$(A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))^T P + P(A + M_{x,y} - (D_1 + D_2)) \leq -\varepsilon I \quad (5.4)$$

对 x 和 y 一致成立, 其中 I 为单位矩阵, 则误差系统 (5.3) 全局稳定, 即系统 (5.1) 和 (5.2) 同步。

证明: 考虑下面的 Lyapunov 函数

$$V(t) = e^T(t)Pe(t)$$

求导得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)(A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))^T Pe(t) + e^T(t)P(A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))e(t) \\ &= e^T(t)((A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))^T P + P(A + M_{x,y} - (D_1 + D_2)))e(t) \\ &\leq -\epsilon e^T(t)e(t) \\ &< 0 \end{aligned}$$

其中, $e(t) \neq 0$. 这样, 定理得证。

当 $D_1 = 0$ 或 $D_2 = 0$ 时, 系统 (5.1) 和 (5.2) 就简化为单向耦合系统, 定理 1 同样适用。

5.2 实例

我们选取第四章的 WINDMI 系统作为例子, 由定理 1, 我们可以很容易确定出双向耦合的两个混沌系统达到同步的耦合参数。

根据式(5.1)和(5.2), 由式(4.7)构造线性双向耦合的驱动系统和响应系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + d_{11}(y_1 - x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 + d_{12}(y_2 - x_2) \\ \dot{x}_3 = -ax_3 - x_2 + b - e^{x_1} + d_{13}(y_3 - x_3) \end{cases} \quad (5.5)$$

和

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + d_{21}(x_1 - y_1) \\ \dot{y}_2 = y_3 + d_{22}(x_2 - y_2) \\ \dot{y}_3 = -ay_3 - y_2 + b - e^{y_1} + d_{23}(x_3 - y_3) \end{cases} \quad (5.6)$$

其中, d_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) 为耦合参数。

令 $e_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, 3$. 由式(5.5), (5.6), 我们可得下面的误差系统

$$\dot{e} = (A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))e \quad (5.7)$$

其中 $e = (e_1, e_2, e_3)^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -a \end{pmatrix}$, $M_{x,y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{x,y} & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$D_1 + D_2 = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & d_{12} + d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{13} + d_{23} \end{pmatrix}$$

选取正定对称作称矩阵 $P = \text{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$, $p_i > 0, i = 1, 2, 3$ 及任意常数

$\varepsilon > 0$, 则

$$\begin{aligned} & (A + M_{x,y} - (D_1 + D_2))^T P + P(A + M_{x,y} - (D_1 + D_2)) + \varepsilon I \\ & = \begin{pmatrix} -2p_1\left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1}\right) & p_1 & -p_3k_{x,y} \\ p_1 & -2p_2\left(d_{12} + d_{22} - \frac{\varepsilon}{2p_2}\right) & p_2 - p_3 \\ -p_3k_{x,y} & p_2 - p_3 & -2p_3\left(a + d_{13} + d_{23} - \frac{\varepsilon}{2p_3}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

由基本的代数理论我们知道, 式(5.8)负定当且仅当满足下面的条件:

$$\Delta_1 = -2p_1\left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1}\right) < 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 & = \begin{vmatrix} -2p_1\left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1}\right) & p_1 \\ p_1 & -2p_2\left(d_{12} + d_{22} - \frac{\varepsilon}{2p_2}\right) \end{vmatrix} \\ & = 4p_1p_2\left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1}\right)\left(d_{12} + d_{22} - \frac{\varepsilon}{2p_2}\right) - p_1^2 \\ & > 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2p_1\left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1}\right) & p_1 & -p_3k_{x,y} \\ p_1 & -2p_2\left(d_{12} + d_{22} - \frac{\varepsilon}{2p_2}\right) & p_2 - p_3 \\ -p_3k_{x,y} & p_2 - p_3 & -2p_3\left(a + d_{13} + d_{23} - \frac{\varepsilon}{2p_3}\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2p_3 \left(a + d_{13} + d_{23} - \frac{\varepsilon}{2p_3} \right) \Delta_2 + (p_2 + p_3)^2 (-\varepsilon + 2p_1(d_{11} + d_{21})) - 2p_1 p_3 k_{x,y} (p_2 - p_3) \\
 &\quad + p_3^2 k_{x,y}^2 (-\varepsilon + 2p_2(d_{12} + d_{22})) \\
 &< 0
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

即

$$\begin{cases}
 d_{11} + d_{21} > \frac{\varepsilon}{2p_1} \\
 d_{12} + d_{22} > \frac{p_1}{4p_2 \left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1} \right)} + \frac{\varepsilon}{2p_2} \\
 d_{13} + d_{23} > -a + \frac{\varepsilon}{2p_3} + \frac{(p_2 - p_3)^2 (-\varepsilon + 2p_1(d_{11} + d_{21}))}{2p_3 \Delta_2} - \frac{p_1 k_{x,y} (p_2 - p_3)}{\Delta_2} + \frac{p_3 k_{x,y}^2 (-\varepsilon + 2p_2(d_{12} + d_{22}))}{2\Delta_2}
 \end{cases} \tag{5.12}$$

由于混沌系统的轨道是有界的，通过选取适当的耦合参数 d_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$)，上面的不等式很容易实现。

为简单起见，令 $p_2 = p_3$ ，则式(5.12)变为

$$\begin{cases}
 d_{11} + d_{21} > \frac{\varepsilon}{2p_1} \\
 d_{12} + d_{22} > \frac{p_1}{4p_2 \left(d_{11} + d_{21} - \frac{\varepsilon}{2p_1} \right)} + \frac{\varepsilon}{2p_2} \\
 d_{13} + d_{23} > -a + \frac{\varepsilon}{2p_3} + \frac{p_3 k_{x,y}^2 (-\varepsilon + 2p_2(d_{12} + d_{22}))}{2\Delta_2}
 \end{cases} \tag{5.12}$$

这样，根据不等式(5.12)，我们通过选取适当的耦合参数，就可实现系统(5.1)和(5.2)的混沌同步。

5.3 数值仿真

令 $a = 0.7, b = 2.5$ ，则系统(4.7)表现出混沌行为，见图 4-1. 选取 $P = \text{diag}\{1,1,1\}$ ， $\varepsilon = 0.1$ ，满足式(5.12)的耦合参数分别取 $d_{11} = d_{21} = 0.1$ ， $d_{12} = d_{22} = 1$ ， $d_{13} = d_{23} = 6$ ，取驱动系统(5.1)的初值为 $x_1[0] = 0, x_2[0] = 0.8, x_3[0] = 0$ 取响应系统(5.2)的初值为 $y_1[0] = 10, y_2[0] = -0.7, y_3[0] = -0.1$. 结果表明虽然两系统的初值不

同，但最终实现了混沌同步，见图 5-1，图 5-2，图 5-3。

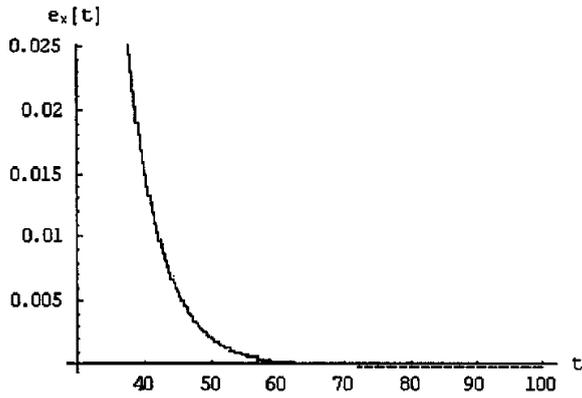


图 5-1 误差 e_x 随时间的演化过程

Fig. 5-1 Time evolution of valuable $e_x(t)$

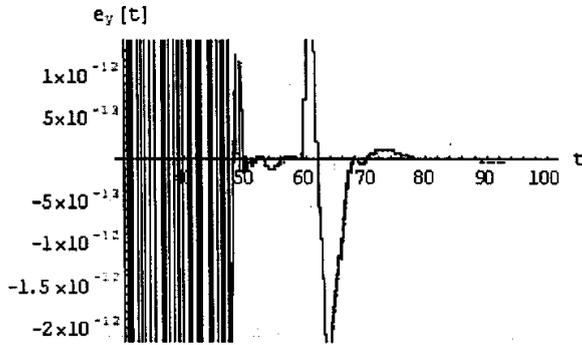


图 5-2 误差 e_y 随时间的演化过程

Fig. 5-2 Time evolution of valuable $e_y(t)$

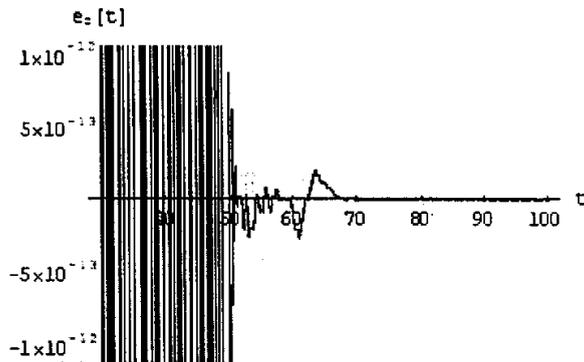


图 5-3 误差 e_z 随时间的演化过程

Fig. 5-3 Time evolution of valuable $e_z(t)$

耦合参数分别取 $d_{11} = d_{21} = 0.03$, $d_{12} = d_{22} = 13$, $d_{13} = d_{23} = 350$, 取驱动系统(5.1)的初值为 $x_1[0] = 0, x_2[0] = 0.8, x_3[0] = 0$ 取响应系统(5.2)的初值为 $y_1[0] = -1, y_2[0] = 0.69, y_3[0] = -0.01$. 最终也实现了混沌同步, 见图 5-4, 图 5-5, 图 5-6.

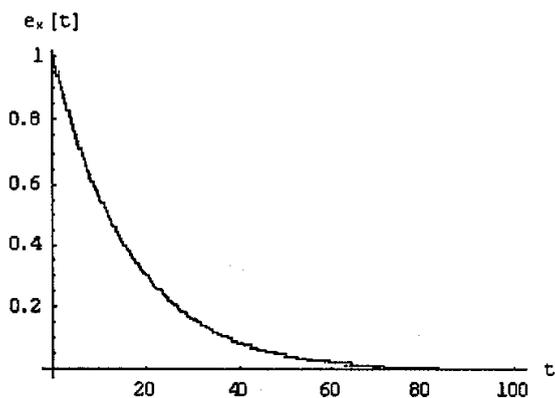


图 5-4 误差 e_x 随时间的演化过程

Fig. 5-4 Time evolution of valuable $e_x(t)$

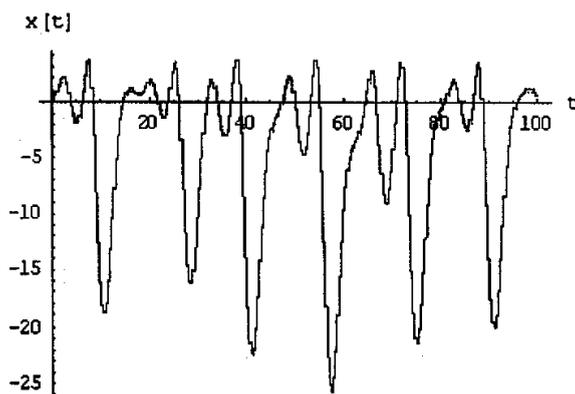


图 5-5 系统(6)中 $x(t)$ 的时间演化过程

Fig. 5-5 Time evolution of valuable $x(t)$ in system(6)

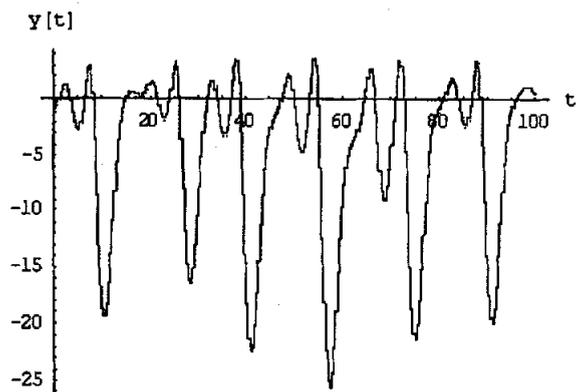


图 5-6 系统(7)中 $x(t)$ 的时间演化过程

Fig. 5-6 Time evolution of valuable $x(t)$ in system(7)

结束语

应用非线性控制法, 结合李雅普诺夫函数方法, 找到了一些适于混沌同步的非线性反馈函数, 实现了混沌系统的自同步。这将为混沌同步在实验上提供有用的新的可能途径。非线性反馈函数法通过选择反馈函数形式与反馈系数达到了混沌同步, 适用性较广, 在某些非线性系统下是较简便, 有效的。与线性反馈函数相比, 非线性反馈函数更为有效。

带有时滞的混沌同步问题是从单向耦合线性反馈的研究开始的, 本文在前人研究的基础上, 对大气物理学中的 MINDMI 系统提出了行之有效的方案。使后一时刻太阳风驱动的电离层和电离层的能量流趋向于前一刻的状态。这对物理学家研究太阳风湍流的特征和本质及预测太阳风对天体的影响有着重大意义。对接收系统存在时滞, 可通过选择适当的耦合参数实现全局混沌同步。本文运用耦合同步原理, 找出了 WINDMI 系统双向耦合同步的一般条件, 最后给出数值仿真结果。对耦合参数的选择范围的研究, 本文限于时间与精力没作深入研究, 这将是本人以后要讨论的课题之一。

参考文献

- [1] Shihua Li, Yu-Ping Tian. Finite Time Synchronization of Chaotic Systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2003, 15(2):303-310
- [2] Lu Jin-hu, Zhou Tian-shou, Zhang Suo-chun. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2002, 14(4): 529-541
- [3] 张正娣, 田立新. Chua's 系统的追踪控制与同步[J]. *江苏大学学报(自然科学版)*, 2003,24(6):9-12
- [4] 方天华. 用非线性反馈函数法研究蔡电子线路的混沌同步[J]. *原子能科学技术*, 1997,31(6):488-492
- [5] 丁丹平, 田立新. 映射系统的轨道引导控制[J]. *江苏理工大学学报(自然科学版)*, 2001,22(5):82-85
- [6] Julien Clinton Sprott. *Chaos and Time-Series Analysis* [M]. London, English, Oxford University Press. 2003
- [7] Enbo Wei. New Method to Obtain the Power Spectra of Hidden Variables And Its Application to Ocean Data [J]. *Chinese Journal of Oceanology and Limnology* 2001.19(1):29-34.
- [8] Chen G, Dong X, From chaos to order—methodologies, perspectives and applications [M]. Singapore: World Scientific; 1998
- [9] Cuomo KM, Oppenheim AV, Strogatz SH. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications [J]. *IEEE Trans Circ Syst II* 1993;40(10):626-33
- [10] Liao T-L, Tsai S-H. Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2000;11(9):1387-96
- [11] Guo-Ping Jiang, Wei Xing Zheng, Guanrong Chen. Global chaos synchronization with channel time-delay [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 20 (2004) 267-275
- [12] Jitao Sun. Global synchronization criteria with channel time-delay for chaotic time-delay system [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 21 (2004) 967-975
- [13] W. Horton, R. S. Weigel. Chaos and the limits of predictability for the solar-wind-driven

- magnetosphere-ionosphere system [J]. *American Institute of Physics* 8 (2001) 2946-2952
- [14] Sun JT, Zhang YP, Liu YQ, Deng FQ. Exponential stability of interval dynamical system with multidelay [J]. *Appl Math Mech* 2002; 31(1):95-9
- [15] Chen HF, Liu JM. Open-loop chaotic synchronization of injection-locked semiconductor lasers with Gigahertz range modulation [J]. *IEEE J Quant Electron* 2000;36(1):27-34.
- [16] Kawate J, Nishio Y, Ushida A. On synchronization phenomena in chaotic systems coupled by transmission line [J]. *Proc IEEE Int Symp Circ Syst* 2000 (ISCAS 2000).vol. III: 479-82 .
- [17] Koike R, Sekiya H, Miyabayashi N, Moro S, Mori S. Synchronization of two chaotic circuits coupled by delay line [J]. *Proc European Conf Circ Theory Design* 1997 (ECCTD'97); vol. 3:1280-5.
- [18] Yalcin ME, Suykens JAK, Vandewalle. Master-slave synchronization of Lur'e systems with time-delay. *Int J Bifurcat Chaos* 2001;1196):1707-22.
- [19] Suykens JAK, Vandewalle J. Master-slave synchronization of Lur'e systems. *Int J Bifurcat Chaos* 1997; 7(3):665-9.
- [20] Curran pf, Suykens JAK, Chua LO. Absolute stability theory and master-slave synchronization. *Int J Bifurcat Chaos* 1997;7(12):2891-6.
- [21] Liao XX, Chen GR. Chaos synchronization of general Lur'e systems via time-delay feedback control [J]. *Int J Bifurcat Chaos* 2003;13(1):207-13.
- [22] Jiang GP, Tang W. A global synchronization criterion for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach [J]. *Int J Bifurcat Chaos* 2002;12(10):2239-53.
- [23] Jiang G, Tang W, Chen G. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 2003;15(5):925-35.
- [24] Tsay S, Huang C, Qiu D, Chen W. Implementation of bidirectional chaotic communication systems based on Lorenz circuits [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 2004;20(3):567-79.
- [25] Boyd S, Ghaoui L, Feron EL, Balakrishnan E. Linear matrix inequalities in system and control theory [J]. *Philadelphia, Pennsylvania: AIAA*;1994.
- [26] Gu K. A generalized discretization scheme of Lyapunov functional in the stability problem

- of linear uncertain time-delay systems [J]. *Int J Robust Nonlinear Control* 1999;9:1-14
- [27] Niculescu SI, Lozano R. On the passivity of linear delay systems [J]. *IEEE Trans Autom Control* 2001;46(3):460-4.
- [28] Xu BG. Further results on the stability of linear systems with multiple delays [J]. *J Math Mnal Appl* 2002;267:20-8.
- [29] Gu K. An improved stability criterion for systems with distributed delays [J]. *Int J Robust Nonlinear Control* 2003;13:819-31.
- [30] Lorenz EN. Deterministic non-periodic flows [J]. *J Atmos Sci* 1963;20:130-41.
- [31] Chen S, Lu J. Synchronization of uncertain unified chaotic system via adaptive control [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 2002;14(4):643-7.
- [32] Chen S, Zhang Q, Xie J, Wang C. A table-manifold-based method for chaos control and synchronization [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 2004;20(5):947-54.
- [33] Liao T. Adaptive synchronization of two Lorenz systems [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 1998;9(9):1555-61.
- [34] Bai E, Lonngren K. Synchronization of two Lorenz systems using active control [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 1997;8(1):51-8.
- [35] Bai E, Lonngren K. Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control [J]. *Chaos, Solitons & Fractals* 2000;11(7):1041-4.
- [36] 关新平, 范正平, 陈彩莲. 混沌控制及其在保密通信中的应用[M]. 第一版. 北京. 国防工业出版社. 2002.
- [37] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌[M]. 第一版. 北京. 电子工业出版社. 2003.

攻读硕士学位期间发表论文目录

- [1] 王俊霞, 卢殿臣, 田立新, 张正娣, 用非线性反馈法实现混沌系统自同步, 江苏大学学报(自然科学版), 2004, 25(4).
- [2] 卢殿臣, 王俊霞, 田立新, WINDMI 系统的全局时滞混沌同步, 江苏大学学报(自然科学版), 2004, 26(4).
- [3] 王俊霞, 卢殿臣, 田立新, Global synchronization for time-delay of WINDMI system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 录用.

致 谢

本文是在导师卢殿臣教授的精心指导下完成的。导师渊博的学识、敏锐的洞察力使我深深敬佩，他的严谨的治学品德及谆谆教诲使我受益匪浅。三年来，他总是给我以热情的关怀和鼓励，对我的论文从选题到写作都倾注了大量的心血。在此，向卢老师表示衷心的感谢。

同时，我要特别地感谢理学院院长田立新教授对我的指导和鼓励，衷心地感谢他在本人的学习中给予的极大关心和帮助，并认真修改了本论文。感谢丁丹平博士、王学弟博士的不吝赐教；感谢张正娣博士在数值模拟方面提供的帮助，也感谢单红梅、曹海霞、朱敏、于水猛、钟光胜等同学在论文写作期间进行的有益的讨论和帮助。

感谢父母给我的无私奉献和关怀。

最后，也感谢数学系的领导和老师为我提供的一切帮助。