

内 容 摘 要

近年来我国不少学者利用中国利率数据进行了短期市场利率时间序列的动态规律研究。从目前国内该领域的研究成果来看,大多数学者使用一些具有短期记忆特征的模型(如 Vasicek、CIR 和 CKIS 等模型)来刻画时间序列的动态规律,同时在研究中引入了条件异方差(ARCH 族)、随机波动等模型来刻画利率变动的非正态性以及波动聚类效应等。

实证分析表明,金融市场上多数收益率的时间序列往往表现出明显的长期相关性,即长记忆性。短记忆性可以由传统的 ARMA 类模型来刻画,而长记忆性则可以利用分整过程 $I(d)$ 来描述,其中 d 是一个具体的实数。金融时间序列呈现出的尖峰肥尾的特征既可以由条件异方差性引起,也可以由长记忆过程引起。对于我国的市场利率时间序列而言,尖峰肥尾的特征同样普遍存在,但目前主要是用 ARCH 类模型来拟合。然而,我国短期市场利率是否也具有长记忆特征呢?如何建立能够同时捕捉长短记忆特性的动态模型?

本文较详细地阐述了长记忆时间序列及其各类模型,介绍了长记忆性的检验方法和模型估计,并以中国短期市场利率作为实证研究对象。我们对有代表性的 7 天期和 14 天期两种回购利率的时间序列进行了长记忆性的检验与比较,在此基础上通过一个 ARFIMA-GARCH 模型来刻画利率的长短记忆性,从而使我们进一步认识了利率市场的动态规律。

本文的创新之处有以下几个方面:1、对中国短期市场利率的动态行为首次采用长记忆时间序列模型进行研究;2、将得分检验法和 ARFIMA 模型估计相结合来检验判定序列是否具有长记忆性;3、使用改进的 Hosking 迭代法来估计 ARFIMA-GARCH 模型。

关键词: 长记忆模型; 得分检验法; 改进 Hosking 迭代法

Abstract

Instantaneous spot rates are key endogenous variables when we study the term structure of interest rates, and because of its basic affections on term structure of interest rates and modern finance, many people want to describe its dynamic change rules. However, we find short-term memory models (such as Vasicek, CIR and CKIS models) are used most frequently, in addition, we use such as conditional heteroscedastic models and stochastic volatility models to describe abnormal disturbance, and volatility clusters in interest rates.

Nowadays many people find there are always long period correlativity say, long-term memory, existed in time series of finance. We use such as ARMA models to describe short memory, as to long memory we use a fractional integrated process $I(d)$ to do this job, here d is a real number. Excess kurtosis and fat tail characteristics in time series of interest rates indicates that the series is a nonlinear stochastic process which can be caused by conditional heteroscedastic(*ARCH*) or caused by long memory. While most studies on interest rates at home focused on the former. So our question is whether there is long memory in Chinese interest rates and how to describe it?

As many people in China used short memory models to study short market interest rate, in this article, we introduce long memory models of time series, ways to test long memory and model estimation. As short repo rates in China are quit representative of short market rates, we test and compared long and short term memories in 7-day and 14-day short repo rates, and using a *ARFIMA-GARCH* model to describe both long and short memories in interest rates.

The major contributions of this dissertation are: (1) first use long memory models to study time series of short market interest rates in China; (2) using score test together with estimating *ARFIMA* model test long memory in time series; (3) estimate *ARFIMA-GARCH* model Hosking's iteration method which has been improved by us.

Key words: Long-Term Memory Model; Score Test; Improved Hosking's Iteration Method

厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。
本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式表明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：孙华

2006 年 5 月 8 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

- 1、保密 ()，在 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密 (✓)

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名: 孙志华 日期: 2006 年 5 月 8 日
导师签名: 黄长全 日期: 2006 年 5 月 8 日

引言

利率期限结构 (interest rate term structure) 是某个时点不同期限的利率所组成的一条曲线, 其中短期市场利率 (short market rate) 是有决定性作用的内生变量, 其动态规律的研究在金融领域一直受到广泛的关注。许多学者力图通过各种模型来刻画短期利率的动态规律, 如 Vasicek (1977) 和 Cox, Ingersoll & Ross (CIR, 1985), Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders (CKLS, 1992) 等模型。目前国内学者在研究中国短期市场利率时仍主要是借鉴国外同行的研究成果, 普遍使用 CIR、CKLS 等模型来刻画利率水平的变动规律, 如谢赤和吴雄伟 (2002) 通过广义矩方法, 使用中国货币市场的数据, 对 Vasicek 模型和 CIR 模型进行了实证检验。由于利率时间序列分布具有尖峰肥尾的非正态性特征, 不少学者在研究利率波动时引入了随机波动、条件异方差 (ARCH 族) 等模型加以刻画利率变动的非正态性、尖峰性以及波动聚类效应, 如林海和郑振龙 (2004) 通过一个可变波动率的纯跳跃模型对中国政府利率变动行为进行了模拟和分析, 并在考虑 GARCH 效应的基础上研究了中国市场利率的动态行为。

Vasicek、CIR 等模型解释的是利率时间序列中滞后 1 到 2 期对利率当期水平变动的影 响, 本质上研究的是利率时间序列的短期相关性问题。国内学者在研究过程中一般将短期利率的时间序列处理成一平稳过程 $I(0)$, 原始序列不平稳时一般是进行一阶差分处理。此时序列间的短期相关性体现在自回归过程中, 可以用 ARMA 类模型来拟合, 如孙继国和伍海华 (2004) 用 ARIMA 模型对我国银行间同业拆借利率进行拟合。然而越来越多的实证分析表明, 金融市场上的多数收益率时间序列往往表现出明显的长期相关性, 即长记忆性。近年来, 许多国外学者进一步认识到利率的时间序列可能既包含长记忆性也包含短记忆性。短记忆性可以由传统的 ARMA 类模型来刻画, 而长记忆性则可以利用分整过程 $I(d)$ 来描述, 其中 d 是一个具体的实数。如果 $0 < d < 1$, 则序列可表现出高度持续性即长记忆性。

在用分整技术对利率时间序列进行研究的过程中, Backus 和 Zin (1993) 与 Pfann, Schotman 和 Tschering (1996) 都发现美国的短期利率存在长记忆性, 从而提高了利率期限结构模型的适用性。相似地, Tkacz (2001) 利用 Jensen (1999) 的小波

OLS 估计法估计了美国和加拿大一些利率的分整参数,发现大多数是均值回归的,分整的阶数随着期限的接近而增加。Gil-Alana(2004)在研究美国月份市场利率时利用 Robinson (1994)的方法得到 $d = 0.79$ 。相对于国外同行的大量研究,国内似乎还没有学者用分整技术对利率时间序列的长短记忆性进行过研究。

大量的实证研究都说明多数金融时间序列都呈现出尖峰肥尾的特征。而这种特征既可以由 ARCH 类模型描述的条件异方差性引起,也可以由称着服从 Pareto-levy 分布的长记忆性引起(Peters, 1994),两者在刻画金融市场行为时表现出的区别在于对市场信息反应方式的不同。短记忆过程说明信息的反应方式只是短期内的,有时又是偶尔以成堆的方式出现。而长记忆过程说明信息反应的方式是平滑连续式的,投资者以累计的方式对所有以前的信息做出反应。因此研究利率是否具有长记忆特征为我们更深入地认识利率变化的动态规律和资本市场的特征无疑具有重要意义。对于我国的市场利率以及别的金融时间序列而言,尖峰肥尾的特征同样普遍存在,但目前主要是用 ARCH 类模型来拟合。然而,我国的市场利率时间序列是否也具有长记忆特征呢?如何建立能够同时捕捉长短记忆等特性的动态模型?

本文较详细地阐述了长记忆时间序列及其各类模型,介绍了长记忆性的检验方法和模型估计,并以中国短期市场利率作为实证研究对象。由于短期国债回购利率可较好地反映我国短期市场利率的特征,我们对有代表性的 7 天期和 14 天期两种回购利率的时间序列进行了长记忆性的检验与比较,在此基础上通过一个 *ARFIMA-GARCH* 模型来刻画利率的长短记忆性。从而使我们进一步认识了利率市场的动态规律。

第一章 长记忆时间序列及文献综述

“有一种违背随机游动假设且在我们至今所研发的统计框架之外的现象,这就是长期相关性,即长记忆性。”(Campbell, Lo and MacKinlay (1997))长记忆时间序列表现出异乎寻常的高度持续性,久远的过去观察值与未来观察值有着非凡的相关性。自然界中大量存在的长记忆性在诸如水文学、气象学等自然科学的研究中已经得到了很好的证明,而经济和金融时间序列的长记忆性研究也得到了越来越多的重视。

第一节 长记忆时间序列

1. 时间序列长记忆性的定义

20世纪50年代,统计学家在物理学、水文学等领域发现了时间序列的长记忆性。Hurst (1951)第一次提出了时间序列长记忆性的问题。Rosenblatt在1956年提出了短范围相依过程的概念。

定义1: 假设离散时间序列 $\{x_t\}$, $t=1,2,3,\dots,T$, 其部分和为

$$S_T = \sum_{t=1}^T x_t \quad (1.2.1)$$

如果 $\lim_{T \rightarrow \infty} E[T^{-1}S_T^2]$ 存在且非零, 并且有

$$\frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{T}} S_{[rT]} \Rightarrow W(r), \quad r \in [0,1] \quad (1.2.2)$$

这里 $W(r)$ 为标准维纳过程, 则称 $\{x_t\}$ 为短范围相依(short range dependence)过程。

短范围相依过程反映了时间序列的强混合性(strong mixing)和短记忆的特点。强混合是短记忆中的一个概念, 如果时间序列任意两点间的相依性随着时间间隔的增加而变得很小, 就称时间序列是强混合的。一般将短记忆称为强混合过程, 而将长记忆称为非强混合过程。传统的时间序列如ARMA等都以短记忆时间序列为研究对象。

定义 2: 假设时间序列 $\{x_t\}$ 具有自相关函数 ρ_τ (τ 为滞后阶数), 如果 $|\rho_\tau|$ 满足条件:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\tau=-n}^n |\rho_\tau| \rightarrow \infty \quad (1.2.3)$$

则称 $\{x_t\}$ 为长记忆时间序列 (Mcleoad 和 Hipel);

定义 3: 如果平稳时间序列 $\{x_t\}$ 的自相关函数 ρ_τ 依负幂指数率 (双曲率) 随滞后阶数 τ 的增大而缓慢下降, 即

$$\rho_\tau \sim C\tau^{2d-1}, \quad \tau \rightarrow \infty \quad (1.2.4)$$

其中 C 为常数, \sim 表示收敛速度相同, 则称 $\{x_t\}$ 为长记忆时间序列 (Brockwell)。

定义 4: 从时域角度出发, 假设时间序列 $\{x_t\}$ 的谱密度 $f(w)$ 具有以下性质, 则序列具有长记忆性 (Granger)。

- (1) $f(w)$ 随频率 $w \rightarrow 0$ 而趋于无穷;
- (2) $f(w)$ 在除去至多有限个 w 值外的所有其他 w 值上有界。

以上定义从不同的角度为时间序列是否具有长记忆性进行了定义, 这为我们判断长记忆时间序列提供了不同的方法。总的说来, 定义 1 和 2 在实际应用中显得比较抽象因而不是很常用, 大多学者主要还是从定义 3 和 4 来判定时间序列是否具有长记忆性。

2. 分数布朗运动

有效市场理论将价格的波动描述为布朗运动, 布朗运动是连续时间序列的随机过程, 我们记为 $B(s)$ 。有别于标准的布朗运动, Mandelbrot 和 Van Ness (1968) 提出了分数布朗运动 (Fractional Brownian Motion, FBM), 记为 $B_H(t)$, 其中 H 满足 $0 < H < 1$ 。

对于 $t > 0$, 零时刻的初始值 b_0 为任意实数值, $B_H(t)$ 为:

$$B_H(t) = B_H(0) + \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_0^t \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right\}$$

$$B_H(0) = b_0 \quad (1.2.5)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数, $B(s)$ 为布朗运动 (维纳过程)。对于 $t < 0$ 情况类似。式中 H 为 Hurst 指数。

Levy (1953) 简明地给出了一种 FBM 的定义式:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^0} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \quad (1.2.6)$$

分数布朗运动 $B_H(t)$ 的谱密度与 ω^{-2H-1} 成比例, 其自协方差函数为

$$E|B_H(t) - B_H(s)|^2 = \sigma^2 |t-s|^{2H}, \quad \sigma \text{ 为常数}$$

且

$$\gamma_k = Ck^{2H-2}, \quad C \text{ 为常数}$$

即 γ_k 与 k^{2H-2} 成比例, 说明其自协方差函数呈双曲率缓慢下降, 这与布朗运动的自协方差函数呈指数率下降形成对比。布朗运动的记忆性是短记忆, 而分数布朗运动的记忆性为长记忆。

3. 分数差分噪声

在离散情况下, FBM 成为分数差分噪声。Granger(1980) 针对长记忆时间序列的特点提出分数差分噪声模型 (fractional differenced noise, FDN), 如果时间序列 $\{x_t\}$ 满足差分方程

$$(1-L)^d x_t = \varepsilon_t \quad (1.2.7)$$

其中 $|d| < 0.5$, $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声序列, 则称 $\{x_t\}$ 为分数差分噪声。

对于任何实数 $d > -1$, 有

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j L^j$$

其中

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 < k \leq j} \frac{k-1-d}{k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

对于 (1.2.7) 式, 两边同时乘以 $(1-L)^{-d}$, 得到:

$$x_t = (1-L)^{-d} \varepsilon_t \quad (1.2.8)$$

其中

$$\begin{aligned} (1-L)^{-d} &= 1 + dL + (1/2!)(d+1)dL^2 + (1/3!)(d+2)(d+1)dL^3 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j L^j \end{aligned}$$

且

$$h_0 \equiv 1$$

$$h_j = (1/j!)(d+j-1)(d+j-2)(d+j-3)\cdots(d+1)d$$

Hamilton (1994) 证明如果 $d < 1$, 对于大的 j , h_j 可以近似做

$$h_j \cong (j+1)^{d-1} \quad (1.2.9)$$

因此, (1.2.8) 可以表示成

$$x_t = (1-L)^{-d} \varepsilon_t = h_0 \varepsilon_t + h_1 \varepsilon_{t-1} + h_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (1.2.10)$$

上式描述了一个 $MA(\infty)$ 过程, 对于大的 j , 其脉冲响应函数 h_j 的行为像 $(j+1)^{d-1}$ 。而我们知道一个 $AR(1)$ 过程 $x_t = (1-\phi L)^{-1} \varepsilon_t$ 相应的脉冲响应函数为 ϕ^j 。一个平稳的 $ARMA$ 过程的脉冲响应函数是几何衰减, 而 (1.2.10) 意味着衰减更慢, 从而序列 $\{x_t\}$ 表现为长记忆性。

关于分数差分噪声序列的性质, 有如下定理:

- (1) 序列当 $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ 时, $\{x_t\}$ 时平稳、可逆的。且其具有 Wold 分解式:

$$x_t = \psi(L)a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{t-k}, \text{ 和自回归表达式 } a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k x_{t-k}, \text{ 其中 } \{a_t\} \text{ 为}$$

白噪声序列, 系数 ψ_k 和 π_k 都呈双曲率下降, $\{x_t\}$ 为长记忆过程。

- (2) $\{x_t\}$ 的谱密度

$$f(\omega) = (2 \sin \frac{\omega}{2})^{-2d}, \quad 0 < \omega \leq \pi$$

且

$$f(\omega) \sim \omega^{-2d}, \quad \omega \rightarrow 0$$

(3) $\{x_t\}$ 的自协方差函数

$$\gamma_k = E[x_t, x_{t-k}] = \frac{(-1)^k (-2d)!}{(k-d)(-k-d)!}$$

其自相关函数为

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-d)!(k+d-1)!}{(d-1)!(k-d)!}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

(4) $\{x_k\}$ 的偏自相关函数为

$$\varphi_{kk} = \frac{d}{k-d}, \quad k = 1, 2, \dots$$

另外, 比 FDN 序列更为广泛的是 d 阶分整序列。

4. d 阶分整序列

如果序列 $\{x_t\}$ 满足差分方程

$$(1-L)^d x_t = a_t \tag{1.2.11}$$

这里 $|d| < 0.5$, $\{a_t\}$ 是平稳序列, 且在各频率上具有有界且大于零的谱密度, 称 $\{x_t\}$ 为 d 阶分整序列。可见, 分整序列比分数差分噪声范围要广, 而分数差分噪声序列是分整序列的特殊情况。

第二节 文献综述

80 年代中期以后计量经济学家们对单位根和协整做了大量的工作, 在这以后他们对许多经济和金融时间序列中近似的非平稳和持续性特征的细微之处和多样性产生了兴趣。90 年代初他们重新开始研究分数布朗运动和长记忆过程。提出这些概念的是水文学家 Hurst (1951), 接着有 Granger (1981), Granger 和 Joyeux (1980), Hosking (1981) 建立和分析了现在广为人知的 ARFIMA 过程的普遍性

质。这些文章加上 Geweke 和 Porter-Hudak (1983) 在长记忆参数估计方面的工作使计量经济学家在这一课题上产生了大量的兴趣。90 年代以来大量的研究集中在长记忆过程的估计和检验以及在经济和金融领域的大量应用。我们先回顾一下长记忆过程研究中的一些重要文章。

Baillie (1996) 的 Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, 文章详细讨论了长记忆过程中均值和方差的推论性的普遍性质, 文章还讨论了分整技术在经济和金融领域大量的不断涌现出的应用。

以下的几篇文章对各种新形式的长记忆过程的性质进行了讨论。首先是 Granger 和 Ding (1996) 提出了广义记忆的新概念, 并从集合论出发发展了一般分整模型, 同时还考虑了各种系数依赖于时间的非线性模型。这篇文章为进一步的研究提供了许多新的长记忆模型。

Kokoszka 和 Taqqu (1996) 的文章将长记忆的概念延伸到有平稳对称分布和无限方差序列的移动平均过程。因而 Wold 分解的系数是有规律变动的搅动项的函数, 而搅动项是平稳分布的。作者在分析此类序列时介绍了“协差”(codifference) 的新概念。

Comte 和 Renault (1996) 将长记忆性引入到一类连续时间随机微分方程中。他们检验了连续时间分整 ARMA 过程的各个方面。这些处理方法使我们用明显不同的方法获得分整 ARMA 过程和有分数差分白噪声的 ARMA 过程统一起来。

接下来有两篇文章关注了收益率序列中高阶矩长记忆性的存在并且可直接应用到金融领域中。Ding, Granger 和 Engle (1993) 注意到资产收益中的此类现象。Baillie, Bollerslev 和 Mikkelsen (1996) 发展了分整 GARCH, 或者 FIGARCH 模型来体现波动中的长记忆性。Bollerslev 和 Mikkelsen (1996) 的文章将这一模型拓展到分整指数 GARCH 模型, 这一模型相对 FIGARCH 模型来说可以体现搅动项的不对称性。他们发现 FIGARCH 模型很好地描述了 S&P500 商品指数, 还论述了期权价格公式执行中的适当性。

Ding 和 Granger (1996) 检验了 4 种投机收益序列的长记忆特征。他们考虑了这样一类过程: 在收益率序列中无法产生长记忆性, 但在绝对值和幂转换收益序列中会产生长记忆性。这一工作发现了一些有趣的事实, 对理解价格风险有着潜在的重要影响。

以后的众多文章都是对长记忆模型各个方面的推论。首先, Hosoya (1996) 分析了伪似然方法在估计向量 ARFIMA 过程参数中的应用, 讨论了参数估计的大样本性质。

Chung (1993) 的文章讨论了估计 Gegenbauer 过程参数的理论, 此过程就是在分整幂级数中滞后算子表现为二阶自回归多项式的形式。这一过程的自相关函数表现为双曲线和正弦曲线形式的衰减。文章还讨论了参数估计的渐进理论, 并用模拟技术说明了近似 MLE 方法的可靠性。

Hosking (1981) 给出了 ARFIMA 过程样本自协方差函数和样本自相关函数的渐进分布。有趣的是在他的分析结果中估计量的收敛速度和他们的真实值有所不同。而收敛速度取决于由真实分整参数占据的参数空间。这些结果在研究半参数估计的有效性中有很大的作用。

Lee 和 Schmidt (1996) 研究了在原假设序列为 $I(0)$ 平稳下, KPSS 检验在发现备择假设序列为长记忆平稳的有用性。这一检验最初用于检验原假设序列为 $I(0)$ 平稳, 而备择假设为 $I(1)$ 单位根过程。作者表明 KPSS 检验在备择假设为长记忆平稳 $I(d)$ 时同样具有一致性, 并通过模拟表明这一检验的势 (power) 大致上同重标极差检验统计量的势相当。

在 Lobato 和 Robinson (1996) 的文章中, 他们考察了基于频域的半参数方法来估计长记忆参数 H_d 。他们给出了这一检验统计量的极限分布, 同时通过模拟技术研究了有限样本下的行为。

九十年代中期以后, 长记忆时间序列的各类模型在经济金融的各个领域都得到了大量的应用, 研究成果也十分的丰富, 从而越来越多的学者加入到这一领域的研究中来。

Andersen 和 Bollerslev (1997) 对为期一年的每 5 分钟的德国马克对美元汇率的高频数据进行研究, 发现收益率的波动具有长期相关性, 长记忆性是收益率序列产生过程中的固有特性, 而非偶然性的结构变动的显示。

Arteche (2002) 利用半参数的 Wald 和 Lagrange 乘子检验法 (LM) 研究了具有季节性和循环性的长记忆时间序列, 其方法相比 Robinson 检验法 (1994) 更具有稳健性。

Arteche 和 Robinson (2000) 利用谱分析研究了具有季节性和循环性且不对称

的长记忆时间序列过程 (SCALM), 在长记忆性参数估计中使用了两种非参数方法: 对数周期图法 (log-periodogram) 和whittle法, 在检验非对称性方面则使用了三种方法。

在我国较早对长记忆时间序列的研究学者有张世英等, 但是国内在这一领域的研究, 不管是理论探讨还是实际应用, 相比国外学者的研究都显得颇有不足。

第二章 长记忆时间序列的各类模型

在金融市场中，我们发现大部分收益率序列是由长期记忆特征化的，今天的市场活动影响非常长的将来。对于消除序列相关最通常用的方法 AR(1)来说，它的残差无法去掉长期记忆的影响。长期记忆的客观存在促使计量经济学家和统计学家在长记忆模型研究方面投入了大量的精力，从而在对长记忆时间序列模型研究中涌现出大量的研究成果。

第一节 ARFIMA 模型

上一章中我们提到的 FDN 模型只考虑了时间序列的长记忆性，忽略了时间序列的短记忆性。为了弥补其不足，Granger (1980) 和 Hosking (1981) 分别提出了分整自回归移动平均模型 (autoregressive fractional integrated moving average model)，简称 ARFIMA 模型。

1. ARFIMA 模型

若时间序列 $\{x_t\}$ 满足差分方程

$$\phi(L)(1-L)^d(x_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.1.1)$$

其中 L 为滞后算子， $|d| < 0.5$ ， $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声序列， μ 为 $\{x_t\}$ 的均值。 $\phi(L)$ 与 $\theta(L)$ 分别是 p 阶和 q 阶平稳的自回归算子和可逆的移动平均算子，其所有特征根均在单位圆外，且没有公因子。则称 $\{x_t\}$ 满足分整自回归移动平均模型，记为 $ARFIMA(p, d, q)$ 。进一步推广时， d 可为任意实数。

由 (2.1.1)，若 $\{x_t\}$ 服从 $d \in (-0.5, 0.5)$ 的 $ARFIMA(p, d, q)$ 过程，当且仅当 $(1-L)^d(x_t - \mu)$ 是一个 $ARMA(p, q)$ 过程，另外，模型 (2.1.1) 可以演化为

$$\phi(L)(x_t - \mu) = \theta(L)(1-L)^{-d}\varepsilon_t = \theta(L)\eta_t \quad (2.1.2)$$

其中 $\eta_t = (1-L)^{-d}\varepsilon_t$ 为分数差分噪声。因此， $\{x_t\}$ 也可以看成是由分数差分噪声 η_t

导出的 $ARMA(p, q)$ 过程。

$ARFIMA(p, d, q)$ 模型用 $p+q$ 个参数描述过程的短记忆特性, 以参数 d 反映过程的长记忆特征。因此 $ARFIMA$ 模型综合考虑了过程的长、短记忆特性, 它既优于单独描述短记忆的 $ARMA$ 模型, 又优于单独描述长记忆性的 FDN 模型。另外, 当 $p=q=0$ 且 $\mu=0$ 时, $ARFIMA(p, d, q)$ 模型退化成 FDN 模型。

2. $ARFIMA(p, d, q)$ 模型的性质

关于 $ARFIMA(p, d, q)$ 模型的性质, 有定理如下。

设 $\{x_t\}$ 是 $d \in (-0.5, 0.5)$ 且符合模型 (2.1.1) 的 $ARFIMA(p, d, q)$ 过程, 其模型中的多项式 $\phi(L)$ 与 $\theta(L)$ 无公共根, 则

(1) 如果 $\phi(L) \neq 0, |L| \leq 1$, 则式 (2.1.1) 有唯一的平稳解:

$$x_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j (1-L)^{-d} \varepsilon_{t-j} \quad (2.1.3)$$

其中 ψ_j 有下式给出

$$\theta(L)\phi^{-1}(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j L^j \quad (2.1.4)$$

(2) $\{x_t\}$ 平稳的充分必要条件是 $\phi(L) \neq 0, |L| \leq 1$;

(3) $\{x_t\}$ 可逆的充分必要条件是 $\theta(L) \neq 0, |L| \leq 1$;

(4) 如果 $\{x_t\}$ 平稳且可逆, 则对 $d \neq 0$, 其自相关函数满足

$$\rho_\tau \sim C\tau^{2d-1}, \quad \tau \rightarrow \infty$$

其中 C 为常数。其谱密度为

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})} \right|^2 |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} \quad (2.1.5)$$

$$\sim \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\frac{\theta(1)}{\phi(1)} \right)^2 \omega^{-2d}, \quad \omega \rightarrow 0$$

表 2.1.1 中, 将 $ARFIMA$ 模型与 $ARIMA$ 模型的特点进行了对比。

表 2.1.1 ARFIMA 与 ARIMA 的对比

| 项目 | ARFIMA(p, d, q) | ARIMA(p, q) |
|---|---|--|
| 使用范围 | 长记忆过程 | 短记忆过程 |
| d 值范围 | 实数 | 整数 |
| 自相关函数 | $\rho_\tau \sim C\tau^{2d-1}$ ($\tau \rightarrow +\infty$, C 为常数) | $\rho_\tau \leq C\rho^{-\tau}$ ($\rho < 1$, C 为常数) |
| 自相关函数变化 | 呈双曲率缓慢下降 | 呈指数率迅速下降 |
| $f(\omega)$, 当 $\omega \rightarrow 0$ | ∞ | $(0, \infty)$ |

(表 2.1.1 来源: 张世英 樊智《协整理论与波动模型—金融时间序列分析及应用》清华大学出版社 北京 2004)

3. ARFIMA 模型的拓展

如果将季节因素考虑在内, 就可以得到带有季节因子 s 的 ARFIMA 模型为

$$\phi(L)(1-L^s)^d(x_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.1.6)$$

该模型记为 ARFISMA (seasonal ARFIMA) 模型。

ARFIMA 模型的另一种推广是 GARMA 模型, 它为

$$\phi(L)(1-2\xi L + L^2)^\lambda(x_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.1.7)$$

当 $|\xi| < 1$ 和 $\lambda < 0.25$ 时, GARMA 过程是平稳的; 当 $|\xi| < 1$ 和 $\lambda > -0.25$ 时, GARMA 过程是可逆的。

Beran (1995) 提出另一种 ARFIMA 模型的扩展形式, 为

$$\phi(L)(1-L)^d \{(1-L)^m x_t - \mu\} = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.1.8)$$

式中 ε_t 为独立同分布的正态序列, $m \geq 0$ 为整数, 是使 $\{x_t\}$ 变换为平稳序列的最小整数差分阶数, μ 为 $\{(1-L)^m x_t\}$ 的均值, $d \in (-0.5, 0.5)$ 为分数差分阶数。

第二节 ARFIMA-GARCH 模型

由前面的章节可以看出：*ARFIMA* 模型虽然全面刻画时间序列一阶上的长、短程相关关系，但未能包含波动的异方差特性；*GARCH* 类模型能够反映波动的异方差特性，但在收益方程中，却大多将收益描述为预定变量的线性函数与残差项的和，而对于收益序列本身波动的长、短记忆特性，却未能加以充分的反映。*ARFIMA-GARCH* 模型则全面反映收益序列的波动特性及异方差现象，从而弥补了 *ARFIMA* 和 *GARCH* 类模型各自的不足。

1. ARFIMA-GARCH 模型

首次介绍 *ARFIMA-GARCH* 模型的是 Baillie 和 Chung (1996)，他们在研究各国的通货膨胀率时使用了该模型。通过研究他们发现大多数国家的通货膨胀率具有长记忆且均值回归性质的同时，搅动项具有条件异方差性。该模型一般具有以下形式：

$$\phi(L)(1-L)^d(y_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.2.1)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim D(0, \sigma_t^2)$$

$$\beta(L)\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

其中 μ 是过程均值，且有

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$$

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \dots - \beta_s L^s$$

$$\alpha(L) = 1 + \alpha_1 L + \dots + \alpha_r L^r$$

$\phi(L)$, $\theta(L)$, $\beta(L)$, $\alpha(L)$ 的所有根都在单位圆外。搅动项 ε_t 假定服从条件密度 D ，可以是正态分布也可以是 t 分布。依赖于时间的方差项 σ_t^2 遵循 *GARCH*(r, s) 过程。

2 ARFIMA-GARCH 模型的性质

根据 *ARFIMA* 模型和 *GARCH* 模型的性质，我们不难推导出 *ARFIMA*(p, d, q)-*GARCH*(r, s) 模型具有如下性质：

1) 若 $\{y_t\}$ 是满足 *ARFIMA-GARCH* 过程的序列, 则其平稳的必要条件是:

$\phi(L)$ 和 $\theta(L)$ 的根均在单位圆外, 且

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1$$

2) 若 $\{y_t\}$ 满足上述条件 1, 且 $d < 1/2$, 则 $\{y_t\}$ 为二阶平稳过程, 且具有如下移动平均表达式:

$$y_t - \mu = \phi(L)^{-1} \theta(L) (1-L)^{-d} \varepsilon_t$$

3) 若 $\{y_t\}$ 满足上述条件 1, 且 $d > -1/2$, 则 $\{y_t\}$ 是可逆的, 且具有如下自回归表达式:

$$\theta(L)^{-1} \phi(L) (1-L)^d (y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

第三节 长记忆 ARCH 模型

在对波动性的建模研究中, Engle 于 1982 年开创性地提出了自回归条件异方差 (autoregressive conditional heteroscedasticity) 模型, 简称 *ARCH* 模型。在此之后地二十多年里 *ARCH* 模型地各种变化形式及各方面的应用成果不断涌现, 并成为现在经济计量学飞速发展的一个重要领域。纵观 *ARCH* 模型的发展, 经历了两次突破, 一次是 *GARCH* 模型的提出, 一次便是长记忆在经济学上研究的突破。不少学者发现在研究金融资产收益时收益的平方或绝对值的自相关系数呈现出明显的长记忆性, 这引发了 *ARCH* 模型与长记忆性相结合的研究热潮。分整研究的结果被证明更有效地刻画了一些长记忆性经济和金融现象, 与 *ARCH* 模型相结合所产生地一系列长记忆 *ARCH* 模型的研究从 1996 年至今方兴未艾。目前见诸文献的长记忆 *ARCH* 模型主要有 2 个: 分整 *GARCH* (fractional integrated *GARCH*, *FIGARCH*)、分整指数 *GARCH* (fractional integrated exponential *GARCH*, *FIEGARCH*)。

1. 分整 *GARCH* 模型

首先考虑普通的 *GARCH* 过程, 设有序列 $\{\varepsilon_t\}$,

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

其中 $E_{t-1}(z_t) = 0$, $VAR_{t-1}(z_t) = 1$, σ_t 在 $t-1$ 时的信息集下为正的时变可测函数。

$E_{t-1}(\square)$ 和 $VAR_{t-1}(\square)$ 为同一信息集下的条件期望和条件方差。因而由定义可知 $\{\varepsilon_t\}$ 过程是一零均值, 无序列相关, 但条件方差 σ_t^2 随时间变化的序列。

一般的 *GARCH* 模型中, 条件方差 σ_t^2 为滞后的 ε_t^2 和 σ_t^2 的线性函数, 可表示如下:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (2.3.1)$$

其中 L 为滞后算子, $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$, $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$ 。

$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ 和 $[1 - \beta(L)]$ 的根都在单位圆外。*GARCH*(p, q) 可写成无穷阶的 *ARCH* 过程:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \alpha(L) [1 - \beta(L)]^{-1} \varepsilon_t^2 \\ &\equiv \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

平稳的 *GARCH*(p, q) 过程表明 ε_t^2 对条件方差 σ_t^2 的影响成指数率的衰减, 因此 *GARCH*(p, q) 又可以表示成序列 ε_t^2 的 *ARMA*(m, p) 过程:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t \quad (2.3.3)$$

其中 $m \equiv \max\{p, q\}$, $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ 零均值且序列不相关。因此 $\{v_t\}$ 可视为条件方差的搅动项。当 $1 - \alpha(L) - \beta(L)$ 包含一个单位根时 *GARCH*(p, q) 过程的方差是一阶单整的, 可记为 *IGARCH*(p, q), 模型可写成:

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t \quad (2.3.4)$$

其中 $[1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$ 。当 *GARCH*(p, q) 过程的方差是分整的, 我们就可以拓展到 *FIGARCH*(p, d, q) 过程。

若平稳时间序列 $\{x_t\}$ 的残差平方项 ε_t^2 满足差分方程

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t \quad (2.3.5)$$

其中 L 是滞后算子, $\{v_t\}$ 为白噪声序列, $\phi(L)$ 和 $\beta(L)$ 分别是 p 阶和 q 阶平稳算子:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

$$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q$$

则称 $\{x_t\}$ 为分整广义自回归条件异方差 (fractional integrated GARCH) 模型, 简

记为 FIGARCH(p, d, q)。式 (2.3.5) 可进一步表示为:

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1-L)^d] \varepsilon_t^2 \quad (2.3.6)$$

从而

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1-L)^d \right\} \varepsilon_t^2 \\ &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2 \end{aligned}$$

其中 $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$

当 $0 < d < 0.5$ 时, ε_t^2 是平稳的, 均值为 $E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = \sigma^2$, 所以等式右边为白噪声, ε_t^2 是一个 $I(d)$ 过程, 进一步地, 若 ε_t 的四阶矩存在, 则该模型的 ε_t^2 的理论 ACF 为

$$\begin{aligned} \rho_k &= \text{Corr}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) \\ &= \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(q)} \frac{\Gamma(k+q)}{\Gamma(k+1-q)} \\ &\approx \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(q)} k^{2q-1} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

这是一个以双曲速率衰减的过程, 体现模型的长记忆特征。

当 $d=0$ 时, 式 (2.3.7) 成为

$$\phi(L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t$$

为线性 GARCH 模型。当 $d=1$ 时, 成为

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t$$

是 *IGARCH* 模型。

这里 $0 \leq d \leq 1$ 的灵活性使得研究“长期相依性”成为可能。事实上，式 (2.3.5) 与 *ARFIMA* 模型的定义式异曲同工，只不过式 (2.3.5) 研究的是方差，*ARFIMA* 研究的是期望。可以说，*FIGARCH* 融合了一阶矩的分整过程与标准 *GARCH* 过程的许多特点。随着滞后阶数的增大，参数 d 反映了其作用于远距离观测值之间的效果以双曲率缓慢下降的长记忆性，而参数 ϕ 与 β 体现的是它们作用于远距离观测值之间的效果以负指数率迅速衰减的短记忆性。换言之， d 可以用来描述时间序列高阶滞后的相关结构，而 ϕ_1, \dots, ϕ_p 与 β_1, \dots, β_q 可以用来描述低阶滞后的相关结构。

2. 分整指数 *GARCH* 模型 (*FIGARCH* 模型)。

Nelson (1991) 提出了指数 *GARCH* (exponential *GARCH*, *EGARCH*) 模型，其条件方差函数为

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(e_{t-k}) + \sum_{j=1}^q \alpha_j \ln \sigma_{t-j}^2 \quad (2.3.8)$$

且

$$\varepsilon_t = e_t \sigma_t$$

$$g(e_t) = \theta e_t + r \left[|e_t| - E|e_t| \right]$$

式中 $\{\alpha_j\}_{j=1, \dots, q}$ 和 $\{\beta_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ 是非随机的实数标量序列， $g(\cdot)$ 满足 $E_{t-1}[g(e_t)] = 0$ 。可以看出，当 $\theta < 0$ 时，在波动大小相同的情况下，未来条件方差在负波动下的增幅大于正波动下的增幅，同理当 $\theta > 0$ 时情况正好相反。因此模型体现了不对称性，便于描述金融价格的波动。

Nelson 提出 *EGARCH* 模型之后，并将其扩展到长记忆情况，提出分整指数 *GARCH* 模型 (fractional integrated exponential *GARCH*, *FIGARCH*) 模型。*FIGARCH* 模型的条件方差函数表示为

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \phi(L)^{-1} (1-L)^{-d} [1 + \phi(L)] g(e_{t-1}) \quad (2.3.9)$$

其中 d 是一个可以取分数的参数， $\phi(z) = 0$ 的所有根都在单位圆外，当 $d = 0$ 时，

$FIEGARCH(p, d, q)$ 模型就是 $EGARCH$ 模型。

与 $ARFIMA$ 模型类似, 当 $-0.5 \leq d \leq 0.5$ 时, $FIEGARCH$ 是二阶平稳且可逆的。而且 $\ln \sigma_t^2$ 在 $d < 0.5$ 时是严格平稳且时间遍历的。

尽管 $FIGARCH$ 和 $FIEGARCH$ 有很好的应用前景, 但也并非无懈可击。就 $FIGARCH$ 而言, 由于 $\{\varepsilon_t\}$ 不是二阶平稳的, 所以自协方差函数无法定义。对 $FIEGARCH$ 而言, 要得到参数估计量的渐近值是极为困难的, 即使 $d = 0$ 。这些问题使 $FIGARCH$ 、 $FIEGARCH$ 模型的应用带来了不少困难。

另外, 柯珂和张世英 (2003) 将长记忆扩展到现有的 $ARCH$ 模型族, 并用分整增广 $GARCH-M$ 模型加以概括, 它包容了几乎所有的 $ARCH$ 模型。该模型有助于解决各种 $ARCH$ 模型在模型设定检验、长记忆性诊断和参数估计等方面的一些障碍。Breidt, Crato 和 Lima (1994) 把 $ARFIMA$ 过程纳入到基本 SV 模型中, 提出了一类长记忆随机波动模型, 在此不作过多介绍。

第三章 时间序列的长记忆性检验和模型估计

第一节 时间序列长记忆存在性检验

1. R/S 检验法

传统的比较有代表性的是 Hurst 提出的 R/S 分析方法。它是一种非参数分析方法，对序列的分布具有较强的耐抗性，Mandelbrot 等证明了 R/S 分析方法相比其他方法如自相关分析、方差比和谱分析更有优势。 R/S 分析方法的具体过程如下：

(1) 将时间长度 N 划分为 A 段，时间长度为 n 的子区间，即 $A * n = N$ 。设每个子区间为 I_a ， $a = 1, 2, 3, \dots, A$ 。在每个子区间 I_a 中的每个元素记为 $N_{k,a}$ ， $k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。 I_a 中的元素的均值定义为：

$$e_a = (1/n) * \sum_{k=1}^n N_{k,a}$$

(2) 生成累积离差时间序列：

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

(3) 生成极差序列：

$$R_{I_a} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a})$$

(4) 计算每个子区间 I_a 的标准差：

$$S_{I_a} = ((1/n) * \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2)^{0.50}$$

(5) 计算重标极差：

$$(R/S)_n = (1/A) * \sum_{a=1}^A (R_{I_a} / S_{I_a})$$

这样就得到一个 R/S 估计值。

(6) 增加 n 继续这一过程以得到多个 R/S 估计值，最后在 n 的整个值域上做

$\log(n)$ 对 $\log((R/S)_n)$ 的回归,

$$\log((R/S)_n) = \log(c) + H * \log(n) \quad (3.1.1)$$

则斜率 H 为 Hurst 指数的估计值。当 $H \leq 0.5$ 时, 时间序列为短记忆, 而 $H > 0.5$ 时, 时间序列为长记忆。Hurst 指数 H 和 d 值有如下的确定关系(Taqqu, M. S., V. Teverovsky, W. willinger, 1995) :

$$H = d + 0.5$$

因此可以通过对 Hurst 指数 H 的估计来确定 d 值。

2. 修正 R/S 检验法

R/S 统计量也存在一些不足, 当序列存在短记忆和异方差时 R/S 统计量不具有稳健性。Lo (1991) 对 R/S 统计量进行了改进, 使得我们在使用 R/S 统计量时不必顾及到序列存在的短记忆性。这就是修正的 R/S 统计量。具体形式如下:

$$Q_q = \frac{R(n)}{\sigma_q(n)} \quad (3.1.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_q^2(n) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_n)^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q w_j(q) \left[\sum_{i=j+1}^n (x_i - \bar{x}_n)(x_{i-j} - \bar{x}_n) \right] \\ &= \hat{\sigma}_x^2 + 2 \sum_{j=1}^q w_j(q) \hat{\gamma}_j \end{aligned}$$

$$w_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}, \quad q < n$$

$\hat{\sigma}_x^2$ 和 $\hat{\gamma}_j$ 是 $\{x_t, t=1, 2, \dots, T\}$ 的样本方差和样本协方差。Lo (1991) 对 q 的取值进行了详细的讨论。

3. 得分检验法 (score test)

与以上 R/S 与修正 R/S 检验法相比, 得分检验法 (score test) 因处理方法不同在实际使用中相对比较容易。该方法分别由 Robinson (1991) 和 Tanaka (1999) 提出, 具体检验过程如下:

假定

$$(1-L)^{d+\theta} y_t = \varepsilon_t$$

其中 $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$, 检验时原假设 $H_0: \theta = 0$, 则对数似然函数如下:

$$L(\theta, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^T [(1-L)^{d+\theta} y_t]^2 \quad (3.1.3)$$

得分检验统计量如下:

$$S_T = \frac{\partial L(\theta, \sigma^2)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, \sigma^2=\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{t=2}^T \left[\sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k} x_{t-k} \right] x_t = T \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{k} \rho_k$$

其中

$$x_t = (1-L)^d y_t, \quad \rho_k = \frac{\sum_{i=k+1}^T x_{i-k} x_i}{\sum_{i=1}^T x_i^2}$$

可见, 该统计量只不过是序列相关系数的加权求和, 因此计算起来比较简单, 同时 Tanaka (1999) 给出该统计量服从如下的正态分布:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} S_T \rightarrow_d N\left(0, \frac{\pi^2}{6}\right) \quad (3.1.4)$$

得分检验法的优势主要在于计算简单, 同时它还可以用于非平稳序列的检验 ($0.5 \leq d < 1$ 时)。我们可以通过取不同的 d 值计算出一组检验统计量, 根据统计量的显著程度得到 d 的取值区间。但得分检验法也有其不足之处, 它并没有考虑时间序列可能存在的短记忆性, 而短记忆性的存在容易使长记忆性的检验出现较大的偏差。

第二节 ARFIMA(p, d, q) 模型的估计

1. Hosking 迭代法

Hosking 迭代法通过将序列的长、短记忆性先后分别滤去而得到 ARFIMA(p, d, q) 模型, 其中用 R/S 分析得到 d 值。Brock, Dechert 和 Sheinkman(1987)认为, 1 阶自回归 AR(1) 已经消除了较大的短期线性影响, 用

$AR(1)$ 估计后的残差可以较好地初步估计 H 值。因此第一次迭代时我们一般用 $AR(1)$ 过程来过滤序列的短记忆性。Hosking (1981) 对确认和估计一个 $ARFIMA(p, d, q)$ 模型给出了下列程序:

- 1) 在 $ARFIMA(0, d, 0)$ 模型, $\Delta^d x'_t = a_t$ 时估计 d 。
- 2) 定义 $u_t = \Delta^d x_t$ 。
- 3) 对时间序列 $\{u_t\}$ 建立 $ARMA$ 模型 $\phi(L)(u_t) = \theta(L)a_t$ 。
- 4) 定义 $x''_t = \theta(L)^{-1} * \phi(L)x_t$ 。
- 5) 在 $ARFIMA(0, d, 0)$ 模型, $\Delta^d x''_t = a_t$ 时估计 d 。
- 6) 重复上述步骤直至参数 d , ϕ 和 θ 收敛。

Hosking 特别建议在第一步和第五步使用 R/S 分析来考察 d , 并使用等式 $H = d + 0.5$ 。

Hosking 迭代法的优点在于该方法简便易行, 但是也有如下不足:

- 1) 用 $AR(1)$ 过程来过滤序列的短记忆性显得比较主观;
- 2) 迭代次数有时会非常大, 不便于手工处理;
- 3) 参数 d , ϕ 和 θ 如何才算收敛并没有明确的临界值, 但是一般情况下迭代结果会趋于稳定。

2. 极大似然估计 (MLE)

张世英等 (2004) 给出了 $ARFIMA(p, d, q)$ 建模的基本步骤, 模型的估计采用了极大似然法。

- 1) 数据的预处理。清除原始序列中的趋势和波动影响。
- 2) 滤除短记忆因素。通过建立辅助 AR 模型来滤除短记忆因素, 突出长记忆因素。
- 3) 分析时间序列中长记忆因素, 实现分数阶差分。这一步骤通过对 d 进行初步估计来实现。通过分数差分得到序列 $\{x_t\}$:

$$x_t = (1-L)^d (y_t - \mu)$$

序列 $\{x_t\}$ 为零均值 $ARMA(p, q)$ 序列。

- 4) 对 $ARFIMA(p, d, q)$ 模型进行 p, q 定阶。这是常规的 $ARMA(p, q)$ 模型的定阶问题。
- 5) $ARFIMA(p, d, q)$ 模型的建立。利用极大似然估计方法对 $ARFIMA(p, d, q)$ 模型的 $p+q+1$ 个参数进行估计。 $ARFIMA(p, d, q)$ 过程在正态分布下的似然函数如下:

$$L(d, \phi, \theta, \sigma^2) = -\left(\frac{T}{2}\right) \log(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\right) \log \sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma^2} \quad (3.2.1)$$

其中

$$\varepsilon_t = \theta(L)^{-1} \phi(L) (1-L)^d x_t$$

3. 条件平方和最小估计 (CSS)

条件平方和最小估计就是将下列统计量最小化:

$$S(d, \phi, \theta, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2}\right) \log(\sigma^2) + \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma^2} \quad (3.2.2)$$

其中

$$\varepsilon_t = \theta(L)^{-1} \phi(L) (1-L)^d (y_t - \mu)$$

可以看出, 条件平方和最小估计 (CSS) 和极大似然估计非常相似, 不同的是前者无需考虑序列残差的分布情况而后者假定其服从某一分布。可以证明, 如果假定初始观察值 $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots$ 固定, 条件平方和函数的最小化将渐进等价于 MLE。

第三节 $ARFIMA-GARCH$ 模型的估计

1. 极大似然法

相对于 $ARFIMA$ 模型的估计, $ARFIMA-GARCH$ 模型的估计更为复杂, 因为模型中考虑了条件异方差过程。Geweke 和 Porter-Hudak (1983) 首先提出半参数

方法估计 d 值, 但是该估计量在小样本情况下存在不少缺陷。Sowell (1992) 进而提出了搅动项服从正态分布下用最大似然法来估计 $ARFIMA(p, d, q)$ 过程。在时域情况下该过程的似然函数对数值如下

$$L(\mu, d, \phi, \theta, \sigma^2) = -(T/2) \log(2\pi) - (1/2) \log|\Sigma| - (1/2)(y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu) \quad (3.3.1)$$

其中 y 是 y_t 的 T 维向量, Σ 是 $T \times T$ 维的方差矩阵。

2. 条件平方和最小法

以上极大似然法计算繁琐, 每次似然值的迭代都要将方差阵求逆, 因此 Baillie 和 Chung 在估计更为复杂的 $ARFIMA-GARCH$ 模型时使用了条件平方和 (CSS) 估计量, 将下列统计量最小化

$$S(\mu, d, \phi, b, \delta, \theta, \alpha, \beta, \omega) = (1/2) \log(\sigma_t^2) + (1/2) \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 / \sigma_t^2 \quad (3.3.2)$$

其中

$$\varepsilon_t = \theta(L)^{-1} \phi(L)(1-L)^d (y_t - \mu - b'x_{1t} - \delta\sigma_t)$$

$$\sigma_t^2 = \beta(L)^{-1} [\omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \gamma'x_{2t}]$$

当 $b = \delta = \gamma = 0$, 条件密度 D 是自由度为 ν 的 t 分布时, CSS 估计量将下列对数似然值最大化

$$L(\mu, d, \phi, \theta, \alpha, \beta, \nu, \sigma^2) = T \left[\log \Gamma \left\{ \frac{(\nu+1)}{2} \right\} - \log \Gamma(\nu/2) - (1/2) \log(\nu-2) \right] - (1/2) \sum_{t=1}^T \left\{ \log(\sigma_t^2) + (\nu+1) \left[\log(1 + \varepsilon_t^2 \sigma_t^{-2} (\nu-2)^{-1}) \right] \right\} \quad (3.3.3)$$

3. 改进 Hosking 迭代法

尽管用极大似然法和条件平方和最小法估计模型会有较好的统计性质, 但是由于模型过于复杂, 在实际应用中这两种估计方法经常会估计不出结果。让我们再看看前面的 Hosking 迭代法, 尽管该方法有一定的缺陷, 但此时我们不难看出它相对于极大似然法和条件平方和最小法更容易实现。考虑到过程中的条件异方差现象, 我们需要对 Hosking 迭代法进行一些改进。

Edgar E. Peters (1994) 假定序列中的短记忆过程有自回归 (AR)、移动平均 (MA)、自回归移动平均 (ARMA)、自回归条件异方差 (ARCH) 等过程。他考察了一随机过程包含了短记忆过程时 R/S 的分析结果。

表 3.3.1 随机过程的 R/S 分析

| | H=原始序列 | 显著性 | H=AR(1)残差 | 显著性 | E(H) | T | n | 实验 |
|------------|--------|------|-----------|-------|-------|------|-----|-----|
| AR(1) | 0.669 | 6.59 | 0.574 | -0.11 | 0.576 | 5000 | 250 | 300 |
| MA(1) | 0.615 | 2.76 | 0.541 | -2.49 | 0.576 | 5000 | 250 | 300 |
| ARMA(1, 1) | 0.669 | 6.59 | 0.568 | -0.51 | 0.576 | 5000 | 250 | 300 |
| ARCH | 0.618 | 0.38 | 0.618 | 0.38 | 0.614 | 8000 | 50 | 1 |
| GARCH | 0.633 | 1.67 | 0.635 | 1.85 | 0.614 | 8000 | 50 | 1 |

(来源: Edgar E. Peters 著 储海林 殷勤译《分行市场分析—将混沌理论应用到投资与经济理论上》经济科学出版社 北京 2002)

由上表可以看出序列中如果存在条件异方差过程, 此时用原始序列估计得到的 H 值和用 $AR(1)$ 过滤后估计得到的 H 值几乎没有变化, 所以用 $AR(1)$ 过滤序列中的短记忆因素会存在不足, 因此我们还需要过滤掉序列中的条件异方差过程。我们在实证分析中发现条件异方差过程的存在的确会使 d 值的估计有偏, 而在滤除短记忆因素时同时滤除一阶线性相关和二阶的条件异方差过程会使 d 值的估计更加趋向于真实值。

因此我们在使用 Hosking 迭代法估计 $ARFIMA-GARCH$ 模型时作如下的改进:

- 1) 首先用 $AR(1)-ARCH(1)$ 滤除序列中的短记忆因素;
- 2) 将得到的残差序列进行长记忆分析;
- 3) 用第二步分析得到的 d 值将原始序列进行差分;
- 4) 将差分得到的序列进行短记忆过程的估计 (包括 $GARCH$ 过程);
- 5) 用第四步得到的短记忆过程来过滤原始序列;
- 6) 如第二步再次进行长记忆分析, 如此反复迭代直至过程收敛。

第四章 短期市场利率时间序列长记忆性的实证分析

在研究短期利率动态模型时,一般都是用短期债务收益率代表瞬时即期利率。如 Gray (1996), CKLS (1992) 以及 Hong, Li & Zhao (2004) 使用美国 1 个月国债利率, Stanton (1997) 和 Anderson & Lund (1997) 使用美国三个月国债利率, Ait-Sahalia (1996) 使用 7 天欧元利率, Das (2002) 使用联邦基准利率。中国尚未建立一个系统性的短期国债市场,没有相应的短期国债利率。国内一些研究使用同业拆借利率(如谢赤和吴雄伟 (2002)),另一些研究则使用从长期国债价格中用样条函数方法估计出来的短期市场利率(如林海和郑振龙 (2004))。在本文中,我们使用上海证券交易所国债回购市场的 7 天和 14 天回购短期利率。7 天和 14 天短期回购国债相对于其他交易品种成交量更大,最具有代表性。与同业拆借市场相比,回购市场参与机构的范围更加广泛,而且债券回购的风险又低于信用拆借。从 1999 年起,国内回购市场的交易量已经超过了同业拆借市场,因此它更能反映中国市场资金流动性的松紧。与使用样条函数估计出的短期利率相比,直接利用回购市场利率数据可以避免估计过程中可能产生的误差。我们的数据来源:南方证券超强版证券分析交易系统和 CCER 中国证券市场数据。

第一节 我国短期市场利率时间序列的长记忆性检验

在用分整技术对利率时间序列的研究中, Backus 和 Zin (1993) 与 Pfann, Schotman 和 Tschering(1996)都发现美国的短期利率存在长记忆性,从而提高了利率期限结构模型的适用性。相似地, Tkacz(2001)利用 Jensen(1999)的小波 OLS 估计法估计了美国和加拿大一些利率的分整参数,发现大多数是均值回归的,分整的阶数随着期限的接近而增加。Gil-Alana(2004)在研究美国月份市场利率时利用 Robinson (1994)的方法得到 $d = 0.79$ 。相对于国外同行的大量研究,国内似乎还没有学者用分整技术对利率的长短记忆性进行过研究。我国的短期市场利率时间序列是否也具有长记忆特征呢?不同种类的国债是否具有相同的动态规律?下面我们就有代表性的 7 天期和 14 天期国债回购利率进行长记忆性检验的比较分析。

1. 数据处理和基本特征分析

我们采用 2004 年 5 月 20 日到 2005 年 8 月 8 日 7 天期和 14 天期国债回购利率各 300 个样本数据进行分析。数据来源：南方证券超强版证券分析交易系统。本节中程序计算由 GAUSS 软件执行。由于我国银行间债券市场采用单利率报价，所以我们按照吴冲锋（2000）的公式

$$r(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln(1 + R(t, T)(T-t)) \quad (4.1.1)$$

将数据转换成连续复利。其中 $T-t$ 为 $7/360$ 或 $14/360$ （上证交规定“一年的天数为 360）， $r(t, T)$ 为连续复利， $R(t, T)$ 为对应的单利率。我们令 $\{y_{1t}\}$ 表示 7 天期国债回购短期利率序列， $\{y_{2t}\}$ 表示 14 天期国债回购短期利率序列。以下是两类利率的序列图和相关系数图。

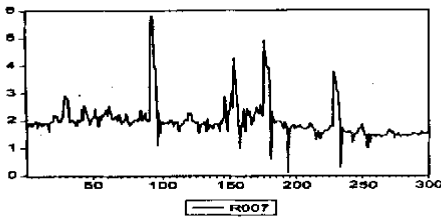


图 4.1.1 $\{y_{1t}\}$ 序列图

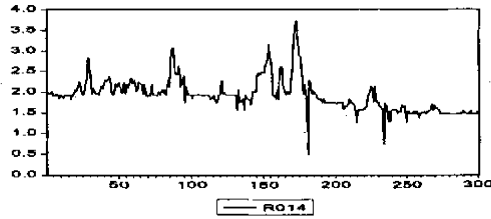


图 4.1.2 $\{y_{2t}\}$ 序列图

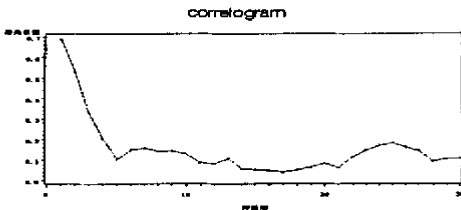


图 4.1.3 $\{y_{1t}\}$ 的自相关系数图

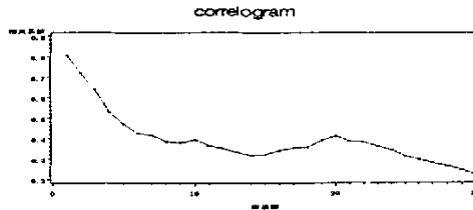


图 4.1.4 $\{y_{2t}\}$ 的自相关系数图

由图 4.1.3 和图 4.1.4 的自相关系数图看到序列 $\{y_{1t}\}$ 的自相关系数衰减比较迅速，而 $\{y_{2t}\}$ 的自相关系数衰减相对比较缓慢，暗示我们 $\{y_{1t}\}$ 可能不存在长记忆性而 $\{y_{2t}\}$ 可能存在。同时对两类序列进行了单位根检验，结果都显示并不存在单位根过程，这意味着 $d < 1$ 。

2. 两序列的长记忆性检验

对两类序列进行分数检验，结果如下：

表 4.1.1 序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 的分数检验分析

| z/d | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|----------|-------|-------|-------|-------|------|--------|---------|---------|-------|-------|-------|
| y_{1t} | 17.52 | 13.02 | 9.11 | 5.95 | 3.47 | 1.53 * | -0.00 * | -1.25 * | -2.29 | -3.16 | -3.90 |
| y_{2t} | 29.27 | 23.34 | 17.07 | 11.31 | 6.64 | 3.18 | 0.72 * | -1.05 * | -2.35 | -3.36 | -4.15 |

(其中 z 为检验统计量，服从标准正态分布，带“*”的数字表示在 95% 的置信度下统计显著)

检验表明 $\{y_{1t}\}$ 存在长记忆性，且有 $0.4 < d < 0.8$ ，而 $\{y_{2t}\}$ 也存在长记忆性，且有 $0.5 < d < 0.8$ 。

3. 两序列长短记忆性的进一步确定

以上的得分检验法也有其不足之处，它并没有考虑时间序列可能存在的短记忆性，而短记忆性的存在容易使长记忆性的检验出现较大的偏差。我们可以通过对 *ARFIMA* 模型的估计来进一步确定序列的长短记忆性。我们在估计 *ARFIMA*(p, d, q) 模型时使用了最大似然估计，似然函数如下：

$$L(d, \phi, \theta, \sigma^2) = -(T/2) \log(2\pi) - (1/2) \log \sigma^2 + (1/2) \sum_{i=1}^T \varepsilon_i^2 / \sigma^2$$

其中

$$\varepsilon_t = \theta(L)^{-1} \phi(L)(1-L)^d x_t$$

本文中我们考虑了序列的 *AR*(1)，*MA*(1) 和 *ARMA*(1,1) 等短记忆因素。

下面对序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 分别根据下列方程进行模型估计：

$$\text{方程 (1): } (1-L)^d (y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$$\text{方程 (2): } (1-\phi L)(1-L)^d (y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$$\text{方程 (3): } (1-L)^d (y_t - \mu) = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

$$\text{方程 (4): } (1-\phi L)(1-L)^d (y_t - \mu) = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

其中, 序列 $\{y_{1t}\}$ 的均值 μ 由样本均值 $\bar{\mu}$ 代替, 我们使用二次丘陵攀升法 (Quadratic Hill-Climbing Algorithm) 进行模型的优化估计。估计结果如下:

表 4.1.2: 序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 的模型估计

| | y_{1t} | y_{2t} |
|--------|--|--|
| 方程 (1) | d 0.60051 (10.347) 似然值=-210.45 | d 0.63513 (12.728) 似然值=7.624 |
| 方程 (2) | d -0.17219 (-1.3061) ϕ 0.83301 (8.8398) 似然值=-204.96 | d 0.61687 (6.3848) ϕ 0.025505 (0.21899) 似然值=7.6485 |
| 方程 (3) | d 0.48710 (6.0099) θ -0.13564 (-1.7643) 似然值=-209.08 | d 0.62328 (7.6480) θ -0.016656 (-0.18109) 似然值=7.6403 |
| 方程 (4) | d 0.10244 (0.58835) ϕ 0.68072 (4.9989) θ 0.14477 (1.5154) 似然值=-204.01 | d 0.40619 (2.4494) ϕ 0.65472 (4.0368) θ 0.40296 (3.1883) 似然值=8.9402 |

(其中 d 为分整阶数, ϕ 为一阶自回归系数, θ 为移动平均系数, () 中为参数回归的 t 统计量)

4. 分析结论

从表 4.1.2 中我们得到如下的结论:

1). 如果不考虑序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 的短记忆性, 即用方程 (1) 进行模型估计, 则两序列都表现出长记忆性。对方程 (1) 估计得到的两个 d 值都落在得分检验法得到的取值区间里, 这也间接证明了估计方程 (1) 的最大似然法和得分检验法中使用的最大似然法具有一致的结果。

2). 如果考虑序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 的短记忆性, 即用方程 (2)、(3)、(4) 进行

模型估计，此时我们分别考虑了序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 的一阶自回归过程（AR（1）），一阶移动平均过程（MA（1））和一阶自回归移动平均过程（ARMA（1，1））。对比四个方程估计得到的似然值，我们发现方程（4）的估计结果最优。此时，在对 $\{y_{1t}\}$ 的估计中， d 值和 θ 值的 t 统计量不显著，而 ϕ 值显著不为0，说明序列 $\{y_{1t}\}$ 的长记忆性不复存在，而更多的是受短记忆的影响；可见在序列 $\{y_{1t}\}$ 中短记忆性的存在使得得分检验法产生了较大的偏误，从而使检验结果失真。在对 $\{y_{2t}\}$ 的估计中， d 值、 ϕ 值和 θ 值都显著不为0，说明序列 $\{y_{2t}\}$ 是受长记忆和短记忆的综合影响。其中 d 值比方程（1）中估计得到的小，这是因为短记忆因素的存在使 d 值的估计更加接近于其真实值，同对 $\{y_{1t}\}$ 的估计一样，得分检验法由于未考虑短记忆因素从而估计的结果也出现了一定的偏差。

5. 两序列的脉冲响应函数分析

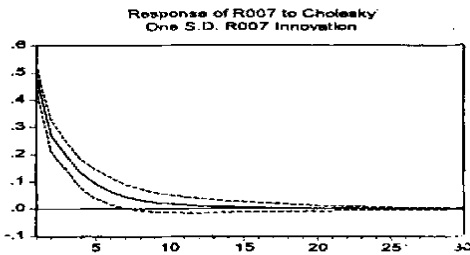


图 4.1.5: $\{y_{1t}\}$ 的脉冲响应函数

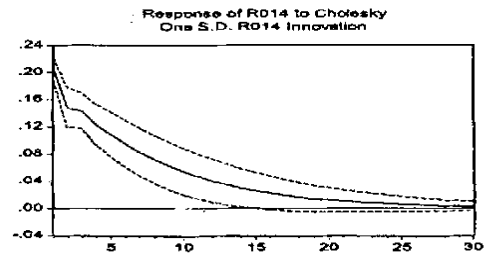


图 4.1.6: $\{y_{2t}\}$ 的脉冲响应函数

图 4.1.5 和图 4.1.6 给出了序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 各自的脉冲响应函数。该函数用于衡量每个内生变量对它自己及所以其他内生变量的当前和未来取值的影响。从上面两图中我们看到 $\{y_{1t}\}$ 对自身未来值的影响衰减较为迅速，在 15 期之后就接近于 0，而 $\{y_{2t}\}$ 对自身未来值的影响衰减要更加缓慢，在 30 期之后接近于 0，这进一步表明序列 $\{y_{1t}\}$ 和 $\{y_{2t}\}$ 在长短记忆性上的不同。

第二节 利率长记忆模型的建立和估计

大量的实证研究都说明多数金融时间序列都呈现出尖峰胖尾的特征。而这种特征既可以由 ARCH 类模型描述的条件异方差性引起,也可以由称着 Pareto-levy 的长记忆过程引起(Peters, 1994),两者表现出的区别在于对市场信息反应方式的不同。短记忆过程说明信息的反应方式只是短期内的,有时又是偶尔以成堆的方式出现。而长记忆过程说明信息反应的方式是平滑连续式的,投资者以累计的方式对所有以前的信息做出反应。因此研究利率是否具有长记忆特征为我们更深入地认识利率变化的动态规律和资本市场的特征无疑具有重要意义。

对于我国的市场利率以及别的金融时间序列而言,尖峰胖尾的特征同样普遍存在,但目前主要是用 ARCH 类模型来拟合。然而,我国的市场利率时间序列是否也具有长记忆特征呢?如何建立能够同时捕捉长短记忆等特性的动态模型?下面我们通过一个 *ARFIMA-GARCH* 模型来同时捕捉利率的长短记忆特性。

1. 数据处理和基本特征分析

由第二节的分析我们得到上海证券交易所国债回购市场的 14 天期回购短期利率同时存在长短记忆性,因而我们选择这一品种来进行实证分析和动态模型的建立。我们采用 1999 年 1 月 19 日到 2003 年 4 月 29 日共 1000 个样本数据进行分析。数据来源:CCER 中国证券市场数据库。模型估计由 SAS 软件完成。同样的,我们按照吴冲锋(2000)的公式将单期利率转换成连续复利进行分析。

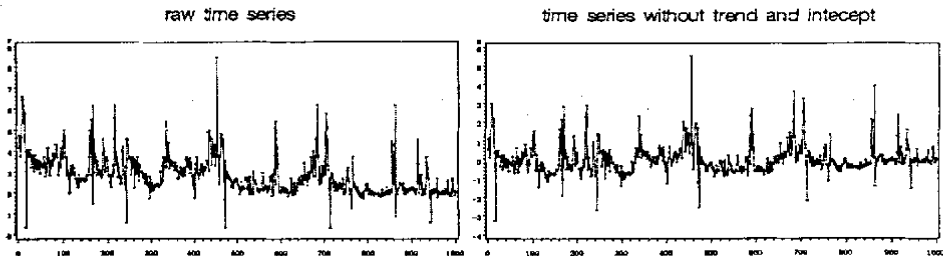


图 4.2.1 原始利率序列图 y_t , 图 4.2.2 剔除趋势的利率图 x_t

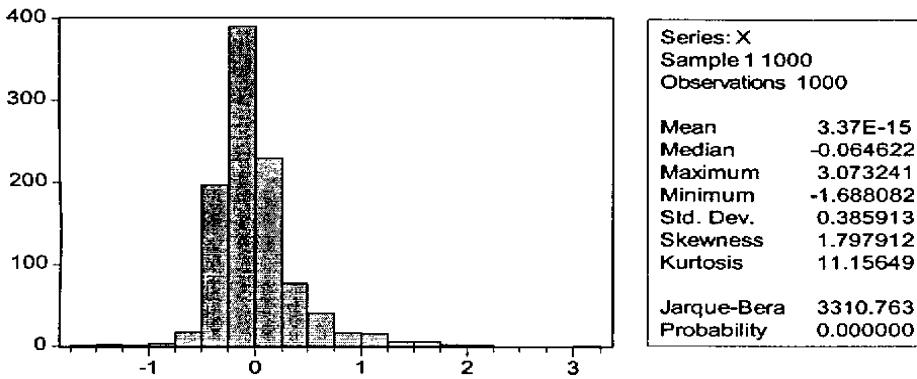


图 4.2.3 序列 x_t 的直方图和各描述统计指标

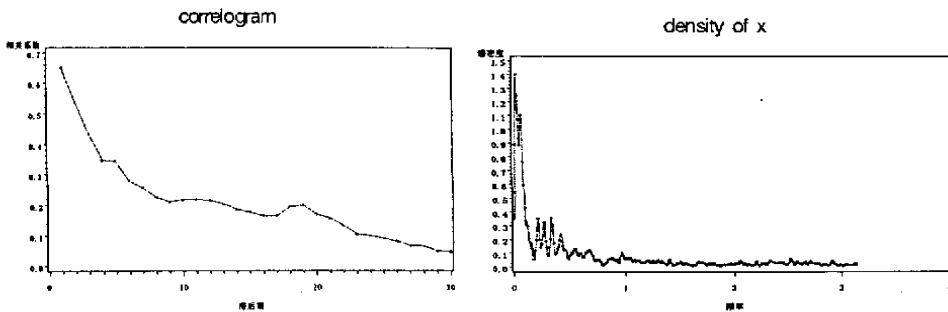


图 4.2.4 序列 x_t 的自相关函数图

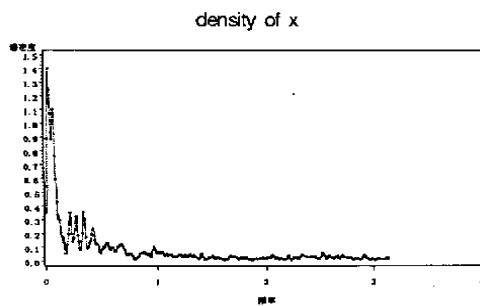


图 4.2.5 序列 x_t 的谱密度估计图

表 4.2.1 序列 x_t 的单位根检验

| 增广 Dickey-Fuller 单位根检验 | | | | |
|------------------------|----------|----------|--------|----------|
| 滞后期 | Rho | Pr < Rho | Tau | Pr < Tau |
| 1 | -233.148 | 0.0001 | -10.82 | <.0001 |
| 2 | -210.666 | 0.0001 | -9.78 | <.0001 |
| 3 | -209.550 | 0.0001 | -9.30 | <.0001 |
| 4 | -154.766 | 0.0001 | -7.94 | <.0001 |
| 5 | -165.649 | 0.0001 | -8.06 | <.0001 |
| 6 | -155.922 | 0.0001 | -7.78 | <.0001 |
| 7 | -151.706 | 0.0001 | -7.58 | <.0001 |
| 8 | -137.262 | 0.0001 | -7.22 | <.0001 |

在原始利率序列（图 4.2.1）中，我们发现利率随时间推移有略微下降的趋势，因此我们先将 $\{y_t\}$ 对时间 t 进行回归，从而剔除序列的趋势，得到新序列为 $\{x_t\}$ ：

$$y_t = 3.6209 - 0.001576t + x_t$$

(79.20) (-19.91)

括号中为 t 统计量值。图 4.2.2 是 $\{x_t\}$ 的序列图。图 4.2.3 是 $\{x_t\}$ 的描述统计指标和直方图，从图中我们可以看到序列的非常明显的尖峰胖尾特征。我们对 $\{x_t\}$ 进行了单位根检验，结果如表 4.2.1 所示，序列 $\{x_t\}$ 并不存在单位根，这意味着 $d < 1$ 。我们计算了序列 $\{x_t\}$ 的自相关函数值和检验了序列是否为白噪声的 Q 统计量，发现序列 $\{x_t\}$ 有较长期的滞后关系，在滞后 30 期时，ACF 值为 0.046， Q 统计量为 1895.7，显著不为 0。图 4.2.4 为序列 $\{x_t\}$ 的自相关函数图，从图中可以看出自相关函数下降得非常缓慢，这表示序列可能是具有长记忆性。此外，图 4.2.5 是序列的谱密度估计图，我们看到在低频处的值较大，这也暗示序列可能存在长记忆性。

2. 序列的 *ARFIMA-GARCH* 模型估计

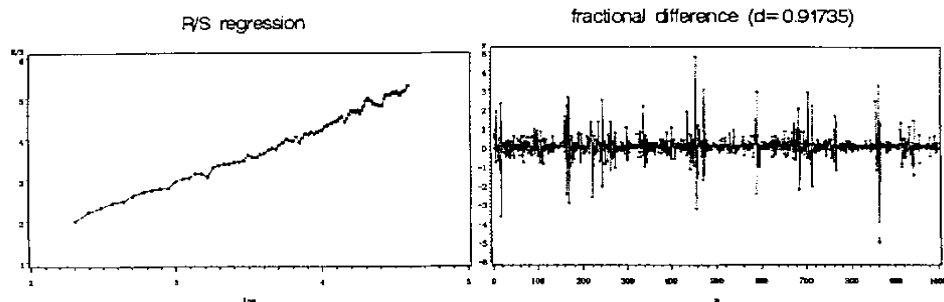
1) 首先用 *AR*(1) 过程剔除序列 $\{x_t\}$ 中的短记忆影响，残差记为 $\{w_t\}$ 。考虑到 n 的取值对 H 估计的影响，我们令 $10 \leq n \leq 100$ (Peters, 1994)，得如下结果：

$$\log(R/S) = -1.33435 + 1.41735 \log(n)$$

(-21.52) (89.00)

括号内为 t 统计量的值。于是 $H = 1.417351$ ，根据 $H = d + 0.5$ 得到 $d = 0.917351$ 。利用 $d = 0.917351$ 对序列 $\{x_t\}$ 进行 d 阶差分后得到序列 $\{u_t\}$ 。

以下是序列 $\{w_t\}$ 的 R/S 分析图和分数差分序列图 $\{u_t\}$ ：

图4.2.6 $\{w_t\}$ 的 R/S 分析图图4.2.7 分数差分序列图 $\{u_t\}$

我们对 $\{u_t\}$ 进行条件异方差效应的检验，结果如表4.2.2所示。

表4.2.2 序列 $\{u_t\}$ 的条件异方差检验

| <i>Q and LM Tests for ARCH Disturbances</i> | | | | |
|---|----------|--------|----------|---------|
| Order | Q | Pr > Q | LM | Pr > LM |
| 1 | 145.9494 | <.0001 | 145.5191 | <.0001 |
| 2 | 152.7180 | <.0001 | 150.2253 | <.0001 |
| 3 | 154.7853 | <.0001 | 152.1142 | <.0001 |
| 4 | 157.1127 | <.0001 | 152.5413 | <.0001 |
| 5 | 158.5679 | <.0001 | 152.6739 | <.0001 |
| 6 | 158.9552 | <.0001 | 152.6739 | <.0001 |
| 7 | 159.3000 | <.0001 | 152.7914 | <.0001 |
| 8 | 162.2866 | <.0001 | 154.8048 | <.0001 |
| 9 | 162.4688 | <.0001 | 155.6876 | <.0001 |
| 10 | 162.8255 | <.0001 | 156.3803 | <.0001 |
| 11 | 162.9552 | <.0001 | 157.4694 | <.0001 |
| 12 | 163.2357 | <.0001 | 157.4763 | <.0001 |

表中Q和LM统计量的 p 值都接近于零，可见，序列 $\{u_t\}$ 存在明显的条件异方差效应，因此，我们利用 $GARCH$ 过程来过滤掉序列中条件异方差的影响。下面我们用上章中提出的改进Hosking迭代估计方法进行 $ARFIMA-GARCH$ 模型的估计：

1) 对应于Hosking方法的第一步, 先对 $\{x_t\}$ 利用 $AR(1) - GARCH(1,0)$ 进行过滤, 残差记为 $\{w_t^{(1)}\}$, 对 $\{w_t^{(1)}\}$ 进行 R/S 分析。类似于前面的回归方程得 $H=1.04869$, 根据 $H = d + 0.5$ 得初始的 $d = 0.54869$ 。

$$\log(R/S) = -0.40953 + 1.04869 \log(n)$$

(-10.87) (108.40)

下面是用 $AR(1) - GARCH(1,0)$ 过程对序列 $\{x_t\}$ 回归的结果:

表4.2.3 $AR(1) - GARCH(1,0)$ 过程分析结果

| Variable | DF | Estimate | Standard | t Value | Approx |
|----------|----|----------|----------|---------|---------|
| | | | Error | | Pr > t |
| lagx1 | 1 | 0.8351 | 0.0149 | 56.23 | <.0001 |
| ARCH0 | 1 | 0.1594 | 0.001981 | 80.44 | <.0001 |
| ARCH1 | 1 | 0.5702 | 0.0428 | 13.32 | <.0001 |

以下是序列 $\{w_t^{(1)}\}$ 的 R/S 分析图和分数差分图:

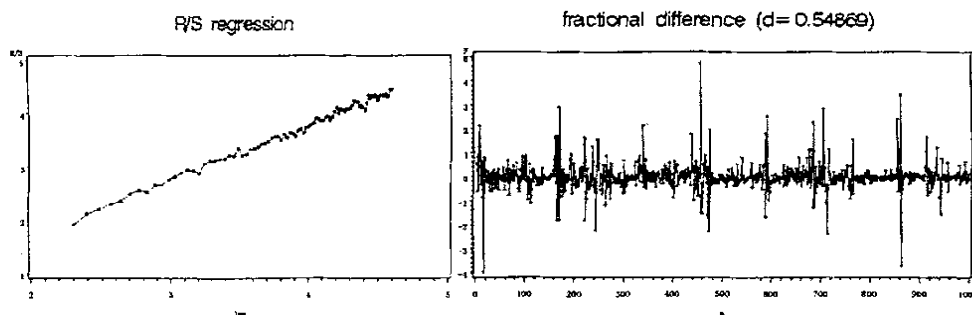


图4.2.8 $\{w_t^{(1)}\}$ 的 R/S 分析图

图4.2.9 分数差分序列图 $\{u_t^{(1)}\}$

2) 利用上面得出的 d 值对序列 $\{x_t\}$ 进行 d 阶差分, 得到序列 $\{u_t^{(1)}\}$ 。对 $\{u_t^{(1)}\}$ 建立 $ARMA(p,q) - GARCH(m,s)$ 模型。我们用最大似然法进行参数估计。由于传统的Box-Jenking方法在 $ARMA$ 模型的定阶上存在不足, 我们使用MINIC, ESACF和

SCAN方法对 $ARMA(p, q)$ 部分进行定阶。由这些方法给出的可供选择的 $ARMA$ 部分见表4.2.4第一列。在此基础上, 我们再考虑 $GARCH$ 部分的选择。我们给出了 $GARCH(m, s)$ 中阶数最常见的3个模型 (表3第一行后三格)。我们把 $ARMA$ 部分和 $GARCH$ 部分的各种可能组合和不考虑 $GARCH$ 过程的AIC都算出来了。从表4.2.4, 我们发现所有的 $ARMA$ 部分结合 $GARCH$ 后, 它们的AIC值比不考虑 $GARCH$ 过程得到的显著降低, 这说明 $GARCH$ 过程对序列有很好的解释能力, 同时, 结合过程 $GARCH(1,1)$ 后AIC值最小。因此, 利用AIC准则, 我们认为 $GARCH(1,1)$ 是最优的。

表4.2.4 $ARMA - EGARCH$ 模型的选择

| | NO GARCH | GARCH(1,0) | GARCH(2,0) | GARCH(1,1) |
|-----------|----------|------------|------------|------------|
| ARMA(0,0) | 1598.38 | 1315.50 | 1269.31 | 1181.69 |
| (4,0) | 1585.86 | 1281.37 | 1169.28 | 1132.91 |
| (0,4) | 1598.38 | 1290.53 | 1174.95 | 1139.03 |
| (3,3) | 1596.81 | 1282.84 | 1173.29 | 1137.92 |
| (1,4) | 1597.83 | 1289.28 | 1175.19 | 1139.49 |
| (2,4) | 1595.88 | 1277.10 | 1174.58 | 1138.51 |

现在将 $GARCH(1,1)$ 与所有可能的 $ARMA$ 组合在剔除掉不显著的回归系数后, 重新计算AIC并得到表4.2.5, 从中我们得到 $ARMA(3,1) - GARCH(1,1)$ 最优。

表4.2.5 $ARMA - GARCH(1,1)$ 模型的选择

| ARMA-GARCH(1,1) | (0,0) | (4,0) | (0,4) | (3,1) | (1,3) | (2,4) |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| AIC | 1181.69 | 1133.99 | 1140.36 | 1132.59 | 1135.64 | 1138.89 |

3) 用 $ARMA(3,1) - GARCH(1,1)$ 对 $\{x_t\}$ 进行短记忆影响的过滤, 得到新的序列 $\{w_t^{(2)}\}$ 。利用 $\{w_t^{(2)}\}$ 再此估计 d 值。还是用 R/S 分析法, 得到 $H = 0.97599$, $d = 0.47599$ 。

$$\log(R/S) = -0.04201 + 0.97599 \log(n)$$

$$(-1.08) \quad (97.38)$$

4) 用 $d = 0.47599$ 对序列 $\{x_t\}$ 进行 d 阶差分, 得到新序列 $\{u_t^{(2)}\}$, 对 $\{u_t^{(2)}\}$ 再次用模型 $ARMA - GARCH(1,1)$ 进行拟合并算出 AIC 值 (表 4.2.6)。我们发现 $ARMA(5,4) - GARCH(1,1)$ 最优。

表 4.2.6 ARMA-GARCH(1,1) 模型的选择(二)

| ARMA-GARCH(1,1) | (0,0) | (1,1) | (4,0) | (0,4) | (1,3) | (3,4) | (4,4) | (5,4) |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| AIC | 1212.01 | 1142.99 | 1133.89 | 1140.59 | 1137.98 | 1131.62 | 1126.47 | 1124.18 |

5) 用 $ARMA(5,4) - GARCH(1,1)$ 对 $\{x_t\}$ 进行短记忆影响的过滤, 得到新的序列 $\{w_t^{(3)}\}$ 。利用 $\{w_t^{(3)}\}$ 再此估计 d 值。还是用 R/S 分析法, 得到 $H = 0.98236$, $d = 0.48236$ 。

$$\log(R/S) = -0.01072 + 0.98236 \log(n)$$

$$(-0.26) \quad (93.84)$$

6) 用 $d = 0.48236$ 对序列 $\{x_t\}$ 进行 d 阶差分, 得到新序列 $\{u_t^{(3)}\}$, 对 $\{u_t^{(3)}\}$ 再次用模型 $ARMA - GARCH(1,1)$ 进行拟合并算出 AIC 值 (表 4.2.7)。我们发现还是 $ARMA(5,4) - GARCH(1,1)$ 最优。因此可以认为此时 $ARFIMA(p,d,q) - GARCH(m,s)$ 模型的各项参数的估计值已收敛, 即最接近于参数真值。各参数的估计值的具体结果列在表 4.2.8 中。从表 4.2.8 我们看到各个参数估计值都是非常显著的。

表 4.2.7 ARMA-GARCH(1,1) 模型的选择(三)

| ARMA-GARCH(1,1) | (0,0) | (1,1) | (4,0) | (0,4) | (1,3) | (3,4) | (4,4) | (5,4) |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| AIC | 1208.89 | 1142.92 | 1133.80 | 1140.51 | 1137.98 | 1131.62 | 1126.36 | 1124.13 |

表4.2.8 ARMA-EGARCH(1,2)模型的参数估计值

| Variabl e | Estimat e | Standar d Error | t Value | Approx Pr > t |
|--------------|--------------|--------------------|------------|----------------------|
| Lag1(u) | 0.3406 | 0.0682 | 4.99 | <.0001 |
| Lag2(u) | 0.1817 | 0.0494 | 3.68 | 0.0002 |
| Lag4(u) | -0.3026 | 0.0442 | -6.84 | <.0001 |
| Lag5(u) | 0.1565 | 0.0329 | 4.76 | <.0001 |
| ar(1) | 0.2119 | 0.0689 | 3.07 | 0.0021 |
| ar(3) | -0.1441 | 0.0371 | -3.88 | 0.0001 |
| ar(4) | -0.3078 | 0.0582 | -5.29 | <.0001 |
| ARCH0 | 0.0160 | 0.000937 | 17.05 | <.0001 |
| ARCH1 | 0.5481 | 0.0469 | 11.68 | <.0001 |
| GARCH1 | 0.5987 | 0.0206 | 29.05 | <.0001 |

至此，我们对序列 $\{x_t\}$ 建立了以下动态模型，它把利率时间序列的多个特征很好地刻画了出来：

$$(1+0.3406L+0.1817L^2-0.3026L^4+0.1565L^4)(1-L)^{0.48236}x_t \\ = (1-0.2119L+0.1441L^3+0.3078L^4)a_t$$

$$a_t = \sigma_t v_t$$

$$(1-0.5987L)\sigma_t^2 = 0.0160 + (1+0.5481L)a_t^2$$

第五章 全文总结

1. 短期利率长记忆性实证研究的现实意义

利率是金融市场最重要的价格变量之一。特别是短期利率,由于它直接影响着各种固定收益证券及其衍生产品的定价,同时也被视为主要的参考利率,因此对于利率风险管理、资产定价、收益率曲线分析也相当重要。另外,短期利率在货币政策传导中也处于主导地位。Duguay (1994) 将货币政策传导机制描述为货币政策当局通过影响短期利率和汇率的行为,从而最终影响到总需求和通货膨胀率。我国的金融市场并不发达,利率尚没有完全市场化,目前对短期市场利率的研究大多用短期国债回购利率来代替。随着市场规模的扩大,交易活跃程度的提高,投资者的理性,交易所交易的国债市场隐含的利率期限结构将很大程度上代表当前的市场利率。为了更好地揭示市场利率的总体水平和变化方向,为投资者从事国债投资和政府有关部门加强国债管理提供可参考的依据,需要我们在前人研究的基础上对我国国债的利率行为做进一步的研究。

2. 短期市场利率的长记忆性实证分析结论

在利率时间序列的长记忆性检验中我们使用了简单易行的得分检验法,并使用最大似然法估计了利率的分整模型,从而弥补了得分检验法没有考虑到短记忆存在性的缺陷。通过对7天期和14天期短期国债回购利率的比较分析,我们认为这两种国债虽然都是短期国债,但各自的变动规律有较大差异。7天期国债回购利率主要是具有短记忆性,即序列间主要存在着短期相关性的影响,而14天期国债回购利率同时具有长记忆性和短记忆性,即序列间同时存在着长期相关性和短期相关性的影响。

在以上分析结论的基础上,我们利用 R/S 分析技术和改进的 Hosking 迭代法对 14 天期短期国债回购利率建立了 *ARFIMA-GARCH* 模型,通过该模型我们得出了如下结论:

1) 14天期短期国债回购利率存在着较强的长记忆性,并且分整阶数

$d = 0.48236$ 。这表明在较长的时间跨度内当前利率对后期利率都具有显著的影响。

- 2) 从实证分析过程和结果可以看到, 序列中的 $GARCH(1,1)$ 效应对 d 值的估计存在显著的影响, 也就是说, 序列有明显的聚集波动性。更具体地, 模型中参数 $\alpha + \beta = 1.1468 > 1$, 这和很多其他国家的短期利率 $GARCH$ 模型估计结果一样, 即 $\alpha + \beta > 1$, 另外, 谢赤 (2004)、洪永淼和林海 (2004) 在研究中国短期利率时得到的结果一致。可见尽管 $GARCH$ 模型对回购利率的波动行为作了很好的描述, 且 Nelson (1991) 认为序列仍然可能是严格平稳的序列, 但是我们还不能保证 $GARCH(1,1)$ 是平稳过程, 所以 $GARCH$ 参数存在不稳定性, 这需要我们做进一步的探讨。
- 3) 14天期短期国债回购利率的动态特征由长短记忆性和条件异方差性共同构成。因此, 该品种利率的内部结构是一个既有线性关系, 又有非线性关系的复杂系统。

3. 未来尚须进一步研究的问题

长记忆时间序列作为时间序列研究中的一个分支, 国外学者对其研究已有较长的时间, 而国内学者在此领域的研究则颇有不足。随着各种非线性分析方法越来越得到人们的重视, 长记忆时间序列的研究必将取得越来越多的科研成果。综观全文, 本篇在短期市场利率时间序列长记忆性的研究中仍存在着诸多的不足, 总的看来在今后的研究中仍有不少需要改进和提高的地方。

- 1) 时间序列的长记忆性从本质和上说是序列分数维的体现, 可以说我国短期市场利率具有了分形市场的特征, 但如何更加深入地理解此类市场行为仍需要进一步的研究。
- 2) 在长记忆检验和长记忆模型的估计中, 各种检验方法和估计方法各有什么样的使用条件及优势, 各方法在检验和估计中是否具有比较一致的结果, 其结果是否具有较好的统计特性似乎还须进一步的探讨。
- 3) 在实证分析的样本选取上, 不同时间段的样本和样本量大小的选取是否对实证分析结论产生影响, 将产生怎样的影响尚不得知。
- 4) 本文采用短期国债回购利率代表中国短期市场利率进行研究, 而不同的利率品种在长记忆性上的表现各有不同, 怎样更好地判定短期市场利率的长记忆性仍须进一步的思考。

附录：分析程序

Gauss 程序分析

```

/**得分检验法 (score test) **/
dd=0.5;    @ under the null of d=dd @
/** these are the coefficients of binomial expansion **/
/** you can expand more than 14 coefficients **/
a1=dd;
a2=a1*(1-dd)/2; a3=a2*(2-dd)/3; a4=a3*(3-dd)/4; a5=a4*(4-dd)/5; a6=a5*(5-dd)/6;
a7=a6*(6-dd)/7; a8=a7*(7-dd)/8; a9=a8*(8-dd)/9; a10=a9*(9-dd)/10; a11=a10*(10-dd)/11;
a12=a11*(11-dd)/12; a13=a12*(12-dd)/13; a14=a13*(13-dd)/14;
@transformed series@
n=299;
fd=zeros(n-14,1);
i=1;
do until i==rows(fd)+1;
fd[i,] = x[i+14,] - a1*x[i+13,] - a2*x[i+12,] - a3*x[i+11,] - a4*x[i+10,] - a5*x[i+9,] -
a6*x[i+8,] - a7*x[i+7,] - a8*x[i+6,]
          -a9*x[i+5,] - a10*x[i+4,] - a11*x[i+3,] - a12*x[i+2,] - a13*x[i+1,] - a14*x[i,];
i=i+1;
endo;
ns=rows(fd);
/** Tanak's test ***/
@ proc for covariance function @
proc vf1(m);
retp(fd[m+1:ns,]);
endp;
proc vf2(m);
retp(fd[1:ns-m,]);
endp;
fv=fd'fd;
rf=zeros(ns-1,1);
m=1;
do until m==ns;
rf[m,]= (1/m)*(vf1(m)'vf2(m)/fv);
m=m+1;
endo;
stest=sqrt(6*ns/(pi^2))*sumc(rf);    @ this is score test @
stest;

```

```

/**ARFIMA(1,d,0)、ARFIMA(0,d,1)、ARFIMA(1,d,1)模型的估计**/
use gpe2;
output file=outputlr014 reset;
load datar014[301,1]=GPE\datar014.txt;
data=datar014[2:301,.];
data=360/14*ln(1+data*14/360);
data=data-meanc(data)*ones(rows(data),1);

call reset;
_nlopt=1;
_method=5;
_iter=100;
_conv=1;
_b={0.5,0,0,1};
_jacob=&jcb;

_names={"d","ar(1)","ma(1)","sigmar"};
call estimate(&est, data);
end;

proc jcb(x,b);
local j;
j=ones(rows(x),1);
j[1]=sqrt(1-b[2]^2);
retp(j);
endp;

proc est(x,b);
local x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14,x15,e,u,v,n;

x15=x[1:285,.]; x14=x[2:286,.]; x13=x[3:287,.]; x12=x[4:288,.]; x11=x[5:289,.]; x10=x[6:290,.];
x9=x[7:291,.]; x8=x[8:292,.]; x7=x[9:293,.]; x6=x[10:294,.]; x5=x[11:295,.]; x4=x[12:296,.];
x3=x[13:297,.]; x2=x[14:298,.]; x1=x[15:299,.]; x0=x[16:300,.];

e=x0-b[1]*x1-b[1]*(1-b[1])/2*x2-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])/2/3*x3-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])/2/
3/4*x4

-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])/2/3/4/5*x5-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-
b[1])/2/3/4/5/6*x6

-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])/2/3/4/5/6/7*x7-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*
(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])/2/3/4/5/6/7/8*x8

-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9*x9

```

```
-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])*(9-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9/10*x10
```

```
-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])*(9-b[1])*(10-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9/10/11*x11
```

```
-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])*(9-b[1])*(10-b[1])*(11-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9/10/11/12*x12
```

```
-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])*(9-b[1])*(10-b[1])*(11-b[1])*(12-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9/10/11/12/13*x13
```

```
-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])*(9-b[1])*(10-b[1])*(11-b[1])*(12-b[1])*(13-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9/10/11/12/13/14*x14
```

```
-b[1]*(1-b[1])*(2-b[1])*(3-b[1])*(4-b[1])*(5-b[1])*(6-b[1])*(7-b[1])*(8-b[1])*(9-b[1])*(10-b[1])*(11-b[1])*(12-b[1])*(13-b[1])*(14-b[1])/2/3/4/5/6/7/8/9/10/11/12/13/14/15*x15;
```

```
u=e-b[2]*lagn(e,1);
```

```
u[1]=sqrt(1-b[2]^2)*e[1];
```

```
v=recserrar(u,u[1],b[3]);
```

```
n=rows(v);
```

```
retp (-0.5*n*(ln(2*pi)+ln(b[4]^2))-0.5*sumc((v./b[4])^2));
```

```
endp;
```

SAS 程序分析

```
/*将离散时间序列转换成连续时间序列*/
```

```
data rate;
```

```
set sasuser.rater014;
```

```
y=360/14*log(1+r014*(14/360));t=_n_;run;
```

```
proc gplot data=rate;
```

```
symbol i=join v=dot c=blue h=0.25 ;
```

```
plot y*t;
```

```
title 'raw time series ';
```

```
run;
```

```
data rate;
```

```
set rate;dr=dif(y);lr=lag(y);run;
```

```
/*序列 y 的一阶差分序列图*/
```

```
proc gplot data=rate;
```

```
symbol i=join v=dot c=blue h=0.25 ;
```

```
plot dr*t;
```

```
title 'one difference ';
```

```
run;
```



```

/*序列 y 的趋势分析*/
proc autoreg data=rate;
model y= t/ method=ml;
output out=rate1 r=x;run;
  proc gplot data=rate1;
symbol i=join v=dot c=blue h=0.25 ;
  plot x*t;
  title 'time series without trend and intecept';
  run;
data corr014;
set sasuser.corr014;rename AC_=ac;run;

/*序列 x 的相关系数图*/
proc gplot data=corr014;
symbol i=join v=dot c=blue h=0.25 ;
  plot ac*n;
  label ac='相关系数'
        n='滞后期';
  title 'correlogram';
  run;
data rate2;
set rate1(keep=x);run;
data rate1;
set rate1;
lagx1=lag1(x);lagx2=lag2(x);lagx3=lag3(x);lagx4=lag4(x);lagx5=lag5(x);run;

/*序列 x 的 ARMA 模型定阶*/
proc arima data=x;
identify var=x esacf scan minic;run;

/*序列 x 的 ADF 检验*/
proc arima data=rate1;
identify var=x stationarity=(adf=(1,2,3,4,5,6,7,8));
run;

/*对序列 x 进行 ARMA-GARCH 模型拟和*/
proc autoreg data=rate1;
model x= lagx1 lagx2 lagx4 lagx5 /nlag=(1 3 4) garch=(q=1,p=1) noint method=ml ;
output out=rate2 r=residual;
run;
quit;

/*序列 x 的谱分析*/
proc spectra data=rate1 out=bb coef p s adjmean whitetest;

```

```
var x;
weights 1 2 3 4 3 2 1;
run;
quit;

/*序列 x 的谱密度图*/
proc gplot data=bb;
symbol i=join ci=blue v=dot cv=blue h=0.25 ;
plot s_01 * freq;
label s_01='谱密度'
      freq='频率';
      title "density of x";
run;

/*R/S 分析*/
data rate2;
set rate2(keep=residual);run;
data rate2;
set rate2(firstobs=6);i=_n_;run;
%macro ahua(a);
%local n;
%do n=10 %to (&a-5)/10;

data rate&n;
set rate2;
d=int((i-1)/&n);
run;
proc means data=rate&n noprint;
class d;
var residual;

output out=b&n;

data c&n ;
set b&n;

if _STAT_='MEAN';

data c&n ;
set c&n ( firstobs=2);
rename residual=mresid;
data c&n;
set c&n;
do k=1 to &n;
```

```

mresid1=mresid;
output;
end;
run;
data c&n;
set c&n(keep=d mresid1);
i=_n_;
run;
data c&n;
set c&n;
if i> &n*int(&a/&n) then delete;
run;

data rate&n;
set rate&n (keep=i residual);
if i> &n*int(&a/&n) then delete;
run;

data cc&n ;
merge c&n rate&n;j=_n_; by i; run;

data cc&n;
set cc&n; nresid=residual-mresid1;run;

data cc&n;
set cc&n; j=0;
if d=j then j=j+1;
retain sresid 0;
sresid=sresid+nresid;run;

data cc&n;
set cc&n(keep=d i sresid);run;

proc sort data=cc&n ;
by d sresid; run;

data cc&n;
set cc&n;j=_n_;
if j=d*&n+1 then min&n=sresid ;
if j=(d+1)*&n then max&n=sresid ;run;

data minc&n;
set cc&n(keep=min&n);
if min&n ne . then output;

```

```
data minc&n;
set minc&n;i=_n_;run;

data maxc&n;
set cc&n (keep=max&n);
if max&n ne . then output;

data maxc&n;
set maxc&n;i=_n_;run;

data disc&n;
merge maxc&n minc&n;by i;run;

data disc&n;
set disc&n;rresid=max&n-min&n;run;

data yc&n ;
set b&n;
if _STAT_='STD';

data yc&n;
set yc&n.(firstobs=2);rename residual=stdresid;
i=_n_;
if i> int(&a/&n) then delete;run;

data yc&n;
set yc&n(keep=i stdresid);run;

data yyc&n;

merge disc&n yc&n; by i; run;

data yyc&n;
set yyc&n;qresid= rresid/stdresid; run;
proc means data=yyc&n noprint;
var qresid; output out=yyc&n; run;

data e&n ;
set yyc&n(keep=_stat_ qresid); if _STAT_='MEAN';run;
data e&n;set e&n(keep=qresid);run;
%end;%mend;
%ahua(995);
```

```
data eee;
set e10 e11 e12 e13 e14 e15 e16 e17 e18 e19 e20 e21 e22 e23 e24 e25 e26 e27 e28 e29 e30
    e31 e32 e33 e34 e35 e36 e37 e38 e39 e40 e41 e42 e43 e44 e45 e46 e47 e48 e49 e50
    e51 e52 e53 e54 e55 e56 e57 e58 e59 e60 e61 e62 e63 e64 e65 e66 e67 e68 e69 e70
    e71 e72 e73 e74 e75 e76 e77 e78 e79 e80 e81 e82 e83 e84 e85 e86 e87 e88 e89 e90
    e91 e92 e93 e94 e95 e96 e97 e98 e99 ;
run;
data sasuser.hurstspl1000;
set eee;j=_n_;i=j+9;vresid=qresid**2;
lnvresid=log(vresid);lnn=log(i);run;
proc reg data=sasuser.hurstspl1000;
model lnvresid=lnn;run;
proc gplot data=sasuser.hurstspl1000;
symbol i=join ci=blue v=dot cv=blue h=0.5 ;
    plot lnvresid*lnn;
    label lnvresid='R/S';
    title " R/S regression";
run;
/*序列 x 的 d 阶差分计算*/
data y;
delete;
%macro a(d,1);
%do j=1 %to &1;
data a;
set rate1;
if n<=&j then output;
proc sort data=a;
by descending n;
data b;
y1=1;
do i=1 to &j;
if i=1 then y1=1;
if i>1 then
    y1=y1*(i-2-&d)/(i-1);
output;
end;
run;
data c(keep=x y1 n);
merge a b;
n=_n_;
run;
data c;
set c;
y2=x*y1;
```

```
y+y2;
if n=&j then output;
run;
data y;
set y c;
%end;
run;
%mend;
%a(d=0.48236,L=1000);

data x;
set y(keep=n y);x=y;
run;

/*序列 x 的 d 阶差分图*/
proc gplot data=x;
plot x*n;
symbol i=spline v=dot h=0.25 c=blue;
title "fractional difference (d=0.48236)";
run;
```

[参考文献]

- [1] Anderson, T.G. T. BOLLERSLEV, 1997. Heterogeneous Information Arrivals and and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long_Run in High Frequency Returns 【J】 *Journal of Finance*, 52(3): 975-1005
- [2] Anderson, T.G and J. Lund, 1997. Estimating Continuous-Time Stochastic Volatility Models of the Short- Term Interest Rate 【J】 *Journal of Econometrics* 72, 343-377
- [3] ARTECHE, J. (2002) Semiparametric Robust Tests on Seasonal or Cyclical Long Memory TimeSeries. *Journal of Time Series Analysis*, 23(3): 251-285
- [4] ARTECHE, J., P. M. ROBINSON (2000) Semiparametric Inference in Seasonal and Cyclical Long Memory Processes. *Journal of Time Series Analysis*, 21(1): 1-25
- [5] Backus, D.&Zin, S.,1993. Long memory inflation uncertainty: Evidence of term structure of interest rate. 【J】 *Journal of Money, Credit and Banking*, 25, 687-700
- [6] BAILLIE, R. T., T. BOLLERSLEV, H. O. MIKKELSEN. 1996. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity 【J】 *Journal of Econometrics*, 74: 3-30.
- [7] BAILLIE, R. T., C.-F. CHUNG, M. A. TIESLAU 1996. Analysing inflation by the Fractionally Integrated Arfima-Garch Model 【J】 *Journal of applied Econometrics*, 11(1): 23-40.
- [8] Baillie, R. T.1996. Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics 【J】 *Journal of Econometrics*, 73, 5-59
- [9] Baz, J. and S.R. Das .1996. Analytical Approximation of the Term Structure for Jump-Diffusion Process: a Numerical Analysis 【J】 *Journal of Fixed Income* 6, 78-86.
- [10] Beran, J. 1995. Maximum likelihood estimation of differencing parameter for invertible short and long memory autoregressive integrated moving average models 【J】 *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.* 57(4): 659-672
- [11] BOLLERSLEV, T., H. O. MIKKELSEN. 1996. Modeling and pricing long memory in stock market volatility 【J】 *Journal of Econometrics*, 73: 151-184.

- [12] BREIDT, F. J., N. CRATO, P. de LIMA. 1998. The detection and estimation of long memory in stochastic volatility 【J】 *Journal of Econometrics*, 83: 325-348.
- [13] Brock, W. A., Dechert, W. D., and Scheinkman, J. A. 1987. A Test for Independence based on Correlation Dimension 【J】 unpublished manuscript
- [14] Brockwell, P. J., R. A. Davis. 1991. *Time series: Theory and Methods* 【M】 Springer-Verlag
- [15] Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff and A. B. Sanders 1992. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate 【J】 *Journal of Finance*, 47, 1209-1227.
- [16] CHEUNG, Y.-W. 1993. Long memory in foreign exchange rates 【J】 *Journal of Business and Economic Statistics*, 11: 93-101.
- [17] COMTE, F., E. RENAULT. 1996. Long memory continuous time models【J】 *Journal of Econometrics*, 73: 101-149.
- [18] Connolly, R., & Guner, N. 1999. Long memory characteristics of the distributions of treasury security yields, returns and volatility (Working Paper) 【J】 Chapel Hill: University of North Carolina
- [19] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates 【J】 *Econometrica* 53, 385-407.
- [20] Dai, Q. and K. Singleton. 2003. Term Structure Dynamics in Theory and Reality 【J】 *Review of Financial Studies* 16, 631-678.
- [21] Das, S. R. 2002. The Surprise Element: Jumps in Interest Rates 【J】 *Journal of Econometrics* 106, 27-65.
- [22] DING, Z., C. W. J. GRANGER, R. ENGLE. 1993. A long memory property of stock market returns and a new model 【J】 *Journal of Empirical Finance*, 1: 83-106.
- [23] DING, Z., C. W. J. GRANGER. 1996. Modelling volatility persistence of speculative returns: A new approach 【J】 *Journal of Econometrics*, 73: 185-215.
- [24] Edgar E. Peters 著 储海林 殷勤译 《分行市场分析—将混沌理论应用到投资与经济理论上》 【M】 22, 60, 72, 103 经济科学出版社 北京 2002
- [25] Edgar E. Peters 著 王小东译 《资本市场的混沌与秩序》(第二版) 【M】 经济科学出

- 版社 北京 1999
- [26] Edgar, E. P. 1991. *Chaos and Order in the Capital Markets* 【M】 Wiley, New York
- [27] Gallant, A. R. and G. Tauchen 1998. *Reprojection Partially Observed Systems With Applications to Interest Rate Diffusions* 【J】 *Journal of the American Statistical Association* 93, 10-24.
- [28] Geweke, J. and S. Porter-Hudak 1983 *The estimation and application of long memory time series models* 【J】 *Journal of Time Series Analysis* 4, 221-238
- [29] Granger, C. W. J. 1980. *Long memory relationships and the aggregation of dynamic models* 【J】 *Journal of Econometrics*, 14, 227-238
- [30] Granger, C. W. J., Zhuanxin Ding. 1996. *Varieties of long memory models* 【J】 *Journal of Econometrics* 73, 61-78
- [31] Granger, C. W. J. and R. Joyeux. 1980. *An introduction to long memory time series models and fractional differencing* 【J】 *Journal of Time Series Analysis* 1, 5-39
- [32] Gray, H. L., Nien-Fan Zhang, Woodward, W. A. 1989. *One generalized fractional processes* 【J】 *Journal of Time Series Analysis* 10(3): 233-257
- [33] Hong, Y. and H. Li. 2004. *Nonparametric Specification Testing for Continuous-Time Models With Applications to Interest Rate Term Structures* 【J】 *Review of Financial Studies*, forthcoming.
- [34] Horst, H. E. 1951. *Long-term storage capacity of reservoirs* 【J】 *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 116, 770-779
- [35] Hosking, J. R. M. 1981. *Fractional differencing* 【J】 *Biometrika* 68, 165-176
- [36] HOSKING, J. R. M. 1996. *Asymptotic distributions of the sample mean, autocovariances, and autocorrelations of long-memory time series* 【J】 *Journal of Econometrics*, 73: 261-284.
- [37] HOSOYA, Y. 1996. *The quasi-likelihood approach to statistical inference on multiple time-series with long-range dependence* 【J】 *Journal of Econometrics*, 73: 217-236.
- [38] James D. Hamilton 著 刘明志译 《时间序列分析》【M】 543-544 中国社会科学出版社 北京 1999
- [39] Jensen, M. J. 1999. *Using wavelets to obtain a consistent ordinary least squares*

- estimator of the long memory parameter 【J】 Journal of Forecasting, 18, 17-32
- [40] Kennedy, D. 1976. The distribution of the maximum Brownian excursion【J】 Journal of Applied Probability. 13: 371-376
- [41] KOKOSZKA, P. S., M. S. TAQQU. 1996. Infinite variance stable moving averages with long memory 【J】 Journal of Econometrics, 73: 79-99.
- [42] Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y. 1992. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root? 【J】 Journal of Econometrics. 54: 159-178
- [43] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, A.Craig MacKinlay著 朱平芳等译《金融市场计量经济学》上海财经大学出版社 上海 2003
- [44] LEE, D., P. SCHMIDT. 1996. On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally integrated alternatives 【J】 Journal of Econometrics, 73: 285-302.
- [45] Levy, P. 1953. Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions 【J】 Univ. California Publ. Statist., (1): 331-390
- [46] LO., W. 1991. Long-Term Memory in Stock Market Prices【J】 Econometrica, 59(5): 1279-1313.
- [47] LOBATO, I. N., P. M. ROBINSON. 1996. Averaged periodogram estimation of long memory 【J】 Journal of Econometrics, 73: 303-324.
- [48] Luis A. Gil-Alana. 2002. A mean shift break in the US interest rate 【J】 Economics Letters 77, 357-363
- [49] Luis A. Gil-Alana. 2004. Modelling the U.S. interest rate in terms of $I(d)$ statistical models 【J】 The Quarterly Review of Economics and Finance 44, 475-486
- [50] Mandelbrot, B., M. Taqqu. 1979. Robust R/S analysis of Long Run Serial Correlation 【J】 Bulletin of the International Statistical Institute 48(book 2), 59-104
- [51] Mandelbrot, B.B., Van Ness, J.W. 1968. Fractional brownian motions, fractional noises and applications 【J】 SIAM Review, 10(4):422-437
- [52] Mcleod, A. L., K.W. Hipel. 1978. Preservation of the rescaled adjusted range, 1: A reassessment of the Hurst Phenomenon 【J】 Water Resources Research, 1978, 14: 491-508

- [53] Nelson, D. 1991. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach
【J】 *Econometrica* 59, 347-370.
- [54] Pfann, G. A., Schotman, P. C., & Tschering, R. 1996. Non-linear interest rate dynamics and implications for the term structure. 【J】 *Journal of Econometrics*, 74, 149-176
- [55] Richard T. Baillie; Ching-Fan Chung; Margie A. Tieslau, 1996. Analysing Inflation by the Fractionally Integrated Arfima-Grach Model 【J】 *Journal of Applied Econometrics*, 23-40, Vol.11
- [56] Robinson, P. 'Time Series with strong Dependence', in C.A. Sims(ed.) 【M】 *Advances in Econometrics: Sixth World Congress, Vol. I, Cambridge University Press*, 47-95
- [57] Rosenblatt, M. 1956. A central limit theorem and a strong mixing condition 【J】 *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 42: 43-47
- [58] Shea, G. 1991. Uncertainty and implied variance bounds of long memory models of the interest rate term structure. 【J】 *Empirical Economics*, 16, 287-312.
- [59] Sowell, F. B. 1990. The Fractional Unit Root Distribution 【J】 *Econometrica*, 58(2): 495-505.
- [60] Sowell, F. B. 1992. Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally-integrated time-series models 【J】 *Journal of Econometrics*, 53, 165-188
- [61] Tanaka, K., 1999. The nonstationary fractional unit root 【J】 *Econometric Theory*, 15, 549-582
- [62] Taqqu, M. S., V. Teverovsky, W. willinger. 1995. Estimations for long-range dependence: an empirical study 【J】 *Fractals*, 3 (4) 765-788
- [63] Tkacz, G. 2001. Estimating the fractional order of integration of interest rates using a wavelet OLS estimator 【J】 *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 5(1), 19-32
- [64] Vasicek, O. 1977. An Equilibrium Characterization of the Term Structure 【J】 *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.
- [65] 范龙振 上交所债券利率期限结构与两因子Vasicek模型 【J】 *复旦学报（自然科学版）* 2003, 5, 773-778。

- [66] 洪永淼和林海 中国市场利率动态研究—基于短期国债回购利率的实证分析（工作论文）【J】清华大学中国金融研究中心 NO:2004008, 2004
- [67] 柯柯, 张世英 分整增广GARCH-M模型【J】系统工程学报 2003, 18(1): 16-24
- [68] 林海、郑振龙 中国利率期限结构：理论及应用【M】中国财经出版社, 2004
- [69] 林海和郑振龙 中国市场利率期限结构的静态估计【J】武汉金融 2003, 3, 33-36
- [70] 马明、向桢 中国利率期限结构分析【J】经济学（季刊）2002, 3, 699-714.
- [71] 孙继国和伍海华 我国银行间同业拆借利率的时间序列预测模型【J】统计与决策 2004,5, 33-34
- [72] 吴冲锋, 王海成, 吴文峰 金融工程研究【M】上海交通大学出版社 上海 2000
- [73] 吴雄伟和谢赤 银行间债券市场回购利率的ARCH/GARCH模型及其波动性分析【J】系统工程 2002, 5, 88-91
- [74] 谢赤, 吴雄伟 基于Vasicek模型和CIR模型中的中国货币市场利率行为实证分析【J】中国管理科学 2002, 3, 22-25。
- [75] 谢赤著《利率行为描述与风险管理——利率期限结构及其应用研究》【M】湖南人民出版社 长沙 2004
- [76] 张世英 樊智著《协整理论与波动模型—金融时间序列分析及应用》【M】清华大学出版社 北京 2004

致 谢

金融时间序列长记忆特征方面的研究在国内近几年才兴起，目前的研究成果也比较少，而我对这方面的兴趣正是从我的导师黄长全副教授所教《时间序列与金融数据分析》一课的时候开始。尽管在论文选题之前自认为已经做了不少准备，但写作的过程还是比较痛苦的，大量的英文文献、深奥的计量分析技术以及较复杂的计算机编程曾数次让我望而却步。但是我还是坚持下来，一方面是我不甘心放弃这样一个我很感兴趣，也可以让我在时间序列计量分析方面有较大提高的课题，另一方面也是得到了黄老师和其他不少老师和同学的关心和帮助。从理论探讨到实证分析，黄老师给予我极大的鼓励和认真细致的指导。在写作技巧上他更是字斟句酌、精益求精。在此我谨向黄长全老师表示由衷的感谢！

特别提出的是，我还有感谢新加坡国立大学的李政（Lee Jin）教授。他在我校关于长记忆时间序列的学术讲座，对我提问问题的一一耐心解答以及在计算机程序方面给我提供的帮助使我受益匪浅。同时还要感谢我的好友童冬雷同学在编程方面给予的支持。在此一并表示我深深的谢意！

我还要感谢始终教导、关心、帮助我的广大恩师和同窗好友，是你们给了我进取的动力。还要特别感谢我的父母，你们的理解和支持永远是最重要的。

由于本人学识所限，深感其中仍有诸多不足，敬请各位师长和同仁批评指正。

孙志华

2006年4月于厦门大学