摘 要

众所周知，保险公司的成功运营不仅依赖于其保险业务，而且依赖于其投资业务。这样保险公司既面临着金融市场潜在损失的风险，还面临着高额保险索赔的风险。结果，综合考虑金融市场的动态变化以及保险过程还有两者相互作用的聚合风险模型是十分必要的。本文把破产概率做为保险公司的风险度量。假设保险公司有机会在市场上进行投资，而且索赔过程服从复合泊松过程。研究了保险公司总资产过程的随机模型。

首先，把利率加入到经典的 Lundberg-Cramér 模型中。应用排队模型，在考虑常数利率因素的前提下，研究了未决赔款准备金的折现值。 并得到了其分布函数以及特征函数, 讨论了针对未来某一时间段内保险公司所需计提的未决赔款准备金现值的分布函数的上界，而且给出了未决赔款准备金折现值的矩。进一步地，研究了保险公司的带有常数利率的最终破产概率。通过鞅方法得到了最终破产概率的指数型上界，从而经典的 Cramér-Lundberg 模型得到了推广。同时研究了保险公司的有限时间破产概率。在利率为不确定的情形下，其中利率用随机过程描述，对保险公司的盈余用经典更新风险模型建模。假设索赔额具有正则变化尾的分布，不同于传统的方法，利用随机权和的结果得到了有限时间破产概率的尾等价式。为精确估计破产概率提供了有效的途径，推广了经典的结果。

其次，在全部资产分别投资于股票市场和无风险债券的情形下，研究了保险公司的最终破产概率和组合投资策略。假设风险投资现值为常数族，利用鞅方法得到了最终破产概率的指数型上界，并且解出了最优组合投资策略。给保险公司提供了可以控制风险的合理投资策略。并且给出了算例阐述了其结果。同时考虑了二元风险模型下保险公司的投资问题。假设保险公司的两个子公司分别在风险市场上投资，且投资策略都属于常数族，利用鞅方法得到了破产概率的指数型上界，给控制保险公司的风险提供了可能。并且得到了最优的常数投资策略，该策略可以使破产概率的上界最小。

再者，假设保险公司投资一部分到股票市场，剩下的购买无风险债券，索赔额过程服从复合泊松过程，风险资产价格服从指数 Lévy 过程。如果投资过程为常数可以得到破产概率的指数型上界，该常数策略可以被精确计算，一些例子阐述了上述结果。而且，证明了该常数投资策略是一致最优的。在 Value-at-Risk 的风

险限制下，得到了最优的混合投资策略。该策略可以使保险公司的期望总财富最大。

最后，就保险公司投资一部分资金到股票市场，余下的一部分投资到利率为常数的无风险债券的情形下，研究了最终破产概率。在投资为常数策略的条件下，分别就股票价格服从几何布朗运动和更广泛的 Lévy 过程两种情况，利用布朗运动的分布性质和离散化嵌入等方法，得到了破产概率和惩罚函数的积分方程，从而给出了更精确地计算破产概率和惩罚函数的方法。

关键词： Lundberg-Cramér 模型，破产概率，几何布朗运动，指数 Lévy 过程，惩罚函数

ABSTRACT

It is well known that the success of an insurance company depends not only on its insurance business, but also on how well the company invests its reserve. The risk such a company faces arises both from ponential losses on the financial market and from unexpectedly high insurance claims. Consequently, an integrated risk model incorporating the dynamics of the financial markets and the insurance portfolio as well as the interaction between them is needed. Ruin probability is used in this paper as a risk measure of an insurance company. We consider a stochastic model for the wealth of an insurance company which has the possibility to invest into a market, and the total insurance claim amount is modeled by a compound Poisson process.

Firstly, we add the interest rate into the classical Lundberg-Cramér model. The discounted value of outstanding claims reserve is studied by the queuing model with constant interest. The distribution function and characteristic function of the discounted value of outstanding claims reserve in a given period of time are obtained. Furthermore, we give an upper bound of distribution function, the moments of the discounted value of outstanding claims reserve are given as well. We further investigate the infinite time ruin probability of the Cramer-Lundberg model with constant interest force. Exponential type upper bounds for the ruin probability are derived by martingale techniques. Classical Lundberg-Cramér model is generalised. Under the condition that the interest rate is uncertain, which is described by stochastic process, the surplus of insurance company is modeled by classical renewal risk model. Provided that the claims have regular varying-tailed distributions, the tail equivalence is obtained by the method of randomly weighted sums. The method is different from traditional ways. An effective approach to estimate the ruin probability is obtained and the classical results are generalized.

Secondly, under the condition that all the assets are invested in stock and risk-free bond markets respectively, this paper investigates the infinite time ruin probability and portfolio investment of insurance company. Provided that the discounted value of risky investments is a constant family, an exponential type upper bound for the ultimate ruin probability can be obtained by the martingale approach, the optimal portfolio investment strategy can be derived as well. The aim of this paper is to provide a rational strategy which can control the risk of insurers. An example is employed to illustrate the results. Provided that two subsidiary companies of an insurance company are allowed to invest certain amount of money in some risky market and the value of risky investments is a constant family. An exponential type upper bound for the ultimate ruin probability can be obtained by the martingale approach, which can control the risk of insurance company. The optimal portfolio investment strategy can be derived, which can minimize the upper bound of ruin probability.

Thirdly, we investigates the infinite time ruin probability under the condition that the company is allowed to invest certain amount of money in some stock market, and the remaining reserve in the bond with constant interest force. The total insurance claim amount is modeled by a compound Poisson process and the price of the risky asset follows a general exponential Lévy process. Exponential type upper bounds for the ultimate ruin probability are derived when the investment is a fixed constant, which can be calculated explicitly. This constant investment strategy yields the optimal asymptotic decay of the ruin probability. Some examples are applied to illustrate the results. We provide an approximation of the optimal investnent strategy, which maximizes the expected wealth of the insurance company under a risk constraint on the Value-at-Risk.

Lastly, we investigate the infinite time ruin probability under the condition that the company is allowed to invest certain amount of money in some stock market and the remaining reserve in the bond with constant interest force. Through the properties of Brownian motion and discrete embedded method, the integral equations for ruin probability are derived under the assumptions that the stock price follows geometric Brownian motion or Lévy process. The method for explicitly computing the ruin probability and penalty function is obtained.

Key words: Lundberg-Cramér model, Ruin Probability, Geometric Brownian Motion, Exponential Lévy process, Penalty function

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

签名：______ 日期：09年12月15日

论文使用授权

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后应遵守此规定）

签名：______ 导师签名：______

日期：09年12月15日

第一章 概述

1.1 引言

传统的保险公司是指销售保险合约、对被保险人提供风险保障的公司。保险公司的保险业务的盈利模式为：一个客户一定时期缴纳一次或数次保险费，保险公司将大量客户缴纳的保险费收集起来，一发生保险事故，保险公司就支付约定的赔款。如果自始至终保险公司的赔款支出小于保险费收入，差额就成为保险公司的“承保赢利”。例如，大量分散的房屋所有者购买了保险单并且向保险公司支付了保险费，如果保险事故发生，保险人根据保险条款兑现保险责任。对于一些保单的持有者来说，他们因为保险事故的发生而获取的保险金比他所缴纳的保险费高得多，而其他一些人可能因为整个保险期间都没有发生保险事故而根本没有获得赔款。合计下来，保险公司所支付的总赔款要比他们获得的保险费收入少。二者的差额形成费用和利润。

当购买保险时，保险公司财务的稳定和健康可能是主要应考虑的问题。保险费支出通常是为了给未来多年的损失做准备。正因为如此，保险公司的生存能力是非常重要的。近年来，许多保险公司陷入破产（比如亚洲金融危机后的日本保险业，911 事件后的美国保险业等），使它们的客户失去了保障（或者依赖政府保险保障基金在事故发生时获得很少的保险金）。国外许多独立的评级机构提供保险公司的财务信息并对保险公司评定等级（如慕尼黑再保险）。既然如此，保险公司的风险控制就变得非常重要。保险精算中的风险理论就是对风险进行定量分析和预测,进行决策、控制和管理的一般理论。 其研究过程大致可分为风险识别、建立风险模型、风险分析、风险决策、风险控制等。

在保险数学，也称为精算数学的范畴内，风险理论的核心内容是破产理论。瑞典精算师 Filip Lundberg 在 1903 年发表的博士论文，开创了破产理论研究的起源，聚合风险模型被首次提出。之后，Lundberg(1903)[1]的模型受到了越来越多的学者和保险从业人员的关注。大约 50 年之后，Cramér(1955) [2]又将 Lundberg 的工作奠立在坚实的数学基础之上，从而与 Lundberg 一道建立了破产论研究的基本模型并得到了经典破产论的基本定理。

本章首先介绍本文的核心模型，通常被称为 Cramér-Lundberg 模型，该模型

是破产论的经典模型；然后介绍经典模型的推广，即把投资问题考虑进去，并对相关文献进行综述和评介，进而提出本文的研究问题；最后，是本文的研究内容及结构安排。

1.2 经典的破产模型

经典的破产模型，也称为Cramér-Lundberg模型，其用随机过程进行描述，该过程称为承保盈余过程。承保盈余过程分为三个部分：（1）保险公司的保费收入过程。（2）保险公司的索赔过程，通常用点过程描述。（3）在初始时刻，保险公司拥有初始资本金。

通过以上分析，现在对承保盈余过程数学建模如下，在一个完备的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上，定义盈余过程

$$R(t)\equiv R(t,u)=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n, \tag{1.1}$$

其中，$\{\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\}_{t\geq 0}$为索赔过程，用复合泊松过程描述。$u\geq 0$为保险公司的初始资本金，$c\in\mathbb{R}$是单位时间保费收入，第$n$次的索赔额大小用随机变量$X_n$描述，$n=1,2,\ldots$。$t$时刻索赔到达个数为一个点过程，记为$N=(N(t))_{t\geq 0}$。

该模型满足假设如下：

（1）假设点过程$N=(N(t))_{t\geq 0}$是一个强度为λ的泊松过程。

（2）索赔额的大小$\{X_n\}_{n\geq 1}$是一列独立同分布的随机变量列，且与随机变量X同分布，其分布函数为$F_X(x),x\geq 0$。

（3）点过程$N=(N(t))_{t\geq 0}$和随机变量列$\{X_n\}_{n\geq 1}$相互独立。

（4）保费收益过程为确定性的过程，且瞬时保费收益率为常数。

以上描述的承保盈余过程有以下两个显著特点：第一，承保盈余过程是平稳独立增量过程，由模型(1.1)的独立性假设（3）和Poisson过程的平稳独立增量性[3]可知；第二，承保盈余过程是右连左极（右连续左极限存在）过程。保费收益和平均索赔之差称为安全负荷(safety loading)。如果安全负荷严格为正，称安全负荷条件成立，用公式表示为：

$$ct-E[\sum_{i=1}^{N(t)}X_i]>0。 \tag{1.3}$$

根据上面假设（3），可以进一步计算$E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i]=E[N(t)]E[X_1]=\lambda E[X]t$。所以，安全负荷条件可以简化为$c>\lambda E[X]$。

针对上述模型，一个重要的研究对象就是破产概率。破产概率作为保险公司衡量风险的重要指标，并不是真正意义上的保险公司破产的可能性，因为盈余为负，保险公司可以追加资金来维持运营。破产概率实际上是指保险公司的盈余出现赤字的概率，是重要的风险预警指标。在给出破产概率之前，首先给出破产时间的定义,以下恒记τ为保险公司首次盈余为负的时刻，简称破产时刻。

$$\tau=\inf\{t: R(t,u)<0\}，\inf\varnothing=\infty。\tag{1.3}$$

如若关注保险公司在某一特定时期内的运营状况,还可以定义保险公司在时刻T之前破产的概率，简称有限时间破产概率，定义为：

$$\Psi(u,T)=P(\tau\le T \mid R(0)=u)。\tag{1.4}$$

破产概率还可以表示为：

$$\Psi(u,T)=P\{R(t,u)<0,\ \ \exists t\in[0,T]\}。\tag{1.5}$$

进一步地，可以定义最终破产概率：

$$\Psi(u)=P(\tau<\infty)=P\{R(t,u)<0,\ \ \exists t\ge 0\}。\tag{1.6}$$

图 1-1 给出了盈余过程的一条轨道。

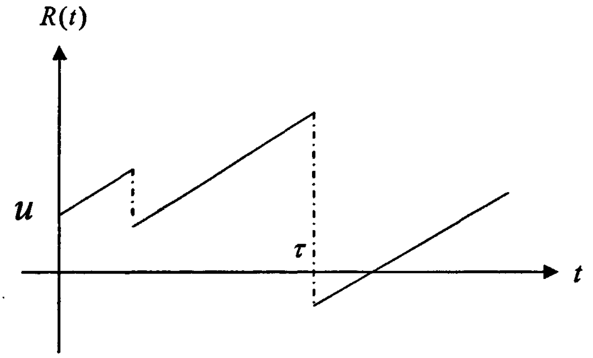

图 1-1　盈余过程的轨道

破产概率可以作为评估保险公司偿付能力的一个重要的数量指标。Lundberg-Cramér 经典结果可以直观地表述为：当初始准备金充分大，保险公司在经营“小额索赔”[1]情形的保险业务时，破产是不易发生的。对于上述结果，Cramér(1955)[2]给出了严格的数学推导，但是其分析方法比较复杂。Feller 的更新

[1] “小额索赔”的确切含义参考第二章中的详细讨论。

论证和 Gerber 的鞅方法给了上述结果以简洁的证明,参考严颖等(1995)[3],Gerber et.al. (1997)[4], Grandell(1991)[5], Feller(1971)[6]。由于这两种方法非常有代表性，更新论证技巧和鞅方法技巧已经成为研究经典破产理论最有用的工具，近期虽然很多研究对经典模型进行了推广，但所用到的方法无非这两种，其已经成为当代研究破产理论的主要途径。下一节，将对这两种方法进行详细介绍。

1.3 破产理论的研究方法

针对 1.1 中介绍的破产模型，比较常用的分析技巧就是更新论证方法和鞅方法。本节分别介绍这两种方法。

1.3.1 更新论证技巧

更新论证技巧最早由 Feller(1971) [6]提出，首先介绍关于更新理论的必要的数学知识，详见文献严颖等(1995) [3]第三章。

随机变量序列 $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ 为非负，独立同分布随机变量序列，记

$$T_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k,$$
$$N(t) = \sup\{k : T_k \leq t\}, \sup\phi = 0。$$

称 $\{N(t):t\geq 0\}$ 为更新过程，其中 $\{Y_k : k\geq 1\}$ 被称为更新间隔时间的序列，定义

$$m(t) = E[N(t)],\ \forall t\geq 0,$$

则 $m(t)$ 为更新函数。

记 $G(x) = P\{Y_1 \leq x\}, \forall t\geq 0, G_n(x), (n\geq 1)$，为分布函数 $G(x)$ 的 n 重卷积，即

$$G_n(x) = \underbrace{G * G * \cdots * G(x)}_{n重}$$

命题 1.1

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) < \infty,\ \forall t\geq 0。$$

考虑一种特殊的情形，当 $G(x) = 1 - e^{-\lambda x} < \infty, x\geq 0$，也就是说所有的更新间隔 Y_k 服从以 $\lambda(\lambda > 0)$ 为参数的指数分布时，更新过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 便是以 λ 为参数的 Poisson 过程，这时 $m(t) = \lambda t$。可见更新过程是泊松过程的推广。

下面给出一类关于函数 $G(x)$ 的积分方程：

$$A(t)=a(t)+A*G(t)=a(t)+\int_0^t A(t-x)dG(x),\ \forall t\geq 0\text{，} \tag{1.7}$$

称上述类型的积分方程为适定(Proper)更新方程，其中$a(t)$为在任意区间上有界的已知函数。今后，简称适定更新方程为更新方程。

定理 1.1 更新方程（1.7）存在解，其解的形式为$A_0(t)=a(t)+a*m(t)$，且在任意有限区间上有界；此外，在有限支撑上有界的函数族中，更新方程（1.7）的解$A_0(t)$是唯一的。

对于非负随机变量Y（或相应的分布），若存在$d>0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(Y=nd)=1$$

成立，则称Y（或相应的分布）服从格点分布。
有了以上定义，可以给出下面的定理。

定理 1.2 设更新间隔$Y_k,k\geq 1$，服从非格点分布，且一阶矩存在，即$E[Y_1]<\infty$，如果函数$a(t)$在$[0,\infty)$上黎曼直接可积，则有

$$\lim_{t\to\infty}a*m(t)=\frac{1}{E[Y_1]}\int_0^{\infty}a(t)\,\mathrm{d}t\text{。}$$

定理 1.2 也被成为关键更新定理（Key Renewal Theorem）。

注 1 定理 1.2 中提到了$a(x)$在$[0,\infty)$上黎曼直接可积，黎曼直接可积的定义和普通意义下黎曼可积的定义是不同的。关于黎曼直接可积的确切定义见严颖等(1995)[3]。以下仅介绍关于函数黎曼直接可积的一个充分条件与一个必要条件，可以用来判断函数是否黎曼直接可积。

1．若函数$a(x)$在$[0,\infty)$上单调递减，且在通常意义下黎曼可积，则在$[0,\infty)$上黎曼直接可积。

2．若$a(x)$在$[0,\infty)$上黎曼直接可积，则在$[0,\infty)$上有界，且$\lim_{t\to\infty}a(x)=0$；

注 2 在证明函数的极限行为时，更新论证技巧是十分有用的。

下面的部分给出更新论证技巧的一般思路。更新论证方法主要用来探索函数$A(t)$当自变量t趋于无穷的极限行为。在具体应用中，首先要建立形如（1.7）的更新过程。其次，当分布函数$G(x)$为非格点分布，且函数$a(t)$在$[0,\infty)$上黎曼直接可积时，由定理 1.1、定理 1.2 与注 2 即知

$$\lim_{t\to\infty}A_0(t)=\frac{1}{E[Y_1]}\int_0^{\infty}a(t)dt\text{。}$$

下面用更新论证的方法证明 Lundberg-Cramér 近似等价式，从中可以体会到更新论证方法的强大之处。

有时候，为了研究的方便，也把保险公司的生存概率（survival probability）作为研究对象，它表示初始盈余 u 时，保险公司一直不破产的概率。定义为：

$$\psi(u)=1-\Psi(u)=P(U(t)\geq 0, t\geq 0 \mid U(0)=u)\text{。}$$

根据首次索赔发生的时刻 T_1 服从指数分布，对生存概率运用全概率公式，可得

$$\psi(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\left\{\int_0^{u+ct}\psi(u+ct-z)dF(z)\right\}dt\text{，}$$

作换元积分，把 $x=u+ct$ 代入上面的式子，得

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda}{c}u}\int_u^{\infty}u^{-\frac{\lambda}{c}x}\left\{\int_0^x\psi(x-z)dF(z)\right\}dx\text{。}$$

上式表明 $\psi(u)$ 是可微的。上式两端对变量 u 求导，可得

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-z)dF(z)\text{。} \tag{1.8}$$

对（1.8）式两端从 0 到 t 不定积分，可得

$$\psi(t)-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t\psi(u)du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u\psi(u-z)d(1-F(z))du\text{。} \tag{1.9}$$

接下来对（1.9）式应用分步积分，有

$$\int_0^u\psi(u-z)d(1-F(z))=\psi(0)[1-F(u)]-\psi(u)+\int_0^u\psi'(u-z)[1-F(z)]dz\text{。}$$

代入（1.9）式，有下面的式子成立。

$$\psi(t)-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\psi(0)\int_0^t[1-F(u)]du+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u\psi'(u-z)[1-F(z)]dzdu\text{。} \tag{1.10}$$

（1.10）式中，对二重积分改变积分的次序，有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^u\psi'(u-z)[1-F(z)]dzdu\\&=\int_0^t\left\{\int_z^t\psi'(u-z)[1-F(z)]du\right\}dz=\int_0^t[\psi(t-z)-\psi(0)][1-F(z)]dz\text{。}\end{aligned}$$

再将上式代入（1.10）式，可以得

$$\psi(t)=\psi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\psi(t-z)[1-F(z)]dz\text{。} \tag{1.11}$$

在上式两端令 $t\to\infty$，再根据 $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=1$，即得

$$1=\psi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz=\psi(0)+\frac{\lambda}{c}\mu 。$$

0 初始值的破产概率满足

$$\Psi(0)=1-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta},$$

把上式代入（1.11），可得

$$\begin{aligned}\psi(t)&=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\psi(t-z)[1-F(z)]dz\\&=1-\frac{\lambda}{c}\int_t^\infty[1-F(z)]dz-\frac{\lambda}{c}\int_0^t[1-\psi(t-z)][1-F(z)]dz,\end{aligned}$$

从而得

$$\Psi(t)=\frac{\lambda}{c}\int_t^\infty[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^t\psi(t-z)[1-F(z)]dz 。\qquad (1.12)$$

由于

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty[1-F(z)]dz=\frac{\lambda}{c}\mu=\frac{1}{1+\theta}<1,$$

即知方程（1.12）为瑕疵（defective）更新方程。为此在（1.12）式两端同乘以 e^{Rt}（R 为调节系数），并令

$$A(t)=e^{Rt}\Psi(t),\ a(t)=\frac{\lambda}{c}e^{Rt}\int_t^\infty[1-F(z)]dz,\ f(z)=\frac{\lambda}{c}e^{Rz}[1-F(z)],$$

即得

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-z)f(z)dz。\qquad (1.13)$$

由 $\int_0^\infty f(z)dz=1$，从而方程（1.13）即为适应更新方程，显然函数 $a(t)$ 单调递减，且可算得

$$\int_0^\infty a(t)dt=\frac{1}{R}\cdot\frac{\theta}{1+\theta}=C_1,$$

故根据注 2 可以知道，$a(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上黎曼直接可积。这样，由定理 1.2 即知

$$\lim_{t\to\infty}e^{Rt}\Psi(t)=\lim_{t\to\infty}A(t)=\frac{C_1}{\int_0^\infty zf(z)dz}C,$$

这表明

$$\lim_{t\to\infty}=\frac{\Psi(t)}{Ce^{-Rt}}=1,$$

从而 Lundberg-Cramer 近似式得以证明。

注 3 可进一步算得 Lundberg-Cramér 近似式中常数

$$C=\frac{\theta\mu}{g'(R)-\frac{c}{\lambda}},$$

其中

$$g(r)=\int_0^\infty e^{rx}dF(x)-1。$$

1.3.2 鞅方法

本小节首先介绍鞅的定义和一些重要的性质。然后用鞅方法给出 Lundberg 不等式的证明，该证明的成果是属于 Gerber(1973)[7]的。先介绍有关鞅的一些概念和知识如下，详细的论述参考 Elliot(1982)[8]。

定义 1.1 称随机过程$\{X(t):t\geq 0\}$为一鞅（martingale），若有

（1）$E[|X(t)|]<\infty, \forall t\geq 0;$

（2）对$0\leq s\leq t$，恒有

$$E[X(t)\mid X(r):r\leq s]=X(s) \text{ a.s.}$$

若随机过程$\{X(t):t\geq 0\}$为一鞅，则对$t>0$，恒有

$$E[X(t)]=E[E[X(t)\mid X(0)]]=E[X(0)]。\tag{1.14}$$

如果一个过程是齐次独立增量的随机过程，可以在此基础上构造出一个鞅过程。下面的例子给出了建立鞅过程的一个重要方法。

例 1 设随机过程$\{Y(t):t\geq 0\}$是齐次独立增量过程，且$Y(t)=Y(0)$。定义

$$X(t)=X(0)e^{Y(t)},\quad X(0)\text{为一常数。}$$

如果$E[e^{Y(1)}]=1$，则$\{X(t):t\geq 0\}$为一鞅。首先，

$$E[|X(t)|]=|X(0)|E[e^{Y(t)}]=|X(0)|\{E[e^{Y(1)}]\}^t=|X(0)|<\infty,$$

再对任意的$0\leq s\leq t$，恒有

$$\begin{aligned}E[X(t)\mid X(r):r\leq s]&=E[X(s)e^{Y(t)-Y(s)}\mid X(r):r\leq s]\\&=X(s)e[e^{Y(t)-Y(s)}]=X(s)E[e^{Y(t-s)}]=X(s)\quad a.s.\end{aligned}$$

下面给出随机时间和停时的定义。

定义 1.2 称非负随机变量τ是关于随机过程$\{X(t)\}$的随机时间，若对一切$t\geq 0$。

$$\{\tau\leq t\}\in\sigma\{X(s):s\leq t\},$$

其中$\sigma\{X(s):s\leq t\}$表示包含一切形如$\{X(s)\leq x\}(s\leq t, x\in R^1)$的事件的最小$\sigma-$代

数。

特别地，称随机时间 t 是关于随机过程 $\{X(t)\}$ 的停时，若

$$P(\tau<\infty)=1。$$

不难验证，若 τ 是关于随机过程 $\{X(t):t\geq 0\}$ 的随机时间，则对任意固定的时刻 t，

$$\tau\wedge t=\min(\tau,t)$$

也是关于随机过程的停时，而且是有界停时。

可选抽样定理(optional sampling theorem) 是鞅论中最重要的结果之一，即在适当的条件之下，使得将（1.14）式中的 t 置换成随机时间时，仍然成立。

定理 1.3 假设 τ 是关于鞅 $\{X(t):t\geq 0\}$ 的有界停时，则有

$$E[X(\tau)]=E[X(0)]$$

对于一个鞅过程在无穷远点的收敛性质，由下面的定理给出。

定理 1.4 设 $\{X(t):t\geq 0\}$ 是一非负鞅，则存在几乎处处收敛的有限极限，即有

$$\lim_{t\to\infty}X(t)=X(\infty)<\infty \qquad \text{a.s.}$$

接下来给出 Lundberg 不等式的鞅方法证明，令

$$X(t)=e^{-RU(t)}=X(0)\exp\{-RV(t)\},$$

其中 $X(0)=e^{-Ru}$，R 为调节系数，$V(t)=ct-S(t)$，现在令

$$Y(t)=-RV(t),\quad t\geq 0。$$

注意到 $\{Y(t):t\geq 0\}$ 为零初值，且具有齐次独立增量的随机过程。下面有

$$E\{e^{Y(1)}\}=E\{e^{-RV(1)}\}=M_{V(1)}(-R)=1,$$

根据例一中的构造方法易知 $\{X(s):s\geq 0\}$ 为一正鞅。于是，由非负鞅的收敛性定理便知

$$\lim_{t\to\infty}X(t)=X(\infty)<\infty \quad \text{a.s.}$$

现设 τ 是破产时间，易知 τ 是停时。对于任意给定的时间 t, $\tau\wedge t$ 为有界的停时，故由可选抽样定理可得

$$E\{X(\tau\wedge t)\}=E\{X(0)\}=e^{-Ru},$$

对上式利用全期望公式，可以推知

$$\begin{aligned} e^{-Ru}&=E[X(\tau\wedge t)\mid\tau\leq t]P(\tau\leq t)+E[X(\tau\wedge t)\mid T>t]P(\tau>t)\\ &=E[X(T)\mid\tau\leq t]P(T\leq t)+E[X(t)\mid\tau>t]P(\tau>t)。\end{aligned} \tag{1.15}$$

当$t<\tau$时，意味着破产发生之前，显然有$U(t)\geq 0$，从而

$$X(t)=e^{-RU(t)}\leq t,$$

这样，在（1.15）式两端令$t\to\infty$，由 Lebesgue 控制收敛定理与单调收敛定理，即得

$$e^{-Ru}=E[X(t)\mid\tau<\infty]P(\tau<\infty)+E[X(\infty)\mid\tau=\infty]P(\tau=\infty)\text{。}$$

再因为$\lim_{t\to\infty}U(t)=+\infty$ a.s., 故知$X(\infty)=0$ a.s., 从而有

$$e^{-Ru}=E[X(t)\mid\tau<\infty]P(\tau<\infty),$$

由此即知

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(\tau)}\mid\tau<\infty]}\text{。}$$

再注意到$U(\tau)<0, e^{-RU(\tau)}>1$，由上式即知

$$\Psi(u)\leq e^{-Ru},$$

从而 Lundberg 不等式得证。

注 4 上述 Lundberg 不等式的鞅证明的过程明显地显示了鞅论中的可选抽样定理与收敛性定理的重要性。当然，构造一个鞅过程是证明的关键，例 1 提供了构造鞅过程的具体方法。在将这一方法运用于破产论中的盈余过程时，调节系数R所起到非常关键的作用。

Cramér 之后破产论研究中最令人瞩目的是方法论的改进。Feller 和 Gerber 引入的更新论证技巧和鞅证明技巧已成为研究经典破产论的主要数学工具。近期大量研究文献所研究的模型虽较经典的破产模型有不同程度的推广，但所使的方法却基本上不外乎本节介绍的两种。

1.4 经典模型的推广

1.4.1 索赔总额过程的推广

经典破产论中的盈余过程的一般形式为

$$U(t)=u+ct-A(t)\text{。}\tag{1.16}$$

其中，$\{A(t)\}_{t\geq 0}$为索赔过程，在经典破产理论中用复合泊松过程描述。Gerber 针对上述模型做了一系列的改进，推广了经典破产理论的结果。应该注意到的是，复

合泊松过程的平稳独立增量性在经典结果的推导中起到了重要的作用，而 Gerber 在推广经典模型的过程中同样保持了这个性质。其中，最主要的推广有两个：

（1）广义复合 Possion 过程

暂且假定索赔总额过程 $\{A(t)\}$ 为经典破产论中的复合 Poisson 过程，其中 $A(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$。

记 $A(t;x)$ 为时刻 t 之前的个体索赔额大于 x 的索赔总额。这样，$A(t)=\lim_{x\to 0}A(t;x)$ 成立。虽然索赔额的分布发生变化，但是没有影响索赔到达的结构，所以 $\{A(t;x):t\ge 0\}$ 仍是一个复合 Poisson 过程，这时索赔额的分布函数为

$$F(y;x)=\begin{cases}0, & y\le x;\\ \dfrac{F(y)-F(x)}{1-F(x)}, & y>x.\end{cases} \tag{1.17}$$

而由 Poisson 过程的稀化，则知索赔计数过程 $N(t;x)$ 是以 $\lambda[1-F(x)]$ 为参数的 Poisson 过程。

若记

$$Q(x)=\lambda\{1-F(x)\},$$

则由（1.17）式知

$$F(y;x)=\begin{cases}0, & y\le x;\\ 1-\dfrac{Q(y)}{Q(x)}, & y>x。\end{cases} \tag{1.18}$$

根据上述分析，可以启发我们构造更具一般性的索赔总额过程 $\{A(t):t\ge 0\}$，先假定 $Q(x)$ 是 x 的非负递减函数，且满足

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=0,\quad \int_0^\infty Q(x)dx<\infty。$$

其次，假定 $\{A(t;x):t\ge 0\}$ 是这样的复合 Poisson 过程：其索赔计数过程 $N(t;x)$ 是以 $Q(x)$ 为参数的 Poisson 过程，而个体索赔额的分布函数则由（1.18）式给出。最后，假定 $\{A(t):t\ge 0\}$ 为复合 Poisson 过程 $\{A(t;x):t\ge 0\}$ 当 x 趋于 0 时的极限。以下称这样的极限过程为广义复合 Poisson 过程。

特别地，当 $Q(0)<\infty$ 时，它确是一复合 Poisson 过程。因此有兴趣的是研究 $Q(0)=\infty$ 的情形。区别于复合 Poisson 过程，这时在任一区间上的索赔次数是无限的。Dufresne 等(1991)[9]和 Dufresne 等(1993) [10]研究了其中的两类过程：Gamma 过程的逆高斯过程，即 $\{A(t):t\ge 0\}$ 是具有齐次正增量的随机过程，它们的增量分

别服从 Gamma 分布和逆高斯分布，这可分别借助先定两类特殊的函数 $Q(x)$ 办到。研究的主要内容仍为破产概率 $\Psi(u)$，可利用经典破产论的结果直接导出。

另外，还必须指出的是，J.Grandell(1991) [11]在点过程框架中也研究了索赔总额过程的推广，着重讨论了索赔计数过程为更新过程和 Cox 过程（亦称为双重随机 Poisson 过程）的情形。在下一节，我们给出更新过程的定义。不过，Cox 过程的研究难度要远甚于 Gerber 的方法。

（2）带扩散扰动项的复合 Poisson 过程

设盈余过程由下式给出：

$$U(t)=u+ct-A(t)+W(t), \qquad \forall t\geq 0$$

其中 u，c 和 $S(t)$ 如上文中所述，扰动项 $W(t)$ 则是一无穷小方差为 $2D(D>0)$ 的 Brownian 运动。此外，假定 $\{W(t):t\geq 0\}$ 和 $\{S(t):t\geq 0\}$ 相互独立。

显然，破产概率 $\Psi(u)$ 可分解为两个部分：

$$\Psi(u)=\Psi_S(u)+\Psi_d(u),$$

其中 $\Psi_S(u)$ 则表示由索赔导致的破产；$\Psi_d(u)$ 表示因随机扰动而引起时破产。显然，$\Psi_d(0)=1$，从而

$$\Psi_0(0)=0, \qquad \Psi(0)=1$$

现设 R^* 为方程

$$M_X(r)+\frac{D}{\lambda}r^2=1+\frac{c}{\lambda}r。 \tag{1.19}$$

的唯一正根，并称其为新模型的调节系数。

注 5 类似于前文所述，上述方程有解，表明个体索赔额在某种意义下是“小索赔”。此外，不难验证，方程（1.19）若有正解，则必唯一，又当 D=0 时，R^* 即为经典破产模型中的调节系数 R。

现设

$$X(t)=e^{-R^*U(t)}=X(0)e^{Y(t)},$$

其中

$$X(0)=e^{-R^*u},\ Y(t)=-R^*[V(t)+W(t)]。$$

显然，$\{Y(t):t\geq 0\}$ 是齐次独立增量过程。再因为

$$E[e^{Y(1)}] = M_{V(1)}(-R^*)E[e^{-R^*W(1)}]$$
$$= \exp\{\lambda M_X(R^*) - \lambda - CR^*\}\exp\left\{\frac{1}{2}(2D)(R^*)^2\right\}$$
$$= \exp\{\lambda M_X(R^*) + D(R^*)^2 - \lambda - CR^*\} = 1。$$

这表明$\{X(t): t \geq 0\}$为一正鞅，故类似于经典破产模型，仍可证得

$$\Psi(u) = \frac{e^{-R^*u}}{E[e^{-R^*U(\tau)} \mid U(0) = u]} < e^{-R^*u}。$$

此外，Dufresne & Gerber(1991)[12]中直观地导出了生存概率$\psi(u)$和破产概率$\Psi_d(u)$满足的瑕疵更新方程，由此也可导出$\Psi_s(u)$与$\Psi(u)$满足的瑕疵更新方程，若再利用调节系数R^*将这些瑕疵更新方程化为适定更新方程，由关键更新定理便可分别导出$\Psi_d(u)$与$\Psi_s(u)$（从而也就导出了$\Psi(u)$）的 Lundberg-Cramer 近似。

1.4.2 经典破产理论的扩展和深入

前一小节讨论的是经典破产模型的推广，本小节维持经典破产模型不变，但以多种视角再次对其作深入的探讨。

（1）破产前瞬时盈余和破产时赤字

本节中盈余过程的模型和有关假定仍如前文中所述。以往研究的问题大都集中在最终破产概率：

$$\Psi(u) = P\{\tau < \infty \mid U(0) = u\};$$

Gerber et.al.(1997)[4]对于经典破产论研究的另一贡献是引入了另外两个刻画保险公司破产情形的随机变量：

$$X = U(\tau-) \quad 与 \quad Y = |U(\tau)| = -U(\tau)$$

其中Y表示破产时赤字(deficit of ruin)，X表示破产前瞬时盈余(surplus immediately beforeruin)。这样，除了破产概率$\Psi(u)$外，刻画保险公司风险的概率规律尚有

$$G(u;y) = P(U(T) \geq -y;\ T < \infty \mid U(0) = u), \tag{1.20}$$
$$F(u;x) = P(U(T-) \leq x;\quad T < \infty \mid U(0) = u), \tag{1.21}$$

其中u，x和y皆为非负实数。

显然，

$$\Psi(u) = G(u;\infty) = F(u;\infty)。$$

若从数学的观点考虑，τ,$|U(\tau)|$与$U(\tau-)$这三个随机变量中，$U(\tau-)$是更为关键的

随机变量。事实上只要知道$U(\tau-)$的概率规律，便可求出$|U(\tau)|$和τ的概率规律。以下约定

$$E[\xi;A]=E[\xi I_A],$$

其中I_A表示集合A的示性函数，即

$$I_A(a)=\begin{cases}1, & a\in A;\\ 0, & a\notin A.\end{cases}$$

现考虑下述形式泛函：

$$\Psi(u;W)=E[W(U(\tau));\tau<\infty\,|\,U(0)=u], \tag{1.22}$$

其中$W(\cdot)$是任一有界函数。显然，若在（1.22）式中取

$$W(t)=W_x(t)=\begin{cases}1, & t\le x;\\ 0, & t>x.\end{cases}$$

即得

$$F(u;x)=\Psi(u;W_x).$$

而若在（1.22）式中，取

$$W(t)=W_y(t)=\frac{F(t+y)-F(t)}{1-F(t)},$$

便得

$$G(u;y)=\Psi(u;W_y)。$$

采用更新论证方法，可得下述瑕疵更新方程

$$\Psi(u;W)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty W(z)[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^u\psi(u-z;W)[1-F(z)]dz。 \tag{1.23}$$

比较方程（1.12）与（1.23），会发现两者是非常相似的。与证明（1.12）式一样，在证得方程（1.23）以前，事实上还可获得初始盈余为0时的确切解

$$\Psi(0;W)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty W(x)[1-F(z)]dz。 \tag{1.24}$$

若将$W_x(z)$与$W_y(z)$分别代入上式，即得

$$F(0;x)=\frac{\lambda}{c}\int_0^x[1-F(z)]dz,$$

和

$$G(0;y)=\frac{\lambda}{c}\int_0^y[1-F(z)]dz。$$

这表明$F(0;x)$对x可导，$G(0;y)$对y可导，且有

$$f(0;x)=\frac{dF(0;x)}{dx}=\frac{\lambda}{c}[1-F(x)],$$

$$g(0;y)=\frac{dG(0;y)}{dy}=\frac{\lambda}{c}[1-F(y)]。\tag{1.25}$$

事实上借助瑕疵更新方程解的表示性定理（对瑕疵更交换机方程而言，定理1.1也成立），尚可证明对任何$u>0$, $F(u;x)$与$G(u;y)$也分别存在（瑕疵）密度函数$f(u;x)$与$g(u;y)$（关于$G(u;y)$对y的可微性参见Gerber et.al.(1987)[13]，p.160）。不过，当$u>0$时，一般而言难于求出$f(u;x)$和$g(u;y)$的显式，这时可在方程（1.24）两边同乘以e^{Ru}（R为调节函数），而将瑕疵更新方程化为适定更新方程，从而分别求出它们的渐近解

$$f(u;x)\sim C_x e^{-Ru},\quad u\to\infty,\forall x\ge 0;$$
$$g(u;y)\sim G_y e^{-Ru},\quad u\to\infty,\forall y\ge 0.$$

（2）Beekman卷积公式

（1.25）式是一个很重要的公式，由它可导出许多有趣的结论。首先，由（1.20）式和（1.25）式知

$$P(y\le|Y(\tau)|\le y+dy;\tau<\infty\,|\,U(0)=0)\approx g(0;y)dy=\frac{\lambda}{c}[1-F(y)]dy。\tag{1.26}$$

这样，$g(0;y)dy$可理解为盈余过程首次低于初始盈余u（不论u为何值）的同时，首次落差（记为L_1）介于y与$y+dy$之间的概率。于是，若以首次落差为条件，对破产概率应用全概率方式，由盈余过程的齐次独立增量性即得

$$\begin{aligned}\Psi(u)&=P(\tau<\infty\,|\,U(0)=u)\\&=\int_0^u P(\tau<\infty\,|\,U(0)=u,L_1=z)g(0;z)dz\\&\quad+\int_u^\infty P(\tau<\infty\,|\,U(0)=u,L_1=z)g(0;z)dz\\&=\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)[1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty[1-F(z)]dz,\end{aligned}$$

这便是关于破产概率$\Psi(u)$的瑕疵更新方程（1.12）。

其次，因

$$g(0,y)=\frac{\lambda\mu}{c}\cdot\frac{1}{\mu}[1-F(y)]dy=\frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{1}{\mu}[1-F(y)]dy,$$

另由概率乘法定理知

$$P(y \le |U(\tau)| \le y+dy; \tau<\infty \mid U(0)=0)$$
$$=\frac{1}{1+\theta}P(y \le |U(\tau)| \le y+dy \mid U(0)=0, \tau<\infty),$$

这样，由（1.26）式即知

$$P(y \le |U(\tau)| \le y+dy \mid U(0)=0),\ \ T<\infty) \approx h(y)dy \text{。} \tag{1.27}$$

其中

$$h(y)=\frac{1}{\mu}[1-F(y)] \text{。}$$

这表明$h(y)dy$可理解为盈余过程在首次低于初始盈余u（不论u为何值）的条件下，首次落差L_1介于y与$y+dy$之间的概率。

现记N为盈余过程发生的落差次数，L_n为第n次落差，则由盈余过程的齐次独立增量性知$\{L_n : n \ge 1\}$为非负、独立同分布的随机变量序列，且与N相互独立。

显然，N 服从以$\dfrac{\theta}{1+\theta}$为参数的几何分布，即有

$$P(N=n)=\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n,\ n \ge 0 \text{。}$$

现以 L 表示盈余过程的最大落差，即令

$$L=\max_{t \ge 0}\{S(t)-ct\},$$

则有

$$L=\sum_{n=1}^{N} L_n,$$

这样便有

$$R(u)=P(L \le u)=P\left(\sum_{k=1}^{N} L_k \le u\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P\left(\sum_{k=1}^{n} L_k \le u \mid N=n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n H_n(u) \text{。} \tag{1.28}$$

其中

$$H_0(u)=\begin{cases}0, & u<0;\\ 1, & u \ge 0.\end{cases}$$

而当$n\geq 1$时，$H_n(u)$为分布函数$H(u)=\int_0^u h(z)dz$的 n 重卷积。（1.28）式便是著名的 Beekman 卷积公式，是经典破产论的又一重要结果，

1.4.3 破产论研究中若干其他有代表性的研究方向

前面我们重点介绍了 Lundberg-Cramer 关于经典破产论的研究结果，Feller 和 Gerber 在研究方法上的改进，并综述了 Gerber 及其合作者近期的研究工作。本节将简要介绍当代破产论若干其他的有代表性的研究方向。

1 完全离散的经典风险模型

经典风险模型大部分的研究是关于连续时间的，但是从实际上来看，不管是保费过程还是索赔过程都应该是离散的。近期也有一些作者对完全离散的经典风险模型展开了研究。离散模型的盈余过程由下式给出

$$U(n)=u+n-\sum_{i=1}^{N(n)}X_i,\quad n\geq 0,$$

其中初始盈余 u 为非负整数，保险公司在每单位时间区间的始端征收 1 个货币单位的保险费。个体索赔额X_n是仅取正整数值的随机变量，假定$\{X_n:n\geq 1\}$是相互独立同分布的随机变量序列。$N(n)$表示前 n 个时段发生的索赔次数。假定$\{N(n):n\geq 1\}$是以$p(0<p<1)$为参数的二项序列，且与$\{X_n:n\geq 1\}$相互独立。

另外，假定

$$p\mu<1\quad(\mu=E[X_n]),$$

这相应于连续时间模型中的相对安全负荷假定。

关于破产时刻τ有两种定义

$$T=\inf\{n\geq 1:U(n)<0\},$$

$$T=\inf\{n\geq 1:U(n)\leq 1\}。$$

破产前一刻的盈余定义为$X=U(\tau-1)$，破产时赤字为$Y=|U(\tau)|$。原则上说，几乎可以平行地得到和连续时间经典破产模型相对应的全部结果。区别于连续时间模型的是，对任意初始盈余 u 和任意的个体索赔额分布，均可得到刻画保险公司风险的诸概率规律的显式解。

2 重尾分布的破产论

经典破产论研究的是关于“小索赔”情形的破产论，一个很强的约束是要求调节系数存在，如果调节系数不存在，则更新论证和鞅途径都无法奏效，这样，对于“大索赔”情形的破产论，更确切地说，是对于重尾分布的破产论研究就必

须启用新的数学工具，如亚指数分布，这样的研究适用于火险、风暴险与洪水险等灾难性保险。Paul Embrechts 与 Claudia Klüppelberg 等在这方面开展了较系统的研究。

5.3 具有复合资产的破产论

迄今为止，绝大部分破产论的研究不计利率；保费收入一成不变，即不随瞬时盈余的多寡而有所调整；同时也不涉及投资收益。直至最近，对具投资收益的破产论的兴趣才猛增。不过，现在主要的研究工作还仅集中在确定性的投资收益问题上，对涉及随机投资收益的破产论的研究工作还不多。这方面的研究工作需要随机分析的知识，难度较大，且不易得到经典破产论中那样漂亮的结果。

1.5 重尾分布的概念及更新过程定义

上述介绍的破产理论的经典模型以及推广模型里一个最重要的假设就是索赔额分布服从轻尾分布，也就是说矩母函数存在，即随机变量 X 或它的分布 $F(x)$ 使 $E[e^{rX}]<\infty$ 对任何 $r>0$ 都成立。实际上使得上式成立的分布族十分有限，比如指数族分布。在保险实务中，真实的索赔分布往往不满足轻尾的特征，保险索赔的特点是很小的概率下发生非常大额的索赔。比如地震，海啸等极端自然灾害的来临，或者是恐怖袭击等。这就需要考虑所谓重尾索赔的分布，如果矩母函数不存在，即 $E[e^{tX}]=\infty$，则称它是重尾分布。由于这一概念所包括的情形非常大，目前也无法在整个重尾族上得到满意的结论。所以在实际的研究工作中，人们总是从它的一小部分，即子族上着手来得出良好的性质，然后再逐步扩大它成立的范围，常见的子族有：

$L:F$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1$ 对任何固定的 y（或者等价地说，对 $y=1$）；

$D:F$ 满足 $\limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty$ 对任何固定的 $0<y<1$（或者等价地说，对 $y=1/2$）

ERV（$-\alpha$， $-\beta$）:对某 $1<\alpha\leq\beta<\infty$，F 满足

$y^{-\beta}\leq\liminf\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\leq\limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\leq y^{-\alpha}$ 对任何 $y>1$

$S:F$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}=n$ 对任意的 $n\geq2$（或等价地，对于某 $n\geq2$）

近年来，随着研究的深入，先后又引入了许多新的子族：

S^*：F 满足 $\int_0^x \overline{F}(x-t)\overline{F}(t)dt \triangleq 2\mu\overline{F}(x)$，当 $x\to\infty$，其中 μ 表示分布 F 的有限期望

m: F 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(x)}{\int_0^x F(u)du}=0$；

C: F 满足 $\lim\limits_{l\uparrow 1}\limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(lx)}{F(x)}=1$。

在这些不同的子族集合中，也存在一些基本的关系， 这些关系都可以用初等概率论的知识得到，下面只作列举，具体可参考相关资料 Tang(2001)[14]

$$(L\cap D)\subset S\subset L\subset M$$
$$S^*\subset S\subset L\subset M,$$

此外，人们又建立了各种新模型，其中最主要的是普通更新模型，Lundberg - Cramér 模型是它的特殊情况。

更新模型的基本结构如下：

（a）索赔额$\{X_k,\ k\geq 1\}$ 构成一个独立的同分布非负随机变量序列，具有共同的分布 F 和有限的期望 μ;

（b）索赔到来的时间间隔 θ_i（$i\geq 1$）是独立同分布的非负随机变量，具有有限的期望 $m>0$ 且与序列$\{X_k\ ,\ k\geq 1\}$ 独立;

（c）时间区间[0, 1]中索赔次数 $N(t)=\sup\{n\geq 1\ T_n\leq t\},(t\geq 0)$ 为一更新计数过程，这里 $T_n=\sum_{i=1}^{n}\theta_i$；

（d）损失过程为 $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i-ct,\ t\geq 0$。

如果（b）中时间间隔 θ_i（$i\geq 2$）具有共同的分布 F 而 θ_1 的分布 F_1 与 F 不同，则上述模型称为延迟更新模型。如果 F_1 恰为 F 的平衡分布，即 $F_1(x)=\mu^{-1}\int_0^x\overline{F}(t)dt$，则该模型就是所谓的平稳更新模型。特别地，如果（b）中的时间间隔是独立同分布的指数分布，则即为前述的 Lundberg - Cramér 模型。

1.6 经典模型的推广

实际上，从保险公司收入保险费到保险公司支付赔款之间的时间，保险公司

可以将保险基金进行投资赚取赢利。投资回报是保险公司利润的重要來源，可以这样说，对于大多数保险公司來讲，投资回报是其利润的唯一來源。例如，保险公司必须支付的赔款超出保费收入的 10%，而保险公司通过投资获得的回报是保费收入的 20%，那么保险公司将赚取 10%的利润。但是，由于许多保险公司认为投资无风险的政府债券或者其他低风险低回报的投资项目是谨慎的选择，那么控制赔款支出比保险费收入超出的百分比低于投资收益率是非常重要的，因为这样保险公司才不会赔本。

目前我国的保险公司决策机制薄弱，许多保险公司尚未建立一套规范有效的决策机制，人保财险公司直到 2003 年下半年才成立了专门的保险投资公司。决策的盲目性、被动性、随意性十分突出，在仅能投资债券的时期，这类决策机制不会体现任何危机，对于资产规模迅速壮大的保险公司来说，更是掩盖了其决策的弊端。决策机制落后，决策反馈机制尚未建立，在保险公司进入基金市场后会充分暴露出来。以前，我国的保险投资渠道狭窄 1998 年以前，保险公司的资金运用渠道限于：银行存款、买卖政府债券、金融债券和国务院规定的其他资金运用形式。2000 年 3 月 1 日起实行的《保险公司管理规定》，保险公司的资金运用，限于银行存款、买卖政府债券、金融债券、买卖中国保监会指定的中央企业债券和国务院规定的其他资金运用形式。现在，保险公司可以直接进入股市，在拓宽投资渠道之后，保险公司需要寻找有效的投资策略和增强风险评估能力。而且在我国，保险资金的利用率，在我国还不到 50%。有限的保险资金主要用于银行存款。据统计，1998 年人保、平保和太保三大保险公司保险资金的 40%—60%局限于现金和银行存款，保险资金基本上无“运用”可言。截止到 1999 年底，中国人民保险公司的资金运用率还不到 20%。为了保证保险资金的安全，保险公司将大量资金存于银行，由银行进行专业的资金运用，而保险公司只能获得固定的较低的存款利息，银行存款的利息已经远远不能使保险资金保值、增值了。

综上所述，允许保险公司投资风险市场是十分必要的。实际上，通过承保赢利赚钱这种情况在大多数国家的保险行业是非常稀有的，在美国，财产和意外伤害保险公司的保险业务在 2003 年以前的五年中亏损了 23 亿元。但是在此期间的总利润却是 4 亿元，就是由于有投资收益。一些保险业内人事指出保险公司不可能永远靠保险业务而不靠投资收益支撑下去。实际上国外的保险基金往往大规模地在市场上进行风险投资，获得风险收益。中国在 2001 年之后进入 WTO 后，国内保险公司的金融环境也在发生巨大的改变，境外的保险公司将进入中国，与中国的保险公司竞争，所以，研究保险公司的投资行为和风险是十分必要的。而且

自从2004年保监会允许保险公司投资股市以来，保险公司投资于股市的比例还在不断上升，甚至中小型的保险公司也被鼓励入市投资。

由于我国长期实行计划经济体制，管理体制落后，投资缺乏科学决策，许多公司在科学决策、内部约束机制方面比较薄弱，影响了投资收益。在上述的宏观背景之下，自然提出了以下的问题：如果保险公司除了保费收入之外，还把保险基金在市场上进行投资，破产概率应该怎么估计？相应地，保险公司如果要控制风险，怎么样安排合理地投资策略？一种简单而自然的推广途径就是考虑保险公司把保费盈余用来投资无风险债券，最简单的情况是考虑债券利率为常数的情形，Klüppelberg & Stadtmülle(1998)[15]考虑了这种模型，得到了当索赔额大小具有规则变化尾的情形下，随着初始资本金的增大，破产概率和索赔额的尾部有着同样的衰减速度；Sundt & Teugels(1995)[16]得到了破产概率对于初始资本金的一致上界；Tang(2005) [17]讨论了索赔到达过程为一复合泊松过程时有限时间破产概率问题；Wang(2008) [18]将Tang(2005) [17]的结果推广到索赔到达过程为更新过程的情形。

另外一个重要的推广就是考虑投资组合。即考虑下述问题：如果保险公司把其盈余的一部分投资到风险资产，余下的部分投资到无风险债券，应该选择怎样的投资策略，在这种投资策略下破产的风险为多少？Paulsen 和 Gjessing(1997)[19]首先研究了这个问题，但只是考虑了将所有的盈余投资到风险资产上，而没有考虑投资组合问题；Browne(1995)[20]考虑了保险公司的承保盈余过程是带漂移的布朗运动，风险资产是几何布朗运动的模型，得到了风险资产的投资应该与初始资本金无关，并且恒为常数，但是显然模型不满足聚合风险模型通常的假设，即复合泊松过程的假设；Hipp 和 Plum(2000)[21]研究了保险公司的承保盈余过程为复合泊松过程的模型，得到了最大化生存概率的 HJB（Hamilton-jacobi-Bellman）方程，但是没有去估计破产概率的上界。Gaier et.a(2002) [22]在索赔额具有一致指数矩的假设下，得到了一种常数的投资策略，在这种常数投资下，最终破产概率拥有指数型上界，而且可以证明，该常数投资策略是渐进最优的策略。

基于以上的讨论，本论文在聚合风险模型的基础上，讨论了保险公司的进行投资的情形。回答了以下主要问题：如果加入了利率因素的影响，破产概率会有什么样的影响？破产概率的上界是多少？破产概率的等价式是多少？如果保险公司购买投资组合，怎么样安排合理的投资策略？在合理的投资策略下破产概率为多大？除了破产概率之外，保险公司的其它破产量如何估计？

1.7 本文的研究内容和结构

本文基于随机数学中的数理模型，对保险公司的破产问题进行深入系统地研究，该破产问题同时考虑了投资的影响。研究的重点包括：利率和市场上的不确定性对保险公司的影响，揭示其作用机理，并进行算例的分析，综合考虑保费过程，索赔过程，投资过程对保险公司最终的盈利和风险的影响，并分析其内在关系。在此基础上探究保险公司盈余的变化机制，为进行投资的保险公司提供有益的管理策略与方法并能及时给出风险预警。同时，还将从不同的模型入手对保险公司的各个风险过程进行建模，然后比较不同模型的精确程度。比如股票价格分别用几何布朗运动和指数 Lévy 过程；索赔到达过程用 Poisson 过程和一般的更新过程；给保险公司分析风险提供了可参考的依据。

第一章在经典的 Lundberg-Cramér 模型的基础上，考虑了利率的影响。首先从索赔额的角度开始研究，在考虑常数利率因素的前提下，研究了未决赔款准备金的折现值。得到了其分布函数以及特征函数, 讨论了针对未来某一时间段内保险公司所需计提的未决赔款准备金现值的分布函数的上界，而且给出了未决赔款准备金折现值的矩；接着研究了保险公司的带有常数利率的最终破产概率。通过鞅方法和随机权和技巧得到了最终破产概率的指数型上界。第一章的最后在研究了保险公司的有限时间破产概率。在利率为不确定的情形下，其中利率用随机过程描述，对保险公司的盈余用经典更新风险模型建模，得到了有限时间破产概率的尾等价式。

第三章首先介绍投资组合理论的基础知识，在全部资产分别投资于股票市场和无风险债券的情形下，研究了保险公司的最终破产概率和组合投资策略。假设风险投资现值为常数族，利用鞅方法得到了最终破产概率的指数型上界，并且解出了最优组合投资策略；然后考虑一个保险总公司下面有两个子公司，两个子公司分别由不同的承保盈余过程刻画。该模型称为二元保险风险模型，给出了该模型下破产概率的指数型上界。在此基础上，本文讨论了保险公司的投资问题：即两个子公司投资于不同的市场，或者同一市场的两种不同的风险证券。两个子公司如何安排合理的投资策略可以使总公司的破产风险最小；针对几何布朗运动模型刻画风险资产的不足，选择指数 Lévy 对风险资产进行建模，得到了渐近最优的投资策略；最后在股票价格服从指数 Lévy 过程的假设下，得到了保险公司的最优

混合投资策略，该投资策略限制在一个固定的 Value-at-Risk 水平下，可以使投资组合期望收益最大。

第四章回答了以下的问题，即在投资为常数策略的条件下，分别就股票价格服从几何布朗运动和更广泛的 Lévy 过程两种情况，利用布朗运动的分布性质和离散化嵌入等方法，得到了破产概率的积分方程。并且考虑了包括破产概率但是比破产概率更加广泛的破产量—惩罚函数，得到了其破产概率。假设索赔额的分布是 phase-type 的。研究了带有随机扰动项的破产概率和惩罚函数，其中随机扰动项用 Lévy 过程表示，且 Lévy 过程具有 Wiener-Hopf 分解，得到了类似的积分方程。

第五章总结了全文，给出了创新点和展望。

第二章 带有利率的风险模型的研究

2.1 引言

到目前为止，绝大多数的破产论的研究不计利率的影响，保费收入一成不变，即不随瞬时盈余的多少进行调整，同时不涉及投资收益，直到最近，对具有投资收益的破产理论的兴趣才猛增。如果考虑保险公司的投资问题，一个最自然的推广就是假设保险公司把保险基金购买债券或在市场上进行投资，就是考虑带有利率或投资收益率的破产模型。现在的研究主要在确定性的投资收益上面，对于随机投资收益的破产论的研究还不多，这方面的工作需要随机分析方面的知识，难度比较大，而且很难得到经典破产论中那样漂亮的结果。还有一个重要的推广，就是考虑重尾分布族的索赔，这适用于火险，风保险，洪水险等灾难型保险。在重尾索赔下，传统的鞅方法和更新方法都失效，需要用极值理论等方法去研究。本章将针对以上几个方面推广经典的破产论。

本章结构如下，第二节首先从索赔额的角度开始研究，在考虑常数利率因素的前提下，研究了未决赔款准备金的折现值。得到了其分布函数以及特征函数, 讨论了针对未来某一时间段内保险公司所需计提的未决赔款准备金现值的分布函数的上界，而且给出了未决赔款准备金折现值的矩；第三节研究了保险公司的带有常数利率的最终破产概率。通过鞅方法和随机权和技巧得到了最终破产概率的指数型上界。第四节研究了保险公司的有限时间破产概率。在利率为不确定的情形下，其中利率用随机过程描述，对保险公司的盈余用经典更新风险模型建模，得到了有限时间破产概率的尾等价式。

2.2 利率因素下的未决赔款准备金折现值的估计

未决赔款准备金(Outstanding Claims Reserve，也称为 Outstanding Loss Reserve)，是指保险公司在会计年度决算以前发生保险责任而未赔偿或未给付保险金，在当年收入的保险费中提取的资金。未决赔款准备金也称作赔款准备金。提取未决赔款准备金的目的在于保证保险公司承担将来的赔偿责任或给付责任，切实保护被保险人及其受益人的权益。未决赔款准备金不是保险公司的营业收入而

是保险公司的负债。未决赔款准备金具有以下三个特点：一是未决赔款一般是以保险金形式支付被保险人或受益人，是确定的，因为未决赔款准备金提取时保险事故已经发生，其支付只是时间迟早的问题。二是未决赔款准备金一般全部转化为保险金。三是未决赔款准备金的提取方法比较单一，即按照已经提出的保险赔偿或者给付金额，以及已经发生保险事故但尚未提出的保险赔偿或者给付金额，从当年的自留保险费中足额或者基本足额提取。

需要提存未决赔款准备金的情形有两种。一是已经提出保险赔偿或者给付请求。也就是说，投保人或者被保险人或者其受益人已经依据保险合同的约定，对保险事故导致的经济损失提出来索赔。对于索赔要求，保险公司往往要经过核查手续，如勘定该损失是否在保险责任内、审核损失金额是多少等等。在处理理赔之前，可以先从保险费中扣除一部分资金，转入未决赔款准备金中。 该种未决赔款准备金被称为 Reported Claims；另外一种是已经发生保险事故但尚未提出保险赔偿或者给付请求。也就是说，保险公司已知保险事故发生，但被保险人或其受益人因种种原因未提出赔付要求，且在索赔时效内对于保险责任范围内的损失，保险公司有义务支付，因而保险公司需提留资金准备，被称为 Insurance But Not Reported，简称 IBNR,参考卡尔斯等(2005)[23]。总之，无论如何，保险公司对未决赔款在核算时应事先提存储备，以备赔偿或给付时支用。未决赔款准备金在准备金中占很大的比重，也是保险公司主要的负债项目，而且它将直接影响利润和偿付能力的估计，参考解辉(2003) [24]。特别是在我国，保险制度还不太健全，未决赔款准备金的计提比例明显偏低, 见吴清华(2000) [25]和张伟(2005) [26]，所以对未决赔款准备金的研究已渐渐成为精算界和保险界关注的焦点之一。

未决赔款准备金对非寿险公司来说是最为重要的负债项目之一，如何科学准确地对其进行估算具有非常重要的意义。现今常用的计提未决赔款准备金的方法基本分为两大类（Goovaerts & Redant(1999)[27]）。第一大类是逐案估计法（Individual Claim Approach 或 Case Estimates），即对已报告索赔案件逐案估计总索赔额的方法，但逐案估计法的缺点较多，而且在承保数量很大、赔案较多时，使用逐案估计法也将消耗大量的人力物力和时间。另一大类就是统计方法，其基本模式是估计过去赔案发生发展的流量模式（Run-off Pattern），并假设未来赔案仍然按照这种模式发生发展以至最终结案，以该流量模式来估计未决赔款准备金。常用的统计方法有链梯法（Chain Ladder）， 每案赔付额法（Payments Per Claim），准备金进展法（Reserve Development），修正 IBNR 法（Budgeted IBN），和年金法（Annuity Methods）等。

上述几个方法所得到的都是未决赔款准备金的一个估计值，或者进一步估计其标准差，并不能从实质上对未决赔款准备金的具体分布情况做详细的分析和研究。所以不能得到估计值与实际状况相比是合理、偏低还是偏高，也很难得到估计值与实际需计提的未决赔款准备金之间的缺口。而且在保险的实务中，根据经营者的风险偏好和经营方针的不同，也不仅仅需要未决赔款准备金的一个估计值，它的分布情况和界值也是实务经营和保监会的监管工作中急需的指标。著名精算学家 Marc J. Goovaerts 在 1999 和 2003 年陆续发表了两篇关于 IBNR 准备金的文章，Goovaerts & Redant(1999)[27]和 Goovaerts et.al.(2003)[28]针对这种不足提出了研究未决赔款准备金分布函数的思想，并使用未来索赔额折现的方法分析 IBNR 准备金的分布函数与未来索赔额的关系。国内许多学者也都对此做了研究，在《中国精算进展——《精算通讯》文萃：2001-2004》(2005)[29]非寿险专题中，收录的 11 篇论文中就有 5 篇论述有关未决赔款准备金的研究。袁卫等(2002)[8]对未决赔款准备金的估计方法作了详细的论述和对比，并给出具体的计算实例分析了这些方法的特点。吴清华(2000)[25]从未决赔款准备金估算和管理中存在的问题出发，提出了加强未决赔款管理工作的具体措施。张徐和闫建军(2000)[30]对我国常用的几种估算方法进行了较系统的评价。下一节给出未决赔款准备金的模型。

2.2.1 未决赔款准备金的建模

假设第 k 个保单组合的损失到达的时间为 T_k，$k \ge 0$，$T_0 \equiv 0$，保单组合之间的时间间隔为 $\tau_k \triangleq T_k - T_{k-1}, k \ge 1$，且独立、服从任意分布函数 $H(y)$，$y \ge 0$；当损失发生后，报告至保险公司的服务时间独立、服从任意分布函数 $G_1(y)$，$y \ge 0$；在报告至保险公司后，保险公司进行核保和赔付的服务时间独立、服从任意分布函数 $G_2(y)$，$y \ge 0$。记第 k 次损失的报告和赔付服务的时间之和为随机变量 $Y_k, k \ge 0$，则 Y_k 独立且与 Y 同分布，Y 服从分布函数 $G(y), y \ge 0$，

$$G(y) = G_1(y) * G_2(y) \triangleq \int_0^y G_1(y-v)dG_2(v)\text{。} \tag{2.1}$$

并假设随机变量 X_k 表示第 k 次损失的赔付额的大小，X_k 独立且与 X 同分布，其共同的分布函数为 $F(x)$，且 $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$，$x \ge 0$。根据未决赔款准备金的定义，可知在 (t_1, t_2) 时间段内所需计提未决赔款准备金的分布函数为：

$$I(x, t_1, t_2) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\text{在}t_1\text{以前发生的损失在}(t_1,t_2)\text{内有}k\text{个赔付完成}\right\} F^{(k)}(x)\text{。} \tag{2.2}$$

其中 $F^{(k)}(x)$ 为 $F(x)$ 的 k 重卷积，即

$$F^{(k)}(x)=\int_0^x F^{(k-1)}(x-u)dF(u),\ i\ge 1,\ F^{(0)}(x)=1, x\ge 0\text{。} \tag{2.3}$$

Yan Liu（2005）[31]建立排队数学模型方法，定量讨论了未决赔款准备金的分布函数问题，即把保单组合的损失发生看作排队系统的到达过程，而损失的报告时间和服务时间看作是排队系统的服务过程，当这样一个排队模型满足$M/G/\infty$排队系统的假设时，在时间段(t_1,t_2)内所需计提的未决赔款准备金的分布函数为

$$I(x,t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t_1 p)^k}{k!}e^{-\lambda t_1 p}F^{(k)}(x), \tag{2.4}$$

其中$p=\int_0^{t_1}[G(t_2-y)-G(t_1-y)]dH(y)$。

前面介绍的未决赔款准备金的文献都没有考虑利率因素的影响。由于未决赔款准备金是未来一段时间内需要的赔款额，利率的影响在这段时期内就比较敏感，实际上，保险公司事先在银行存款，以便于针对未来一段时间段内的未决赔款准备金进行计提，因此，讨论未来一段时间段内的未决赔款准备金的折现值就很重要。下一节主要对未决赔款准备金折现值的分布函数进行讨论。

2.2.2 未决赔款准备金现值的分布函数及其界值

设$\delta>0$为无风险利率，即初始存款为1，t时刻的现金值为$e^{\delta t}$。保单组合的损失发生的个数$\{N(t),t\ge 0\}$是参数为$\lambda(\lambda>0)$的 Poisson 流，即τ_i服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的负指数分布函数，可视其对应一个到达过程为 Poisson 流的排队系统的到达过程，而当损失的报告服务时间和赔付服务时间为一般分布$G_1(y)$和$G_2(y)$时，可视其对应于这个排队系统的服务过程，其服务时间等于损失的报告服务时间与赔付服务时间之和，因此可以构成一个排队模型。又由于在保险实务中，保单组合的损失的报告由被保险人报告至保险公司，所以可视损失报告的服务过程不受服务人员个数的影响。而对于损失的赔付，由于赔付的评估可以由保险公司进行也可以委托公估人进行，所以也可视为赔付的服务过程不受服务人员个数的影响。因此，在这个排队模型中，可以把服务人员的个数看成足够多的情形。这样，当保单组合的损失发生的个数是参数为$\lambda(\lambda>0)$的 Poisson 流，而且损失的报告服务时间和赔付服务时间为一般分布$G_1(y)$和$G_2(y)$时，我们此时可以构成这样一个排队数学模型：排队系统的到达过程是参数为$\lambda(\lambda>0)$的 Poisson 流，服务时间具有一般分布$G(t)=\int_0^y G_1(y-v)dG_2(v)$，而服务人员的个数是足够多的$M/G/\infty$排队系

统（参考唐应辉和唐小我(2006)[32]）。ξ_{t_1,t_2} 记为在 (t_1,t_2) 时间段内所需计提的未决赔款准备金的折现值。根据未决赔款准备金的定义，可知在 (t_1,t_2) 时间段内所需计提的未决赔款准备金的折现值为

$$\xi_{t_1,t_2}=\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+Y)\delta}I_{\{T_k<t_1,t_1<T_k+Y<t_2\}}\quad, \tag{2.5}$$

其中 $I_{\{.\}}$ 表示指标函数。未决赔款准备金折现值的分布函数为：

$$I_\delta(x;t_1,t_2)\triangleq P(\xi_{t_1,t_2}\le x),\ \ x\ge 0。 \tag{2.6}$$

首先给出引理如下：

引理 2.1 设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 为强度 λ 的 Poisson 过程，在 $N(t)=n$ 的条件下，n 个到达时间 $T_1<T_2<\ldots<T_n$ 和 n 个相互独立同服从 $[0,t]$ 上均匀分布的随机变量 $U_1,U_2,\ldots,U_n$ 的顺序统计量 $U_{(1)}<U_{(2)}<\ldots<U_{(n)}$ 有相同的分布。

引理 2.1 的证明见毛用材和胡奇英(1999)[33]

定理 2.1 当满足 $M/G/\infty$ 排队系统的假设时，则对于任意的 $0<t_1<t_2-t_1$，在时间段 (t_2,t_1) 内未决赔款准备金折现值的分布为：

$$\begin{aligned}&I_\delta(x;t_1,t_2)\\&=\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)+\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}H_\delta(x;u,y)dudG(y)\\&+\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1}H_\delta(x;u,y)dudG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}H_\delta(x;u,y)dudG(y)\ ]。\end{aligned} \tag{2. 7}$$

而对于任意的 $0<t_2-t_1\le t_1$，在时间段 (t_2,t_1) 内未决赔款准备金折现值的分布为：

$$\begin{aligned}&I_\delta(x;t_1,t_2)\\&=\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)+\int_0^{t_2-t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}H_\delta(x;u,y)dudG(y)\\&+\int_{t_2-t_1}^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_2-y}H_\delta(x;u,y)dudG(y)+\int_{t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}H_\delta(x;u,y)dudG(y)]。\end{aligned} \tag{2. 8}$$

其中 $H_\delta(x;u,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}F^{(n)}(xe^{(u+y)\delta}),x\ge 0$。

证明.首先考虑 $t_1<t_2-t_1$ 的情形。当 $t_1<t_2-t_1$ 时，由于 $T_k\ge 0,a.s.$，所以可以进行推导如下：

$$
\begin{aligned}
I_\delta(x;t_1,t_2) &\equiv P(\xi_{t_1,t_2}\le x)=P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+Y)\delta}I_{\{T_k<t_1,t_1<T_k+Y<t_2\}}\le x)\\
&=\int_0^{t_2-t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_2-y\}}\le x)dG(y)\\
&=\int_0^{t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_1}^{t_2-t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}[I_{\{t_1-y<T_k<0\}}+I_{\{0\le T_k<t_1\}}]\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}[I_{\{t_1-y<T_k<0\}}+I_{\{0\le T_k<t_2-y\}}]\le x)dG(y)\\
&=\int_0^{t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_1}^{t_2-t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{0\le T_k<t_1\}}\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{0\le T_k<t_2-y\}}\le x)dG(y) \qquad (2.9)\\
&\triangleq I_1+I_2+I_3。
\end{aligned}
$$

其中由于损失到达的时间T_k为正的随机变量，所以$I_{\{t_1-y<T_k<0\}}=0$。

接下来首先来计算I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 &\equiv \int_0^{t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\le x)dG(y)\\
&=\int_0^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{n}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\le x\,|\,N(t_1)=n)P(N(t_1)=n)dG(y)。
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

由于每次损失的赔付额的大小X_k独立同分布，又根据引理 2.1，可得

$$
\begin{aligned}
&P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(T_k+y)\delta} I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}} \le x \mid N(t_1)=n) \\
&= P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(U_{(k)}+y)\delta} I_{\{t_1-y<U_{(k)}<t_1\}} \le x) = P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(U+y)\delta} I_{\{t_1-y<U<t_1\}} \le x) \\
&= \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(u+y)\delta} I_{\{t_1-y<u<t_1\}} \le x) du \qquad (2.11) \\
&= \frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1-y} P(0 \le x) du + \int_{t_1-y}^{t_1} P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(u+y)\delta} \le x) du] \\
&= \frac{t_1-y}{t_1} + \frac{1}{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1} F^{(n)}(xe^{(u+y)\delta}) du。
\end{aligned}
$$

其中U服从$[0,t_1]$上的均匀分布。把（2.11）代入（2.10），可得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_1-y}{t_1}\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dG(y) \\
&+\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1-y}^{t_1} F^{(n)}(xe^{(u+y)\delta})du\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dG(y) \qquad (2.12) \\
&=\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1} H_\delta(x;u,y)dudG(y)]。
\end{aligned}
$$

同样的方法，可以计算出I_2，I_3

$$
\begin{aligned}
I_2 &\equiv \int_{t_1}^{t_2-t_1} P(\sum_{k=1}^{N(t_1)} X_k e^{-(T_k+y)\delta} I_{\{0\le T_k<t_1\}} \le x) dG(y) \\
&= \int_{t_1}^{t_2-t_1}\sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(U+y)\delta} I_{\{0<U<t_1\}} \le x)\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dG(y) \qquad (2.13) \\
&= \frac{1}{t_1}\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(U+y)\delta} \le x)\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dG(y) \\
&= \frac{1}{t_1}\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1} H_\delta(x;u,y)dG(y)。
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
I_3 \equiv \int_{t_2-t_1}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{N(t_1)} X_k e^{-(T_k+y)\delta} I_{\{0\le T_k<t_2-y\}} \le x) dG(y)
$$

$$
= \int_{t_2-t_1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-(U+y)\delta} I_{\{0<U<t_2-y\}} \le x)\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dG(y)
$$

$$=\frac{1}{t_1}[\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}\sum_{n=0}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{n}X_k e^{-(U+y)\delta}\le x)\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dudG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)]$$

$$=\frac{1}{t_1}[\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}H_\delta(x;u,y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)]。\tag{2.14}$$

综合（2.9）-（2.14），则当对于任意的$0<t_1<t_2-t_1$成立时，有（2.7）式成立。而当$0<t_2-t_1\le t_1$成立时

$$\begin{aligned}
&I_\delta(x;t_1,t_2)\triangleq P(\xi_{t_1,t_2}\le x)\\
&=\int_0^{t_2-t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{t_1}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{t_1-y\le T_k<t_2-y\}}\le x)dG(y)\\
&+\int_{t_1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+y)\delta}I_{\{0\le T_k<t_2-y\}}\le x)dG(y)\\
&=I'_1+I'_2+I'_3。
\end{aligned}\tag{2.15}$$

同理可以计算出I'_1,I'_2,I'_3　，分别为

$$I'_1=\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_2-t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_0^{t_2-t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}H_\delta(x;u,y)dudG(y)];\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
I'_2=&\frac{1}{t_1}[\int_{t_2-t_1}^{t_1}(t_1-y)dG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_2-y}H_\delta(x;u,y)dudG(y)+\int_{t_2-t_1}^{t_1}(t_1-t_2+y)dG(y)];
\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$I'_3=\frac{1}{t_1}[\int_{t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)+\int_{t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}H_\delta(x;u,y)dudG(y)]。\tag{2.18}$$

把（2.16）-（2.17）代入（2.15），可得，当$0<t_2-t_1\le t_1$时，有（2.18）成立。定理证毕。

定理 2.1 给出了未决赔款准备金折现值的分布，实际上，界值也是实务经营和保监会的监管工作中比较重要的指标，下面定理给出了未决赔款准备金现值的上界。

定理 2.2 当满足$M/G/\infty$排队系统的假设时，当$0<t_1<t_2-t_1$，在时间段(t_2,t_1)内未决赔款准备金现值的上界为

$$
\begin{aligned}
&I_{\delta}(x;t_1,t_2)\\
&\le \frac{1}{t_1}\Big[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{2t_1\delta})-1]\}\int_0^{t_1}ydG(y)\\
&+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_{t_1}^{t_2-t_1}t_1dG(y)+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_2-y)dG(y)\Big]。
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

当$0<t_2-t_1\le t_1$，其上界为

$$
\begin{aligned}
&I_{\delta}(x;t_1,t_2)\\
&\le \frac{1}{t_1}\Big[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_0^{t_2-t_1}ydG(y)\\
&+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_{t_2-t_1}^{t_1}(t_2-t_1)dG(y)\\
&+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_{t_1}^{\infty}(t_2-y)dG(y)\Big]。
\end{aligned}
\tag{2. 20}
$$

证明：对于卷积有不等式$F^{(n)}(x)\le[F(x)]^n$，由归纳法易得。接下来估计$H_{\delta}(x;u,y)$

$$
\begin{aligned}
H_{\delta}(x;u,y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}F^{(n)}(xe^{(u+y)\delta})\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t_1F(xe^{(u+y)\delta})]^n}{n!}e^{-\lambda t_1}\\
&=e^{-\lambda t_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t_1F(xe^{(u+y)\delta})]^n}{n!}=\exp\{\lambda t_1[F(xe^{(u+y)\delta})-1]\}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

当$0<t_1<t_2-t_1$时，将（2.21）代入（2.7），得

$$
\begin{aligned}
&I_{\delta}(x;t_1,t_2)\\
&\le \frac{1}{t_1}\Big[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)\\
&+\Big(\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1}\Big)\exp\{\lambda t_1[F(xe^{(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}\exp\{\lambda t_1[F(xe^{(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)\\
&\le \frac{1}{t_1}\Big[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)\\
&+\int_0^{t_1}\exp\{\lambda t_1[F(xe^{(t_1+y)\delta})-1]\}ydG(y)+\int_{t_1}^{t_2-t_1}\exp\{\lambda t_1[F(xe^{(t_1+y)\delta})-1]t_1dG(y)\\
&+\int_{t_2-t_1}^{\infty}\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}(t_2-y)dG(y)\\
&\le \frac{1}{t_1}\Big[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{2t_1\delta})-1]\}\int_0^{t_1}ydG(y)
\end{aligned}
$$

$$+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_{t_1}^{t_2-t_1} t_1 dG(y)+\exp\{\lambda t_1[F(xe^{t_2\delta})-1]\}\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_2-y)dG(y)]。$$

将（2.21）代入（2.8），同理可以得到$0<t_2-t_1\le t_1$的情形，证明完毕。

注 2.1. 根据定理 2.2 的结果，保险公司能模拟出索赔额的分布，就可以根据（2.19）和（2.20）估计出未决赔款准备金的分布的上界。

2.2.3 未决赔款准备金现值的特征函数及其矩

前面的一部分给出了未决赔款准备金折现值的分布函数，并且定理 2.2 给出了其分布函数的上界值。但是由定理 2.1 给出的分布函数形式相对比较复杂，毕竟在实际中计算一个卷积分布并不容易。而且界值的估计相对是一个粗糙的估计，有时为了更精确的信息，还需要知道矩的大小。根据特征函数的唯一性与逆转性，一个分布函数与其特征函数一一对应，而且知道了特征函数，其各阶矩就可确定。接下来的部分主要就未决赔款准备金现值的特征函数和矩展开讨论。

记$\Phi_\xi(r)$为未决赔款准备金现值的特征函数，即$\Phi_\xi(r)\equiv Ee^{ir\xi_{t_1,t_2}}$，其中$i$为虚数单位。$f_X(r)\equiv Ee^{irX}$为赔款额$X$的特征函数。

定理 2.3 当定理 2.1 中的假设满足时，对于任意的$0<t_1<t_2-t_1$，在时间段(t_2,t_1)内未决赔款准备金现值的特征函数为：

$$\begin{aligned}\Phi_\xi(r)=&\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)\\&+(\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1})\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)\\&+\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)\;]。\end{aligned}\tag{2.22}$$

当$0<t_2-t_1\le t_1$时，

$$\begin{aligned}\Phi_\xi(r)=&\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)\\&+(\int_0^{t_2-t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}+\int_{t_2-t_1}^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_2-y})\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)\\&+\int_{t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)]。\end{aligned}\tag{2.23}$$

证明. 当$0<t_1<t_2-t_1$时，

$$\Phi_{\xi}(r)\equiv Ee^{ir\xi_{t_1,t_2}}=E\exp\{ir\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+Y)\delta}I_{\{T_k<t_1,t_1<T_k+Y<t_2\}}\}$$

$$=\int_0^{t_1}E\exp\{ir\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+Y)\delta}I_{\{t_1-y<T_k<t_1\}}\}dG(y)$$

$$+\int_{t_1}^{t_2-t_1}E\exp\{ir\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+Y)\delta}I_{\{0<T_k<t_1\}}\}dG(y)$$

$$+\int_{t_2-t_1}^{\infty}E\exp\{ir\sum_{k=1}^{N(t_1)}X_k e^{-(T_k+Y)\delta}I_{\{0<T_k<t_2-y\}}\}dG(y)\triangleq\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3。$$

接下来分别计算Φ_1,Φ_2,Φ_3，由于独立随机变量和的特征函数等于其特征函数的乘积，再由引理 2.1，仿照定理 2.1 中的证明，可得

$$\begin{aligned}\Phi_1&=\int_0^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}E\exp\{ir\sum_{k=1}^{n}X_k e^{-(U+Y)\delta}I_{\{t_1-y<U<t_1\}}\}\frac{(\lambda t_1)^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dG(y)\\&=\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t_1 f_X(re^{-(u+y)\delta}))^n}{n!}e^{-\lambda t_1}dudG(y)]\\&=\frac{1}{t_1}[\int_0^{t_1}(t_1-y)dG(y)+\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)],\end{aligned}\tag{2.24}$$

同样可以把Φ_2,Φ_3计算出来

$$\Phi_2=\frac{1}{t_1}\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1}\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y),\tag{2.25}$$

$$\Phi_3=\frac{1}{t_1}[\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}\exp\{\lambda t_1[f_X(re^{-(u+y)\delta})-1]\}dudG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}(t_1-t_2+y)dG(y)。\tag{2.26}$$

由（2.24）-（2.26），可得（2.22）成立，同理可以证明（2.23）成立。定理得证。

推论 若$E(X^2)<\infty$，且ξ_{t_1,t_2}的前两阶矩存在，对于任意的$0<t_1<t_2$，有

$$E(\xi_{t_1,t_2})=\frac{\lambda E(X)}{\delta}[e^{-t_1\delta}G(t_1)-\int_0^{t_2-t_1}e^{-(t_1+y)\delta}dG(y)+\int_{t_1}^{\infty}e^{-y\delta}dG(y)-e^{-t_2\delta}(1-G(t_2-t_1))],\tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}E(\xi_{t_1,t_2}^2)=&\frac{[\lambda E(X^2)+\lambda^2t_1E^2(X)]}{2\delta}[e^{-2t_1\delta}G(t_1)-\int_0^{t_2-t_1}e^{-2(t_1+y)\delta}dG(y)\\&+\int_{t_1}^{\infty}e^{-2y\delta}dG(y)-e^{-2t_2\delta}(1-G(t_2-t_1))]。\end{aligned}\tag{2.28}$$

证明：由特征函数的性质，即随机变量的n阶矩存在，则它的特征函数k次可导，对$k\le n$，有

$\frac{d}{d^k r}\Phi_{\xi}(0)=i^k E(\xi^k_{t_1,t_2})$ 以及 $\frac{d}{d^k r}f_X(0)=i^k E(X^k)$ 成立。因此要计算 $\xi^k_{t_1,t_2}$ 的一阶矩和二阶矩，只要计算特征函数 $\Phi_{\xi}(r)$ 在原点的前两阶倒数。当 $0<t_1<t_2-t_1$ 时，由定理 2.3，对（2.22）式两端求一阶和二阶导数，利用 $f_X(0)=1$，可得

$$\Phi'_{\xi}(0)=\lambda f'_X(0)[\int_0^{t_1}\int_{t_1-y}^{t_1}e^{-(u+y)\delta}dudG(y)$$
$$+\int_{t_1}^{t_2-t_1}\int_0^{t_1}e^{-(u+y)\delta}dudG(y)+\int_{t_2-t_1}^{\infty}\int_0^{t_2-y}e^{-(u+y)\delta}dudG(y)]$$
$$=\frac{i\lambda E(X)}{\delta}[e^{-t_1\delta}G(t_1)-\int_0^{t_2-t_1}e^{-(t_1+y)\delta}dG(y)+\int_{t_1}^{\infty}e^{-y\delta}dG(y)-e^{-t_2\delta}(1-G(t_2-t_1))]$$

再由公式 $\Phi'_{\xi}(0)=iE(\xi_{t_1,t_2})$，（2.27）成立。继续计算 $\Phi''_{\xi}(0)$，得到

$$\Phi''_{\xi}(0)$$
$$=\frac{i^2[\lambda E(X^2)+\lambda^2 t_1 E^2(X)]}{2\delta}[e^{2t_1\delta}G(t_1)-\int_0^{t_2-t_1}e^{-2(t_1+y)\delta}dG(y) \tag{2.29}$$
$$+\int_{t_2-t_1}^{\infty}e^{-2y\delta}dG(y)-e^{-2t_2\delta}(1-G(t_2-t_1))]。$$

当 $0<t_2-t_1\le t_1$ 时，同样的方法对（2.23）式，整理后有同样的结果。

例 若赔付额 X 服从参数为 α 的负指数分布，等待服务时间 Y 服从参数为 β 的负指数分布。其分布函数为 $G(y)=1-e^{-\beta y},y\ge 0$。由推论把 $G(y)$ 和 $EX=\frac{1}{\alpha},EX^2=\frac{2}{\alpha^2}$ 代入（2.27），（2.28），得到

$$E(\xi_{t_1,t_2})=\frac{\lambda}{\delta\alpha}[\frac{\delta e^{-t_1\delta}}{\beta+\delta}+\frac{\beta e^{-(\delta+\beta)(t_2-t_1)}e^{-t_1\delta}}{\beta+\delta}+\frac{\beta e^{-(\delta+\beta)t_1}}{\beta+\delta}-e^{-t_1(\delta+\beta)}-e^{-t_2\delta}(1-e^{\beta(t_2-t_1)})];$$

$$E(\xi^2_{t_1,t_2})=(\frac{\lambda}{\delta\alpha^2}+\frac{\lambda^2 t_1}{2\alpha^2\delta})[\frac{2\delta e^{-t_1\delta}}{\beta+2\delta}+\frac{\beta e^{-(2\delta+\beta)(t_2-t_1)}e^{-2t_1\delta}}{\beta+2\delta}$$
$$+\frac{\beta e^{-(2\delta+\beta)t_1}}{\beta+\delta}-e^{-t_1(2\delta+\beta)}-e^{-2t_2\delta}(1-e^{\beta(t_2-t_1)})]。$$

该节在考虑利率的情形下，针对未决赔款准备金折现值进行研究，得到了未决赔款准备金折现值的分布函数和特征函数，在此基础上给出了未决赔款准备金现值的上界和矩。弥补了以往常用方法只能得到未决赔款准备金的一个估计值、而很难对其分布函数进行分析和描述的不足，也可以给保监会的监督工作提供新的分析技术和思想。这一节只是针对经典的保险模型--Cramér-Lundberg 模型中的索赔额的部分进行了研究。在下一节，考虑常数利率的前提下，研究 Cramér-Lundberg 模型的破产问题。

2.3 带有常数利率的最终破产概率的研究

2.3.1 带有利率的盈余过程的模型

在第一章，我们介绍了保险公司的承保盈余过程，其可以表示为：

$$R(t)=u+ct-A(t), \tag{2.30}$$

并且给出了模型的基本假设。在 2.2 节中，针对（2.30）中的索赔部分 $A(t)\equiv\sum_{i=1}^{N(t)}X_n$，考虑了无风险利率，得到了索赔额准备金的折现值的分布以及矩。本节综合考虑整个承保盈余过程，假设保险公司把盈余投资到无风险债券上，无风险债券的利率为常数 $\delta>0$，那么保险公司的盈余过程可以表示成：

$$R_\delta(t)=e^{\delta t}[u+\int_0^t e^{-\delta v}d(cv-A(v))]=e^{\delta t}u+c\int_0^t e^{\delta(t-v)}dv-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{t-T_n}\text{。} \tag{2.31}$$

定义折现值过程为 $\bar{R}_\delta(t)\triangleq e^{-\delta t}R_\delta(t)$，我们有

$$\bar{R}_\delta(t)=u+c\int_0^t e^{-\delta v}dv-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n}, \tag{2.32}$$

保险公司破产时间为 $\tau\triangleq\inf\{t:U_\delta(t)<0\}$，保险公司的最终破产概率为：$\Psi(u)=P(\tau<\infty)=P\{R_\delta(t)<0,\ 对于某个\ t\ge 0\}$。过程 $R_\delta(t)$ 生成的 $\sigma-$代数流记为 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$。

假设索赔额的矩母函数存在，记为 $M_X(r)=E[e^{rX}]$。定义函数 $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，$h(0)=0,\ h(r)=M_X(r)-1$，满足经典的假设，即存在一个 $r_\infty\in(0,\infty]$，当 $r<r_\infty$ 时，有 $M_X(r)<\infty$, 以及 $\lim_{r\to r_\infty}M_X(r)=\infty$。

在该模型假定下，这一节得到了如下的结果：即如果保险公司的盈余过程为（2.32）的表示，存在常数 r^* 使得破产概率具有指数型上界。注意到如果 $\delta=0$，那么（2.32）式就变成了（1.1），从而推广了经典的 Cramer-Lundberg 模型。

2.3.2 鞅方法下破产概率的上界

与经典的 Cramer-Lundberg 模型不同，（2.32）不再是平稳独立增量过程，从而对于任意的 $r>0$，指数过程 $\exp\{-r\bar{R}_\delta(t)\}$ 不再是鞅过程（参见 Brekelmans &Waegenaere(2001)[34]）。但是，我们可以找到一个常数 $r^*>0$，使得 $\exp\{-r^*\bar{R}_\delta(t)\}$ 为一上鞅，而且常数 r^* 是唯一的。因此应用经典的破产理论中的鞅证明方法

（Gerber(1979)[35]），我们可以得到最终破产概率的指数型上界。

首先给出两条重要引理：

引理 2.2 对于任意的$r>0$，随机过程$A(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n}$的矩母函数为

$$Ee^{rA(t)}=\exp(\lambda\int_0^t h(re^{-\delta u})du)。\tag{2.33}$$

证：根据引理 2.1，在给定$N(t)=n$的条件下，$(T_1,\ldots,T_n)$的联合分布函数与n个取值于$(0,t]$上的均匀分布的次序统计量同分布，又因为$\{X_n\}_{n\geq 1}$是独立同分布的随机序列，我们可以得到：

$$E[\exp(r\sum_{n=1}^{n}X_n e^{-\delta T_n})|N(t)=n]=E[\exp(r\sum_{n=1}^{n}X_n e^{-\delta U_n})],\tag{2.34}$$

其中$U_1,U_2,\ldots,U_n$为n个独立同分布且服从均匀分布的随机变量。有了（2.34），我们可以计算$Ee^{rS(t)}$如下：

$$E[\exp(r\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n})]=\sum_{n=1}^{\infty}E[\exp(r\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n})|N(t)=n]P(N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}[\frac{1}{t}\int_0^t E[e^{rXe^{-\delta u}}]du]^n P(N(t)=n)=\sum_{n=1}^{n}[\frac{1}{t}\int_0^t E[e^{rXe^{-\delta u}}]du]^n P(N(t)=n)$$

$$=\exp(\lambda t[\frac{1}{t}\int_0^t E[e^{rXe^{-\delta u}}]du-1])=\exp(\lambda\int_0^t h(re^{-\delta u})du)。$$

上面的推导中第一个等式用到了全概率公式。这样，引理得证。

引理 2.3 假设安全负荷条件满足，即$c>\lambda E[X]$，那么存在唯一的r^*满足方程

$$G(r)\triangleq\lambda h(r)-cr=0\quad。\tag{2.35}$$

证明参考 Asmussen(2000)[36]。

易知，$G(0)=0$，$G'(0)=0$，$G''(r)>0$，所以$G(r)$的图像由图 2.1 所示。

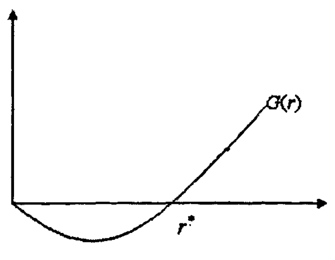

图 2.1 函数$G(r)$的图像

根据以上两个引理，我们有引理 2.4 如下。

引理 2.4 假设安全负荷条件满足，即$c > \lambda E[X]$，则过程$\exp\{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)\}$为关于$\sigma$-代数流$\mathcal{F}$的上鞅。$r^{*}$为方程（2.35）的唯一解。

证： 首先对于任意的$0 \le s \le t$，由（2.32）式得到

$$
\begin{aligned}
&E[\exp\{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)\}|\mathcal{F}_{s}] \\
&= e^{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)(s)}E[\exp\{r^{*}[A(t)-A(s)]-r^{*}c\int_{s}^{t}e^{-\delta u}du\}|\mathcal{F}_{s}] \\
&= e^{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)}E[\exp\{r^{*}e^{-\delta s}[A(t-s)]-r^{*}c\int_{s}^{t}e^{-\delta u}du\}],
\end{aligned}
$$

其中第二个等式成立是因为$\bar{R}_{\delta}(t)$具有独立增量，而且$\bar{R}_{\delta}(t)-\bar{R}_{\delta}(s)$和$e^{-\delta s}\bar{R}_{\delta}(t-s)$有相同分布（参见 Brekelmans &Waegenaere(2001)[34]）。

由引理 2.2,我们可得

$$E\exp\{r^{*}e^{-\delta s}[A(t-s)]\} = \exp(\lambda\int_{0}^{t-s}h(r^{*}e^{-\delta(u+s)})du) = \exp(\lambda\int_{s}^{t}h(r^{*}e^{-\delta u})du)\text{。} \quad (2.36)$$

因此我们可以计算出

$$
\begin{aligned}
&E[\exp\{r^{*}e^{-\delta s}[A(t-s)]-r^{*}c\int_{s}^{t}e^{-\delta u}du\}] \\
&= \exp\{\int_{s}^{t}[\lambda h(r^{*}e^{-\delta u})-cr^{*}e^{-\delta u}]du\} \\
&= \exp\{\int_{s}^{t}G(r^{*}e^{-\delta u})du\}\text{。}
\end{aligned}
$$

由图 1 可以看出，当$r^{*}e^{-\delta u} \le r^{*}$，可得$G(r^{*}e^{-\delta u}) \le G(r^{*})$，于是由引理 2.3 和方程（2.35）得

$$\exp\{\int_{s}^{t}G(r^{*}e^{-\delta u})du\} \le \exp\{G(r^{*})(t-s)\} = 1\text{。} \quad (2.37)$$

综上可得

$$E[\exp\{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)\}|\mathcal{F}_{s}] \le \exp\{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(s)\}\text{。} \quad (2.38)$$

（2.38）成立说明过程$\exp\{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)\}$为关于$\sigma$-代数流$\mathcal{F}$的上鞅。

事实上，引理 2.4 中给出的r^{*}就是破产概率的调节系数。下面给出本节的主要定理。

定理 2.4 设引理 2.4 的条件满足，则破产概率$\Psi(u) \le e^{-r^{*}u}$，其中r^{*}是方程(2.35)的唯一解。

证明： 为了证明的方便，我们定义$M(t,u,r^{*}) \triangleq \exp\{-r^{*}\bar{R}_{\delta}(t)\}$。根据引理 2.3, $M(t,u,r^{*})$为关于σ-代数流$\mathcal{F}$的上鞅，其关于破产时间τ的停止过程$M(t\wedge\tau,u,r^{*})$同样是上鞅。因此，对于$t \ge 0$，由于因为$M(t,u,r^{*})$总是非负，于是我们有

$$
\begin{aligned}
e^{-r^* u} &= M(0,u,r^*) \ge E[M(t \wedge \tau,u,r^*)] \\
&= E[M(t \wedge \tau,u,r^*) I_{\{\tau<t\}}] + E[M(t \wedge \tau,u,r^*) I_{\{\tau \ge t\}}] \\
&= E[M(\tau,u,r^*) I_{\{\tau<t\}}] + E[M(\tau,u,r^*) I_{\{\tau \ge t\}}] \\
&\ge E[M(\tau,u,r^*) I_{\{\tau<t\}}]\ ,
\end{aligned}
$$

其中$I_{\{A\}}$代表集合A的示性函数。根据单调收敛定理有，

$$\lim_{t\to\infty} E[M(\tau,u,r^*) I_{\{\tau<t\}}] = E[M(\tau,u,r^*) I_{\{\tau<\infty\}}]。$$

由于在集合$\{\tau<\infty\}$上破产时刻盈余总为负值，也就是$M(\tau,u,r^*)\ge 1$，因此有$e^{-r^* u} \ge E[M(\tau,u,K^*,r^*)|\tau<\infty]P[\tau<\infty] \ge P[\tau<\infty]$。

综上可得，破产概率的指数型上界为$e^{-r^* u}$，破产概率满足$\Psi(u) \le e^{-r^* u}$。定理得证。

在这一节，利用改进了的鞅方法，对于带有常数利率的最终破产概率，给出了其上界。得到上界的一个前提就是调节系数r^*是存在的，对应到索赔额的指数矩必须存在，而对于指数矩不存在的情况，鞅方法就失效了，在下一节，对该问题展开讨论。

2.4 经典更新风险模型中带有随机利率的破产概率

2.4.1 重尾分布及模型介绍

上一节只是考虑“小索赔”情形的破产论，一个很强的约束条件就是调解系数存在。如果调节系数不存在，则鞅方法和更新方法都失效。这样，对于“大索赔”情形下的破产论，更确切说对于重尾分布的破产理论就必须用新的数学工具。近些年来，重尾索赔额情形下的破产概率一直是保险风险理论中十分活跃的研究方向。具有正则变化尾的分布就是一种重要的重尾分布，对分布函数 F，如存在$-\alpha<0$和一个慢变化函数$L(\cdot)$，满足

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x>0\ ,$$

我们就说分布函数 F 为一有正则变化尾的分布，具有尾指标$-\alpha<0$，记为$F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$。很多著名的重尾分布都具有正则变化尾，如帕累托分布，逆 Gamma 分布等。重尾分布下破产理论的研究适用于火险，风保险，洪水险等灾难型保险，关于重尾分布及其在保险风险理论中的意义及其应用，参考 Embrecht & Klüppelberg(1997)[37]。

由于未来利率对保险公司的偿付能力和准备金影响很大，在某些情况下影响了保险公司未来的投资方针，以及准备金的提取等。基于上述想法，有必要把利率因素尤其是随机利率考虑进去。最近，已有许多学者研究了经典更新风险模型中具有重尾索赔额和利率为常数情形下的最终破产概率,已有的文献有 Klüppelberg &Stadtmüller(1998)[38]，Asmussen(1998)[39] Kalashnikov& Konstrantinides(1999)[40] 和 Konstrantinides et.al.(2002)[41]，而 Cai(2003) [42]针对轻尾索赔额分布，考虑了随机利率的情形，假设随机利率过程为 Lévy 过程，对最终破产概率建立了递推方程，但是最终破产概率毕竟离现实较远。本文在经典更新风险模型中具有正则变化尾索赔额的假设下，研究了随机利率情形下的最终破产概率和有限时间破产概率，建立了破产概率的尾渐近等价式。现在建模如下：

假定本文所有随机变量都定义在同一概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上。我们假定索赔额，X_n，$n\ge1$，为一独立同分布（i.i.d.）非负随机变量列，具有共同分布函数 F，满足对所有$x>0,\bar{F}(x)>0$。同时，假定时刻 t 时索赔发生次数 $N(t)$为一具有参数λ的 Poisson 过程且独立于索赔额序列$\{X_n;n\ge1\}$。于是到时间$t\ge0$时的总索赔额可写为

$$S(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\,, \tag{2.38}$$

并且规定$N(t)=0$时，$S(t)=0$。这显然是一个合理的规定。

记索赔发生的时间为$\{\tau_i,i\ge0\}$，其中$\tau_0=0$。由 Poisson 过程的性质知：索赔到达间隔时间$\{\tau_n-\tau_{n-1};n\ge1\}$为一独立同分布的随机变量列，其共同的分布为指数分布，具有参数λ。假定保险费率为常数$C>0$，到时刻$t\ge0$时所收保费为Ct。设$\delta(\omega,t)>0$为时刻t时的利率并为一随机过程，且 $\omega\in\Omega$。显然，利率与索赔额及索赔发生的时间和次数是独立的，因此我们合理地假定$\delta(\omega,t)$，索赔额序列$\{X_n;n\ge1\}$和索赔发生次数$N(t)$之间两两独立。在实际中，利率应当为一阶梯函数并且有正的上下界，因此我们可以合理的假定：存在正数δ_0，满足对所有$t\ge0$和几乎所有的样本点ω，

$$\delta_0\le\delta(\omega,t)\,, \tag{2.39}$$

并且对几乎每一个样本ω，$\delta(\omega,t)$为右连续且左极限存在或左连续且右极限存在的关于时间t的函数。因而对几乎所有的样本点和所有$t>0$，$\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz$都存在。于是$t=0$时刻的资本$u$在时刻$t$时变为$xe^{\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}$。在上述假设下，时刻$t$时的资本$R(t)$应满足方程

$$R(t)=ue^{\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}+C\int_{[0,t]}e^{\int_{[y,t]}\delta(\omega,z)dz}dy-\int_{[0,t]}e^{\int_{[y,t]}\delta(\omega,z)dz}S(dy),\quad t\geq 0,\qquad(2.40)$$

其中$u>0$为保险公司初始资本。此时最终破产概率和时间T内破产的概率可分别定义为

$$\Psi(u)=P\{U(t)<0,\ 对某一t>0\};\Psi(u,T)=P\{U(t)<0,对某一T\geq t>0\}.\qquad(2.41)$$

今后我们规定：当$T=\infty$时，$\Psi(u,T)$ 记为$\Psi(u)$ 。

事实上，就上述经典更新风险模型，对具有正则变化尾索赔额的情形，即$F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$，这里$-\alpha>0$，Klüppelberg & Stadtmüller(1998)[38]讨论了$\delta(\omega,t)$恒为一常数δ时的最终破产概率并获得了如下的结果：

$$\Psi(u)\sim\frac{\lambda}{\alpha\delta}\bar{F}(u)。\qquad(2.42)$$

以后，均就$u\to\infty$考虑极限关系。对两个正函数$a(\cdot)$和$b(\cdot)$，如满足

$\lim_{u\to\infty}\dfrac{a(x)}{b(x)}=1$，则记为$a(x)\sim b(x)$。

此外，Tang(2002)[17]就更大的重尾分布族在常数利率下得到了与（2.42）类似的结果。

但是，上述文献所用方法难于用来研究经典更新风险模型中随机利率情形下的最终破产概率。上述文献都研究的是利率为常数时的最终破产概率。事实上，有限时间内的破产概率应该是更值得研究的问题。另一方面，在实际中利率是不可能保持不变的，合理的情况应当是利率为一随机过程，因此应当研究利率为随机过程情形下的有限时间内的破产概率及最终破产概率。本节的目的就在于此。利用 Resnick and Willekens(1991)[43]关于随机权和的结果来研究这一问题。对于随机权和的进一步研究及其在保险风险理论中的应用，请看参考文献 Tang et.al (2003)[44]，Wang&Tang(2006)[45]和 Wang et.al(2004)[46]。基于 Resnick and Willekens(1991)[43]，在一定条件下就上述经典更新风险模型，对具有正则变化尾的索赔额，即$F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$，这儿$-\alpha>0$，讨论了随机利率情形下最终破产概率和时间$T$内的破产概率并得到了：对$T\in(0,\infty]$，

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{0<T\leq\infty}\left|\frac{\Psi(u,T)}{\bar{F}(u)\lambda E\{\int_0^T e^{-\alpha\int_0^t\delta(\omega,z)dz}dt\}}-1\right|=0。\qquad(2.43)$$

显然，我们的结果表明对$T\in(0,\infty],\Psi(u,T)$一致收敛于

$\bar{F}(u)\lambda E\{\int_0^T e^{-\alpha\int_0^t \delta(w,z)dz}dt\}$。至于一致收敛的意义，请见下面的定理 2.5。如在（2.43）中取 $\delta(t)\equiv\delta$，则对于 $T\in(0,\infty]$ 范围内 $\Psi(u,T)$ 一致收敛于 $\bar{F}(u)\frac{\lambda}{\alpha\delta}\left(1-e^{-\alpha\delta T}\right)$。取 $T=\infty$，则有（2.42）成立。

注.（2.43）式的经济涵义如下：当保险公司的初始资本很大的情形下，我们可以用一个尾等价式去近似地代替有限时间破产概率。从而为难于计算的破产概率找到了可行的计算方法，因为 $\bar{F}(u)\lambda E\{\int_0^T e^{-\alpha\int_0^t \delta(\omega,z)dz}dt\}$ 是相对容易计算的。

2.4.2 破产概率的渐近等价式

在前面我们已经约定 $\Psi(u,\infty)=\Psi(u)$ 并约定 $T=\infty$ 时，

$$E\{\int_0^T e^{-\alpha\int_0^t \delta(\omega,z)dz}dt\}=E\{\int_0^\infty e^{-\alpha\int_0^t \delta(\omega,z)dz}dt\}。$$

定理 2.5. 在第一部分引入的经典更新模型中，如果索赔额的分布 F 具有正则变化的尾，即对某一 $\alpha>0, F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$，那么（2.43）成立。

在实际中，资本往往是时间 T 的函数。事实上，保险公司的资本会随着时间而增长，于是一个合理的情况为：$u=u(T)$ 且当 $T\to\infty$ 时，$u(T)\to\infty$。从定理 2.5 中的一致收敛性我们直接可得到下面的推论。

推论. 在定理 2.5 中，如 $u=u(T)$ 且当 $T\to\infty$ 时，$u(T)\to\infty$，那么我们有：当 $T\to\infty$ 时，

$$\Psi(u(T),T)\sim\bar{F}(x(T))\lambda E\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha\int_0^t \delta(\omega,z)dz}dt\right\}。\tag{2.44}$$

在证明定理 2.5 之前，我们介绍二个引理。

引理 2.5. 假设随机变量 $\{X_n;n\geq1\}$ 为一独立同分布非负随机变量序列，有共同的分布函数 $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$ 且 $-\alpha>0$。设随机变量列 $\{C_n;n\geq1\}$ 独立于 $\{X_n;n\geq1\}$。更进一步假定如 $\alpha<1$，存在一个 $\eta(0<\eta<\alpha$ 且 $\alpha+\eta<1)$，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}E|C_n|^{\alpha+\eta}<\infty \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}E|C_n|^{\alpha-\eta}<\infty;\tag{2.45}$$

如 $\alpha\geq1$，存在一个 $\eta>0$，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}(E|C_n|^{\alpha+\eta})^{\frac{1}{\alpha+\eta}}<\infty \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}(E|C_n|^{\alpha-\eta})^{\frac{1}{\alpha+\eta}}<\infty。\tag{2.46}$$

那么，

$$P\left\{\sum_{n=1}^{\infty}C_nX_n>u\right\}\sim\bar{F}(u)\sum_{n=1}^{\infty}E|C_n|^{\alpha}。\tag{2.47}$$

证明：见 Resnick and Willekens(1991)[43]中定理 2.1。

引理 2.6：假设当$t\to\infty$时，分布函数序列$\{F_t;t\ge 0\}$收敛到某一连续函数 F，那么$\{F_t;t\ge 0\}$一致收敛到F，即

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{-\infty\le u\le\infty}|F_t(u)-F(u)|=0。$$

证明：Wang et.al(2006)[45]中定理 1.11 对$\{F_n(x);n=1,2,\cdots\}$证明了本引理，对$\{F_t;t\ge 0\}$同样可证本引理成立。

定理 2.5.对$0<T<\infty$，记$f_n(\omega,T)=e^{-\int_{[0,\tau_n]}\delta(\omega,z)dz}I_{[\tau_n\le T]}$，这儿$I_A$记事件$A$的示性函数；对$T=\infty$，令$f_n(\omega,T)=e^{-\int_{[0,\tau_n]}\delta(\omega,z)dz}$。记$t$时刻的资本$R(t)$的现值为$\tilde{R}(t)$。于是从（2.40）可得：对$t>0$，

$$\tilde{R}(t)=e^{-\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}R(t)=u+C\int_{[0,t]}e^{-\int_{[0,v]}\delta(\omega,z)dz}dz-\sum_{n=1}^{\infty}X_nf_n(\omega,t)。$$

于是，时间T之前的破产概率为

$$\Psi(u,T)=P\{\tilde{R}(t)<0\text{对某一}T\ge t>0\}。$$

下面我们首先证明（2.42）。由$N(t)$为具有参数λ的Possion 过程知：索赔到达间隔时间$\{\tau_n-\tau_{n-1};n\ge 1\}$为一独立同分布的随机变量列，其共同的分布为指数分布，具有参数λ。再注意到（2.39）和对任何$p>0$和$q>0,E^qe^{-\alpha p\delta_0\tau_1}<1$。故对$T\in(0,\infty]$有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}E^qf_n^{\alpha p}(\omega,T)\le\sum_{n=1}^{\infty}E^qf_n^{\alpha p}(\omega,\infty)\le\sum_{n=1}^{\infty}E^qe^{-\alpha p\delta_0\tau_n}=\sum_{n=1}^{\infty}E^qe^{-\alpha p\delta_0\sum_{j=1}^{n}(\tau_j-\tau_{j-1})}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}Ee^{-\alpha p\delta_0(\tau_j-\tau_{j-1})}\right)^q=\sum_{n=1}^{\infty}E^{nq}e^{-\alpha p\delta_0\tau_1}=\frac{E^qe^{-\alpha p\delta_0\tau_1}}{1-E^qe^{-\alpha p\delta_0\tau_1}}<\infty。\tag{2.48}$$

因而如取引理 2.5 中$C_n=f_n(\omega,T)$，则由上式知：对任何固定的$T\in(0,\infty]$，引理 4.5 中（2.45）和（2.46）成立。于是对任何固定的$T\in(0,\infty]$，按照引理 2.5 有：对任意$\varepsilon>0$，存在$u_0>0$满足对所有$u>u_0$，

$$(1-\varepsilon)\bar{F}(u)\sum_{n=1}^{\infty}Ef_n^{\alpha}(\omega,T)\le P\left\{\sum_{n=1}^{\infty}X_nf_n(\omega,T)>u\right\}\le(1+\varepsilon)\bar{F}(u)\sum_{n=1}^{\infty}Ef_n^{\alpha}(\omega,T),\tag{2.49}$$

注意到对任何$T \ge t > 0, \tilde{R}(t) \ge u - \sum_{n=1}^{\infty} X_n f_n(\omega,T)$，于是结合（2.49）可得：对所有$u > u_0$，

$$\Psi(u,T) \le P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n f_n(\omega,T) > u\right) \le (1+\varepsilon)\bar{F}(u)\sum_{n=1}^{\infty} Ef_n^{\alpha}(\omega,T)。\qquad (2.50)$$

另一方面，记

$$\tilde{C}(\omega) = C\int_{[0,\infty)} e^{-\int_{[0,y]}\delta(\omega,z)dz}dy.$$

显然，按照（2.39）可得：对几乎所有样本点有，$0 < \tilde{C}(\omega) \le C\int_{[0,\infty)} e^{-\delta_0 y}dy = C_0 < \infty$。既然$F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$，于是按照正则变化尾的定义知：存在一个$x_1 > x_0 > 0$，满足对所有$x > x_1$，

$$\frac{\bar{F}(u+C_0)}{\bar{F}(u)} \ge 1-\varepsilon. \qquad (2.51)$$

对任何固定的$T \in (0,\infty]$，结合上式和（2.49）可得：对所有$u > u_1$，

$$\begin{aligned}\Psi(u,T) &\ge P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n f_n(\omega,t) > C_0 + u\text{对某一}T \ge t > 0\right)\\ &\ge P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n f_n(\omega,T) > C_0 + u\right)\\ &\ge (1-\varepsilon)\bar{F}(u+C_0)\sum_{n=1}^{\infty} Ef_n^{\alpha}(\omega,T)\\ &\ge (1-\varepsilon)^2\bar{F}(u)\sum_{n=1}^{\infty} Ef_n^{\alpha}(\omega,T)。\end{aligned}\qquad (2.52)$$

因而结合（2.50）和（2.52）有：对任何$T \in (0,\infty]$，

$$\Psi(u,T) \sim \bar{F}(u)\sum_{n=1}^{\infty} Ef_n^{\alpha}(\omega,T)。\qquad (2.53)$$

下面我们计算$\sum_{n=1}^{\infty} Ef_n^{\alpha}(\omega,T)$。因$N(t)$为具有参数$\lambda$的 Poisson 过程，因而$\tau_n$的分布函数为具有参数$(n-1,\lambda)$的$\Gamma$分布，即$\tau_n$具有密度函数为$\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$。因而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}Ef_n^{\alpha}(\omega,T)&=\sum_{n=1}^{\infty}E\{E(f_n^{\alpha}(\omega,T)\mid\omega)\}=E\left\{\sum_{n=1}^{\infty}E(f_n^{\alpha}(\omega,T)\mid\omega)\right\}\\&=E\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}dt\right\}\\&=E\left\{\int_0^T e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-\lambda t}dt\right\}\\&=\lambda E\left\{\int_0^T e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}dt\right\}。\end{aligned}\tag{2.54}$$

将（2.54）带入（2.53）我们可得

$$\Psi(u(T),T)\sim\bar{F}(u(T))\lambda E\left\{\int_0^{\infty}e^{-\alpha\int_0^t\delta(\omega,z)dz}dt\right\}。\tag{2.55}$$

下面我们证明（2.43）。记起初资本为u时，保险公司破产时间为$\tau(u)$。显然，$P\{\tau(u)<\infty\}=\Psi(u)$。对$u\geq 0$和$T>0$，记$P^u(\cdot)=P\{\cdot\mid\tau(u)<\infty\}$。于是从（2.55）我们可得

$$\lim_{u\to\infty}P(u)(\tau(u)\geq T)=\lim_{u\to\infty}\frac{\Psi(u,T)}{\Psi(u)}=\frac{E\left\{\int_0^T e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}dt\right\}}{E\left\{\int_0^{\infty}e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}dt\right\}}。$$

既然对每一个样本点，$\int_0^T e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(w,z)dz}dt$为一关于 T 的单调增加的函数，于是由关于数学期望的单调收敛定理知：$\dfrac{E\left\{\int_0^T e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}dt\right\}}{E\left\{\int_0^{\infty}e^{-\alpha\int_{[0,t]}\delta(\omega,z)dz}dt\right\}}$为一关于 T 的连续分布函数，于是按照引理 2.6 有（2.43）成立。

重尾分布下的破产概率，作为破产论的一个重要分支，越来越引起人们的重视。因为它在突发性事件，如火险，风暴险和洪水险上有着很大的应用价值。本文考虑了随机因素的影响，对衡量保险公司风险的重要指标——有限时间破产概率进行了研究，定理 2.5 的结果为计算破产提供了可行的方法。然而还有很多问题有待解决。比如尾等价式能否在更广泛的厚尾分布族上成立，需要进一步地研究。

第三章　带有投资组合的破产概率和最优投资策略

3.1　引言

第二章实际上考虑的是保险公司把承保盈余用来投资债券，债券的利率可以是确定性的常数也可以是随机的。在这种情况下，分别得到了破产概率的上界和渐近等价式。现在，一个新的问题正在受到越来越多的关注，即保险公司把盈余用来购买投资组合。也就是说，允许保险公司投资风险市场，比如购买股票，股票价格通常用几何布朗运动描述。Frolova et.al(2002) [47]得出了这样的结论：保险公司投资常数比例的盈余到风险资产，同时索赔服从指数分布，根据模型的参数，破产对于任意的初始资本概率或者为 1 或者随着初始资本按照负幂函数衰减。Paulsen & Gjessing(1997) [19]和 Kalashnikov & Norberg(2002) [48]把上述结果推广到索赔额是轻尾分布的情况，同样的研究也可以参考 Paulsen(1998) [49]。对于索赔额是正则变化尾的情形,Gaier&Grandits(2002) [50]进行了分析。

既然保险公司在市场上购买投资组合，那么一个最优化问题就被自然提出，即保险公司的最小破产概率能多小？Browne(1995) [20]首先研究了这个问题，但是假设保险索赔过程 $A(t)$ 为布朗运动，也被称为扩散近似。在这种相对简单的模型下，最优的投资策略为投资风险资产的数量恒为常数，简称常数投资策略。最小破产概率可以由指数方程解出。Hipp & Plum(2000) [21]研究了更加一般的问题，即用复合泊松过程描述索赔过程。风险资产价格过程用几何布朗运动描述。得到了最大的生存概率（survival probability）的 Hamilton-Jacobi-Belman （HJB）方程。这个方程是一个二阶偏微分方程，相对比较难解。Hipp & Plum(2000) [21]给出了一个特别的例子，索赔额服从指数分布，方程可以找到解析解。值得注意的是，在这个例子里，解做为一个指数方程随着初始资本递减，但是递减速度要大于没有投资的经典 Lundberg 指数，也就是调节系数。

Gaier et.al(2003) [22]指出在轻尾的索赔下，保险公司的最小破产概率存在着上界和下界，可以用指数函数表示，该上界要比没有投资的破产概率的 Lundberg 上界小。而且，给出了一个惊人的结果，渐近最优的投资策略是常数投资策略，而且该投资策略可以被精确计算出来。对于索赔额是重尾分布，特别是正则变化尾分布族的时候，Gaier&Grandits(2002) [51]指出，最小破产概率同样是关于初始资本

的正则变化函数。Gaier et.al(2003)[22]的讨论中，总是把无风险利率假设为 0，实际上这与现实不符，这样假设的原因是为了绕开总资产过程非平稳的难题，本文在下一节解决了这样一个问题，推广了 Gaier et.al(2003)[22]的结果。

本章的结构如下，第 2 节，首先介绍投资组合理论的基础知识，在全部资产分别投资于股票市场和无风险债券的情形下，研究了保险公司的最终破产概率和组合投资策略。假设风险投资现值为常数族，利用鞅方法得到了最终破产概率的指数型上界，并且解出了最优组合投资策略；第 3 节考虑一个保险总公司下面有两个子公司，两个子公司分别由不同的承保盈余过程刻画。该模型称为二元保险风险模型，给出了该模型下破产概率的指数型上界。在此基础上，本文讨论了保险公司的投资问题：即两个子公司投资于不同的市场，或者同一市场的两种不同的风险证券，两个子公司如何安排合理的投资策略可以使总公司的破产风险最小；第 4 节针对几何布朗运动模型刻画风险资产的不足，选择指数 Lévy 对风险资产进行建模，得到了渐进最优的投资策略；最后一节在股票价格服从指数 Lévy 过程的假设下，得到了保险公司的最优混合投资策略，该投资策略限制在一个固定的 Value-at-Risk 水平下，可以使投资组合期望收益最大。

3.2 组合投资下破产概率和最优投资策略

3.2.1 投资组合理论简介

大约 40 年来，现代投资组合理论（modern portfolio theory），一直作为最重要的投资组合管理的工具被金融机构广泛应用。用一句话说，现代投资组合理论可以被描述成一系列的可以量化的方法，该方法可以被设计用来帮助投资者找到最优的交易策略，该交易策略限制在给定的投资组合的风险上，同时可以使投资组合的期望回报最高。对该问题和方法的最早研究的是 Markowitz(1959)[52]，相应的工作使得其获得 1990 年的 Nobel 经济学奖。风险资产的风险是非常难以度量的，为了方便起见，他把风险定义为投资组合收益的方差。直到今天，均值-方差投资组合最优化的结果还在银行的风险部门中广泛应用。因为该方法并不深奥，是建立在随机数学的基础知识上。

最普遍的随机模型用来描述金融投资组合的发展的就是经典的 Black-scholes 模型，在这个模型里，投资者有机会投资无风险资产，比如无风险债券，同时可以投资风险资产，比如股票。同时要满足以下假设。

1．股票的价格过程服从几何布朗运动，同时债券的利率为确定性的常数。

2．投资组合是自融资的，即投资者在每一期把上一期的资产用来安排投资，在此过程中不消费同时没有外部资本注入。

3．投资者的投资策略为混合投资策略，即在每一个时刻，投资者持有总资产的常数比例的股票，剩下的为债券。

4．卖空是被禁止的。

显然，风险资产的期望投资收益要高于债券的投资收益，所以投资者必须要在高风险高回报的风险资产和低回报的无风险资产之间选择最优的交易策略。最优化还要根据一些风险厌恶准则。一个经典的风险厌恶准则就是设置一个投资组合方差的上界，比如 Korn(1997) [53]，那么投资者可以找到一个投资策略在该风险约束下最大化投资组合的期望收益。另外一种常用的准则就是在当今风险管理中盛行的下方风险度量--Value-at-Risk，参考 Fishburn(1991) [54]。本章的第 5 节将对这种模型展开讨论。

3.2.2 带有投资组合的破产模型

经典的风险模型不考虑保险公司的风险投资，实际上国外的保险基金往往大规模地在市场上进行风险投资，获得风险收益。现代保险公司的经营业务一般包含两个方面，一方面是保险业务，其是拓宽资金来源的重要渠道；另一方面是投资业务，是保险公司的主要盈利途径。目前我国保险公司投资渠道主要有银行存款，债券以及证券投资基金。如何加强保险公司的风险控制能力，成为提高保险公司竞争力的关键所在。2001 年之后，中国加入 WTO，将会有更多的外国的保险公司进军中国市场，从而保险市场将逐步和国际接轨，中国的保险公司将与国际保险行业在同一环境中竞争与发展。2004 年，保监会与证监会联合发布《保险机构投资者股票投资管理暂行办法》，意味着保险资金可以合法地直接投资股市。自 2005 以来，保险公司入市的热情不断上升，保监会不断提高入市资金的比例。而最近中小保险公司入市也提到了日程上。于是自然提出了这样的问题：如果保险公司把其盈余的一部分投资到风险资产，余下的部分投资到无风险债券，应该选择怎样的投资策略，在这种投资策略下破产的风险为多少？这一节的研究力图回答以上问题。

首先对保险公司的承保盈余过程用经典方法进行建模：考虑索赔到达个数为一个强度为 λ 的齐次 Poisson 过程，记为 $N=(N(t))_{t\geq 0}$，则保险公司的承保盈余过

程为 $R(t,u)$ 可表示成：

$$R(t,u)=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n, \tag{3.1}$$

其中，$u\geq 0$ 为保险公司的初始资本金，$c\in\mathbb{R}$ 是单位时间保费收入，第 n 次的索赔额 $X_n,n=1,2,\ldots$ 构成一非负独立同分布随机变量序列且与非负随机变量 X 同分布，其分布函数为 $F_X(x)$，而第 $n-1$ 次和第 n 次索赔时间之间的间隔为 $\tau_n,n=1,2,\ldots$,构成另一相互独立的非负随机变量序列且具有相同的指数分布函数，其密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t},t\geq 0$。记 $T_n=\sum_{k=1}^{n}\tau_k$ 为第 n 次索赔到达的时间，规定 $T_0=0$。进一步假设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 与 N 独立。那么上述模型（3.1）就是经典的 Sparre Andersen 模型。

下面对经典的模型进行推广。假设保险公司允许投资股票或者是市场指数，$S(t)$ 表示股票的价格过程，用几何布朗运动描述：

$$dS(t)=S(t)(adt+bdW(t)), \tag{3.2}$$

常数 a 为漂移率，b 为扩散系数。$W(t)$ 为标准布朗运动，与盈余过程 $R(t,u)$ 独立。过程 $R(t,x)$ 和 $S(t)$ 生成的 $\sigma-$代数流记为 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$。

如果在时刻 t，保险公司拥有资产 $U_\delta(t)\equiv U_\delta(t,x,K)$，投资 $K(t)$ 份额的资金到股票市场，余下的 $U_\delta(t)-K(t)$ 投资到无风险债券，其利率为常数 $\delta>0$。当 $\delta>0$ 时，Gaier et.al(2003) [22]没有详细的讨论，只是给出了一个关于盈余过程的微分方程式，即保险公司的盈余过程 $U_\delta(t)$ 满足的随机微分方程为：

$$dU_\delta(t)=(ce^{\delta t}+(\delta(U_\delta(t)-K(t))+aK(t)))dt+bK(t)dW(t)-e^{\delta t}X_{N(t)}dN(t)。\tag{3.3}$$

如果定义盈余的折现值(按固定利率 δ 折现)过程为

$$V_\delta(t)\equiv V_\delta(t,u,K)\triangleq e^{-\delta t}U_\delta(t,u,K),$$

则有

$$dV_\delta(t)=e^{-\delta t}((ce^{\delta t}+(a-\delta)K(t))dt+bK(t)dW(t)-e^{\delta t}X_{N(t)}dN(t))。\tag{3.4}$$

事实上，（3.3）和（3.4）是不合理的。既然 c 为瞬时的保费收入，并不是初始时刻收的保费，于是在 $[t,t+dt]$ 时间段内，线性收益的瞬间增量应该为 cdt，而非 $ce^{\delta t}dt$。同理（3.3）中的 $e^{\delta t}X_{N(t)}dN(t)$ 应该为 $X_{N(t)}dN(t)$。另一方面，如果（3.4）成立，两边积分可得：

$$V_\delta(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i+(a-\delta)\int_0^t K(s)e^{-\delta s}ds+b\int_0^t K(s)e^{-\delta s}dW(s)。$$

如果保险公司不在风险市场上投资，也就是说把所有的盈余购买无风险债券，

即令上式中$K(t)\equiv 0$，得到的式子为$V_\delta(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$，与利率无关，这显然与实际情况不符， 也与以往关于无风险投资的模型不符合，如文献 Cai & Dickson(2003)[42]的模型。综上，合理的模型应该是：

$$dU_\delta(t)=(c+(\delta(U_\delta(t)-K(t))+aK(t)))dt+bK(t)dW(t)-X_{N(t)}dN(t) \quad \text{。} \tag{3.3'}$$

而折现值过程为$V_\delta(t)\equiv V_\delta(t,u,K)\triangleq e^{-\delta t}U_\delta(t,u,K)$。于是我们有：

$$dV_\delta(t)=e^{-\delta t}((c+(a-\delta)K(t))dt+bK(t)dW(t)-X_{N(t)}dN(t)) \text{。} \tag{3.4'}$$

由$V_\delta(0)=u$，对（3.4'）积分得：

$$V_\delta(t)=u+c\int_0^t e^{-\delta s}ds-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n}+(a-\delta)\int_0^t K(s)e^{-\delta s}ds+b\int_0^t K(s)e^{-\delta s}dW(s) \text{。} \tag{3.5}$$

为了接下来叙述的方便，定义$A(t)\triangleq\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n}$。令（3.5）式中$K(t)\equiv 0$，就与 Cai&Dickson(2003)[42]的模型一致。事实上，模型（3.5）是各种经典模型的推广，具体的阐述在后文给出。

$\mathbb{K}$记为可行策略的集合，定义为：

$$\mathbb{K}\triangleq\{K=(K(t))_{t\ge 0}:K \text{ 可测适应于 } \mathcal{F},\ P(\int_0^t K^2(s)e^{-2\delta s}ds<\infty\ ),\ t\in[0,\infty)\}, \tag{3.6}$$

实际上$K\in\mathbb{K}$是随机积分$\int_0^t K_s e^{-\delta s}dW(s)$存在的充分必要条件。

Browne(1995)[20]以及 Gaier et.al(2003)[22]在无利率的情况下，针对不同的盈余过程都得到了最优投资策略为常数投资策略的结果。事实上，风险投资带来较好的收益同时也带来较大的投资风险，而无风险投资带来稳定的但较小的收益。于是风险投资和无风险投资的组合投资策略才可能成为最佳投资策略。本节考虑了这样的组合问题。

以下都考虑风险投资折现值为常数的情形，即$K(t)e^{-\delta t}\equiv k$，$k$为常数，显然$K\in\mathbb{K}$。

由于布朗运动$W(t)$具有平稳独立增量。由 Brekelmans& Waegenaere(1991)[12]中的引理 4 可知过程$A(t)$具有独立增量，而且$A(t)-A(s)$与$e^{-\delta s}[A(t-s)]$有相同的分布。因此，$V_\delta(t)$满足以下的式子，

$$\begin{aligned}V_\delta(t)&=V_\delta(s)+c\int_s^t e^{-\delta u}du-[A(t)-A(s)]+(a-\delta)k(t-s)+bk[W(t)-W(s)]\\&\overset{d}{=}V_\delta(s)+c\int_s^t e^{-\delta u}du-e^{-\delta s}[A(t-s)]+(a-\delta)k(t-s)+bkW(t-s),\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，$\overset{d}{=}$表示依分布相等。与(3.7)相似的表示方法出现在 Sundt&Teugels(1995)

[16]以及 Cai&Dickson(2003) [42]的无风险投资模型中。下面给出保险公司破产概率的定义：

$$\Psi(\mathrm{u,K}) = \mathrm{P}\{\mathrm{V}_\delta(\mathrm{t,u,K}) < 0,\ 对于某个\ \mathrm{t} \ge 0\}, \tag{3.8}$$

定义破产时间为$T(u,K) \triangleq \inf\{t: V_\delta(t,u,K) < 0\}$，以后简记为$T$。破产概率还可以表示为：$\Psi(u,K) = P(T < \infty)$。接下来定义最小破产概率为：

$$\Psi^*(u) = \inf_{K \in \mathbf{K}} \Psi(u,K)。$$

假设索赔额的矩母函数存在，记为$M_X(r) = E[e^{rX}]$。定义函数$h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，$h(0) = 0,\ h(r) = M_X(r) - 1$，满足经典的假设，即存在一个$r_\infty \in (0,\infty]$，当$r < r_\infty$时，有$M_X(r) < \infty$, 以及$\lim_{r \to r_\infty} M_X(r) = \infty$。

3.2.3 带有投资组合的破产概率的上界

如果令模型（3.5）中的$\delta = 0$，同时$K(t) \equiv 0$，就得到了经典的 Sparre Andersen 模型，根据 Asmusse(2000)[36]，在这里一般假设要满足安全负荷条件，即$c > \lambda E[X]$，否则破产概率必然为 1。在这种假设下破产概率的 Lundberg 上界为e^{-ru}，其中r是方程$\lambda h(r) = cr$的正数解，被称为破产概率的调节系数。如果令模型（3.5）中$K(t) \equiv 0$，则（3.5）式变成 Cai&Dickson(2003)[42]的模型；如果模型（3.5）中$\delta = 0$，就得到了 Gaier et.al(2003) [22]中的模型，在这种情况下最小破产概率满足$\Psi^*(u) \le Ce^{-r^* u}$，其中$0 < r^* < r_\infty$是下面方程的唯一正数解：

$$\lambda h(r) = cr + \frac{a^2}{2b^2}。 \tag{3.9}$$

本文的模型与 Gaier et.al(2003) [22]中的模型不同，对于任意的$r > 0$，过程$\exp\{-rV_\delta(t)\}$不再是鞅过程（参见 Brekelmans & Waegenaere(2001) [55]）。但是，我们可以找到一个常数$r^* > 0$，使得$\exp\{-r^* V_\delta(t)\}$为一上鞅。该方法与第二章中第三节中的方法类似，因此应用经典的破产理论中的鞅证明方法，我们可以得到最小破产概率的指数型上界。

首先给出两条重要引理：

引理 3.1 对于任意的$r > 0$，随机过程$A(t) \equiv \sum_{n=1}^{N(t)} X_n e^{-\delta T_n}$的矩母函数为

$$Ee^{rA(t)} = \exp(\lambda \int_0^t h(re^{-\delta u})du)。 \tag{3.10}$$

证：因为在给定$N(t) = n$的条件下，$(T_1,\ldots,T_n)$的联合分布函数与n个取值于

$(0,t]$上的均匀分布的次序统计量同分布，又因为$\{X_n\}_{n\geq 1}$是独立同分布的随机序列，我们可以得到：

$$E[\exp(r\sum_{n=1}^{n}X_n e^{-\delta T_n})|N(t)=n]=E[\exp(r\sum_{n=1}^{n}X_n e^{-\delta U_n})], \tag{3.11}$$

其中$U_1,U_2,...,U_n$为n个独立同分布且服从均匀分布的随机变量。有了（3.11），我们可以计算$Ee^{rA(t)}$如下：

$$E[\exp(r\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n})]=\sum_{n=1}^{\infty}E[\exp(r\sum_{n=1}^{N(t)}X_n e^{-\delta T_n})|N(t)=n]P(N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}[\frac{1}{t}\int_0^t E[e^{rXe^{-\delta u}}]du]^n P(N(t)=n)=\sum_{n=1}^{n}[\frac{1}{t}\int_0^t M_X(re^{-\delta u})du]^n P(N(t)=n)$$

$$=\exp(\lambda t[\frac{1}{t}\int_0^t M_X(re^{-\delta u})du-1])=\exp(\lambda\int_0^t h(re^{-\delta u})du)\text{。}$$

这样，引理得证。

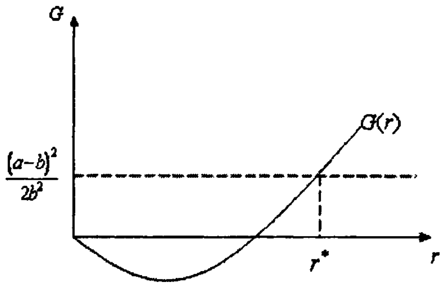

图 3.1 函数$G(r)$的图像

引理 3.2 假设安全负荷条件满足，即$c>\lambda E[X]$，那么存在唯一的$0<r^*<r_\infty$满足方程；

$$G(r)\triangleq\lambda h(r)-cr=\frac{(a-\delta)^2}{2b^2}\text{。} \tag{3.12}$$

证明：首先考虑函数$G(r)$的性质：$G'(0)=\lambda E(X)-c<0$，容易验证$G(r)$为凸函数，因为$G''(r)\geq 0$。由图 3.1 知，方程（3.12）存在唯一正解。证明完毕。

有了以上两个引理，我们可以得到如下的引理 3.3。

引理 3.3 r^*为方程（3.12）的唯一解，且给定风险投资份额$K^*(t)$，满足$K^*(t)e^{-\delta t}=k\equiv\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}$。同时安全负荷条件满足，即$c>\lambda E[X]$，则过程

$\exp\{-r^*V_\delta(t,u,K^*(t))\}$ 为关于 σ -代数流 $\mathcal{F}$ 的上鞅。

证明：首先对于任意的 $0\le s\le t$，由（3.7）式得到

$$E[\exp\{-r^*V_\delta(t,u,K^*(t))\}|\mathcal{F}_s]$$
$$=e^{-r^*V_\delta(s,u,K^*(s))}E[\exp\{r^*e^{-\delta s}[A(t-s)]$$
$$-r^*c\int_s^t e^{-\delta v}dv-(a-\delta)kr^*(t-s)-bkr^*W(t-s)\}|\mathcal{F}_s]$$
$$=e^{-r^*V_\delta(s,u,K^*(s))}E[\exp\{r^*e^{-\delta s}[A(t-s)]$$
$$-r^*c\int_s^t e^{-\delta v}dv-(a-\delta)kr^*(t-s)-bkr^*W(t-s)\}]\text{。}$$

由引理 3.1，我们可得

$E\exp\{r^*e^{-\delta s}[A(t-s)]\}=\exp(\lambda\int_0^{t-s}h(r^*e^{-\delta(u+s)})du)=\exp(\lambda\int_s^t h(r^*e^{-\delta u})du)$。

易知，$E\exp\{-bkr^*W(t-s)\}=\exp(\frac{1}{2}b^2k^2r^{*2}(t-s))$。又知道，$k=\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}$，因此我们可以计算出

$$E[\exp\{r^*e^{-\delta s}[S(t-s)]-r^*c\int_s^t e^{-\delta u}du-(a-\delta)kr^*(t-s)-bkr^*W(t-s)\}]$$
$$=\exp\{\int_s^t[\lambda h(r^*e^{-\delta u})-cr^*e^{-\delta u}]du-(a-\delta)kr^*(t-s)+\frac{1}{2}b^2k^2r^{*2}(t-s)\}$$
$$=\exp\{\int_s^t G(r^*e^{-\delta u})du-\frac{(a-\delta)^2}{2b^2}(t-s)\}\text{。}$$

由图 3.1 可以看出，$r^*e^{-\delta u}\le r^*$，可得 $G(r^*e^{-\delta u})\le G(r^*)$，于是由引理 3.2 和方程（3.12）得

$$\exp\{\int_s^t G(r^*e^{-\delta u})du-\frac{(a-\delta)^2}{2b^2}(t-s)\}\le\exp\{[G(r^*)-\frac{(a-\delta)^2}{2b^2}](t-s)\}=1\text{。}$$

综上可得

$$E[\exp\{-r^*V_\delta(t,u,K^*(t))\}|\mathcal{F}_s]\le\exp\{-r^*V_\delta(s,u,K^*(s))\}\text{。}$$

因此过程 $\exp\{-r^*V_\delta(t,u,K^*(t))\}$ 为关于 σ -代数流 $\mathcal{F}$ 的上鞅。

注 3.1 从图 3.1 看出，方程(12)式右边的常数越大，方程的解随之也越大。$k=\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}$ 实际上就是使二次型 $-\dfrac{1}{2}b^2k^2r^{*2}+(a-\delta)kr^*$ 达到最大的点。

事实上，引理 3.3 中给出的 r^* 就是破产概率的调节系数。下面给出本节的主要定理。

定理 3.1 设引理 3.3 的条件满足，则最小破产概率 $\Psi^*(u)\le e^{-r^*u}$，其中 $0<r^*<r_\infty$ 是方程（3.12）的唯一的解。

证明：为了证明的方便，我们定义 $M(t,u,K^*,r^*)\triangleq \exp\{-r^*V_\delta(t,u,K^*(t))\}$。根据引理 3.2, $M(t,u,K^*,r^*)$ 为关于 σ-代数流 $\mathcal{F}$ 的上鞅，其关于破产时间 T 的停止过程 $M(t\wedge T,u,K^*,r^*)$ 同样是上鞅。因此，对于 $t\ge 0$，由于 $M(t,u,K^*,r^*)$ 总是非负，于是我们有

$$
\begin{aligned}
&e^{-r^*u}=M(0,u,K^*,r^*)\ge E[M(t\wedge T,u,K^*,r^*)]\\
&=E[M(t\wedge T,u,K^*,r^*)I_{\{T<t\}}]+E[M(t\wedge T,u,K^*,r^*)I_{\{T\ge t\}}]\\
&=E[M(T,u,K^*,r^*)I_{\{T<t\}}]+E[M(t,u,K^*,r^*)I_{\{T\ge t\}}]\\
&\ge E[M(T,u,K^*,r^*)I_{\{T<t\}}],
\end{aligned}
$$

根据单调收敛定理有， $\lim_{t\to\infty}E[M(T,u,K^*,r^*)I_{\{T<t\}}]=E[M(T,u,K^*,r^*)I_{\{T<\infty\}}]$。

因此，由破产时刻盈余总为负值，也就是 $M(T,x,K^*,r^*)\ge 1$，有 $e^{-r^*u}\ge E[M(T,u,K^*,r^*)|T<\infty]P[T<\infty]\ge P[T<\infty]$。

综上可得，对于采取投资策略 $K^*(t)=\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}e^{\delta t}$ 时，其破产概率的指数型上界为 e^{-r^*u}，当然也有最小破产概率满足 $\Psi^*(u)\le e^{-r^*u}$。定理得证。

注 3.2 如果定理 3.1 中取 $\delta=0$，那么投资策略就是 $K^*(t)=\dfrac{a}{b^2r^*}$，r^* 为方程(3.9)的解。这样就和 Gaier et.al(2003)[22]中的结果一致，从而 推广了 Gaier et.al(2003)[22]的结果。

注 3.3 由于投资到风险资产部分的折现值为 $k=\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}$，如果 $a>\delta$，即股票漂移率高于固定利率，投资为正，而且 a 越大，风险投资越多。如果 $a<\delta$，股票漂移率低于固定利率，保险公司会选择卖空。如果 $a=\delta$，可以不投资。

下面给出一个具体的算例，比较一下本文得出的调节系数 r^* 与 Cai&Dickson(2003)[42]的无风险投资模型得出的调节系数(记为 $\hat{r}$)。

例 我们令 $c=110$，$\lambda=100$，$\lambda=b=1$，$a=0.6$。索赔额 X 分布为指数分布，分布函数为 $F_X(x)=1-e^{-\beta x},x\ge 0$，这里我们取 $\beta=1$，当固定利率 δ 取 0.05 时，下面的表 3.1 给出了具体的数值结果。

表 3.1 上界的比较

初始值 u	上界 1	上界 2
10	0.3574	0.4028

20	0.1227	0.1623
30	0.0456	0.0654
40	0.0163	0.0263
50	0.0085	0.0106

表中的上界 1 是本文的结果计算出来的上界，上界 2 是 Cai&Dickson(2003)[42]的无风险投资模型得出的上界。从上表可以看出，本文可以得到比 Cai&Dickson(2003)[42]更大的调节系数。

本节讨论了无风险利率不为零的情况下更加一般的模型，即保险公司投资一部分资金到股票市场，而余下的资金购买无风险债券，得到了一个风险投资折现值为固定常数$k=\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}$的投资策略，其中$r^*$为调节系数，可以通过方程(3.12)唯一地解出，并在这种策略下，得到了破产概率的调节系数和 Lundberg 上界。由注 3.1 知：$k=\dfrac{a-\delta}{b^2r^*}$为所有风险投资折现值为固定常数的策略中，使得破产概率上界最小的策略。在下一节，继续推广本节的结果到二维的情形。

3.3 二元风险模型下的保险公司最优投资策略

3.3.1 二元风险模型简介

在该节延续上一节的问题讨论更加一般的情况，即考虑一个保险总公司下面有两个子公司，两个子公司分别由不同的承保盈余过程刻画。该模型称为二元保险风险模型，最早由 Ambagaspitiya(1998)[56]提出。Li et.al(2007)[57]考虑了带有随机扰动项的二元保险风险模型，给出了该模型下破产概率的指数型上界。在此基础上，本文讨论了保险公司的投资决策问题：即两个子公司投资于不同的市场，或者同一市场的两种不同的风险证券。两个子公司如何安排合理的投资策略可以使总公司的破产风险最小。下一部分给出本文的理论模型和假设。

首先给出不带有投资的二元保险风险模型，即二元承保盈余过程$\vec{R}(t)=(R_1(t),R_2(t))^T$如下：

$$\begin{pmatrix}R_1(t)\\R_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}-\sum_{i=1}^{N(t)}\begin{pmatrix}X_{1i}\\X_{2i}\end{pmatrix},\qquad t\geq 0。\tag{3.13}$$

其中，$\vec{X}_i(t)=(X_{1i},X_{2i})^T$，$i=1,2,....,$表示索赔向量列。$X_{1i}$表示第一个子公司第$i$次索赔额的大小，$X_{2i}$表示第二个子公司第$i$次索赔额的大小。两个子公司的索

赔到达过程服从同一个参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$，该假设描述了一次灾难事件的发生导致大于一种索赔要求的情形。下面给出一个典型的例子：一次交通意外可能导致车辆损坏之外（机动车保险）还有可能导致人身伤害（人身伤害保险）。同样的现象还出现在自然灾害保险之中，详细解释参考 Chan et.al(2003)[58]。$\vec{u}=(u_1,u_2)^T$表示初始资本金向量。$\vec{c}=(c_1,c_2)^T$表示瞬时保费收入向量。显然，向量$\vec{X}_i(t)$，$\vec{u}$，$\vec{c}$都是非负的。模型（3.13）可以简化为：

$$\vec{R}(t)=\vec{u}+t\vec{c}-\sum_{i=1}^{N(t)}\vec{X}_i,\qquad t\geq 0。\tag{3.14}$$

接下来，我们采用 Gaier et.al(2003)[22]在一元模型中的处理方法把投资问题嵌入到模型（3.13）中。考虑两个风险资产价格过程$\{S_1(t),t\geq 0\}$和$\{S_1(t),t\geq 0\}$，其构成了风险价格过程向量$\vec{S}(t)=(S_1(t),S_2(t))^T$。服从二维几何布朗运动，即

$$d\begin{pmatrix}S_1(t)\\S_2(t)\end{pmatrix}=dt\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma_1 dW_1(t)\\\sigma_2 dW_2(t)\end{pmatrix},\qquad t\geq 0。\tag{3.15}$$

定义$\vec{W}(t)=(W_2(t),W_2(t))$。$\vec{W}(t)$服从二维标准布朗运动，其相关系数为$\rho\in[-1,1]$。如果在时刻$t$，第$j$家子公司拥有资产$U_j(t)\equiv U(t,u_j,K_j)$，$j=1,2$。投资$K_j(t)$份额的资金购买风险资产$S_j$，余下的$U_j(t)-K_j(t)$投资到利率为$\delta$的无风险债券，本文假设$\delta=0$（无风险利率等于通货膨胀率）。这样，我们有：

$$\begin{aligned}&U_j(t,u_j,K_j)=R_j(t)+\int_0^t\frac{K_j(s)}{S_j(s)}dS_j(s)\\&=u_j+c_jt-\sum_{i=1}^{N(t)}X_{ji}+\mu_j\int_0^t K_j(s)dt+\sigma_j\int_0^t K_j(s)dW_j(t),j=1,2。\end{aligned}\tag{3.15}$$

模型（3.15）是一个一元模型，Gaier et.al(2003)[22]针对这种模型得到了这样一个结果：即常数投资策略可以使保险公司的破产概率的上界最小。本文考虑两个保险子公司都采用常数投资策略，即$\vec{K}(t)=(K_1(t),K_2(t))\equiv(k_1,k_2)$，$k_1,k_2$为常数。这样我们得到二元总资产模型：

$$\vec{U}(t)\equiv\vec{U}(t,\vec{u},\vec{K})=\begin{pmatrix}U_1(t)\\U_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c_1+\mu_1k_1\\c_2+\mu_2k_2\end{pmatrix}-\sum_{i=1}^{N(t)}\begin{pmatrix}X_{1i}\\X_{2i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma_1k_1W_1(t)\\\sigma_2k_2W_2(t)\end{pmatrix}。\tag{3.16}$$

我们给出如下的模型假设：

- $\{\vec{X}_i,i=1,2...\}$是独立随机向量列，且与$\vec{X}_1$同分布。
- $\{\vec{X}_i,i=1,2...\}$，$\{N(t),t\geq 0\}$与$\{\vec{S}(t),t\geq 0\}$之间相互独立。
- $\vec{X}_1$的联合概率分布函数为$F(x_1,x_2)$，边际分布函数为$F_1(x_1)$，$F_2(x_1)$。

- 假设$\mu_1 k_1 \geq 0$，$\mu_2 k_2 \geq 0$。该假设是一个合理的假设，意思是股票漂移率为正，投资为正，漂移率为负，策略为卖空。

下面给出两个向量比较大小的定义：对于两个向量$\vec{x}=(x_1,x_2)^T$和$\vec{y}=(y_1,y_2)^T$，$\vec{x}\leq\vec{y}$当且仅当$x_1\leq y_1$，$x_2\leq y_2$。有了两个向量比较之后，我们可以定义破产时间和破产概率如下：

$$\tau_{\max}=\inf\{t>0:\vec{U}(t)<\vec{0}\}=\inf\{t>0:\max\{U_1(t),U_2(t)\}<0\}。\tag{3.17}$$

$\tau_{\max}$为首次两个子公司的总资产都为负的事件，在一个固定时刻T之前破产概率定义为：

$$\psi(\vec{u},T)=P(\tau_{\max}\leq T)\quad。\tag{3.18}$$

最终破产概率为$\psi(\vec{u})=P(\tau_{\max}<\infty)$。

注 3.4.除了$\tau_{\max}$之外，还有一些重要的破产时间。如

$$\tau_{\min}=\inf\{t>0:\min\{R_1(t),R_2(t)\}<0\};$$

和

$$\tau_{sum}=\inf\{t>0:R_1(t)+R_2(t)<0\}。$$

对于以上两种破产时间，同样可以定义二元模型下的破产概率。但是和$\tau_{\min}$相比，$\tau_{\max}$是更加危险的破产时间。实际上，在时刻$\tau_{\min}$，保险总公司不一定出现赤字，因为只是一个子公司破产。而如果用τ_{sum}定义破产概率，其研究和一维的情况没有区别。

注 3.5.由模型假定知，X_{1i}和X_{2i}、$W_1(t)$和$W_1(t)$不一定独立，还有（3.18）式定义出的破产概率形式，所以本文并不是一维模型的平凡推广。而多于二元的模型只是本文模型的平凡推广。

3.3.2 最优投资策略

在这一部分，本文针对常数投资策略，首先给出破产概率的指数型上界，然后求出最优的投资比例$\vec{K}^*=(k_2^*,k_2^*)$，$\vec{K}^*$可以使得破产概率的指数型上界最小。

令$\vec{a}=(a_1,a_2)=(EX_{11},EX_{21})$为$\vec{X}_1$的均值向量，且满足安全负荷条件（safety loading condition）$\vec{c}>\lambda\vec{a}$。为了后面的叙述方面，我们给出如下定义：

- $m(s_1,s_2)=E[\exp\{s_1X_{11}+s_2X_{12}\}]$;
- $$f(s_1,s_2)=\lambda[m(s_1,s_2)-1]-(c_1+\mu_1k_1)s_1-(c_2+\mu_2k_2)s_2 \\ +\frac{1}{2}[\sigma_1^2k_1^2s_1^2+2\rho\sigma_1k_1k_2\sigma_2s_1s_2+\sigma_2^2k_2^2s_2^2];$$

- $s_1^0 = \sup\{s_1 : m(s_1,0) < \infty\}$，$s_2^0 = \sup\{s_2 : m(0,s_2) < \infty\}$；
- $G^0 = \{(s_1,s_2): s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, m(s_1,s_2) < \infty\} \setminus (0,0)$。

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ 表示由总资产过程 $\{\vec{U}(t), t \ge 0\}$ 生成的滤波流。在给出主要结果之前，首先给出几个引理。

引理 3.4. 令 $s_1^0 > 0, s_2^0 > 0$，假设 $\sup_{(s_1^0,s_2^0)\in G^0} f(s_1,s_2) > 0$。那么以下结论成立。

(a) 方程 $f(s_1,s_2)=0$ 在 G^0 上有解；

(b) 给定 $l \ge 0$，方程 $f(s_1,ls_1)=0$ 存在唯一解。如果 $s_1 = v > 0$ 是方程 $f(s_1,ls_1)=0$ 的解，那么当 $s_1 > v$ 时，$f(s_1,ls_1) > 0$；当 $0 < s_1 < v$ 时，$f(s_1,ls_1) < 0$。

证明：(a)给定 $l \ge 0$，令 $s_2 = ls_1$。有

$$\begin{aligned}\frac{df(s_1,ls_1)}{ds_1} &= \lambda E[(s_1X_{11}+ls_1X_{12})\exp\{s_1X_{11}+ls_1X_{12}\}]-(c_1+\mu_1k_1)\\ &-(c_2+\mu_2k_2)l+\sigma_1^2k_1^2s_1+2l\rho k_1k_2\sigma_1\sigma_2s_1+l^2\sigma_2^2k_2^2s_1。\end{aligned}$$

因此

$$\left.\frac{df(s_1,ls_1)}{ds_1}\right|_{s_1=0} = -(c_1+k_1\mu_1-\lambda a_1)-l(c_1+k_2\mu_2-\lambda a_2) < 0 \quad。 \tag{3.19}$$

(3.19)中的不等式用到了安全负荷条件。(3.19)式说明 $f(s_1,ls_1) < f(0,0) = 0$，当 s_1 处于 $s_1 = 0$ 的右边邻域。根据 l 的任意性以及条件 $\sup_{(s_1^0,s_2^0)\in G^0} f(s_1,s_2) > 0$，(a)成立。

(b)对于每一个 $s_1 > 0, l \ge 0$, 有

$$\frac{d^2f(s_1,ls_1)}{ds_1^2} = \lambda E[(X_1+lX_2)^2]+[k_1\sigma_1-lk_2\sigma_2]^2 > 0。 \tag{3.20}$$

(3.20) 式说明 $f(s_1,ls_1)$ 是一个严格凸函数，又根据(a)式，显然有 (b)成立。

接下来在总资产过程 $\{\vec{U}(t), t \ge 0\}$ 的基础上构造一个鞅过程。这和一维的情况类似，该鞅过程是对破产概率建立指数型上界的核心工具。

引理 3.5. 定义过程 $M(\vec{U}(t)) \triangleq \exp\{-s_1U_1(t)-s_2U_2(t)-f(s_1,s_2)\}, t \ge 0$。则对于 $(s_1,s_2)\in G^0$，$M(\vec{U}(t))$ 是 $\mathcal{F}$-鞅过程。

证明：因为 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是一个时齐的 Poisson 过程，布朗运动具有平稳独立增量性，对于任意的 t，$h \ge 0$，有

$$
\begin{aligned}
&E[\exp\{-s_1(U_1(t+h)-U_1(t))-s_2(U_2(t+h)-U_2(t))\}]\\
&=\exp\{-s_1(c_1+k_1\mu_1)h-s_2(c_2+k_2\mu_2)h\}\times\exp\{\lambda m(s_1,s_2)h-\lambda h\}\\
&\times\exp\{\frac{1}{2}[\sigma_1^2k_1^2s_1^2+2\rho\sigma_1k_1k_2\sigma_2s_1s_2+\sigma_2^2k_2^2s_2^2]h\}\\
&=\exp\{f(s_1,s_2)h\}。
\end{aligned}
$$

由上式可以继续计算：

$$
\begin{aligned}
&E[M(\vec{U}(t+h))\mid\mathcal{F}_t]\\
&=E[\exp\{-s_1(U_1(t+h))-s_2(U_2(t+h))-f(s_1,s_2)(t+h)\}\mid\mathcal{F}_t]\\
&=\exp\{-s_1U_1(t)-s_2U_2(t)-f(s_1,s_2)t\}\\
&=M(\vec{U}(t))。
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

（3.21）式成立说明引理 3.5 的结论得证。

有了上面两个引理之后，如果两个子公司分别以常数策略投资股票市场，下面的定理给出破产概率的指数型上界。

定理 3.2. 如果令 $s_1^0>0, s_2^0>0$，假设 $\sup_{(s_1^0,s_2^0)\in G^0}f(s_1,s_2)>0$ 。那么

$$
\psi(\vec{u})\le\inf_{(s_1,s_2)\in\Delta^0}\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}。
\tag{3.22}
$$

其中 $\Delta^0=\{(s_1,s_2)\in G^0\mid f(s_1,s_2)=0\}$ 。

证明:根据 Shreve(1997) [59]，可以构造一个新的滤波流 $\mathcal{F}'$ ，使得 $\tau_{\max}$ 和 $\{M(\vec{U}(t)),t\ge0\}$ 分别是关于 $\mathcal{F}'$ 的停时和鞅过程。根据引理 3.5，有

$$
\begin{aligned}
&\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}=E[M(\vec{U}(0))]=E[M(\vec{U}(t))]\\
&\ge E[M(\vec{U}(t))I_{\{\tau_{\max}\le t\}}]\\
&=E[E[M(\vec{U}(t))\mid\mathcal{F}'_{\tau_{\max}}]I_{\{\tau_{\max}\le t\}}]\\
&=E[M(\vec{U}(T_{\max}))\mid\tau_{\max}\le t]P(\tau_{\max}\le t)。
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

因为对于任意的 $(s_1,s_2)\in G^0$， $\exp\{s_1U_1(\tau_{\max})+s_2U_2(\tau_{\max})\}\le1$ 。（3.23）可以写成

$$
\begin{aligned}
&P(\tau_{\max}\le t)\\
&\le\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}E[\exp\{s_1U_1(\tau_{\max})+s_2U_2(\tau_{\max})+f(s_1,s_1)\tau_{\max}\}\mid\tau_{\max}\le t]\\
&\le\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}E[\exp\{f(s_1,s_1)\tau_{\max}\}\mid\tau_{\max}\le t]\\
&\le\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}\sup_{0\le h\le t}\exp\{f(s_1,s_1)h\}。
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

定义集合 $\Delta^-\triangleq\{(s_1,s_2)\in G^0\mid f(s_1,s_2)<0\}$ 和 $\Delta^+\triangleq\{(s_1,s_2)\in G^0\mid f(s_1,s_2)>0\}$ 。如果 $(s_1,s_2)\in\Delta^+$，（3.24）式中令 $t\to\infty$，左边趋近于 ∞，这对于破产概率的上界是无

意义的。下面只需要考虑$(s_1,s_2)\in\Delta^-\cup\Delta^0$，这样，有

$$\begin{aligned}P(\tau_{\max}\le t)&\le\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}E[\exp\{s_1U_1(\tau_{\max})+s_2U_2(\tau_{\max})+f(s_1,s_1)\tau_{\max}\}\mid\tau_{\max}\le t]\\&\le\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}E[\exp\{f(s_1,s_2)\tau_{\max}\}\mid\tau_{\max}\le t]\\&\le\inf_{(s_1,s_2)\in\Delta^-\cup\Delta^0}\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}。\end{aligned}$$

（3.25）

根据引理 3.4(a)，Δ^0是非空集合。又根据引理 3.4(b)，（3.25）右边上界的最小值在Δ^0达到。所以

$$P(\tau_{\max}\le t)\le\inf_{(s_1,s_2)\in\Delta^0}\exp\{-s_1u_1-s_2u_2\}。$$

最后令$t\to\infty$，可得（3.21）成立。定理 3.2 得证。

定理 3.2 给出了，采取常数投资策略时破产概率的指数型上界，以下考虑怎样得到最优的常数投资策略，即k_1^*，k_2^*究竟为多少时，破产概率的上界最小。该问题可以转化成一个优化问题：

$$\begin{aligned}&\max_{k_1,k_2}s_1u_1+s_2u_2\\&s.t.\ \ f(s_1,s_2)=0。\end{aligned}\qquad(3.26)$$

（3.26）是一个非线性规划，构造拉格朗日函数如下：

$$L(k_1,k_2,\eta)=s_1u_1+s_2u_2+\eta f(s_1,s_2)。\qquad(3.27)$$

η为拉格朗日乘子，为根据拉格朗日乘数法，可以得到优化问题（3.26）的解：

$$\begin{cases}k_1^*=\dfrac{\mu_1\sigma_2-\rho\sigma_1\mu_2}{(1-\rho^2)s_1\sigma_1^2}\\k_2^*=\dfrac{\mu_2\sigma_1-\rho\sigma_2\mu_1}{(1-\rho^2)s_2\sigma_2^2}\end{cases}。$$

这样本文就得到了可以使破产概率上界最小的投资策略(k_1^*,k_2^*)。

在该部分针对第三部分的结果给出具体的算例。假设索赔额向量服从双变量的 Farlie-Gumbel-Morgenstern 分布。对于这种分布，详细地介绍参考 Kotz(2000) [60]，该分布的一般形式为：

$$F(x_1,x_2)=F_1(x_1)F_2(x_2)(1+\alpha\bar F_1(x_1)\bar F_2(x_2)),\quad-\infty<x_1,x_2<\infty,\qquad(3.28)$$

这里$F_1(x_1)=1-\bar F_1(x_1)$，$F_2(x_2)=1-\bar F_2(x_2)$分是$F(x_1,x_2)$边际分布，$\alpha\in[0,1]$。假设F_1，F_2分别服从参数为$\lambda_1=a_1^{-1}=0.1$，$\lambda_2=a_2^{-1}=0.5$指数分布。可以计算出：

$$m(s_1,s_2)=\frac{(1+\alpha)\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-s_1)(\lambda_2-s_2)}+\frac{4\alpha\lambda_1\lambda_2}{(2\lambda_1-s_1)(2\lambda_2-s_2)}$$
$$-\frac{2\alpha\lambda_1\lambda_2}{(2\lambda_1-s_1)(\lambda_2-s_2)}-\frac{2\alpha\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-s_1)(2\lambda_2-s_2)}。$$

出以上的讨论可以知道，在二元模型下，如果一个保险公司的两个子公司分别在有风险的市场上进行投资，给出了破产概率的指数型上界，这样可以有效地控制保险公司的风险。在此基础上，给出了最优的常数投资策略，该策略可以使破产概率的上界最小。以上两节讨论了保险公司购买投资组合时，怎样合理地安排投资策略，以及最终破产概率的估计。其中一个重要的假设就是，风险资产的价格过程服从几何布朗运动。但是，在现实中，这样建模是否合理，有待于进一步地讨论。

3.4 Lévy 风险下的保险公司最优投资策略

前面两节讨论保险公司的投资问题都是用几何布朗运动去描述风险资产的价格过程。这里存在着一个重要的问题，就是几何布朗运动是否合理地描述了风险资产的价格过程。众所周知，股票价格服从几何布朗运动的一个最重要的假设就是股票的对数收益率服从正态分布。近年来，许多关于股票市场的实证结果表明，股票价格的对数收益率显示出很多和正态分布假设不符的性质，比如有偏而且厚尾的特征。事实上，对于真实数据拟合出的经验分布是有很高的峰度的，也就是说，真实分布相对正态分布来说有更多的数值接近均值，可以参考Eberlein&Keller(1995)[61]中的结果。换句话说，股票价格存在一些突然的向上或向下的跳跃，这显然是几何布朗运动所不能描述的。

解决上述提出问题的方式就是改进模型，接下来本文用更加一般的模型指数Lévy过程对风险市场进行建模，而恰好Lévy是带有跳跃的随机过程，Klüppelberg &Kostadinova(2007)[62]在Lévy风险环境下，讨论了自融资的常数混合投资策略类下的最优投资问题。本文假设股票价格服从指数Lévy过程，在对投资策略类没有限制的情况下，讨论了最优投资问题。得到了渐近最优投资策略恒为常数的结果，并且在这种常数投资策略下，保险公司的破产概率具有指数型上界。这种常数投资策略可以被解析计算。并且可以证明，该策略是渐近最优的投资策略。

3.4.1 Lévy 风险建模

我们在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上进行讨论，首先对保险公司的承保盈余过程用经典方法进行建模：考虑索赔到达个数为一个强度为λ的齐次 Poisson 过程，记为$N=(N(t))_{t\geq 0}$，则保险公司的承保盈余过程为$R(t,u)$可表示成：

$$R(t,u)=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n, \tag{3.29}$$

其中，$u\geq 0$为保险公司的初始资本金，$c\in\mathbb{R}$是单位时间保费收入，第n次的索赔额$X_n,n=1,2,\ldots$构成一个非负独立同分布随机变量序列且与非负随机变量X同分布，其分布函数为$F_X(x)$，进一步假设$\{X_n\}_{n\geq 1}$与N独立。

接下来假设保险公司同时投资股票市场，股票价格$S(t)$服从指数 Lévy 过程

$$S(t)=e^{L(t)},t\geq 0。 \tag{3.30}$$

$L(t)$是 Lévy 过程，其特征三元组为(γ,σ^2,ν)。Ψ是 Lévy 过程$L(t)$的特征指数，$E[e^{isL(t)}]=e^{t\Psi(s)}$，$s\in\mathbb{R}$。根据 Lévy-Khintchine 公式，有

$$\Psi(s)=is\gamma-\frac{\sigma^2}{2}s^2+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{isx}-1-isxI_{\{|x|\leq 1\}})\nu(dx)。 \tag{3.31}$$

其中$I_{\{A\}}$是集合A的示性函数，ν为定义在$\mathbb{R}\setminus\{0\}$上的 Lévy 测度，并且满足$\nu(\{0\})=0$以及$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2\wedge 1)\nu(dx)<\infty$。对（3.30）应用半鞅的$It\hat{o}$公式，有

$$dS(t)=S(t-)(dL(t)+\frac{\sigma^2}{2}dt+e^{\Delta L(t)}-1-\Delta L(t)), \tag{3.32}$$

这里，对于$\omega\in\Omega$，$\Delta L(t,\omega)=L(t,\omega)-L(t-,\omega)$表示过程$L$在时刻$t$的跳跃幅度。进一步，我们假设股票价格$S(t)$和保险公司的承保盈余过程$R(t,u)$相互独立。$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$表示过程$R(t,u)$和$S(t)$生成的信息流。如果在时刻$t$，保险公司拥有资产$U(t)$，投资$K(t)$的资金到股票市场，余下的$U(t)-K(t)$投资到无风险债券，为简化模型，假设其利率为零。这样，保险公司的投资构成了由风险部分和无风险部分组成的投资组合$(K(t),U(t)-K(t))$。保险公司的盈余过程$U(t)$满足：

$$\begin{aligned}U(t,u,K)&=u+ct-\sum_{j=1}^{N(t)}X_j+\int_{0+}^{t}\frac{K(s-)}{S(s-)}dS(s)\\&=R(t,u)+\int_{0+}^{t}K(s-)d(L(s)+\frac{\sigma^2}{2}ds+e^{\Delta L(s)}-1-\Delta L(s))\\&=:R(t,u)+\int_{0+}^{t}K(s-)d\tilde{L}(s)。\end{aligned} \tag{3.33}$$

根据 Goll& Kallsen(2000)[63]中引理 A8，我们可以知道过程 $\tilde{L}(t)$ 也是一个 Lévy 过程，其特征三元组 $(\tilde{\gamma},\tilde{\sigma}^2,\tilde{\nu})$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}
&\tilde{\gamma}=\gamma+\frac{\sigma^2}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty}((e^x-1)I_{\{|e^x-1|\le 1\}}-xI_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx)\\
&\tilde{\sigma}^2=\sigma^2 \qquad\qquad (3.34)\\
&\tilde{\nu}(A)=\nu(\{x\in\mathbb{R}:e^x-1\in A\})\ \text{，}A\text{为任意的}Borel\text{集。}
\end{aligned}$$

$\tilde{L}$ 的特征指数记为 $\tilde{\Psi}$。有时候我们用 Laplace 指数研究 Lévy 过程更加方便，如果过程 L 和 $\tilde{L}$ 的 Laplace 指数存在，分别表示为 $\varphi(y)=\Psi(iy)=\log E[e^{-yL(1)}]$ 和 $\tilde{\varphi}(y)=\tilde{\Psi}(iy)=\log E[e^{-y\tilde{L}(1)}]$。根据（3.34）式，我们得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(y)&=-y\tilde{\gamma}+\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}y^2+\int_{-1}^{+\infty}(e^{-yx}-1+yxI_{\{|x|\le 1\}})\tilde{\nu}(dx)\\
&=-y[\gamma+\frac{\sigma^2}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty}((e^x-1)I_{\{|e^x-1|\le 1\}}-xI_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx)]+\frac{\sigma^2}{2}y^2\\
&\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}(\exp\{-y(e^x-1)\}-1+y(e^x-1)I_{\{|e^x-1|\le 1\}})\nu(dx) \qquad (3.35)\\
&=-y\gamma-y\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2}y^2+\int_{-\infty}^{+\infty}(\exp\{-y(e^x-1)\}-1)\nu(dx)+\int_{-\infty}^{+\infty}yxI_{\{|x|\le 1\}}\nu(dx)\text{。}
\end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ 记为可行策略的集合，定义为：

$$\mathbb{K}\triangleq\{K=(K(t))_{t\ge 0}:K(t)\text{ 可测，关于 }\mathbb{F}\text{ 适应，且右连续左极限存在}\}$$

$K\in\mathbb{K}$ 是为了保证随机积分 $\int_{0+}^{t}K(s-)d\tilde{L}(s)$ 能够被定义。如果对于任意的 $t\in[0,\infty)$，$K(t)\equiv A$，A 是常数，我们称之为常数投资策略。本文的研究对象是破产概率，现在定义破产概率如下：

$$\Psi(u,K)=P\{U(t,u,K)<0,\text{对于某个 }t\ge 0\}\text{，}$$

接下来定义破产时间为 $\tau\equiv\tau(u,K)=\inf\{t:U(t,u,K)<0\}$。破产概率还可以表示为 $\Psi(u,K)=P(\tau<\infty)$。定义最小破产概率为 $\Psi^*(u,K)=\inf_{K\in\mathbb{K}}\Psi(u,K)$。如果对于一个投资策略 K^*，可以使破产概率最小，我们称该策略为最优的。

假设索赔额的矩母函数存在，记为 $M_X(r)=E[e^{rX}]$。定义函数 $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，$h(0)=0,\ h(r)=M_X(r)-1$，满足经典的假设，即存在一个 $r_\infty\in(0,\infty]$，当 $r<r_\infty$ 时，有 $M_X(r)<\infty$, 以及 $\lim_{r\to r_\infty}M_X(r)=\infty$。

3.4.2 渐近最优的投资策略

在该部分，假设要满足安全负荷条件，即$c>\lambda E[X]$，否则破产概率必然为 1。首先给出引理 3.6。

在 3.4.1 的模型中，令$K(t)\equiv 0$，那么模型就化简为经典的 Cramér-Lundberg 模型，针对这种模型，带有轻尾型索赔的破产概率可以被上界$e^{-\hat{r}u}$控制，其中$\hat{r}$是方程$\lambda h(r)=cr$的正数解。在该部分，假设要满足净正收益条件，即$c>\lambda E[X]$，否则破产概率必然为 1。而且依然采取常数投资策略，即$K(t)\equiv A$，$A\in\mathbb{R}$为确定常数。针对 3.4.1 的模型，我们可以得到以下的方程：

$$\lambda h(r)=cr-\tilde{\varphi}(y),$$

我们首先要讨论$\tilde{\varphi}(y)$的存在性。为了以后的讨论方便，定义函数如下：

$$G(y)=-\gamma-\frac{\sigma^2}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\}-1)\nu(dx)+\int_{-\infty}^{+\infty}xI_{\{|x|\le 1\}}\nu(dx)。\quad (3.36)$$

容易看出$G(y)$是函数$\tilde{\varphi}(y)$的一阶导函数。再定义

$$\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^x-1-x)I_{\{|x|\le 1\}}\nu(dx)。$$

注意到当$x\to 0$时，e^x-1-x和x^2是同阶的。因此根据 Lévy 过程的假设$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2\wedge 1)\nu(dx)<\infty$成立，可以得到$\zeta<0$。下面的引理讨论了函数$G(y)$的一些性质。

引理 3.6. 对于任意的$y\in(y^-,+\infty)$，$G(y)<\infty$。且是严格递增，连续的函数，同时有$\lim_{y\to+\infty}G(y)=+\infty$。其中$y^-=\inf\{y:|G(y)|<\infty\}\le 0$。而且，如果$y^->-\infty$，那么有$\lim_{y\to y^-+}G(y)=G(y^-)$和$\lim_{y\to y^--}G(y)=-\infty$成立。

证明： 公式（3.36）可以重新写成

$$G(y)=-\gamma-\frac{\sigma^2}{2}-\zeta+\sigma^2y-\int_{-\infty}^{+\infty}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\}-I_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx)。$$

对于任意的$y_0\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{y\to y_0}G(y)=-\gamma-\frac{\sigma^2}{2}-\zeta+\sigma^2y_0-\lim_{y\to y_0}\int_{-\infty}^{+1}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\})\nu(dx)$$
$$-\lim_{y\to y_0}\int_{1}^{\infty}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\})\nu(dx)-\lim_{y\to y_0}\int_{-1}^{1}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\}-1)\nu(dx)。$$

首先，处理上式的最后一项。显然，当$y=0$时，最后一项的积分为零。如果，$y\neq 0$，那么$(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\}-1)$和$yx^2$同阶，当$x\to 0$。因此通过条件

$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2\wedge 1)\nu(dx)<\infty$和控制收敛定理可以得到，对于任意的$y_0\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{y\to y_0}\int_{-1}^{1}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\}-1)\nu(dx)$$
$$=\int_{-1}^{1}(e^x-1)(\exp\{-y_0(e^x-1)\}-1)\nu(dx)<\infty。$$

所以最后一项有限，接下来考虑另外两个极限。

注意到对于任意的$x\le -1$，$(e^x-1)\exp\{-y(e^x-1)\}$非负递减关于y。显然被积函数$(e^x-1)\exp\{-y(e^x-1)\}$关于y有界对于任意的$x\le -1$。根据$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2\wedge 1)\nu(dx)<\infty$和单调收敛定理有

$$-\infty<\lim_{y\to y_0}\int_{-\infty}^{1}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\})\nu(dx)$$
$$=\int_{-\infty}^{1}(e^x-1)(\exp\{-y_0(e^x-1)\})\nu(dx)\le 0。$$

令

$$J(y)=\int_{1}^{\infty}(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\})\nu(dx)\le 0\text{。}$$

对于任意的$x\ge 1$同理可得，对于$y_0>0$，有

$$\lim_{y\to y_0}J(y)=J(y_0)\text{，}$$

$J(y_0)$是有限的，所以$y^-\le 0$。另外，由于$x\ge 1$，$(e^x-1)\exp\{-y(e^x-1)\}$非负递减关于y。我们只需要讨论$y^->-\infty$。对于$y_0>y^-$，由控制收敛定理可得$\lim_{y\to y_0}J(y)=J(y_0)$成立，显然$\lim_{y\to y_0}J(y)=J(y_0)<\infty$。根据$y^-$的定义，当$y<y^-\le 0$时，$J(y)=\infty$。因此

$$\lim_{y\to y^- -}J(y)=\infty\text{，}$$

根据单调收敛定理，$\lim_{y\to y^- +}J(y)=J(y^-)$成立。

综合以上的讨论以及$G(y)$的定义，对于 $y^-\le 0$。$G(y)$是区间$(y^-,+\infty)$上的连续函数。

引理 3.7.当$y\in(y^-,+\infty)$，则$\tilde{\varphi}(y)$是一个有限的严格凸函数，存在最小值。即存在$\hat{y}$，使得对于任意的y，有$\tilde{\varphi}(\hat{y})\le\tilde{\varphi}(y)$。且$\tilde{\varphi}(\hat{y})\le 0$。

证明：根据（3.35）和ζ的定义，可以把$\tilde{\varphi}(y)$写成

$$\tilde{\varphi}(y)=-y\gamma-y\frac{\sigma^2}{2}-\zeta y+\frac{\sigma^2}{2}y+\int_{-\infty}^{+\infty}(\exp\{-y(e^x-1)\}-1+y(e^x-1)I_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx),\quad(3.37)$$

由于$\zeta<\infty$，充分地，只需要考虑（3.37）中的积分项的有限性。该积分项可以分解为：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}(\exp\{-y(e^x-1)\}-1+y(e^x-1)I_{\{|x|\le 1\}})\nu(dx)\\&=\int_{-\infty}^{-1}\exp\{-y(e^x-1)\}\nu(dx)+\int_{-\infty}^{1}\exp\{-y(e^x-1)\}-1+y(e^x-1)\nu(dx)\\&+\int_{1}^{\infty}\exp\{-y(e^x-1)\}\nu(dx)-\int_{|x|\ge 1}\nu(dx)。\end{aligned}$$

因为$(e^x-1)(\exp\{-y(e^x-1)\}-1)$和$yx^2$同阶，当$x\to 0$。因此通过条件$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2\wedge 1)\nu(dx)<\infty$，可以看出上式中第二项和最后一项的积分有限。显然上式中第一项也是有限的，因为被积函数有界且$\int_{|x|\ge 1}\nu(dx)<\infty$。也就是说，只需要考虑第三个积分项的有限性。根据引理3.6的证明可知，对于$y_1>y^-$，有

$$\int_{1}^{\infty}(e^x-1)\exp\{-y_1(e^x-1)\}\nu(dx)<\infty,$$

当然也有$\int_{1}^{\infty}\exp\{-y_1(e^x-1)\}\nu(dx)<\infty$成立。综上所述，

$$\tilde{\varphi}(y)<\infty,\ \ \forall y\in(y^-,+\infty)。$$

对于$\tilde{\varphi}(y)$可以求二阶导数如下：

$$\frac{dG(y)}{dy}=\frac{d^2\tilde{\varphi}(y)}{dy^2}=\sigma^2+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^x-1)^2\exp\{-y(e^x-1)\}\nu(dx)>0。\tag{3.38}$$

因此，当$y\in(y^-,+\infty)$，则$\tilde{\varphi}(y)$是一个有限的严格凸函数。

定义$H(y)=\exp\{-y(e^x-1)\}-1+y(e^x-1)$，其在零点的一阶导数为：

$$\left.\frac{dH(y)}{dy}\right|_{y=0}=-(e^x-1)\exp\{-y(e^x-1)\}+(e^x-1)\Big|_{y=0},$$

二阶导函数为

$$\frac{\partial^2 H(y)}{dy^2}=(e^x-1)^2\exp\{-y(e^x-1)\}\ge 0。\tag{3.39}$$

因此对于任意的x，$H(y)$在$y=0$点到达最小值，由于$H(0)=0$，有$H(y)$恒为正。所以有，$\int_{-1}^{1}H(y)dy\ge 0$以及

$$\tilde{\varphi}(y)\ge -y\gamma-y\frac{\sigma^2}{2}-\zeta y+\frac{\sigma^2}{2}y-\int_{|x|\ge 1}\nu(dx)\to+\infty,y\to+\infty,\tag{3.40}$$

如果$y^- > -\infty$，根据引理3.6可以得到对于任意的$y_1 < y < y^-$，

$$\int_1^{+\infty}(e^x-1)\exp\{-y_0(e^x-1)\}\nu(dx)=+\infty,$$

显然，也有$\int_1^{+\infty}(e^x-1)\exp\{-y_0(e^x-1)\}\nu(dx)=+\infty$。所以对于$-\infty < y < y^-$，$\tilde{\varphi}(y)=+\infty$。

接下来，讨论$y^-=-\infty$的情形。同理可得

$$\tilde{\varphi}(y)\geq -y\gamma - y\frac{\sigma^2}{2}-\zeta y+\frac{\sigma^2}{2}y-\int_{|x|\geq 1}\nu(dx)\to +\infty, y\to -\infty。\quad (3.41)$$

综上可得当$y^-=-\infty$时，$G(y)=0$在区间$(y^-,+\infty)$存在唯一的解y^*，使得$G(y^*)=0$。因此$\hat{y}=y^*$，也就是说y^*是$\tilde{\varphi}(y)$的最小值点。

接下来讨论$y^- > -\infty$的情形。如果$G(y)=0$存在唯一的解$y^*=y^-$或者$G(y)=0$无解，那么$\hat{y}=y^-$。总而言之，一定存在$\hat{y}$使得$\tilde{\varphi}(\hat{y})$可以最小。最后有$\tilde{\varphi}(\hat{y})\leq\tilde{\varphi}(0)=0$。也就是说最小值非正。引理证毕。

推论 如果$E[\exp(L(1))]<1$，那么$\hat{y}\leq 0$；如果$E[\exp(L(1))]\geq 1$，那么$\hat{y}\geq 0$。

证明：因为$E[\exp(L(1))]=\exp(\varphi(-1))=\exp(-G(0))$，所以

$$E[\exp(L(1))]<1 \Leftrightarrow G(0)>0。$$

当$G(0)>0$时，如果$y^-=0$，根据引理3.7，$\tilde{\varphi}(y)$在$y=0$达到最小，也就是说$\hat{y}=0$；如果$y^-<0$，同理有$\hat{y}<0$。反之亦然。

注 3.6 对于最极端的情况$y^-=0$成立，$\hat{y}\geq 0$非负。事实上，这种情况是很难出现的。根据引理3.7的证明，如果$y^-<y_1<0$，$G(y_1)>-\infty$成立，等价地，

$$\int_1^{+\infty}(e^x-1)\exp\{-y_1(e^x-1)\}\nu(dx)<+\infty。$$

显然对于一般的测度ν，上式很难满足，除了一些极其特殊的测度，比如说在正实数轴上存在有限支撑。

引理 3.8 假设净正现值条件满足，即$c>\lambda E[X]$，对于任意的y，存在唯一的$0<r^*<r_\infty$满足方程：

$$\lambda h(r)-cr=-\tilde{\varphi}(\hat{y})。\quad (3.42)$$

其中$\hat{y}$为引理3.6中所定义。

证明.首先定义函数$P(r)\triangleq\lambda h(r)-cr$。容易验证，$P'(0)=\lambda E(X)-c<0$，且$P''(r)\geq 0$。函数$P(r)$图像由图3.2所示：

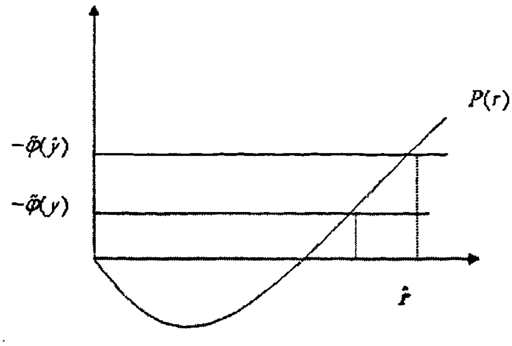

图 3.2 函数 $P(r)$ 图像

根据引理 3.6，我们知道，$-\tilde{\varphi}(\hat{y})\geq 0$，从图 3.2 可以看出 $P(r)$ 与 $-\tilde{\varphi}(\hat{y})$ 有唯一的交点，即方程（3.42）有唯一解。

注 3.7. 实际上，我们要证明，方程（3.42）的解就是最小破产概率的调解系数，即 $\Psi^*(u)\leq e^{-r^*u}$。调节系数越大，破产概率的上界越小，对于保险公司来说越安全。从图 3.2 我们看出，$-\tilde{\varphi}(y)$ 越大，方程（3.42）的解越大。取 $\hat{y}$ 的原因就是可以得到最大的调解系数 r^*。

接下来，为了叙述方便，定义随机过程 $M(t,u,K,r)\triangleq e^{-rU(t,u,K)}$。该指数过程在破产理论中经常被应用。下面给出本节的主要结果。

定理 3.3. 如果引理 3.7 中的条件满足。给定常数投资策略 $K^*(t)\equiv\dfrac{\hat{y}}{r^*}$，对于所有的 $u\geq 0$，有

$$\Psi^*(u,K^*)\leq e^{-r^*u}。\tag{3.43}$$

且投资策略 $K^*(t)$ 是渐进最优的投资策略。

证明. 首先证明过程 $M(t,u,K^*,r^*)=e^{-r^*U(t,u,K^*)}$ 关于信息流 $\mathcal{F}$ 是一个鞅过程。因为 $\tilde{L}(t)$ 是 Lévy 过程，具有平稳独立增量，所以 $U(t,u,\hat{A})$ 也是一个平稳独立增量过程。对于任意的 $0\leq s\leq t$，和有

$$\begin{aligned}&E[M(t,u,A,r)\,|\,\mathcal{F}_s]\\&=E[e^{-rU(s,u,A)}\,|\,\mathcal{F}_s]=e^{-rU(s,u,A)}E[e^{-r(U(t,u,A)-U(s,u,A))}\,|\,\mathcal{F}_s]\\&=e^{-rU(s,u,A)}E[e^{-rU(t-s,0,A)}]。\end{aligned}\tag{3.44}$$

其中，最后一个等式用到了平稳独立增量性。

为了证明 $M(t,u,K^*,r^*)$ 是一个鞅过程，只要证明 $E[e^{-r^*U(t,0,K^*)}]\equiv 1$，下面计算 $E[e^{-r^*U(t,0,K^*)}]$，

$$
\begin{aligned}
&E[\exp(-r^*U(t,0,K^*))] \\
&=E[\exp(-r^*(ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n+K^*(t)\tilde{L}(t)))] \\
&=\exp(-r^*ct)E[\exp(r^*\sum_{n=1}^{N(t)}X_n)]E[\exp(-r^*K^*(t)\tilde{L}(t))] \\
&=\exp(-r^*ct+\lambda h(r^*)t+\tilde{\varphi}(\hat{y})t)=1\text{。}
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

（3.45）最后一个等式成立是因为 r^* 满足方程（3.42）。这样，就证明了过程 $M(t,u,K^*,r^*)$ 是一个鞅过程，其关于破产时间 τ 的停止过程 $M(t\wedge\tau,u,K^*,r^*)$ 也是一个鞅过程。所以，我们可以作出如下的推导，

$$
\begin{aligned}
e^{-r^*u}&=M(0,u,K^*,r^*)=E[M(t\wedge\tau,u,\hat{K},r^*)] \\
&=E[M(t\wedge\tau,u,K^*,r^*)I_{\{\tau<t\}}]+E[M(t\wedge\tau,u,K^*,r^*)I_{\{\tau\geq t\}}] \\
&=E[M(\tau,u,K^*,r^*)I_{\{\tau<t\}}]+E[M(t,u,K^*,r^*)I_{\{\tau\geq t\}}] \\
&\geq E[M(T,u,K^*,r^*)I_{\{\tau<t\}}]\text{，}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

（3.46）中的不等式成立时因为过程 $M(t,u,K^*,r^*)$ 是非负的。根据单调收敛定理有，

$$
\lim_{t\to\infty}E[M(\tau,u,K^*,r^*)I_{\{\tau<t\}}]=E[M(\tau,u,K^*,r^*)I_{\{\tau<\infty\}}]\text{，}\tag{3.47}
$$

因此，由破产时刻盈余总为负值，也就是 $M(\tau,u,K^*,r^*)\geq 1$，有

$$
e^{-r^*u}\geq E[M(\tau,u,K^*,r^*)|\tau<\infty]P[\tau<\infty]\geq P[\tau<\infty]\text{。}\tag{3.48}
$$

这样，我们就得到了：如果保险公司采取投资策略 $K^*(t)\equiv\dfrac{\hat{y}}{r^*}$，其相应的破产概率 $\Psi^*(u,K^*)\leq e^{-r^*u}$。

注 3.8. 根据定理 3.3 知道，保险公司的渐近最优投资策略恒为常数，不随时间改变。且该常数可以精确计算出来，首先可以解方程 $G(y)=0$ 计算 $\hat{y}$；然后解方程（3.42）得到 r^*，根据定理 3.3 知 $\hat{r}$ 为保险公司的调节系数。最后可以算出 $K^*(t)\equiv\dfrac{\hat{y}}{r^*}$，同时也得到了破产概率的 Lundberg 上界。

注 3.9. 如果 $L(t)$ 的特征三元组 (γ,σ^2,ν) 取特殊情况 $\gamma=a-\dfrac{b^2}{2}$，$\sigma=b$，$\nu\equiv 0$，这样股票价格服从几何布朗运动 $dS(t)=S(t)(adt+bdW(t))$，该模型就是 Gaier et.al(2003)[22] 中讨论的模型。解方程 $G(y)=-a+b^2y=0$，得 $\hat{y}=\dfrac{a}{b^2}$。方程（3.42）为 $\lambda h(r)-cr=\dfrac{a^2}{2b^2}$，解为 r^*。这样 $K^*(t)\equiv\dfrac{a}{b^2r^*}$，这和 Gaier et.al(2003)[22]中的结果一致。所以本文也是 Gaier et.al(2003)[22]的推广。

注 3.10. 引理 3.7 知道一定有 $\tilde{\varphi}(\hat{y}) \le 0$ 成立，实际上，如果条件 $\tilde{\varphi}(\hat{y}) < 0$，安全负荷条件可以省略。

注 3.11. 从推论知道，如果 $E[\exp(L(1))] < 1$，那么 $\hat{y} \le 0$。根据定理 3.3 可知，投资为负，也就是说要卖空风险资产。其经济解释为：如果 $E[\exp(L(1))] < 1$，等价的，$E[S(1)] < S(0)$，这意味着股票的期望价格低于现价，所以选择卖空的投资策略。根据注 3.6 的解释，这种情况是难以发生的，所以保险公司一般不会选择卖空的投资策略。

3.4.3 算例

最后给出几个具体的数值例子阐述上述结果。参数的设定保证三个例子的股票收益的期望和方差都相等，且 $E[L(1)] = 0.5$，$Var[L(1)] = 2$。设定 $\lambda = 0.2$，$c = 2$。下面考虑三个具体的 Lévy 过程：

模型 3.1（几何布朗运动）：假设股票的对数收益率为 $L(t) = at + bW(t)$。方程 $G(y) = 0$ 变为 $-a - \frac{b^2}{2} + b^2 y = 0$，解得 $\hat{y} = (a - \frac{b^2}{2})/b^2$，而且 $\tilde{\varphi}(\hat{y}) = -(a + \frac{b^2}{2})^2 / 2b^2$。$a = 0.2, b = 0.5$。

模型 3.2（带有泊松跳跃的几何布朗运动）：假设股票的对数收益率为 $L(t) = at + bW(t) + J(t)$。其中 $J(t) = \sum_{n=1}^{M(t)} Y_n$ 为一时齐的复合泊松过程，$M(t)$ 为一泊松过程，其强度为 μ。跳跃大小 $\{Y_n\}_{n\ge1}$ 为独立同分布的随机列。Kou(2000) [64]考虑了 Y_1 具有双指数分布的情形，即 Y_1 具有密度函数：

$$f(x) = \frac{c_1}{2}\exp\{-c_1 |x|\}, c_1 > 0, x \in \mathbb{R}。 \tag{3.49}$$

在该模型中，方程 $G(y) = 0$ 变为：

$$-a - \frac{b^2}{2} + b^2 y - \mu \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) e^{-y(e^x - 1)} \frac{c_1}{2} e^{-c_1|x|} dx = 0。 \tag{3.50}$$

设定 $a = 0.2$，$c_1 = 3$，$b = \sqrt{5}/6$，$\mu = 0.5$。

模型 3.3（VG Lévy 过程，madan&Seneta(1999) [65]）：$L(t) = \mu t + W(V(t))$。其中 $\mu > 0$，W 是一个布朗运动，飘移率为 a，波动率为 b。$V(t)$ 是一个和过程 W 独立的 gamma Lévy 过程，$V(1)$ 具有 Gamma 分布，其密度函数为：

$$f_\Gamma(x) = \frac{\beta^\eta x^{\eta-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\eta)}, x \ge 0, \beta, \eta > 0。$$

$V(t)$ 的特征三元组为 $(0, 0, \nu_\Gamma)$，$\nu_\Gamma(dx) = I_{\{x>0\}} \eta x^{-1} e^{-\beta x} dx$。$L$ 的 Lévy 测度为：

$$\nu(dx)=\frac{\beta^2}{\eta|x|}\exp(\frac{ax}{b^2}-\frac{\sqrt{a^2+2b^2\beta^2/\eta}}{b^2}|x|)dx\,,$$

令 $\beta=\eta=4$，$\mu=0.2$，$a=0$，$b=0.5$。

算例的结果由下面的两个表给出：

表 3.2　索赔额服从指数分布

	$\tilde{\varphi}(\hat{y})$	$K^*(t)$	r^*
模型 1	-0.2133	0.8449	0.9104
模型 2	-0.1354	1.5391	0.9069
模型 3	-0.2017	1.4686	0.9099

表 3.3 索赔额服从 Gamma 分布

	$\tilde{\varphi}(\hat{y})$	$K^*(t)$	r^*
模型 1	-0.2133	1.0372	0.7416
模型 2	-0.1354	1.8842	0.7409
模型 3	-0.2017	1.8022	0.7415

注 3.12. 从上面两个表可以看出：和 Gaier et.al(2003)[22]的模型相比。用更一般的 Lévy 过程可以得到更小的调解系数。也就是说，如果保险公司用几何布朗运动建模，可能面临模型失真带来的风险，因为几何布朗运动不能精确地对现实的股票价格进行建模。

下一小节，针对一种特殊的 Lévy 过程，应用本节的结果，证明本节给出的投资策略是渐进最优的。

3.4.4　常数投资策略的渐近最优性

根据 Sato(1999)[66]，第 4 章，可以得到 Lévy 过程 $L(t)$ 的 Lévy-Khinchin 分解：

$$L(t)=\gamma t+\sigma W(t)+\sum_{0<s\le t}\Delta L(s)I_{\{|\Delta L(s)>1|\}}+\int_0^t\int_{|x|\le1}x(J(ds,dx)-\nu(dx)ds)\,,\qquad(3.51)$$

其中 J 是 Poisson 随机测度，对于任意的 Borel 集 $B\subset[0,\infty)\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$，有 $J\triangleq\#\{(t,\Delta L(t,\omega))\in B\}$。

在这一小节，对于一类特别重要的 Lévy 过程 $L(t)$ 应用上面一小节的结果。假设 $\eta\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\nu(dx)<\infty$，那么（3.51）可以简化为

$$L(t)=\gamma t+\sigma W(t)+\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)\nu(dx)\,,\qquad t\ge0\,。\qquad(3.52)$$

其中，$\gamma_0 \in \mathbb{R}$。令 Y_n 表示第 n 次 $L(t)$ 的跳跃大小。$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是独立同分布的随机列，且其共同的分布函数为 $F_Y(x)$。（3.52）还可以写成：

$$L(t)=\gamma_0 t+\sigma W(t)+\sum_{n=1}^{M(t)} Y_n, \tag{3.53}$$

令 T_n 表示第 n 次的跳跃时间。$M(t)=\sup\{n:T_n\le t\}$ 是一个强度为 $\eta>0$ 的 Possion 过程，且 Lévy 测度 $\nu(dx)=\eta F_Y(dx)$。接下来假设投资是有界的，即 $|K(t)|\le C$ 对于任意的 $t\ge 0$，其中 $C>0$ 为固定常数。为以下证明方便，定义 $Z\triangleq C(1-e^{Y_1})$。把定理 3.3 应用到模型（3.53），方程 $G(y)=0$ 变成

$$-\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma^2 y-\eta E[(e^{Y_1}-1)\exp\{-y(e^{Y_1}-1)\}]=0, \tag{3.54}$$

根据引理 3.6，方程 （3.54）有唯一解 y^*。令

$$\alpha=-r^*\gamma_0 K(t-)-r^*\frac{\sigma^2}{2}K(t-)+\frac{1}{2}r^{*2}\sigma^2K^2(t-)+\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x),$$

当 lévy 过程 $L(t)$ 如（3.53）的形式，我们给出常数投资策略 K^* 的一致最优性。假设 X 和 Z 有一致指数矩。Gaier et.al. (2003)[22]给出一致指数矩的定义：如果随机变量 X 满足条件 $\sup\limits_{y\ge 0} E[e^{-r(y-X)}|X>y]<\infty$ 对于给定的 r，则说 X 具有一致指数矩。在此假设下，下面的引理成立。

引理 3.9 假设 X 和 Z 具有一致指数矩对于 r^*。那么对于任意 $K\in\mathbb{K}$，且投资有界，过程 $M(t\wedge\tau(u,K),u,K,r^*)$ 是一致可积的下鞅。.

证明. 根据（3.53）式，对过程 $M(t,u,K,r)$ 应用半鞅的 *Itô* 公式，可得

$$\begin{aligned}\frac{dM(t,u,K,r)}{M(t-,u,K,r)}&=[-rc-r\frac{\sigma^2}{2}K(t-)-rK(t-)\gamma_0+\frac{1}{2}r^2\sigma^2K^2(t-)]dt\\&-rK(t-)\sigma dW(t)+\exp\{-K(t-)r(e^{Y_{M(t)}}-1)\}-1)dM(t)+(e^{rX_{N(t)}}-1)dN(t)。\end{aligned} \tag{3.55}$$

定义

$$\begin{aligned}f(K,r)\triangleq{}&\lambda h(r)-cr-r\gamma_0K(t-)-r\frac{\sigma^2}{2}K(t-)\\&+\frac{1}{2}r^2\sigma^2K^2(t-)+\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x),\end{aligned}$$

由于 $\lambda h(r)=\lambda E[e^{rX_{N(t)}}-1]$，可以把（3.55）重新整理为

$$\frac{dM(t,u,K,r)}{M(t-,u,K,r)}=[-rc-r\frac{\sigma^2}{2}K(t-)-rK(t-)\gamma_0+\frac{1}{2}r^2b^2K^2(t-)]dt+\lambda h(r)dt$$
$$-rK(t-)\sigma dW(t)+\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)dt$$
$$+(e^{rX_{N(t)}}-1)dN(t)-\lambda E[e^{rX_{N(t)}}-1]dt \tag{3.56}$$
$$+\exp\{-K(t-)r(e^{Y_{M(t)}}-1)\}-1)dM(t)-\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)dt$$
$$=f(K,r)dt-rbK(t-)dW(t)+(e^{rX_{N(t)}}-1)dN(t)-\lambda E[e^{rX_{N(t)}}-1]dt。$$
$$+\exp\{-K(t-)r(e^{Y_{M(t)}}-1)\}-1)-\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)dt$$

所以 $M(t\wedge\tau(u,K),u,K,r^*)$ 可以表示为随机积分

$$M(t\wedge\tau,u,K,r^*)=\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)f(K,r^*)ds-r^*\sigma\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)K(s-)dW(s)$$
$$+\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)(e^{rX_{N(s)}}-1)dN(s)-E[e^{rX_{N(t)}}-1]\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\lambda ds$$
$$+\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\exp\{-K(s-)r^*(e^{Y_{M(s)}}-1)\}-1)dM(s)$$
$$-\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)ds。$$

(3.57)

因为 $0\le M(s-,u,K,r^*)\le 1$ 成立对于任意的 $0\le s\le\tau$，随机积分 $r^*\sigma\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)K(s-)dW(s)$ 是一个局部鞅。过程

$$\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)(e^{rX_{N(s)}}-1)dN(s)-E[e^{rX_{N(t)}}-1]\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\lambda ds$$

也是一个鞅，参考 Gaier et.al(2003)[22]中附录 A。接下来证明下面两个过程的差过程也是局部鞅。

$$\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\exp\{-K(t-)r^*(e^{Y_{M(s)}}-1)\}-1)dM(s) \tag{3.58}$$

和

$$\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r^*(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)ds。$$

接下来作如下的推导

$$\int_0^{t\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)\exp\{-K(t-)r^*(e^{Y_{M(s)}}-1)\}-1)dM(s)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}M(T_n-,u,K,r^*)\exp\{-K(t-)r^*(e^{Y_n}-1)\}-1)I_{\{t\wedge\tau\ge T_n\}},$$

等式两边取期望，对于 $0\le t\le T$，

$$
\begin{aligned}
&E[\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} M(s-,u,K,r^*)\exp\{-K(t-)r^*(e^{Y_{M(s)}}-1)\}-1)dM(s)|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}]\\
&=E[\sum_{n=1}^{\infty} M(T_n-,u,K,r^*)\exp\{-K(T_n-)r^*(e^{Y_n}-1)\}-1)I_{\{T\wedge\tau\geq T_n\geq t\wedge\tau\}}|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}]\\
&=E[\sum_{n=1}^{\infty} E[M(T_n-,u,K,r^*)\exp\{-K(T_n-)r^*(e^{Y_n}-1)\}-1)I_{\{T\wedge\tau\geq T_n\geq t\wedge\tau_n\}}|\mathcal{F}_{T_n-}]|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}]\\
&=E[\sum_{n=1}^{\infty} M(T_n-,u,K,r^*)I_{\{T\wedge\tau\geq T_n\geq t\wedge\tau\}}E[\exp\{-K(T_n-)r^*(e^{Y_n}-1)\}-1)|\mathcal{F}_{T_n-}]|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}]\\
&=E[\sum_{n=1}^{\infty} M(T_n-,u,K,r^*)I_{\{T\wedge\tau\geq T_n\geq t\wedge\tau\}}\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(T_n-)r^*(e^x-1)\}-1)d\mathcal{F}_Y(x)|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}]\\
&=E[\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} M(s-,u,K,r^*)\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(s-)r^*(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)dM(s)|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}]\\
&=E[\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} M(s-,u,K,r^*)\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(s-)r^*(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)\eta ds|\mathcal{F}_{t\wedge\tau}],
\end{aligned}
$$

其中第六行到第七行我们用到了$M(t)-\eta t$是鞅这个事实。这样（3.58）之差为局部鞅关于滤波流$\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$。根据 Protter(1992) [67]中 11 页的标准讨论可以证明（3.58）和之差为局部鞅关于滤波流$\mathcal{F}_t$。

根据$\lambda h(r^*)=cr^*-\alpha\equiv cr^*-\tilde{\varphi}(r^*K^*)$，可以得到

$$
\begin{aligned}
&f(K,r^*)\equiv\lambda h(r^*)-cr^*-r^*\gamma_0K(t-)-r^*\frac{\sigma^2}{2}K(t-)+\frac{1}{2}r^{*2}\sigma^2K^2(t-)\\
&+\eta E[\exp\{-K(T_n-)r^*(e^{Y_n}-1)\}-1|\mathcal{F}_{T_n-}]\\
&=-\alpha-r^*\gamma_0K(t-)-r^*\frac{\sigma^2}{2}K(t-)+\frac{1}{2}r^{*2}\sigma^2K^2(t-)+\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)
\end{aligned}
$$

下面证明$f(K,r^*)\geq 0$。令$\beta\triangleq r^*K(t-)$，定义

$$
\begin{aligned}
&g(\beta)\triangleq f(K,r^*)\\
&=-\alpha-\beta(\gamma_0+\frac{\sigma^2}{2})+\frac{\sigma^2\beta^2}{2}+\eta\int_{-\infty}^{\infty}(\exp\{-K(t-)r(e^x-1)\}-1)dF_Y(x)
\end{aligned}
$$ 。

根据（3.55），可以得到

$$
g'(y^*)=-\gamma_0-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma^2y^*-\eta E[(e^{Y_1}-1)\exp\{-y^*(e^{Y_1}-1)\}]=0\text{。}
$$

很容易验证$g''(\beta)\geq 0$和$g(0)=-\alpha\geq 0$成立，因此y^*是$g(\beta)$的最小值点$g(\beta)$。因为$g(y^*)=-\alpha+\alpha=0$，$f(K,r^*)\geq 0$成立。

对于任意的 $0\leq t\leq T$，$\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}M(s-,u,K,r^*)f(K,r^*)ds\geq 0$。综合以上的分析，可得$M(t\wedge\tau,u,K,r^*)$是一个局部下鞅，事实上，$M(t\wedge\tau,u,K,r^*)$还是一个真正的下鞅，只需要证明$M(t\wedge\tau,u,K,r^*)$是一致可积的。

定义$M^* \triangleq \sup\limits_{t\ge0}\left|M(t\wedge\tau,u,K,r^*)\right|$，下式成立

$$
\begin{aligned}
E[M^*] &\le E[M(\tau,u,K,r^*)|\tau<\infty] \\
&\le E[M(\tau,u,K,r^*)|\tau<\infty,U(\tau-)>0]。
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

第二个不等式成立是因为$M(\tau,u,K,r^*)$在集合$\{\tau<\infty,U(\tau-)=0\}$上等于 1，以及$M(\tau,u,K,r^*)\ge1$在集合$\{\tau<\infty,U(\tau-)>0\}$上。事件$\{\tau<\infty,U(\tau-)=0\}$意味着破产由几何布朗运动引起。$\{\tau<\infty,U(\tau-)>0\}$ 意思是跳跃导致的破产。$\{\tau<\infty,U(\tau-)>0\}$可以被分解为

$$
\begin{aligned}
&\{\tau<\infty,U(\tau-)>0\} \\
&=\{\tau<\infty,U(\tau-)>0,\ \text{索赔引起的跳跃}\}+\{\tau<\infty,U(\tau-)>0,\ \text{股票价格引起的跳跃}\} \\
&\triangleq A_1+A_2
\end{aligned}
$$

现在模仿 Gaier et.al(2003)[22]的证明，$H(dt,dy)$表示$\tau=t$和$U(\tau-)=y>0$的联合概率分布，有

$$
\begin{aligned}
E[M^*] &\le E[M(\tau,u,K,r^*)|\tau<\infty,U(\tau-)>0] \\
&\le E[M(\tau,u,K,r^*)|A_1]+E[M(\tau,u,K,r^*)|A_2] \\
&\triangleq I_1+I_2\ 。
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

根据一致指数矩的假设，有

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le \int_0^\infty\int_0^\infty H(dt,dy)\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}\frac{dF_X(v)}{\int_y^\infty dF_X(u)} \\
&\le \Big(\sup_{y\ge0}\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}\frac{dF_X(v)}{\int_y^\infty dF_X(u)}\Big)\int_0^\infty\int_0^\infty H(dt,dy) \\
&= \sup_{y\ge0}\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}\frac{dF_X(v)}{\int_y^\infty dF_X(u)}<\infty。
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E[e^{-r^*(U(\tau-)+K(\tau-)(e^{\Delta L(\tau)}-1)}|A_2] \\
&= E[e^{-r^*(U(\tau-)-K(\tau-)(1-e^{Y_1})}|A_2] \\
&\le \Big(\sup_{y\ge0}\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}\frac{dF_Z(v)}{\int_y^\infty dF_Z(u)}\Big)\int_0^\infty\int_0^\infty H(dt,dy) \\
&= \sup_{y\ge0}\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}\frac{dF_Z(v)}{\int_y^\infty dF_Z(u)}<\infty。
\end{aligned}
$$

应用控制收敛定理， $M(t\wedge\tau,u,K,r^*)$ 是一致可积的下鞅。引理得证。

引理 3.10 假设引理 3.9 中的条件成立。总资产过程 $U(t\wedge\tau,u,K)$ 在 $\{\tau=\infty\}$ 上收敛到正无穷当 $t\to\infty$ 。

证明. 根据引理 3.9 可知 $M(t\wedge\tau(u,K),u,K,r^*)$ 是一致可积的下鞅。出此可知 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t\wedge\tau(u,K),u,K,r^*)$ 几乎处处存在。同理可得 $U(t\wedge\tau,u,K)$ 的极限几乎处处存在。这样，可以假定 $\lim\limits_{t\to\infty}U(t,u,K)=D<\infty$，$a.s.$ 成立在 $\{\tau=\infty\}$ 上。接下来可知存在 t_0，使得对于任意的 $t\ge t_0$, $P(U(t,u,K)\le D)>0$ 成立。由于索赔额的分布有正支撑，$P(X>D+\delta)>0$ 成立，其中 $\delta>0$ 。根据 Gaier et.al(2003) [22]可知跳跃大小会无穷多次超过 $D+\delta$ 。那么在时间 t_0 之后一定会出现至少跳跃大于一次 $D+\delta$ ，该次跳跃会导致 $U(t,u,K)<0$ 因为过程 $R(t,u)$ 和 $\tilde{L}(t)$ 没有同时的跳跃。这和假设 $\{\tau=\infty\}$ 矛盾，所以引理 3.10 成立。

有了以上两个引理，可以给出破产概率的下界。

定理 3.4. 假设引理 3.9 中的条件成立，那么对于任意的 $K\in\mathbb{K}$，

$$\Psi(u,K)\ge C_1e^{-r^*u}。\tag{3.61}$$

其中

$$C_1=\inf_{y\ge0}\{\frac{\int_y^\infty dF_X(u)}{\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}dF_X(v)}+\frac{\int_y^\infty dF_Z(u)}{\int_y^\infty e^{-r^*(y-v)}dF_Z(v)}\}$$
$$=\frac{1}{\sup\limits_{y\ge0}E[e^{-r(y-X)}|X>y]}+\frac{1}{\sup\limits_{y\ge0}E[e^{-r(y-Z)}|Z>y]}>0。$$

证明. 根据 Doob 的可选抽样定理，和引理 3.9，有下式成立

$$e^{-r^*u}=M(0,u,K^*,r^*)\le E[M(\tau,u,K,r^*)]。$$

应用 引理 3.10 ，可得

$$\begin{aligned}&E[M(\tau,u,K,r^*)]\\&=E[M(\tau,u,K,r^*)|\tau<\infty]P(\tau<\infty)\\&+E[\lim_{t\to\infty}M(t,u,K,r^*)|\tau=\infty]P(\tau=\infty)\\&=E[M(\tau,u,K,r^*)|\tau<\infty]P(\tau<\infty)。\end{aligned}$$

综上可得

$$\Psi(u,K)\ge e^{-r^*u}\frac{1}{E[M(\tau,u,K,r^*)|\tau<\infty]P(\tau<\infty)}\ge C_1e^{-r^*u}。$$

定理证毕。

定理 3.4 说明上一小节给出的常数投资策略是渐进最优的。

注 3.13. 定理 3.4 说明，对于其它的可行的投资策略，破产概率都要大于定理 3.3 给出的策略下破产概率的指数型上界，也就是说当初始资本金充分大时，采取定理 3.3 中的策略得到的破产概率最小，即上一小节给出的常数投资策略是渐近最优的。

本节讨论了保险公司的最优投资策略问题，在最小化破产概率的目标下，得到了一个渐近最优的投资策略，该策略恒为常数，且可以通过解方程被精确计算出来。而且在这种投资策略下，可以估计破产概率的上界，为保险公司控制风险提供了可能。前面几节都是用最终破产概率去衡量风险，实际上可以用更加有用的有限时间破产概率去衡量。而且有限时间破产概率可以和实物界中的一个重要的风险度量 Value-at-Risk，简称 VaR 建立联系，下一节给出详细阐述。

3.5 基于 VaR 风险约束下的最优混合投资策略

3.5.1 VaR 简介及其相关模型

本节，同样考虑保险公司的投资组合策略问题。用在险价值（VaR Value-at-Risk）去衡量保险公司的风险，在险价值是重要的金融风险管理工具之一，在国际上已获得广泛认可。VaR 的优点在于概念简单直观、计算方便且易于实施。可将其定义为在一定的持有期及一定的统计置信度内，某一金融工具或投资组合所面临的最大潜在损失的估计值。本节同样用指数 Lévy 过程刻画风险资产的价格。在此基础上，本文给出保险公司最优混合投资策略，该投资策略可以使 VaR 限制在一定的水平下，保险公司总期望财富最大。

首先介绍混合投资策略，参见 Emmer et.al(2001)[68]。混合投资策略是指在每一个时间点上投资总财富的固定比例的份额到风险市场上，剩下的用来购买无风险债券。在这一节放松债券的无风险利率为零的假设。承保盈余过程 $R(t,u)$ 和上一节一致。假设保险公司投资到一个 Black-Scholes 型的市场，该市场由股票和无风险债券组成。债券和股票的各自的价格过程如下：

$$B(t)=e^{\delta t};\ S(t)=e^{L(t)}。\qquad (3.62)$$

对（3.62）中的两式分别微分，得

$$dB(t)=\delta B(t)dt \qquad (3.63)$$

$$
\begin{aligned}
dS(t) &= d\tilde{L}(t) \\
&= S(t-)d(L(t)+\frac{\sigma^2}{2}dt+e^{\Delta L(t)}-1-\Delta L(t)), t>0, S(0)=1,
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

在每一个时刻点上把总资产的一个固定比例θ投资风险市场，剩下的$1-\theta$投资到无风险市场上。本文不考虑保险公司卖空风险资产和借贷，所以$\theta\in[0,1]$。虽然θ为常数，该投资组合策略是一个动态策略，因为保险公司的总资产过程是不断变化的，保险公司要不断的调整投资组合头寸。θ被称为投资策略。Lévy 过程$L(t)$的特征三元组为(γ,σ^2,ν)。定义$\varepsilon(L)$被定义成下面微分方程的解

$$
dZ(t)=Z(t-)dL(t), Z(0)=1 。 \tag{3.65}
$$

过程$Z=\varepsilon(L)$被称为过程$L(t)$的随机指数或称为 Doléans-Dade 指数。Cont & Tankov(2004) [69]中证明了$\varepsilon(L)$的存在唯一性。

保险公司的总资产过程满足以下随机微分方程：

$$
dU_\theta(t)=cdt-dA(t)+U_\theta(t-)d\tilde{L}_\theta(t)\ , t\ge 0, U_\theta(0)=u 。 \tag{3.66}
$$

其中$d\tilde{L}_\theta(t)=(1-\theta)\delta dt+\theta d\tilde{L}(t)$。$\tilde{L}(t)$满足$\varepsilon(\tilde{L})=\exp(L(t))$。假设保险过程和资产价格过程是独立的，那么根据 Klüppelberg & Kostadinova(2007) [62]可得$\tilde{L}_\theta(t)$同样为 Lévy 过程其特征三元组为$(\gamma_\theta,\sigma_\theta^2,\nu_\theta)$，可以表示成：

$$
\begin{aligned}
\gamma_\theta &= \gamma\theta+(1-\theta)(\delta+\frac{\sigma^2}{2}\theta) \\
&+\int_R(\log(1+\theta(e^x-1))I_{\{|\log(1+\theta(e^x-1)|\le 1\}}-\theta x I_{\{|x|\le 1\}}\nu(dx)), \\
\sigma_\theta^2 &= \theta^2\sigma^2, \\
\nu_\theta(A) &= \nu(\{x\in R:\log(1+\theta(e^x-1))\in A\}) \text{ for any Borel set } A\subset\mathbb{R}。
\end{aligned} \tag{3.67}
$$

L_θ的 Laplace 指数如果存在，可以表示为$\varphi(\theta,s)=\log E[e^{-sL_\theta(1)}]$，从 Kostadinova(2007) [70]中引理 5.3.1 可得，如果$0<E[L(1)]<\infty$，$\sigma>0$或者$\nu((-\infty,0))>0$两者成立其一，对于$\theta\in(0,1)$，一定存在唯一的正数$\kappa=\kappa(\theta)>0$使得$\varphi(\theta,\kappa)=0$。

定义保险公司的折现净损失过程如下：

$$
V_\theta=u-e^{-L_\theta(t)}U_\theta(t)=\int_0^t e^{-L_\theta(v)}(dA(v)-cdv), t\ge 0 。 \tag{3.68}
$$

Kostadinova(2007) [70]研究了折现净损失过程的平稳性，讨论了最终折现净损失的尾部，即$P(V_\theta^\infty>x)$，其中$V_\theta^\infty=\lim_{t\to\infty}V_\theta(t)$。Kostadinova(2007) [70]指出，如果索赔分布的有限矩的阶数大于$\kappa(\theta)$，那么投资风险决定了最终折现净损失的尾部风险，称之为危险投资情况；如果索赔额的分布是正则变化尾分布族，且尾指标

$-\alpha<\kappa(\theta)$，那么保险风险决定了最终折现净损失的尾部风险，称之为危险索赔情况。正则变化尾分布族的定义见第二章 2.4 节。Kostadinova(2007)[70]考虑了一个最优化问题，即在一定的风险度量水平之下，怎么安排投资策略可以使期望总资产最大。其中，风险度量用在险价值 VaR 描述。也就等价于如下模型：

$$\begin{aligned}&\max_{\theta\in[0,1]} E[U_\theta(T)]\\&s.t.\quad VaR_\beta(V_\theta^\infty)\le C。\end{aligned}\tag{3.69}$$

上式中考虑的是一种极限情况下的风险。实际上，保险公司更加关注未来有限时间的风险。本节考虑有限时间下的 VaR 风险约束。定义时刻T之前的最大损失为$V_\theta^*=\sup\limits_{0\le t\le T}V_\theta(t)$。下面给出 VaR 的具体定义，

$$VaR_\beta(V_\theta^*)=\inf\{x\in R:P(V_\theta^*>x)\le\beta\}\text{，}\tag{3.70}$$

其中$\beta\in(0,1)$是一个小概率值，代表着很高的置信水平。我们要解决的是如下的最优化问题：

$$\begin{aligned}&\max_{\theta\in[0,1]} E[U_\theta(T)]\\&s.t.\quad VaR_\beta(V_\theta^*)\le C,\end{aligned}\tag{3.71}$$

其中$C>0$，$T>0$。

根据有限时间破产概率的定义：

$$\Psi(u,T)=P\{V_\theta(t)>u,\text{对于某个}0\le t\le T\}\text{，}\tag{3.72}$$

等价地，有

$$\Psi(u,T)=P\{\sup_{0\le t\le T}V_\theta(t)>u\}\text{。}\tag{3.73}$$

根据（3.73），（3.71）的最优化问题等价于

$$\begin{aligned}&\max_{\theta\in[0,1]} E[U_\theta(T)]\\&s.t.\quad \inf\{u\in\mathbb{R}:\Psi(u,T)\le\beta\}。\end{aligned}\tag{3.74}$$

根据（3.74），最优化模型（3.71）中的$VaR_\beta(V_\theta^*)$的经济解释为：如果保险公司要在时间T之前破产的概率不超过β，所需准备的最少的初始准备金。

3.5.2 最优化模型的近似解

由于最优化模型（3.74）的复杂形式，几乎是不可能找到模型的解析解，我们的目标是找到模型的近似解法。Heyde & Wang(2009)[71]针对该模型，假设索赔额具有正则变化尾，即$F_X(x)\in\mathcal{R}_{-\alpha}$，研究了有限时间破产概率，并得到了破产概率的尾渐进等价式。本文利用其结果，给出最优化模型（3.74）的近似最优解。

令θ^*为最优的投资策略，下面给出定理 3.5。

定理 3.5. 假设安全负荷条件成立，即$c-\lambda E(X)>0$。还假设$\varphi(-1)>\delta$。如果索赔额的大小是连续分布，且$F_X(x)\in\mathcal{R}_{-\alpha}$。那么，对于任意固定的$T>0$和充分大的$u$，最优化问题（3.74）解为

$$\theta^*=\max\{\theta\in[0,1]:J(\varphi(\theta,\alpha))\geq\bar{F}_X(C)\},\tag{3.75}$$

如果$\{\theta\in[0,1]:J(\varphi(\theta,\alpha))\geq\bar{F}_X(C)\}$非空。其中

$$J(\varphi(\theta,\alpha))=\beta\varphi(\theta,\alpha)/\lambda(\exp(\varphi(\theta,\alpha)T)-1)\text{。}$$

如果条件$\varphi(\alpha+1)+\delta\geq\varphi(\alpha)$成立，那么一定存在$\hat{\theta}\in[0,1]$，使得$J(\varphi(\hat{\theta},\alpha))$最大，且

$$\theta^*=\begin{cases}\theta_2, & J(\varphi(\theta,\alpha))\geq\bar{F}_X(C)\text{，}\\ \text{无解，} & J(\varphi(\theta,\alpha))<\bar{F}_X(C)\text{。}\end{cases}\tag{3.76}$$

其中θ_2是方程$J(\varphi(\theta,\alpha))=\bar{F}_X(C)$的两个解中较大的那个解。

如果条件$\varphi(\alpha+1)+\delta\geq\varphi(\alpha)$成立，$J(\varphi(\theta,\alpha))$在区间$\theta\in[0,1]$单调递增，且

$$\theta^*=\begin{cases}1, & J(\varphi(\theta,\alpha))\geq\bar{F}_X(C)\text{，}\\ \text{无解，} & J(\varphi(\theta,\alpha))<\bar{F}_X(C)\text{。}\end{cases}\tag{3.77}$$

证明： 参考 Kostadinova(2007) [70]中的引理 3.4.4，如果$c-\lambda E(X)>0$和$\varphi(-1)>\delta$成立，那么$E[U_\theta(T)]$关于θ递增。因此，最优化模型（3.74）等价于

$$\max\{\theta\in[0,1]:\inf\{x\in R:\Psi(x,T)\leq\beta\}\leq C\}\text{。}\tag{3.78}$$

有根据 Heyde & Wang(2009) [71],如果$F_X(x)\in\mathcal{R}_{-\alpha}$，那么对于固定的$T>0$，

$$\Psi(u,T)\sim\frac{\lambda(1-\exp(\varphi(\theta,\alpha)T))}{\varphi(\theta,\alpha)}\bar{F}(u),u\to\infty,\tag{3.79}$$

对于充分大的u，把（3.79）代入（3.78），可得

$$\max\{\theta\in[0,1]:\inf\{x\in R:\frac{\lambda(1-\exp(\varphi(\theta,\alpha)T))}{\varphi(\theta,\alpha)}\bar{F}(u)\leq\beta\}\leq C\},\tag{3.80}$$

因为$\exp(\varphi(\theta,\alpha)T)-1$和$\varphi(\theta,\alpha)$同号，而且$\bar{F}(u)$连续且递减，所以有

$$\begin{aligned}
&\inf\{u\in\mathbb{R}:\frac{\lambda(1-\exp(\varphi(\theta,\alpha)T))}{\varphi(\theta,\alpha)}\bar{F}(u)\le\beta\}\\
&=\inf\{u\in\mathbb{R}:\bar{F}(u)\le\frac{\beta\varphi(\theta,\alpha)}{\lambda(1-\exp(\varphi(\theta,\alpha)T))}\}\\
&=\bar{F}^{-1}(\frac{\beta\varphi(\theta,\alpha)}{\lambda(1-\exp(\varphi(\theta,\alpha)T))})。
\end{aligned}\tag{3.81}$$

注意到，$\bar{F}^{-1}(x)$ 是减函数，把（3.81）代入（3.80），有（3.75）成立。

下一步，考虑 $\varphi(\theta,\alpha)$ 的性质，由 Kostadinova(2007)[70]给出的引理 3.2.5，$\varphi(\theta,\alpha)$ 是关于 θ 的严格凸函数。如果 $\varphi(-1)>\delta$ 成立，那么

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(\theta,\alpha)=-(\varphi(-1)-\delta)\alpha<0,\tag{3.82}$$

我们可以找到 $\varphi(\theta,\alpha)$ 的极值点 $\hat{\theta}$，由（3.67），可以算出

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta,\alpha)&=-(\delta+\theta(\gamma+\frac{\sigma^2}{2}-\delta))\alpha+\frac{\sigma^2}{2}\alpha(\alpha+1)\theta^2\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}((1+\theta(e^x-1))^{-\alpha}-1+\alpha\theta xI_{\{|x|\le1\}})\nu(dx),
\end{aligned}\tag{3.83}$$

对 $\varphi(\theta,\alpha)$ 求一阶导数，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(1,\alpha)=-(\gamma+\frac{\sigma^2}{2}-\delta)\alpha+\sigma^2\alpha(\alpha+1)-\alpha\int_{-\infty}^{\infty}((e^x-1)e^{-(\alpha+1)x}-xI_{\{|x|\le1\}})\nu(dx)\\
&=\alpha[\varphi(\alpha+1)-\varphi(\alpha)+\delta]。
\end{aligned}\tag{3.84}$$

如果 $\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(1,\alpha)\ge0$，等价于 $\varphi(\alpha+1)+\delta\ge\varphi(\alpha)$ 成立，那么 $\varphi(\theta,\alpha)$ 的极小点 $\hat{\theta}\in[0,1]$，反之 $\varphi(\alpha+1)+\delta<\varphi(\alpha)$ 成立，$\varphi(\theta,\alpha)$ 在区间 $\theta\in[0,1]$ 单调递减。对 $J(\varphi(\theta,\alpha))$ 求导

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}J(\varphi(\theta,\alpha))=\frac{\beta(\lambda\exp(\varphi(\theta,\alpha))-1)-b\varphi(\theta,\alpha)\lambda T\exp(\varphi(\theta,\alpha))}{(\lambda\exp(\varphi(\theta,\alpha))-1)^2},\tag{3.85}$$

容易验证 $\frac{\partial}{\partial\varphi}J(\varphi(\theta,\alpha))\le0$，这里用到了不等式 $e^{-x}\ge1-x$。换句话说，$J(\varphi)$ 关于 φ 递减。所以很容易验证（3.76）和（3.77）成立。

3.6 本章小结

本章在原有的破产理论的框架下，把投资组合理论嵌入到破产问题中，针对

资产价格的不同模型，如几何布朗运动，指数 Lévy 过程。讨论了保险公司的投资策略和破产问题，优化的约束都是在一定的风险水平下，而风险都是与破产概率相关，可以是最终破产概率，也可以是有限时间破产概率。3.2 节和 3.4 得到了渐进最优的投资策略，而 3.5 给出了近似的混合投资策略。对于组合投资下的破产概率，或者给出了上界，或者得到了破产概率的等价式。但是破产概率究竟为多少，本章没有给出回答，下一章，本文给出带有投资的破产概率的具体计算方法。

第四章 组合投资下破产量的估计

4.1 引言

前两章讨论了具有投资的保险公司的破产理论，第二章着重研究了带有利率的破产概率。由于破产概率本身复杂的形式，想要给出精确的表达式几乎是不可能的，所以研究的目标是给出破产概率的界值估计，或者给出破产概率的尾等价式。同样在第三章，在组合投资下的破产理论中，主要的研究目标是给出最优的投资策略。但是存在这样一个问题：如果保险公司按照第三章中给出的策略在市场上投资，风险有多大？破产概率究竟为多少？3.2-3.4 节在常数投资策略下给出了破产概率的上界，3.5 节给出了尾等价式。但上述的结果只是破产概率的估计式。

由于破产概率本身的复杂性，即使在经典模型中也很难找到其精确的解析表达式，更不用说再把投资考虑进去。一个重要的途径就是针对破产概率找到其积分或者微分方程，从而可以数值计算破产概率。本章力图对破产概率找到迭代积分方程，该方程含有积分算子，从而可以把初值带入方程进行循环迭代找到破产概率的数值解。

破产概率是最重要的风险预警指标。实际上，在破产理论中除了破产概率以外，还有很多重要的破产量，如：破产时间T，研究它首先要知道其分布函数，等价地要知道 Laplace 变换$E[e^{-\alpha T}]$；破产前瞬时盈余$U(T-)$;破产时的赤字$|U(T)|$；导致破产的索赔额$U(T-)+|U(T)|$等等。综合考虑以上破产量的方法就是研究其惩罚函数。惩罚函数的构造包括了以上提到的破产量。惩罚函数的研究思路实际上和破产概率一样，都是寻找其所满足的积分方程，然后可以对其进行数值求解。

近年来，盈余过程有一个重要的推广—带有随机扰动项的盈余过程，受到越来越多的学者的关注。以往的文献都是把随机扰动项看作是几何布朗运动，而几何布朗运动的一个局限性就是无法解释突然发生的跳跃，而一个自然的推广就是用 Lévy 过程描述几何布朗运动。本章也对这种带有随机扰动项的盈余过程的破产概率和惩罚函数展开研究，最后也得到了相应的积分方程。

本章的结构如下：4.2 节在投资为常数策略的条件下，分别就股票价格服从几何布朗运动和更广泛的 Lévy 过程两种情况，利用布朗运动的分布性质和离散化嵌入等方法，得到了破产概率的积分方程。4.3 节考虑了包括破产概率但是比破产概

率更加广泛的破产量—惩罚函数，得到了其破产概率。4.4 节，假设索赔额的分布是 phase-type 的。研究了带有随机扰动项的破产概率和惩罚函数，其中随机扰动项用 Lévy 过程表示，且 Lévy 过程具有 Wiener-Hopf 分解，得到了类似的积分方程。

4.2 带有投资的破产概率的积分方程

在对有投资的破产概率的研究中，以往所有文献或者讨论投资策略，或者只对破产概率进行估计，没有详细讨论破产概率的计算方法。破产概率作为衡量保险公司风险最重要的量和风险预警指标，一直以来都是保险精算界研究的热点，但是由于其自身的复杂性，即使是没有投资的经典的模型，也难以得到解析表达式。对于考虑保险公司投资的更加复杂的模型，需要在方法上突破，找到能数值求得破产概率的途径。保险公司除了保费收入和索赔付出之外，有机会投资风险市场，在这种条件下，定理 4.1 和定理 4.2 针对不同的模型，假设投资为常数策略，分别对股票价格服从几何布朗运动和更广泛的 Lévy 过程两种情况，得到了破产概率的积分方程。在经典的破产理论中，Feller(1991) [6]引入了更新方法，即利用盈余过程的平稳性，对破产概率建立更新方程。这个方法被 Cai(2004) [72]推广到了有投资的破产概率的研究中，并对破产概率建立迭代积分方程，提供了计算破产概率的方法，但是 Cai 的模型只是假设带有随机利率的破产概率。本章考虑了投资组合情形，即一部分资产投资到风险市场，剩下的无风险投资，具体模型参见下一部分。本章利用了离散化嵌入方法和更新方法，针对两种经典的带有投资组合的破产概率模型，建立了破产概率的迭代积分方程。

4.2.1 基本建模

首先对保险公司的承保盈余过程用经典方法进行建模：考虑索赔到达个数为一个强度为 λ 的齐次 Poisson 过程，记为 $N=(N(t))_{t\geq 0}$，则保险公司的承保盈余过程为 $R(t,u)$ 可表示成：

$$R(t,u)=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n, \tag{4.1}$$

其中，$u\geq 0$ 为保险公司的初始资本金，$c\in\mathbb{R}$ 是单位时间保费收入，第 n 次的索赔额 $X_n, n=1,2,\dots,$ 构成一个非负独立同分布随机变量序列且与非负随机变量 X 同分布，其分布函数为 $F(x)$，且 $\bar{F}(x)\triangleq 1-F(x)$。而第 $n-1$ 次和第 n 次索赔时间之

间的间隔为$\tau_n, n=1,2,\ldots$,构成另一相互独立的非负随机变量序列且具有相同的指数分布函数，其密度函数为$\lambda e^{-\lambda t}, t\ge 0$。记$T_n=\sum_{k=1}^{n}\tau_k$为第$n$次索赔到达的时间，规定$T_0=0$。进一步假设$\{X_n\}_{n\ge 1}$与$N$独立。

以下把投资问题引入到经典模型中。假设保险公司允许投资股票或者是市场指数，$S(t)$表示股票的价格过程，与承保盈余过程$R(t,u)$独立。如果在时刻t，保险公司拥有资产$U(t)\equiv U(t,u,K)$，投资$K(t)$份额的资金到股票市场，余下的$U(t)-K(t)$投资到无风险债券，假设其利率为0（无风险利率等于通货膨胀率）。这样，保险公司的投资构成了由风险部分和无风险部分构成的投资组合$(K(t),U(t)-K(t))$。这样，我们有：

$$U(t,u,K)=R(t,u)+\int_0^t \frac{K(s)}{S(s)}dS(s)\text{。} \tag{4.2}$$

以下就股票的价格过程和投资策略考虑两种具体的重要模型。

模型 1 股票的价格过程$S(t)$用几何布朗运动描述：$dS(t)=S(t)(adt+bdW(t))$，常数a为漂移率，b为扩散系数，$W(t)$为标准布朗运动。

Gaier et.al(2003) [22]证明了常数投资策略为一致最优的，因此模型 1 假设$K(t)\equiv K$，K为常数。这样，由（4.2）式我们有：

$$\begin{aligned}U(t,u,K)&=R(t,u)+\int_0^t \frac{K(s)}{S(s)}dS(s)\\&=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n+\int_0^t \frac{K}{S(s)}dS(s)\\&=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)}X_n+Kat+KbW(t)\text{。}\end{aligned}$$

假设股票价格是连续的几何布朗运动，实际上在现实中，股票价格存在着突然的上跳和下跳，上一章给出了详细的解释。一个重要的推广就是假设股票价格的收益率服从 Lévy 过程。下面的模型 2 中假设保险公司投资的股票价格为 Lévy 过程。

模型 2 假设股票价格$S(t)=e^{L(t)}$，其中$L(t)$为 Lévy 过程（平稳独立增量过程），$L(0)=0$。在模型 2 中，我们考虑的投资策略同样是常数投资，与模型 1 不同的是我们投资时间仅发生在索赔到达的时刻，即

$$K(t)=\sum_{n=1}^{\infty}KI_{\{t=T_{n-1}\}}\text{。} \tag{4.3}$$

其中，$T_0=0$。在以上假设下，有

$$U(t,u,K)=R(t,u)+\sum_{n=1}^{\infty}K(e^{L(T_n)-L(T_{n-1})}-1)\text{。} \tag{4.4}$$

下面给出保险公司破产概率的定义：

$$\Psi(u,K)=P\{U(t,u,K)<0,\text{对于某个 } t\ge 0\}\text{。} \tag{4.5}$$

定义破产时间为$T(u,K)\triangleq\inf\{t:U(t,u,K)<0\}$，以后简记为$T$。破产概率还可以表示为：$\Psi(u,K)=P(T<\infty)$。

4.2.2 破产概率的方程

在这一部分，本文针对模型 1 和模型 2，分别得出破产概率的迭代积分方程。模型 1 的迭代积分方程由定理 4.1 给出：

定理 4.1 股票价格和投资策略如模型 1 所给，且$K\neq 0$，则保险公司的破产概率满足积分方程：

$$\begin{aligned}\Psi(u,K)&=e^{-A_1\beta}+\frac{2\lambda}{(A_1+A_2)A_1}\int_0^u(e^{-A_1\frac{u-x}{|Kb|}}-e^{-A_1\beta})dF(x)\\&-\frac{2\lambda e^{-(A_1+A_2)\beta}}{(A_1+A_2)A_1}\int_0^u(e^{A_2\beta}-e^{-A_2\frac{u-x}{|Kb|}})dF(x)\\&+\frac{2(1-2\lambda e^{-(A_1+A_2)\beta})}{(A_1+A_2)A_1}\int_u^\infty(1-e^{-A_2\frac{u-x}{|Kb|}})dF(x)+\frac{2(1-\lambda e^{-A_1\beta})}{(A_1+A_2)A_1}(1-F(u))\\&+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\Psi(u+ct-x+Kat+Kaw,K)dwdF_X(x)dt\text{。}\end{aligned}$$

其中$\mu=\dfrac{c+Ka}{|Kb|}$，$\beta=\dfrac{u}{|Kb|}$。$A_1=\sqrt{\mu^2+2\lambda}+\mu$，$A_2=\sqrt{\mu^2+2\lambda}-\mu$。

证明. 我们分三种情况讨论破产

a. 破产发生在第一次索赔来到之前，即$T<T_1$，当且仅当$\inf\limits_{0\le s<T_1}U(t,u,K)<0$。这是由于投资失败导致的破产；

b. 破产恰好发生在第一次索赔发生之时，即$T=T_1$，当且仅当$\inf\limits_{0\le s<T_1}U(t,u,K)\ge 0$，$U(T_1,u,K)<0$。该情况是保险索赔导致的破产；

c.破产发生在第一次索赔来到之后，即$T_1<T<\infty$，这时候$U(T_1,u,K)\ge 0$，由于布朗运动和复合泊松过程都是平稳独立增量过程，所以保险公司的总资产过程在第一次索赔到达之后以初始值$U(T_1,u,K)$更新。

根据上述分析我们可以分解破产概率如下：

$$\Psi(u,K)=P(T<\infty)=P(T<T_1)+P(T=T_1)+P(T_1<T<\infty)\text{。} \qquad (4.6)$$

接下来我们分别计算（4.6）中三项，首先计算$P(T<T_1)$：

$$\begin{aligned}P(T<T_1)&=P(\inf_{s<T_1}\{u+cs+Kas+KbW(s)\}<0)\\&=P(\sup_{s<T_1}\{-u-cs-Kas-KbW(s)\}>0)\\&=P(\sup_{s<T_1}\{KbW(s)-(c+Ka)s\}>u)\\&=P(\sup_{s<T_1}\{W(s)-(\frac{c+Ka}{|Kb|})s\}>\frac{u}{|Kb|})\text{ 。}\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了布朗运动的反射准则，即$W(t)$和$-W(t)$具有相同分布。参见 Karatszas & Shreve(1991) [73],79 页。为了接下来的叙述方便，我们令$\mu=\dfrac{c+Ka}{|Kb|}$，$\beta=\dfrac{u}{|Kb|}$。这样，我们有

$$P(T<T_1)=P(\sup_{s<T_1}\{W(s)-\mu s\}>\beta)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}P(\sup_{s<t}\{W(s)-\mu s\}>\beta)dt\text{。} \qquad (4.7)$$

充分地，我们需要计算$P(\sup_{s<t}\{W(s)-\mu s\}>\beta)$。令$\tau_\beta=\inf\{t\geq 0;W(s)-\mu s=\beta\}$，$\tau_\beta$为随机过程$W(s)-\mu s$首次到达$\beta$的时间。文献 Karatszas & Shreve(1991) [73]，197 页给出τ_β的概率密度函数为：

$$P(\tau_\beta\in ds)=\frac{\beta}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\{-\frac{(\beta+\mu s)^2}{2s}\}ds,s\geq 0\text{ 。} \qquad (4.8)$$

因为，$P(\sup_{s<t}\{W(s)-\mu s\}>\beta)=P(\tau_\beta\leq t)$，继续计算得：

$$\begin{aligned}P(T<T_1)&=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}P(\tau_\beta\leq t)dt\\&=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[\int_0^t\frac{\beta}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\{-\frac{(\beta+\mu s)^2}{2s}\}ds]dt\\&=\exp\{-\beta(\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda})\}\text{。}\end{aligned}$$

上式最后一个等号成立是根据积分公式

$$\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{s^3}}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{\beta^2}{s}+\sqrt{\mu^2+2\lambda})s]\}ds=\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\exp\{-\beta\sqrt{\mu^2+2\lambda}\}\text{，} \qquad (4.9)$$

以及改变二重积分次序得到。

接下来估计 $P(T=T_1)$：

$$P(T=T_1)=P(\inf_{0\le s<T_1}U(s,u,K)\ge 0,U(T_1,u,K)<0)$$

$$=P(\sup_{0\le s<T_1}\{W(s)-\mu s\}\le\beta,W(T_1)-\mu T_1>\frac{u-X_1}{|Kb|})$$

$$=\int_0^\infty P(\sup_{0\le s<T_1}\{W(s)-\mu s\}\le\beta,W(T_1)-\mu T_1>\frac{u-x}{|Kb|})dF(x)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}P(\sup_{0\le s<t}\{W(s)-\mu s\}\le\beta,W(t)-\mu t>\frac{u-x}{|Kb|})dtdF(x)\quad,$$

由文献 Shreve(1997) [74],211 页，二维随机向量 $(\sup_{0\le s<t}\{W(s)-\mu s\},W(t)-\mu t)$ 的联合分布密度函数 $g(m,n)$ 为：

$$g(m,n)dmdn=P(\sup_{0\le s<t}\{W(s)-\mu s\}\in dm,W(t)-\mu t\in dn)$$

$$=\frac{2(2m-n)}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(2m-n)^2}{2t}-\mu n-\frac{1}{2}\mu t^2}dmdn,m>n,m>0。$$

我们得到：

$$P(\tau=T_1)=\int_0^u\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{\beta}\int_n^{\beta}g(m,n)dmdndtdF_X(x)$$

$$+\int_u^\infty\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}[\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{0}\int_0^{\beta}g(m,n)dmdn+\int_0^{\beta}\int_n^{\beta}g(m,n)\lambda e^{-\lambda t}dmdn]dtdF_X(x)\quad。$$

把密度函数 $g(m,n)$ 的具体表达式带入上式，通过改变积分次序和积分公式（4.8）,有

$$P(\tau=T_1)=2\lambda[\int_0^u\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{\beta}\int_n^{\beta}e^{(\sqrt{\mu^2+2\lambda}-\mu)n-2m\sqrt{\mu^2+2\lambda}}dmdndF(x)$$

$$+\int_u^\infty[\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{0}\int_0^{\beta}e^{(\sqrt{\mu^2+2\lambda}-\mu)n-2m\sqrt{\mu^2+2\lambda}}dmdn+\int_0^{\beta}\int_n^{\beta}e^{(\sqrt{\mu^2+2\lambda}-\mu)n-2m\sqrt{\mu^2+2\lambda}}dmdn]dF(x)],$$

为了表达简便，令 $A_1=\sqrt{\mu^2+2\lambda}+\mu$，$A_2=\sqrt{\mu^2+2\lambda}-\mu$，$\frac{A_1+A_2}{2}=\sqrt{\mu^2+2\lambda}$。通过计算以上二重不定积分，可以得到更精确的表达式：

$$P(T=T_1)=\frac{2\lambda}{(A_1+A_2)A_1}\int_0^u(e^{-A_1\frac{u-x}{|Kb|}}-e^{-A_1\beta})dF(x)-\frac{2\lambda e^{-(A_1+A_2)\beta}}{(A_1+A_2)A_1}\int_0^u(e^{A_2\beta}-e^{-A_2\frac{u-x}{|Kb|}})dF(x)$$

$$+\frac{2(1-2\lambda e^{-(A_1+A_2)\beta})}{(A_1+A_2)A_1}\int_u^\infty(1-e^{-A_2\frac{u-x}{|Kb|}})dF(x)+\frac{2(1-\lambda e^{-A_1\beta})}{(A_1+A_2)A_1}\bar{F}(u)\quad。$$

最后我们来计算最后一种情况，固定 $T_1=t,X_1=x,W(T_1)=w$，由于 T_1 时刻不破

产，所以$u+ct-x+Kat+Kaw\geq 0$，根据 c 的分析，以及布朗运动和复合泊松过程具有平稳独立增量，有

$$P(T_1<T<\infty|T_1=t,X_1=x,W(T_1)=w)=\Psi(u+ct-x+Kat+Kaw,K)\ 。$$

所以，

$$P(T_1<T<\infty)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}P(T_1<T<\infty|T_1=t,X_1=x,W(T_1)=w)dwdF(x)dt$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\Psi(u+ct-x+Kat+Kaw,K)dwdF(x)dt。$$

综合以上，定理 4.1 得证。

接下来处理模型 2，我们首先介绍保险公司的总资产过程的离散化嵌入过程[72]，令$U_n=U(T_n,u,K),n=1,2,...,\ U_0=u$。$U_n$代表了第$n$次索赔时的总资产，被称为离散嵌入过程，且满足：

$$U_n=U_{n-1}+c(T_n-T_{n-1})-X_n+K(e^{L(T_n)-L(T_{n-1})}-1),n=1,2,...,$$

因为$L(t)$是 Lévy 过程，所以$(T_n-T_{n-1},e^{L(T_n)-L(T_{n-1})})$是一列独立同分布的二维随机向量，且和$(T_1,e^{L(T_1)})$具有相同分布，其联合密度函数为$p(t,y),t\geq 0,y\geq 0$。模型 2 的特点是投资过程是离散的，投资只发生在索赔时刻，所以非索赔时刻不可能发生破产，因此

$$\Psi(u,K)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n<0))\ 。\tag{4.12}$$

而且，定义$\Psi_n(x,K)\triangleq P(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i<0))$，表示第$n$次索赔之前破产的概率。因为

$$0\leq\Psi_1(u,K)\leq\Psi_2(u,K)\leq...\leq\Psi_n(u,K)\leq...,\tag{4.13}$$

所以，$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(u,K)=\Psi(u,K)$。我们先来给出$\Psi_n(u,K)$的递推积分方程：

引理 4.1 对于$u\geq 0$，$n=1,2,...,$有

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}(u,K)=&\int_0^\infty\int_0^\infty\bar{F}(u+ct+K(y-1))p(t,y)dtdy\\&+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct+K(y-1)}\Psi_n(u+ct+K(y-1)-x,K)p(t,y)dF(x)dtdy。\end{aligned}\tag{4.14}$$

初始值为

$$\Psi_1(u,K)=\int_0^\infty\int_0^\infty\bar{F}(u+ct+K(y-1))p(t,y)dtdy=E[\bar{F}(u+cT_1+K(e^{L(T_1)}-1))]\ 。$$

证明. 首先我们计算$\Psi_1(u,K)$，因为X_1和(T_1,e^{T_1})独立，因此

$$\Psi_1(u,K)=P(U_1<0)=P(u+cT_1-X_1+K(e^{L(T_1)}-1)<0)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty P(X_1>u+ct+K(y-1)\mid T_1=t,e^{L(T_1)}=y)p(t,y)dtdy$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{F}(u+ct+K(y-1))p(t,y)dtdy。$$

固定$X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y$，如果$x>u+ct+K(y-1)$，那么

$$P(U_1<0\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)=1。\tag{4.15}$$

也就是说，如果$x\le u+ct+K(y-1)$，那么$P(U_1<0)\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)=0$，

且

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1}(U_i<0)\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)$$
$$=P(\bigcup_{i=2}^{n+1}(U_i<0)\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)$$
$$+P(U_1<0\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)$$
$$=\Psi_n(u+ct+K(y-1)-x,K),$$

因此我们有

$$\Psi_{n+1}(u,K)=P(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{U_i<0\})$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty P(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{U_i<0\}\Big|X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)p(t,y)dF(x)dtdy$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{u+ct+K(y-1)}^\infty dF(x)p(t,y)dtdy$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct+K(y-1)} P(\bigcup_{i=2}^{n+1}(U_i<0)\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y)p(t,y)dtdy$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{F}(u+ct+K(y-1))p(t,y)dtdy$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct+K(y-1)}\Psi_n(u+ct-x+K(y-1),K)p(t,y)dtdy。$$

引理得证。

在引理 4.1 中（4.15）式两端同时令$n\to\infty$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(u,K)=\Psi(u,K)$，我们得到破产概率的积分方程。

定理 4.2 股票价格和投资策略如模型 2 所给，则保险公司的破产概率满足积分方程：

$$\Psi(u,K)=\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{F}(u+ct+K(y-1))p(t,y)dtdy$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct+K(y-1)}\Psi(u+ct+K(y-1)-x,K)p(t,y)dF(x)dtdy。$$

注 4.1 关于定理 4.2 中的积分方程，Roynette et.al(2005)[75]给出了该类积分方程的详细计算方法和算例。定理 4.2 中的积分方程，可以参考 Wang & Wu(2001)[76]的方法，针对不同的特殊 Lévy 过程求解。

还是考虑保险公司投资一部分资金到股票市场，余下的一部分投资到利率为常数的无风险债券的情形下，研究的对象是最终破产概率。在投资为常数策略的条件下，分别就股票价格服从几何布朗运动和更广泛的 Lévy 过程两种情况，利用布朗运动的分布性质和离散化嵌入等方法，得到了破产概率的积分方程，从而给出了更精确地计算破产概率的方法。

4.3 带有投资的惩罚函数的积分方程

实际上，在破产理论中除了破产概率以外，还有很多重要的破产量，如：破产时间的 Laplace 变换 $E[e^{-\alpha T}]$；破产前瞬时盈余 $U(T-)$；破产时的赤字 $|U(T)|$；导致破产的索赔额 $U(T-)+|U(T)|$。一个全面的方法研究以上提到的破产量就是考虑保险公司的惩罚函数，惩罚函数由 Gerber & Shiu(1997)[77]定义如下：

$$\Phi_\alpha(u)=E[g(U(T-),|U(T)|)e^{-\alpha T}I(T<\infty)], \tag{4.16}$$

其中，$g(x,y)$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，为一个非负函数；$\alpha\geq 0$；$I(C)$ 是集合 C 的示性函数。

把函数 g 设定成不同的函数形式就可以得到以上提到的各个破产量。取 $g\equiv 1$，$\alpha=0$，那么 $\Phi_\alpha(u)=\Psi(u)$；如果取 $g\equiv 1$，$\alpha>0$，那么

$$\Phi_\alpha(u)=E[e^{-\alpha T}I(T<\infty)]=E[e^{-\alpha T}],$$

因为，

$$e^{-\alpha T}=e^{-\alpha T}I(T<\infty)+e^{-\alpha T}I(T=\infty)=e^{-\alpha T}I(T<\infty);$$

如果取 $g(x_1,x_2)\equiv I(x_2\leq y)$，$\alpha=0$，则可以得到破产时刻赤字的分布函数 $\Phi_\alpha(u)=P(|U(T)|\leq y,T<\infty)$；如果取 $g(x_1,x_2)\equiv I(x_1+x_2\leq y)$，$\alpha=0$，则

$$\Phi_\alpha(u)=P(U(T-)+|U(T)|\leq y,T<\infty),$$

为导致破产的索赔额的分布函数。综上可知，惩罚函数是带有更多破产信息，综

合考虑了很多重要的破产量。

4.3.1 惩罚函数的积分方程---股票价格服从几何布朗运动

在这一部分，针对 4.2.1 中的模型 1。得出惩罚函数的迭代积分方程，由定理 4.2 给出：

定理 4.2 股票价格和投资策略如模型 1 所给，且$K\neq 0$，则保险公司的惩罚函数满足积分方程：

$$
\begin{aligned}
\Phi_\alpha(u) &= g(0,0)\exp\{-\beta(\mu+\sqrt{\mu^2+2(\lambda+\alpha)})\} \\
&+\int_0^u\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{\beta}\int_n^\beta E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}]g(m,n)dmdndtdF(x) \\
&+\int_u^\infty\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{0}\int_0^\beta E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}]g(m,n)dmdn \\
&+\int_0^\beta\int_n^\beta E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}]g(m,n)dmdn]dtdF(x) \\
&+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\Phi_\alpha(u+ct-x+Kat+Kaw)dwdF(x)dt。
\end{aligned}
$$

其中$\mu=\dfrac{c+Ka}{|Kb|}$，$\beta=\dfrac{u}{|Kb|}$。$g(m,n)=\dfrac{2(2m-n)}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(2m-n)^2}{2t}-\mu n-\frac{1}{2}\mu t^2}$ 。

证明. 和破产概率的积分方程类似，我们分三种情况讨论破产：

a'. 破产发生在第一次索赔来到之前，即$T<T_1$，当且仅当$\inf\limits_{0\le s<T_1}U(s)<0$。这是由于投资失败导致的破产；在这种情况下，$U(T-)=U(T)=0$。

b'. 破产恰好发生在第一次索赔发生之时，即$T=T_1$，当且仅当$\inf\limits_{0\le s<T_1}U(s,u,K)\ge 0$，$U(T_1)<0$。该情况是保险索赔导致的破产；

c'. 破产发生在第一次索赔来到之后，即$T_1<T<\infty$，这时候$U(T_1)\ge 0$，由于布朗运动和复合泊松过程都是平稳独立增量过程，所以保险公司的总资产过程在第一次索赔到达之后以初始值$U(T_1)$更新；

根据上述分析我们可以分解惩罚函数如下：

$$
\begin{aligned}
\Phi_\alpha(u) &= E[g(0,0)e^{-\alpha T}I(T<T_1)]+E[g(U(T_1-),|U(T_1)|)e^{-\alpha T_1}I(T=T_1)] \\
&+E[g(U(T-),|U(T)|)e^{-\alpha T}I(T>T_1)] \qquad (4.17) \\
&\triangleq \Phi_\alpha^1(u)+\Phi_\alpha^2(u)+\Phi_\alpha^3(u)。
\end{aligned}
$$

接下来我们分别计算（4.16）中的三项，首先计算破产发生在第一次索赔之前，

破产时间的分布函数：

$$P(T \le t) = P(\inf_{s\le t}\{u + cs + Kas + KbW(s)\} < 0)$$
$$= P(\sup_{s\le t}\{-u - cs - Kas - KbW(s)\} > 0) = P(\sup_{s\le t}\{KbW(s) - (c + Ka)s\} > u)$$
$$= P(\sup_{s\le t}\{W(s) - (\frac{c+Ka}{|Kb|})s\} > \frac{u}{|Kb|}),\quad t \le T_1。$$

其中最后一个等式用到了布朗运动的反射准则，即$W(t)$和$-W(t)$具有相同分布。参见 Karatszas & Shreve(1991) [73],79 页。为了接下来的叙述方便，我们令$\mu = \frac{c+Ka}{|Kb|}$，$\beta = \frac{u}{|Kb|}$。这样，我们有

$$P(T \le t) = P(\sup_{s<t}\{W(s) - \mu s\} > \beta),$$

充分地，我们需要计算$P(\sup_{s<t}\{W(s) - \mu s\} > \beta)$。令$\tau_\beta = \inf\{t \ge 0; W(s) - \mu s = \beta\}$，$\tau_\beta$为随机过程$W(s) - \mu s$首次到达$\beta$的时间。文献 Karatszas&Shreve(1991)[73]，197 页给出τ_β的概率密度函数为：

$$P(\tau_\beta \in ds) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\{-\frac{(\beta + \mu s)^2}{2s}\}ds, s \ge 0。$$

因为，$P(\sup_{s<t}\{W(s) - \mu s\} > \beta) = P(\tau_\beta \le t)$，继续计算得：

$$P(T \le t) = \int_0^t \frac{\beta}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\{-\frac{(\beta + \mu s)^2}{2s}\}ds。$$

从而破产时间T的概率密度为$f_T(t) = \frac{dP(T \le t)}{dt} = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\{-\frac{(\beta + \mu t)^2}{2t}\}$。这样，我们可以计算$\Phi_\alpha^1(u)$如下：

$$\Phi_\alpha^1(u) \equiv E[g(0,0)e^{-\alpha T}I(T < T_1)] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}E[g(0,0)e^{-\alpha T}I(T < t)]dt$$
$$= g(0,0)\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-\alpha s}\frac{\beta}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\{-\frac{(\beta + \mu s)^2}{2s}\}dsdt$$
$$= g(0,0)\exp\{-\beta(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2(\lambda + \alpha)})\}。$$

上式最后一个等号成立是首先改变二重积分次序，然后利用积分公式

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s^3}}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{\beta^2}{s} + \sqrt{\mu^2 + 2(\lambda + \alpha)}s]\}ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\exp\{-\beta\sqrt{\mu^2 + 2(\lambda + \alpha)}\},\quad (4.18)$$

得到。

接下来估计$\Phi_{\alpha}^{2}(u)$：

$$\Phi_{\alpha}^{2}(u)=E[g(U(T_1-),|U(T_1)|)e^{-\alpha T_1}I(T=T_1)]$$
$$=E[g(U(T_1-),|U(T_1)|)e^{-\alpha T_1}I(\inf_{0\le s<T_1}U(s)\ge 0,U(T_1)<0)]$$
$$=E[g(U(T_1-),|U(T_1)|)e^{-\alpha T_1}I(\sup_{0\le s<T_1}\{W(s)-\mu s\}\le\beta,W(T_1)-\mu T_1>\frac{u-X_1}{|Kb|})]$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}I(A_t\le\beta,B_t>\frac{u-x}{|Kb|})]dtdF(x)。$$

为了简便叙述，上式中记二维向量$(A_t,B_t)\triangleq(\sup_{0\le s<t}\{W(s)-\mu s\},W(t)-\mu t)$，由文献 Shreve(1997)[59]中 211 页，其二维联合分布密度函数$g(m,n)$为：

$$g(m,n)dmdn=P(\sup_{0\le s<t}\{W(s)-\mu s\}\in dm,W(t)-\mu t\in dn)$$
$$=\frac{2(2m-n)}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(2m-n)^2}{2t}-\mu n-\frac{1}{2}\mu t^2}dmdn,m>n,m>0\text{ 。}$$

我们得到：

$$\Phi_{\alpha}^{2}(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}E[g(U(t-),|U(t)|]e^{-\alpha t}I(A_t\le\beta,B_t>\frac{u-x}{|Kb|})]dtdF(x)$$
$$=\int_0^u\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{\beta}\int_n^{\beta}E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}]g(m,n)dmdndtdF(x)$$
$$=\int_u^\infty\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}[\int_{\frac{u-x}{|Kb|}}^{0}\int_0^{\beta}E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}]g(m,n)dmdn$$
$$+\int_0^{\beta}\int_n^{\beta}E[g(U(t-),|U(t)|)e^{-\alpha t}]g(m,n)dmdn]dtdF(x)。$$

最后我们来计算最后一种情况，固定$T_1=t,X_1=x,W(T_1)=w$，由于T_1时刻不破产，所以$u+ct-x+Kat+Kaw\ge 0$，根据情况 c'的分析，以及布朗运动和复合泊松过程具有平稳独立增量，有

$$\Phi_{\alpha}^{3}(u\,|\,T_1=t,X_1=x,W(T_1)=w)=\Phi_{\alpha}(u+ct+Kat+Kbw-x)\text{ 。}$$

所以，

$$\Phi_{\alpha}^{3}(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\Phi_{\alpha}^{3}(u|T_1=t,X_1=x,W(T_1)=w)dwdF(x)dt$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\Phi_{\alpha}(u+ct-x+Kat+Kaw)dwdF(x)dt。$$

综合以上，定理 4.2 得证。

注 4.2 关于定理 4.2 中的积分方程，如果模型中的参数给定，Roynette et.al(2005)[75]给出了该类积分方程的详细计算方法和算例。

4.3.2 惩罚函数的积分方程—股票价格服从指数 Lévy 过程

在上一小节，研究的对象是惩罚函数，而且假设风险资产的价格过程服从几何布朗运动，在第三章的 3.4 节中，已经阐述了几何布朗运动在于描述资产价格过程中的局限性。在本节，用指数 Lévy 过程给股票价格过程建模。假设股票价格 $S(t)=e^{L(t)}$，其中 $L(t)$ 为 Lévy 过程（平稳独立增量过程），$L(0)=0$。考虑一种离散的投资策略，即在每一个索赔时间点上投资风险市场的资金为固定常数 K，也就是说投资策略过程 $K(t)$ 满足：

$$K(t)=\sum_{n=1}^{\infty}KI_{\{t=T_{n-1}\}}\text{。}$$

该策略说明，保险公司只是在索赔到达的时间上投资，中间既不加仓也不减仓，直到下一次索赔到达再进行操作。

针对上述模型，依然用 4.2 节中介绍过的离散化嵌入技巧构造惩罚函数的积分方程。首先对总资产过程进行离散化，定义 $U_n=U(T_n,u,K),n=1,2,...,\ U_0=u$。$U_n$ 代表了第 n 次索赔时的总资产，被称为离散化嵌入过程，且满足：

$$\begin{aligned}U_n&=U_{n-1}+c(T_n-T_{n-1})-X_n+K(e^{L(T_n)-L(T_{n-1})}-1),n=1,2,...,\\&\overset{d}{=}U_{n-1}+cT_1-X_1+K(e^{L(T_1)}-1)\text{。}\end{aligned}$$

上式第二个等式是因为 $L(t)$ 是 Lévy 过程，所以 $(T_n-T_{n-1},e^{L(T_n)-L(T_{n-1})})$ 是一列独立同分布的二维随机向量，且和 $(T_1,e^{L(T_1)})$ 具有相同分布，其联合密度函数为 $p(t,y),t\geq 0,y\geq 0$。模型 2 的特点是投资过程是离散的，投资只发生在索赔时刻，所以非索赔时刻不可能发生破产，因此

$$\Psi(u,K)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n<0))\text{。}\tag{4.12}$$

而且，定义 $\Psi_n(u,K)\triangleq P(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i<0))$，表示第 n 次索赔之前破产的概率。因为

$$0\leq\Psi_1(u,K)\leq\Psi_2(u,K)\leq...\leq\Psi_n(u,K)\leq...,\tag{4.13}$$

由于破产概率列单调递增有上界，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(u,K)=\Psi(u,K)$。

下一个定理给出了惩罚函数的积分方程。

定理 4.3 股票价格服从指数 Lévy 过程，投资策略过程 $K(t)$ 满足 $K(t)=\sum_{n=1}^{\infty}KI_{\{t=T_{n-1}\}}$，则保险公司的惩罚函数 $\Phi_\alpha(u)$ 满足积分方程：

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\alpha(u)\\
&=\int_0^\infty \lambda e^{-(\alpha+\lambda)t}\int_0^\infty\int_0^{u+ct+k(y-1)}\Phi_\alpha(u+ct-x+K(y-1))\\
&\times dF(x)p(t,y)dydt\\
&+\int_0^\infty \lambda e^{-(\alpha+\lambda)t}\int_0^\infty A(u+ct-K(y-1))p(t,y)dydt,
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

其中，$A(u)=\int_u^\infty g(u,x-u)dF(x)$。

证明. 固定 $T_1=t,X_1=x,e^{L(T_1)}=y$，如果 $x\le u+ct+K(y-1)$ 成立，那么破产不会发生且有 $U_1=u+ct-x+K(y-1)$，$\Phi_\alpha(u+ct-x+K(y-1))$ 就变成了从开始的 t 时刻函数 g 的折现值的数学期望，因此，$\Phi_\alpha(u+ct-x+K(y-1))$ 在 0 时刻的折现值为 $e^{-\alpha t}\Phi_\alpha(u+ct-x+k(y-1))$。

如果 $x>u+ct+K(y-1)$ 成立，那么破产在第一次索赔时刻发生，而且有 $T=T_1=t,\ U(T-)=u+ct+k(y-1)$ 和 $|U(T)|=x-[u+ct+k(y-1)]$ 成立。

注意到，$(T_1,e^{L(T_1)})$和 X_1 相互独立，所以有如下推导：

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\alpha(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}E[g(U(T-),|U(T)|)e^{-\alpha T}\\
&I_{(T<\infty)}\mid X_1=x,T_1=t,e^{L(T_1)}=y]\times dF(x)g(t,y)dydt\\
&=\int_0^\infty \lambda e^{-(\alpha+\lambda)t}\int_0^\infty\int_0^{u+ct+k(y-1)}\Phi_\alpha(u+ct-x+k(y-1))\times dF(x)p(t,y)dydt\\
&+\int_0^\infty \lambda e^{-(\alpha+\lambda)t}\int_0^\infty\int_{u+ct+k(y-1)}^\infty g(u+ct+k(y-1),x-(u+ct+k(y-1)))\times dF(x)p(t,y)dydt。
\end{aligned}
$$

再根据 $A(u)=\int_u^\infty g(u,x-u)dF(x)$，所以定理 4.3 得证。

推论 4.1.令定理 4.3 中的 $g=1$ 和 $\alpha=0$，可以得到积分方程

$$
\begin{aligned}
\Psi(u,K)&=\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{F}(u+ct+K(y-1))p(t,y)dtdy\\
&+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct+K(y-1)}\Psi(u+ct+K(y-1)-x,K)p(t,y)dF(x)dtdy。
\end{aligned}
$$

推论 4.1 说明，定理 4.3 是定理 4.2 的推广。

4.4 带有随机扰动项的惩罚函数的积分方程

事实上，盈余过程$R(t,u)$经常会带有随机的干扰。带有扰动项的风险模型是对经典模型的推广。Gerber(1973)[78]首先研究了该问题，许多其他的学者也研究了这个问题。比如说，Dufrense & Gerber(1991) [79]，Furre and Schmidli(1994) [80]，schmidli(1995) [81]，Gerber & landry(1998) [82]，Wang & Wu(2001) [83]，Tsai & willmot(2000) [84]，Li & Garrido(2004) [85]等等。在盈余过程的基础上，带有扰动的风险盈余过程为

$$U(t)=R(t,u)+P(t), \tag{4.15}$$

其中$P(t)$被称为扩散过程与$R(t,u)$独立，经典的模型一般用带有飘移的布朗运动表示，在本节中，考虑一种更加复杂的推广，即$P(t)$是带有随机跳跃的扩散过程，用 Lévy 过程去描述$P(t)$。在本节中，假设$P(t)$为一种特殊的 Lévy 过程，其具有 Wiener-hopf 分解。$P(t)$可以分解成如下形式：

$$P(t)=P^{+}(t)-J(t), \tag{4.16}$$

其中$P^{+}(t)$是一个没有负跳的 Lévy 过程，$J(t)$是一个强度为λ^{-}的复合泊松过程。$P^{+}(t)$的特征三元组为 $(\gamma,\sigma^{2},\nu^{+})$，其中$\nu^{+}$是一个只有正支撑的 Lévy 测度。根据 Lévy-Khintchine 引理，$P^{+}(t)$的特征指数为

$$\varphi_{P}(s)=is\gamma+\frac{\sigma^{2}}{2}s^{2}+\int_{0}^{\infty}(e^{isx}-1-isxI(|x|\le 1))\nu^{+}(dx)\text{。} \tag{4.17}$$

假设$J(t)$的跳跃大小服从 phase-type 分布。Phase-type 分布推广了指数族分布，而且所有的支撑在$(0,\infty)$上的分布族上稠密。其在精算领域被广泛应用，参考 Asmussen(2004)[86]。下面给出 Phase-type 分布的定义。

一个支撑在$(0,\infty)$上的分布F被称为 phase-type 分布，如果它是一个有限状态连续时间 Markov 过程$M(t)$的吸收时间ζ的分布，其中$M(t)$拥有一个吸收状态Δ，剩下$1,2,\ldots,m$，为可转移的状态。也就是说，$F(t)=P(\zeta\le t)$，其中ζ可表示为$\zeta=\inf\{s>0,M(s)=\Delta\}$。$F$由三个参数决定，转移状态数$m$，转移密度矩阵$\mathbf{T}$，以及初始状态向量$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_{1},\ldots,\alpha_{m})$，其中 $\alpha_{i}=P(M(0)=i)$。对于任意的$i=1,\ldots,m$，令 t_{i}为状态转移$i\to\Delta$的概率密度。$\mathbf{t}=(t_{1}\ldots t_{m})'$为列向量。$\mathbf{t}=-\mathbf{T1}$成立，其中 $\mathbf{1}$ 表示单位列向量。这样，F可以写成

$$F(x)=1-\boldsymbol{\alpha}e^{\mathbf{T}x}\mathbf{1}, \tag{4.18}$$

其密度函数为$f(x)=\boldsymbol{\alpha}e^{\mathbf{T}x}\mathbf{t}$，$F$ 的 Laplace 变换可以记为

$$\hat{F}[s]=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)=\boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}。\tag{4.19}$$

公式（4.18）中的表示如果成为最小表示，如果不存在$k<m$，k阶向量$\mathbf{b}$ and $k\times k$阶矩阵$\mathbf{G}$使得$1-F(x)=\mathbf{b}e^{\mathbf{G}x}\mathbf{1}$。

我们的研究对象依然是惩罚函数$\Phi_\delta(u)=E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(\tau<\infty)]$，其包含了破产概率，破产事件，破产时刻赤字和导致破产的索赔等重要的破产量。由于惩罚函数的形式比较复杂，难以直接计算。其中一个通常的方式就是对破产量建立积分方程，从而可以找到破产量的数值解。

Norberg(1999) [87]在几个不同的随机模型下得到了破产概率的微分方程，其中假设破产概率二阶连续可微。在这一节，假设索赔额的分布为 phase-type，这等价于净收益过程具有 Wiener-Hopf 分解。净收益过程写成

$$\begin{aligned}V(t)&=U(t)-u\\&=ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i+P(t)。\end{aligned}\tag{4.20}$$

令$X(t)=ct+P(t)=P^+(t)+ct-J(t)$，定义$X^+(t)=ct+P^+(t)$，那么$X(t)$同样也是一个 Lévy 过程具有 Wiener-hopf 分解 $X(t)=X^+(t)-J(t)$，其中$X^+(t)$是 Lévy 过程带有特征三元组$(\gamma+c,\sigma^2,\nu^+)$。$J(t)$是一个强度为$\lambda^-$的复合泊松过程，其跳跃大小服从 phase-type 分布具有参数$(m,\mathbf{T},\boldsymbol{\alpha})$。

假设$X(t)$具有非单调的路径。定义$\kappa(s)=\log E[\exp(sX(1))]$为$X$的 Lévy 指数。根据$X$的跳跃结构。$\kappa$能被解析延拓到负的复平面除了有限的点外，即$\mathbf{T}$的特征值。设$n=\{i:R(\rho_i)<0\}$为满足方程$\kappa(\rho)=\lambda$的实部为负的根的集合。令$I_\lambda=\inf_{t<T_1}X(t)$为过程$X$在$T_1$之前的最小值，同时$\varphi_I(s)=E[\exp(sI_\lambda)]$。根据 Tauberian 定理可知$\varphi_I(\infty)=P(I_\lambda=0)$。

既然$V(t)$是一个 Lévy 过程，其必有平稳独立增量。那么过程$V(t+T_1)-V(T_1)$依然是一个 Lévy 过程，其同分布于$V(t)$。有了这个性质，可以分三种情况讨论破产：

- 破产在第一次索赔到达之前发生，用公式表示为$\tau(u)<T_1$，也等价于$-\inf_{t<T_1}X(t)>u$。
- 破产发生在第一次索赔之时，即$\tau(u)=T_1$当且仅当$-\inf_{t<T_1}X(t)<u$和$X(T_1)-X_1+u<0$同时成立。在该条件下，破产的发生是由于索赔引起的，因为$R(t,u)$和$P(t)$的跳跃不可能同时发生。
- 破产在第一次索赔以后发生，即$\tau(u)>T_1$。在$\{\tau(u)>T_1\}$的条件下，$\tau(u)-T_1$和$\hat{\tau}(u+V(T_1))$同分布，$\hat{\tau}(u)$是$\tau(u)$独立复制。

引理 **4.2**(Asmussen et.al(2004)[86]). 如果$\kappa(\rho)=\lambda$的带有负实部的根全不相等，即没有重根，则

$$P(-I_\lambda \in dx)=\sum_{j\in n}A_j(-\rho_j)e^{\rho_j x}dx,\quad x>0\text{，}\tag{4.21}$$

其中，$\mathbf{A}=(A_i,i\in m)$ 是下式的系数：

$$\varphi_I(s)-\varphi_I(\infty)=\sum_{j\in n}A_j\rho_j(\rho_j-s)^{-1},\quad x>0\text{。}\tag{4.22}$$

引理 4.2 中假设没有重根只是为了说明方便。参考 Asmussen et.al(2004)[86]中注 4。

首先给出破产概率的积分方程：

定理 **4.5.** 参数和模型设置和前面一致，对于任意的$u\geq 0$，

$$\Psi(u)=\sum_{j\in n}A_je^{\rho_j x}+\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{x-u}\int_u^\infty h_t(a,b)dadbdF(x)dt+\Lambda\Psi(u)\text{，}$$

其中$h_t(a,b)$是二维随机变量$(\inf_{0\leq s\leq t}X(s),X(t))$的概率密度函数，$\Lambda$是积分算子，

$$\Lambda\Psi(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{-u}^\infty\int_{x-u}^\infty \Psi(u+a-x)h_t(a,b)dadbdF(x)dt,$$

证明. 根据破产的三种情况，可以把破产概率$\Psi(u)$分解为：

$$\Psi(u)=P(\tau<\infty)=P(\tau<T_1)+P(\tau=T_1)+P(T_1<\tau<\infty)\text{。}\tag{4.23}$$

由引理 4.2，可以计算（4.23）中第一项，得

$$\begin{aligned}P(\tau\leq T_1)&=P(\inf_{t<T_1}U(t)<0)=P(-\inf_{t<T_1}V(t)>u)\\&=P(-I_\lambda>u)=\int_u^\infty\sum_{j\in n}A_j(-\rho_j)e^{\rho_j x}dx=\sum_{j\in n}A_je^{\rho_j x},\quad x\geq 0\text{。}\end{aligned}\tag{4.24}$$

对于（4.23）中的第二项，首先应用全概率公式计算如下：

$$\begin{aligned}P(\tau=T_1)&=P(-\inf_{t<T_1}X(t)<u,X(T_1)+u-X_1<0)\\&=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty P(-\inf_{s<t}X(t)<u,X(t)+u-x<0\,|\,T_1=t,X_1=x)dF(x)dt\\&=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty P(\inf_{s<t}X(t)>-u,X(t)+u-x<0)dF(x)dt\\&=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{x-u}\int_u^\infty h_t(a,b)dadbdF(x)dt\text{，}\end{aligned}\tag{4.25}$$

其中第三个等式成立是因为T_1,X_1 和$X(t)$独立。

最后来处理最后一项$P(T_1<\tau<\infty)$，

$$P(T_1\leq\tau<\infty)=P(0\leq\tau(u)-T_1<\infty)=P(\hat{\tau}(u+V(T_1))<\infty\,|\,\tau>T_1)\text{。}\tag{4.26}$$

根据T_1和 $X(t)$独立，固定 $X_1=x$，$T_1=t$，$\inf\limits_{0\le s\le t}X(s)=a,X(t)=b$，$\tau>T_1$意味着 $a>-u$和 $u+b-x>0$成立。那么有

$$
\begin{aligned}
&P(T_1<\tau<\infty)\\
&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{x-u}^\infty\int_{-u}^\infty P(\hat{\tau}(u+V(T_1))<\infty\mid T_1=t,X_1=x,X(t)=b,\inf\nolimits_{0\le s\le t}X(s)=a)\\
&\times h_t(a,b)dadbdF(x)dt\\
&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{x-u}^\infty\int_{-u}^\infty\Psi(u+a-x)h_t(a,b)dadbdF(x)dt。
\end{aligned}
$$

综合以上的证明可知定理 4.5 成立。

注 4.1. 针对订立 4.5 中的联合密度函数，可以作如下的处理。首先定义首达时$T_a=\inf\{t\ge 0,X(t)\le a\}$，那么二维随机变量$(\inf_{0\le s\le t}X(s),X(t))$的联合分布可以表示为

$$P(\inf_{0\le s\le t}X(s)\le a,X(t)\le b)=P(T_a\le t,X(t)\le b)。$$

也就是说，只要找到$(T_a,X(t))$的联合分布函数$l_a(p,q)$或者等价地找到联合矩母函数$u_a(\beta,\gamma)=E[\exp(-\beta T_a+\gamma X(t))]$。根据 Asmussen(2004)[86]中命题 2.6，有，

$$u_a(\beta,\gamma)=\varphi_I^\beta(\gamma)^{-1}\sum_{j\in m}A_j\rho_je^{-a\rho_j}/(\rho_j-\gamma), \tag{4.27}$$

其中$\varphi_I^\beta(s)=E[\exp(s\inf\limits_{s\le Y(\beta)}X(s))]$，$Y(\beta)$是一个参数为$\beta$的指数函数。

最后给出惩罚函数的积分方程。

定理 4.6. 对于任意的$u\ge 0$，$\Phi_\delta(u)$满足下面的积分方程：

$$
\begin{aligned}
\Phi_\delta(u)&=\int_u^\infty\sum_{j\in m}A_j(-\rho_j)e^{\rho_jx}\int_0^\infty\iint_{R^2}\sum_{i=0}^{m}g(u+q+z,|u+q|)e^{-\delta p}l_{-u}(p,q)F_i(dz)dx\\
&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{u-x}\int_{-u}^\infty g(u+b+x,|u+b|)e^{-\delta t}h_t(a,b)dadbdF(x)dt+\Lambda\Phi_\delta(u),
\end{aligned}
$$

其中 $F_0(dz)=\delta_0(dz)$，对于$i\ne 0$，$1-F_i(dz)=\mathbf{1}_ie^{\mathbf{T}z}\mathbf{t}$。

证明. 和破产概率的分解类似，同样可以对惩罚函数作如下分解：

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\delta(u)=E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(\tau<\infty)]\\
&=E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(\tau<T_1)]+E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(\tau=T_1)\\
&+E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(T_1<\tau<\infty)]\\
&=\Phi_\delta^1+\Phi_\delta^2+\Phi_\delta^3,
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

接下来分别计算（4.28）中的三项，首先有

$$\begin{aligned}\Phi_\delta^1 &= E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(\tau<T_1)] \\ &= E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(-\inf_{t\le T_1}X(t)>u)],\end{aligned} \tag{4.29}$$

根据引理 4.2，

$$\begin{aligned}\Phi_\delta^1 &= E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(-\inf_{t\le T_1}X(t)>u)] \\ &= \int_u^\infty E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}]P(-I_\lambda\in dx) \\ &= \int_u^\infty \sum_{j\in m} A_j(-\rho_j)e^{\rho_j x}E[g(u+X(\tau-),|u+X(\tau)|)e^{-\delta\tau}]dx,\end{aligned}$$

设 $T_{-u}=\inf\{t\ge 0, X(t)<-u\}$，$\tau=T_{-u}$ 在 $\{\tau<T_1\}$ 上成立。在首达时刻 T_{-u}，或者存在一个突然的跳跃，或者 Gaussian 成分使得过程 X 下穿 $-u$。G_0 表示后者发生的事件。G_i，$i=1,\dots,m$，表示跳跃引起的下穿，状态为 i。把概率空间分解为 $G_0,\dots,G_m$。那么有下面式子成立。

$$\begin{aligned}& E[g(u+X(\tau-),|u+X(\tau)|)e^{-\delta\tau}] \\ &= E[g(u+X(T_{u-}),|u+X(T_{u-})|)e^{-\delta T_{u-}}I_{G_0}] \\ &+\sum_{i=1}^m E[g(u+X(T_{u-}-),|u+X(T_{u-})|)e^{-\delta T_{u-}}I_{G_i}] \\ &= \int_0^\infty \iint_{R^2} \sum_{i=0}^m g(u+q+z,|u+q|)e^{-\delta p}l_{-u}(p,q)F_i(dz),\end{aligned} \tag{4.30}$$

对于第二项，有

$$\begin{aligned}\Phi_\delta^2 &= E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(\tau=T_1)] \\ &= E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(-\inf_{t<T_1}X(t)<u, X(T_1)-X_1+u<0)] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty E[g(u+X(t)+X_1,|u+X(t)|)e^{-\delta t} \\ &\times I(\inf_{s<t}X(s)>-u, X(t)-x+u<0)]dF(x)dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{u-x}\int_u^\infty g(u+b+x,|u+b|)e^{-\delta t}]h_t(a,b)dadbdF(x)dt。\end{aligned} \tag{4.31}$$

和破产概率的推导类似，最后一项可以写成

$$\Phi_\delta^3 = E[g(U(\tau-),|U(\tau)|)e^{-\delta\tau}I(T_1<\tau<\infty)] = \Lambda\Phi_\delta(u)。 \tag{4.32}$$

综合（4.28）—（4.32），定理 4.6 证毕。

4.5　本章小结

本章在上一章的基础上更加深入地探讨了破产概率的计算问题。也就是说如

果保险公司在市场上进行投资，破产概率该如何估算。由于破产概率本身的复杂性，即使在经典模型中也很难找到其精确的解析表达式，更不用说再把投资考虑进去。一个重要的途径就是针对破产概率找到其积分或者微分方程，从而可以数值计算破产概率。本章力图对破产概率找到迭代积分方程，该方程含有积分算子，从而可以把初值带入方程进行循环迭代找到破产概率的数值解。本章针对不同的股票价格模型，股票价格可以服从几何布朗运动，也可以服从指数 Lévy 过程。同样考虑不同的投资过程，分别得到了破产概率的积分方程。本章利用的方法是离散化嵌入方法和更新技巧，而且讨论了惩罚函数的积分方程，惩罚函数除了包括破产概率本身，还包括更多的破产量。本章还讨论了带有随机扰动项的盈余过程的破产概率，扰动项用 Lévy 过程建模，索赔服从 phase-type 分布，得到了破产概率和惩罚函数的积分方程。

第五章 结束语

5.1 全文总结与创新点

破产概率作为保险公司最重要的风险预警指标，一直是学术研究的热点。本文把破产概率及其相关指标作为最主要的研究对象。在经典的聚合风险模型上加入了投资模型。盈余过程用 Lundberg-Cramér 建模，其中索赔过程用复合泊松过程建模。考虑了股票价格的不同模型，分别用几何布朗运动和指数 Lévy 过程建模，分别就保险公司购买单一金融品种和投资组合，考虑了破产概率。破产概率可以是最终破产概率，也可以是有限时间破产概率，得到了破产概率的指数型上界，而且同时考虑了采取什么样的投资策略可以使破产概率的上界最小。最后得到了以下结论：无论是股票价格服从几何布朗运动，还是更为广泛的指数 Lévy 过程，保险公司采取常数投资策略可以使破产概率的上界最小。而且如果考虑目标是保险公司的期望财富最大时，在 VaR 风险约束下可以得到最优的混合投资策略。最后还解决了如何计算破产概率的问题。这里，把破产概率推广到了描述包括破产概率在内的更多破产量的惩罚函数。得到了惩罚函数和破产概率的积分方程，为数值计算破产量提供了可能。综合起来，本文的创新点有如下几个方面：

（1）经典的破产理论很少考虑利率的影响，不涉及投资收益。直至最近，对具投资收益的破产论的兴趣才猛增。究其原因，如果在经典的破产理论中加入利率，有可能破坏盈余过程的平稳独立增量性，而该性质是经典研究方法所必须的。本文采取了新的研究思路来解决非平稳独立过程的问题，即随机数学中的随机权和方法来研究带有利率的破产论，推广了经典的结果。

（2）在以往的考虑带有投资的保险公司的破产论时，一个重要的假设就是风险资产价格服从几何布朗运动，这样做的方便之处在于几何布朗运动具有平稳独立增量，而且满足正态性假设，各阶矩存在，且分布仅由前两阶矩决定。但是很多实证结果表明，股票价格的收益的分布是有偏的，而且具有尖峰厚尾的特征。具有上述特征的一个解释就是股票价格会出现突然的跳跃，解决的方法就是改进模型。本文采取指数 Lévy 过程去描述股票价格，推广了原有的结论。

（3）现有的文献在考虑保险公司的风险时，一般用最终破产概率去描述。但是，最终破产概率毕竟有些脱离实际，而且大部分的文献在寻找最优投资策略时，建立的优化模型，其目标函数一般为破产概率或生存概率，比如使破产概率最小。

本文用 VaR 去度量保险公司的风险，目标函数选择保险公司的期望总财富。在 VaR 约束下，找到了可以使期望总财富最大的混合投资策略。

（4）重尾分布族下的破产论是现在研究的热点，重尾分布研究的难点在于经典方法失效，比如鞅方法和更新论证方法。但是重尾分布针对了一类最有保险特征的随机变量，因为，保险索赔往往具有重尾特征。本文考虑了重尾分布族中最重要的一类，正则变化尾分布研究了有限时间破产概率，利用极值理论，得到了有限时间破产概率的尾等价式。

（5）除了破产概率之外，本文还综合考虑了破产时间，破产时刻盈余和导致破产的索赔额。把惩罚函数作为研究对象，在具有投资的模型下，用更新方法对惩罚函数建立了积分方程。从而拓展了破产概率的研究范围。

5.2 研究展望

首先，本文考虑的是保险公司的盈余过程是经典的 Lundberg-Cramér 模型。但是其本身还是有一些缺陷。而复合泊松过程只是 Lévy 过程的特例，考虑对盈余过程用 Lévy 过程建模，是接下来需要讨论的。

其次，本文的保费费率假设为常数，保费收入一成不变，即不随瞬时盈余的多寡而有所调整。实际上这只是为了建模的方便。随着瞬时盈余的多寡而不断调整的保费是下一步需要关注的，另外，在本文的模型假定下保险公司的再保险保费的定价也是很有意义的课题。

再次，本文得到的最优投资策略，其目标或者是破产概率上界最小，或者是总财富最大。得到的所谓的最优或者是渐近最优，或者是近似最优。如何对破产概率建立 HJB 方程，从而得到其解析最优解也需要进一步地探讨。在第三章混合投资策略下寻找最优解，对于如何在无限制条件下给出投资策略的最优解，这方面的研究工作需要更多的随机分析的知识，难度较大，且不易得到经典破产论中那样漂亮的结果，需要更多的努力去研究。

最后，如何把索赔额的正则尾分布族推广到更一般的重尾分布族也需要进一步地研究。

致 谢

“长太息以掩涕兮，哀‘读博’之多艰”。常闻牛津有叹息之桥，吾尝疑乎是，今以读博经历观之，犹信。正所谓“都云作者痴，谁解其中味”。

在电子科技大学管理学院的学习生涯中，恩师曾勇教授指引我走过了最令我难忘的四个年头。导师博大精深的学识造诣和严谨认真的治学态度，虚怀若谷的崇高品格和严以律己的人格魅力，忘我奉献的敬业精神和诲人不倦的工作态度，都深深地感染和激励了我，使我终生受益；从恩师那里，我学到的不仅仅是知识，更多、也是更重要的则是为人处事的基本道理和基本态度，这将是我一生中最为宝贵的财富。在此，谨向恩师和师母表示深深的敬意和致以最衷心的感谢！还有王定成老师，感谢你从我读硕士以来在学术上对我无私的指导和辛勤的教育。你的严谨的治学态度在鞭策着我在学术道路上不断前进。

感谢管理学院的唐小我教授、李仕明教授、井润田教授、马永开教授、周宗放教授和陈宏教授精彩的授课和启迪。感谢赵壁全书记、龚漪书记、姜德明主任、孔刚老师、刘莉老师、刘琼老师、魏民老师和汪青老师的关心和照顾。

感谢我的师兄弟邓光军、夏晖、李平、李强、朱盈盈、郭文新、沈玉清、王志刚、刘波、廖静池、陈磊、王生凑、刘彬等，感谢同窗姚珣、刘璞、蒋崇辉、顾婧、熊方军、郭战琴、李菁菁、朱新财、杨峰等，是你们在学习上的讨论和启迪，在生活中的欢声和笑语使我顺利完成学位论文。还有，特别要感谢张国东、李天柱、王国峰等在无数个午夜的那个烧烤摊上，让我开拓了更多的视野，缓解了无数压力。

特别感谢一直默默无闻关爱和支持我的父母、姐姐、姐夫。你们无论在精神上还是生活上都给了我最大的支持，是你们的无私奉献使我在这条坎坷的求学道路上坚持下来。

最后，还有我的老婆李萍，虽然你也在坎坷的求学道路上，但你一直给予我默默无闻的支持，照顾我的生活，让我体会到了家庭的温暖。还有我的儿子鞅鞅，你的第一声啼哭给了我无限的动力。面对你们，我的愧疚和感激之情无法用语言表达，但我深深地体会到了你们的真爱，谢谢你们！

参考文献

[1] Lundberg F. Approximerad Framstallning av Sannolikhetsfunktionen. Aterforsakring av Kollektivrisker. Almqvist & Wiksal, Uppsala.1903

[2] Cramér H. Collective Risk Theory. Nordiska Bokhandeln, Stockolm.1955.

[3] 严颖, 成世学, 程侃. 运筹学随机模型. 北京: 中国人民大学出版社, 1995.

[4] Gerber H U. 成世学,严颖译.数学风险论导引.北京:世界图书出版发行公司,1997.

[5] Grandell J. Aspects of Risk Theory. Springer, New York. 1991.

[6] Feller W. An introduction to probability theory and its applications..New York: John Wiley sons,1971.

[7] Gerber H U. Martingale in risk theory. Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math., 1973, (73):205-216.

[8] Elliot R J. Stochastic Calculus and Applications. New York: Springer Verlag, 1982.

[9] Dufresne F, Gerber H U, Shiu E S W. Risk theory with the Gamma process. ASTIN Bulletin, 1991, (21):177-192.

[10] Dufresne F, Gerber H U. The probability of ruin for the inverse Gaussian and related processes. Insurance: Mathematics and Economics. 1993, (12):9-22.

[11] Grandell J. Aspects of Risk Theory. New York: Springer Verlag, 1991.

[12] Dufrense F, Gerber H U, Risk theory for the compound Poisson processes that is perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics. 1991, (10):51-59.

[13] Gerber H U, Goovaerts M J, Kass R. On the probability and severity of ruin. ASTIN Bulletin. 1987, (17):151-163.

[14] Tang Q H， Su C， J iang T. & Zhang J S. Large Deviations for Heavy - tailed random Sums in Compound Renewal Model. Prob Stat Letters， 2001， 52(1): 91—100.

[15] Klüppelberg C, Stadtmüller U. Ruin probabilities in the presence of Heavy-Tails and interest rates. Scandinavia .Actuarial Journal , 1998, 49(1):49-58.

[16] Sundt B, Teugels J L. Ruin estimates under interest force. Insurance: Mathematics and Economics, 1995, 16(1):7-22.

[17] Tang Q. The finite time ruin probability of the compound Poisson model with constant interest force. Journal of Applied Probabililty. 2005, 42(3):608-619 .

[18] Wang D C. Finite-Time Ruin Probability with Heavy-Tailed Claims and Constant Interest Rate.

Stochastic Models, 2008 , 24(1): 41-57.

[19] Paulsen J, Gjessing H H. Ruin theory with stochastic return on investments, Advances in Applied Probability 1997, 29(4):965-985.

[20] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(4):937-958.

[21] Hipp C, Plum M. Optimal investment for insurers. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27(2):215-228.

[22] Gaier J, Grandits P, Schachermayer W. Asymptotic ruin probabilities and optimal investment. Annual of Applied Probability, 2003, 13(3):1054-1076.

[23] R. 卡尔斯, M. 胡法兹, J. 达呐, M. 狄尼特. 现代精算风险理论. 科学出版社,2005.

[24] 解辉. 论非寿险责任准备金精算报告的框架和要点. 中国精算进展——《精算通讯》文萃:1997-2004, 2003.

[25] 吴清华. 未决赔款准备金的估算及管理. 保险研究, 2000, (4): 38-39.

[26] 张伟. 保险公司 IBNR 准备金财务规定的实证研究. 甘肃社会科学, 2005, (5): 231-234.

[27] Marc J. Goovaerts, Hendrik Redant. On the distribution of IBNR reserves. Insurance: Mathematics and Economics, 1999, (25): 1-9.

[28] Tom Hoedemakers, Jan Beirlant, Marc J. Goovaerts, Jan Dhaene. Confidence bounds for discounted loss reserves. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, (33): 297-316.

[29] 中国精算进展——《精算通讯》文萃：1997-2004. 上海科技教育出版社， 2005.

[30] 张徐, 闫建军. 未决赔款准备金估计方法及评价. 金融教学与研究, 2000, (1): 55-56.

[31] Yan Liu, Yinghui Tang. The Problems of the Outstanding claims Reserve and the IBNR Claims Reserve – A Queuing Model Method. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management. 2005.

[32] 唐应辉, 唐小我. 排队论----基础与分析技术. 北京: 科学出版社, 2006.

[33] 毛用材, 胡奇英. 随机过程.西安电子科技大学出版社, 2004.

[34] Brekelmans R, De Waegenaere A. Appromiximating the finite-time ruin probability under interest force. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, (29):217-229.

[35] Gerber H U, An introduction to mathematical risk theory.S.S.Heubner Foundation Monogragh Series 8, Philadelphia. 1979.

[36] Asmussen S. Ruin probabilities, World Scientific Press, 2000.

[37] Embrecht P, Klüppelberg C. Mikosch T. Modelling extremal events for insurance and finance.

Springer-verlag, Berlin, 1997.

[38] Klüppelberg C, Stadtmüller U. Ruin probabilities in the presence of heavy-tails and interest rates. Scand. Actuar. J. 1998, (1): 49-58.

[39] Assumusen S. Subexponential asymptotics for stochastic processes; extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities. Ann. Appl. Probab. 1998, 8(2): 354- 374.

[40] Kalashnikov V. Konstrantinides D. Ruin under interest force and subexponential claims: a simple treatment. Insurance Math. Econom. 2000, 27(1): 145-149.

[41] Konstrantinides D, Tang Q. Tsitsiashivili G. Estimates for ruin probability in the classical risk model with constant interest force in the presence of heavy tails. Insurance Math. Econom. 2002, 31(3): 447-460.

[42] Cai J, Dickson D C M. Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest. Insurance: Mathematics and Economics, 2003. (32): 61-71.

[43] Resnick S I., Willekens E. Moving averages with random coefficients and random coefficient autoregressive models. Comm. Statist. Stochastic Models. 1991, 7(4):511-525.

[44] Tang Q, Tsitsiashvili G. Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory. 2003, 6(3): 171-188.

[45] Wang D C, Tang Q. Tail probabilities of randomly weighted sums of random variables with dominated variation. 2006, 22(2): to appear.

[46] Wang D C, Su C, Zeng Y. Uniform estimate for maximum of randomly weighted sums with applications to insurance risk theory. Sci. China Ser. A, 2004, 48(10): 1379-1410

[47] Frolova A, Kabana Y. and Pergamenchtchikov, S. In the insurance business risky investments are dangerous. Finance & Stochastic 2002, (6): 227-235.

[48] Kalashnikov V. and Norberg, R. Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments. Stoch. Proc. Appl . 2002, (98): 211-228.

[49] Paulsen J. Ruin theory with compounding assets. Insurance: Mathematics and Economics 1998, (22): 3-16.

[50] Gaier J. and Grandest P. Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment. Insurance: Mathematics and Economics 2002, (30): 211-217.

[51] Yong J, Zhou X Y. Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer, New York. 1999.

[52] Markowitz H. Portfolion Selection-Efficient Diversification of Investments. Wiley, New York, 1959

[53] Korn K. Optimal Portfolios. World Scientific. Singapore. 1997

[54] Fishburn P C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. American Economic Review 1977, (6):116-126.

[55] Brekelmans R, De Waegenaere A. Appromiximating the finite-time ruin probability under interest force. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, (29):217-229.

[56] Ambagaspitiya R S. Compound bivariate Lagrangian Poisson distributions. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 36(2): 137-152.

[57] Li J, Liu Z M, Tang Q H. On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, (41): 185-195.

[58] Chan W S, Yang H, Zhang L. Some results on probabilities in a two-dimensional risk model. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 32(3): 345-358.

[59] Shreve S E. Stochastic Calculus and Finance. Springer-Verlag, 1997.

[60] Kotz S, Balakrishnan N and Johnson N L.Continuous Multivariate Distributions. John Wiley and sons, Inc. New York 2000.

[61] Eberlein E. and Keller U. Hyperbolic distributions in Finance. Bernoulli 1, 281-299. 1995

[62] Klüppelberg C， Kostadinova R. Integrated insurance risk models with exponential Lévy investment. Submitted for publication. Insurance: Mathematics and Economics, to appear.

[63] Goll T. and Kallsen J V. Optimal portfolios for logarithmicutility. Stoch. Proc. Appl. 2000, (89): 31-48.

[64] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing. Management Science, 2002, (48):1086-1101.

[65] Madan D. Seneta E. The variance gamma (VG)model for share market returns. Journal of Business. 1990, (63): 511-524.

[66] Sato K. Lévy processes and Infinitely Disvisible Distributions.Cambridge University Press, Cambridge. 1999

[67] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations: A new Approach. Springer- Verlag 1992.

[68] Emmer S, Klüppelburg C, and Korn K. Optimal portfolios with bounded Capital-at-Risk. Math. Finance. 2001, (11): 365-384。

[69] Cont R. and Tankov P. Financial modeling with jump processes. Chapman &Hall / CRC. 2004

[70] Kostadinova R. Integrated risk management when stock price follows an exponential Lévy process. Ph.D.thesis, Munich University of Technology.2007

[71] Heyde C C.and Wang D C. Finite-time ruin probability with an exponential Lévy process investment return and heavy-tailed claims. Adv.in.Appl.Probab. 2009, 41(1): 206-224.

[72] Cai J. Ruin probability and penalty functions with stochastic rates of interest.Stochastic processes and their applications, 2004, (112): 53-78.

[73] Karatszas I, Sreve S E. Brownian motion and Stochastic analysis. Springer-Verlag, second edition, 1991.

[74] Shreve S E. Stochastic Calculus and Finance. Springer-Verlag, 1997.

[75] Roynette B, Vallois P, Valpi A. Lévy processes: Hitting time, overshoot and undershoot I -functional equation. Available at arXiv: math.PR/0507193 v1 10 Jul 2005.

[76] Wang G, Wu R Distributions for the risk process with a stochastic return on investments.Stochastic Processes and their Applications, 2001, (95): 329-341.

[77] Gerber H U, Shiu E S W. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics, 1997, (21): 129-137.

[78] Gerber H U.Martingales in risk theory. Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathemaker, 1973. pages 205-216.

[79] Dufrense F, Gerber H U. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 1991, (10): 51-59.

[80] Furrer H J, Schmidli H. Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 1994, (15): 23-36.

[81] Schmidli H. Gramer-lundberg approximations for ruin probabilities of ruin processes perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 1995, (16): 135-149.

[82] Gerber H U, Landry B. On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, (22): 263-276.

[83] Wang G, Wu R. Distributions for the risk process with a stochastic return on investments.Stochastic Processes and their Applications. 2001, (95): 329-341.

[84] Tsai C C L ,Willmot G E. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, (30): 51-66.

[85] Li S, Garrido J. On ruin for Erlang (n) risk process. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, (34): 391-408.

[86] Asmussen S, Avram F, Pistorius M R.Russian and American put options under exponential phase-type Levy models. Stochastic processes and their applications. 2004, (109): 79-111.

[87] Norberg R. Ruin probabilities with assets and liabilities of diffusion type. Stochastic processes and their applications, 1999 (81):255-269.

[88] Cramér H. On the Mathematical Theory of Risk. Stoockholm: Skandia Jubilee Volume, 1980.

[89] Cramér H. Mathematical Methods of Statistics. Princeto: Stockholen and Princeton Univ. Press, Almqvist & Wiksell, 1945.

[90] Cramér H. On some questions connected with mathematical risk. University of California Publ. Statistics, 1954, (2): 99-123.

[91] Cramér H. Half a century with probability theory: some personal recollection.

[92] Grandell J. Aspects of Risk Theory. New York: Springer Verlag, 1991.

[93] Dufresne F, Gerber H U, Shiu E S W. Risk theory with the Gamma process. ASTIN Bulletin, 1991, (21):177-192.

[94] Dufresne F, Gerber H U. The probability of ruin for the inverse Gaussian and related processes. Insurance: Mathematics and Economics. 1993, (12):9-22.

[95] Dufrense F, Gerber H U, Risk theory for the compound Poisson processes that is perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics. 1991, (10):51-59.

[95] Gerber H U, Goovaerts M J, Kass R. On the probability and severity of ruin. ASTIN Bulletin. 1987, (17):151-163.

[96] Dufresne F, Gerber H U. The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. Insurance: Mathematics and Economics. 1988, (7):193-199.

[97] Beekman J A. Two stochastic processes. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1974.

[98] Dubourdieu J. Theorie Mathematique du Risque dans les Assurances de Repartition. Paris: Gauthier-Villars, 1952.

[99] Dufresne F. Gerber H U. Three methods to calculate probability of ruin. ASTIN Bulletin. 1997, (19): 71-90.

[100] Shiu E S W. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. ASTIN Bulletin. 1989, (19): 179-190.

[101] Gerber H U. Mathematical fun with the compound binomial process. ASTIN Bulletin. 1988, (18): 161-168.

[102] Willmot G E. Ruin probabilities in the compound binomial process. Insurance: Mathematics and Economics. 1993, (12): 133-142.

[103] 成世学，伍彪. 完全离散的经典风险模型. 运筹学学报. 1998，2(3)：42-54.

[104] Cheng Shixue, Wu Biao. The survival probability in finite time period in fully discrete risk

model. Applied Mathematics, A Journal of Chinese University. 1999，14(B)：67-74.

[105]Embrechts P, Kluppelberg C, Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. New York: Springer-Verlag, 1997.

[106]Golde C M, Kluppelberg C. Subexponential Distributions. A Practical Guide to Heavy Tails. Edited by Adler R., et al. Birkhauser, 1998, 435-459.

[107]Paulsen J. Ruin theory with compounding assets-A survey. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, (22):3-16.

[108]Paulsen J. Risk theory in a stochastic economic environment. Stochastic Process Appl, 1993, (46): 327-361.

[109]ChenY Q, Ng K W. The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negatively dependent heavy-tailed claims.Insurance: Mathematics and Economics. 2007, (40): 415-423 .

[110]Gerber H U, Shiu E S W. Martingale approach to pricing perpetual American options. ASTIN Bulletin, 1994, (46): 99-140(with Discussion: 141-191).

[111]Gerber H U, Shiu E S W. Martingale approach to pricing perpetual American options. ASTIN Bulletin, 1994, (24): 195-220.

[112]Gerber H U, Shiu E S W. Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing. Insurance: Mathematics and Economics, 1996, (18): 183-218.

[113]Gerber H U, Shiu E S W. Pricing perpetual options for jump processes. North American Actuarial Journal, 1998, (2): 101-107(with Discussion: 108-112).

[114]Gerber H U, Shiu E S W. From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options. Insurance: Mathematics and Economics, 1999, (24): 3-14.

[115]Gerber H U, Shiu E S W. Option Pricing in Continuous Time. 《Fmancial Economics with Applications t oInvestments, Insurance and Pensions》 (edited by Ponjer H. H.) Chao. 10. The Actuarial Foundation, 1998.

[116]Bühlmann H. Mathematical Methods in Risk Theory New York: Springer Verlag, 1970.

[117]Bühlmann H. Actuaries of the third and ASTIN Bulletin, 1987, 17: Editorial.

[118]Embrechts P. Flisk theory of the second and third kind. Scand. Actuarial J., 1995, (1): 35-43.

[119]Mansion D F. The current state of actuarial science. American Mathematical Monthly, 1996, (103):552-561.

[120]Cheng Shixue, Gerber H U, Shiu E S W. Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, (26): 239-250.

[121]Tang Q H, Su C, Jiang T, Zhang J S. Large Deviations for Heavy - tailed andom Sums in Compound Renewal Model. Prob Stat Letters, 2001, 52(1): 91—100.

[122]Klüppelberg C. Subexponential distributions and integrated tails. J App l Probab, 1988, 25(1): 132—141.

[123]Embrechts P, Klüppelberg C , Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer - Verlag, 1997.

[124]Tang Qi He. Ruin probabilities for large claim in renewal risk model. Proceedings of Third Symposium of Post - graduates of USTC , 2000: 196—201.

[125]孔繁超,曹龙. 更新风险模型和延迟更新风险模型中破产概率的若干结果. 数学年刊A辑, 2003, (24): 119—128.

[126]唐启鹤. 重尾索赔下关于破产概率的一个等价式. 中国科学 A 辑, 2000, (32): 260—266.

[127]江涛, 陈宜清. 平稳更新模型下生存概率的一个局部等价式. 中国科学 A 辑, 2004,34 (4): 385—391.

[128]Abramowitz M. Stegun I A. Handbook of mathematical Functions. Dover Publ, New York, 1968.

[129]Barnforf-Nielsen O E. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modeling. Scand.J.Statist. 1997, (24):1-14.

[130]Barnforf-Nielsen O E. Processes of normal inverse Gaussian type. Finance Stochast. 1998, 2:41-68.

[131]Beard P E, Pentikainen E, Pesonen. Risky theory: the stochastic basis of insurance. Chapman&Hall, London. 1984.

[132]Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge University Press. 1996.

[133]Billingsley P. Convergence of probability measures. John Wiley&Sons, New York, second edition.1999.

[134]Bingham N H , Goldie C M and Teugels L, Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge. 1987

[135]Bjork T. and Grandell. Exponential inequalities for ruin probabilities in the Cox case. Scan. Act.J.1998, (1): 77-111.

[136]Brokate M, Klüppelburg C, Kostadinova R, Miller R and Seybel R C. On the distribution tail of an integrated risk model: a numerical approach Submitted. 2005 Available at http://www-m4. Ma.Turn. de / Papers /

[137]Brémaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. Springer, New York. 1981.

[138] Brémaud P. Markov chains: Gibbs Fields, Mont Carlo Simulation, and Queues. Springer, New York.1999.

[139] Carmona P, Petit F and York M. On the distribution and asymptotic results for exponential functional of Lévy processes. In: York, M.(Ed.) Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. pp.73-126. 1997. Bibliotheca de la Revista Mathematica Ibero-Amerikana.

[140] Carmona P. Petit, F. and York M. Exponential functional of Lévy processes. In: O.E. Barndorff-Nielsen T. Mikosch and S. I. Resnik (Eds.) Lévy processes, Theory and Applications pp.41-55.Birkauser, Boston. 2001

[141] Dassios A. Embrechts. Martingale and insurance risk. Stochastic Models. 1989, (5): 181-217.

[142] Dmitrasinovic-Vidovic,G.,Lari-Lavassani, A., Li, X. and Ware A. Dynamic portfolio selection under Capital-at-Risk. Preprint, 2003. University of Calgary, Alberta, Canada.

[143] Embrechts P. and Goldie C M. Perpetuities and random equations. In: Mandl, P., Huskova, M. (Eds.) Asymptotic Statistics. Proceedings of the 5-th Prague Syposium, September 4-9, 1993, p. 75-86. Physica-Verlag, Heidelberg. 1994

[144] Erickson K B. and Maller R. Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and the convergence of lévy integrals. Seminairé des probailités, 2004, XXXVIII, 70-94.

[145] Frank O. Generalization of an inequality of Hajek and renyi. Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1966

[146] Fishburn P C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. American Economic Review 1977, (6), 116-126.

[147] Gihman I I, Skorohod A V. The Theory of Stochastic Processes, II. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 1975.

[148] Goldie C M. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. Ann.Appl.Prob. 1991, (1): 126-166.

[149] Goldie C. M.and Grübel R. Perpetuities with thin tails. Adv. Appl. Probab. 1996, (28): 463-480.

[150] Goldie C. M.and Maller, R.A. Stability and perpetuities. Ann. Probab. 2000, (28): 1195-1218.

[151] Jacod J. and Shiryaev A N. Limit theorems for stochastic processes. Second edition. Springer. Berlin. 2002.

[152] Kalenberg O. Foundations of modern probability. Springer, New York. 1997

[153] Kesten H. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. Acta. Math. 1973(131): 207-248.

[154] Li Z F.and Deng X T. Closed-form solutions to continuous time mean-CaR portfolio selection. Preprint, Sun Yat-Sen University, Gangzhou, China. 2003.

[155] Lindner A. and Maller R. Levy integrals and the stationarity of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes. Stoch.Proc.Appl. 2005, 115 (10):1701-1722.

[156] Müller A, Stoyan D. Comparison methods for stochastic models and risks. John Wiley&Sons, Chichester, 2002.

[157] Nyrihinen T. and Paulsen J. On the distribution of a randomly discounted compound Poisson process. Stoch.Proc.Appli 1996, (61):305-310.

[158] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, Teugels J. Stochastic Processes for Insurance and Finance. John Wiley&Sons, Chichester. 1999.

[159] Sarkar J, Sen A. Weak convergence approach to compound Poisson risk processes perturbed by diffusion. Insurance:Math.Econ.2005, (36): 421-432..

[160] Seneta E. Non-negative Matrices and Markov Chains. Springer, New York, second edition. 1981.

[161] Tom Hoedemakers, Jan Beirlant, Marc J. Goovaerts, Jan Dhaene. Confidence bounds for discounted loss reserves. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, (33): 297-316

[162] Torin O. On the asymptotic behavior of the ruin probability for an infinite period when the epochs of claims form a renewal process. Scandinavian Actuarial Journal. 1974, 81-99.

[163] Whitt W. Stochastic-Process Limits: An introduction to Stochastic-Process Limits and Their Application to Queues. Springer, New York. 2002.

简　　历

赵武，男，1980年4月29日出生，江苏省徐州人，2002年7月毕业于徐州师范大学，获得理学学士学位。2002年9月考入电子科技大学应用数学学院攻读应用数学专业硕士学位，并于2005年9月考入电子科技大学经济与管理学院，攻读管理科学与工程专业博士学位。

作者攻读博士期间完成的论文

[1] 赵武, 王定成, 曾勇. 组合投资策略下的最终破产概率问题研究.系统工程学报，2009，24(4): 417-422.

[2] 赵武, 王定成, 曾勇. 经典更新风险模型中带有随机利率的破产概率. 系统工程学报. 已录用.

[3] 王定成, 赵武. Moment complete convergence for sums of a sequence of NA random variables. 高校应用数学学报 A 辑. 2006, 21(4), 445-450.

[4] Zhao W., Wang D C., Zeng Y., Lundberg upper bounds for ultimate ruin probabilities with constant interest. Proceedings of 7th International conference of computing mathematics. 2006. chengdu. (ISTP 检索)

[5] Wu Zhao, Dingcheng Wang, Yong Zeng. The study on the penalty function of insurance company when the stock price follows exponential Lévy process. International Joint Conferences on Computer, Information, and Systems Sciences, and Engineering (CISSE 08). 2008.

[6] Wu Zhao, Dingcheng Wang, Yong Zeng. Ruin probabilities and penalty functions for risk process perturbed by Lévy diffusion. 2009 产品创新管理国际论坛，武汉.

[7] Wu Zhao, Dingcheng Wang, Yong Zeng. Ruin Probabilities and Optimal Investment When the Stock Price Follows an Exponential Lévy Process. Math. Finance. 2009 (Submitted for publication)

[8] Wu Zhao, Dingcheng Wang, Yong Zeng. Integratl equations for Ruin Probability of insurance company with portfolio. Journal of system science and system engineering. 2009(Submitted for publication)

[9] 赵武, 王定成, 曾勇. 利率因素下未决赔款准备金的折现值研究. 系统工程理论与实践, 2008.（已投稿）

[10] 赵武, 王定成, 曾勇. 二元风险模型下保险公司最优投资策略. 2009, 工作论文.

作者攻读博士期间参加的科研项目

1. 作为主研之一参加国家自然科学基金项目“基于随机权的保险公司破产概率理论研究”；项目编号：70671018；期限： 2007.01-2009.12。