

摘 要

本文主要用约束 Hamilton 系统及其对称性理论研究了光孤子和任意子的性质.光孤子和任意子系统均可用奇异 Lagrange 量来描述.按 Dirac 约束理论,奇异 Lagrange 量系统过渡到相空间描述时,其正则变量间存在固有约束,为约束 Hamilton 系统.因此,光孤子和任意子系统须用约束 Hamilton 系统理论来处理.系统守恒量对研究系统(尤其是非线性系统和约束系统)的运动状态和物理性质具有重要作用.本文基于 Green 函数在位形空间中的生成泛函,导出了有限自由度系统变换性质的一般量子动力学方程.研究表明,该动力学方程在一些特殊情况下可简化为量子力学中的动量定理、角动量定理或量子水平的 Noether 定理.

光孤子由于在长距离通信和全光开关方面的潜在应用引起人们广泛关注.光孤子传输满足非线性 Schrödinger 方程,在解非线性偏微分方程中,目前用得最多的近似方法是数值解法,但其中间结果难以显示,而变分法的优点就是它能给出解析的表达式.时间光孤子相互作用问题是光孤子通信能否实际应用的关键因素.两明孤子和两暗孤子间的相互作用已有不少讨论.本文用变分法研究了明暗时间光孤子间的相互作用.明暗两时间孤子相距较近时,相互排斥,而相距较远时,相互作用可以忽略.明暗两时间孤子的入射幅值增大时,相互作用会加强.空间光孤子相互作用在信号处理及全光开关方面有重要应用.本文从 Kerr 空间光孤子耦合的非线性 Schrödinger 方程出发,用变分法讨论了空间孤子间的相互作用.由位形空间中的经典 Noether 导出系统在平移变换不变性下的守恒量,利用该守恒量,发现相干和非相干相互作用势函数都与孤子间的相对相位无关,出现孤子间反常相互作用,即最近文献中报道的结果.

在光孤子传输经典理论不断发展和完善的同时,光孤子传输的量子理论也得到较大的发展.光孤子系统可用奇异 Lagrange 量描述,系统含 Dirac 约束.通常按对应原理写出系统场量间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程时,未计及约束.本文对飞秒时间孤子传输的非线性 Schrödinger 方程进行严格的 Dirac 正则量子化,导出了系统场量间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.同时根据约束 Hamilton 系统的量子守恒律,得到了系统的量子能量和动量守恒.目前关于孤子传输量子理论的研究大多限于时间孤子,而空间孤子量子理论的研究很少.本文对稳态光折变空间孤子系统进行了 Dirac 正则量子化,导出了描述空间孤子

系统场量之间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.在线性近似下求出屏蔽孤子量子 Schrödinger 方程的微扰解,讨论了屏蔽亮孤子的压缩性质.光强越大,量子噪声被压缩的幅度越大.

任意子由于可能解释高温超导和分数量子 Hall 效应引起人们广泛关注.在场论水平可以用 Chern-Simons 理论来描述任意子的分数自旋和分数统计性质.在对 Chern-Simons 理论进行量子化时一般采用 Dirac 正则量子化,处理的是非对易 q 数而不是 c 数,因此用路径积分量子化方法就显得方便得多.分数自旋的性质可以通过计算系统角动量来讨论.以前的研究多数是由对称的能量-动量张量得到角动量而不是通过 Noether 定理,这两者是否一致值得研究.本文在量子场论水平上用路径积分方法研究了 Abel Chern-Simons 理论与复标量场耦合系统和 Maxwell Chern-Simons 理论与复标量场耦合系统,通过量子 Noether 定理得到系统角动量,经计算发现,系统具有分数自旋的性质.这和由对称的能量-动量张量得到的结果一致.同时得到 Maxwell CS 耦合系统的量子能量和动量.

关键词 约束 Hamilton 系统; 对称性和守恒律; 光孤子; 任意子

Abstract

In this dissertation, the properties of optical solitons and anyons are studied in framework of theories of constrained Hamilton systems and their symmetries. Optical solitons and anyons both can be described by singular Lagrangians. According to Dirac theory of constrained systems, there are some inherent constraints in phase space for a singular Lagrangian systems, and these systems are called constrained Hamilton systems. Therefore, it is necessary to discuss optical solitons and anyons using theories of constrained Hamilton systems. The conserved quantities are important for us to know the physical properties of systems, especially nonlinear systems or the systems with constraints. Based on the configuration-space generating functional of Green function for a system with a finite number of degrees of freedom, the general quantal dynamical equations of transformation properties are derived. In some cases they can be reduced to momentum theorem, angular momentum theorem or Noether laws at the quantum level.

Optical solitons have been the objects of extensive studies because of their potential applications in long distance communications and all-optical switching. The propagation of optical solitons can be described by a nonlinear Schrödinger Equation. This nonlinear equation is often studied by numerical simulation in proximate method, and one of its disadvantages is that the mid-process is omitted. By means of variational method we can get an analytical solution though proximate. In this dissertation, interactions between bright and dark temporal solitons, and interactions between Kerr spatial optical solitons are studied by means of variational method. It shows that two temporal optical solitons are repellent when their distance small, and interactions can be neglected when their distance large. Through classical Noether theorem, the conserved quantity of the system of Kerr spatial optical solitons are derived. Using this conserved quantity it shows that the coherent and incoherent interactions are insensitive to relative phase of two Kerr spatial optical solitons, and this is just the result of the recent experimental results.

The quantum theory of optical soliton propagation have made a great progress with the development of its classical theory. Systems of optical solitons can be described by singular Lagrangians. The commutation relations of fields and quantum nonlinear Schrödinger equations are usually given by using corresponding principle,

and it's not satisfactory since the constraints are ignored. In this dissertation, propagation systems of fs temporal optical soliton and steady state photorefractive spatial optical solitons are quantized in Dirac canonical formalism, and the commutation relations and quantum nonlinear Schrödinger equations are derived. The conserved energy, momentum for temporal soliton systems are derived at the quantum level. Under the linearization approximation, the perturbation solution of photorefractive spatial screening solitons is found and the squeezing properties of this system are discussed.

Anyons have attracted much attention due to their possible relevance to condensed matter phenomena, especially to the fractional quantum Hall effect and high- T_C superconductivity. In the study at the field-theoretical level, fractional spin and fractional statistics of anyons can be described by Chern-Simons theory. The properties of fractional spin and fractional statistics can be discussed through angular momentum of a system. The angular momentum for anyons are always obtained through symmetric energy-momentum tensor based on the Dirac canonical quantization approach not Noether's law. Some authors have putted forward that the expressions obtained by these two prescriptions may not be identical. In this dissertation the systems considered here are Abel CS theory coupled to complex scalar field and Abel Maxwell CS theory coupled to complex scalar field. The path integral quantization schemes are formulated, and its advantage is that we deal with c-number. It is shown that fractional spin also appears through quantum Noether's prescription for these systems, and it coincides with results obtained through symmetric energy-momentum tensor. The conserved energy and momentum for Abel Maxwell CS theory at the quantum level are derived.

Keywords constrained Hamilton systems; symmetries and conserved laws;
optical solitons; anyons

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京工业大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名： 江金环 日期： 2004.5.21

关于论文使用授权的说明

本人完全了解北京工业大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内 容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

签名： 江金环 导师签名： 李红平 日期： 2004.5.21

第1章 绪论

物理系统的运动往往受到某些约束条件的限制.其约束分为两类:一类是位形空间中存在的附加条件;另一类是相空间中描述时,正则变量间存在的关系.对动力学系统的描述有位形空间中的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制两种形式,后者在量子理论中有更重要的作用.用奇异 Lagrange 量描述的系统为奇异系统.奇异系统过渡到相空间描述时,其正则变量间存在固有约束,即为约束 Hamilton 系统.众多物理系统都属于约束 Hamilton 系统,例如描述自然界 4 种基本相互作用的量子电动力学(QED)、量子味动力学(QFD)、量子色动力学(QCD)、引力理论(广义相对论)、超引力和超弦等.由于奇异系统在相空间中存在固有约束,而系统的量子化通常是由相空间中的正则变量来实现的,此时初等量子力学中的量子化方法已不适用.当正则变量间存在约束时,量子化理论中出现的新问题的研究,一直受到人们广泛的关注^[1-10].奇异系统正则形式的研究始于 Dirac^[1], Bergmann 等人奠定了奇异系统的动力学和量子化的基础^[2].约束 Hamilton 系统通过 Dirac 括号和量子括号的对应来实现算符形式的正则量子化.用 Dirac 括号对杨-Mills 场进行正则量子化时,处理上遇到较大困难.对杨-Mills 场用泛函积分(路径积分)量子化则是一种有效方案^[3].Faddeev-Popov 给出了规范系统在位形空间中的路径积分量子化.Faddeev 利用 Feynman 路径积分首先实现了仅含第一类约束的系统在相空间中的量子化^[4].Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的系统在相空间中的路径积分量子化^[5].相对论性协变的量子化理论是 Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV)等人基于 BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) 对称而建立的^[6].其他量子化方案,例如 FJ (Faddeev-Jackiw) 方案^[7]和 BV (Batalin-Vilkovisky)^[8]的 Lagrange 量子化方案等也受到人们的关注.

对称性理论在物理学中占重要地位.系统具有某种对称性一般就存在相应的运动守恒量.实际的动力学系统即使是运动方程已经给出(特别是由非线性微分方程和约束系统的运动微分方程所描述的系统),要求出运动方程的解往往是很困难的,有时甚至是不可能的.因此,守恒量对于了解系统的物理状态和性质是十分重要的.对称性和守恒律的联系,在经典理论中通常由 Noether 定理给出.在量子理论中,对称性和守恒律的联系,由量子守恒律给出.对称性和守恒律的联系无论在经典水平还是在量子水平均作了大量研究^[11-25].

约束 Hamilton 系统理论及其对称性质在现代物理学中,特别是在量子场论中

占有十分重要的地位.光孤子和任意子系统可用奇异 Lagrange 量描述,为约束 Hamilton 系统.在研究它们的性质,尤其是量子性质时,应该用约束 Hamilton 系统理论.

近三十年来,孤子现象受到了人们的普遍关注,孤子理论及其应用取得了日新月异的进展,如今它已成为非线性光学领域中的一个重要的研究课题.孤立波在相互作用之后保持各自的波形不变,并且能量和动量守恒,其行为类似于粒子,将其命名为“孤立子”或简称“孤子”.目前,孤子概念及其理论已被广泛应用于物理学、天文学及生物学等各学科中.

光学中孤波现象的研究始于 1965 年,先后发现了自聚焦空间孤子与非线性介质波导中的传输孤子.光孤子传输可以用非线性 Schrödinger 方程来描述.1973 年 Hasegawa 在理论上推断,光纤中能够形成孤子^[26].他们预言当光纤的线性色散效应和非线性自相位调制效应达到平衡时,光纤中可传播无色散的光脉冲,由于这种光脉冲沿时间轴传播时脉冲宽度保持不变,因此被称为时间光孤子.1980 年 Mollenaur 用实验方法在光纤中观察到了时间孤子^[27],并于 1980 年提出将光纤中的孤子用作传递信息的载体,构建一种新的光纤通信方案,称为光纤孤子通信.光孤子通信容量比现有系统增加 1-2 个量级,特别是 1989 年掺铒光纤放大器试制成功后,光孤子通信向实用化大大迈进了一步.光孤子通信以其高容量、中继距离长、放大设施简单、误码率低及抗噪能力强而成为光通信研究的热点^[28-32].

光孤子通信系统的容量决定于相邻孤子脉冲间的间距,而传输距离决定于相邻孤子脉冲间间隔的稳定性.间隔越小,容量越大;间隔的稳定性越好,传播距离越远.缩短相邻孤子脉冲间的间距,可以提高光孤子通信系统的容量.当相邻孤子靠近后,由于光纤的非线性效应,将引起相邻孤子间的相互作用,波形畸变,传输恶化,传输速率下降,传输距离缩短.因此在高速光孤子通信中,光孤子间相互作用的研究是一个十分重要的问题^[33-44].光孤子依据光强分布可分为亮孤子和暗孤子.两个时间光孤子间的相互作用有:(1)两个亮孤子在反常群速色散区传播^[33];(2)在反常群速色散区亮孤子和在正常群速色散区暗孤子相互作用^[34];(3)在正常群速色散区亮孤子和在反常群速色散区暗孤子相互作用^[35];(4)两个在正常群速色散区暗孤子相互作用^[36].对于光纤亮孤子的相互作用已进行过大量的研究^[37-43].脉冲为 sech 型的两亮孤子因相互作用而产生离合现象.这种离合现象会产生严重的误码,从而影响超大容量超长距离光纤通信的质量.近年来,光纤暗孤子的实验成功观测^[45]使它已经成为通信领域研究的热点^[46-49].研究表明:光纤损耗^[46]、放大器噪声^[47]和相邻孤子间的相互作用^[48]等对暗孤子形状的影响比对亮孤子更小.因此,一些研究者认为光纤暗孤子应用于光通信系统和信号处理具有

比亮孤子更好的特性. 虽然暗孤子相互作用的研究相对于亮孤子来说显的远远不够^[49], 但是亮暗光孤子间相互作用的研究则少而又少.

空间光孤子是指当非线性介质的自聚焦效应与光束的衍射发散作用相平衡时, 在介质内无衍射地向前传播的光束. 早在1964年, Chiao 等人就预言光束自陷能在 Kerr 非线性材料中形成^[50], 但 Kerr 非线性带给空间光孤子内在的非稳定性. 1992年美国 Segev 等人预言在光折变晶体中能形成空间光孤子^[51]. 1993年, 随着材料科学与现代非线性光学的发展和结合, 人们在光折变材料中首次观测到稳态三维空间光孤子^[52]. 光折变空间孤子在微瓦的入射功率下即可产生, 这使它在很宽的入射功率范围内均可得以应用, 掀起一场光折变空间孤子的研究热潮^[53-58]. 空间光孤子相互作用由于在信号处理及全光开关方面有重要应用受到广泛关注^[59-63]. 空间孤子之间的相互作用分为相干相互作用和非相干相互作用. 1996年, Shih 等^[59]对非相干碰撞过程进行了实验观测. 1997年 Garcia-Quirino 等^[61]实验研究了光孤子之间的相干相互作用. 发现若两个孤子同相, 它们相互吸引. 若两个孤子异相, 它们就会相互排斥. 然而, 1998年 Krolkowski 等^[62]发现了介质中非相干孤子的反常相互作用. 理论和实验都表明非相干孤子间存在反常相互作用, 即两非相干孤子可以相互吸引, 也可以相互排斥; 2002年, Cohen 等^[63]发现了相干孤子的反常相互作用, 即反向传输相干孤子的相互作用不依赖于两孤子的相对位相. 对空间孤子相互作用的研究目前大多限于实验或数值模拟, 而相应的理论值得进一步研究.

在光孤子传输经典理论不断发展和完善的同时, 光孤子传输的量子理论也得到较大的发展^[64-95]. Carter 等 1987年求解了量子非线性 Schrödinger 方程, 首次论证了光孤子可以处在压缩态^[65]. 如果是稳定的, 那光孤子不仅可以实现高容量与长距离传输, 而且还能实现低噪声通信. 1991年实验证实光孤子可以产生压缩态^[70]. 损耗^[66]、高阶效应^[75,77]及初始振幅^[83]等对压缩性质均有不同程度的影响. 文[91]在正常色散区讨论了孤子的压缩性质. 不同类型孤子压缩性质的研究也有报道^[95]. 光孤子量子效应研究的出发点是量子非线性 Schrödinger 方程, 它通常是经典非线性 Schrödinger 方程按对应原理写出的. 描述光孤子传输的经典非线性 Schrödinger 方程, 可由奇异 Lagrange 量导出. 按 Dirac 约束理论, 用奇异 Lagrange 量描述的光孤子系统是约束 Hamilton 系统, 它的量子化应该用 Dirac 正则量子化(或约束系统的路径积分量子化), 而不能按初等量子力学的方法进行量子化. 目前关于孤子传输量子理论的研究大多限于时间孤子, 而空间孤子量子理论的研究很少^[86]. 此外, 光孤子在传输过程中形状、振幅等保持不变的原因是系统存在许多运动常数(即守恒量), 因此研究光孤子在量子水平下的守恒量也具有重要意义.

约束 Hamilton 理论不但在场论、量子光学中 useful, 还可以用在凝聚态理论中.

量子理论和经典力学理论不同,粒子的运动不仅受到其他物体作用的影响,而且还要受到其统计性质的支配,这种统计性质又完全由粒子的自旋来决定.根据传统量子理论,所有基本粒子都分为性质不同的两大类: Bose 子和 Fermi 子.它们的自旋分别是 \hbar 的整数倍和半奇数倍.并分别遵从 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计.人们还把这种分类用到准粒子或元激发上;所有的准粒子不是 Fermi 子,就是 Bose 子.近来的研究表明问题并非如此,实际上由磁单极子和带电粒子组成的复合体的角动量具有不寻常的特性.后来在统一规范理论的框架内又作了进一步的研究^[96].特别是 1977 年 Leinns 和 Myrheim 系统地讨论了空间维度,空间的拓扑性质对统计和对称性的影响^[97].但直到 80 年代初分数量子 Hall 效应以及高 T_c 超导被发现以后,该文的深刻而丰富的内容才逐步为人们所认识.正是这些凝聚态物理中的重大发现,以及粒子物理中的磁单极等问题,使得以前理论上讨论过的问题变得有实际意义了.这促使 Wilczek 去研究能给出分数电荷和分数角动量的理论,从而发现,在理论上可能存在一种既不遵从 Bose 统计,也不遵从 Fermi 统计的复合体^[98].它的统计性质,至少在原则上可以在上述两种统计之间连续变化.1982 年 Wilczek 第一次把带电粒子-磁通量管复合体叫做任意子(Anyons).第一个把理论上的任意子和实际对象联系起来的是 Laughlin^[99],他为了解释当时刚发现的分数量子 Hall 效应而发展了一种二维电子气模型.他认为,在 Landau 能级的填充因子 $\nu=1/m$ 时,电子气的基态能量有极小值.当填充因子偏出这个值时,状态可以用元激发来描写.这些元激发的行为就象任意子.高 T_c 超导体材料的发现为研究任意子的性质提供了新动力.Anderson 在上述发现后不久就指出了高温超导材料中铜氧面的重要性,同时还强调了可能存在一种具有奇异量子数的元激发^[100].后来, Laughlin 证明,任意子在高 T_c 超导电性中确实可能起着重要作用^[101].数字模拟表明,带电任意子气体基态确实是超导电性的^[102].任意子由于可能解释分数量子 Hall 效应和高温超导得到深入广泛的研究^[103-127].用 Chern-Simons(CS)规范场可以来描述任意子的分数自旋和分数统计性质.任意子的基本理论有两种形式^[108],即 Lagrange 形式和 Hamilton 形式.描述任意子的 CS 理论,过渡到相空间时,存在固有约束,为约束 Hamilton 系统.因此,从约束 Hamilton 系统理论来研究任意子 CS 模型的量子性质就十分必要.

本文第二章主要介绍了约束 Hamilton 系统的基本概念及其量子理论,叙述了约束 Hamilton 系统的对称性和守恒律.研究了有限自由度正规 Lagrange 系统和奇异 Lagrange 系统在量子水平下的变换性质,导出了一般情形下的量子动力学方程.研究表明,该动力学方程在一些特殊情况下可简化为量子力学中的动量定理、角动量定理或量子水平的 Noether 定理.

本文第三章主要研究了光孤子间的相互作用.首先介绍了光孤子传输的经典理论,叙述了时间光孤子和空间光孤子所满足的非线性 Schrödinger 方程的推导.利用变分法研究了亮暗时间光孤子间以及 Kerr 型空间孤子间的相互作用,导出了相互作用势函数.研究表明,亮暗两时间孤子相距较近时,相互排斥,而相距较远时,势函数近似为常数,相互作用可以忽略.亮暗两时间孤子的入射幅值增大时,相互作用会加强.由经典 Noether 定理导出空间孤子系统的守恒量,并利用该守恒量得到空间孤子间相干和非相干相互作用势函数都与空间孤子间的相对相位无关,出现空间孤子间反常相互作用,说明最近文献中的实验结果.

本文第四章研究了光孤子传输的量子理论.首先简单介绍了压缩态的基本知识.应用约束 Hamilton 系统量子理论研究了飞秒时间光孤子系统和稳态光折变空间孤子系统的量子性质.对飞秒时间孤子传输的非线性 Schrödinger 方程进行严格的 Dirac 正则量子化,导出了系统场量的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.同时根据约束 Hamilton 系统的量子守恒律,导出了系统的量子能量和动量守恒.对稳态光折变空间孤子系统实行了 Dirac 正则量子化,导出了描述空间孤子系统的场量之间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.在线性近似下求出屏蔽孤子量子场方程的微扰解,讨论了屏蔽亮孤子的压缩性质.结果表明光强越大,量子噪声被压缩的幅度越大.

本文第五章在量子场论水平研究了任意子的分数自旋和分数统计的性质.先简单介绍了任意子的 CS 理论.用路径积分量子化方法研究了 Abel CS 理论与复标量耦合系统和 Abel Maxwell CS 理论与复标量耦合系统的对称性质.通过量子 Noether 定理得到了系统的角动量,经计算发现,系统具有分数自旋的性质,这和通过对称的能量-动量张量得到的结果一致.同时得到 Abel Maxwell CS 耦合系统的能量和动量.

第 2 章 约束 Hamilton 系统理论

用奇异 Lagrange 量描述的系统(包括所有定域规范不变理论),过渡到相空间描述时,其正则变量间存在固有约束,为约束 Hamilton 系统.由于奇异 Lagrange 系统在相空间中存在固有约束,而系统的量子化通常是由相空间的正则变量来实现的,此时初等量子力学中的量子化方法对该系统已不适用.当正则变量间存在约束时,量子化理论中出现的新问题的研究,一直受到人们广泛的关注^[1-10].对称性理论在物理学中占重要地位.系统具有某种对称性就可能存在相应的运动守恒量.实际的动力学系统即使是运动方程已经给出(特别是由非线性微分方程和约束系统的运动微分方程所描述的系统),要求出运动方程的解往往是很困难的,有时甚至是不可能的.因此,守恒量对于了解系统的物理状态和性质是十分重要的.约束 Hamilton 系统对称性和守恒律的联系无论在经典水平或是在量子水平均作了大量研究^[11-25].本章主要介绍了约束 Hamilton 系统及其量子化方案^[19],叙述了约束 Hamilton 系统的对称性和守恒律^[19,23].导出了有限自由度系统变换性质的量子动力学方程.研究表明,该动力学方程在一些特殊情况下可简化为量子力学中的动量定理,角动量定理或量子水平的 Noether 定理.

2.1 约束 Hamilton 系统

本节简要叙述约束 Hamilton 系统的经典理论,阐明初级约束、次级约束、第一类约束、第二类约束以及 Dirac 括号的含义^[9,13,19].

描写场运动的量为 $\varphi^\alpha(x)$ ($x = (t, \vec{x})$, α 代表场的张量、旋量等分量或不同场量的指标).平坦时空度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. 设系统的 Lagrange 量密度 $\mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) 不显含时空坐标, $\varphi_{,\mu}^\alpha = \partial_\mu \varphi^\alpha = \partial \varphi^\alpha / \partial x^\mu$. 在位形空间场的 Lagrange 量为

$$L(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha) \quad (2-1-1)$$

在位形空间系统的作用量为

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha) \quad (2-1-2)$$

由最小作用量原理,可以得到系统的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi^\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha_\mu} \right) = 0 \quad (2-1-3)$$

由 Lagrange 量(2-1-1)描述的系统根据 Hess 矩阵

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha \partial \dot{\varphi}^\beta} \quad (2-1-4)$$

可分为两类. 当系统 Hess 矩阵为非退化矩阵时

$$\det |H_{\alpha\beta}| = \det \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha \partial \dot{\varphi}^\beta} \right| \neq 0 \quad (2-1-5)$$

可以从 E-L 方程解出全部 $\dot{\varphi}^\alpha(x)$ 作为 $(\varphi^\alpha(x), \varphi^\alpha(x), \partial_\mu \varphi^\alpha(x), \partial'_\mu \varphi^\alpha(x))$ 的函数. 这样的系统为正规系统, 相应的 Lagrange 量为正规 Lagrange 量. Hess 矩阵为退化矩阵

$$\det |H_{\alpha\beta}| = \det \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha \partial \dot{\varphi}^\beta} \right| = 0 \quad (2-1-6)$$

的系统为奇异系统, 其 Lagrange 量为奇异 Lagrange 量, 相应的 Lagrange 量密度为奇异 Lagrange 量密度.

由奇异 Lagrange 量密度 $\mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu) (\alpha = 1, \dots, n)$ 描述的动力学系统, 通过 Legendre 变换可以转换为 Hamilton 描述. 用 Legendre 变换引入场的正则动量密度

$$\pi_\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha} \quad (2-1-7)$$

场的正则 Hamilton 量为:

$$H_c = \int d^4x \mathcal{H}_c \quad (2-1-8)$$

$$\mathcal{H}_c = \pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathcal{L} \quad (2-1-9)$$

\mathcal{H}_c 为场的正则 Hamilton 量密度. 设 Hess 矩阵(2-1-4)的秩为 $R (R < n)$, 此时正则变量间存在 $n - R$ 个约束 ϕ_a^0 [13,19]

$$\phi_a^0(\varphi^\alpha, \pi_\alpha) \approx 0 (a = 1, \dots, n - R) \quad (2-1-10)$$

符号“ \approx ”为 Dirac 意义上的弱等, 表示等式在由约束决定的相空间中的超曲面 M 上成立. 约束方程(2-1-10)来源于正则动量的定义和 Lagrange 量的奇异性, 称为初

级约束.用奇异 Lagrange 量描述的系统,正则变量间存在固有约束,称为约束 Hamilton 系统.定义系统的总 Hamilton 量

$$H_T = \int d^4x (\mathcal{H}_c + \lambda^a \phi_a^0) \quad (2-1-11)$$

这里 λ^a 为约束乘子.对约束 Hamilton 系统,任一力学量 $F(\varphi^a, \pi_a)$ 的运动方程为:

$$\dot{F}(\varphi^a, \pi_a) = \{F, H_T\} \quad (2-1-12)$$

其中 $\{, \}$ 为场的 Poisson 括号

$$\{F(t, x), G(t, x')\} = \int d^3x'' \left[\frac{\delta F(t, x)}{\delta \varphi^a(t, x'')} \frac{\delta G(t, x')}{\delta \pi_a(t, x'')} - \frac{\delta G(t, x')}{\delta \varphi^a(t, x'')} \frac{\delta F(t, x)}{\delta \pi_a(t, x'')} \right]$$

场变量的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^a &= \{\varphi^a, H_T\} \\ \dot{\pi}^a &= \{\pi^a, H_T\} \end{aligned} \quad (2-1-13)$$

对约束 Hamilton 系统,场量随时间的变化率等于场量与 H_T 的 Poisson 括号,而不是场量与 H_c 的 Poisson 括号.这是奇异系统与正规系统的 Hamilton 正则方程不同的地方.

对于奇异系统,系统的运动应始终保持在约束超曲面 M 上.描述约束系统的 Hamilton 正则方程(2-1-13)和 E-L 方程的等价性要求约束随时间的演化是稳定的,即约束的时间微商为零,这样约束满足自治性条件:

$$\dot{\phi}_a^0 = \{\phi_a^0, H_T\} \approx 0 \quad (2-1-14)$$

方程组(2-1-14)式有三种情况:(a)是一组恒等式;(b)是一组确定约束乘子的方程;(c)给出新的次级约束.这里我们只考虑最后一种情形,初级约束的自治性条件给出新的次级约束:

$$\phi_a^1 = \{\phi_a^0, H_T\} \approx 0 \quad (2-1-15)$$

次级约束 ϕ_a^1 同样满足自治性条件.重复上述步骤,逐次求得的次级约束记为:

$$\phi_a^k = \{\phi_a^{k-1}, H_T\} \approx 0 \quad (2-1-16)$$

直至次级约束 ϕ_a^m 满足:

$$\phi_a^{m+1} = \{\phi_a^m, H_T\} \approx C_{ak}^b \phi_b^k \quad (k \leq m) \quad (2-1-17)$$

为止.这就是 Dirac-Bergmann 求奇异系统约束的算法^[1].

将全部独立约束记为:

$$\Phi_a(\varphi^\alpha, \pi_\alpha) \approx 0 \quad (2-1-18)$$

约束 Φ_a 可分为两类: 第一类约束 Λ_a 和第二类约束 θ_a . 第一类约束 Λ_a 为与所有约束的 Poisson 括号都弱等于零的约束, 即

$$\{\Lambda_a, \Phi_b\} \approx 0 \quad (2-1-19)$$

不满足上述条件的约束为第二类约束 θ_a , 第二类约束 θ_a 一般满足:

$$\det\{\theta_a, \theta_b\}|_M \neq 0 \quad (2-1-20)$$

把初级约束 ϕ_a^0 分为初级第一类约束 Λ_a^0 和初级第二类约束 θ_b^0 , 系统总 Hamilton 量 (2-1-11) 可写为

$$H_T = \int d^3x (\mathcal{H}_c + \lambda_a^0 \Lambda_a^0 + \lambda_b^0 \theta_b^0) \quad (2-1-21)$$

λ_a^0 和 λ_b^0 为约束乘子. 力学量 $F(\varphi^\alpha, \pi_\alpha)$ 随时间的演化方程 (2-1-12) 化为

$$\dot{F} = \{F, H_T\} = \{F, H_c\} + \lambda_a^0 \{F, \Lambda_a^0\} + \lambda_b^0 \{F, \theta_b^0\} \quad (2-1-22)$$

根据 (2-1-22), (2-1-19) 和 (2-1-20), 初级约束的自洽性条件为

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_a^0 &= \{\Lambda_a^0, H_T\} = \{\Lambda_a^0, H_c\} + \lambda_a^0 \{\Lambda_a^0, \Lambda_a^0\} + \lambda_b^0 \{\Lambda_a^0, \theta_b^0\} \\ &= \{\Lambda_a^0, H_c\} \approx 0 \end{aligned} \quad (2-1-23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_b^0 &= \{\theta_b^0, H_T\} = \{\theta_b^0, H_c\} + \lambda_a^0 \{\theta_b^0, \Lambda_a^0\} + \lambda_c^0 \{\theta_b^0, \theta_c^0\} \\ &= \{\theta_b^0, H_c\} + \lambda_c^0 \{\theta_b^0, \theta_c^0\} \approx 0 \end{aligned} \quad (2-1-24)$$

从 (2-1-23) 和 (2-1-24) 知, 初级第一类约束前的约束乘子 λ_a^0 不能解出, 初级第二类约束前的约束乘子 λ_c^0 是可以解出的.

场论中的 Dirac 括号为:

$$\begin{aligned} \{F(t, x), G(t, y)\}_D &= \{F(t, x), G(t, y)\} - \\ &\int d^2x' d^2y' \{F(t, x), \theta_a(t, x')\} C_{ab}^{-1}(x', y') \{\theta_b(t, y'), G(t, y)\} \end{aligned} \quad (2-1-25a)$$

其中

$$C_{ab}(x', y') = \{\theta_a(x'), \theta_b(y')\} \quad (2-1-25b)$$

在约束 Hamilton 系统的正则量子化过程中,Dirac 括号占有重要地位,从经典理论过渡到量子理论是通过 Dirac 括号而不是 Poisson 括号来实现的.由(2-1-25)和(2-1-24)式,可把任一力学量随时间的演化方程(2-1-22)化为

$$\dot{F} = \lambda_a^0 \{F, \Lambda_a^0\} + \{F, H_c\}_D \quad (2-1-26)$$

对仅含第二类约束的系统,力学量 $F(\varphi^\alpha, \pi_\alpha)$ 随时间的演化方程为

$$\dot{F} = \{F, H_c\}_D \quad (2-1-27)$$

尽管约束系统的 Dirac 理论有了相当的发展,但是这个理论中的若干基本问题至今仍在不断地讨论,其中之一就是 Dirac 猜想^[10].从(2-1-23)式知,初级第一类约束前的约束乘子 λ_a^0 是不确定的.这样从同一初态 F_0 出发,由于演化方程(2-1-26)中存在任意函数 λ_a^0 ,末态 F 可以有不同取值.这表明这些末态在物理上是等价的,不过它们之间相差一个规范变换.规范变换的生成元为初级第一类约束 Λ_a^0 .Dirac 把这种情况推广到次级第一类约束,即所有第一类约束都是规范变换的生成元,它们生成物理态之间的等价变换.这就是著名的 Dirac 猜想.至今对这个猜想还没有给予严格的证明,不过对一些重要的物理系统,Dirac 猜想尚未导致不合理的结果.

2.2 约束 Hamilton 系统的量子化

约束 Hamilton 系统量子化问题的关键在于处理约束.一种方法是量子化所有动力学变量,用约束条件来挑选物理态.这种对约束系统的 Hamilton 形式量子化的基础是由 Dirac 首先奠定的^[1],这是一种算符形式的正则量子化方案.路径积分量子化起源于的 Dirac 工作,而后由 Feynman 进一步加以发展.Faddeev-Popov 给出了规范系统在位形空间中的路径积分量子化.Faddeev 提出了对含第一类约束系统在相空间中的路径积分量子化方案^[4],其后 Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的系统在相空间中的路径积分量子化方案^[5],称 F-S(Faddeev-Senjanovic)路径积分量子化.相对论协变形式的量子化方法是由 Fradkin 及其合作者给出的,通常称为 BFV(Batalin-Fradkin-Vilkovisky)量子化方案^[6].下面主要介绍 Dirac 算符正则量子化、F-S 路径积分量子化和 BFV 路径积分量子化方案.

2.2.1 Dirac 算符正则量子化

Dirac 等人把标准正则量子化方法推广到含有约束的系统. 用 Dirac-Bergmann 算法, 算出约束 Hamilton 系统的第一类和第二类约束; 算出场变量之间 Dirac 括号, Dirac 括号直接对应量子正则对易(或反对易)关系; 最后约束条件挑选物理态. 这种处理约束的正则量子化方法, 在处理某些问题时(如 Abel 规范理论)是成功的.

正规 Lagrange 量有限自由度系统过渡到 Hamilton 体制后, 将相空间中的经典物理量 $F(q, p)$ 过渡到 Hilbert 空间中的量子可观测量算符 $\hat{F}(\hat{q}, \hat{p})$, 这里 $[\hat{q}, \hat{p}] = i$; 量子态矢随时间的演化满足 Schrödinger 方程; 将经典 Poisson 括号用量子对易式, 按

$$\{A, B\} \rightarrow -i[\hat{A}, \hat{B}] \quad (2-2-1)$$

方式代替, 那么经典正则方程 $\dot{F} = \{F, H_c\}$ 形式上就变为 Heisenberg 方程

$$\dot{\hat{F}} = -i[\hat{F}, \hat{H}_c] \quad (2-2-2)$$

式中 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. 对正规 Lagrange 量系统上述正则量子化的算符形式在初等量子力学中是人们熟知的. 对奇异 Lagrange 量系统, 在相空间存在固有约束 $\phi_a(q, p) = 0$, 过渡到量子理论中其相应的算符方程为

$$\hat{\phi}_a(\hat{q}, \hat{p}) = 0 \quad (2-2-3)$$

在一些实际物理系统中如果将经典理论中的约束条件过渡到量子理论时视为算符方程, 将会导致与对易关系式(如电磁场)不相容. 可以把(2-2-3)式视为对物理态的挑选

$$\hat{\phi}_a(\hat{q}, \hat{p})| \rangle_{phys} = 0 \quad (2-2-4)$$

也就是说, 约束条件量子化后作用在物理态 $| \rangle_{phys}$ 上为零. 适合这种要求的态矢量称为物理态矢量, 记为 $| \rangle_{phys}$.

设系统仅存在两个约束

$$\phi_1(q, p) = 0, \quad \phi_2(q, p) = 0 \quad (2-2-5)$$

约束条件量子化表述为

$$\hat{\phi}_1(\hat{q}, \hat{p})| \rangle_{phys} = 0, \quad \hat{\phi}_2(\hat{q}, \hat{p})| \rangle_{phys} = 0 \quad (2-2-6)$$

从(2-2-6)式有

$$[\hat{\phi}_1(\hat{q}, \hat{p}), \hat{\phi}_2(\hat{q}, \hat{p})] \Big|_{phys} = 0 \quad (2-2-7)$$

将(2-2-7)回到经典的对应式,可见约束 ϕ_1 和 ϕ_2 为第一类约束.由此可见,当系统存在第二类约束时,如果采用(2-2-1)式的对应关系,那么在经典力学和量子力学对应上将会出现矛盾.为了克服这个困难,引进 Dirac 括号.由于第二类约束的 Dirac 括号为零^[1],对含第二类约束的系统,就采用 Dirac 括号与量子括号相对应

$$\{A, B\}_D \rightarrow -i[\hat{A}, \hat{B}] \quad (2-2-8)$$

这样经典理论和量子理论的对应关系就不再出现不自洽的情况了.对同时含有第一类和第二类约束的系统进行 Dirac 正则量子化时,需要选取和第一类约束数目相同的规范约束

$$\Omega^a \approx 0 \quad (2-2-9a)$$

使其对全部约束来说(包括规范约束)已成为第二类约束.规范约束条件至少满足

$$\det\{\Lambda_a, \Omega^b\} \neq 0 \quad (2-2-9b)$$

当正则变量的 Dirac 括号与正则变量有关时(如杨-Mills 场), Dirac 正则量子化就十分困难;另外, Dirac 正则量子化方法是算符形式的,在具体运用时(如推导守恒流)就要考虑算符的次序问题,这是很复杂的计算.仅在这一点上,它就不如下面所述的路径积分量子化方法方便.

2.2.2 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化

路径积分量子化方法是基于量子力学基本原理上的理论,是基于 C 数,而不是 q 数的理论,易于计算.1967 年 Faddeev 和 Popov(F-P)把 Feynman 在 1948 年提出的路径积分方法推广到量子场论^[3],成功地实现了杨-Mills 场在位形空间中的量子化.1970 年 Faddeev 在 Dirac 约束理论基础上,考虑系统在相空间存在固有约束,给出了含第一类约束系统的路径积分量子化^[4],1976 年 Senjanovic 解决了同时含第一类和第二类约束系统的路径积分量子化^[5],称为 F-S 路径积分量子化.F-S 量子化比 F-P 量子化方法严格,比后面所叙的 BFV 量子化方法使用起来方便简单.当对动量的路径积分为 Gauss 型时,F-S 量子化的结果可化为 F-P 量子化的结果(如杨-Mills 场).F-S 量子化是目前实际使用范围最广的方法.

下面简单叙述 F-S 路径积分量子化方法的结果:设动力学系统由奇异

Lagrange 量密度 $\mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha)$ 描述, $\Lambda_a (a=1, \dots, m)$ 为系统第一类约束, $\theta_l (l=1, \dots, 2k)$ 为系统第二类约束. 系统含有 m 个第一类约束, 在对系统进行路径积分量子化时需选 m 个规范条件 $\Omega^a (a=1, \dots, m)$. 为了方便, 还假定规范条件 Ω^a 满足

$$\begin{aligned} \det\{\Lambda_a, \Omega^b\} &\neq 0 \\ \{\Omega^a, \Omega^b\} &= 0 \end{aligned} \quad (2-2-10)$$

第二类约束满足

$$\det\{\theta_i, \theta_j\} \neq 0 \quad (2-2-11)$$

则系统 F-S 路径积分形式的量子跃迁振幅为

$$\begin{aligned} Z[0] = \int \mathcal{D}\varphi^\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \det\{\Lambda_a, \Omega^b\} &\prod_{a=1}^m \delta(\Lambda_a) \delta(\Omega^a) \prod_{l=1}^{2k} \delta(\theta_l) [\det\{\theta_i, \theta_j\}]^{1/2} \\ &\exp\{i \int d^4x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathcal{H}_c)\} \end{aligned} \quad (2-2-12)$$

对场量 φ^α 引入外源 J_α , 系统在相空间 Green 函数的生成泛函为^[5]

$$\begin{aligned} Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi^\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \det\{\Lambda_a, \Omega^b\} &\prod_{a=1}^m \delta(\Lambda_a) \delta(\Omega^a) \prod_{l=1}^{2k} \delta(\theta_l) [\det\{\theta_i, \theta_j\}]^{1/2} \\ &\exp\{i \int d^4x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathcal{H}_c + J_\alpha \varphi^\alpha)\} \end{aligned} \quad (2-2-13)$$

这里仅对场量引入外源, 对动量未引入外源. 利用 δ -函数的性质和 Grassmann 变量 $C_b(x), \bar{C}_a(x)$ 的积分性质, 可将(2-2-13)式写为^[5]

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\varphi^\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}\lambda_f \mathcal{D}\bar{C}_a \mathcal{D}C_b \mathcal{D}\bar{\pi}_a \mathcal{D}\pi_b \\ &\exp\left\{i \int d^4x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathcal{H}_c + \lambda_a \Lambda_a + \lambda_b \Omega^b + \lambda_l \theta_l + J_\alpha \varphi^\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \int d^4y [\bar{C}_a(x) \{\Lambda_a(x), \Omega^b(y)\} C_b(y) + \frac{1}{2} \bar{C}_i(x) \{\theta_i(x), \theta_j(y)\} C_j(y)]\right\} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi^\alpha \mathcal{D}\pi_\alpha \mathcal{D}\lambda_f \mathcal{D}\bar{C}_a \mathcal{D}C_b \mathcal{D}\bar{\pi}_a \mathcal{D}\pi_b \exp\{i[I_{\text{eff}}^P + \int d^4x J_\alpha \varphi^\alpha]\} \end{aligned} \quad (2-2-14)$$

其中 $\lambda_f = (\lambda_a, \lambda_b, \lambda_l)$, $\bar{\pi}_a, \pi_a$ 分别为 C_a 和 \bar{C}_a 的共轭动量, 且

$$I_{\text{eff}}^P = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}^P = \int d^4x [\mathcal{L}^P + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{gh}] \quad (2-2-15)$$

$$\mathcal{L}^P = \pi_a \dot{\phi}^a - \mathcal{H}_c \quad (2-2-16)$$

$$\mathcal{L}_m = \lambda_a \Lambda_a + \lambda_b \Omega^b + \lambda_i \theta_i \quad (2-2-17)$$

$$\mathcal{L}_{gh} = \int d^4 y [\bar{C}_a(x) \{\Lambda_a(x), \Omega^b(y)\} C_b(y) + \frac{1}{2} \bar{C}_i(x) \{\theta_i(x), \theta_j(y)\} C_j(y)] \quad (2-2-18)$$

为了简单,记 $\varphi = (\varphi^a, \lambda_f, \bar{C}_a, C_b)$, 于是(2-2-14)式为

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \exp\{i[I_{eff}^P + \int d^4 x \mathcal{J}\varphi]\} \quad (2-2-19)$$

用 F-S 方法量子化 Yang-Mills 规范场,积出动量和用得到的结果与 F-P 相同. F-S 量子化后的有效 Lagrange 量中增添了(2-2-17)和(2-2-18)式两项,有效 Lagrange 量不再具有规范不变性.对 Yang-Mills 场量子化,1974 年 Becchi, Rouet 和 Stora 发现虽然有效 Lagrange 量不再有规范不变性,但有一种新的不变性,称 BRS 不变性(目前逐渐为与其性质相近的 BRST 规范不变性所代替).BRS 变换是将对易量与反对易量互相联系起来的某种超对称变换.

2.2.3 Batalin-Fradkin-Vilkovisky 路径积分量子化

建立在 BRS 对称原理上的 BFV(Batalin-Fradkin-Vilkovisky)量子化方案是协变的规范理论的量子化方法,是有严格论证的量子化方法.BFV 量子化方法是通过增添 Grassmann 数扩展相空间,扩展相空间相应于一个没有约束的 Hamilton 系统.BFV 量子化方法比 F-S 或 F-P 量子化方法更具有普适性、更基本. BFV 量子化方法可以较方便地与其他量子化形式转换,不同的路径积分量子化方法只不过是 BFV 方法中不同规范选取的结果.对一些重要物理系统, BFV 中不同形式固定规范 ψ 的选取,就可以得到 F-S 或 F-P 量子化的结果,但不如 F-S 或 F-P 方法简单,有一定的复杂性.

BFV 路径积分量子化是建立在 Hamilton 描述形式上的量子化方法.为叙述方便,设某约束 Hamilton 系统仅含第一类约束 $\Lambda_a (a=1, \dots, m)$, 且 Hamilton 量也是第一类的,即有

$$\{\Lambda_a, \Lambda_b\} = C_{ab}^c \Lambda_c \quad (2-2-20)$$

$$\{H_0, \Lambda_a\} = V_a^b \Lambda_b \quad (2-2-21)$$

总 Hamilton 量为

$$H_T = H_0 + \lambda^a \Lambda_a \quad (2-2-22)$$

把 Lagrange 乘子 λ^a 看作力学变量,有相应的正则动量 π_a ,系统相空间变量为 $Z_\Delta(Z_A, \lambda^a, \pi_a)$,其中 $Z_A(\varphi^a, \Pi_a)$ 为原动力学变量空间.为了不改变原动力学系统,正则动量 π_a 满足

$$\pi_a = 0 (a=1,2,\dots,m) \quad (2-2-23)$$

即系统增添 m 个约束.系统 $2m$ 个约束记为 $G_f(\Lambda_a, \pi_a) (f=1,\dots,2m)$,它们满足类似(2-2-20)和(2-2-21)式的关系

$$\{G_a, G_b\} = U_{ab}^c G_c \quad (2-2-24)$$

$$\{H_0, G_a\} = V_a^b G_b \quad (2-2-25)$$

我们称 $U_a^{(0)} = G_a$ 为零阶结构函数,作零阶结构函数的 Poisson 括号

$$\{U_a^{(0)}, U_b^{(0)}\} = -2U_{ab}^c U_c^{(0)} \quad (2-2-26)$$

得一阶结构函数 $U_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_b} U_{ab}^c$, ε_b 为宇称值.重复上述步骤可推导 n 阶结构函数.存在和约束 G_a 等价的一组约束 F_a ,也可以作为零阶结构函数,因此,零阶结构函数具有不确定性.这样一阶结构函数,……, n 阶结构函数都具有不确定性.

在相空间 $Z_\Delta(Z_A, \lambda^a, \pi_a)$ 中,对每一个约束 G_a 引入费米鬼场 η^a 及其正则共轭量 \mathcal{P}_a ,使其 Poisson 括号遵从

$$\{\mathcal{P}_a, \eta^b\} = \{\eta^b, \mathcal{P}_a\} = -\delta_a^b \quad (2-2-27)$$

$$\{\mathcal{P}_a, \varphi^a\} = \{\mathcal{P}_a, \Pi_a\} = \{\eta^a, \lambda^a\} = \{\eta^a, \pi_a\} = 0 \quad (2-2-28)$$

和

$$(\eta^a)^* = \eta^a, (\mathcal{P}_a)^* = \mathcal{P}_a \quad (2-2-29)$$

满足上述关系的超空间 $(Z_\Delta, \eta^a, \mathcal{P}_a)$ 称为扩展相空间 Z .在扩展相空间 Z 中,存在函数

$$\Omega = \sum_{n \geq 0} \eta^{a_{n+1}} \cdots \eta^{a_1} U_{a_1 \cdots a_{n+1}}^{(n) b_1 \cdots b_n} \mathcal{P}_{b_n} \cdots \mathcal{P}_{b_1} \quad (2-2-30)$$

即为 BRS 变换生成元. 容易看出 BRS 变换生成元 Ω 是结构函数的生成泛函. 结构函数的不确定性相应于不同的 BRS 变换生成元 Ω 在扩展相空间 Z 中的正则变换. 对 Abel 理论, 有

$$\Omega = \eta^a G_a \quad (2-2-31)$$

对非 Abel 理论, BRS 变换生成元 Ω 为

$$\Omega = \eta^a G_a - \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_b} \eta^b \eta^c C_{cb}^a \mathcal{P}_a \quad (2-2-32)$$

这里 C_{cb}^a 为常数. Hamilton 量 H_0 是物理系统可观测量, 在扩展相空间存在 BRS 变换不变函数 H

$$H = \sum_{n \geq 0} \eta^{a_{n+1}} \cdots \eta^{a_1} H_{a_1 \cdots a_{n+1}}^{(n) b_1 \cdots b_n} \mathcal{P}_{b_n} \cdots \mathcal{P}_{b_1} \quad (2-2-33)$$

为了使扩展相空间 $Z(Z_A, \lambda^a, \pi_a, \eta^a, \mathcal{P}_a)$ 和原来相空间 $Z_A(\varphi^a, \Pi_a)$ 等价, 需要用条件

$$\Omega |>_{phys} = 0 \quad (2-2-34)$$

来挑选物理态. 按约束的分类 $G_f(\Lambda_a, \pi_a)$, 把鬼场分为两部分

$$\begin{aligned} \eta^a &= (-i)^{\varepsilon_b+1} \mathcal{P}^a, C^a \\ \mathcal{P}_a &= (i)^{\varepsilon_b+1} \bar{C}_a, \bar{\mathcal{P}}_a \end{aligned} \quad (2-2-35)$$

这里 C^a, \bar{C}_a 是实的且分别共轭于 $\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{P}^a$ 的鬼场.

BFV 路径积分形式的量子跃迁振幅为^[6]

$$Z_\psi = \int \mathcal{D}\varphi^a \mathcal{D}\Pi_a \mathcal{D}\lambda^a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}\eta^a \mathcal{D}\mathcal{P}_a \exp\{iS_{eff}\} \quad (2-2-36)$$

$$S_{eff} = \int d^4x (\dot{\varphi}^a \Pi_a + \dot{\lambda}^a \pi_a + \dot{\eta}^a \mathcal{P}_a - \mathcal{H}_{eff}) \quad (2-2-37)$$

$$H_{eff} = H - \{\psi, \Omega\} = \int d^3x \mathcal{H}_{eff} \quad (2-2-38)$$

这里 ψ 是鬼场、Lagrange 乘子或它们的正则动量的任意函数, S_{eff} 称为有效作用

量, H_{eff} 为有效 Hamilton 量. 选择不同规范固定项 ψ , 得到同样的量子跃迁振幅^[6].

量子规范自由度是通过 $H \rightarrow H + \{\psi, \Omega\}$ 给出的. 一般情况下, 选择 ψ 为

$$\psi = (i)^{\varepsilon_a+1} \bar{C}_a \chi^a + \bar{p}_a \lambda^a \quad (2-2-39)$$

这里 χ_a 不包含鬼和它们的正则共轭动量.

2.3 约束 Hamilton 系统的对称性和守恒律

对称性和守恒律的联系, 在经典理论中通常由 Noether 定理给出. 在量子理论中, 对称性和守恒律的联系, 由量子守恒理论给出. 用路径积分量子化方法讨论量子守恒律, 出现的是经典数, 研究系统的量子对称性质比较方便. 但通常是在位形空间来讨论的, 它仅适用于相空间路径积分中关于正则动量可积的情形. 对约束 Hamilton 系统, 当系统的约束结构比较复杂时, 要作出该积分是十分困难的, 甚至是不可能的. 因此, 从相空间路径积分量子化出发来研究约束 Hamilton 系统的正则对称性, 就具有更基本的意义. 文[15,16,25]中用路径积分方法建立了约束 Hamilton 系统对称性和量子守恒律的基本理论. 本节简单叙述经典 Noether 定理和量子 Noether 定理.

2.3.1 经典 Noether 定理

经典 Noether 定理有位形空间中的和相空间中的两种形式, 下面分别叙述. 设系统由 Lagrange 量密度 $\mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha)$ 描述. 系统的作用量

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha) \quad (2-3-1)$$

在无穷小整体变换

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma} \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi^{\alpha}, \varphi_{,\mu}^{\alpha}) \\ \varphi'^{\alpha}(x') = \varphi^{\alpha}(x) + \Delta \varphi^{\alpha}(x) = \varphi^{\alpha}(x) + \varepsilon_{\sigma} \xi^{\alpha\sigma}(x, \varphi^{\alpha}, \varphi_{,\mu}^{\alpha}) \end{cases} \quad (2-3-2)$$

下不变, ε_{σ} ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 为无穷小变换参数, $\tau^{\mu\sigma}$ 和 $\xi^{\alpha\sigma}$ 为 $(x, \varphi^{\alpha}(x), \pi_{\alpha}(x))$ 的函数.

此不变性导致系统存在 r 个微分形式的守恒律^[13]

$$\partial_{\mu} J^{\mu\sigma} = 0 \quad (2-3-3)$$

$$J^{\mu\sigma} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}^{\alpha}} \right) (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi_{,\nu}^{\alpha} \tau^{\nu\sigma}) + \mathcal{L} \tau^{\mu\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (2-3-4)$$

相应地有 r 个经典运动守恒量

$$Q^\sigma = \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha^\sigma} \right) (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi_{,\nu}^\alpha \tau^{\nu\sigma}) + \mathcal{L} \tau^{0\sigma} \right] = \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (2-3-5)$$

这就是位形空间中的经典 Noether 定理的结果. 对有限自由度系统, 如果系统作用量在无穷小整体变换

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t, q) \\ q'(t') = q(t) + \Delta q(t) = q(t) + \varepsilon_\sigma \xi^\sigma(t, q) \end{cases} \quad (2-3-2a)$$

下不变, 那么存在相应经典守恒量^[13]

$$Q^\sigma = L \tau^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q} \tau^\sigma) = \text{const} \quad (2-3-5a)$$

守恒量(2-3-5)和(2-3-5a)对正规系统和奇异系统均成立.

下面叙述相空间中的经典 Noether 定理. 设奇异系统 Lagrange 量密度为 $\mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_{,\mu}^\alpha)$, Hess 矩阵的秩为 R , 此时正则变量间存在 $n - R$ 个约束

$$\Phi_b(\varphi^\alpha, \pi_\alpha) \approx 0 \quad (b = n - R) \quad (2-3-6)$$

系统的正则作用量为

$$I^P = \int d^4x \mathcal{L}_P = \int d^4x (\pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathcal{H}_c) \quad (2-3-7)$$

\mathcal{H}_c 为正则 Hamilton 密度, 正则 Hamilton 量为 $H_c = \int d^4x \mathcal{H}_c$.

如果系统正则作用量在相空间无穷小整体变换

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi^\alpha, \pi_\alpha) \\ \varphi'^\alpha(x') = \varphi^\alpha(x) + \Delta \varphi^\alpha(x) = \varphi^\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{\alpha\sigma}(x, \varphi^\alpha, \pi_\alpha) \\ \pi'_\alpha(x') = \pi_\alpha(x) + \Delta \pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \eta^{\alpha\sigma}(x, \varphi^\alpha, \pi_\alpha) \end{cases} \quad (2-3-8)$$

下不变, ε_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 为无穷小任意参数, $\tau^{\mu\sigma}$, $\xi^{\alpha\sigma}$ 和 $\eta^{\alpha\sigma}$ 为 $(x, \varphi^\alpha(x), \pi_\alpha(x))$ 的函数; 且约束方程(2-3-6)式在(2-3-8)式确定的实质变分下不变, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_b}{\partial \varphi^\alpha} \delta \varphi^\alpha + \frac{\partial \Phi_b}{\partial \pi_\alpha} \delta \pi_\alpha &= 0 \\ \delta \varphi^\alpha &= \Delta \varphi^\alpha - \varphi_{,\mu}^\alpha \Delta x^\mu, \quad \delta \pi_\alpha = \Delta \pi_\alpha - \pi_{\alpha,\mu} \Delta x^\mu \end{aligned}$$

那么此系统在相空间存在 r 个守恒量^[13]

$$Q^\sigma = \int d^3x [\pi_\alpha (\xi^{\alpha\sigma} - \varphi_{,\mu}^\alpha \tau^{\mu\sigma}) - \mathcal{H}_c \tau^{0\sigma}] = \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (2-3-9)$$

这就是相空间中约束 Hamilton 系统的经典 Noether 定理.对正规系统(此时不存在约束),当正则作用量在(2-3-8)式变换下不变时,也存在守恒量(2-3-9)式.

2.3.2 量子正则 Noether 定理

根据上节内容,约束 Hamilton 系统相空间 Green 函数的生成泛函为(2-2-19)

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \exp \{i[I_{eff}^P + \int d^4x J\varphi]\} \quad (2-3-10)$$

式中 $I_{eff}^P = \int d^4x (\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{eff})$ 为有效正则作用量, $\mathcal{H}_{eff} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}_{eff}^P$ 为有效 Hamilton 量密度.下面介绍相空间中的量子 Noether 定理,位形空间中的量子 Noether 定理下节有推导.

假设有效正则作用量在整体变换

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma} \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_{\sigma} \xi^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_{\sigma} \eta^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \end{cases} \quad (2-3-11)$$

下不变.考虑与(2-3-11)式对应的定域变换

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma}(x) \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_{\sigma}(x) \xi^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_{\sigma}(x) \eta^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \end{cases} \quad (2-3-12)$$

这里 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 为无穷小任意函数,它们的值及其微商在四维时空区域的边界上为零.在(2-3-12)式定域变换下,有效正则作用量的变分为^[19]

$$\begin{aligned} \Delta I_{eff}^P = \int d^4x \varepsilon_{\sigma}(x) \left\{ \frac{\delta I_{eff}^P}{\delta \varphi} (\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu} \tau^{\mu\sigma}) + \frac{\delta I_{eff}^P}{\delta \pi} (\eta^{\sigma} - \pi_{,\mu} \tau^{\mu\sigma}) \right. \\ \left. + \partial_{\mu} [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{eff}) \tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu} \tau^{\mu\sigma})] \right\} \\ + \int d^4x [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{eff}) \tau^{\mu\sigma} \partial_{\mu} \varepsilon_{\sigma}(x) + \pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu} \tau^{\mu\sigma}) D\varepsilon_{\sigma}(x)] \end{aligned} \quad (2-3-13)$$

根据假设,(2-3-13)中第一个积分为零,对(2-3-13)式的第二项进行分部积分,并注意到 $\varepsilon_{\sigma}(x)$ 的边界条件,得

$$\Delta I_{eff}^P = - \int d^4x \varepsilon_{\sigma}(x) \left\{ \partial_{\mu} [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{eff}) \tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu} \tau^{\mu\sigma})] \right\} \quad (2-3-14)$$

假设定域变换(2-3-12)式的 Jacobi 行列式为 1,将(2-3-14)式代入(2-3-10)式,得

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \left\{ 1 - i \int d^4x \varepsilon_\sigma(x) \left\{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] \right\} \right. \\ \left. + i \int d^4x \varepsilon_\sigma(x) [J(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] \right\} \times \exp \left\{ i [I_{\text{eff}}^P + \int d^4x J\varphi] \right\} \quad (2-3-15)$$

生成泛函(2-3-10)在(2-3-11)式变换下不变,有 $\delta Z[J]/\delta \varepsilon_\sigma(x)|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} = 0$, 于是得

$$\int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \left\{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - M^\sigma \right\} \exp \left\{ i [I_{\text{eff}}^P + \int d^4x J\varphi] \right\} = 0 \quad (2-3-16)$$

$$M^\sigma = J(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \quad (2-3-17)$$

将(2-3-16)式关于外源 $J(x)$ 求 n 次泛函微商,得^[15,16]

$$0 = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \left\{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - M^\sigma \right\} \\ \times \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) - i \sum_j \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n) \\ \times N^\sigma \delta(x - x_j) \left\} \exp \left\{ i [I_{\text{eff}}^P + \int d^4x J\varphi] \right\} \quad (2-3-18)$$

$$N^\sigma = \xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma} \quad (2-3-19)$$

在(2-3-18)式中,令 $J = 0$, 得

$$\langle 0 | T^* \left\{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] \right\} \times \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) | 0 \rangle \\ = i \sum_j \langle 0 | T^* [\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n) \times N^\sigma] | 0 \rangle \delta(x - x_j) \quad (2-3-20)$$

其中 $|0\rangle$ 代表场的基态, T^* 为一种特定的编时算符^[19]. 固定 t , 让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \rightarrow +\infty, \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \rightarrow -\infty$$

可将(2-3-20)写为

$$\langle \text{out}, m | \left\{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] \right\} | n - m, \text{in} \rangle = 0 \quad (2-3-21)$$

由于 m 和 n 任意, 从而有等式

$$\partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] = 0 \quad (2-3-22)$$

在三维空间中对(2-3-22)式积分, 假设无穷远处场为零, 由 Gauss 定理, 得

$$D \int_V d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}] = 0 \quad (2-3-23)$$

重复指标 k 表示由 1 至 3 求和. 这样就得到约束 Hamilton 系统场论形式的量子正则 Noether 定理: 如果系统的有效正则作用量在整体变换(2-3-11)的变换下不变,

且对应定域变换(2-3-12)式的 Jacobi 行列式为 1,那么该系统存在如下量子守恒量 [15,16]

$$Q^\sigma = \int d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{eff} \tau^{0\sigma}] = const \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (2-3-24)$$

量子守恒量(2-3-24)式与相空间经典守恒量(2-3-9)相对应.对于约束 Hamilton 系统,量子化后系统的有效 Hamilton 量密度 \mathcal{H}_{eff} 一般不同于经典的正则 Hamilton 量密度 \mathcal{H}_c ,这体现了约束带来的量子效应.上述导出量子守恒量的方法,其显著优点在于勿需作出相空间中生成泛函对正则动量的路径积分.一般而言作出该积分是较复杂的,甚至是不可能的.因此,上述理论形式具有更普遍的意义.

2.4 在量子水平下系统的变换性质

对称性和守恒律的联系已有大量研究.如果一个系统在某种变换下不再具有不变性,会导致什么结果?文[20]中对经典情况作了研究,这里讨论在量子水平下系统的变换性质.本节基于 Green 函数在位形空间中的生成泛函,导出了有限自由度系统在量子水平下系统变换性质的一般量子动力学方程.研究表明,该动力学方程在一些特殊情况下可简化为量子力学中的动量定理,角动量定理或位形空间中的量子 Noether 定理.

2.4.1 系统变换性质的量子动力学方程

为方便,考虑有限自由度系统,推广到场论情形是直接的.设系统由 Lagrange 量 $L(q, \dot{q})$ ($q = [q^1, q^2, \dots, q^n]$) 来描述,与 q 相应的正则动量记为 $p = \partial L / \partial \dot{q}$ ($p = [p_1, p_2, \dots, p_n]$).若 Lagrange 量是正规的,根据 Feymann 路径积分,量子跃迁振幅为

$$Z[0] = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \{i \int dt [p\dot{q} - H_c]\} \quad (2-4-1)$$

对 q 引入外源 J , Green 函数的相空间生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \{i \int dt [p\dot{q} - H_c + Jq]\} \quad (2-4-2)$$

式中 H_c 为正则 Hamilton 量,而 $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)$.从(2-4-2)式,可以导出所有量

子水平的物理量. 设(2-4-2)中动量积分为 Gauss 型的, 例如, $H_c = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$, 作出对动量的路径积分后, 正规系统在位形空间中 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp \{i \int dt [L_{eff} + Jq]\} \quad (2-4-3)$$

这里 L_{eff} 为位形空间中的有效 Lagrange 量, 它可能与原始 Lagrange 量不同. 上述动量为 Gauss 型积分系统, L_{eff} 就等于 L .

若 Lagrange 量是奇异的, 根据 F-S 路径积分量子化, 此约束 Hamilton 系统 Green 函数的相空间生成泛函(2-2-13)为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \prod_{j,k,l} \delta(\theta_j) \delta(\Lambda_k) \delta(\Omega_l) \det\{\Lambda_k, \Omega_l\} \cdot [\det\{\theta_j, \theta_j\}]^{1/2} \exp \{i \int dt [pq - H_c + Jq]\} \quad (2-4-4)$$

利用 Grassmann 变量积分和 δ -函数的性质, (2-4-4)可以写为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \{i \int dt [L_{eff}^p + Jq]\} \quad (2-4-5)$$

系统有效作用量 $I_{eff}^p = \int L_{eff}^p dt$ 的表达式与(2-2-15)类似. 式当(2-4-5)中对动量的积分为 Gauss 型时, 作出对正则动量的路径积分后, 此奇异 Lagrange 量系统在位形空间中的生成泛函和(2-4-3)类似, 可写为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp \{i \int dt [L'_{eff} + Jq]\} \quad (2-4-6)$$

式中 L'_{eff} 为与奇异 Lagrange 量对应的有效 Lagrange 量. 由(2-4-3)或(2-4-6)式可以讨论在量子水平下有限自由度系统的变换性质.

系统有效作用量为 $I_{eff} = \int L_{eff} dt$. 设系统的有效作用量在下列无穷小整体变换

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t, q) \\ q'(t') = q(t) + \Delta q(t) = q(t) + \varepsilon_\sigma \xi^\sigma(t, q) \end{cases} \quad (2-4-7)$$

下不是不变的, 且有效作用量的改变记为

$$\delta I_{eff} = \int u^\sigma(q, \dot{q}) \varepsilon_\sigma dt \quad (2-4-8)$$

将(2-4-7)式整体变换定域化, 考虑如下定域变换

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma(t)\tau^\sigma(t; q) \\ q'(t') = q(t) + \Delta q(t) = q(t) + \varepsilon_\sigma(t)\xi^\sigma(t; q) \end{cases} \quad (2-4-9)$$

式中 $\varepsilon_\sigma(t)$ ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 为无穷小任意函数, 它们及其各级微商在时间区间的端点为零. 在(2-4-9)式变换下, 有效作用量的变分为^[13,19]

$$\begin{aligned} \Delta I_{\text{eff}} &= \int dt \left\{ \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta q} (\Delta q - \dot{q}\Delta t) + D \left[\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\Delta q - \dot{q}\Delta t) + L_{\text{eff}} \Delta t \right] \right\} \\ &= \int dt \varepsilon_\sigma(t) \left\{ \frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta q} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) + D \left[\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) + L_{\text{eff}} \tau^\sigma \right] \right\} \\ &\quad + \int dt \left\{ [L_{\text{eff}} \tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] D \varepsilon_\sigma(t) \right\} \end{aligned} \quad (2-4-10)$$

其中 $D = d/dt$,

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}}{\delta q} = \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial q} - D \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} \right)$$

由于有效作用量在整体变换(2-4-7)下的改变由(2-4-8)给出, 因此(2-4-10)式中积分第一个积分等于(2-4-8)式的右边, 有

$$\Delta I_{\text{eff}} = \int dt \varepsilon_\sigma(t) u^\sigma + \int dt \left\{ [L_{\text{eff}} \tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] D \varepsilon_\sigma(t) \right\} \quad (2-4-11)$$

根据 $\varepsilon_\sigma(t)$ 的边界条件, (2-4-11)又可写为

$$\Delta I_{\text{eff}} = - \int dt \left\{ \varepsilon_\sigma(t) D \left[\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) + L_{\text{eff}} \tau^\sigma \right] - u^\sigma \varepsilon_\sigma(t) \right\} \quad (2-4-12)$$

变换(2-4-9)式的 Jacobi 行列式记为 $\bar{J} = 1 + J_1(\varepsilon)$. 由于生成泛函(2-4-3)或(2-4-6)式

在(2-4-9)式变换下不变 $\delta Z[J] / \delta \varepsilon_\sigma(t) |_{\varepsilon_\sigma(t)=0} = 0$, 有

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}q \bar{J} \left\{ 1 - i \int dt \varepsilon_\sigma(t) \left\{ D \left[L_{\text{eff}} \tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) \right] - u^\sigma - J(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) \right\} \right\} \\ &\quad \exp \left\{ i \int dt (L_{\text{eff}} + Jq) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}q \left\{ 1 + J_1 - i \int dt \varepsilon_\sigma(t) \left\{ D \left[L_{\text{eff}} \tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} (\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) \right] - u^\sigma - J(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) \right\} \right\} \\ &\quad \exp \left\{ i \int dt (L_{\text{eff}} + Jq) \right\} \end{aligned} \quad (2-4-13)$$

将(2-4-13)式关于 $\varepsilon_\sigma(t)$ 求泛函微商,得

$$\int \mathcal{D}q \left\{ D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] - u^\sigma - J(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) - J^\sigma \right\} \exp\{i \int dt(L_{\text{eff}} + Jq)\} = 0 \quad (2-4-14)$$

其中 $J^\sigma = -i\delta\bar{J}/\delta\varepsilon_\sigma(t)|_{\varepsilon_\sigma(t)=0}$. 将(2-4-14)式关于 $J(t_j)$ 求 n 次泛函微商,可得

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}q \left\{ \left\{ D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] - u^\sigma - J(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) - J^\sigma \right\} q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n) \right. \\ & \left. + (-i) \sum_j q(t_1)\cdots q(t_{j-1})q(t_{j+1})\cdots q(t_n)(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)\delta(t-t_j) \right\} \exp\{i \int dt(L_{\text{eff}} + Jq)\} = 0 \end{aligned} \quad (2-4-15)$$

在(2-4-15)式中,让外源 $J=0$,得

$$\begin{aligned} & \langle 0|T^* \left\{ D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] - u^\sigma - J^\sigma \right\} q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)|0\rangle \\ & = i \sum_j \langle 0|T^* [q(t_1)\cdots q(t_{j-1})q(t_{j+1})\cdots q(t_n)(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)]|0\rangle \delta(t-t_j) \end{aligned} \quad (2-4-16)$$

式中, $|0\rangle$ 代表系统基态, q 为算符, T^* 为一种特定形式的编时乘积

$$\langle 0|T^* [D_t q(t) D_{t'} q(t') \cdots] |0\rangle = D_t D_{t'} \langle 0|T[q(t)q(t')\cdots]|0\rangle$$

固定 t , 让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \rightarrow +\infty, \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \rightarrow -\infty$$

有

$$\langle 0|T^* \left\{ D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] - u^\sigma - J^\sigma \right\} q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)|0\rangle = 0 \quad (2-4-17)$$

记 $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t)|0\rangle = |\varphi\rangle$, 有

$$\lim_{t_1 \rightarrow -\infty, \cdots, t_m \rightarrow -\infty} q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_m)|0\rangle = |\varphi_m\rangle$$

类似有

$$\langle 0| \lim_{t_1 \rightarrow +\infty, \cdots, t_m \rightarrow +\infty} q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_m) = \langle \varphi_m |$$

这样(2-4-17)成为

$$\langle \varphi_m | \{ D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] - u^\sigma - J^\sigma \} | \varphi_{n-m} \rangle = 0 \quad (2-4-18)$$

由于 m 和 n 是任意的,有

$$D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] = u^\sigma + J^\sigma \quad (2-4-19)$$

上式就是当有效作用量和积分测度不具有变换(2-4-9)不变性时,系统变换性质的量子动力学方程.

在位形空间中的整体变换下,如果系统的有效作用量不变,且对应变换(2-4-9)式的 Jacobi 行列式为 1,即 $u^\sigma = 0, J^\sigma = 0$,根据(2-4-19)式,系统存在量子守恒量

$$Q^\sigma = L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) = \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (2-4-20)$$

这就是位形空间中有限自由度系统的量子 Noether 定理^[25].当系统的有效作用量不变,且对应变换(2-4-9)式的 Jacobi 行列式与 ε^σ 有关时,即 $u^\sigma = 0, J^\sigma \neq 0$,代入(2-4-19)得

$$D[L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma)] = J^\sigma \neq 0 \quad (2-4-21)$$

这样,对应变换(2-4-7)式相应的经典守恒量在量子理论不再保持.当系统的有效作用量改变,且对应变换(2-4-9)式的 Jacobi 行列式与 ε^σ 有关,即 $u^\sigma \neq 0, J^\sigma \neq 0$,但满足条件 $u^\sigma + J^\sigma = 0$ 时,代入(2-4-19)得

$$Q^\sigma = L_{\text{eff}}\tau^\sigma + \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}}(\xi^\sigma - \dot{q}\tau^\sigma) = \text{const} \quad (2-4-22)$$

这说明系统在某种非对称变换下(即没有经典守恒量),也可能存在量子守恒量.这是由于量子理论中积分测度的非不变性造成的.

2.4.2 例子

设系统的 Lagrange 量为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \quad (2-4-23)$$

系统在相空间中对动量的路径积分为 Gauss 型的,对(2-4-2)动量积分后,其在位形空间中 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp \{i \int dt [L_{\text{eff}} + Jq]\} \quad (2-4-24)$$

这里 $L_{\text{eff}} = L$. 假定 q 是 Cartesian 坐标系中的三维空间坐标 \vec{x} . 根据(2-4-19)-(2-4-22)讨论该系统量子水平的变换性质. 首先考虑无穷小空间平移变换

$$\begin{cases} q'(t') = q(t) + \varepsilon \\ t' = t \end{cases} \quad (2-4-25)$$

这里 ε 为无穷小任意参数. 系统有效作用量在空间平移变换下的改变为

$$\delta I_{\text{eff}} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{\partial V}{\partial q}\right) \varepsilon dt = \int_{t_1}^{t_2} F \varepsilon dt = \int_{t_1}^{t_2} u \varepsilon dt, \text{ 相应变换的 Jacobi 行列式为 } 1, \text{ 即 } J^\sigma = 0.$$

对比(2-4-9)和(2-4-25), 容易看出 $\tau^\sigma = 0, \xi = 1$. 代入(2-4-19), 得

$$D \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{q}} = D \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{dp}{dt} = F \quad (2-4-26)$$

这里 $p = \partial L / \partial \dot{q}$, 积分得

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (2-4-27)$$

这就是量子力学中的动量定理.

第二, 考虑无穷小空间转动变换

$$\begin{cases} q'_i(t) = q_i + \varepsilon_{ij} q_j \\ t' = t \end{cases} \quad (2-4-28)$$

式中 ε_{ij} 为无穷小任意参数, $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$. 有效作用量在转动变换下的改变为

$$\delta I_{\text{eff}} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i} \varepsilon_{ij} q_j\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{ij} q_j F_i dt \quad (2-4-29)$$

相应变换的 Jacobi 行列式为 1. 容易看出 $\tau^\sigma = 0, \xi_i = q_j$. 代入(2-4-19), 得

$$(q_j p_i - q_i p_j) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_j F_i - q_i F_j) dt \quad (2-4-30)$$

这就是量子力学中的角动量定理.

第三, 考虑无穷小时间平移变换

$$\begin{cases} q'(t') = q(t) \\ t' = t + \varepsilon \end{cases} \quad (2-4-31)$$

式中 ε 为无穷小任意参数.有效作用量在时间平移变换下是不变的,相应变换的 Jacobi 行列式为 1.容易看出 $\tau = 1, \xi = 0$,代入(2-4-20),得量子水平的守恒能量

$$L_{eff} - \frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot{q}} \dot{q} = -\frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) = const \quad (2-4-32)$$

最后,设势场 $V(q)$ 适合^[12]

$$V(aq) = a^{-2}V(q) \quad (2-4-33)$$

a 为任意参数.作用量在下列变换

$$\begin{cases} q' = q + \varepsilon q \\ t' = t + 2\varepsilon t \end{cases} \quad (2-4-34)$$

下是不变的^[12], ε 为无穷小任意参数.按经典 Noether 定理,有如下守恒量^[12]

$$m\dot{q}q - 2\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)\right]t = const \quad (2-4-35)$$

但是对应变换(2-4-34)式的 Jacobi 行列式 $\bar{J} = 1 + 3\varepsilon + o(\varepsilon^2)$ 与 $\varepsilon(t)$ 有关,即 $J^\sigma \neq 0$.由(2-4-21)式,容易看出该系统在量子水平没有与经典情形相同的守恒量(2-4-35)式.

2.5 本章小结

本章简要叙述约束 Hamilton 系统的经典理论,阐明初级约束、次级约束、第一类约束、第二类约束以及 Dirac 括号的含义.约束 Hamilton 系统量子化方法有算符形式的 Dirac 正则量子化,F-S 路径积分量子化和 BFV 路径积分量子化.对前两种方法作了简单叙述,后一种方法详细叙述.对称性和守恒律的联系,在经典理论中通常由 Noether 定理给出.在量子理论中,对称性和守恒律的联系,由量子守恒律给出.简单叙述了经典 Noether 定理和量子 Noether 定理.如果一个系统在某种变换下不再具有不变性,会导致什么结果?本章第四节基于 Green 函数在位形空间中的生成泛函,导出了有限自由度系统在量子水平下系统变换性质的一般量子动力学方程.研究表明,该动力学方程在一些特殊情况下可简化为量子力学中的动量定理,角动量定理或量子水平的 Noether 定理.

第 3 章 光孤子传输的经典理论

在光学领域里, 由于色散, 超短脉冲会在时域自然加长; 而由于衍射, 超窄光束会在空域里自然拓宽. 当光纤的线性色散效应和非线性自相位调制效应达到平衡时, 光纤中可传播无色散的光脉冲, 由于这种光脉冲沿时间轴传播时脉冲宽度保持不变, 因此被称为时间光孤子^[28-32]. 当传播光束在介质中发生的空间衍射与介质中光学非线性引起的自聚焦效应严格补偿时, 光束在介质中传播相当长距离但其光束直径不发生改变, 即形成空间光孤子^[30, 50, 54]. 本章主要叙述了时间光孤子和空间光孤子传输所满足的经典非线性 Schrödinger 方程的由来, 并用变分法研究了亮暗时间光孤子以及 Kerr 空间光孤子间的相互作用, 导出了相互作用的势函数. 利用求出的系统守恒量, 发现 Kerr 空间孤子间的相干相互作用与相对位相无关, 出现孤子间反常相互作用.

3.1 光波在非线性介质中的传播

本节推导光波在非线性介质中传播所满足的非线性 Schrödinger 方程^[31]. 从 Maxwell 方程组出发, 可导出光波在各向同性介质中传输的基本方程为

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \quad (3-1-1)$$

式中 c 为真空中光速, μ_0 为真空磁导率, \bar{E} 为电场强度, \bar{P} 为电极化强度. 当远离介质的共振频率时, \bar{P} 和 \bar{E} 的关系可以唯象表示为

$$\bar{P} = \epsilon_0 [\chi^{(1)} \cdot \bar{E} + \chi^{(2)} : \bar{E}\bar{E} + \chi^{(3)} : \bar{E}\bar{E}\bar{E} + \dots] \quad (3-1-2)$$

式中 ϵ_0 为真空电容率, $\chi^{(j)}$ 为 j 阶电极化率. 线性电极化率 $\chi^{(1)}$ 对 \bar{P} 的贡献是主要的, 光纤中 $\chi^{(2)} = 0$, 故非线性效应只考虑 $\chi^{(3)}$ 的作用, 电极化强度写为

$$\bar{P} = \bar{P}_L(r, t) + \bar{P}_{NL}(r, t) \quad (3-1-3)$$

\bar{P}_L 为线性极化部分, \bar{P}_{NL} 为非线性极化部分. 这样方程(3-1-1)可写成

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 (\bar{P}_L + \bar{P}_{NL})}{\partial t^2} \quad (3-1-4)$$

为了解方程(3-1-4)采用几点近似^[31]:把 \bar{P}_{NL} 看成是 \bar{P}_L 的微扰;可用标量近似;光场是准单色的;光场振幅是时间的慢变化函数.利用慢变包络近似,取

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \hat{x} [E(r,t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (3-1-5)$$

\hat{x} 表示沿 x 方向单位偏振矢量, $E(r,t)$ 为时间的慢变化函数.类似地, \bar{P}_L 与 \bar{P}_{NL} 也近似表示为

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \hat{x} \{ [P_L(r,t) + P_{NL}(r,t)] e^{-i\omega_0 t} + c.c. \} \quad (3-1-6)$$

由(3-1-2),(3-1-5)和(3-1-6)给出电极化强度的线性和非线性部分

$$P_L(r,t) = \varepsilon_0 \chi_{xx}^{(1)} E(r,t) \quad (3-1-7)$$

$$P_{NL}(r,t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(r,t) \quad (3-1-8)$$

式中

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(r,t)|^2 \quad (3-1-9)$$

为介质电容率的非线性部分.

为得到慢变化振幅 $E(r,t)$ 的波动方程,在频域内进行推导更为方便.由于 P_{NL} 为微扰,将 ε_{NL} 看成常量,方程(3-1-4)近似为线性方程. $E(r,t)$ 的 Fourier 变换为

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(r,t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (3-1-10)$$

把(3-1-5)~(3-1-8)代入(3-1-4),得 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (3-1-11)$$

式中 $k_0 = \omega/c$,介质电容率

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \quad (3-1-12)$$

可用折射率 $\tilde{n}(\omega)$ 和吸收系数 $\tilde{\alpha}(\omega)$ 表示

$$\varepsilon(\omega) = (\tilde{n} + i\tilde{\alpha}/2k_0)^2 \quad (3-1-13)$$

$$\tilde{n} = n_0(\omega) + n_2 |E|^2 \quad \alpha(\omega) = \frac{k_0}{n} \text{Im}(\tilde{\chi}^{(1)}) \quad (3-1-14)$$

式中 $n_0(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\chi}^{(1)})$ 为线性折射率, $n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}(\tilde{\chi}^{(3)})$ 为非线性折射率系数.

方程(3-1-11)可利用变量分离法求解.取

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(ik_0 z) \quad (3-1-15)$$

$\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ 是 z 的慢变函数.根据(3-1-11),有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{k}^2]F = 0 \quad (3-1-16)$$

$$2ik_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + [\tilde{k}^2 - k_0^2]\tilde{A} = 0 \quad (3-1-17)$$

式中

$$\varepsilon = (n_0 + \Delta n)^2 \approx n_0^2 + 2n_0 \Delta n \quad (3-1-18)$$

$$\tilde{k} = k(\omega) + \Delta k \quad (3-1-19)$$

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \quad (3-1-20)$$

$$\Delta k = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (3-1-21)$$

把 $\tilde{k}^2 - k_0^2$ 近似为 $2k_0(\tilde{k} - k_0)$, 并利用(3-1-19), 方程(3-1-17)可表达为

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[k(\omega) + \Delta k - k_0]\tilde{A} \quad (3-1-22)$$

方程(3-1-22)的 Fourier 逆变换给出 $A(z, t)$ 的传播方程.在频率 ω_0 处把 $k(\omega)$ 展成 Taylor 级数

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = k_0 + k_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{2} k_3(\omega - \omega_0)^3 \dots \quad (3-1-23)$$

这里

$$k_n = \left. \frac{d^n k}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3-1-24)$$

k_n 表示光纤的色散特性. 忽略展开式中的三次项及更高次项, 对(3-1-22)作 Fourier 变换的逆变换相当于方程中所有 $(\omega - \omega_0)$ 项用微分算符 $i\partial/\partial t$ 代替, 这样得到

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -k_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta k A \quad (3-1-25)$$

Δk 项包括了光纤的损耗及非线性效应. 利用(3-1-20)和(3-1-21), (3-1-25)可写为

$$\frac{\partial A}{\partial z} + k_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (3-1-26)$$

式中, $\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}}$ 为非线性系数, A_{eff} 为有效纤芯面积.

在以群速 v_g 移动的坐标系

$$T = t - z/v_g \equiv t - k_1 z \quad (3-1-27)$$

中, 方程(3-1-26)变为

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{i\alpha}{2} A - \gamma |A|^2 A \quad (3-1-28)$$

在 $\alpha = 0$ 时, (3-1-28)变为

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (3-1-29)$$

式(3-1-29)在形式上与量子力学中的 Schrödinger 方程完全类似, 称为非线性 Schrödinger 方程, 是支配光脉冲包络传输演化的基本方程. 引入一个对初始脉宽 T_0 归一化的时间量及归一化振幅 U

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0} \quad (3-1-30)$$

$$A(z, \tau) = \sqrt{P_0} U(z, \tau) \quad (3-1-31)$$

式中 P_0 为入射脉冲的峰值功率, (3-1-29)式可写为

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(k_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (3-1-32)$$

式中,符号函数 $\text{sgn}(k_2) = \pm 1$, 根据参量 k_2 的正负确定,且

$$L_D = \frac{T_0^2}{|k_2|}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (3-1-33)$$

式中定义 L_D 为色散长度和 L_{NL} 为非线性长度,说明在此过程中色散或是非线性哪个更重要.当 $L \ll L_{NL}, L \geq L_D$ 时,脉冲演变过程中群速色散起主要作用,它导致脉冲展宽.当 $L \ll L_D, L \geq L_{NL}$ 时,脉冲演变过程中非线性起主要作用,它导致脉冲频谱展宽.当 $L \geq L_D, L \geq L_{NL}$ 时,脉冲在光纤内传输过程中,色散和非线性将共同起作用.

3.2 时间光孤子

脉冲在光纤中传输时受到色散和非线性的影响.在负色散区,光高频分量传播速度快,而低频分量传播速度慢.但光纤中非线性 Kerr 效应引起的自相位调制,造成光脉冲的前沿频率低,后沿频率高.这样光脉冲进入负色散光纤后,光脉冲前沿运动慢,后沿运动快,引起脉冲压缩效应.当压缩程度与色散单独作用引起的脉冲展宽平衡时,就能形成时间光孤子.时间光孤子概念自 1973 年提出^[26],1980 年在实验中观察到^[27],现在作为光通信的优良载体已向实用化方向发展.

3.2.1 色散引起脉冲展宽

从方程(3-1-13)和(3-1-14)知,介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 和折射率 $n(\omega)$ 跟频率 ω 有关,这种现象称为色散.通常光纤的色散特性可用中心频率 ω_0 处的传播常数 k 的 Taylor 展开(3-1-23)来描述

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = k_0 + k_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

这里 $k_n = \left(\frac{d^n k}{d\omega^n} \right)_{\omega=\omega_0}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 与折射率有关

$$k_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} \quad (3-2-1)$$

$$k_2 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \quad (3-2-2)$$

k_1 为群速 v_g 的倒数, k_2 称为群速色散或群色散(GVD), k_3 及更高阶 k_m 称为高阶色散. 常用群时延 D 来表示群色散的大小, 简称色散参数, 其值为

$$D = \frac{dk_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} k_2 \quad (3-2-3)$$

普通单模光纤在 $\lambda = \lambda_0 (= 1.33 \mu\text{m})$ 处, $D = k_2 = 0$, 称为零色散波长. 在零色散点附近传输光脉冲时, 高阶色散的影响不可忽视. 当 $\lambda < \lambda_0$ 时, $D < 0$, 光脉冲的高频分量比低频分量传播得慢, 称正常色散区(或正色散区); 当 $\lambda > \lambda_0$ 时, $D > 0$, 光脉冲的高频分量比低频分量传播得快, 称反常色散区(或负色散区). 光脉冲中不同频率的分量以不同速度 $c/n(\omega)$ 传播, 引起脉冲展宽.

当 $L \ll L_{NL}$, $L \geq L_D$ 时, 脉冲演变过程中群速色散起主要作用, 忽略非线性效应, 根据方程(3-1-29)和归一化振幅定义(3-1-31)得

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (3-2-4)$$

$\tilde{U}(z, \omega)$ 是 $U(z, T)$ 的 Fourier 变换

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(z, \omega) e^{-i\omega T} d\omega \quad (3-2-5)$$

根据方程(3-2-4), $\tilde{U}(z, \omega)$ 满足

$$i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = -\frac{k_2}{2} \omega^2 \tilde{U} \quad (3-2-6)$$

方程(3-2-6)的解为

$$\tilde{U}(z, \omega) = \tilde{U}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} k_2 \omega^2 z\right) \quad (3-2-7)$$

这里 $\tilde{U}(0, \omega)$ 是入射光场在 $z = 0$ 处的 Fourier 变换

$$\tilde{U}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(0, T) e^{i\omega T} dT \quad (3-2-8)$$

式(3-2-7)表明, GVD 改变了脉冲的每个频谱分量的相位, 且其改变依赖于频率及传输距离. 尽管这种相位变化不会影响脉冲频谱, 但它却能改变脉冲形状. 把方程(3-2-7)代入(3-2-5), 就可以得到方程(3-2-4)的解

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} k_2 \omega^2 z - i\omega T\right) d\omega \quad (3-2-9)$$

3.2.2 自相位调制导致脉冲频谱展宽

在强光场影响下, 光介质对光场的响应呈现出非线性特点. $\chi^{(3)}$ 是光纤中最低阶亦是最重要的非线性效应. $\chi^{(3)}$ 的作用引起折射率随光场的非线性变化为(3-1-14)式, 即 $n(\omega, |E|^2) = n_0(\omega) + n_2(\omega) |E|^2$. 折射率对光强的依赖关系, 导致光场在光纤中传输时, 其本身产生相移变化

$$\varphi = (n_0 + n_2 |E|^2) k_0 z \quad (3-2-10)$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda$; z 为传输距离. 与光场本身相关的非线性相移称自相位调制(SPM), 可写为

$$\Delta\varphi_{NL} = n_2 k_0 z |E|^2 \quad (3-2-11)$$

当两个不同波长的光脉冲同时注入光纤传输时, 将产生另一种非线性相移, 如波长为 λ_1 的光场的非线性相移由两部分构成

$$\Delta\varphi_{NL} = n_2 k_0 z (|E_1|^2 + 2|E_2|^2) \quad (3-2-12)$$

第一项为由波长 λ_1 的光场的自相位调制产生, 第二项由波长为 λ_2 的光场产生, 称交叉相位调制(XPM), 在同光强时, 后者为前者的两倍.

当 $L \ll L_D$, $L \geq L_{NL}$ 时, 脉冲演变过程中自相位调制起主要作用, 它导致脉冲频谱展宽. 忽略色散, 根据方程(3-1-29)和归一化振幅定义(3-1-31)得

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma P_0 |U|^2 U \quad (3-2-13)$$

此方程有解

$$U(z, T) = U(0, T) \exp[i\gamma P_0 |U(0, T)|^2 z] \quad (3-2-14)$$

方程(3-2-14)表明自相位调制产生的随光强变化的相位和时间有关,致频谱展宽,但脉冲形状保持不变.

3.2.3 时间光孤子

当 $L \geq L_D, L \geq L_{NL}$ 时,脉冲在光纤内传输过程中,色散和非线性将共同起作用.

引入无量纲变量 $\xi = z/L_D$,脉冲在光纤内传输满足的非线性 Schrödinger 方程(3-1-32)可写为^[31]

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\text{sgn}(k_2)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - N^2 |U|^2 U \quad (3-2-15)$$

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|k_2|} \quad (3-2-16)$$

这里 N 为孤子阶参数,作变换 $u = NU$,得到非线性 Schrödinger 方程的标准形式

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\text{sgn}(k_2)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - |u|^2 u \quad (3-2-17)$$

当 $N = 1$ 时,在反常色散区 $\text{sgn}(k_2) = -1$,方程(3-2-17)为

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - |u|^2 u \quad (3-2-18)$$

有如下形式的解

$$u(\xi, \tau) = \text{sech } h(\tau) \exp(i\xi/2) \quad (3-2-19)$$

即为亮孤子解^[31].当光脉冲进入光纤后, $\Delta n = n_2 |E|^2$ 将使传输的脉冲产生频率调制.

脉冲的前沿 $\Delta\omega = -\partial\Delta\varphi_{NL}/\partial t > 0$ 将具有比后沿 $\Delta\omega < 0$ 更低的频率.同时由于是在反常色散区传输,结果脉冲前沿运动得比后沿更慢,引起脉冲压缩.这种效应与群速色散单独存在时的脉冲展宽效应正好相反.当压缩与展宽正好平衡时,脉冲将稳定无变化的传输,形成时间光孤子.而在正色散区 $\text{sgn}(k_2) = +1$,方程(3-2-17)为

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - |u|^2 u \quad (3-2-20)$$

有如下形式的解

$$u(\xi, \tau) = \tanh(\tau) \exp(i\xi/2) \quad (3-2-21)$$

即为暗孤子解^[31].

标准非线性 Schrödinger 方程(3-2-17)能对弱非线性、皮秒孤子脉冲进行描述. 方程中忽略了损耗和高阶色散的影响. 考虑这些因素的影响, 可导出描述光脉冲包络演化的高阶非线性 Schrödinger 方程^[31]

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = i\delta_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - is \frac{\partial}{\partial \tau} (|u|^2 u) - \frac{i}{2} \Gamma u \quad (3-2-22)$$

式中

$$\delta_3 = \frac{1}{6} \frac{k_3}{|k_2| T_0} \quad s = \frac{1}{\omega_0 T_0} \quad \Gamma = \alpha L_D = \alpha \frac{T_0^2}{|k_2|} \quad (3-2-23)$$

(3-2-22)式右边第一项代表线性三阶色散的影响, 第二项代表非线性色散的影响, 最后一项代表光纤损耗.

3.3 空间光孤子

当一束光进入非线性介质中传播时, 介质的折射率在电场的作用下随光强变化. 如果入射光束是高斯光束, 且介质的非线性折射率系数 n_2 为正值, 那么介质对光束中心部分的折射率增量最大, 结果是介质的作用等效于凸透镜, 对入射光束产生会聚作用, 这就是自聚焦效应(或光束自陷). 衍射效应使光束扩散, 非线性引起的自聚焦效应导致光束汇聚. 倘若自聚焦恰好能抵消光的衍射, 光束就能保持其直径不变传播, 即形成空间光孤子. 和时间光孤子相比, 空间光孤子的研究高潮出现较晚. 虽然早在 1964 年, Chiao 等人就预言光束自陷能在 Kerr 非线性材料中形成^[50], 但以后的许多实验都证明, Kerr 非线性带给光孤子内在的非稳定性. 直到 1993 年, 随着材料科学与现代非线性光学的发展和结合, 人们在光折变材料中首次观测到稳态三维空间光孤子^[52]. 空间光孤子由于在全光开关方面有重要的应用前景而成为研究的热点^[50-58]. 本节推导 Kerr 空间孤子和光折变空间孤子传输所满足的非线性 Schrödinger 方程.

3.3.1 Kerr 空间光孤子

下面简单推导非线性近轴波方程.利用(3-1-7),(3-1-8),(3-1-12)和(3-1-18),方程(3-1-1)可写为

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\epsilon \vec{E})}{\partial t^2} = 0 \quad (3-3-1)$$

$$\epsilon = (n_0 + \Delta n)^2 \approx n_0^2 + 2n_0 \Delta n \quad (3-1-18)$$

这里微扰项 $\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \approx n_2 |E|^2$, 为 Kerr 非线性引起的折射率的变化.(3-1-18)

代入(3-3-1),有

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n_0^2 + 2n_0 \Delta n}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-3-2)$$

设电场矢量 \vec{E} 为

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \{ A(x, y, z, t) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] + c.c. \} \quad (3-3-3)$$

这里 $A(x, y, z, t)$ 是电场时空慢变包络部分.将(3-3-3)代入(3-3-2)得

$$\nabla_{\perp}^2 A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} - k_0^2 A - \frac{n_0^2 + 2n_0 \Delta n}{c^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t} - A\omega_0^2 \right) = 0 \quad (3-3-4)$$

式中, $\Delta_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.在推导方程中,由于假定 $A(x, y, z, t)$ 为 z 的慢变化函数,

因而忽略了其二阶偏导数 $\partial^2 A / \partial z^2$.利用变换 $T = t - z/v_g$, 简化(3-3-4)为

$$\nabla_{\perp}^2 A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{n_0^2 + 2n_0 \Delta n}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + 2k_0^2 \frac{\Delta n}{n_0} A = 0 \quad (3-3-5)$$

上式中,振幅 A 对时间的二次微商项的系数实际上就是 $1/v_g^2$.根据(3-2-1)和(3-2-2),

有

$$k_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c}, \quad k_2 = \frac{1}{kv_g^2} \approx \frac{1}{k_0 v_g^2} \quad (3-3-6)$$

利用(3-3-6),(3-3-5)可进一步化为

$$\frac{1}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 A + i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\Delta n k_0}{n_0} A = 0 \quad (3-3-7)$$

在推导这个方程的过程中采用的近似有:介质各向同性、介质瞬时响应、介质无损耗或增益、光波近轴传播以及振幅慢变等.当然,这个方程的适用范围也就因此而受到限制.上式第一项表示衍射,第二项表示沿 z 轴传输,第三项表示二阶色散,第四项表示非线性效应.在讨论自聚焦问题时可以略去色散项,即

$$\nabla_{\perp}^2 A + i 2k_0 \frac{\partial A}{\partial z} = -2k_0^2 \frac{\Delta n}{n_0} A = -k_0^2 \frac{n_2}{n_0^2} |A|^2 A \quad (3-3-8)$$

上式就是非线性近轴波方程.

只考虑在 x 方向衍射情形,上式写为

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{n_2 k_0}{2n_0^2} |A|^2 A \quad (3-3-9)$$

和时间孤子类似引入归一化无量纲量,得到 Kerr 空间孤子传输非线性 Schrödinger 方程的标准形式

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - |u|^2 u \quad (3-3-10)$$

式中

$$s = \frac{x}{x_0}, \quad \xi = \frac{z}{k_0 x_0^2}, \quad u = N \frac{A}{\sqrt{P_0}}, \quad N^2 = \gamma P_0 k_0 x_0^2 \quad (3-3-11)$$

这里 N 为孤子阶参数, $\gamma = \frac{n_2 k_0}{2n_0}$ 为非线性系数.当 $N=1$ 时,方程(3-3-11)有如下形式

的解

$$u(\xi, s) = \sec h(s) \exp(i\xi / 2) \quad (3-3-12)$$

即为空间光孤子解.

3.3.2 稳态光折变空间光孤子

光折变效应是指电光材料在光照下,折射率随光强的空间分布而变化的现象.光折变效应是发生在电光晶体中的一种复杂的光电过程:晶体在光照下,电光晶体内的杂质、空位或缺陷充当电荷的施主或受主,光激发电荷进入临近的能带.光激发载流子在能带中或因浓度梯度而扩散或在电场作用下而漂移,或由光生伏打效

应而运动.迁移的电荷可以重新被俘获.经过再激发,再迁移,再俘获,最后离开了光照区而定居于暗光区.这样就形成了与光强空间分布相对应的空间电荷分布,这些光致分离的空间电荷按照 Poisson 方程产生相应的空间电荷场.空间电荷场使材料的折射率发生相应的变化,在介质中形成有效的透镜或波导,所形成的透镜或波导反过来会对光束产生一定的空间约束作用,当这种空间约束作用与光束的衍射发散作用相平衡时,入射光束便会在材料中无衍射地向前传播形成空间孤子.目前已发现和研究较多的稳态光折变空间孤子主要有三种基本的类型^[54]:屏蔽孤子、光伏孤子和屏蔽-光伏孤子.光折变晶体中空间电荷场的建立涉及到扩散、漂移和光伏效应三个可能的物理过程.屏蔽孤子形成于加外电场的非光伏光折变晶体中,源于对外加电场的非均匀空间屏蔽.光伏孤子形成于不加外电场的非光伏光折变晶体中,源于光伏效应.而屏蔽-光伏孤子形成于加外电场的非光伏光折变晶体中,源于对外电场的非均匀空间屏蔽和光伏效应两个物理过程.

三种稳态光折变空间孤子可用统一的理论描述^[55].设有一束只在 x 方向衍射的光波,沿 z 方向在一个沿 x 方向施加外电场的非光伏光折变晶体中传播.根据 (3-1-11) 式,入射光波的电场分量 E 满足如下 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \tilde{E} + \hat{n}_e^2 k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (3-3-13)$$

$$\hat{n}_e^2 = n_e^2 - n_e^4 r_{\text{eff}} E_{\text{SC}} \quad (3-3-14)$$

这里 n_e 是非常光折射率, r_{eff} 是电光系数. E_{SC} 是光波感应出的空间电荷场,在忽略扩散的影响下,其结果为^[55]

$$E_{\text{SC}} = E_0 \frac{I_\infty + I_d}{I + I_d} + E_p \frac{I_\infty - I}{I + I_d} \quad (3-3-15)$$

式中, E_p 为光伏场常数, E_0 为外加电场, $I_\infty = I(x \rightarrow \pm\infty, z)$, $I = I(x, z)$ 是光波的光强, I_d 为暗辐射光强.设 A 是 E 的慢变化包络

$$E = \hat{x}A(x, z) \exp(ikz) \quad (3-3-16)$$

式中 $k = k_0 n_e$, 将 (3-3-16) 代入 (3-3-13) 式中, 并利用慢变化近似可得到光波满足的傍轴方程为^[55]

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{k_0}{2} (n_e^3 r_{\text{eff}} E_{\text{SC}}) A = 0 \quad (3-3-17)$$

采用下列无量纲变量

$$\xi = z/(kx_0^2), \quad s = x/x_0, \quad I = I_d|U|^2 \quad (3-3-18)$$

$$U = (2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}I_d/n_e)^{-1/2}A \quad (3-3-19)$$

这里 x_0 是任一空间宽度, U 为归一化光波包络函数, 将(3-3-15)代入(3-3-17)式可得归一化稳态光折变空间孤子传输的经典非线性 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \beta(1+\rho)\frac{U}{1+|U|^2} + \alpha\frac{(\rho-|U|^2)U}{1+|U|^2} \quad (3-3-20)$$

式中 $\rho = I_\infty/I_d$, $\beta = \sigma E_0$, $\alpha = \sigma E_p$, $\sigma = (k_0 x_0)^2 (n_e^4 r_{\text{eff}}/2)$. 当 $\alpha = 0$ 时, 方程描述屏蔽孤子无量纲化振幅的演化; 而当 $\beta = 0$ 时, 方程描述光伏孤子无量纲化振幅的演化.

3.4 亮暗时间光孤子间的相互作用

当相邻时间光孤子靠近后, 由于光纤的非线性效应, 将引起相邻孤子间的相互作用, 波形畸变, 传输恶化, 传输速率下降, 传输距离缩短. 因此在高速光孤子通信系统中, 时间光孤子相互作用的研究是一个十分重要的问题. 光孤子依据光强分布可分为亮孤子和暗孤子. 两个时间光孤子的相互作用有: 两亮孤子间的相互作用^[33]、亮孤子和暗孤子相互作用^[34, 35]、两暗孤子相互作用^[36]. 对于光纤亮孤子的相互作用已进行过大量的研究^[37-43]. 其相互作用不仅与孤子间的距离和非线性有关, 光纤损耗^[128]、高阶效应^[40]等均会对孤子相互作用产生影响. 光纤暗孤子的实验成功观测^[45]使它已经成为通信领域研究的热点^[44-49]. 研究结果表明: 光纤损耗、放大器噪声和相邻孤子间的相互作用等对暗孤子形状的影响比对亮孤子要小. 因此, 一些研究者认为光纤暗孤子应用于光通信系统和信号处理具有比亮孤子更好的特性^[46, 47, 49]. 虽然暗孤子间相互作用的研究相对于亮孤子来说显的远远不够, 但是亮暗光孤子间相互作用的研究则少而又少. 在解非线性偏微分方程中, 目前用得最多的近似方法是数值解法, 但它有一个不足是中间结果难以显示, 而变分法的优点就是它能给出一个虽是近似, 但是解析的表达式, 它能显示过程中, 不同物理量的影响和变化趋势. 本节采用变分法^[37, 38]来研究亮暗时间光孤子间的相互作用. 导出了亮暗孤子相互作用的势函数. 当亮暗两孤子相距较近时, 相互排斥, 而相距较远时, 势函数近似为常数, 相互作用可以忽略. 当孤子的入射振幅改变时, 相互作用势函数会相应改变. 孤子幅值增大时, 相互作用会加强. 亮暗时间孤子间的相互作

用同两暗时间孤子间的相互作用类似,表现为相互排斥.

描述亮暗时间光孤子耦合的经典非线性 Schrödinger 方程为^[34]

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + |u_1|^2 u_1 &= -\varepsilon |u_2|^2 u_1 \\ i \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + |u_2|^2 u_2 &= -\varepsilon |u_1|^2 u_2 \end{aligned} \quad (3-4-1)$$

式中 $u_1, (u_2)$ 为归一化亮(暗)光孤子包络函数, z, t 分别为归一化传输距离和时间. 方程(3-4-1)等式的右边代表微扰相互作用. 当不考虑相互作用时, 系统(3-4-1)具有基亮孤子和暗孤子解^[31,37]

$$u_1 = A_1 \operatorname{sech}[A_1(t - T_1)] e^{ik_1(t - T_1) + i\theta_1} \quad (3-4-2)$$

$$u_2 = A_2 \tanh[A_2(t - T_2)] e^{ik_2(t - T_2) + i\theta_2} \quad (3-4-3)$$

式中参数 $(A_j, T_j, k_j, \theta_j) (j=1,2)$ 分别代表孤子的幅值、中心位置、传播速度和位相. 不计相互作用时, A_j 和 k_j 为常数. 当考虑相互作用时, (3-4-2), (3-4-3) 式中参数 $(A_j, T_j, k_j, \theta_j) (j=1,2)$ 都将随传输距离 z 而改变.

相应方程(3-4-1)所描述系统的 Lagrange 密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12} \quad (3-4-4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} i (u_1^* \frac{\partial u_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial z}) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |u_1|^4 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} i (u_2^* \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial z}) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |u_2|^4 \\ \mathcal{L}_{12} &= \varepsilon |u_1|^2 |u_2|^2 \end{aligned} \quad (3-4-5)$$

这里 \mathcal{L}_{12} 为相互作用的 Lagrange 密度. 其正确性可通过由变分原理

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(u_j, \frac{\partial u_j}{\partial z}, \frac{\partial u_j}{\partial t}; u_j^*, \frac{\partial u_j^*}{\partial z}, \frac{\partial u_j^*}{\partial t}) dt dz = 0 \quad (3-4-6)$$

导出的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,z}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,t}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j^*} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,z}^*} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,t}^*} \right) = 0$$

即为方程(3-4-1)而得到验证.上式中的两个方程互为共扼方程.作用量为

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} L dz \quad (3-4-7)$$

其中

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_1 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{12} dt = L_1 + L_2 + L_{12} \quad (3-4-8)$$

为 Lagrange 量.根据(3-4-2)-(3-4-5),经计算得

$$L_1 = 2A_1 \left(k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + A_1 \left(\frac{1}{3} A_1^2 - k_1^2 \right) \quad (3-4-8a)$$

$$L_2 = -A_2 \left(\frac{2A_2^2}{3} + k_2^2 \right) - 2A_2 \left(k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \quad (3-4-8b)$$

$$L_{12} = 2\varepsilon A_1 A_2^2 - \varepsilon A_1 A_2^2 4 \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{[A_2/A_1] \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{\sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) \quad (3-4-8c)$$

$$L = 2A_1 \left(k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + A_1 \left(\frac{1}{3} A_1^2 - k_1^2 \right) - 2A_2 \left(k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) - A_2 \left(\frac{2}{3} A_2^2 + k_2^2 \right) + 2\varepsilon A_1 A_2^2 - 4\varepsilon A_1 A_2^2 \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) \quad (3-4-9)$$

在上式中去掉了无穷大积分项,即去掉了背景光拉氏量.在计算(3-4-8c)积分时利用了用留数定理得到的公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 x \cosh^2(bx - a)} dx = 4 \left\{ \frac{a \cosh a}{b \sinh^3 a} - \frac{1}{\sinh^2 a} \right\} \quad (3-4-10)$$

公式(3-4-10)在 $b = A_2/A_1 \approx 1$ 才成立(附录里有详细计算过程).

由最小作用量原理导出的所有参变量函数 $P_j = \{ A_j, T_j, k_j, \theta_j \}$ 服从的 Euler-Lagrange 方程,即为如下的常微分方程组^[37]

$$\frac{\delta I}{\delta P} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial P_j} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial (dP_j/dz)} \right) = 0 \quad (3-4-11)$$

把(3-4-9)代入(3-4-11)式,可以得到孤子参数演化的 8 个方程.在(3-4-11)式中取 $P_j = T_j$ 得

$$-4\varepsilon A_1^2 A_2^2 \frac{d}{dT_1} \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) = \frac{d}{dz} (2A_1 k_1) \quad (3-4-12a)$$

$$-4\varepsilon A_1^2 A_2^2 \frac{d}{dT_2} \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) = \frac{d}{dz} (-2A_2 k_2) \quad (3-4-12b)$$

在(3-4-11)式中取 $P_j = k_j$ 得

$$2A_1 \frac{dT_1}{dz} - 2A_1 k_1 = 0 \quad (3-4-13a)$$

$$-2A_2 \frac{dT_2}{dz} - 2A_2 k_2 = 0 \quad (3.4.13b)$$

在(3-4-11)式中取 $P_j = \theta_j$ 得

$$\frac{d}{dz} (2A_1) = 0 \quad (3-4-14a)$$

$$\frac{d}{dz} (2A_2) = 0 \quad (3-4-14b)$$

在(3-4-11)式中取 $P_j = A_j$ 得

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{A_1^2}{2} + \frac{k_1^2}{2} + \varepsilon A_2^2 \\ & - \frac{d}{dA_1} \left\{ 2\varepsilon A_1^2 A_2^2 \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3-4-15a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - A_2^2 + \frac{k_2^2}{2} + 2\varepsilon A_1 A_2 \\ & - \frac{d}{dA_2} \left\{ 2\varepsilon A_1^2 A_2^2 \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

(3-4-15b)

由(3-4-14)式可以看出,两孤子幅值保持不变.由(3-4-12)和(3-4-13)式,可得

$$-2\varepsilon A_1 A_2^2 \frac{d}{dT_1} \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) = \frac{d^2 T_1}{dz^2} \quad (3-4-16a)$$

$$-2\varepsilon A_1^2 A_2 \frac{d}{dT_2} \left(\frac{A_1(T_2 - T_1) \cosh[A_1(T_2 - T_1)]}{A_2 \sinh^3[A_1(T_2 - T_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1(T_2 - T_1)]} \right) = \frac{d^2 T_2}{dz^2} \quad (3-4-16b)$$

由上式可以得到关于孤子间距 $r(=T_2 - T_1)$ 的运动方程

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + 4\varepsilon(A_1 + A_2)A_1 A_2 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{A_1 r \cosh[A_1 r]}{A_2 \sinh^3[A_1 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1 r]} \right\} = 0 \quad (3-4-17)$$

从而可得亮暗光孤子之间由于相互作用而引起的势函数

$$V(r) = 4\varepsilon(A_1 + A_2)A_1 A_2 \left\{ \frac{A_1 r \cosh[A_1 r]}{A_2 \sinh^3[A_1 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_1 r]} \right\} \quad (3-4-18)$$

图 3-1 是相互作用的势函数随孤子间距和入射振幅的变化曲线($\varepsilon = 0.25$).从

图 3-1 中可以看出,当亮暗两孤子相距较近时,相互排斥($F = -\partial V(r)/\partial r > 0$).从物理上可以这样理解,当亮暗光孤子距离较近时,它们中央重叠区的光强将减小,折射率相应变小从而导致相互排斥.而相距较远时,势函数近似为常数,相互作用可以忽略($F \approx 0$).当孤子的入射振幅改变时,相互作用势函数会相应改变,孤子幅值增大时,相互作用会加强(曲线的斜率值较大).

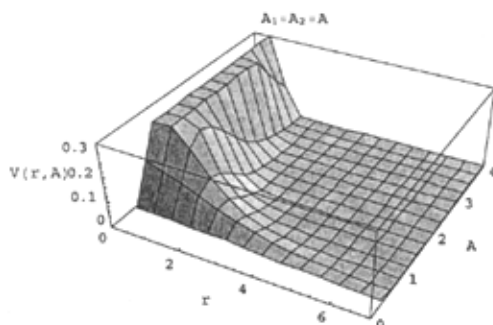


图 3-1 相互作用势函数随孤子间距和入射孤子幅值的变化曲线

两亮时间孤子间的相互作用表现为相互吸引、碰撞、合二为一,然后相互排斥.最近文[49]通过数值模拟对飞秒时间暗孤子间的相互作用进行了研究,发现飞秒时间暗孤子间的相互作用同皮秒时间暗孤子间的相互作用基本一致,两时间暗孤子从一开始就相互排斥.从上述讨论可知,亮暗时间孤子间的相互作用同两暗时间孤子间的相互作用类似,表现为相互排斥.

3.5 Kerr 空间光孤子间的反常相互作用

空间光孤子相互作用由于在信号处理及全光开关方面有重要应用受到广泛关注^[52-63].空间孤子之间的相互作用分为相干相互作用和非相干相互作用.1996年,Shih等^[59]对非相干碰撞过程进行了实验观测.发现若两个光孤子之间互不相干或是其位相差之涨落远快于介质的响应,那么它们之间无干涉效应,中央重叠区的光强只能简单地叠加.结果,两个互不相干的光孤子总是相互吸引.1997年 Garcia-Quirino等^[61]实验研究了光孤子之间的相干相互作用.若两个孤子同相,它们的中央重叠区光强相干叠加,使得那里的折射率增大而等效地吸引两边的光孤子.若两个孤子异相,中央光强相消,它们就会相互排斥.然而,1998年 Krolkowski等^[62]发现了介质中非相干孤子的反常相互作用.理论和实验都表明非相干孤子间存在反常相互作用,即两非相干孤子可以相互吸引,也可以相互排斥;2002年,Cohen等^[63]发现了相干孤子的反常相互作用,即反向传输相干孤子的相互作用不依赖于两孤子的相对位相.本节从 Kerr 空间光孤子耦合的非线性 Schrödinger 方程出发,用变分法讨论了文[63]中孤子间的相互作用,导出了两空间孤子相干和非相干相互作用的势函数.并由导出的系统守恒量进一步发现,相干和非相干相互作用势函数都与孤子间的相对相位无关,出现孤子间反常相互作用,即文[63]中的实验结果.

描述反向传输的 Kerr 空间光孤子耦合的经典非线性 Schrödinger 方程为^[63,130]

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + |u_1|^2 u_1 &= -(1+h)|u_2|^2 u_1 \\ -i\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + |u_2|^2 u_2 &= -(1+h)|u_1|^2 u_2 \end{aligned} \quad (3-5-1)$$

式中 $u_i (i=1,2)$, z 和 x 分别为归一化光孤子包络函数,传输距离和横向坐标; $h=1(h=0)$ 为相干(非相干)相互作用.方程(3-5-1)的形式解为^[130]

$$u_1 = A_1 \operatorname{sech}[A_1(x-x_1)]e^{ik_1(x-x_1)+i\theta_1} \quad (3-5-2)$$

$$u_2 = A_2 \operatorname{sech}[A_2(x - x_2)]e^{-ik_2(x-x_2)+i\theta_2} \quad (3-5-3)$$

式中参数 $(A_j, x_j, k_j, \theta_j)$ ($j=1,2$) 分别代表孤子的幅值,中心位置,传播常数和位相,它们都是传输距离 z 的待求函数.

相应方程(3-5-1)所描述系统的 Lagrange 密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12} \quad (3-5-4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}i(u_1^* \frac{\partial u_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial z}) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |u_1|^4 \\ \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2}i(u_2^* \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial z}) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |u_2|^4 \end{aligned} \quad (3-5-5)$$

$$\mathcal{L}_{12} = (1+h)u_1 u_1^* u_2 u_2^*$$

这里 \mathcal{L}_{12} 为相互作用的 Lagrange 密度.其正确性可通过由变分原理

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(u_j, \frac{\partial u_j}{\partial z}, \frac{\partial u_j}{\partial x}; u_j^*, \frac{\partial u_j^*}{\partial z}, \frac{\partial u_j^*}{\partial x}) dx dz = 0 \quad (3-5-6)$$

导出的 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,z}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j^*} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,z}^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,x}^*} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3-5-7)$$

即为方程(3-5-1)而得到验证.(3-5-7)式中的两个方程互为共轭方程.

作用量为

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} L dz \quad (3-5-8)$$

其中

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_1 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{12} dx = L_1 + L_2 + L_{12}$$

为 Lagrange 量.由式(3-5-2)-(3-5-5),经计算得

$$L_1 = 2A_1 \left(k_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + A_1 \left(\frac{1}{3} A_1^2 - k_1^2 \right) \quad (3-5-9a)$$

$$L_2 = 2A_2 \left(k_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) + A_2 \left(\frac{1}{3} A_2^2 - k_2^2 \right) \quad (3-5-9b)$$

$$L_{12} = 4(1+h)A_1^2 A_2^2 \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} \quad (3-5-9c)$$

$$\begin{aligned} L = & 2A_1 \left(k_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + A_1 \left(\frac{1}{3} A_1^2 - k_1^2 \right) + 2A_2 \left(k_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) + A_2 \left(\frac{1}{3} A_2^2 - k_2^2 \right) \\ & + 4(1+h)A_1^2 A_2^2 \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} \end{aligned} \quad (3-5-9)$$

在计算积分(3-5-9c)式时利用了用留数定理得到的公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 x \cosh^2 (bx - a)} dx = 4 \left\{ \frac{a \cosh a}{b \sinh^3 a} - \frac{1}{\sinh^2 a} \right\} \quad (3-5-10)$$

公式(3-5-10)在 $b = A_2 / A_1 \approx 1$ 才成立(附录里有详细计算过程).

由最小作用量原理导出的所有参变量函数 $P_j = \{ A_j, x_j, k_j, \theta_j \}$ 服从的 Euler-Lagrange 方程,即为如下的常微分方程组^[37]

$$\frac{\delta I}{\delta P_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial P_j} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial (dP_j / dz)} \right) = 0 \quad (3-5-11)$$

把(3-5-9)代入(3-5-11)式,可以得到孤子参数演化的 8 个方程.在(3-5-11)式中取 $P_j = T_j$ 得

$$4(1+h)A_1^2 A_2^2 \frac{d}{dx_1} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d}{dz} (2A_1 k_1) \quad (3-5-12a)$$

$$4(1+h)A_1^2 A_2^2 \frac{d}{dx_2} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d}{dz} (2A_2 k_2) \quad (3-5-12b)$$

在(3-5-11)式中取 $P_j = k_j$ 得

$$2A_1 \frac{dx_1}{dz} - 2A_1 k_1 = 0 \quad (3-5-13a)$$

$$2A_2 \frac{dx_2}{dz} - 2A_2 k_2 = 0 \quad (3-5-13b)$$

在(3-5-11)式中取 $P_j = \theta_j$ 得

$$\frac{d}{dz}(2A_1) = 0 \quad (3-5-14a)$$

$$\frac{d}{dz}(2A_2) = 0 \quad (3-5-14b)$$

在(3-5-11)式中取 $P_j = A_j$ 得

$$A_1^2 + k_1^2 - 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{d}{dA_1} \left\{ 4(1+h)A_1^2 A_2^2 \left[\frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right] \right\} = 0 \quad (3-5-15a)$$

$$A_2^2 + k_2^2 + 2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{d}{dA_2} \left\{ 4(1+h)A_1^2 A_2^2 \left[\frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right] \right\} = 0 \quad (3-5-15b)$$

由(3-5-14)式可以看出,两孤子幅值保持不变.由(3-5-12)和(3-5-13)式,可得

$$2(1+h)A_2^2 A_1 \frac{d}{dx_1} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d^2 x_1}{dz^2} \quad (3-5-16a)$$

$$2(1+h)A_1^2 A_2 \frac{d}{dx_2} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d^2 x_2}{dz^2} \quad (3-5-16b)$$

由上式可以得到关于孤子间距 $r (= x_2 - x_1)$ 的运动方程

$$\frac{d^2 r}{dz^2} - 2(1+h)(A_1 + A_2)A_1 A_2 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r \cosh[A_2 r]}{\sinh^3[A_2 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2 r]} \right\} = 0 \quad (3-5-17)$$

从而可得空间光孤子之间由于相互作用而引起的势函数^[131]

$$V(r) = -2(1+h)(A_1 + A_2)A_1A_2 \left\{ \frac{r \cosh[A_2 r]}{\sinh^3[A_2 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2 r]} \right\} \quad (3-5-18)$$

系统的 Lagrange 量(3-5-9)具有平移变换

$$z' = z + \varepsilon \quad (3-5-19)$$

不变性,这里 z 相当于时间 t .根据经典 Noether 定理(2-3-5a)式,相应有如下的守恒

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{P}_j} \dot{P}_j - L \\ &= A_1 \left(\frac{1}{3} A_1^2 - k_1^2 \right) + A_2 \left(\frac{1}{3} A_2^2 - k_2^2 \right) \\ &\quad + 4(1+h)A_1^2 A_2^2 \left\{ \frac{r \cosh[A_2 r]}{\sinh^3[A_2 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2 r]} \right\} = \text{const} \end{aligned} \quad (3-5-20)$$

把(3-5-20)代入(3-5-15),得

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dz} = k_1^2 + k_2^2 \quad (3-5-21)$$

从(3-5-21)式知,两孤子位相差与 A_j 和 r 无关,即与相互作用势函数(3-5-18)无关.相干和非相干相互作用势函数(3-5-18)与孤子间的相对相位无关,出现孤子间反常相互作用,这就从理论上说明了文[63]中的结果.(3-5-14)式的结果也可以从系统(3-5-4)具有相位变换不变性得到.

图 3-2 是相干相互作用的势函数随空间孤子间距的变化曲线 ($A_1 = A_2 = 1, h = 1$);图 3-3 是非相干相互作用的势函数随空间孤子间距的变化曲线 ($A_1 = A_2 = 1, h = 0$).势函数总是负值, $F = -\partial V(r)/\partial r < 0$,所以反向传输的两空间孤子总是相互吸引(不管相干相互作用还是非相干相互作用).对比两图,可以看出,相干相互作用比非相干相互作用强,且当两空间孤子间距大于 4 时,相互作用几乎为零,可以忽略.

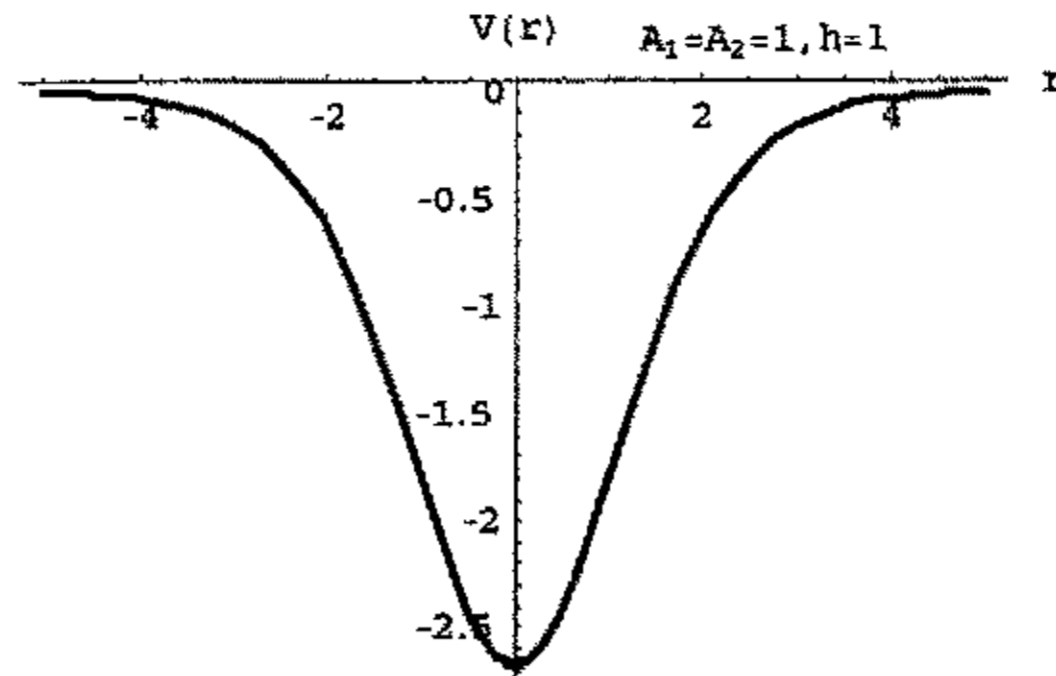


图 3-2 相干相互作用势函数随孤子间距的变化曲线

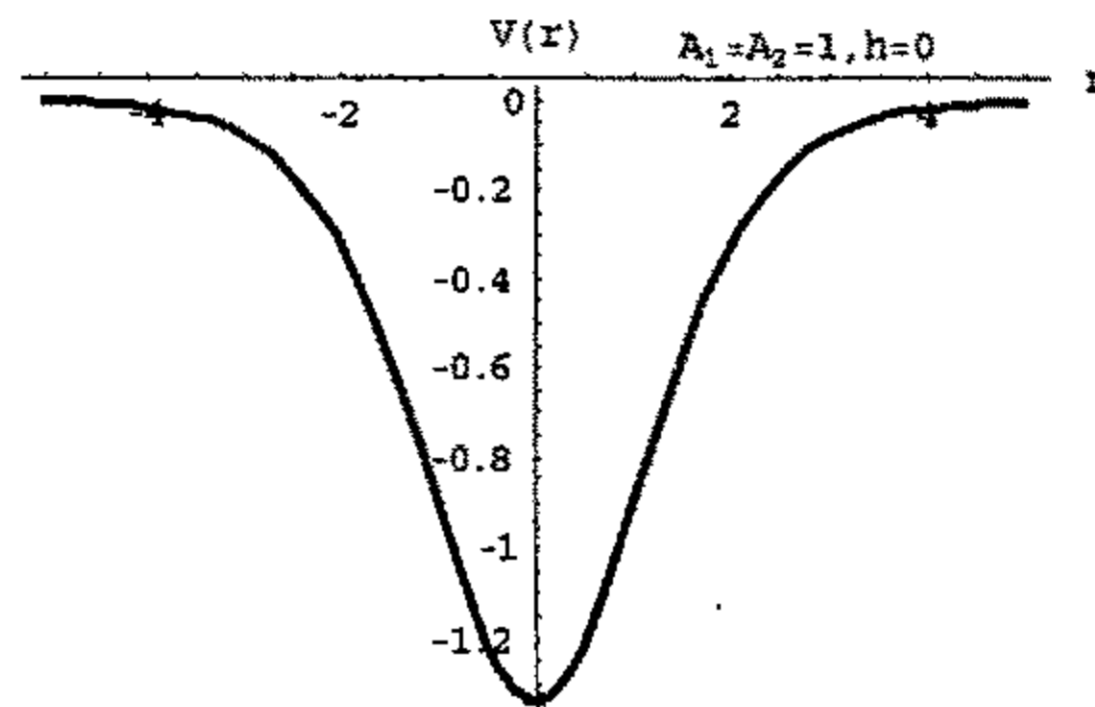


图 3-3 非相干相互作用势函数随孤子间距的变化曲线

3.6 本章小结

本章叙述了支配光脉冲包络传输的非线性 Schrödinger 方程的由来,简单介绍了时间孤子和空间孤子形成的物理机制及其传输所满足的非线性薛定谔方程的推导.在光孤子通信系统中,时间光孤子相互作用的研究是一个十分重要的问题.虽然时间暗孤子相互作用的研究相对于亮孤子来说显的远远不够,但是亮暗时间光孤子间相互作用的研究则少而又少.本章第四节采用变分法来研究亮暗时间光孤子间的相互作用,导出了亮暗时间孤子相互作用的势函数.当亮暗两时间孤子相距较近时,相互排斥,而相距较远时,势函数近似为常数,相互作用可以忽略.当时间孤子的入射振幅改变时,相互作用势函数会相应改变.孤子幅值增大时,相互作用会加强.空间光孤子相互作用由于在信号处理及全光开关方面有重要应用受到广泛关注.本章第五节从 Kerr 空间光孤子耦合的非线性 Schrödinger 方程出发,用变

分法讨论了空间孤子间的相互作用,导出了两空间孤子相干和非相干相互作用的势函数.由经典 Noether 定理导出了空间孤子系统的守恒量,利用该守恒量发现相干和非相干相互作用势函数都与空间孤子间的相对相位无关,出现孤子间反常相互作用,即最近文献中的实验结果.我们也可以从 Hamilton 形式来研究孤子间的相互作用.

第 4 章 光孤子传输的量子理论

在光孤子传输经典理论不断发展和完善的同时,光孤子传输的量子理论也得到较大的发展^[64-95].1987 年 Carter 等求解了量子非线性 Schrödinger 方程,首次论证光孤子可以处在压缩态^[65].1991 年实验证实了光孤子可以产生压缩态^[70].光孤子量子效应研究的出发点是量子非线性 Schrödinger 方程,它通常是经典非线性 Schrödinger 方程按对应原理写出的.描述光孤子传输的经典非线性 Schrödinger 方程,可由奇异 Lagrange 量导出.按 Dirac 约束理论,用奇异 Lagrange 量描述的光孤子系统是约束 Hamilton 系统,它的量子化应该用 Dirac 正则量子化(或约束 Hamilton 系统的路径积分量子化),而不能按初等量子力学的方法进行量子化.目前关于孤子传输量子理论的研究大多限于时间孤子^[64-85, 87-95],而空间孤子量子理论的研究很少^[86].本章先介绍压缩态的基本知识,在 Dirac 正则量子化方法的基础上严格导出了光孤子传输的量子非线性 Schrödinger 方程和对易关系,并讨论了空间光孤子的压缩性质.

4.1 光场压缩态

常规光通信是利用激光来传输信号,它是相干光,它的噪声极限是真空涨落,要克服由真空涨落对提高信噪比的限制,只有采用压缩光场.1976 年由 Yuan 等从理论上预言了压缩光^[132],1985 年 Slusher 等利用四波混频,首次在实验上产生了压缩光^[133].本节扼要介绍压缩态^[134].

4.1.1 量子噪声

在通信领域内,噪声无疑是至关重要的.倘若有可能实现无噪声的通信,那么,就可以用任意小量的功率来实现任意长距离的通信.因为在这种情况下,对信号的可能放大将不受任何限制.事实上,对微弱信号探测唯一真实的限制就是存在不可避免的噪声,若信号的功率显著地低于进入接受器的噪声水平,就再也不可能通过放大来恢复这个信号.在无线电频率领域,基本的噪声为所谓的热噪声,而在接近于红外谱段的高频处,热噪声功率迅速减少,另一类型的噪声就会不可避免地增加,这就是所谓的量子噪声.量子噪声起源于光场的量子特性,最终由测不准关系来确

定,是一种量子现象.真实的探测器原则上可以达到量子噪声的最小值,即真空涨落.

考虑一个单模偏振行波场,其电场算符可写为

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} [\hat{X}_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \hat{X}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (4-1-1)$$

其中 \hat{X}_1 和 \hat{X}_2 与湮灭算符 \hat{a} 的关系为

$$\hat{a} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2 \quad (4-1-2)$$

例如测量 \hat{X}_1 , 若信号光在相干态 $|\alpha\rangle$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, 则测量平均值为

$$\langle \hat{X}_1 \rangle = \alpha_1, \quad \langle \hat{X}_1^2 \rangle = \frac{1}{4} + \alpha_1^2 \quad (4-1-3)$$

均方差为

$$\Delta X_1 = \sqrt{\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{X}_1^2 \rangle - \langle \hat{X}_1 \rangle^2} = \frac{1}{2} \quad (4-1-4)$$

根据测不准关系 $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 1/4$, 最小测不准量为

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2} \quad (4-1-5)$$

相干态的光,其两个正交分量的测不准之积等于测不准关系决定的极小值,而且这两个分量各自的测不准量大小相等.故相干光场振幅的涨落已达量子噪声的极限值,即真空涨落.真空涨落是无法消除的,量子噪声的进一步减少只有采用压缩态光场.

4.1.2 压缩态

将光场看成一个谐振子场,相应的广义坐标和动量为

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^*), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^*) \quad (4-1-6)$$

对于相干态来说

$$(\Delta q)_{coh} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \quad (\Delta p)_{coh} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \quad (4-1-7)$$

坐标与动量的测不准关系为

$$(\Delta q \Delta p)_{coh} = \frac{\hbar}{2} \quad (4-1-8)$$

湮灭算符与产生算符可以写为两个厄米算符的线性组合

$$\hat{a} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2, \quad \hat{a}^* = \hat{X}_1 - i\hat{X}_2, \quad (4-1-9)$$

\hat{X}_1 和 \hat{X}_2 对应复振幅的实部和虚部, 给出两个正交相的振幅. 反之

$$\hat{X}_1 = \frac{(\hat{a} + \hat{a}^*)}{2} = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{q}, \quad \hat{X}_2 = \frac{(\hat{a} - \hat{a}^*)}{2i} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} \hat{p} \quad (4-1-10)$$

对于相干态, 两个正交分量的方差相等

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (4-1-11)$$

则

$$(\Delta X_1 \Delta X_2)_{coh} = \frac{1}{4} \quad (4-1-12)$$

图 4-1 中画出 $\Delta X_1 \Delta X_2 = 1/4$ 是双曲线, 而相干态对应曲线上一点 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2$.

曲线上其他点相应压缩相干态. 图中斜线部分分别相应 $\Delta X_1 < 1/2$ 或 $\Delta X_2 < 1/2$, 也是压缩态, 这时 $\Delta X_1 \Delta X_2 > 1/4$ 为广义压缩态.

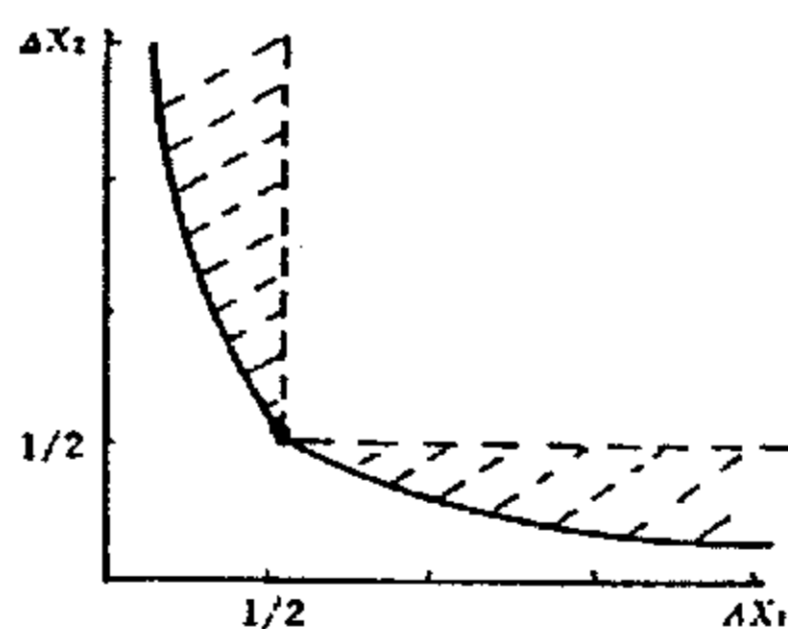


图 4-1 测不准量与压缩态

压缩态也可以用另一种方法来定义, 就是双光子相干态. 考虑单模场, 使它的一部分和它的位相复共轭波混合, 构成新场. 新场的湮灭算符为

$$\hat{b}_s = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^* \quad (4-1-13)$$

其中

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \quad (4-1-14)$$

从 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, 可以证明 $[\hat{b}_r, \hat{b}_r^\dagger] = 1$. 若 \hat{a} 的本征态是相干态, 可以证明 \hat{b}_r 的本征态为压缩相干态^[134]. 从物理上说, 是让一束相干光与它的位相复共轭光混合就产生压缩光. 压缩光是两束光相干的结果, 称双光子相干态.

前面所说的压缩态是正交相压缩相干态, 其特点是一个正交相振幅的噪声低于真空涨落. 若用这一分量携带信号, 可以得到比相干态更大的信噪比. 若一个状态的光子数噪声小于相干态噪声, 即

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle \quad (4-1-15)$$

即为振幅压缩态, 或称粒子数压缩态. 最近, Sunder 建议将一个正交压缩相干态通过一个克尔介质, 有可能得到一个高的振幅压缩态, 可使光子数方差为 $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle^{1/2}$ ^[135].

4.1.3 光场压缩态的探测

压缩态光的某一正交分量的测不准量小于相干态, 另一正交分量的测不准量大于相干态. 把信号光能量加在涨落小的正交分量上, 其噪声可以小于相干态. 由于这两个分量的位相正好差 90° , 所以对信号测量必须使用对位相敏感的相干测量. 如果利用普通光电探测器直接测量, 因这时同时测量两个正交分量, 一个分量减弱, 另一个分量加强, 合起来噪声加大, 将显示不出压缩光的优越性.

对于位相有关的噪声必须利用同频率相干光混合于压缩光, 进行相干探测, 这就是所谓零差探测^[134]. 寻常零差探测器的缺点是要求束分离器的反射系数远小于与透射系数, 这样本地激光能量大部分被放弃, 若要进一步提高性能, 就要利用平衡零差探测器.

图 4-2 给出了平衡零差探测器的示意图. 在探测器中, 信号与本地激光通过 50:50 束分离器混合, 两混合光束分别由两个光探测器 D_1 和 D_2 探测, 两光电流相减给出信号光信息. 在此探测器中, 本地振荡激光能量被充分利用而它的噪声被抵消. 假定光电探测器的量子效率为 1.

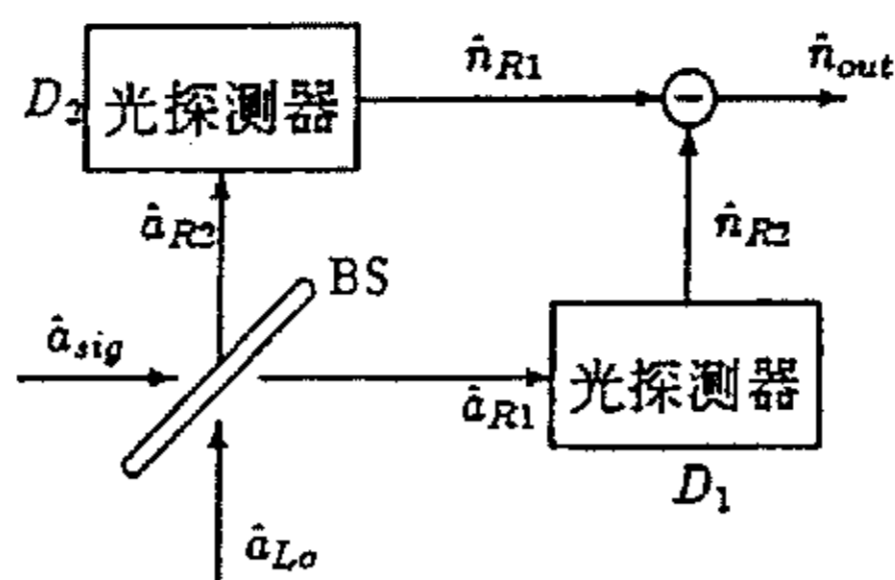


图 4-2 平衡零差探测器

平衡零差探测过程中,两束分离器的输出和输入信号关系为^[134]

$$\hat{a}_{R1} = \frac{\hat{a}_{sig} + i\hat{a}_{Lo}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_{R2} = \frac{i\hat{a}_{sig} + \hat{a}_{Lo}}{\sqrt{2}} \quad (4-1-16)$$

相减以后的光电子数 \hat{n}_{out}

$$\begin{aligned} \hat{n}_{out} &= \hat{n}_{R1} - \hat{n}_{R2} \\ &= \frac{1}{2} [(\hat{a}_{sig} + i\hat{a}_{Lo})^\dagger (\hat{a}_{sig} + i\hat{a}_{Lo}) - (i\hat{a}_{sig} + \hat{a}_{Lo})^\dagger (i\hat{a}_{sig} + \hat{a}_{Lo})] \\ &= \frac{1}{2} [(\hat{a}_{sig}^\dagger - i\hat{a}_{Lo}^\dagger)(\hat{a}_{sig} + i\hat{a}_{Lo}) - (-i\hat{a}_{sig}^\dagger + \hat{a}_{Lo}^\dagger)(i\hat{a}_{sig} + \hat{a}_{Lo})] \\ &= \frac{1}{2} [i(\hat{a}_{sig}^\dagger \hat{a}_{Lo} - \hat{a}_{Lo}^\dagger \hat{a}_{sig}) - i(-\hat{a}_{sig}^\dagger \hat{a}_{Lo} + \hat{a}_{Lo}^\dagger \hat{a}_{sig})] \\ &= i(\hat{a}_{sig}^\dagger \hat{a}_{Lo} - \hat{a}_{Lo}^\dagger \hat{a}_{sig}) \end{aligned} \quad (4-1-17)$$

本地振荡信号强且处在相干态,因此可以取

$$\langle \hat{a}_{Lo} \rangle = |\alpha_{Lo}| e^{i\varphi_{Lo}} \quad (4-1-18)$$

则有

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{out} \rangle &= \langle e^{i\pi/2} |\alpha_{Lo}\rangle (\hat{a}_{sig}^\dagger e^{i\varphi_{Lo}} - e^{-i\varphi_{Lo}} \hat{a}_{sig}) \rangle \\ &= \langle |\alpha_{Lo}| [\hat{a}_{sig}^\dagger e^{i(\varphi_{Lo} + \pi/2)} + e^{-i(\varphi_{Lo} - \pi/2) - i\pi} \hat{a}_{sig}] \rangle \\ &= 2|\alpha_{Lo}| \langle \hat{X}(\theta) \rangle \end{aligned} \quad (4-1-19)$$

式中场算符 $\hat{X}(\theta)$ 定义为

$$\hat{X}(\theta) = \frac{\hat{a}_{sig}^\dagger e^{i\theta} + \hat{a}_{sig} e^{-i\theta}}{2} \quad (4-1-20)$$

这里 $\theta = \varphi_{Lo} + \frac{\pi}{2}$. 类似地可以得到输出电子数平方平均值为

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{n}_{out}^2 \rangle &= \langle i(\hat{a}_{sig}^+ \hat{a}_{Lo} - \hat{a}_{Lo}^+ \hat{a}_{sig}) \cdot i(\hat{a}_{sig}^+ \hat{a}_{Lo} - \hat{a}_{Lo}^+ \hat{a}_{sig}) \rangle \\
 &= -\langle [\hat{a}_{sig}^{+2} \hat{a}_{Lo}^2 - \hat{a}_{sig} \hat{a}_{sig}^+ \hat{a}_{Lo}^+ \hat{a}_{Lo} - \hat{a}_{sig}^+ \hat{a}_{sig} \hat{a}_{Lo} \hat{a}_{Lo}^+ + \hat{a}_{Lo}^{+2} \hat{a}_{sig}^2] \rangle \\
 &= -|\alpha_{Lo}|^2 \langle [\hat{a}_{sig}^{+2} e^{2i\varphi_{Lo}} - \hat{a}_{sig} \hat{a}_{sig}^+ - \hat{a}_{sig}^+ \hat{a}_{sig} + e^{-2i\varphi_{Lo}} \hat{a}_{sig}^2] \rangle \quad (4-1-21) \\
 &= |\alpha_{Lo}|^2 \langle [\hat{a}_{sig}^{+2} e^{2i\theta} + \hat{a}_{sig} \hat{a}_{sig}^+ + \hat{a}_{sig}^+ \hat{a}_{sig} + e^{-2i\theta} \hat{a}_{sig}^2] \rangle \\
 &= 4|\alpha_{Lo}|^2 \langle \hat{X}^2(\theta) \rangle
 \end{aligned}$$

输出电子数均方差为

$$\langle \Delta \hat{n}_{out}^2 \rangle = 4|\alpha_{Lo}|^2 \langle \Delta \hat{X}(\theta)^2 \rangle \quad (4-1-22)$$

在(4-1-22)式中,信号光和本地光散粒噪声 $\langle \Delta \hat{n}_{sig}^2 \rangle$ 和 $\langle \Delta \hat{n}_{Lo}^2 \rangle$ 都不出现,其原因是由于两光电探测器信号相减而抵消,而最后测出的是信号光的正交分量涨落通过本地光放大的信号.

首先测定本地相干光的真空噪声,切断信号光的输入,根据(4-1-18)式有

$$\langle \Delta \hat{n}_{out}^2 \rangle = \langle \hat{n}_{out} \rangle = |\alpha_{Lo}|^2 \quad (4-1-23)$$

(4-1-23)式反映真空涨落水平,然后注入压缩光到束分离器 BS 的输入部分,本地激光与压缩光相干.压缩光取

$$\hat{a}_{sig} = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^+ \quad (4-1-24)$$

有

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\theta) &= \frac{\hat{a}_{sig}^+ e^{i\theta} + \hat{a}_{sig} e^{-i\theta}}{2} \\
 &= \frac{(\mu \hat{a} + \nu \hat{a}^+)^+ e^{i\theta} + (\mu \hat{a} + \nu \hat{a}^+) e^{-i\theta}}{2} \\
 &= \frac{(\mu^* \hat{a}^+ + \nu^* \hat{a}) e^{i\theta} + (\mu \hat{a} + \nu \hat{a}^+) e^{-i\theta}}{2}
 \end{aligned} \quad (4-1-25)$$

则与压缩光位相有关的正交分量涨落为

$$\langle \Delta \hat{X}(\theta)^2 \rangle = \frac{\mu^* \mu + \nu \nu^* + \mu^* \nu^* e^{i2\theta} + \mu \nu e^{-i2\theta}}{4} \quad (4-1-26)$$

均方差与本地激光相角有关,其最大和最小值分别为^[64]

$$\langle \Delta \hat{X}(\theta)^2 \rangle_{\max} = \frac{(|\mu| + |\nu|)^2}{4} \quad (4-1-27)$$

$$\langle \Delta \hat{X}(\theta)^2 \rangle_{\min} = \frac{(|\mu| - |\nu|)^2}{4} \quad (4-1-28)$$

由(4-1-11)知,若 $(|\mu| - |\nu|)^2 < 1$, 则最小均方差小于相干态正交分量的涨落. 由(4-1-22)式知光电子数最小涨落为

$$\langle \Delta \hat{n}(t)^2 \rangle_{\min} = |\alpha_{L_0}|^2 (|\mu| - |\nu|)^2 \quad (4-1-29)$$

若 $(|\mu| - |\nu|)^2 < 1$, 则涨落小于真空噪声(4-1-23), 此时光处在压缩态. 利用移相器改变 φ_{L_0} , 则 θ 也变化, 测到光电流的涨落将大于或小于真空涨落. 利用此方法可以观测压缩态, 若为非压缩态, 合成光涨落在任何位相都不可能低于真空涨落.

4.2 飞秒时间孤子传输的量子理论

光孤子系统可用奇异 Lagrange 量描述, 系统含 Dirac 约束. 通常按对应原理写出系统场量对易关系和量子运动方程时, 未计及约束. 本节对含高阶项的非线性 Schrödinger 方程描述的系统进行严格的 Dirac 正则量子化, 导出了系统场量对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程^[138]. 此外, 光孤子在传输过程中形状、振幅等保持不变的原因是系统存在许多运动常数(即守恒量), 因此研究光孤子的守恒量具有重要意义. 本节同时对系统进行了路径积分量子化, 并根据量子水平的 Noether 定理, 导出了系统在时空平移变换不变性下的量子能量和动量守恒. 系统还具有相位变换下的不变性, 相应导出了系统量子水平的守恒量.

大部分文献研究时间孤子量子理论的出发点是基于量子非线性 Schrödinger 方程, 而它的导出有如下几种方法:

(a) 将经典非线性 Schrödinger 方程中的场量直接看成算符. 经典非线性 Schrödinger 方程为

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u \quad (4-2-1)$$

把场量直接看成算符, 可得量子非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - |\hat{u}|^2 \hat{u} \quad (4-2-2)$$

(b) 将经典非线性 Schrödinger 方程进行量子化^[67].

(c) 将在光纤介质中传输的光场量子化^[134], 即将电磁场量子化.

(d) 利用光纤介质的微观模型与色散关系来导出量子非线性 Schrödinger 方程

[82]

描述光孤子传输的经典非线性 Schrödinger 方程(4-2-1),可由奇异 Lagrange 量密度

$$\mathcal{L} = iu^* \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} u^* u^2 \quad (4-2-3)$$

导出.按 Dirac 约束理论,系统(4-2-3)的正则变量间存在约束,它的量子化不同于一般的正规 Lagrange 量系统的方法.用奇异 Lagrange 量描述的光孤子系统是约束 Hamilton 系统,它的量子化应该用 Dirac 正则量子化(或约束 Hamilton 系统的路径积分量子化).

4.2.1 量子非线性 Schrödinger 方程的推导

对光孤子量子效应的研究一般是通过量子化满足非线性 Schrödinger 方程的场.实际光孤子传输系统,并不能用标准非线性 Schrödinger 方程进行精确描述,而必须考虑一些高阶色散及高阶非线性的影响,传输方程为如下的经典高阶非线性 Schrödinger 方程(NLSE)^[72]

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u - i\delta_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - i6\delta_3 |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4-2-4)$$

式中 u 为归一化光波包络函数.方程(4-2-4)有孤子解^[72],相应系统的 Lagrange 量密度为

$$\mathcal{L} = iu^* \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} u^* u^* uu - i\delta_3 \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i3\delta_3 u^* u^* u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4-2-5)$$

下面分析系统在相空间中的约束,并对系统进行量子化.系统的正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = iu^* \quad (4-2-6)$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^*} = 0 \quad (4-2-7)$$

相应系统的正则 Hamilton 量为

$$H_c = \int dx [\pi \dot{u} + \pi^* \dot{u}^* - \mathcal{L}] = \int dx \mathcal{H}_c \quad (4-2-8)$$

式中, \mathcal{H}_c 为正则 Hamilton 量密度

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} u^* u^* uu + i\delta_3 \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i3\delta_3 u^* u^* u \frac{\partial u}{\partial x}$$

按 Dirac 的约束理论,由(4-2-6)和(4-2-7)式知系统有两个初级约束:

$$\phi^{01} = \pi - iu^* \approx 0 \quad (4-2-9)$$

$$\phi^{02} = \pi^* \approx 0 \quad (4-2-10)$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_T = \int dx [\mathcal{H}_c + \lambda_{01}\phi^{01} + \lambda_{02}\phi^{02}] \quad (4-2-11)$$

初级约束的自治性条件

$$\dot{\phi}^{01} = \{\phi^{01}, H_T\} \approx 0 \quad (4-2-12)$$

$$\dot{\phi}^{02} = \{\phi^{02}, H_T\} \approx 0 \quad (4-2-13)$$

确定两个 Lagrange 乘子 λ_{01} 和 λ_{02} , 不给出新的约束. 容易看出系统的约束均为第二类, 记 $\theta^1 = \phi^{01}$, $\theta^2 = \phi^{02}$. 根据(2-1-25)式, F 和 G 的 Dirac 括号为

$$\begin{aligned} \{F(t, x), G(t, x')\}_D &= \{F(t, x), G(t, x')\} \\ &\quad - \int d^3y d^3v \{F(t, x), \theta_i(t, y)\} C_{ij}^{-1}(t, y, v) \{\theta_j(t, v), G(t, x')\} \end{aligned}$$

其中 C 是以第二类约束函数的 Poisson 括号为元素构成的矩阵

$$C = \begin{bmatrix} \{\theta^1, \theta^1\} & \{\theta^1, \theta^2\} \\ \{\theta^2, \theta^1\} & \{\theta^2, \theta^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\delta(x-x') \\ i\delta(x-x') & 0 \end{bmatrix} \quad (4-2-14)$$

它的逆矩阵为

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \delta(x-x') \quad (4-2-15)$$

经计算,场量的 Dirac 括号为

$$\{u(x), \pi(x')\}_D = \delta(x-x') \quad (4-2-16)$$

$$\{u^*(x), \pi^*(x')\}_D = \delta(x-x') \quad (4-2-17)$$

$$\{u(x), u^*(x')\}_D = -i\delta(x-x') \quad (4-2-18)$$

$$\{u(x), u(x')\}_D = \{u^*(x), u^*(x')\}_D = \{\pi(x), \pi^*(x')\}_D = 0 \quad (4-2-19)$$

因此,按 Dirac 正则量子化规则 $\{\cdot, \cdot\}_D \rightarrow -i[\cdot, \cdot]$, 相应的场算符满足对易关系

$$[\hat{u}(x), \hat{\pi}(x')] = i\delta(x-x') \quad (4-2-20)$$

$$[\hat{u}^*(x), \hat{\pi}^*(x')] = i\delta(x-x') \quad (4-2-21)$$

$$[\hat{u}(x), \hat{u}^*(x')] = \delta(x-x') \quad (4-2-22)$$

$$[\hat{u}(x), \hat{u}(x')] = [\hat{u}^*(x), \hat{u}^*(x')] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}^*(x')] = 0 \quad (4-2-23)$$

对仅含第二类约束的光孤子系统,经典运动方程(2-1-27)为

$$\dot{u} = \{u, H_c\}_D \quad (4-2-24)$$

过渡到量子情形 $\{, \}_D \rightarrow -i[\cdot, \cdot]$, $\dot{u} = -i[\hat{u}, \hat{H}_c]$, 并利用对易关系(4-2-20)-(4-2-23)得量子非线性 Schrödinger 方程为

$$i \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - |\hat{u}|^2 \hat{u} - i\delta_3 \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} - i6\delta_3 |\hat{u}|^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \quad (4-2-25)$$

这种严格推导方法所得结果和用对应原理得到的结果一致^[138].

4.2.2 路径积分量子化和守恒量

根据 F-S 路径积分量子化方法(2-2-12)式,对仅含第二类约束的系统,其量子跃迁振幅为

$$Z[0] = \int \mathcal{D}u \mathcal{D}\pi \mathcal{D}u^* \mathcal{D}\pi^* \delta(\pi - i\dot{u}^*) \delta(\pi^*) [\det\{\theta_i, \theta_j\}]^{1/2} \exp\{i \int d^2x [\pi\dot{u} + \pi^*\dot{u}^* - \mathcal{H}_c]\} \quad (4-2-26)$$

从(4-2-14)知行列式 $\det\{\theta_i, \theta_j\}$ 与场量无关,可从生成泛函中略去.利用 δ -函数的性质,系统在相空间中 Green 函数的生成泛函(2-2-14)为

$$\begin{aligned} Z[J, J^*] &= \int \mathcal{D}u \mathcal{D}\pi \mathcal{D}u^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}\lambda_i \exp\{i \int d^2x [\mathcal{L}_{eff}^p + Ju + J^*u^*]\} \\ &= \int \mathcal{D}u \mathcal{D}\pi \mathcal{D}u^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}\lambda_i \exp\{iI_{eff}^p + \int d^2x [Ju + J^*u^*]\} \end{aligned} \quad (4-2-27)$$

这里 $I_{eff}^p = \int d^2x \mathcal{L}_{eff}^p = \int d^2x [\pi\dot{u} + \pi^*\dot{u}^* - \mathcal{H}_c + \lambda_i \theta^i]$ 为有效正则作用量, \mathcal{L}_{eff}^p 为有效正则 Lagrange 量密度, λ_i 为与 λ_{0i} 不同的乘子.

根据约束 Hamilton 系统的量子守恒律,如果系统相空间中 Green 函数生成泛函(4-2-27)中的有效正则作用量在下列无穷小整体变换

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\sigma} \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_{\sigma} \xi^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_{\sigma} \eta^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \end{cases}$$

下不变[这里 $\varphi(x) = (u, u^*)$, $\pi(x) = (\pi, \pi^*)$], 且相应变换的 Jacobi 行列式与场量无关, 则系统存在量子守恒量(2-3-24)^[15,19]

$$Q^{\sigma} = \int d^3x [\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}} \tau^{0\sigma}]$$

光孤子系统的有效正则作用量 I_{eff}^P 在时间平移变换

$$\begin{cases} t' = t + \varepsilon \\ \varphi'(x') = \varphi(x) \\ \pi'(x') = \pi(x) \end{cases} \quad (4-2-28)$$

下具有不变性, 且相应变换的 Jacobi 行列式为 1. 由(4-2-28)知, $\tau^{0\sigma} = 1$,

$\tau^{k\sigma} = 0$, $\xi^{\sigma} = 0$, 代入(2-3-24)式中得系统量子水平的能量守恒

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} u^* u^* u u + i\delta_3 \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i3\delta_3 u^* |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (4-2-29)$$

光孤子系统的 I_{eff}^P 在空间平移变换

$$\begin{cases} x^i = x^i + \varepsilon^i \\ \varphi'(x') = \varphi(x) \\ \pi'(x') = \pi(x) \end{cases} \quad (4-2-30)$$

下具有不变性, 且相应变换的 Jacobi 行列式为 1. 由(4-2-30)知, $\tau^{0\sigma} = 0$,

$\tau^{k\sigma} = 1$, $\xi^{\sigma} = 0$, 代入(2-3-24)式中得系统量子水平的动量守恒

$$p = \int dx (\pi \partial_j u + \pi^* \partial_j u^*) = \int dx \pi \partial_j u \quad (4-2-31)$$

光孤子系统的 I_{eff}^P 在无穷小相位变换

$$\begin{cases} u'(x') = u(x) e^{i\theta} \cong u(x) + i\theta u(x) \\ u^*(x') = u^*(x) e^{-i\theta} \cong u^*(x) - i\theta u^*(x) \end{cases} \quad (4-2-32)$$

下具有不变性,且相应变换的 Jacobi 行列式为 1.由(4-2-32)知, $\tau^{0\sigma} = 0$, $\xi = iu$, $\xi^* = -iu^*$, 代入(2-3-24)式中得系统量子水平的守恒量^[30]:

$$Q = \int dx [i\pi u - i\pi^* u^*] = \int dx i\pi u = - \int dx u^* u \quad (4-2-33)$$

在相空间中讨论的优点是无须对动量进行积分.一般情形下,作出动量的路径积分是困难的,甚至是不可能的.上述结果也可从经典 KDV 方程守恒量的分析得出^[13].可以证明,由(4-2-5)式描述的光孤子系统,无论在经典水平或量子水平,均存在守恒量(4-2-29),(4-2-31)和(4-2-33).

4.3 稳态光折变空间孤子传输的量子理论

描述稳态光折变空间光孤子传输的经典非线性 Schrödinger 方程(3-3-20)可由奇异 Lagrange 量导出.本节应用约束 Hamilton 系统的量子理论,对稳态光折变空间光孤子系统进行 Dirac 正则量子化,导出了描述空间孤子系统的场量之间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.在线性近似下求出量子非线性 Schrödinger 方程的微扰解,讨论了稳态光折变空间孤子的压缩性质.

4.3.1 量子非线性 Schrödinger 方程的推导

稳态光折变空间孤子传输的经典非线性 Schrödinger 方程为(3-3-20)式^[55]

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \beta(1 + \rho) \frac{U}{1 + |U|^2} + \alpha \frac{(\rho - |U|^2)U}{1 + |U|^2} \quad (4-3-1)$$

U 为归一化光波包络函数, $\rho = I_{\infty}/I_d$, $\beta = \sigma E_0$, $\alpha = \sigma E_p$, $\sigma = (k_0 x_0)^2 (n_e^4 r_{eff} / 2)$. 当 $\alpha = 0$ 时,方程描述屏蔽孤子无量纲化振幅的演化;而当 $\beta = 0$ 时,方程描述光伏孤子无量纲化振幅的演化.

相应系统(4-3-1)的 Lagrange 量密度为

$$\mathcal{L} = iU^* \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial U^*}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} - (1 + \rho)(\alpha + \beta) \ln(1 + UU^*) + \alpha UU^* \quad (4-3-2)$$

下面分析系统在相空间中的约束,并给出其 Dirac 正则量子化.系统的正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}} = iU^* \quad (4-3-3)$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}^*} = 0 \quad (4-3-4)$$

这里 $\dot{U} = \partial U / \partial z$. 相应系统的正则 Hamilton 量为

$$H_c = \int dx [\pi \dot{U} + \pi^* \dot{U}^* - \mathcal{L}] = \int dx \mathcal{H}_c \quad (4-3-5)$$

式中 $\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \frac{\partial U^*}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + (1 + \rho)(\beta + \alpha) \ln(1 + UU^*) - \alpha UU^*$ 为正则 Hamilton 量密度. 按

Dirac 的约束理论, 由(4-3-3)和(4-3-4)式知系统有两个初级约束

$$\phi^{01} = \pi - iU^* \approx 0 \quad (4-3-6)$$

$$\phi^{02} = \pi^* \approx 0 \quad (4-3-7)$$

系统的总 Hamilton 量为

$$H_T = \int dx [\mathcal{H}_c + \lambda_{01} \phi^{01} + \lambda_{02} \phi^{02}] \quad (4-3-8)$$

初级约束的自洽性条件为

$$\dot{\phi}^{01} = \{\phi^{01}, H_T\} \approx 0 \quad (4-3-9)$$

$$\dot{\phi}^{02} = \{\phi^{02}, H_T\} \approx 0 \quad (4-3-10)$$

(4-3-9)和(4-3-10)式确定两个 Lagrange 乘子 λ_{01} 和 λ_{02} , 不再给出新的约束. 容易看出

系统的约束均为第二类约束, 记 $\theta^1 = \phi^{01}$, $\theta^2 = \phi^{02}$. 根据(2-1-25)式, F 和 G 的 Dirac

括号为

$$\begin{aligned} \{F(z, x), G(z, x')\}_D &= \{F(z, x), G(z, x')\} \\ &\quad - \int d^3 y d^3 v \{F(z, x), \theta_i(z, y) C_{ij}^{-1}(z, y, v) \theta_j(z, v), G(z, x')\} \end{aligned} \quad (4-3-11)$$

其中 C 是以第二类约束函数的 Poisson 括号为元素构成的矩阵

$$C = \begin{bmatrix} \{\theta^1, \theta^1\} & \{\theta^1, \theta^2\} \\ \{\theta^2, \theta^1\} & \{\theta^2, \theta^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\delta(x-x') \\ i\delta(x-x') & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3-12)$$

它的逆矩阵为

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \delta(x-x') \quad (4-3-13)$$

经计算,场量的 Dirac 括号为

$$\{U(x), \pi(x')\}_D = \delta(x-x') \quad (4-3-14)$$

$$\{U^*(x), \pi^*(x')\}_D = \delta(x-x') \quad (4-3-15)$$

$$\{U(x), U^*(x')\}_D = -i\delta(x-x') \quad (4-3-16)$$

$$\{U(x), U(x')\}_D = \{U^*(x), U^*(x')\}_D = \{\pi(x), \pi^*(x')\}_D = 0 \quad (4-3-17)$$

因此,按 Dirac 正则量子化, $\{\cdot, \cdot\}_D \rightarrow -i[\cdot, \cdot]$, 对稳态光折变空间孤子约束系统,相应的场算符满足对易关系

$$[\hat{U}(x), \hat{\pi}(x')] = i\delta(x-x') \quad (4-3-18)$$

$$[\hat{U}^*(x), \hat{\pi}^*(x')] = i\delta(x-x') \quad (4-3-19)$$

$$[\hat{U}(x), \hat{U}^*(x')] = \delta(x-x') \quad (4-3-20)$$

$$[\hat{U}(x), \hat{U}(x')] = [\hat{U}^*(x), \hat{U}^*(x')] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}^*(x')] = 0 \quad (4-3-21)$$

对仅含第二类约束的系统,其经典运动方程为

$$\dot{F} = \{F, H_c\}_D \quad (4-3-22)$$

对稳态光折变空间孤子约束系统,有

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \{U, H_c\}_D \quad (4-3-23)$$

过渡到量子情形, $\frac{\partial \hat{U}}{\partial z} = -i[\hat{U}, \hat{H}_c]$, 利用(4-3-18)-(4-3-21)的对易关系,得量子非线性 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial \hat{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} + \beta(1+\rho)\frac{\hat{U}}{1+|\hat{U}|^2} + \alpha\frac{(\rho-|\hat{U}|^2)\hat{U}}{1+|\hat{U}|^2} \quad (4-3-24)$$

这种推导方法所得场的量子对易关系和场的量子运动方程与唯象地将经典非线性 Schrödinger 方程中的场量直接看成算符所得到的结果一致.这里给出的是严格的论证.

4.3.2 量子非线性 Schrödinger 方程的微扰解

讨论孤子压缩性质是研究孤子量子理论的目的之一.它可以通过在线性近似

下求出微扰场算符进而计算量子噪声来讨论^[64].下面先求出量子非线性 Schrödinger 方程(4-3-24)的微扰解,再讨论稳态光折变空间孤子的压缩性质.

为简单考虑空间屏蔽光孤子的情形,即在(4-3-24)式中令 $\alpha = 0$, (4-3-24)变为

$$i \frac{\partial \hat{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} + \beta(1+\rho) \frac{\hat{U}}{1+|\hat{U}|^2} \quad (4-3-25)$$

将方程(4-3-25)线性化,令

$$\hat{U}(z, x) = u_0(z, x) + \hat{v}(z, x) \quad (4-3-26)$$

其中 $u_0(z, x)$ 为方程(4-3-1)在 $\alpha = 0$ 时的精确解, $\hat{v}(z, x)$ 为微扰场算符,表示量子起伏.当光子数很大时,(4-3-26)式有效^[69].把(4-3-26)式代入(4-3-25)式,忽略 $\hat{v}(z, x)$ 的所有高阶项,可得线性方程

$$i \frac{\partial \hat{v}(z, x)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}(z, x)}{\partial x^2} + \beta(1+\rho)(1+2\gamma)\hat{v}(z, x) + \beta(1+\rho)\gamma\hat{v}^+(z, x) \quad (4-3-27)$$

这里 $\gamma = |u_0|^2$.把(4-3-26)代入(4-3-20)和(4-3-21)式,可得微扰场算符 $\hat{v}(z, x)$ 满足的对易关系

$$[\hat{v}(z, x), \hat{v}^+(z, x')] = \delta(x - x') \quad (4-3-28)$$

$$[\hat{v}(z, x), \hat{v}(z, x')] = [\hat{v}^+(z, x), \hat{v}^+(z, x')] = 0 \quad (4-3-29)$$

作 Fourier 变换, $\hat{b}(z, k) = \int \hat{v}(z, x) e^{ikx} dx$, (4-3-27)式变为

$$i \frac{\partial \hat{b}(z, k)}{\partial z} = \frac{k^2}{2} \hat{b}(z, k) + \beta(1+\rho)(1+2\gamma)\hat{b}(z, k) + \beta(1+\rho)\gamma\hat{b}^+(z, -k) \quad (4-3-30)$$

方程(4-3-30)及其厄密共轭方程可用矩阵表示为

$$i \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}(z, k) \\ \hat{b}^+(z, -k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k^2/2 - \beta(1+\rho)(1+2\gamma) & -\beta(1+\rho)\gamma \\ -\beta(1+\rho)\gamma & -k^2/2 - \beta(1+\rho)(1+2\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}(z, k) \\ \hat{b}^+(z, -k) \end{bmatrix} = 0 \quad (4-3-31)$$

设(4-3-31)式的形式解为

$$\begin{bmatrix} \hat{b}(z, k) \\ \hat{b}^+(z, -k) \end{bmatrix} = e^{i\lambda z} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \quad (4-3-32)$$

将(4-3-32)式代入(4-3-31)式中,得出系统有非平凡解的条件为

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda - k^2/2 - \beta(1+\rho)(1+2\gamma) & -\beta(1+\rho)\gamma \\ -\beta(1+\rho)\gamma & -\lambda - k^2/2 - \beta(1+\rho)(1+2\gamma) \end{vmatrix} = 0 \quad (4-3-33)$$

求解(4-3-33)式得

$$\lambda(k) = \pm \sqrt{[k^2/2 + \beta(1+\rho)(1+\gamma)] \cdot [k^2/2 + \beta(1+\rho)(1+3\gamma)]} \quad (4-3-34)$$

对于给定的初始条件 $\hat{b}(0, k), \hat{b}^+(0, -k)$, (4-3-30)式的解可设为

$$\hat{b}(z, k) = \hat{b}(0, k) \cos \lambda z + iA \sin \lambda z, \quad \hat{b}^+(z, -k) = \hat{b}^+(0, -k) \cos \lambda z + iB \sin \lambda z \quad (4-3-35)$$

其中 A, B 为待定系数.把(4-3-35)代入(4-3-30)可求出

$$\hat{b}(z, k) = \mu(z, k) \hat{b}(0, k) + \nu(z, k) \hat{b}^+(0, -k) \quad (4-3-36a)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu(z, k) &= \cos \lambda z - \frac{i}{\lambda} [k^2/2 + \beta(1+\rho)(1+2\gamma)] \sin \lambda z \\ \nu(z, k) &= -\frac{i}{\lambda} \beta(1+\rho)\gamma \sin \lambda z \end{aligned} \quad (4-3-36b)$$

对 (4-3-36a)作逆 Fourier 变换,可求出表示量子起伏的微扰场算符

$$\hat{v}(z, x) = \int \hat{b}(z, k) e^{-ikx} dk = \int [\mu(z, k) \hat{b}(0, k) + \nu(z, k) \hat{b}^+(0, -k)] e^{-ikx} dk \quad (4-3-37)$$

从(4-3-34)和(4-3-36b)知, $\lambda(k), \mu(z, k)$ 和 $\nu(z, k)$ 都是 k 的偶函数

$$\lambda(k) = \lambda(-k), \quad \mu(z, k) = \mu(z, -k), \quad \nu(z, k) = \nu(z, -k) \quad (4-3-38)$$

由(4-3-37)和(4-3-38)式可以讨论孤子的压缩性质.

4.3.3 压缩性质

压缩态可用平衡零差探测器来测量.根据(4-1-29),当 $(|\mu| - |\nu|)^2 < 1$ 时

$$\langle \Delta \hat{n}(t)^2 \rangle = |\alpha_{Lo}|^2 (|\mu| - |\nu|)^2 < |\alpha_{Lo}|^2$$

光场处在压缩态.相对噪声功率谱记为^[64]

$$S_{\min}(k) = [|\mu(k)| - |\nu(k)|]^2 \quad (4-3-39a)$$

由(4-3-36b),有

$$|\mu(k)| = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2} \beta^2 (1 + \rho)^2 \gamma^2 \sin^2 \lambda z}, \quad |\nu(k)| = \frac{1}{\lambda} \beta (1 + \rho) \gamma \sin \lambda z \quad (4-3-39b)$$

从(4-3-39)式可以看出,屏蔽光孤子压缩性质与屏蔽参数 $\beta = \sigma E_0$ (E_0 为外加电场)、相对光强 $\rho = I_{\infty}/I_d$ 、归一化强度 γ 、传输距离 z 和波数 k 等有关. 当 $\gamma = 0$, $S_{\min}(k) = 1$, 即为非压缩态真空相对噪声. 当 $S_{\min}(k) < 1$ 时, 光场处于压缩态, 此时根据(4-3-39)式就可以具体讨论自聚焦效应和衍射效应对压缩态的影响. 下面只对屏蔽亮孤子进行讨论(即 $\rho = 0$ 的情况). 图 4-3 给出 $S_{\min}(\gamma)$ 随光强 γ 的变化曲线. 从图 4-3 可以看出, 当 $\gamma = 0$, $S_{\min}(k) = 1$, 即为真空相对噪声; 在光强相对较弱时, $S_{\min}(\gamma) > 1$, 即光场量子噪声大于真空涨落, 处于非压缩态, 从(4-3-27)可知这部分是由于光束的衍射效应造成的; 随着光强 γ 增大(自聚焦效应增强), 存在某些 γ 值, 使 $S_{\min}(\gamma) < 1$, 即量子噪声小于真空涨落, 此时光场处于压缩态, 且光强越大(自聚焦效应越强), 量子噪声被压缩的幅度越大. 图 4-4 给出 $S_{\min}(z)$ 随传输距离 z 的变化曲线, 可以看出量子噪声的幅度基本不受传输距离 z 的影响.

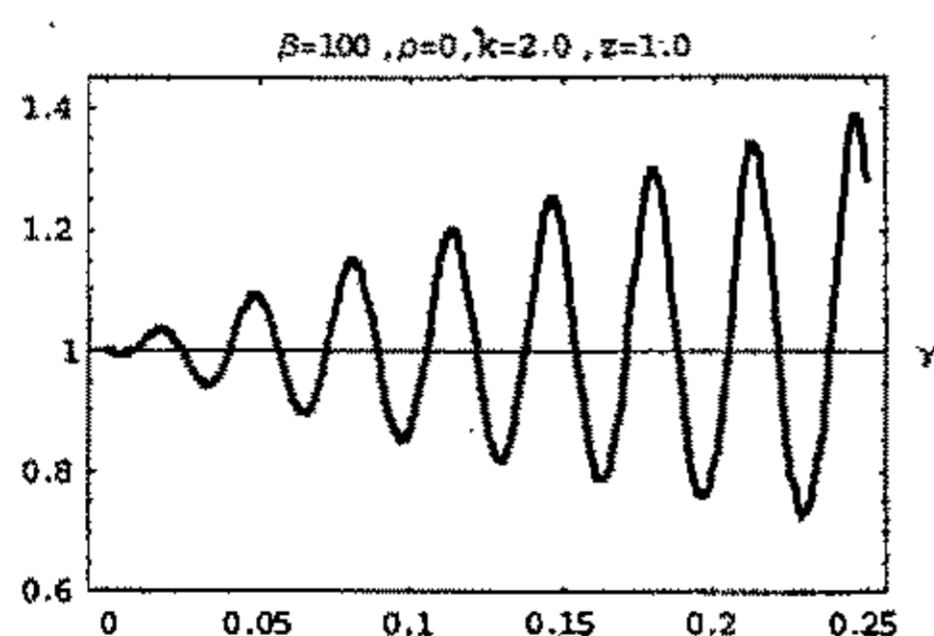


图 4-3 $S_{\min}(\gamma)$ 随 γ 的变化曲线

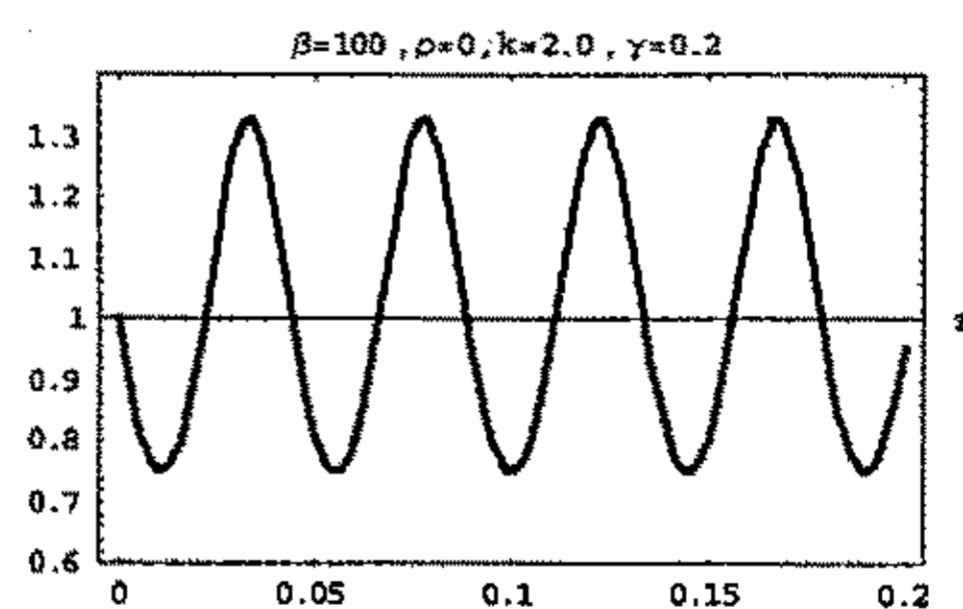


图 4-4 $S_{\min}(z)$ 随 z 的变化曲线

4.4 本章小结

本章第一节简单介绍了压缩态的概念,从量子理论叙述了平衡零差探测压缩态的原理.光孤子系统可用奇异 Lagrange 量描述,系统含 Dirac 约束.通常按对应原理写出系统对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程时,未计及约束.本章第二节对含高阶项的非线性 Schrödinger 方程系统进行严格的 Dirac 正则量子化,导出了系统场量对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.并根据量子水平的 Noether 定理,导出了系统在时空平移变换不变性下的量子能量和动量守恒.系统还具有相位变换下的不变性,导出了相应的守恒量.本章第三节应用约束 Hamilton 系统的量子理论,对稳态光折变空间光孤子系统实行了 Dirac 正则量子化,导出了描述空间孤子系统的场量之间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.在线性近似下求出量子方程的微扰解,讨论了稳态光折变屏蔽亮空间孤子的压缩性质.光强越大,量子噪声被压缩的幅度越大.

第 5 章 任意子的量子场论

任意子由于可能解释分数量子霍尔效应和高温超导,而引起人们极大兴趣^[103-127].可以用 Chern-Simons(CS)理论来描述任意子的分数自旋和分数统计性质.描述任意子的 CS 理论,过渡到相空间时,存在固有约束,为约束 Hamilton 系统.因此,用约束 Hamilton 系统理论来研究任意子 CS 模型的量子性质就十分必要.在量子水平上讨论任意子性质需要对系统进行量子化.用正则量子化方法研究分数自旋性质,需要处理非对易 q 数,而不是 c 数,十分不便,因此用路径积分量子化方法就显得方便得多.本章先简单介绍了任意子的 CS 理论,然后用路径积分量子化方法研究了 Abel CS 理论与物质场耦合系统和 Abel Maxwell CS 理论与物质场耦合系统的对称性质,通过量子 Noether 定理^[140-143]得到了系统的角动量,经计算发现系统具有分数自旋的性质,这和由对称的能量-动量张量得到的结果一致.

5.1 Chern-Simons 理论

本节简单介绍任意子的 CS 理论,并用路径积分量子化方法研究了 Abel CS 理论与物质场耦合系统,系统具有分数自旋性质.

5.1.1 Chern-Simons 理论概述

在场论水平,描述分数自旋最基本的系统是 Abel CS 理论与物质场的耦合^[116,122,123,125].后来人们研究了 Abel Maxwell CS 理论^[106,121],非线性 σ 模型与 CS 项耦合^[104]等系统,发现这些系统均具有分数自旋的性质.对非 Abel CS 理论也开展了研究^[113,144].任意子的 CS 理论,过渡到相空间时,存在固有约束,为约束 Hamilton 系统,因此应该用约束 Hamilton 系统的量子理论来讨论系统分数自旋和分数统计的性质.

文[116]对 Abel CS 理论与标量场耦合系统

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$$

进行 Dirac 正则量子化,导出了场量之间的对易关系,通过对称的能量-动量张量得到系统角动量,发现系统有分数自旋的性质,并构造了任意子算符.非相对论的标量场与 Abel CS 项耦合系统

$$\mathcal{L} = i\varphi^* D_t \varphi - \frac{1}{2m} (D_k \varphi)^* (D_k \varphi) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$$

在文[122]中作了研究,通过能量-动量张量计算了系统角动量发现系统有分数自旋的性质.文[123]研究了 CP^{N-1} 与 Abel CS 项耦合系统,研究了系统的任意子性质.文[125]用 Dirac 正则量子化方法研究了 Abel CS Higgs 模型与物质场耦合系统,并指出即使没有 CS 项,系统仍有分数自旋的性质.

文[106]对 Abel Maxwell CS 理论与标量场耦合系统

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi \varphi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$$

进行 Dirac 正则量子化,导出了场量之间的对易关系,并通过对称的能量-动量张量得到系统角动量.文[121]也研究了上述系统,发现没有 CS 项时,系统也有反常的统计相位出现.文[104]用 Dirac 正则量子化方法研究了 Abel Maxwell CS 理论与非线性 σ 模型耦合系统

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2f} \partial_\mu n^a \partial^\mu n^a + \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon_{abc} n^a \partial_\nu n^b \partial_\lambda n^c A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$$

通过对称能量-动量张量得到系统角动量,显示有任意子的行为.文[113]用 Dirac 正则量子化方法研究了非 Abel CS 理论与物质场耦合系统

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \text{Tr}(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + i \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\lambda)$$

导出了场量之间的对易关系,发现有类似任意子的行为.

关于任意子的分数自旋与分数统计的研究,主要有三种方式:第一,直接计算两粒子交换位置所引起的波函数的位相变化^[105,106];第二,求出体系的角动量,看是否有分数自旋项;第三,构造任意子算符^[116,117].基于约束 Hamilton 系统的对称性来计算任意子的角动量,属第二种方式.由上述可知任意子的角动量通常是通过对称能量-动量而不是 Noether 定理获得的.文[120]分别用对称的能量-动量张量和 Noether 定理计算了相对论性粒子与 Abel CS 项耦合系统的角动量,发现两者结果不一致,所以通过 Noether 定理和对称能量-动量得到的结果是否一致值得进一步研究.在对 CS 理论进行量子化时一般采用 Dirac 正则量子化方法,处理的是非对易 q 数而不是 c 数,因此用路径积分量子化方法就显得方便得多.下面用路径积分量子化和量子 Noether 定理研究 Abel CS 理论与物质场耦合系统的分数自旋和分数统计的性质.

5.1.2 Abel Chern-Simons 理论与物质场耦合系统

复标量场与 Chern-Simons 项耦合系统在(2+1)维时空中的 Lagrange 量密度为 [105,116,117]

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \quad (5-1-1)$$

式中 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, $\varepsilon_{012} = \varepsilon^{012} = 1$. 各场量相应的正则共轲动量分别为

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j, \quad \pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (5-1-2)$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (D_0 \varphi)^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = D_0 \varphi \quad (5-1-3)$$

系统的正则 Hamilton 密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} \\ &= \pi \pi^* - (D_i \varphi)^* (D^i \varphi) - A_0 \left(\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j - J_0 \right) \end{aligned} \quad (5-1-4)$$

式中 $J_0 = i(\pi \varphi - \varphi^* \pi^*)$. 系统有初级约束

$$\Lambda_1 = \pi_0 \approx 0 \quad (5-1-5)$$

$$\theta^i = \pi^i - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \quad (5-1-6)$$

系统总 Hamilton 量为

$$H_T = \int d^2x (\mathcal{H}_c + \lambda_1 \Lambda_1 + \mu_i \theta_i) \quad (5-1-7)$$

这里 λ_1, μ_i 为 Lagrange 乘子. 初级约束的自洽性条件, 给出次级约束

$$\phi^i = \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j - J_0 \approx 0 \quad (5-1-8)$$

次级约束的自洽性条件不给出新的约束. 容易看出 $\Lambda_1 \approx 0$ 为第一类约束, $\theta_i \approx 0$ 和

$\phi^i \approx 0$ 为第二类约束. 由于第一约束和规范变换联系, 必须把约束组合得到尽可能

多的第一类约束. 第二类约束的组合 $\Lambda_2 = \partial^i \theta_i + \phi^1 = \partial^i \pi_i - J_0 + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \approx 0$ 为

第一类约束. 系统有两个第一类约束 ($\Lambda_1 \approx 0, \Lambda_2 \approx 0$) 和两个第二类约束

$\theta_i \approx 0 (i=1,2)$.

根据约束 Hamilton 系统 F-S 路径积分量子化规则,对第一类约束需选取两个规范条件,考虑 Coulomb 规范

$$\Omega_1 = \partial_i A^i \approx 0 \quad (5-1-9)$$

由 $\Omega_1 \approx 0$ 的自洽性要求,可得另一个规范条件

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 + \frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon_{ij} \partial^i J^j \approx 0 \quad (5-1-10)$$

式中 $J^i = i[(D^i \varphi)^* \varphi - \varphi^* D^i \varphi]$. 根据(2-2-13)式,系统相空间 Green 函数的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[J] = & \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi_\mu \prod_{j,k,l} \delta(\theta_j) \delta(\Lambda_k) \delta(\Omega_l) \det\{\Lambda_k, \Omega_l\} [\det\{\theta_i, \theta_j\}]^{1/2} \\ & \times \exp[i \int d^3x (\pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}_c + J\varphi + J^*\varphi^* + J^\mu A_\mu)] \end{aligned} \quad (5-1-11)$$

这里 (J, J^*, J^μ) 分别为与场量 $(\varphi, \varphi^*, A_\mu)$ 相联系的外源. 经计算 Poisson 括号 $\{\Lambda_k, \Omega_l\}$ 和 $\{\theta_i, \theta_j\}$ 与场量无关,可以从(5-1-11)式中略去. 利用 δ -函数的性质,系统相空间 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J, \xi] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi_\mu \mathcal{D}\lambda_m \exp[i \int d^3x (\mathcal{L}_{\text{eff}}^p + J\varphi + J^*\varphi^* + J^\mu A_\mu)] \quad (5-1-12a)$$

这里

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^p = \mathcal{L}^p + \mathcal{L}_m = \pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}_c + \lambda_j \theta_j + \lambda_k \Lambda_k + \lambda_l \Omega_l \quad (5-1-12b)$$

$\lambda_m = (\lambda_j, \lambda_k, \lambda_l)$ 是乘子场.

下面由量子 Noether 定理导出系统角动量. 根据约束 Hamilton 系统的量子守恒律,系统有效正则作用量 $I_{\text{eff}}^p = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}^p$ 在 (x_1, x_2) 平面内具有空间转动变换

$$\begin{cases} x'^i = x^i + \varepsilon^{ij} x_j \\ \varphi'(x') = \varphi(x) \\ \varphi^*(x') = \varphi^*(x) \\ A^i(x') = A^i(x) + \varepsilon^{ij} A_j(x) \end{cases} \quad (5-1-13)$$

不变性,且相应变换的 Jacobi 行列式为 1,那么存在量子守恒量(2-3-24)式

$$Q^\sigma = \int d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}} \tau^{0\sigma}] = \text{const}$$

这样得到系统量子守恒角动量

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ij} [\pi x_i \partial_j \varphi + \pi^* x_i \partial_j \varphi^* + \pi^k x_i \partial_j A_k + \pi_i A_j] \quad (5-1-14)$$

把(5-1-2)中 π^i 的表达式代入上式,得

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i (\pi \partial_j \varphi + \pi^* \partial_j \varphi^*) + \int d^2x [\varepsilon^{ij} x_i (\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kl} A_l) \partial_j A_k + \varepsilon^{ij} \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon_{il} A^l A_j] \quad (5-1-15a)$$

利用关系 $\varepsilon^{jk} \varepsilon_{il} = \delta_i^j \delta_l^k - \delta_i^k \delta_l^j$ [119] 和(5-1-8),上式可写为[119]

$$\begin{aligned} L &= \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i (\pi \partial_j \varphi + \pi^* \partial_j \varphi^*) + \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i A_j (\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kl} \partial_l A_k) \\ &= \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i (\pi \partial_j \varphi + \partial_j \varphi^* \pi^*) - \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i A_j J_0 \end{aligned} \quad (5-1-15b)$$

由(5-1-8)可得

$$A_i(x) = -\frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon_{ij} \partial_x^j \int d^2y G(x-y) J_0(y) \quad (5-1-16)$$

这里 $G(x-y)$ 为二维空间中的 Green 函数,满足 Poisson 方程, $\nabla^2 G(x-y) = \delta^{(2)}(x-y)$. 代入(5-1-15b)得

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i (\pi \partial_j \varphi + \partial_j \varphi^* \pi^*) + \frac{Q^2}{2\kappa} \quad (5-1-17)$$

这里 $Q = \int d^2x J_0$, 方程(5-1-17)右边第二项被解释为分数自旋项.

记自旋算符 $S = Q^2 / 2\kappa$, 带一个单位电荷的单粒子(任意子)态用 $|1\rangle_{\text{any}}$ 表示,则自旋算符作用在单粒子态上得

$$e^{i\theta S} |1\rangle_{\text{any}} = e^{i\theta(1/2\kappa)} |1\rangle_{\text{any}} \quad (5-1-18)$$

这里 θ 为转角. 自旋算符 S 的本征值为 s , 则 s 和 CS 项系数 κ 的关系为

$$s = \frac{1}{2\kappa} \quad (5-1-19)$$

若取 $\theta = 2\pi$, 当 $\kappa = 1/(2n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, 单粒子态转一周附加负号表明是费米子, κ 使得自旋 s 取半整数值; 当 $\kappa = 1/2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, 单粒子态不改变表明是玻色子, κ 使得自旋 s 取整数值; 当 κ 取其他值时, 单粒子态为任意子, 自旋 s 取任意值.

根据文[117],系统角动量还可以通过对称形式的能量-动量张量

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu + iA_\mu)\varphi^*(\partial_\nu - iA_\nu)\varphi + (\partial_\nu + iA_\nu)\varphi^*(\partial_\mu - iA_\mu)\varphi - g_{\mu\nu}(\partial_\lambda + iA_\lambda)\varphi^*(\partial^\lambda - iA^\lambda)\varphi \quad (5-1-20)$$

得到.正则动量密度为

$$T_{0i} = \pi\partial_i\varphi + \partial_i\varphi^*\pi^* - A_iJ_0 \quad (5-1-21)$$

角动量为^[117]

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i T_{0j} = \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i (\pi\partial_j\varphi + \partial_j\varphi^*\pi^*) - \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i A_j J_0 \quad (5-1-22)$$

对比(5-1-15b)和(5-1-22)两式,可知由 Noether 定理和对称的能量-动量张量得到的系统角动量结果一致,但本文的结果是在量子水平得到的.

5.2 Maxwell-Chern-Simons 理论与物质场耦合系统

本节给出了 Abel Maxwell-Chern-Simons 理论与物质场耦合系统的 BFV 路径积分量子化,通过量子 Noether 定理得到耦合系统的角动量,经计算发现系统有分数自旋的性质和由对称的能量-动量张量得到的结果一致.同时得到任意子系统量子水平的能量和动量.

复标量场与 Abel Maxwell CS 理论耦合系统的 Lagrange 量密度为^[136]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) + m^2\varphi^*\varphi \quad (5-2-1)$$

式中 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.各场量相应的正则共轭动量分别为

$$\pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} = F^{i0} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j \quad (5-2-2a)$$

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0 \quad (5-2-2b)$$

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = (D_0\varphi)^*, \pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = D_0\varphi \quad (5-2-2b)$$

系统有初级约束

$$\Lambda^0 = \pi^0 \approx 0 \quad (5-2-3)$$

系统的正则 Hamilton 密度 \mathcal{H}_c 为

$$\mathcal{H}_c = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = \mathcal{H}_0 + A_0 [J_0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j)] \quad (5-2-4a)$$

式中

$$\mathcal{H}_0 = \pi \pi^* - (D_i \varphi)^* (D^i \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \pi_i A_j - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A^i A_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \quad (5-2-4b)$$

这里 $J_0 = i(\pi_\varphi \varphi - \varphi^* \pi_\varphi^*)$. 系统总 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H_T &= \int d^2 x (\mathcal{H}_c + \lambda_0 \Lambda^0) \\ &= \int d^2 x \{ \mathcal{H}_0 + A_0 [J_0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j)] + \lambda_0 \Lambda^0 \} \end{aligned} \quad (5-2-5)$$

初级约束的自洽性条件, $\{\Lambda^0, H_T\} \approx 0$, 给出次级约束

$$\Lambda^1 = J_0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j) \approx 0 \quad (5-2-6)$$

次级约束的自洽性条件不给出新的约束. 容易看出约束 (Λ^0, Λ^1) 是第一类约束. 扩展 Hamilton 量可以写为

$$H_E = \int d^2 x (\mathcal{H}_0 + \lambda_0 \Lambda^0 + A_0 \Lambda^1) = \int d^2 x (\mathcal{H}_0 + \lambda_0 \Lambda^0 + \lambda_1 \Lambda^1) \quad (5-2-7)$$

式中 λ_0 和 λ_1 为 Lagrange 乘子. 下面对系统进行路径积分量子化.

根据约束 Hamilton 系统 F-S 路径积分量子化规则, 对第一类约束需选取两个规范条件

$$\Omega_1 = \partial_i A^i \approx 0 \quad (5-2-8a)$$

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 + \partial_i \pi^i - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon_{ij} \partial^i A^j \approx 0 \quad (5-2-8b)$$

式中 $J^i = i[(D^i \varphi)^* \varphi - \varphi^* D^i \varphi]$. 根据(2-2-12)式, 系统 F-S 路径积分量子化跃迁振幅为

$$\begin{aligned} Z[0] &= \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi_\mu \prod_{k,l} \delta(\Lambda_k) \delta(\Omega_l) \det\{\{\Lambda_k, \Omega_l\}\} \\ &\quad \times \exp[i \int d^3 x (\pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{H}_c)] \end{aligned} \quad (5-2-9a)$$

经计算 Poisson 括号 $\{\Lambda_k, \Omega_l\}$ 与场量无关, 可以从(5-2-9a)式中略去, 得

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi_\mu \prod_{k,l} \delta(\Lambda_k) \delta(\Omega_l) \quad (5-2-9b)$$

$$\times \exp[i \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{H}_c)]$$

在BFV路径积分量子化方案中^[6], Lagrange乘子被看成系统力学变量, 为了不改变系统物理内容, 相应的正则动量必须为零. 这样系统约束重新记为 $G_a = (G_1, G_2) = (\Lambda^0, \Lambda^1)$. 对每一个约束 G_a , 引入费米鬼场 η^a 及其正则共轭场 \mathcal{P}_a , 记为

$$\eta = (-i\mathcal{P}, C), \quad \mathcal{P} = (i\bar{C}, \bar{\mathcal{P}})$$

Abel理论BRS变换生成元为^[9]

$$\Omega_{BRS} = \int d^2x (C\Lambda^1 - i\mathcal{P}\Lambda^0) = \int d^2x \left\{ C[J_0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j)] - i\mathcal{P}\pi^0 \right\} \quad (5-2-10)$$

由(5-2-10)式, 可得系统BRS变换

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \{A_i, \Omega_{BRS}\} = \partial_i C & \delta A_0 &= \{A_0, \Omega_{BRS}\} = -i\mathcal{P} \\ \delta \pi^i &= \{\pi^i, \Omega_{BRS}\} = 0 & \delta \pi^0 &= \{\pi^0, \Omega_{BRS}\} = 0 \\ \delta \varphi &= \{\varphi, \Omega_{BRS}\} = iC\varphi & \delta \varphi^* &= \{\varphi^*, \Omega_{BRS}\} = -iC\varphi^* \\ \delta \pi &= \{\pi, \Omega_{BRS}\} = -iC\pi & \delta \pi^* &= \{\pi^*, \Omega_{BRS}\} = iC\pi^* \\ \delta C &= \{C, \Omega_{BRS}\} = 0 & \delta \mathcal{P} &= \{\mathcal{P}, \Omega_{BRS}\} = 0 \\ \delta \bar{\mathcal{P}} &= \{\bar{\mathcal{P}}, \Omega_{BRS}\} = -J_0 + (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j), & \delta \bar{C} &= \{\bar{C}, \Omega_{BRS}\} = i\pi^0 \end{aligned} \quad (5-2-11)$$

为得到扩展相空间BRS不变Hamilton量 H , 作计算

$$\{\mathcal{H}_0(x), G_a(x')\} = V_a^b G_b \approx 0 \quad (5-2-12a)$$

$$\{G_a(x), G_b(x')\} = C_{ab}^c G_c \approx 0 \quad (5-2-12b)$$

从(5-2-12)式, 得到^[6]

$$H = \int d^2x \mathcal{H}_0 \quad (5-2-13)$$

在BFV量子化方案中, 有效Hamilton量 H_{eff} 为

$$H_{eff} = H - \{\psi, \Omega_{BRS}\} = \int d^2x \mathcal{H}_{eff} \quad (5-2-14)$$

选 $\psi = \int d^2x (i\bar{C}\chi + \bar{\mathcal{P}}\lambda)$, 这里 $\chi = \partial_i A^i$, 从(5-2-10)得到^[6]

$$\begin{aligned} \{\psi, \Omega_{BRS}\} &= \int d^2x (-\lambda_1 \Lambda^1 - \pi \chi + i\bar{C} \{\chi, \Lambda^1\} C - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}) \\ &= \int d^2x \{-\lambda_1 \Lambda^1 - \pi^1 \partial_i A^i - i\bar{C} \partial_i \partial^i C - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}\} \end{aligned} \quad (5-2-15)$$

把(5-2-15)代入(5-2-14),有效作用量可以写为

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \int d^3x (\pi^k \dot{A}_k + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* + \pi_1 \dot{\lambda}^1 + \dot{C}\bar{\mathcal{P}} + \dot{\mathcal{P}}\bar{C} - \mathcal{H}_{\text{eff}}) \\ &= \int d^3x (\pi^k \dot{A}_k + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{H}_0 + \dot{C}\bar{\mathcal{P}} - \dot{\bar{C}}\mathcal{P} - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - i\bar{C}\partial_i\partial^i C - \lambda_1\Lambda^1 - \pi^1\partial_\mu A^\mu) \end{aligned} \quad (5-2-16)$$

系统 BFV 路径积分量子化跃迁振幅为^[6]

$$\begin{aligned} Z[0] &= \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\pi^i \mathcal{D}\lambda_1 \mathcal{D}\pi^1 \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\pi^* \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\mathcal{P} \\ &\exp\{i \int d^3x [\pi^k \dot{A}_k + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{H}_0 + \dot{C}\bar{\mathcal{P}} - \dot{\bar{C}}\mathcal{P} - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - i\bar{C}\partial_i\partial^i C - \lambda_1\Lambda^1 - \pi^1\partial_\mu A^\mu]\} \end{aligned} \quad (5-2-17a)$$

利用下面结果^[137]

$$\int \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \exp\{i \int_{t_1}^{t_2} dt (-\dot{\mathcal{P}}\bar{C} + \dot{C}\bar{\mathcal{P}} - i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P})\} = \int \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \exp\{i \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\bar{C}}\dot{C}\} = -(t_2 - t_1)$$

并对鬼场 $C, \bar{\mathcal{P}}, \bar{C}, \mathcal{P}$ 积分,得

$$\begin{aligned} Z[0] &= \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\pi^i \mathcal{D}\lambda_1 \mathcal{D}\pi^1 \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\pi^* \\ &\exp\{i \int d^3x [\pi^k \dot{A}_k + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{H}_0 - \lambda_1\Lambda^1 - \pi^1\partial_\mu A^\mu]\} \end{aligned} \quad (5-2-17b)$$

在约束超曲面上此结果和 F-S 路径积分量子化结果(5-2-9b)一致.对乘子场 $\lambda_1 = A_0$

和 $\pi_1 = \pi_0$ 积分,得到

$$Z[0] = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^k \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\pi^* \delta(\Lambda^1) \delta(\partial_i A^i) \exp\{i \int d^3x (\pi^k \dot{A}_k + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{H}_0)\} \quad (5-2-18)$$

系统 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J^\mu, J, J^*] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\pi^* \exp\{i I_{\text{eff}}^P + i \int d^3x [J^\mu A_\mu + J\phi + J^*\phi^*]\} \quad (5-2-19)$$

式中

$$I_{\text{eff}}^P = \int d^4x [\pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{H}_0 - A_0\Lambda^1 - \pi^0\partial_i A^i] \quad (5-2-20)$$

5.2.1 分数自旋和分数统计性质

先推导系统量子水平角动量.根据约束 Hamilton 系统的量子守恒律,系统有效

正则作用量 I_{eff}^p 在 (x_1, x_2) 平面内具有空间转动变换

$$\begin{cases} x^i = x^i + \varepsilon^{ij} x_j \\ \varphi'(x') = \varphi(x) \\ \varphi^*(x') = \varphi^*(x) \\ A^i(x') = A^i(x) + \varepsilon^{ij} A_j(x) \end{cases} \quad (5-2-21)$$

不变性. 且相应变换的 Jacobi 行列式为 1, 那么存在量子守恒量(2-3-24)式

$$Q^\sigma = \int d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k} \tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{eff} \tau^{0\sigma}] = const$$

这样得到系统量子守恒角动量

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ij} [\pi_i A_j + x_i \pi^k \partial_j A_k + x_i (\pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*)] \quad (5-2-22)$$

把(5-2-2a)代入(5-2-22), 得

$$\begin{aligned} L = \int d^2x \varepsilon^{ij} [F_{i0} A_j + x_i F^{k0} \partial_j A_k + x_i (\pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*)] \\ + \frac{\kappa}{4\pi} \int d^2x [\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ij'} A^j (x_i \partial_j A^k) + \varepsilon^{ij} \varepsilon_{il} A^l A_j] \end{aligned} \quad (5-2-23)$$

利用关系 $\varepsilon^{jk} \varepsilon_{il} = \delta_i^j \delta_l^k - \delta_i^l \delta_j^k$ [119], 方程(5-2-23)简化为 [119]

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ij} [F_{i0} A_j + x_i F^{k0} \partial_j A_k + x_i (\pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*)] - \frac{\kappa}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{ij} x_i A_j (\varepsilon^{lk} \partial_l A_k) \quad (5-2-24)$$

由于系统在 BRS 变换下具有不变性, 它要求物理态也具有这样的不变性, 即

$$Q_{BRS} |phys\rangle = 0 \quad (5-2-25a)$$

(5-2-10)式中 BRS 变换生成元可以写成

$$\Omega_{BRS} = \int d^2x \{C [J_0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j)]\} + \int d^2x (-i\mathcal{P}\pi^0)$$

物理态条件(5-2-25a)简化为 [117]

$$\int d^2x \{ [J_0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j)] |phys\rangle \otimes (C|0\rangle_{gh}) \} = 0 \quad (5-2-25b)$$

这里 $|0\rangle_{gh}$ 为鬼场真空态. 由于鬼场 C 的独立性, 有

$$[J_0 - \nabla^2 A^0 - \partial_i \dot{A}^i - \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j] |phys\rangle = 0 \quad (5-2-25c)$$

根据规范条件 $\partial_i A^i \approx 0$, 有

$$\partial_i \dot{A}^i |phys\rangle = 0 \quad (5-2-26a)$$

即

$$[\partial_i \pi^i + \nabla^2 A^0 - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j] |phys\rangle = 0 \quad (5-2-26b)$$

从(5-2-25c)和(5-2-26),得到

$$[J_0 - \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j] |phys\rangle = 0 \quad (5-2-27)$$

解方程(5-2-27),得到^[117]

$$A_i(x) = -\frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon_{ij} \partial_x^j \int d^2 y G(x-y) J_0(y) \quad (5-2-28)$$

从(5-2-24),(5-2-27)和(5-2-28),可以得到^[117]

$$\begin{aligned} L &= \int d^2 x \varepsilon^{ij} [F_{i0} A_j + x_i (F^{ko} \partial_j A_k + \pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*)] - \int d^2 x \varepsilon^{ij} x_i A_j J_0 \\ &= \int d^2 x \varepsilon^{ij} [F_{i0} A_j + x_i (F^{ko} \partial_j A_k + \pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*)] + \frac{Q^2}{2\kappa} \end{aligned} \quad (5-2-29)$$

其中 $Q = \int d^2 x J_0$, 方程(5-2-29)右边第二项为分数自旋项^[117]. 把(5-2-29)和(5-1-17)

相比, Abel Maxwell CS 理论中分数自旋值与没有 Maxwell 项的情况相同.

5.2.2 系统能量和动量

系统有效正则作用量 I_{eff}^p 具有时空平移不变性, 且相应变换的 Jacobi 行列式为

1. 在时间平移变换下, $\tau^{k\sigma} = 0$, 得到系统量子守恒能量

$$E = \int d^2 x [\pi_\varphi \pi_\varphi^* - (D_i \varphi)^* (D^i \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \pi_i A_j - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A^i A_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}] \quad (5-2-30)$$

(5-2-2a)代入(5-2-30),得

$$E = \int d^2 x [\pi_\varphi \pi_\varphi^* - (D_i \varphi)^* (D^i \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F^{i0} F_{i0}] \quad (5-2-31)$$

在空间平移变换下, $\tau^{0\sigma} = 0$, 得量子守恒动量

$$P_j = \int d^2 x [\pi^k \partial_j A_k + \pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*] \quad (5.2.32)$$

把(5-2-2a)代入(5-2-32),得

$$P_j = \int d^2x [F^{k0} \partial_j A_k + \pi_\varphi \partial_j \varphi + \pi_\varphi^* \partial_j \varphi^*] + \frac{\kappa}{4\pi} \int d^2x \varepsilon^{ki} A_i \partial_j A_k \quad (5-2-33)$$

5.3 本章小结

在量子场论水平上讨论任意子性质需要对系统进行量子化.用正则量子化研究耦合系统分数自旋的性质,需要处理的算符,是非对易 q 数而不是 c 数,非常不便,因此用路径积分量子化方法就显得方便得多.本章第一节简单介绍了任意子的 CS 理论,并用路径积分量子化方法研究了 Abel CS 理论与复标量场耦合系统,通过量子 Noether 定理和对称形式的能量-动量张量得到系统角动量,两者一致,系统具有分数自旋的性质.本章第二节对 Abel Maxwell CS 理论与复标量场耦合系统进行路径积分量子化,用量子 Noether 定理得到系统的角动量,经过计算发现,系统具有分数自旋的性质,和用对称形式的能量-动量张量得到的结果一致.同时得到任意子系统量子水平的能量和动量.

结 论

应用约束 Hamilton 系统理论及其对称性质研究了光孤子和任意子的性质:

(1)导出了有限自由度系统在量子水平下变换性质的一般量子动力学方程.研究表明,该动力学方程在一些特殊情况下可简化为量子力学中的动量定理、角动量定理或量子水平的 Noether 定理.

(2)利用变分法研究了亮暗时间光孤子间以及 Kerr 空间孤子间的相互作用,导出了相互作用势函数.研究表明,亮暗两时间孤子相距较近时,相互排斥,而相距较远时,相互作用可以忽略.亮暗两时间孤子的入射幅值增大时,相互作用会加强.由经典 Noether 定理导出空间孤子相互作用系统的守恒量,利用该守恒量发现空间孤子间相干相互作用势函数与空间孤子间的相对相位无关,出现反常相互作用,即最近文献中的实验结果.

(3)应用约束 Hamilton 系统量子理论,研究了飞秒时间光孤子系统和稳态光折变空间孤子系统的量子性质.对飞秒时间孤子传输的非线性 Schrödinger 方程进行严格的 Dirac 正则量子化,导出了场的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.同时根据约束 Hamilton 系统的守恒律,导出了系统的量子能量和动量守恒.对稳态光折变空间孤子系统实行了 Dirac 正则量子化,导出了描述空间孤子系统的场量之间的对易关系和量子非线性 Schrödinger 方程.在线性近似下,求出屏蔽孤子量子非线性 Schrödinger 方程的微扰解,讨论了屏蔽亮孤子的压缩性质.结果表明光强越大,量子噪声被压缩的幅度越大.

(4)在量子场论水平用路径积分量子化方法研究了 Abel CS 理论与复标量耦合系统和 Abel Maxwell CS 理论与复标量耦合系统的任意子的性质.通过量子 Noether 定理得到系统角动量,经过详细计算发现,系统具有分数自旋的性质,这和对称的能量-动量张量得到的结果一致.同时得到 Abel Maxwell CS 耦合系统的量子能量和动量.

参 考 文 献

- 1 P. A. M. Dirac. Lecture on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University, 1964
- 2 P. G. Bergmann and J. Goldberg. Dirac Bracket Transformations in Phase Space. *Phys. Rev.* 1955, 98(2): 531~538
- 3 L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.* 1967, B25: 29~30
- 4 L. D. Faddeev. Feynman Integral for Singular Lagrangians. *Theor. Math. Phys.* 1970, 1: 1~13
- 5 P. Senjanovic. Path Integral Quantization of Field Theories with Second-Class Constraints. *Ann. Phys.* 1976, 100: 227
- 6 M. Henneaux. Hamiltonian Form of the Path Integral for Theories with a Gauge Freedom. *Phys. Rep.* 1985, 126(1): 1~66
- 7 L. D. Faddeev and R. Jackiw. Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems. *Phys. Rev. Lett.* 1988, 60(17): 1692~1694
- 8 J. Gomis, J. Paris and S. Samuel. Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization. *Phys. Rep.* 1995, 259: 1~145
- 9 D. M. Gitman and I. V. Tyutin. Quantization of Field with Constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- 10 李爱民,江金环,李子平. Dirac 猜想的一个反例. *物理学报.* 2002, 51(5): 943~945
- 11 Z. P. Li. Symmetry in Phase Space for a System with a Singular Higher-Order Lagrangian. *Phys. Rev.* 1994, E50: 876-887
- 12 N. Bobillo-Ares. Noether's Theorem in Discrete Classical Mechanics. *Amer. J. Phys.* 1988, 56(2): 174~177
- 13 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京工业大学出版社, 1993
- 14 Z. P. Li. Generalized Noether Theorem in Canonical Formalism for Field Theories and Their Applications. *Int. J. Theor. Phys.* 1993, 32(1): 201~215
- 15 李子平. 量子系统的整体正则对称性. *中国科学.* 1996, A26(7): 649~656
- 16 李子平. 奇异拉氏量系统的整体正则对称性质. *物理学报.* 1996, 45(10): 1601~1608
- 17 Z. P. Li. Symmetry in a Constrained Hamiltonian System with Singular Higher-Order Lagrangian. *J. Phys. A: math. Gen.* 1991, 24: 4261~4274
- 18 李子平. 非 Ahel Chern-Simons 理论中的量子守恒荷. *科学通报.* 1998, 43(22): 2396~2398
- 19 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质. 北京工业大学出版社, 1999
- 20 李子平. 约束系统的变换性质. *物理学报.* 1981, 30(12): 1659~1671
- 21 Z. P. Li and Z. W. Long. Quantum Symmetry for a System with a Singular Higher-Order Lagrangian, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1999, 32: 6391~6407
- 22 Z. P. Li and R. J. Li. Generalized Canonical Noether Theorem and Poincare-Cartan Invariant for a System with a Singular Higher-Order Lagrangian and an Application. *Comm. Theor. Phys.* 2001, 36(2):157~162

- 23 Z. P. Li and J. H. Jiang. Symmetries in Constrained Canonical Systems. Beijing: Science Press, 2002
- 24 A. M. Li, J. H. Jiang, Z. P. Li. Canonical Symmetry Properties of the Constrained Singular Generalized Mechanical System. Chinese Physics. 2003,12(5): 467~ 471
- 25 Z. P. Li. Quantum Noether Identities for Non-Local Transformations in Higher-Order Derivatives Theories. Eur. Phys. J. 2003, C30(2): 263~272
- 26 A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. Appl. Phys. Lett. 1973, 23: 142~144
- 27 L. F. Mollenaur, et al. Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers. Phys. Rev. Lett. 1980, 45(13): 1095~1098
- 28 J. R. Taylor. Optical Solitons-Theory and Experiment. New York: Cambridge, 1992,
- 29 A. Hasegawa and Y. Kodama. Solitons in Optical Communication. Oxford: Clarendon Press, 1995
- 30 陈陆君,梁昌洪. 孤子理论及其应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1997
- 31 G. P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics & Applications of Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, 2001
- 32 杨祥林. 光纤孤子通信理论基础. 北京: 国防工业出版社, 2000
- 33 C. R. Menyuk. Stability of Solitons in Birefringent Optical Fibers. I: Equal Propagation Amplitudes. Opt. Lett. 1987,12 (8): 614~616
- 34 V. V. Afanasyev, Y. S. Kivshar, V. V. Konotop and V. N. Serkin. Dynamics of Coupled Dark and Bright Optical Solitons. Opt. Lett. 1989, 14(15): 805~807
- 35 S. Trillo, S. Wabnitz, E. M. Wright and G. I. Stegeman. Optical Solitary Waves Induced by Cross-Phase Modulation. Opt. Lett. 1988, 13(10): 871~873
- 36 A. P. Sheppard and Y. S. Kivshar. Polarized Dark Solitons in Isotropic Kerr Media. Phys. Rev. 1997, E55(4): 4773~4782
- 37 钟卫平,黄辉. 双芯耦合光纤中高阶色散对光孤子相互作用的影响. 光学学报. 1995, 15(2): 202~205
- 38 颜家壬,梅玉平. 光纤孤子间的相互作用. 物理学报. 1996, 45(7): 1122~1129
- 39 G. D. Angelis, P. Franco and M. Romagnoli. Vector-Soliton Interaction Induced Depolarization. Opt. Commu. 1998, 157: 161~164
- 40 曹文华,刘颂豪,郭旗. 三阶色散影响下皮秒孤子间的相互作用. 光学学报. 1999, 19(6): 739~745
- 41 S. Wabnitz and F. Neddarn. Pulse Interactions and Collisions in Asymmetric Higher-Order Dispersion Managed fiber link. Opt. Commu. 2000, 183: 395~405
- 42 田慧平,李仲豪,王钢,周国生. 飞秒光脉冲间相互作用的数值研究. 光学学报. 2001, 21(5): 513~517
- 43 B. F. Feng and A. M. Boris. Antisymmetric Solitons and Their Interactions in Strongly Dispersion-Managed Fiber-Optic Systems. arXiv:nlin.PS/0310031,
- 44 W. Zhao and E. Bourkoff. Interactions between dark solitons. Opt.Lett. 1989, 14(24): 1371~1373
- 45 A. M. Weiner. Experimental Observation of the Fundamental Dark Soliton in Optical Fibers.

- Phys. Rev. Lett. 1988, 61(21): 2445~2448
- 46 W. Zhao and E. Bourkoff. Propagation Properties of Dark Solitons. Opt.Lett. 1989, 14(13): 703~705
- 47 J. P. Hamaide, P. Emplit and M. Haelterman. Dark-Soliton Jitter in Amplified Optical Transmission Systems. Opt. Lett. 1991, 16(20): 1578~1580
- 48 Y. S. Kivshar and S. K. Turitsyn. Vector Dark Solitons. Opt. Lett. 1993, 18(5): 337~339
- 49 王涛,田慧平,李仲豪,周国生. 飞秒暗孤子间相互作用的数值研究. 光学学报. 2003, 23(6): 680~683
- 50 R. Y. Chiao, E. Garmire and H. Townes. Self-Trapping of Optical Beams. Phys. Rev. Lett. 1964, 13(15): 479~482
- 51 M. Segev, B. Crosignani, et al. Spatial Solitons in Photorefractive Media. Phys. Rev. Lett. 1992, 68(7): 923~926
- 52 G. C. Duree, J. L. Shultz, et al. Observation of Self-Trapping of an Optical Beam Due to the Photorefractive Effect. Phys. Rev. Lett. 1993, 71(4): 533~536
- 53 侯春风,袁保红,孙东秀,许克彬. 非相干耦合屏蔽光伏孤子对. 物理学报. 2000, 49(10): 1969~1972
- 54 侯春风,李师群,孙东秀. 光折变介质中的空间孤子. 物理学进展. 2001, 21(2): 238~253
- 55 刘劲松,张都应. 损耗对屏蔽光伏空间孤子演化特性的影响. 物理学报. 2001, 50(5): 880~885
- 56 王晓生,余卫龙. 部分空间非相干光光伏空间孤子. 物理学报. 2002, 51(3): 573~577
- 57 郭儒,李乙钢,凌振芳,周宗文,刘思敏. 扩散对光折变空间孤子的影响. 中国激光. 2002, 29(8): 714~716
- 58 王晓生,余卫龙. 背景光光伏效应对屏蔽一光伏空间孤子的影响. 物理学报. 2003, 52(10): 377~382
- 59 M. Shih and M. Segev. Incoherent Collisions Between Two-Dimensional Bright Steady-State Photorefractive Spatial Screening Solitons. Opt.Lett. 1996, 21(19): 1538~1540
- 60 H. X. Meng and G. Salamo, M. Shih and M. Segev. Coherent Collisions of Photorefractive Solitons. Opt.Lett. 1997, 22(7): 448~450
- 61 G. S. Garcia-Quirino, et al. Observation of Interaction Forces Between One-Dimensional Spatial Solitons in Photorefractive Crystals. Opt. Lett. 1997, 22(3): 154~156
- 62 W. Krolikowski, M. Saffman, B. Luther-Davies and C. Denz. Anomalous Interaction of Spatial Solitons in Photorefractive Media. Phys. Rev. Lett. 1998, 80(15): 3240~3243
- 63 O. Cohen, R. Uzdin, T. Carmon, et al. Collisions Between Optical Spatial Solitons Propagating in Opposite Directions. Phys. Rev. Lett. 2002, 89(13): 33901~4
- 64 M. J. Potasek and B. Yurk, Squeezed-Light Generation in a Medium Governed by the Nonlinear Schrödinger Equation. Phys. Rev. 1987, A35(9): 3974~3977
- 65 S. J. Carter, et al. Squeezing of Quantum Solitons. Phys. Rev. Lett. 1987, 58(18): 1841~1844
- 66 M. J. Potasek and B. Yurke. Dissipative Effects on Squeezed Light Generated in Systems Governed by the Nonlinear Schrödinger Equation. Phys. Rev. 1988, A38(3): 1335~1348
- 67 Y. Lai and H. A. Haus. Quantum Theory of Solitons in Optical Fibers. I. Time-Dependent

- Hartree Approximation. *Phys. Rev.* 1989, A40(2): 844~853
- 68 Y. Lai and H. A. Haus. Quantum Theory of Solitons in Optical Fibers. II. Exact solution. *Phys. Rev.* 1989, A40(2): 584~866
- 69 H. A. Haus and Y. Lai. Quantum Theory of Soliton Squeezing: a Linearized Approach. *J. Opt. Soc. Am.* 1990, B7(3): 386~392
- 70 M. Rosenbluh and R. M. Shelby. Squeezed Optical Solitons. *Phys. Rev. Lett.* 1991, 66(2): 153~156
- 71 M. W. Ewan. Quantum Theory of Soliton Propagation in an Optical Fiber Using Hartree Approximation. *Phys. Rev.* 1991, A43(7): 3836~3844
- 72 F. Singer, M. J. Potasek and M. C. Teich. Quantum Theory of Femtosecond Solitons in Optical Fibers. *Quantum Opt.* 1992, 4: 157~161
- 73 Y. Lai. Quantum Theory of Soliton Propagation: a Unified Approach Based on the Linearization Approximation. *J. Opt. Soc. Am.* 1993, B10(3): 475~484
- 74 F. X. Kartner and H. A. Haus. Quantum-Mechanical Stability of Solitons and the Correspondence Principle. *Phys. Rev.* 1993, A48(3): 2361~2369
- 75 温扬敬,冯郁,付传鸿. 光纤孤子传输的量子处理. *物理学报.* 1993, 42(12): 1942~1949
- 76 L. M. Duan and G. C. Guo. Definition and Construction of the Quantum Soliton States in Optical Fibers. *Phys. Rev.* 1995, A52(1): 874~877
- 77 S. S. Yu and Y. Lai. Impacts of the Self-Raman Effect and Third-Order Dispersion on Pulse-Squeezed State Generation Using Optical Fibers. *J. Opt. Soc. Am.* 1995, B12(12): 2340~2346
- 78 K. Sundar. Highly Amplitude-Squeezed States of the Radiation Field. *Phys. Rev. Lett.* 1995, 75(11): 2116~2119
- 79 Y. Lai and S. S. Yu. General Quantum Theory of Nonlinear Optical-Pulse Propagation. *Phys. Rev.* 1995, A51(1): 817~829
- 80 S. R. Friberg, S. Machida, et al. Observation of Optical Soliton Photon-Number Squeezing. *Phys. Rev. Lett.* 1996, 77(18): 3775~3778
- 81 段路明,郭光灿. 量子孤子的噪声极限及准相干态. *中国科学.* 1996, A26(11): 1024~1030
- 82 温扬敬,杨祥林,张明德. 光纤中飞秒孤子传输的量子理论. *物理学报.* 1996, 45(3): 394~402
- 83 李建庆,杨伯君,徐大雄. 初始振幅和波形对量子光孤子的影响. *量子光学学报.* 1997, 3(2): 101~108
- 84 李建庆,杨伯君,徐大雄等. 初始啁啾对光孤子压缩态的影响. *光学学报.* 1998, 18(5): 573~578
- 85 李建庆,杨伯君,徐大雄等. 双孤子压缩态的特性. *光子学报.* 1998, 27(1): 7~12
- 86 陆宏,杨昆等. 偶边界条件下的热致暗空间光孤子. *物理学报.* 1998, 47(3): 428~431
- 87 S. Schmitt, J. Ficker, et al. Photon-Number Squeezed Solitons from an Asymmetric Fiber-Optic Sagnac Interferometer. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81(12): 2446~2449
- 88 D. Krylov and K. Bergman. Amplitude-Squeezed Solitons from an Asymmetric Fiber Interferometer. *Opt. Lett.* 1998, 23(17): 1390~1392

-
- 89 M. J. Werner, Quantum Soliton Generation Using an Interferometer. *Phys. Rev. Lett.* 1998, 81 (19): 4132~4135
 - 90 D. Levandovsky, M. Vasilyev and P. Kumar. Soliton Squeezing in a Highly Transmissive Nonlinear Optical Loop Mirror. *Opt. Lett.* 1999, 24(2): 89~91
 - 91 K. Dmitriy, B. Keren and Y. Lai. Photon-Number Squeezing in the Normal-Dispersion Regime. *Opt. Lett.* 1999, 24(11): 774~776
 - 92 A. B. Matsko and V. V. Kozlov. Second-Quantized Models for Optical Solitons in Nonlinear Fibers: Equal-Time Versus Equal-Space Commutation Relations. *Phys. Rev.* 2000, 62(3): 033811~12
 - 93 M. Enderle, et al. Excitations of the Field-Induced Quantum Soliton Lattice in CuGeO_3 . *Phys. Rev. Lett.* 2001, 87(17): 177203~4
 - 94 于丽,赵玉芳,杨伯君. 有损耗存在时光孤子压缩态传输的量子场方程. *量子光学学报*. 2002, 8(1): 17~19
 - 95 R. Lee and Y. Lai. Quantum Theory of Fiber Bragg Grating Solitons. arXiv: quant-ph/0402033
 - 96 R. Jackiw and C. Rabbi. Spin From Isospin in a Gauge Theory, *Phys. Rev. Lett.* 1976, 36(19): 1116~1119
 - 97 J. M. Leinvas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *IL Nuovo Cimento* 1977, B37: 1~23
 - 98 F. Wilczek. Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles. *Phys. Rev. Lett.* 1982, 49(14): 957~959
 - 99 R. B. Laughlin. Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, 50(18): 1395~1398
 - 100 P. W. Anderson. Resonating Valence Bond State in $\text{La}_{1/2}\text{CuO}_{3/4}$ and Superconductivity, *Science*, 1987, 235: 1196~1198
 - 101 R. B. Laughlin. The Relationship between High Temperature Superconductivity and the Fractional Quantum Hall Effect, *Science*, 1988, 242: 525~533
 - 102 M. Inui, S. Donachi and M. Gabay. Doping Dependence of Antiferromagnetic Correlations in High-Temperature Superconductors. *Phys. Rev.* 1988, B38(10): 6631~6635
 - 103 C. R. Hagen. Rotational Anomalies without Anyons. *Phys. Rev.* 1985, D31(8): 2135~2136
 - 104 D. Karabali and G. Murthy. Possible Phase Transition of Fractional Spin in the $O(3)$ σ model. *Phys. Rev.* 1987, D35(4): 1522~1524
 - 105 G. W. Semenoff. Canonical Quantum Field Theory with Exotic Statistics. *Phys. Rev. Lett.* 1988, 61(5): 517~519
 - 106 G. W. Semenoff and P. Sodano. Exotic Spin and Statistics in (2+1)-Dimensional Canonical Quantum Field Theory. *Nucl. Phys.* 1989, B328: 753~776
 - 107 M. Burgess and D. J. Toms. Fractional Statistics and the Dynamical Gauge Symmetry of Yang-Mills-Chern-Simons Theory. *Phys. Lett.* 1990, B252(4): 596~600
 - 108 朱沛臣. 任意子. *物理学进展*. 1991, 11(4): 483~513
 - 109 J. Stern. Topological Action at a Distance and the Magnetic Moment of Point-Like Anyons. *Phys. Lett.* 1991, B256: 119~123

- 110 I. Roberto and L. Kurt. Anyon Quantum Mechanics and Chern-Simons Theory. *Phys. Rep.* 1992, 213(4): 179~269
- 111 F. Stefano. Quantum Mechanics and Field Theory with Fractional Spin and Statistics. *Rev. Mod. Phys.* 1992, 64(1): 193~236
- 112 W. T. Kim. BRST formulation of Chern-Simons Gauge Theory Coupled to Matter Fields. *Phys. Rev.* 1992, D46(6): 2730~2733
- 113 A. Chatterjee and V. V. Sreedhar. Perturbed Chern-Simons Theory, Fractional Statistics and Yang-Baxter Algebra. *Phys. Lett.* 1992, B279: 69~74
- 114 J. L. Cortes, J. Gamboa and L. Velazquez. Electromagnetic Interaction of Anyons. *Phys. Lett.* 1992, B286: 105~108
- 115 R. Banerjee. Hamiltonian Embedding of a Second-Class System with a Chern-Simons Term. *Phys. Rev.* 1993, D48(12): R5467~R5470
- 116 R. Banerjee. Gauge-Independent Analysis of Dynamical Systems with Chern-Simons Term. *Phys. Rev.* 1993, D48(6): 2905~2915
- 117 J. K. Kim, W. T. Kim and H. Shin. Gauge-Invariant Anyon Operators and Spin-Statistic Relation in Chern-Simons Matter Field Theory. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994, 27: 6067-6076.
- 118 W. T. Kim and C. Lee. Schrödinger Fields on the Plane with Non-Abelian Chern-Simons Interactions. *Phys. Rev.* 1994, D49: 6829
- 119 R. Banerjee and B. Chakraborty. Fractional Spin and Galilean Symmetry in a Chern-Simons Matter System. *Phys. Rev.* 1994, D49(10): 5431~5437.
- 120 B. Chakraborty. Relativistic Particles Coupled to Chern-Simons Term. *Ann. Phys.* 1995, 244: 312~339
- 121 M. E. Carrington and G. Kunstatter. Maxwell-Chern-Simons Scalar QED with Magnetic Moment Interaction. *Phys. Rev.* 1995, D51(4): 1903~1905
- 122 B. Chakraborty and A. S. Majumdar. On Galilean Covariance in a Nonrelativistic Model Involving a Chern-Simons Term. *Ann. Phys.* 1996, 250: 112~144
- 123 D. K. Hong and J. Y. Kim. Anomalous Magnetic Moment of Anyons in Three Dimensional CP^{N-1} Model. *Phys. Lett.* 1996, B383: 327~332
- 124 V. E. R. Lemes, C. A. Linhares, S. P. Sorella and L. C. Q. Vilar. Large-Mass Behaviour of Loop Variables in Abelian Maxwell-Chern-Simons theory. *J. Phys. A:Math. Gen.* 1999, 32: 2469~2479
- 125 F. A. S. Nobre and C. A. S. Almeida. Pauli's Term and Fractional Spin. *Phys. Lett.* 1999, B455: 213~216
- 126 L. R. U. Manssur. Canonical Quantization of Chern-Simons on the Light-Front. *Phys. Lett.* 2000, B480: 229~236
- 127 R. C. Paschoal and N. J. A. Helayel. Non-minimal Maxwell-Chern-Simons Theory and the Composite Fermion Model. *Phys. Lett.* 2003, A313: 412~417
- 128 C. Decem and P. L. Chu. Soliton Interaction in the Presence of Loss and Periodic Amplification in Optical Fibers. *Opt. Lett.* 1986, 11(3):174~176
- 129 T. Georges and F. Favre. Influence of Soliton Interaction on Amplifier Noise-Induced Jitter:

- a First-Order Analytical Solution. *Opt. Lett.* 1991, 16(21): 1656~1658.
- 130 M. Haelterman, A. P. Sheppard and A. W. Snyder. Bimodel Counterpropagating Spatial Solitary-Waves. *Opt. Commu.* 1993, 103: 145~152
- 131 江金环, 李子平. 基于全息聚焦机制空间光孤子的相互作用势函数. *物理学报*. 2004, 53(9):
- 132 H. P. Yuan. Two-Photon Coherent States of the Radiation Field. *Phys. Rev.* 1976, A13(6): 2226~2243
- 133 R. E. Slusher, et al. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity. *Phys. Rev. Lett.* 1985, 55(22): 2409~2412
- 134 杨伯君. 量子光学基础. 北京邮电大学出版社, 1996
- 135 K. Sunder. Highly Amplitude-Squeezed States of the Radiation Field. *Phys. Rev. Lett.* 1995, 75(11): 2116~2119
- 136 G. Kaniadakis and A. M. Scarfone, A Maxwell-Chern-Simons Model for a Quantum System Obeying an Exclusion-Inclusion Principle. *Physica*, 2001, A291: 423~438
- 137 G. J. A. Arcia and J. D. Vergara. BRST-BFV Quantization and the Schwinger Action Principle. *Inter. J. Mod. Phys.* 1996, 11A: 2698~2673
- 138 江金环, 李爱民, 李子平. 光孤子约束系统的量子场论. *高能物理与核物理*. 2003, 27(6): 489~492
- 139 Jinhuan Jiang, Yun Liu, Ziping Li. Symmetries in the Maxwell-Chern-Simons Theory Coupled to Matter fields. *Chinese Physics*. 2004, 13(2): 153~158
- 140 Z. P. Li. Quantal Canonical Symmetry for a Constrained Hamiltonian System. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1995, 28: 5931~5941
- 141 Z. P. Li. Canonical Symmetry of a Constrained Hamilton System and Canonical Ward Identities, *Int. J. Theor. Phys.* 1995, 34(4): 523~543
- 142 Z. P. Li. Global Canonical Symmetry in Phase Space Path Integral for a System with a Singular Lagrangian. *Euro. Phys. Lett.* 1996, 34(5): 325~329
- 143 Z. P. Li. Canonical Global Symmetry in the Functional Integral Formalism of the System and Conservation Laws. *Zeitschrift Für Physik*. 1997, C76(2): 181~189
- 144 Z. P. Li. Quantal Conserved Laws in Non-Abelian Higher-Derivatives Chern-Simons Theories. *Euro. Phys. Lett.* 1997, 39(6): 599~604

附录: 用留数定理计算积分

用留数定理计算如下积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 y} \cdot \frac{1}{\cosh^2 [by - a]} dy \quad (1-1)$$

在复平面 $z = x + iy$ 中定义函数

$$f(z) = \frac{z}{\cosh^2 z \cosh^2 (bz - a)} \quad (1-2)$$

当 $b \approx 1$ 时, 其分母是具有虚周期 $i\pi$ 的周期函数. 选取一无限长的矩形回路 c , 它由实轴的无限长直线 $y = \pi$ 及平行于虚轴的两无限远线段 $x = \pm\infty$ 所围成. 考虑回路积分 $\oint_C f(z) dz$, 由于被积函数 $f(z)$ 随 $|x|$ 的增长而指数地衰减, 故两线段 $x = \pm\infty$ 对积分无贡献, 因此

$$\begin{aligned} & \oint_C f(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh^2 x \cosh^2 (bx - a)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + i\pi)}{\cosh^2 (x + i\pi) \cosh^2 [b(x + i\pi) - a]} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh^2 x \cosh^2 (bx - a)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh^2 (x + i\pi) \cosh^2 [b(x + i\pi) - a]} dx \\ & \quad - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 (x + i\pi) \cosh^2 [b(x + i\pi) - a]} dx \\ &= -i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 (x + i\pi) \cosh^2 [b(x + i\pi) - a]} dx = -\pi iI \end{aligned} \quad (1-3)$$

另一方面, 在回路内 $f(z)$ 除两个二阶极点 $z_1 = \frac{\pi}{2}i$ 与 $z_2 = (\frac{\pi}{2}i + a)/b$ 外处处解析, 故按留数定理

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] \quad (1-4)$$

由(1-3)和(1-4)式, 得

$$I = -2[\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] \quad (1-5)$$

两留数可用标准方法求出

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} [(z - z_1)^2 f(z)] \\ &= -\frac{2}{\cosh^2(b \frac{\pi}{2} i - a)} \left\{ 1 - 2(\frac{\pi}{2} i) b \operatorname{th}(b \frac{\pi}{2} i - a) \right\} \end{aligned} \quad (1-6)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} [(z - z_2)^2 f(z)] \\ &= -\frac{1}{\cosh^2[(\frac{\pi}{2} i + a)/b]} \left\{ 1 - 2(\frac{\pi}{2} i + a) \frac{\operatorname{tanh}[(\frac{\pi}{2} i + a)/b]}{b} \right\} \end{aligned} \quad (1-7)$$

把(1-6)和(1-7)代入(1-5)式,并在 $b \approx 1$ 时简化得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 y} \cdot \frac{1}{\cosh^2[by - a]} dy = \frac{4a \cosh a}{b \sinh^3 a} - \frac{4}{\sinh^2 a} \quad (1-8)$$

攻读博士学位期间发表的学术论文

- 1 Jinhuan Jiang, Yun Liu, Ziping Li. Symmetries in the Maxwell-Chern-Simons Theory Coupled to Matter fields. *Chinese Physics*. 2004, 13(2):153~158
- 2 江金环,李爱民,李子平.光孤子约束系统的量子场论. *高能物理与核物理*. 2003,27(6): 489~492
- 3 江金环,李爱民,李子平.量子水平的 Noether 定理. *长沙大学学报*. 2003,17(2): 1~3
- 4 Aimin Li, Jinhuan Jiang, Ziping Li. Canonical Symmetry Properties of the Constrained Singular Generalized Mechanical System. *Chinese Physics*. 2003,12(5): 467~ 471
- 5 李爱民,江金环,李子平. Dirac 猜想的一个反例. *物理学报*. 2002, 51(5): 943~945
- 6 江金环,李子平.基于全息聚焦机制空间光孤子的相互作用势函数. *物理学报*. 已录用 2004, 53(9)
- 7 江金环,王永龙,李子平.稳态光折变空间孤子传输的量子理论. *物理学报*. 已录用 2004, 53(12)

致 谢

在此,感谢李子平教授和俞宽新教授在生活和学习上给予的关心和指导,本文自始至终是在李子平教授的悉心指导下完成的.值此论文完成之际,学生谨向导师致以最诚挚的谢意!感谢校青年基金项目对本课题的支持.感谢张莹等研究生在其它方面所给予我的帮助,最后感谢我爱人对我的理解和支持.

江 金 环

2004年4月