





Central Catadioptric Imaging System

Modeling, Calibration and Application



Author's signature: Lei Zhang

Supervisor's signature: G. Hui

External Reviewers: Prof. Hangen He National Univ. Defense Technology

Prof. Jingyu Yang Nanjing Univ. Science and Technology

Prof. Weikang Gu Zhejiang University

Anonymous Reviewer

Anonymous Reviewer

Examining Committee Chairperson:

Prof. Miaoliang Zhu Zhejiang University

Examining Committee Members:

Prof. Weikang Gu Zhejiang University

Prof. Lu Yu Zhejiang University

Prof. Zhaojing Zhou China Jiliang University

Prof. Jilin Liu Zhejiang University

Date of oral defence: August 31, 2010



## 浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：张雷

签字日期：2010 年 9 月 2 日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：张雷

导师签名：刘宗培

签字日期：2010 年 9 月 2 日

签字日期：2010 年 9 月 2 日



## 致谢

五年的博士生涯即将走向终点,感谢祖国的培养、父母家人多年来无私支持、老师的辛勤教导和同窗好友的帮助。五年的博士生生活一晃而过,回首走过的岁月,心中倍感充实,论文即将完成之日,感慨良多。

由衷地感谢敬爱的导师刘济林教授。刘教授渊博知识、敏捷思维、高屋建瓴的见解、对学科发展和研究方向的敏锐洞察力、严谨的治学态度和对我的悉心指导,锻炼了我独立从事科研工作的能力,培养了我求实求是的观念,带领我步入科学研究的殿堂。我在学术上每一点进步都离不开刘教授的辛勤汗水。刘教授的帮助和指导让我终身受益。

非常感谢实验室的杜歆、龚小谨、项志宇、李培宏、马洪庆和谢立老师对我在科研和学习的帮助和指导,同时也感谢曾经在实验室一同工作生活的陈国斌和周文晖老师,帮助我了解了许多与科研相关的知识。

十分感谢东京索尼公司的多井坚一郎、Steven Gutman 博士和芦原隆之课长。在东京交流学习的半年时间里,感谢他们对我研究工作的帮助指导和生活上的关照。

感谢实验室的众位年轻有为、才华横溢的师兄弟姐妹们。他们中有杨力、朱株、沈晔湖、雷杰、丁菁汀、王心焕、丁鑫、杨缤、徐进、王炜强、杨鹏、沈敏一、王延长、陈乘、张飞、王迅、梁文锋、韩从道、李永佳、许士芳、陈曦、王选贺、陈建娟、左文辉、马丽莎、孙波、姚拓中、潘华东、叶建洪、王其聪、武二永、谢斌、张莉、徐彦泓、彭勃、何志伟、赵虹、余长宏、于海滨、郭锐、陈建乐、赖宏萍、杨文明、孙宇、吕强、周围等,他们为我的求学生涯增添了许多温馨和乐趣。

感谢我的室友吴可镛、吴晓凡和王政,感谢他们平日里对我的关心和照顾,给我带来许许多多愉快和欢乐,同时也感谢他们帮助我学习了许多计算机专业的相关知识。也感谢所有在浙江大学 BBS 上认识的,给予我帮助的朋友们。

再次感谢所有关爱、关怀、关心过我的亲人、老师和朋友!

张雷

2010年4月于求是园



## 摘要

随着人们对环境的感知和建模这一研究领域的兴趣日益增长,传统相机和摄像机由于其视场有限,越来越不能满足人们的需求。传统相机的受到视场的限制,在相机运动的过程中,相机的姿态决定了能够观察到的物体。具有大视场的成像设备,比如鱼眼镜头和全景镜头等,克服了以上的问题,满足了人们对视场的需求。由于全景相机能够对  $360^\circ$  场景同时成像,因此,相机关于对称轴的旋转不会使得场景造成很大的变化。近年来,这些设备被应用到了视频监控、电视电话会议、场景重建、机器人导航以及虚拟现实等方面。全景视觉逐渐成为计算机视觉领域一个重要的研究分支。

在场景重建等应用场合中,需要一套完整的几何模型估计相机的刚体运动。在估计相机自身运动时,图像上的点首先被转化到几何模型中。这时,成像系统中相机的内参和其他相关参数则是转化的前提条件。因此,全景相机的标定成为相机运动轨迹估计等应用的前提。由于全景相机投影过程的非线性特点,针对传统相机的标定算法不适用于全景相机,而现有的全景相机标定方法操作复杂,同时对全景相机的参数估计不是非常稳定。因此,本文针对单视点折反射成像设备,以相机运动估计和场景重建为应用背景,融合已有的模型,设计出新的标定设备,提出了新的标定理论和方法,并以单目相机场景重建的结果验证标定的准确性。

单视点全景折反射成像系统由于其满足单视点约束,比较适合建立数学模型。近年来,研究人员提出了一系列的模型,如一般相机模型、泰勒级数模型、球面统一模型等。本文回顾了近年来提出的几种主要模型,重点针对球面统一模型,深入讨论了点和直线在图像上的性质,并提出了一些标定和估计相机运动轨迹的方法。

在球面统一模型中,点到图像平面的投影被划分为若干个步骤。其中球面到图像平面的投影是与传统相机的透视投影相同的线性过程,研究人员为了方便分析将这一线性过程划分为若干个子过程,即投影到若干个平面的中间过程。本文融合了直线在无穷远平面、度量平面和图像平面上的投影的过程,在此基础上,研究了一条直线和一组直线的在三个平面上的投影性质,进而研究了平行线和共点线的投影性质。



在确定了几何模型之后,相机标定具备了研究基础。标定的准确与否影响到摄像机本身的运动轨迹与环境的感知的成功与否。当镜面参数已知,特别当镜面是抛物面镜时,标定的过程相对比较容易收敛;当镜面参数未知时,则需要同时估计镜面的参数和摄像机的内参,这使得标定的过程变得比较困难和不稳定。本文利用平行线在全景图像上的性质,在镜面参数已知的前提下,提出了一种单图标定方法。而在镜面参数未知的情况下,提出了一种新的共点线标定模板,将共点约束引入到曲线拟合的过程中,提高了拟合的鲁棒性,使得点和直线的投影的非线性问题能够分解成为若干个线性子问题,同时估计出相机内参和镜面参数。

针对单目传统相机的场景和运动同时重建,有一套完整的几何理论作为研究基础,即对极几何。然而,单视点折反射成像系统的非线性特点,传统相机的对极几何约束不适用于全景折反射成像系统。本文将传统的计算基本矩阵的八点法从二维的图像平面拓展到单视点的三维多面体的情况,使得八点法能够应用到多面体投影。然后,将球面投影转化为立方体投影,即满足单一视点的多个传统相机的投影模型,从全景图像序列中同时重建场景和相机的运动轨迹。为了提高重建的鲁棒性,本文将图像序列划分为若干段,初始化相机运动轨迹和三维场景,使用光束法平差局部优化初始值。当新的图像帧读入一定数量后,利用已有的场景和运动轨迹,迭代估计新的窗口内的运动轨迹,而后更新三维场景。本文提出的方法,使用针对传统相机的线性方法,如8点法和三角化,成功地解决了非线性的折反射成像系统的运动和场景重建问题。

**关键词:** 单视点、折反射成像系统、平行线、共点线、标定、相机运动和场景同时重建

## Abstract

Recently, modeling and perception of large range of environment is a prevailing proposition. The traditional cameras are able to provide a limited field of view, which cannot meet the satisfaction of researchers. In the ego-motion estimation from video or image sequence, when the translation lies outside the field of view of the camera, ambiguities of translation and rotation between frames may arise. As a special imaging system for environment perception, panoramic camera overcomes the problem of uncertainty of the estimation, caused by the limited field of view in the application with traditional cameras. Panoramic camera makes the estimation of ego-motion not be affected by the motion direction very much, thanks to the 360 degree field of view. Applications that benefit from imaging equipment possessing wide field of view, such as fisheye camera and panoramic camera, include video surveillance, teleconferencing, 3D reconstruction, robot navigation and virtual reality. Panoramic vision becomes an increasingly attractive sub-area in computer vision.

As all known that geometric model is a preliminary for the rigid motion estimation in the applications such as 3D reconstruction. While calibration is a prerequisite in the applications related to the estimation of rigid motion, where it is an indispensable procedure that to convert the point on image plane to the geometric model. Since calibration approaches for traditional camera is not suitable for panoramic camera, and the existing calibration approaches for panoramic camera is complicated and unstable. Therefore, this paper focuses on the central catadioptric system with a single view point. In attempt to modeling, calibration and monocular 3D reconstruction, we merge the existing models, and design a novel calibration rig. Based on theoretical propositions, a new approach of calibration with concurrent lines is proposed. This approach is validated by synthetic data as well as real image, and further tested by 3D reconstruction from image sequence acquired by central catadioptric camera.

Thanks to the single view point, the mathematical model for central catadioptric is well established. Many models are proposed, such as the general imaging model, the

Taylor series model and the unifying model. On the basis of unifying model, the closed-form expressions of point and line are studied and algorithms for calibration as well as structure and ego-motion estimation are proposed in the following chapters.

There are several steps of the projection from a 3D point to an image point in the unifying model. The projection of line in each step is prevalingly studied. This paper combines the projection of line on infinite plane, metric plane and image plane. The study of one line projection is extended to a set of lines, then parallel and concurrent lines where a set of lines have a common point are introduced.

Calibration is a preliminary requirement of 3D reconstruction, video surveillance, ego-motion estimation and so on. The results of these applications highly depends the accuracy of calibration. In central catadioptric imaging system, the parameters related to mirror type is of significance in calibration. The calibration procedure may easily converge to a desirable result, when the type of the mirror is a priori, especially when the mirror is parabolic. However, parameters related to mirror and the intrinsic parameters should be estimated simultaneously when the mirror type is not a priori. The uncertainty of the mirror type parameters may ruin the calibration algorithm or makes it unstable. As we know that, parallel lines have a common point at infinity while concurrent lines have a finite common point. A calibration approach with a single image of chessboard is proposed, when the mirror type is known. A calibration approach using concurrent lines with concurrent lines pattern is proposed when it is unknown. The constraint on concurrent lines is introduced into calibration in order to robustify the estimation of conic fitting. Moreover, concurrent lines pattern provides linear equation for solving the projection of point and line, so that these nonlinear problem could be replace by several linear sub-problems, and the intrinsic parameters and mirror parameter are estimated simultaneously.

There are adequate geometric theorems as known as epipolar constraint between frames for structure from motion (SFM) or simultaneously localization and mapping (SLAM) with monocular conventional camera. Taking the nonlinearity of the projection in catadioptric camera into account, the epipolar constraint for conventional camera is not suitable for catadioptric camera. In order to adopt epipolar geometry, the

projection of sphere is mapped to cube so as to convert the catadioptric projection to a projection of multiple traditional cameras with a single common view point. The 8 point algorithm for calculating fundamental or essential matrix is extended from 2D to 3D consisting of multiple image planes. Therefore, epipolar geometry can be exploited in monocular reconstruction from panoramic image sequence. In order to improve the robustness of reconstruction, camera trajectory and 3D structure are estimated and locally optimized in a given number of keyframes. When a number of new frames are imported, the motion of new frames and structure are calculated on the basis of existing motion and structure iteratively while the outliers are removed, and finally optimized by bundle adjustment. The proposed approach successfully solves the non-linear catadioptric system by linear algorithm such as 8-point algorithm and triangulation that are suitable for traditional camera.

**Keyword:** Single view point, Central catadioptric imaging system, Parallel lines, Concurrent lines, Calibration, Structure from motion

## 目次

致谢.....	I
摘要.....	III
Abstract.....	V
目次.....	VIII
1. 绪论.....	1
1.1. 论文的研究背景和意义.....	1
1.2. 全景成像系统的发展.....	3
1.2.1. 单视点折反射相机的研究.....	3
1.2.2. 非单视点折反射相机的研究.....	5
1.3. 单视点折反射系统的建模与研究.....	6
1.3.1. 单视点折反射系统的建模.....	7
1.3.2. 单视点折反射系统的标定.....	8
1.3.3. 单视点折反射系统的三维重建.....	11
1.4. 本文的研究目的和内容安排.....	13
1.5. 本文的符号定义.....	16
2. 单视点折反射系统的统一模型.....	17
2.1. 单视点折反射系统.....	17
2.2. 球面统一模型.....	20
2.2.1 球面投影和折反射投影的等价性.....	20
2.2.2 球面统一模型的投影过程.....	22
2.3. 球面统一模型投影过程的划分.....	25
2.4. 小结.....	27
3. 直线在单视点折反射系统中的投影.....	28
3.1. 一条直线在三个平面上的投影.....	28
3.1.1. 直线投影的特殊情况.....	31
3.1.2. 二次曲线的几何特征.....	32
3.1.3. 直线在投影过程中的几何不变量.....	34

3.2. 一组直线在三个平面上的投影.....	37
3.2.1. 平面上一组直线的相互关系.....	38
3.2.2. 图像平面上点、直线和二次曲线之间的约束.....	39
3.2.3. 度量平面上点、直线和二次曲线之间的约束.....	43
3.3. 小结.....	44
4. 使用直线标定单视点折反射系统.....	45
4.1. 二次曲线的交点.....	45
4.1.1. 直线与二次曲线的交点.....	46
4.1.2. 二次曲线与二次曲线的交点.....	48
4.2. 从离散点拟合二次曲线.....	50
4.2.1. 归一化最小二乘算法：基于几何距离.....	51
4.2.2. Bookstein 算法：基于几何距离和二次曲面约束.....	52
4.2.3. 近似均方算法：基于近似均方距离.....	53
4.2.4. 统计偏差算法：基于统计距离.....	53
4.2.5. 直接最小二乘算法：基于几何距离和二次约束.....	54
4.2.6. 梯度权重最小二乘算法：基于梯度权重.....	55
4.2.7. 算法性能比较.....	55
4.3. 单视点折反射系统的单图标定方法.....	60
4.3.1. 相机参数的初始化.....	61
4.3.2. 平行线在图像上的约束.....	62
4.3.3. 实验结果.....	65
4.3.3.1. 仿真数据.....	67
4.3.3.2. 实际图像.....	67
4.4. 单视点折反射系统的共点线标定法.....	70
4.4.1. 共点线模板的引入.....	70
4.4.2. 相机参数的初始化.....	71
4.4.3. 共点线标定算法.....	74
4.4.4. 实验结果.....	76
4.4.4.1. 仿真数据.....	76

4.4.4.2. 实际图像.....	78
4.5. 小结.....	80
5. 全景图像的场景与运动同时重建.....	82
5.1. 传统相机的运动与场景同时重建.....	82
5.1.1. 传统相机的对极几何.....	82
5.1.2. 传统相机的运动轨迹估计.....	84
5.1.2.1. 8点法.....	85
5.1.2.2. 7点法.....	85
5.1.2.3. 5点法.....	86
5.1.3. 传统相机的场景重建.....	86
5.1.3.1. 齐次三角化.....	86
5.1.3.2. 中点三角化.....	87
5.1.3.3. 两视角最优三角化.....	89
5.2. 从球面投影到多平面投影.....	90
5.2.1. 扩展的8点法.....	90
5.2.2. 从折反射成像系统到单视点多相机系统.....	91
5.3. 折反射系统的运动与场景同时重建.....	93
5.3.1. 特征点匹配和关键帧的选取.....	94
5.3.2. 相机运动和场景重建.....	95
5.3.3. 重尾分布的光束法平差.....	96
5.4. 实验结果.....	98
5.5. 小结.....	102
6. 总结和展望.....	103
6.1 本文总结.....	103
6.2 工作展望.....	104
参考文献.....	105

## 1. 绪论

### 1.1. 论文的研究背景和意义

场景和运动轨迹同时重建一直以来是计算机视觉领域非常重要的一个研究课题。场景和运动轨迹同时重建的目的在于估计场景内物体的形状和相机的运动轨迹的虚拟模型。虚拟模型可以用于机器人的路径规划,或者被电影制作人员用于电影制作过程中的场景重建,或者被建筑师用于可视化新的设计,或者被考古学家用于记录挖掘的过程,或者被房地产商用于向客户展示住宅的内部结构。在典型的应用中,用于重建的图像是由摄像机或者照相机采集,摄像机或者照相机的位置和内部参数并非预先设定。场景和运动轨迹同时重建的研究可以追溯到20年前,在[Zhang, 1996a]作者最早提出了一种从两帧图像中寻找匹配的特征点,通过三角化的方法恢复三维点的方法(图 1-1)。在此后几年出版的一本著作[Ma, 2003]中,作者描述了已标定和未标定相机的多视角重建算法的框架,包括特征点跟踪、射影重建、自标定和欧式空间重建(图 1-2)。2000 年左右出版的两本著作[Hartley and Zisserman, 2000][Faugeras et al., 2001]详细阐述了在过去十年中场景和运动轨迹同时重建的理论和实现方案。

在解决场景和运动同时重建问题时,大视场的传感器具有很多优点,其中之一是,视场越大,两个相机同时可见的点越多。此外, Daniilidis 和 Nagel 在文献 [Daniilidis and Nagel, 1990]中指出小视场的相机,其运动估计的准确性更低。于是,研究人员设计出许多种途径实现大视场的成像系统。常用的方法可以使用所谓的鱼镜头 [Shah and Brandt, 1996][Basu and Licardie, 1995][Kannala and Brandt, 2004]。鱼镜头一般拥有  $120^\circ$  左右到  $180^\circ$  左右的视场,其中视场  $180^\circ$  左右的鱼眼相机应用比较广泛。另一种拓宽视场的方式是将多个相机拍摄的多幅图像拼接起来使得图像之间的重叠区域最小 [Swaminathan and Nayar, 2000][Schaffalitzky and Zisserman, 2002][Bartoli et al., 2004]。这类方法的主要优点在于增强了图像的分辨率。然而,所有的图像都需要处理并且计算出各幅图像之间的空间位置,而



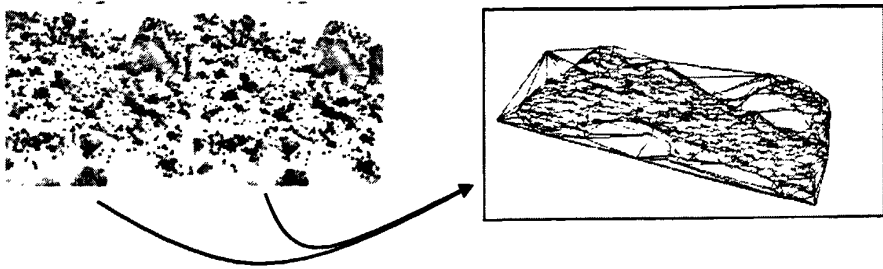


图 1-1. 从两帧图像恢复三维点[Zhang, 1996]

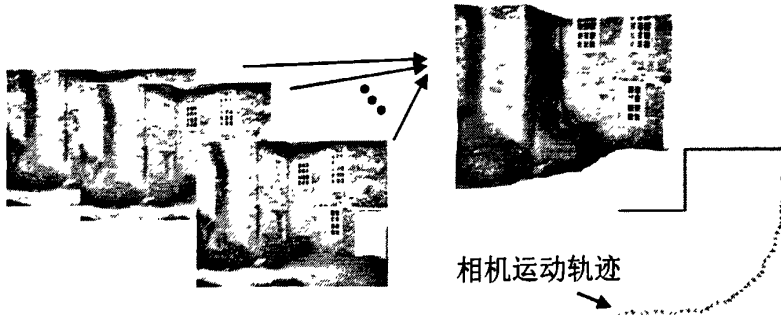


图 1-2. 多视角三维点重建[Ma, 2003]

且很难实验图像之间的平滑连接。

本文中我们使用折反射传感器。这类传感器包括了折射部件和反射部件，即反射面镜和相机的组合，因此称为折反射设备[Hecht and Zajac, 1997]。在机器人领域的应用中，比较常见的方式是一个凸面镜放置在透视相机之前，通过镜面的反射增大相机的视场。折反射设备中很重要的一个子类是具有单视点的折反射相机。单视点折反射相机等价于传统的透视相机，即满足如下假设：所有的光线经过一个视点或者焦点。视点的唯一性使得我们可以认为折反射系统与将一个相机绕着某个视点旋转的效果等价。文献[Baker and Nayar, 1998]证明了具有单一视点

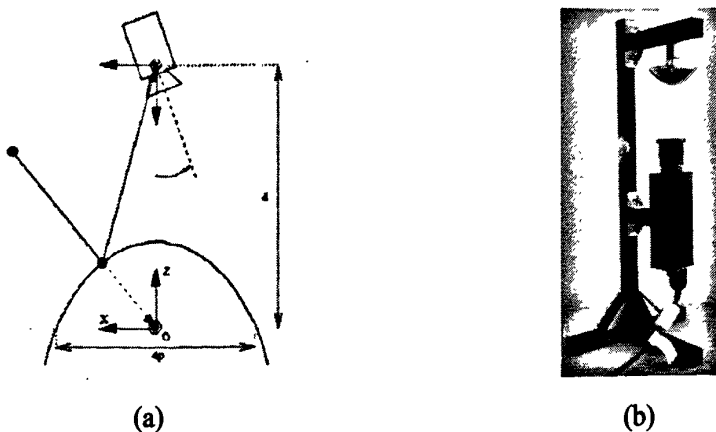


图 1-3. 单视点折反射相机

的折反射相机包含一个截面为二次曲线的凸面镜和一个焦点处在二次曲线一个焦点处的透视相机。四种可能的组合包括, 1. 抛物面镜和正交相机, 2. 双曲面镜和透视相机, 3. 椭圆面镜和透视相机, 4. 平面镜和透视相机。图 1-3 所示的是双曲面镜和透视相机的组合。

因此, 镜面参数和相机的内参是两组必须要估计的参数。折反射成像系统可以转化为围绕着某个视点旋转的透视相机的等价模型, 而传统相机的多视角几何的理论已被广泛和系统的研究。因此可以将传统相机的多视角理论拓展到单视点折反射系统中。

## 1.2. 全景成像系统的发展

1971 年, Rees 提出了已知最早的全景折反射系统的专利[Rees, 1971], 其目的在于拓宽一个类似移动炮台设备的操作员位置的视野。上世纪 90 年代, Yagi 等[Yagi et al., 1994]将全景折反射设备引入到机器人领域中, 其目的同样是为了扩大视场。此后, 全景设备被广泛应用到导航、监控和可视化等领域。有兴趣更详细地了解全景视觉的读者可以参考文献[Yagi, 1999]、两个全景视觉的论文集[Daniilidis, 2000][Benosman and Mouaddib, 2002]以及著作[Benosman et al., 2000]。

### 1.2.1. 单视点折反射相机的研究

1998 年, Baker 和 Nayar 首次提出了单视点折反射系统(central catadioptric camera) [Baker and Nayar, 1998] (图 1-4)。Svoboda 等[Svoboda et al., 1998] (图 1-5)、Bruckstein 和 Richardson [Bruckstein and Richardson, 2000]也提出了单视点折反射系统。

Baker 和 Nayar[Baker and Nayar, 1998]证明了单视点折反射相机的反射面的截面必须是二次曲线, 因此理论上圆、抛物线、双曲线、椭圆和直线都满足这一条件。作为二次曲线的退化形式, 平面镜和透视相机的组合是最简单的折反射成像系统, 但是这种折反射相机不能扩大视场。对于球面镜而言, 透视相机的焦点需要处在球面上, 这在实际处理中难以实现, 因此, 实际中具有超过  $180^\circ$  视场的折反射相机有抛物面、双曲面和椭圆面与透视相机的三种组合。单视点全景折

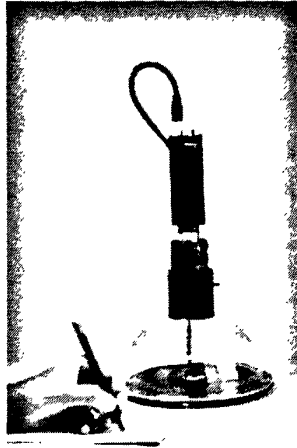


图 1-4. Baker 和 Nayar [Baker and Nayar, 1998]

设计使用的单视点折反射相机

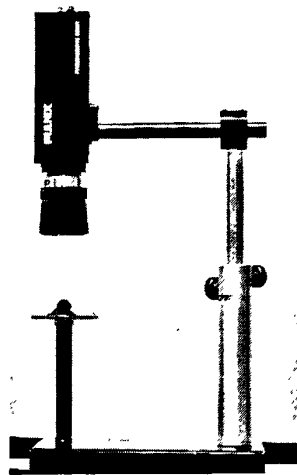


图 1-5 Svoboda 等 [Svoboda et al., 1998]

设计使用的单视点折反射相机

反射系统被用于可视化[Boult, 1998][Onoe et al., 1998]和导航领域[Winters et al., 2000][Leonardis and Jogan, 2000][Benosman et al., 2000]。Nayar 和 Peri 在文献 [Nayar and Peri, 1999]中证明了单视点折反射系统的反射面镜可以由超过 2 个反射面镜组成的复合反射面实现(图 1-6), 当且仅当成像系统中所有反射面镜的截面可以整体等价于二次曲线。Greguss [Greguss, 1985]在此之前曾经设计出包含两个抛物面镜的折反射成像系统, 后来被 Zhu 等 [Zhu et al., 2000]应用到视频监控中。

单视点折反射相机因其良好的几何约束, 适合于建立统一的模型, 图像特性



图 1-6. Nayar 和 Peri [Nayar and Peri, 1999]设计的包含  
一个抛物面镜和一个球面镜的折反射相机

也更加方便研究, 本文后续章节将围绕单视点折反射相机, 详细阐述建模、标定和场景重建等方面的研究成果。

### 1.2.2. 非单视点折反射相机的研究

与单视点折反射相机相对的是非单视点折反射相机 (non-central catadioptric camera)。放松了单视点的约束之后, 成像系统的设计变得更加容易。因此, 可以用视点的约束交换图像的特征, 比如图像的局部分辨率。非单视点折反射相机包含一个球面或者其他标准反射面的设计 [Hong et al., 1990][Bolles et al., 1997][Derrien and Konolige, 2000][Swaminathan et al., 2006] (图 1-7)。

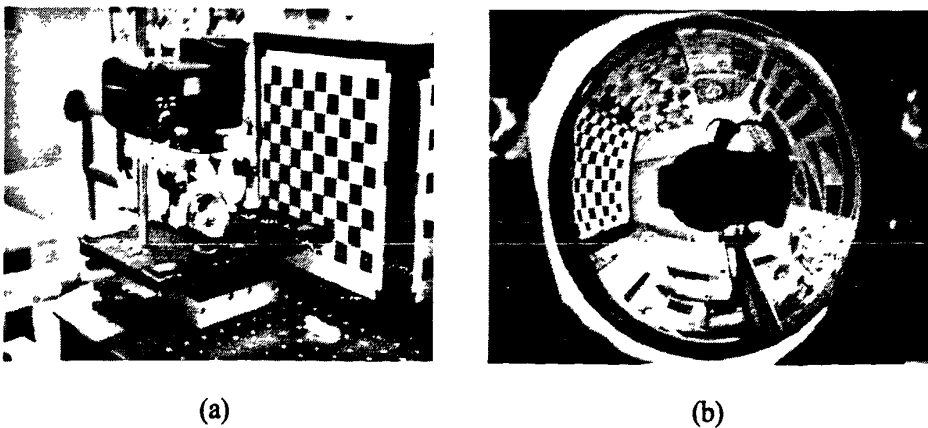


图 1-7. Swaminathan 等 [Swaminathan et al., 2006]使用的  
(a)非单视点折反射相机和(b)拍摄的图像

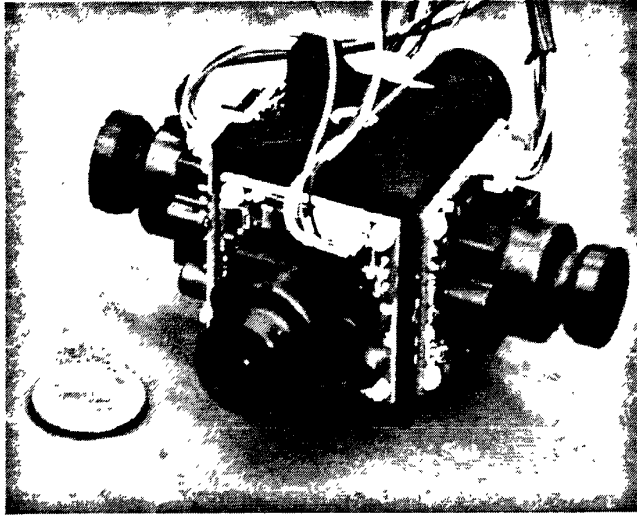


图 1-8. Swaminathan 等[Swaminathan et al., 2001]设计的  
全景相机组, 每个相机水平视角  $115^\circ$

Hicks 和 Bajcsy 设计出一种用特殊形状的反射面扩大视场的透视相机[Hicks and Bajcsy, 2000]。在文献[Nayar and Karmarkar, 2000]中, Nayar 和 Karmarkar 提出了一种镜面反射系统, 可以拍摄高分辨率的  $360^\circ \times 360^\circ$  的立体图像。Hicks 和 Bajcsy [Hicks and Bajcsy, 2002]和 Srinivasan [Srinivasan, 2003]则提出了一类新型的成像系统, 可以直接拍摄柱面图像。上述所有的成像系统都不能保持单视点。然而在图像的处理中, 忽略了非单视点的影响。Derrien 和 Konolige 在文献[Derrien and Konolige, 2000]中将非由球面镜和透视相机组成的单视点折反射相机近似成为一个单视点相机, 从全景图像中恢复出透视图像。而 Micusik 在[Micusik, 2004]在[Strelow et al., 2001]中提出了一种与文献[Micusik, 2004]类似的方案。作者假设目标点的三维点已知, 获得相机的标定参数。文献[Swaminathan et al., 2001] (图 1-8) 和[Grossberg and Nayar, 2001]中的非单视点设备, 如曲面镜、半月形透镜、相机组等, 被建模成场景点到相机的焦点轨迹上各个点的方向和距离向量。非单视点全景相机不是文本的研究范围, 因此关于非单视点全景相机的建模等问题不再详细阐述。

### 1.3. 单视点折反射系统的建模与研究

单视点折反射系统以其严格的几何约束, 即所有光线经过同一点, 更为多年来研究的热点。我们从建模、标定和场景重建三个方面依次回顾折反射系统的研

究进展。

### 1.3.1. 单视点折反射系统的建模

许多研究人员力求找到能够表述所有单视点折反射系统的统一模型。其中主要有4种比较常用的模型：

#### 1. 基于径向失真模型

考虑到折反射相机的中心对称的特点，折反射系统可以认为是增加了径向失真的透视相机[Swaminathan and Nayar, 2000]。因此可以通过跟半径相关的变换将折反射相机图像映射到透视相机图像上。图像点的失真跟它到折反射图像的对称中心的径向距离有关，因此同样可以认为透视相机的图像是带有失真的折反射相机图像。这是对传统相机径向失真校正方式的推广，但是这种模型对大视场的相机效果不佳，特别是当折反射系统的视场远大于透视相机时。径向失真模型仅适用于对折反射图像中视场接近于透视相机的一部分做校正。

#### 2. 基于球面的统一模型

Geyer和Daniilidis [Geyer and Daniilidis, 2000]通过几何变换证明了折反射系统和球面统一模型的等价性。球面统一模型的投影过程分为三步：首先以单位球的球心为投影中心，将三维空间的点投射到单位球面上，然后再以位于北极点到球心的某个点为第二个投影中心，再将球面上的点投影到图像平面上。第二个投影中心到球心的距离和反射面截面的二次曲线的离心率有一定的对应关系，因此表示了反射镜面的参数。在这一模型中，平面镜和抛物面镜是两种特殊情况，当第二个投影中心和球心重合时，折反射相机退化为透视相机；当第二个投影中心和北极点重合时，折反射相机的反射面为抛物面；当第二个投影中心在北极点和球心之间时，反射面为双曲面或椭圆面。球面模型的优点在于它是对折反射系统精确的描述，而非近似描述，同时表述简单，方便对投影性质进一步研究。

中国科学院自动化所的Ying和Hu在文献[Ying and Hu, 2004a]中将球面统一模型推广到了鱼镜头，证明了鱼眼相机图像和折反射相机图像和相互转换。对于鱼镜头的标定和图像性质理论上适用于折反射相机图像，反之亦然。

#### 3. 一般相机模型

所有的成像模型都是将入射的光束映射到图像传感器的感光器件上。这种映

射可以被描述为一组虚拟的传感器元素[Grossberg and Nayar, 2001]。每一个元素包含了几何和光学的性质。因此三维点和图像建立起了一定的对应关系。这种模型的标定过程需要特殊的结构光, 求取每个虚拟的传感器元素的参数。一般相机模型可以适用于任何成像系统, 但是求取三维点到图像的映射关系的过程复杂, 需要特殊形式的结构光, 操作不便。

#### 4. 基于泰勒级数模型

泰勒级数模型可以认为是径向失真模型的另一种表述方式。它将镜面截面的二次曲线用泰勒级数近似, 因此不需要预先知道镜面的具体参数[Scaramuzza et al., 2006]。这个模型将折反射系统中的反射镜面和透视相机分开建模。泰勒级数将二次曲线变换成为闭合形式的表达式, 高次项的数量反映了泰勒级数对原二次曲线拟合的准确度。图像的分辨率对镜面的拟合准确度影响很大, 而镜面的准确度对标定和场景重建至关重要。

### 1.3.2. 单视点折反射系统的标定

对于球面模型的研究中, 人们发现, 透视相机和鱼眼相机可以认为是折反射相机的一种特例, 因此可以将透视相机和鱼眼相机归入单视点折反射相机中一并研究。对包含镜头失真的相机参数估计的方法可以分为两类。第一类方法使用了场景的一些先验知识, 比如在透视相机的标定中使用标定板 [Beauchemin et al., 1999][Bakstein and Pajdla, 2002][Shah and Aggarwal, 1996]和直线[Devernay and Faugeras, 1995][Pajdla et al., 1997][Zhang, 1996a], 以及在单视点折反射相机的标定中使用标定板[Scaramuzza et al., 2006][Mei and Rives, 2007]和直线[Barreto and Araujo, 2002][Brauer-Burchardt and Voss, 2001][Geyer and Daniilidis, 1999][Geyer and Daniilidis, 2002][Swaminathan and Nayar, 2000][Ying and Hu, 2003]。第二类不使用任何场景的先验知识, 对于透视相机 [Farid and Popescu, 2001][Fitzgibbon, 2001][Stein, 1997][Xiong and Turkowski, 1997]和全景相机 [Fabrizio et al., 2002][Geyer and Daniilidis, 2001][Geyer and Daniilidis, 2003][Kang, 2000][Werner and Pajdla, 2001]都提出了许多方法。

#### 1. 基于标定板的透视相机标定方法

Shah 和 Aggarwal [Shah and Aggarwal, 1996]设计了一种鱼眼镜头的标定方法,

在这一方法中使用了已知三维点位置的标定模板。这一方法估计了相机的有效焦距、像素的大小以及径向和切向失真。他们使用了 5 次多项式作为径向和切向失真的模型。其标定方法基于拉格朗日最小化。

Beauchemin 等 [Beauchemin et al., 1999] 以及 Bakstein 和 Pajdla [Bakstein and Pajdla, 2002] 各自提出了一种类似的鱼镜头标定方法与文献 [Shah and Aggarwal, 1996] 相比较。在他们的方法中使用了未知结构的标定模板, 同时各自假设了 4 个参数的非多项式模型 [Bakstein and Pajdla, 2002] 和包含非线性映射的多项式模型 [Beauchemin et al., 1999]。通过最小化重投影误差获得相机的内参和外参。

Devernay 和 Faugeras [Devernay and Faugeras, 1995]、Pajdla 等 [Pajdla et al., 1997] 和 Zhang [Zhang, 1996b] 使用了如下的结论, 即直线在透视相机中保持直线, 而镜头的失真将其变为曲线。将曲线校正回直线的过程同时也完成了相机的标定。Zhang [Zhang, 1996b] 将镜头的失真认为是相机模型的一部分, 并在文献中从两幅径向失真的图像中求出了对极几何。

以上几种方法仅针对传统相机, 鱼镜头的畸变被视为相机的径向畸变, 鱼镜头的视场比较大的时候, 这些方法的估计效果下降, 因此这些方法不适用于视场比鱼镜头更大的单视点折反射系统。

## 2. 使用标定板的单视点折反射相机标定方法

Scaramuzza 等 [Scaramuzza et al., 2006] 和 Mei 和 Rives [Mei and Rives, 2007] 使用了传统的棋盘式标定模板, 前者将镜面参数和相机内参与外参分开估计, 得到镜面的多项式模型和相机的失真模型, 后者利用了球面统一模型, 将相机的失真模型中的径向失真归入到镜面的径向失真中, 估计镜面参数及相机内参。

Swaminathan 和 Nayar [Swaminathan and Nayar, 2000]、Brauer-Burchardt 和 Voss [Brauer-Burchardt and Voss, 2001] 研究了如何从广角镜头、鱼镜头和多相机采集的图像中去除镜头的非线性失真。他们修改了一般的利用直线性质的方法, 并将其应用到全景相机中。

以上方法需要比较多的图像作为标定数据, 一般在 10 幅图像以上 [Mei and Rives, 2007], 每幅图像需要手动选取标定板的每一个点, 比如 10x10 的标定板, 需要手动选取 100 个点, 而且对镜面参数的估计并不准确。

## 3. 使用直线性质的单视点折反射相机标定方法



Geyer 和 Daniilidis 在文献[Geyer and Daniilidis, 1999]、[Geyer and Daniilidis, 2001]中提出了一种基于直线性质的方法用于标定抛物面折反射相机,这一方法仅需要三条直线无需其他度量的信息即可估计出相机的所有内参。这种方法仅适用于抛物面折反射系统,不适用于更具一般性的双曲面/椭圆面折反射系统。Barreto 和 Araujo [Barreto and Araujo, 2002]深入研究了直线的性质,并将基于直线的标定方法推广到所有类型的折反射相机中,理论上仅需要两条直线即可估计出双曲面和椭圆面折反射相机的内参以及镜面参数。该算法的内参矩阵通过分解图像上的绝对二次曲线获得。然而在实际图像的计算中,由于噪声的存在,影响到二次曲线的拟合,因此该算法仅能够有效估计抛物面成像系统的相机内参,而对双曲面/椭圆面折反射系统的相机内参和镜面参数的估计往往很难收敛。中国科学院自动化所 Ying 和 Hu [Ying and Hu, 2004b]继续了 Geyer 和 Daniilidis 的工作。他们将基于直线的标定方法进一步推广,将球体引入了标定算法中。直线的图像上仅是二次曲线的一小部分,球体的图像是整个二次曲线,因此提高了二次曲线拟合的准确性。Ying 和 Hu 提出了基于直线的 3 个几何不变量和基于球体的 2 个几何不变量,在镜面参数已知的前提下,估计相机的内参。

我们的方法结合了 Geyer、Barreto 和 Ying 的研究,提出了单图标定的方法 [Zhang et al., 2009],最少仅需要一副图像即可估计单视点折反射系统中相机的内参。为了解决同时估计镜面参数和相机内参的问题,我们还将共点线引入到标定算法中,提高对标定参数,特别是镜面参数估计的鲁棒性 [Zhang et al., 2010]。

#### 4. 不使用场景先验知识的传统相机标定方法

Stein [Stein, 1997]通过最小化重投影误差,从点对中估计出透视相机的径向失真。他使用了三幅图像的对极几何以及直线的张量约束。失真被假设为多项式模型,同时假设了方形的像素。然后通过迭代的方式获得图像的主点已经失真参数。

Xiong 和 Turkowski [Xiong and Turkowski, 1997]使用单应矩阵相关的四幅图像标定鱼镜头,这些图像使用一台相机经过旋转之后拍摄得到的。该方法假设图像的光学中心已知,四幅图像构成一个多项式立方体模型。最终整合的图像可以构成一幅  $360^\circ \times 360^\circ$  的全景图像。

Farid 和 Popescu [Farid and Popescu, 2001]提出了一种无需标定信息和成像设

备知识的情况下,去除图像非线性失真的黑箱方法。非线性在频域内引入了特定的高阶相关性,该方法利用了这一性质。但是该方法高度依赖于场景的结构,因此通常不可用。而且该方法仅为透视相机设计。

### 5. 不使用场景先验知识的单视点折反射相机标定方法

Kang [Kang, 2000]提出了一种针对抛物面相机的标定方法。基于最小化点到对极曲线的距离,该方法使用对极几何,因而不需要额外的标定设备、相机的运动和场景的几何信息。Micusik 和 Pajdla [Micusik and Pajdla, 2003a][Micusik and Pajdla, 2003b]提出了类似的方法。不同之处在于, Micusik 的算法使用了闭合形式的解,因而可以使用 9 点或者 15 点的 RANSAC, 增强鲁棒性。

Fitzgibbon [Fitzgibbon, 2001]在传统相机的自标定和场景和运动同时重建的研究中解决镜头非线性失真的问题。他使用了一个参数维度的失真模型 [Brauer-Burchardt and Voss, 2001], 并提出了一套从两幅图像的对应点中同时估计 2 视角几何和镜头失真的算法。然而这一模型不能直接用于全景图像。因为该模型假设所有进入相机的光线相交一个图像平面,当相机的视场大于甚至于接近  $180^\circ$  时,图像平面趋向无穷,模型便失效。

Geyer 和 Daniilidis 在文献[Geyer and Daniilidis, 2001][Geyer and Daniilidis, 2003]中提出了一种从图像的绝对二次曲线中标定抛物面折反射相机的方法。文献证明了从两幅固定运动参数图像和三幅可变运动参数图像中进行欧式重建的可行性。

Fabrizio 等[Fabrizio et al., 2002]提出了一种利用镜面边界的标定方法。他假设镜面参数已知,从镜面的边界图像上恢复出未知的 CCD 相机内参。

### 1.3.3. 单视点折反射系统的三维重建

近年来,针对全景图像的三维重建大致可分为三类:基于未标定折反射相机的重建方法[Geyer and Daniilidis, 2001][Geyer and Daniilidis, 2003][Spacek, 2004][Sturm, 2000]、基于已标定折反射相机的重建方法[Chang and Hebert, 2000][Doubek and Svoboda, 2002][Ishiguro et al., 1992][Kang and Szeliski, 1997][Nene and Nayar, 1998] [Lhuillier, 2007]和已知某些关于相机运动的信息的重建方法[Bunschoten and Krose, 2002] [Mellor, 2003]。

## 1. 基于未标定折反射相机的重建方法

Geyer 和 Daniilidis [Geyer and Daniilidis, 2003]提出一套立体视觉的算法。该算法利用保角映射的校正方法,实现抛物面立体相机对的立体匹配。校正方法是保角的,因此图像是局部无畸变的。

Spacek [Spacek,2004]提出一套两个共轴镜面的非单视点立体全景相机对。他发现了一些该系统相对于使用曲面镜的折反射相机的优点,并给出了一些描述该系统的理论。共轴立体全景相机对的优点在于更容易实现。

Sturm [Strum, 2000]提出了一种交互式三维重建的方法,该方法使用片状平面镜构成一个单视点全景系统。该方法同样适用于已知镜面参数的抛物面折反射系统的简单标定。三维重建则通过几何约束,如共面性、正交性等性质实现。

## 2. 基于已标定折反射相机的重建方法

针对全景相机的三维重建最早可以追溯到 1992 年, Ishiguro 等 [Ishiguro et al., 1992]使用非单视点全景图像构成了全景立体视觉系统用以三维重建。每一幅全景图像由一系列旋转的垂直片段组成。

Kang 和 Szeliski [Kang and Szeliski, 1997]提出了类似的系统。该系统使用一台已标定的传统相机旋转拍摄了一系列图像,将所有这些垂直片段融合之后,构建出一幅单视点的全景图像,并提出了提取全景深度信息的技术。

Nene 和 Nayar [Nene and Nayar, 1998]提出由镜面(平面镜、椭圆面镜、双曲面镜和抛物面镜)和透视相机组成的立体视觉系统。该系统使用已标定的相机得到三维场景的欧式重建。Chang 和 Herbert [Chang and Herbert, 2000]完成了相似的研究,他们实现了使用镜面的折反射系统的场景与运动同时重建。

Doubek 和 Svoboda [Doubek and Svoboda, 2002]提出了一套方案,仅用少数几幅折反射图像即可稳定的重建室内场景。图像间的对应点经由手动选择获得。折反射传感器的参数基本已知,因此不需要精确的自标定方法。他们指出稳定的三维重建是可能的,而不需要复杂的非线性自标定或者重建方法。

Lhuillier [Lhuillier, 2007]实现了一套处理上百幅全景图像的三维重建算法。该算法不要求精确的标定参数。同一个三维点可能在许多幅全景图中可见,而在各幅图像中的精度大不相同。因此,该算法的主要部分在于考量如何选择重建的点。文献同样给出了场景和运动同时重建的算法概述以及致密立体匹配的过程。

### 3. 已知某些关于相机运动的信息的重建方法

Mellor 在文献[Mellor, 2003]中,借助 GPS 的帮助实现了全景图像的大规模三维重建。与之相似, Bunschoten 和 Krose [Bunschoten and Krose, 2002]实现了一种多基线立体视觉算法重建三维环境。该算法使用已知镜面参数的已标定全景相机,同时相机的相对位置同样已知。

[Geyer and Daniilidis, 2001][Geyer and Daniilidis, 2003]中的方法是一种线性解法,但只适用于抛物面成像系统。[Spacek, 2004][Sturm, 2000] [Chang and Hebert, 2000][Doubek and Svoboda, 2002][Ishiguro et al., 1992][Kang and Szeliski, 1997][Nene and Nayar, 1998] [Lhuillier, 2007]的方法都采用复杂的非线性方法求解相机的运动和重建三维点。非线性方法容易受到噪声的影响,使得求解过程可能不收敛。针对传统相机提出的一系列稳定的线性解法,由于折反射模型的非线性性,不能直接应用到全景系统中。

## 1.4. 本文的研究目的和内容安排

对于传统相机的研究中,由于其投影过程的线性性,因此在标定和场景重建中往往采用线性最小二乘法或者奇异值分解等,而且往往能得到闭合形式的解。由于其投影过程的线性性,因此求解的过程是一个凸问题,而凸问题的优点在于,总是能找到一个最优解,所以线性解法对于传统相机往往是有效的。然而,折反射相机在投影过程中引入了非线性的过程,这使得适用于传统相机的一些性质,比如对极几何,在折反射相机中不再适用。同时在相机标定的过程中,相对于传统相机,折反射相机需要估计一组很重要的参数,即反射镜面的参数。不管是球面统一模型中由一个参数表示的镜面参数,亦或是泰勒级数模型中由一组系数表示的镜面截面的近似模型,这些参数的估计对整个折反射相机的标定至关重要,进而也影响到三维重建算法的表现。

目前对单视点折反射相机的研究中,抛物面折反射相机的标定问题已经得到了比较好的解决,同时也有了比较易于计算的对极几何[Geyer and Daniilidis, 2003]。而对于更一般的双曲面和椭圆面相机, Svoboda 在文献[Svoboda, 1999]中提出了一套解析的方式计算对极几何的方法,但是涉及大量的非线性问题的计算,因此计算复杂,鲁棒性也比较差。Barreto 提出了一整套折反射相机图像上直线

性质的理论,并且在理论上提出了标定所有类型折反射相机的方法[Barreto, 2003]。然后在实际操作中,该方法的特例,即针对抛物面相机的算法能够比较鲁棒地标定成像系统。在一般性的情况下,由于算法中需要分解绝对二次曲线,该算法比较不稳定。换言之,在抛物面的情况下,镜面参数是固定的;而在一般情况下,镜面参数有待估计。而其他几种标定算法[Scaramuzza, 2006][Mei and Rives, 2007]同样也不能很好地解决这一问题。因此,作者引入新的约束,将标定过程中的非线性问题分解为线性子问题,利用新的约束,更加鲁棒地估计镜面参数和相机的内参。在场景和运动同时重建的问题中,作者将全景图像转化为若干个透视相机图像,并扩展了适用于透视相机求解基本矩阵的8点法,使之适用于相机组图像的情况,使得单视点折反射相机可以利用原有的透视相机的几何理论。

本文的主要贡献如下:

1. 将折反射投影过程中的线性部分划分为3个线性子过程,即把投影过程分为分别到无穷远平面、度量平面和图像平面3个投影子过程,在各个平面上的几何不变性在图像平面上得以保持。

2. 假设镜面参数已知,使用传统的标定设备,提出了单图标定方法。该算法利用平行线在图像平面上相交于2点的性质,最少使用单幅图像估计相机的内参。

3. 设计出新的标定设备,提出了共点线标定方法。该算法针对更一般的情况,即镜面参数未知的情况,利用共点线之间的相互关系,将非线性投影问题拆分为若干个线性子问题,使用特征向量的方法同时估计镜面参数和相机内参。

4. 扩展了8点法,对球面投影进行了修改,从球面投影转换到多平面投影,后者同样满足单视点约束,将针对传统相机的运动轨迹估计算法应用到单视点折反射系统中。

本文一共分为六个章节,其安排如下:

第一章为绪论部分,介绍了单视点折反射成像系统的缘起,以及近年来的发展历程,列举了单视点折反射成像系统的各种设计和现实的方案,明确了具有良好的光学约束的单视点折反射相机作为本文的研究重点,同时简单罗列了非单视点折反射相机的设计和建模方面的研究现状。文章回顾和简述了针对折反射相机

的建模方式和各种标定方法,及其在场景重建中的应用方法,简单比较了各种模型的优劣和现有标定方法存在的问题。最后明确了本文的研究目的和内容安排。

第二章为单视点折反射相机的统一模型。为了保证论述的完整性,文章引述前人的研究成果,简要论证了单视点折反射相机和球面统一模型的等价关系,以及对这一模型在实际应用中的几种扩展。作者融合了现有的几种对模型的扩展,作为后续研究的基础。

第三章为直线在单视点折反射系统中的投影。文章围绕直线在单视点折反射图像上的性质,在模型的几个子层上,分层讨论其特性,整合了直线在无穷远平面、度量平面和图像平面上的投影过程。而后将对一条直线的研究扩展到针对一组直线的研究。这一组直线包括一组平行线和一组共点线。根据共点线的性质,文章给出了投影过程中,图像上的点和直线的线性解法或者闭合表达式以及一些几何不变量。

第四章为使用直线标定单视点折反射系统。文章首先分析了现有算法存在的问题,指出目前针对一般情况下的折反射相机的标定算法中,同时估计镜面参数和相机内参成为目前最主要的问题。之后,文章结合上一章节的研究,按照镜面参数已知与否分类讨论,即分为双曲面和椭圆面镜面参数已知和抛物镜面的情况,以及双曲面和椭圆面镜面参数未知的情况。在第一种情况下,作者结合平行线在折反射图像上的性质,提出了一种单图标定方法,仅需要一幅图像便可有效求解相机内参。而在第二种情况下,作者将直线的共点约束引入到曲线拟合的过程中,提高了拟合的鲁棒性,并设计了一种新的共点线标定模板,然后提出了一种适合共点线性质的算法框架,使得点和直线的投影的非线性问题能够分解成为若干个线性子问题。该算法比现有的算法具有更强的鲁棒性和准确性。

第五章为全景图像的场景与运动同时重建。文章分析了针对透视相机的众多算法,其中一部分可以直接应用到单视点折反射系统中,然后对极几何的理论不能直接应用到折反射系统中。为了解决这一问题,作者将球面投影对应到立方体投影,将全景图像划分为若干个互相重叠的区域,解决了目标跟踪过程中,特征点从一个区域到另一个区域跳变的问题,使得全景成像的过程转化为多个共视点视场重叠的传统相机组同时成像的过程。本文将传统的八点法从二维的图像平面拓展到三维多平面的状况,使得八点法能够应用到立方体投影。为了提高场景和

运动同时重建的鲁棒性, 本文将图像序列划分为若干段, 当读入的图像帧数达到一定数量后, 初始化相机运动轨迹和三维场景, 使用光束法平差局部优化初始值。当新的图像帧读入一定数量后, 利用已有的场景和运动轨迹, 迭代估计新的窗口内的运动轨迹, 而后更新三维场景, 再利用光束法平差优化结果, 同时去掉场景中错误估计的三维点。实验结果表明了扩展 8 点法估计折反射相机运动轨迹的有效性, 也将三角化等线性方法引入到了单视点折反射系统。

第六章总结了全文, 并展望了今后的工作。

## 1.5. 本文的符号定义

在后续章节里, 我们使用符号  $O^T$  表示点坐标,  $[]^T$  表示线坐标,  $X$  表示无穷远坐标上的点,  $X'$  表示度量平面上的点,  $\hat{X}$  表示图像平面上的点, 粗体字母表示矩阵和向量, 比如矩阵  $\mathbf{K}$  表示相机的内参矩阵,  $\mathbf{X}$  表示三维空间中的点。如图 2-6 所示, 直线所在的平面  $\Pi$  和单位球相交的大圆投影在无穷远平面上的二次曲面表示为

$$\Omega = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

直线投影在度量平面上的二次曲线表示为

$$\Omega' = \begin{bmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

直线投影在图像平面上的二次曲线表示为

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{d} \\ \hat{b} & \hat{c} & \hat{e} \\ \hat{d} & \hat{e} & \hat{f} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

定义符号  $\{A, B; C\} = \frac{A-C}{B-C}$  表示三个点的单比, 符号  $\{A, B; C, D\} = \frac{\{A, B; C\}}{\{A, B; D\}}$  表

示四个点的交比。

## 2. 单视点折反射系统的统一模型

根据视场 (Field of View) 的大小, 成像系统可以分为三类[Svoboda, 1999] (图 2-1): 有向视觉, 如传统的透视相机, 符合小孔成像的模型; 全景视觉, 如本文研究的折反射成像系统; 以及全向视觉, 可以  $360^\circ \times 360^\circ$  成像。

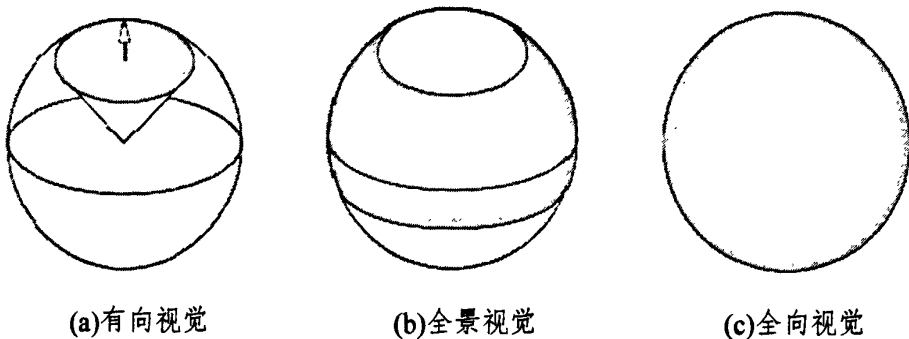


图 2-1. 视觉系统根据视场大小的分类[Svoboda, 1999]

在文献[Geyer and Daniilidis, 2000]中, 作者为单视点折反射相机引入了统一模型, 在这个模型里, 传统相机是一个特例。他们指出全景投影过程和经过修改的球极投影等价。在 Geyer 和 Daniilidis 的模型中, 投影中心不再固定于北极点, 而是在球心和北极点之间移动, 同时垂直于图像平面。这个模型具有一般性的优点, 与折反射系统的具体类型无关, 镜面的类型仅与模型的一个参数相关。

本章首先回顾了单视点折反射系统的类型, 以及各种反射面镜的表达式。为了保证论述的完整性, 本文引述了统一模型和各种折反射相机的等价关系, 以及统一模型的投影过程。之后, 本文整合了度量平面到图像平面[Ying and Hu, 2004]和无穷远平面到图像平面[Barreto and Araujo, 2002]的两种划分方法, 将折反射投影中, 从球面到图像平面的过程划分为从球面到无穷远平面到度量平面到图像平面的投影过程。

### 2.1. 单视点折反射系统

单视点折反射系统在保持单一视点的前提下, 通过特殊的光学与透镜的配置扩大了视场。仔细选择和装配的镜面和成像设配保证了折反射系统的单视点约束。最终的成像系统必须保证所有的光线通过三维空间中的一个点 (透视中心)。



图 2-1 所示是单视点折反射系统的四种可能组合[Baker and Nayar, 1998]。图 2-1a 中抛物面镜的焦距为  $4p$ 。假设坐标原点在抛物面镜的焦点， $Z$  轴为镜面的对称轴。表 2-1 给出了三维空间中镜面的表达式。对于抛物面镜而言，任意经过抛物面镜焦点的入射光线都被抛物面镜反射为平行光线。因此，相机到镜面的距离可以为任意值，与镜面的具体参数无关。成像系统的有效视点即为抛物面镜的焦点。

图 2-1b 为双曲面镜和透视相机的组合，其中反射面的正焦距长度为  $4p$ ，相机到镜面的距离为  $d$ 。相应的双曲面表达式在表 2-1 中，其中  $a = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p)$ ， $b = \sqrt{p(\sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p)}$ 。坐标原点在双曲面的一个焦点

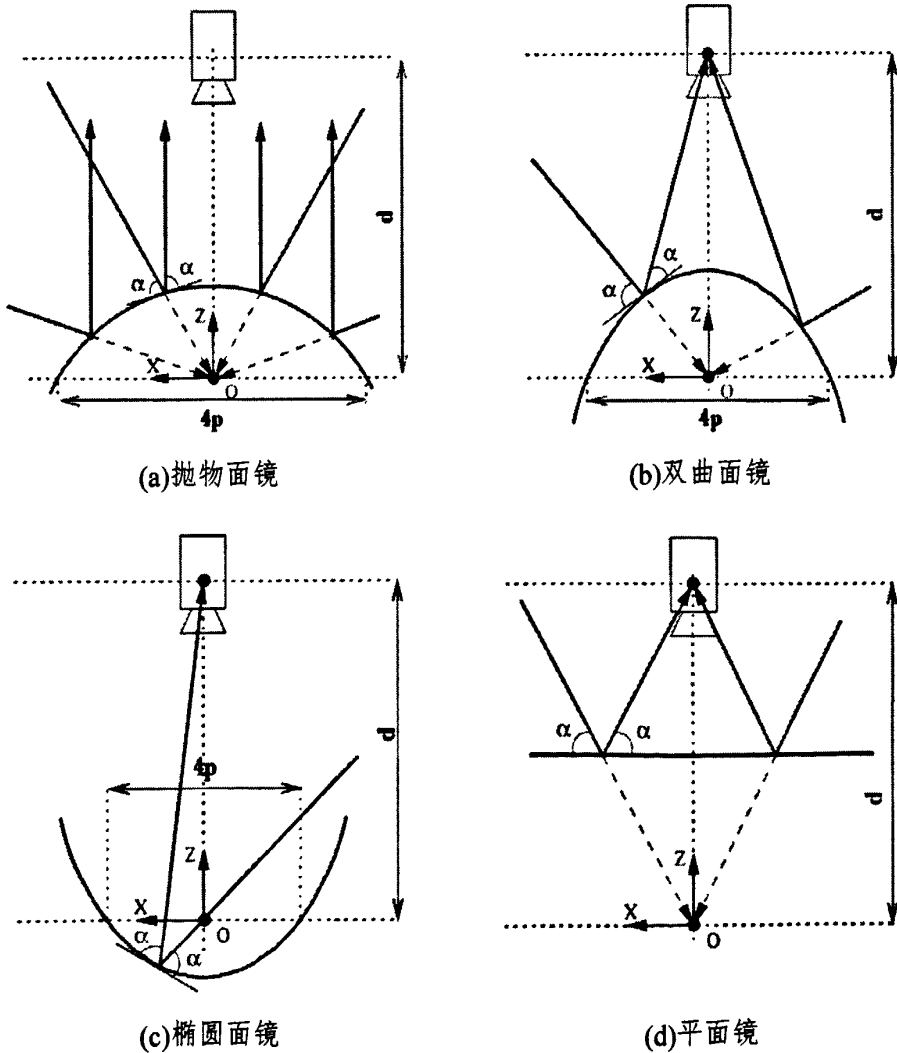


图 2-1. 单视点折反射系统的四种类型

抛物面镜	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2p - z$
双曲面镜	$\frac{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$
椭圆面镜	$\frac{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$
平面镜	$z = \frac{d}{2}$

表 2-1. 反射面的表达式

处, Z 轴为双曲面的对称轴。根据反射定律, 任何经过一个焦点的入射光线, 其反射光线必经过双曲面的另一个焦点。因此, 在此系统中, 传统透视相机被放置在双曲面的外焦点处, 相机的透视中心和焦点重合。透视相机和双曲面镜组成了单视点折反射系统。该系统的有效视点为双曲面镜的内焦点。

图 2-1b 为椭圆面镜和透视相机的组合, 其中反射面的正焦弦长度为  $4p$ , 相机到镜面的距离为  $d$ 。镜面参数中  $a = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 + 4p^2} + 2p)$ ,  $b = \sqrt{p(\sqrt{d^2 + 4p^2} + 2p)}$ 。坐标原点在椭圆面的外焦点处,  $z$  轴为椭圆面的对称轴。类似的, 透视相机和椭圆面镜组成了单视点折反射系统。该系统的有效视点为椭圆面镜的内焦点。

最后一种单视点折反射系统是透视相机和平面镜的组合。有效视点的处在镜面的背后, 过相机光心的镜面垂直线上。有效焦点到相机光心的距离为相机到镜面距离的两倍。

值得一提的是, 凸面镜(抛物面镜和双曲面镜)的使用增加了成像系统视场。椭圆面镜没有相应的实际应用, 由于椭圆面镜减小了成像系统的视场。凸面镜在增大视场的同时也引入了非线性问题。相比于传统透视相机, 折反射系统的非线性特性成为研究折反射图像的主要难点。平面镜系统是折反射系统的特例, 可以被认为是退化的二次曲面。平面镜系统的几何性质等价于传统相机, 因此, 平面镜系统被用于高分辨率的全景系统, 同时保持一个透视中心[Nalwa, 1996]。

## 2.2. 球面统一模型

本节主要研究了折反射系统的统一模型和图像的性质。为了论述的完整性，本文简略引述了文献中对于球面投影和折反射投影等价性的证明，进而研究了球面统一模型的投影过程和图像的性质。

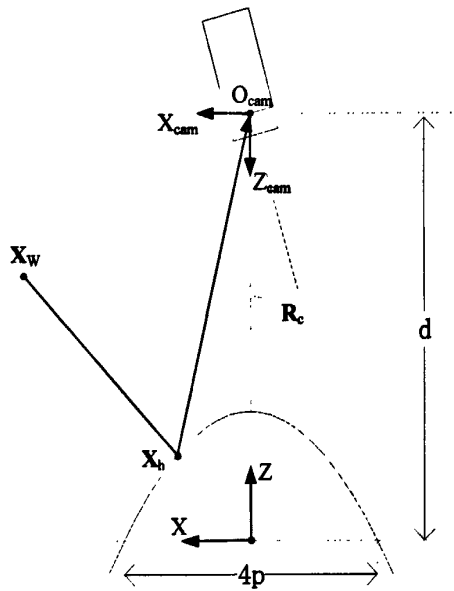


图 2-2. 折反射系统投影过程（双曲面镜系统）

### 2.2.1 球面投影和折反射投影的等价性

Geyer 和 Daniilidis 在文献[Geyer and Daniilidis, 2000]中证明了球面投影和折反射投影的等价性。

#### 1. 球面投影

假设球面的中心在原点，投影中心在点 $(0 \ 0 \ -\zeta)^T$ ，图像平面 $z = m$ 。从三维点到球面的映射为

$$s(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{x}{r} \ \pm \frac{y}{r} \ \pm \frac{z}{r} \right) \quad (2.1)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。之后，球面上的点被投影到图像平面上

$$p_{l,m}^*(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{x(l+m)}{lr \mp z} \ \pm \frac{y(l+m)}{lr \mp z} \right) \quad (2.2)$$

若将图像平面移动到  $z = a$ , 那么投影关系可表示为

$$p_{l,m}^*(x \ y \ z) = \frac{l+m}{l+\alpha} p_{l,\alpha}^*(x \ y \ z) \quad (2.3)$$

当  $l=1, m=0$ , 此时投影中心是北极点, 图像平面上的点为

$$p_{1,0}^*(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \mp z} \quad \pm \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \mp z} \right)$$

## 2. 折反射投影

折反射投影分为两步, 第一步, 将三维点投影到反射镜面的表面; 第二步, 将镜面上的点投影到图像平面。

当镜面为抛物面时, 镜面方程如表 2-1 所示, 抛物面镜的焦点为坐标原点, 图像平面  $z=0$ 。镜面上的点可得

$$s_p(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{2px}{r \mp z} \quad \pm \frac{2py}{r \mp z} \quad \pm \frac{2pz}{r \mp z} \right) \quad (2.4)$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。第二步, 镜面上的点被投影到了图像平面  $z=0$  上, 我们得到了抛物面系统的图像点

$$q_p^*(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{2px}{r \mp z} \quad \pm \frac{2py}{r \mp z} \right) \quad (2.5)$$

当镜面为双曲面或者椭圆面时, 镜面方程如表 2-1 所示, 坐标原点为双曲面或者椭圆面的内焦点, 图像平面  $z=0$ 。我们得到了双曲面系统的图像点

$$r_{p,d}^*(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{\frac{2xdp}{\sqrt{d^2+4p^2}}}{\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}} r \mp z} \quad \pm \frac{\frac{2ydp}{\sqrt{d^2+4p^2}}}{\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}} r \mp z} \right) \quad (2.6)$$

对于椭圆面, 图像点如下

$$i_{p,d}^*(x \ y \ z) = \left( \pm \frac{2xdp}{dr \mp z \sqrt{d^2+4p^2}} \quad \pm \frac{2ydp}{dr \mp z \sqrt{d^2+4p^2}} \right) \quad (2.7)$$

球面投影和折反射投影的等价关系如下所示

抛物面 ↔ 球面

$$q_p^*(x \ y \ z) = p_{1,2p-1}^*(x \ y \ z)$$

双曲面 ↔ 球面

$$r_p^*(x \ y \ z) = p_{\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}}, \frac{d(1-2p)}{\sqrt{d^2+4p^2}}}^*(x \ y \ z)$$

椭圆面 ↔ 球面

$$t_p^*(x \ y \ z) = p^* \frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}} \frac{d(1-2p)}{\sqrt{d^2+4p^2}} (x \ y \ -z)$$

平面 ↔ 球面

$$\begin{pmatrix} \frac{fx}{z} & \frac{fy}{z} \\ \frac{z}{z} \end{pmatrix} = p_{0,f}^* (x \ y \ z)$$

4种折反射系统的投影过程与一定的球面投影等价，球面投影函数  $p_{a,b}^*( )$  中  $a$  表示第二次投影中心的位置， $b$  表示图像平面的位置。从等价关系可见，抛物面镜和平面镜对应于两种特例，即投影点在北极点和球心。而双曲面镜和椭圆面镜是比较一般的情况，投影点在北极点和球心之间变化，即  $0 < \xi = \frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}} < 1$ ，如图 2-3 所示。

1, 如图 2-3 所示。

### 2.2.2 球面统一模型的投影过程

点到单视点折反射图像平面的投影可以总结为三步：

1. 三维点经过一次非线性映射，投影到单位球面，此时投影中心在球心；
2. 将投影中心从球心移动至球心到北极点之间的某一点，这一点的位置与镜面的参数相关；
3. 通过第二个透视中心，将球面上的点投影到图像平面。

假设某个三维点  $X_W = (X \ Y \ Z \ 1)^T$ ，与折反射系统所在的坐标系的关系可以用一个  $3 \times 4$  的投影矩阵  $P$  表示，如公式(2.7)。

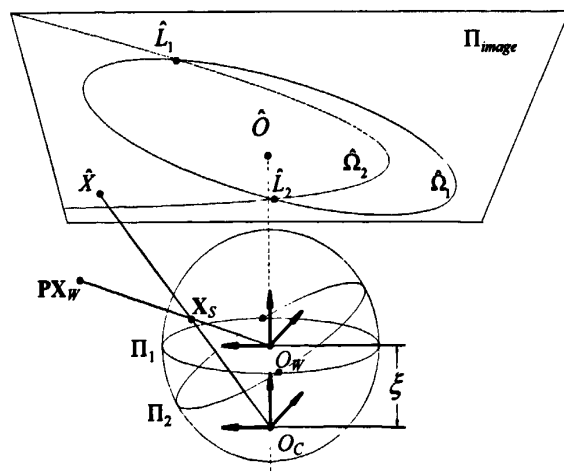


图 2-3. 球面统一模型

$$\mathbf{X}_h = \mathbf{P}\mathbf{X}_w \quad (2.8)$$

之后  $\mathbf{X}_h$  经非线性投影  $\hat{h}(\ )$  被投影到单位球面  $\mathbf{X}_s$ ,

$$\mathbf{X}_s = \hat{h}(\mathbf{X}_h) \quad (2.9)$$

坐标轴从以球心为原点平移到以  $O_c = (0 \ 0 \ -\zeta)^T$  为原点

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_s - O_c \quad (2.10)$$

新的坐标轴下的点  $\mathbf{X}_p$  经过  $3 \times 3$  的透视矩阵  $\mathbf{H}$  投影到图像平面

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{H}\mathbf{X}_p \quad (2.11)$$

不失一般性, 投影矩阵可分解为内参矩阵  $\mathbf{K}$  和旋转矩阵  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}\mathbf{R} \quad (2.12)$$

其中  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_1 & s & u_0 \\ 0 & f_2 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R}$  是旋转矩阵。图 2-3 简要描述了球面统一模型的投影

过程。投影过程中的参数  $\zeta = |O_w O_c|$  仅与镜面的离心率有关。图 2-4 概括了折反射投影的过程。

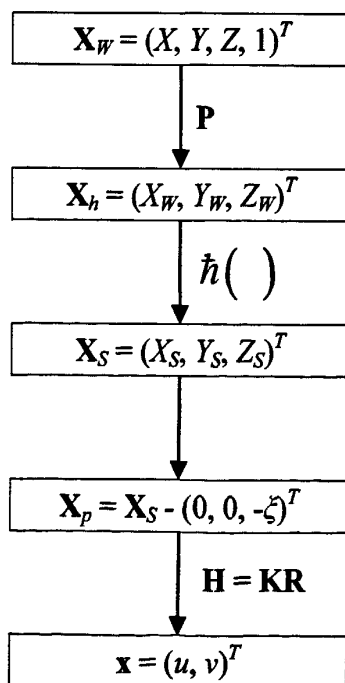


图 2-4. 统一模型的投影过程

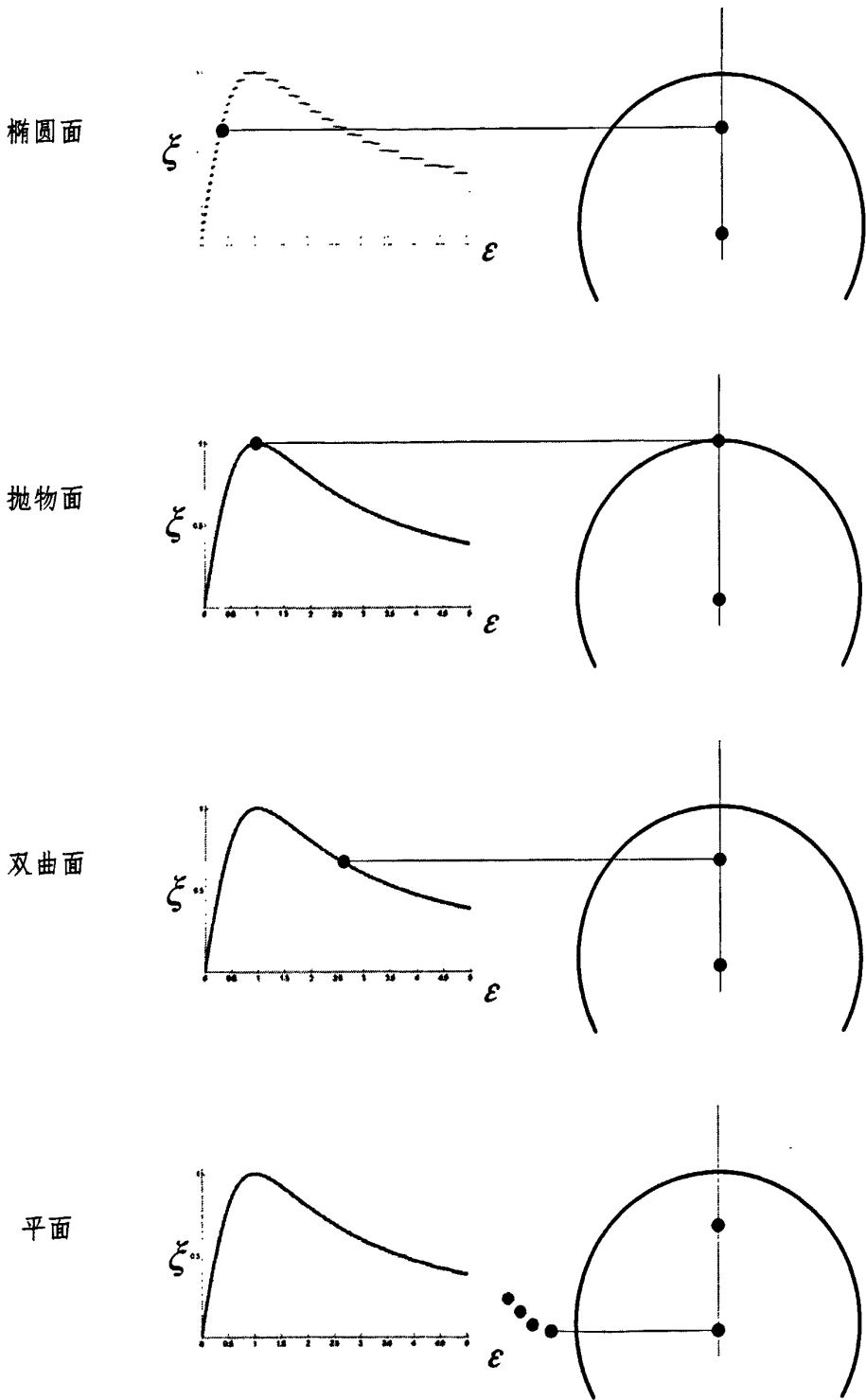


图 2-5. 离心率与球面投影中心的位置

在双曲面镜的情况下, 焦距  $c = \frac{d}{2}$ , 不难求得离心率  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{d^2 + 4p^2} + 2p}{d}$ 。

同理, 在椭圆面系统中, 离心率  $\varepsilon = \frac{\sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p}{d}$ 。抛物面镜的离心率  $\varepsilon = 1$ , 平面镜的离心率  $\varepsilon \rightarrow \infty$ 。根据上一章节的讨论, 在双曲面和椭圆面系统中, 参数  $\xi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4p^2}}$ , 而在抛物面系统中  $\xi = 1$ , 平面镜系统中  $\xi = 0$ , 不难发现  $\xi$  与  $\varepsilon$  之间的关系 (表 2-2)。

$$\xi = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \tag{2.13}$$

	抛物面镜	双曲面镜与椭圆面镜	平面镜
$\varepsilon$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1 \ \& \ 0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon \rightarrow \infty$
$\xi$	$\xi = 1$	$0 < \xi < 1$	$\xi = 0$

表 2-2.  $\xi$  与  $\varepsilon$  之间的对应关系

### 2.3. 球面统一模型投影过程的划分

球面模型的投影过程中 (图 2-3), 最后一步可以理解为, 一个虚拟相机将

球面上的点投影到图像平面上, 投影矩阵  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_1 & s & u_0 \\ 0 & f_2 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。令  $r = \frac{f_1}{f_2}$ , 我们引

入文献[Ying and Hu, 2003]中的一个定义

定义:  $r = 1, s = 0$  主点  $(u_0, v_0)^T = (0, 0)^T$  的平面称为度量平面。

投影矩阵  $\mathbf{K}$  便可以分解为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_1 & s & u_0 \\ 0 & f_2 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_M \mathbf{K}_A \tag{2.14}$$

其中  $s' = \frac{s}{f_2}$ ,  $f_e = f_2$ ,  $\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} r & s' & u_0 \\ 0 & 1 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} f_e & 0 & 0 \\ 0 & f_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。



Ying 和 Hu 将线性投影划分为两部分，从球面到度量平面，从度量平面到图像平面的投影过程。Barreto 和 Araujo [Barreto and Araujo, 2002] 同样将线性投影分为两部分，从球面到无穷远平面，从无穷远平面到图像平面的投影过程。

考查齐次坐标下的点  $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z \ 1)^T$ ，对应的笛卡尔坐标下的点为  $\mathbf{X} = (X/k \ Y/k \ Z/k)^T$ 。随着参数  $k$  的变化，三维空间中的点在笛卡尔坐标下可以视为一条以原点为起点的射线。当时  $k$  趋向于 0，笛卡尔坐标系的  $\mathbf{X}$  趋向无穷，对应的无穷远点的齐次坐标点为  $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z \ 0)^T$ 。如图 2-6 所示，假设球面上两个大圆的交点为  $F$ 、 $B$ ，它们在无穷远平面上的投影分别为  $L_1$ 、 $L_2$ 。若  $F = (l_x \ l_y \ l_z \ 1)^T$ 、 $B = (l_x \ l_y \ -l_z \ 1)^T$ ，则无穷远平面上的点  $L_1 = (l_x \ l_y \ l_z \ 0)^T$ 、 $L_2 = (l_x$

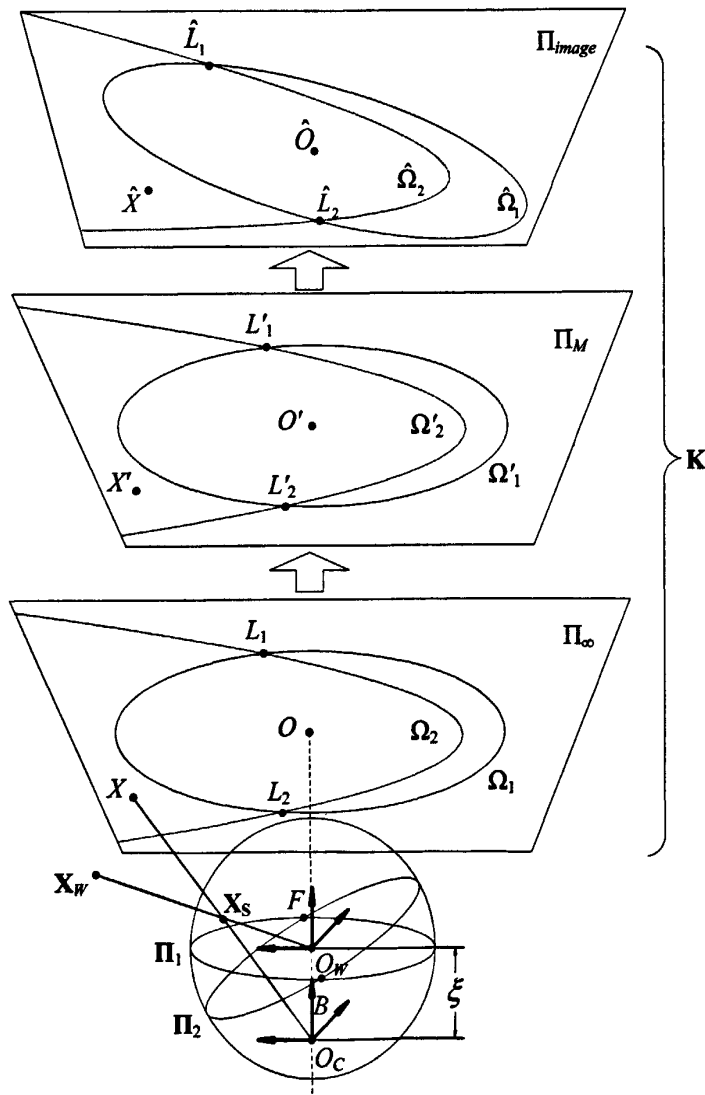


图 2-6. 将无穷远平面和度量平面统一到球面统一模型

$l_y \ -l_z \ 0)^T$ 。我们取前三个参数表示无穷远平面上的点, 如  $L_1 = (l_x \ l_y \ l_z)^T$ ,  $L_2 = (l_x \ l_y \ -l_z)^T$ , 即为笛卡尔坐标。点  $L_1, L_2$  在度量平面上的对应点  $z' \ L'_1 = (f_e l_x / l_z \ f_e l_y / l_z \ 1)^T$ ,  $L'_2 = (-f_e l_x / l_z \ -f_e l_y / l_z \ 1)^T$ , 是齐次坐标。考虑到公式(2.11)右边的  $\mathbf{X}_p$  已经是笛卡尔坐标, 我们可以将球面到无穷远平面的投影也统一到线性投影的过程中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_1 & s & u_0 \\ 0 & f_2 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_M \mathbf{K}_A \mathbf{K}_\infty \quad (2.15)$$

$$\text{其中 } \mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} r & s' & u_0 \\ 0 & 1 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} f_e & 0 & 0 \\ 0 & f_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 2.4. 小结

本章简述了单视点折反射投影和球面投影的等价关系, 分类讨论了当反射面是抛物面、双曲面、椭圆面和平面时, 对应的球面投影的形式。我们将球面投影分为三个步骤, 其中第三个步骤类似于传统的透视投影。之后, 我们将透视投影矩阵分解为三个部分, 进而引入了度量平面和无穷远平面, 换言之, 我们将球面投影分解为, 球面到无穷远平面的投影, 无穷远平面到度量平面的投影, 度量平面到图像平面的投影, 作为后续研究的基础。

### 3. 直线在单视点折反射系统中的投影

传统的透视相机满足小孔成像模型, 因此成像过程可以对应于射影几何。在射影几何中, 直线在射影变换后, 仍为直线, 除去投影为点的退化情况[Semple and Kneebone, 1952]。因此直线的性质在传统相机的研究中, 一直是人们广泛关注的焦点。直线也被标定和几何重建等应用中。

在单视点折反射系统中, 直线在投影的过程中, 不再保持原来的直线形态。经过镜面的反射后, 直线受到严重畸变, 投影成为二次曲线。本章主要研究直线, 包括一条直线和一组直线, 在无穷远平面、度量平面和图像平面上投影为二次曲线的过程, 讨论了在不同镜面类型的情况下, 二次曲线的形式和性质, 以及投影过程中的几何不变量。

#### 3.1. 一条直线在三个平面上的投影

在图 2-6 中, 我们可以清楚地看到直线在单位球上的投影是一个大圆。假设大圆位于平面  $\Pi$ , 法向量为  $\mathbf{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^T$ 。它在无穷远平面的投影如图 3-1 所示。直线从单位球到平面的投影是一个以  $O_C$  为顶点的圆锥。圆锥是二次曲面的特例。

二次曲面的一般形式是满足如下条件的点集

$$\mathbf{PQP}^T = (x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

假设  $\mathbf{n} = (0 \ 0 \ 1)^T$ 。我们将坐标系转换到一个新的坐标系  $(x' \ y' \ z' \ 1)^T$  使得大圆平面  $\Pi$  在平面  $z' = 0$ 。我们需要如下的旋转矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}}{\|(\mathbf{p} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}\|} & \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{p} \times \mathbf{n}\|} & \mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{n_x n_z}{\sqrt{1-n_z^2}} & -\frac{n_y}{\sqrt{1-n_z^2}} & n_x & 0 \\ \frac{n_y n_z}{\sqrt{1-n_z^2}} & \frac{n_x}{\sqrt{1-n_z^2}} & n_y & 0 \\ -\sqrt{1-n_z^2} & 0 & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

其中  $\mathbf{p} = (0 \ 0 \ 1)^T$ 。在新的坐标中圆锥的顶点为  $(\xi\sqrt{1-n_z^2} \ 0 \ \xi n_z)^T$  同时圆锥  $Q$  包含了如下的圆

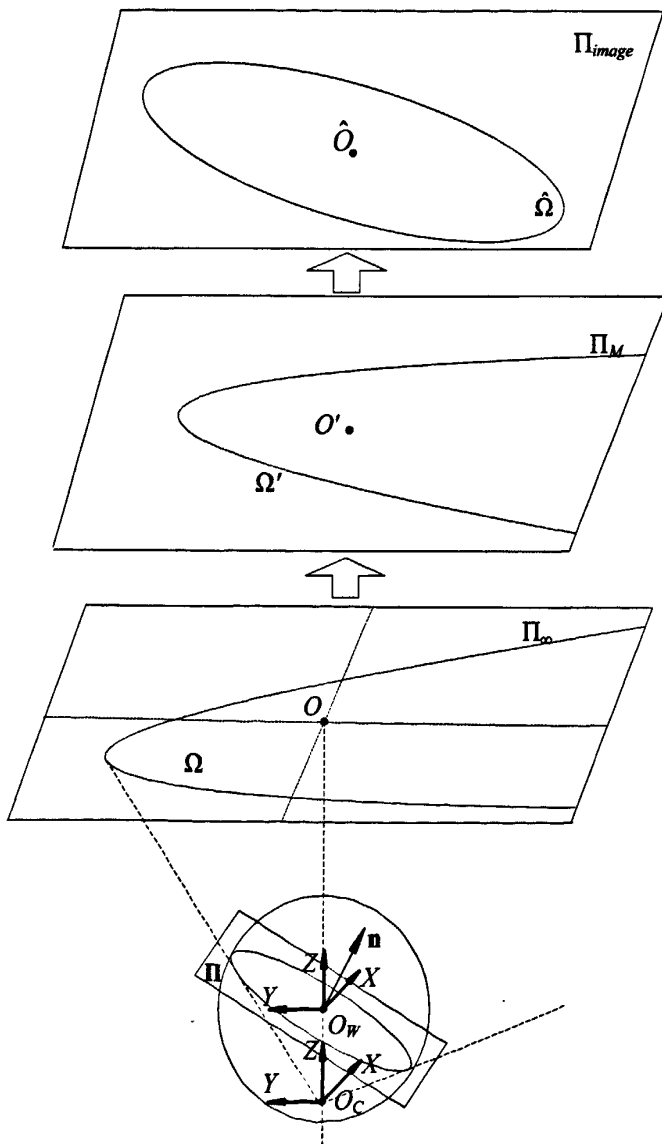


图 3-1. 直线在三个平面上的投影

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

此时, 在新坐标系中的圆锥的方程为

$$(x' \ y' \ z' \ 1)Q'(x' \ y' \ z' \ 1)^T = 0 \quad (3.4)$$

此外, 圆锥作为二次曲面的特例, 具有如下性质。顶点关于圆锥的极线为 0

$$Q'(\xi\sqrt{1-n_z^2} \ 0 \ \xi n_z)^T = 0 \quad (3.5)$$

根据以上的方程, 我们求解得到

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{1-n_z^2}}{n_z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{1-n_z^2}}{n_z} & 0 & \frac{1-n_z^2-\frac{1}{\xi^2}}{n_z^2} & \frac{1}{\xi n_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\xi n_z} & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

根据坐标系之间的关系  $Q = RQR^T$ , 并左乘和右乘矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 便得到了

### 1. 直线在无穷远平面上的投影

$$\Omega = \begin{bmatrix} n_x^2(\xi^2-1) + n_z^2\xi^2 & n_x n_y(\xi^2-1) & -n_x n_z \\ n_x n_y(\xi^2-1) & n_y^2(\xi^2-1) + n_z^2\xi^2 & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & -n_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

同理可得,

### 2. 在度量平面上的直线投影

$$\Omega' = K_A^{-T} \Omega K_A^{-1}$$

$$\Omega' = \begin{bmatrix} n_x^2(\xi^2-1) + n_z^2\xi^2 & n_x n_y(\xi^2-1) & -n_x n_z f_e \\ n_x n_y(\xi^2-1) & n_y^2(\xi^2-1) + n_z^2\xi^2 & -n_y n_z f_e \\ -n_x n_z f_e & -n_y n_z f_e & -n_z^2 f_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

对  $K_M$  求逆矩阵, 得

$$\mathbf{K}_M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{s'}{r} & \frac{-u_0 + s'v_0}{r} \\ 0 & 1 & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 在图像平面上，直线的投影可以求得

$$\hat{\Omega} = \mathbf{K}_M^{-T} \Omega' \mathbf{K}_M^{-1} \quad (3.9)$$

### 3.1.1. 直线投影的特殊情况

满足方程  $\mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x} = 0$  的所有点的轨迹被称为二次曲线。二次曲线有两种退化的情况，一是满足条件的点的轨迹是两条不同的直线；二是满足条件的点的轨迹是一条直线或者两条重合的直线。在第一种情况下，相应的  $\Omega$  的秩为 2，第二种情况下，相应的  $\Omega$  的秩为 1。K 是射影变换，因此 K 为满秩矩阵， $\mathbf{K}_M$ 、 $\mathbf{K}_A$  和  $\mathbf{K}_o$  都是满秩矩阵。由此以上的分析可知

**命题 3-1**  $\hat{\Omega}$  为退化的二次曲线，当且仅当  $\Omega'$  为退化的二次曲线。同样的， $\Omega'$  为退化的二次曲线，当且仅当  $\Omega$  为退化的二次曲线。

下面，我们将以无穷远平面上的二次曲线  $\Omega$  为例，分情况讨论不同的退化二次曲线。考查公式(3.7)中关于  $\Omega$  的定义，当  $\xi = 0$  和  $n_z = 0$  时， $\Omega$  为退化的二次曲线。若  $\xi = 0$ ，折反射系统中的反射面是一个平面镜。

1. 当  $\xi = 0$  时

$$\Omega = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$$

即  $\Omega$  的秩为 1，是两条重合的直线。此时的投影类似于传统的透视相机，即在此光学系统中，场景中的直线仍被投影为直线。

2. 当  $n_z = 0$  时，二次曲线退化为两条重合的直线

$$\Omega = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & 0 \\ n_x n_y & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 \end{bmatrix}$$

场景中的直线所在的平面和折反射系统的 Z 轴共面，对应的折反射图像也是一

条直线。从图 3-1 中不难理解以上的两种退化情况。

3. 当  $\xi=1$  时, 是另一种折反射系统特殊情况, 此时折反射系统的反射面为抛物面镜。二次曲线

$$\Omega = \begin{bmatrix} n_z^2 & 0 & -n_x n_z \\ 0 & n_z^2 & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & -n_z^2 \end{bmatrix}$$

是一个圆, 而且与直线在场景中的位置和姿态无关。换言之, 在抛物面折反射系统中, 场景中的所有和折反射系统 Z 轴不共面的直线都被投影为圆。

### 3.1.2. 二次曲线的几何特征

在本节中, 我们仍以无穷远平面上的二次曲线  $\Omega$  为例, 讨论了二次曲线的若干几何特征, 如中心、主轴、焦点和二次曲线类型判别式。

在平面  $\Pi = [\mathbf{n}^T \ 0]^T$  上的直线被投影到无穷远平面上, 成为二次曲线  $\Omega$ 。假设无穷远直线为  $\pi_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$  [Faugeras, 1993][Hartley and Zisserman, 2000], 折反射系统到无穷远直线为仿射变换。二次曲线的中心是无穷远直线关于二次曲面的极点 [Semple and Kneebone, 1952][Spain, 1957]。因此, 二次曲线的中心  $C$  可由以下公式计算

$$C = \Omega \pi_\infty \quad (3.10)$$

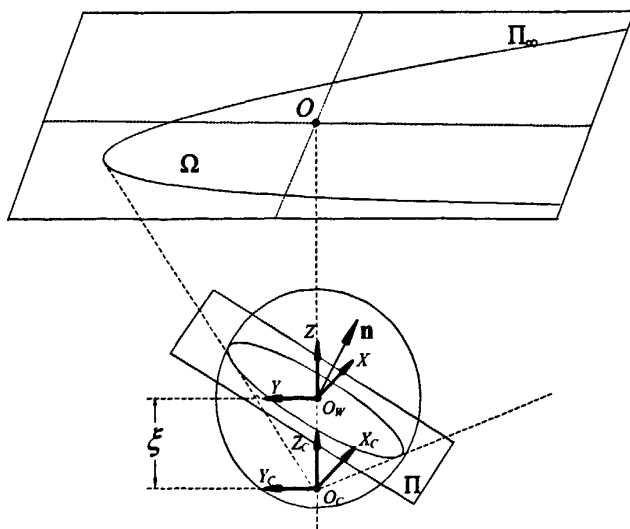


图 3-2. 直线在无穷远平面上的投影

其中  $\Omega^*$  是  $\Omega$  的包络。

根据(3.10)式的定义, 二次曲线  $\Omega$  的中心为

$$C = (n_x n_z, n_y n_z, -(n_x^2 + n_y^2)(1 - \xi^2) - n_z^2 \xi^2)^T \quad (3.11)$$

### 1. 二次曲线的判别式

令二次曲线的判别式为

$$\Delta = (n_x^2 + n_y^2)(1 - \xi^2) - n_z^2 \xi^2 \quad (3.12)$$

二次曲线  $\Omega$  交无穷远直线  $\pi_\infty$  于  $Q, R$  两点。

$$Q = \left( 1, \frac{n_x n_y (1 - \xi^2) + n_z \xi^2 \sqrt{\Delta}}{n_z^2 \xi^2 - n_y^2 (1 - \xi^2)}, 0 \right)^T \quad (3.13)$$

$$R = \left( 1, \frac{n_x n_y (1 - \xi^2) - n_z \xi^2 \sqrt{\Delta}}{n_z^2 \xi^2 - n_y^2 (1 - \xi^2)}, 0 \right)^T \quad (3.14)$$

如果  $Q, R$  两点是两个不同的实点, 则二次曲线  $\Omega$  是双曲线; 若  $Q, R$  两点是两个重合的点, 则二次曲线  $\Omega$  是抛物面;  $Q, R$  两点是两个共轭根, 则二次曲线  $\Omega$  是椭圆或者圆 [Semple and Kneebone, 1952]。值得注意的是,  $\Delta$  被称为二次曲线的判别式。 $\Delta$  大于、等于或是小于零决定了  $Q, R$  两点是两个相异的实点、重合的点或者共轭点。 $\Delta > 0$ 、 $\Delta = 0$  和  $\Delta < 0$  分别对应了二次曲线  $\Omega$  是双曲线、抛物线和椭圆或者圆。

如图3-2所示, 平面  $\Pi$  的法向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ 。令  $\mathbf{n}$  到平面  $XO_w Y$  的夹角为  $\alpha$ 。

$$\tan \alpha = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \quad (3.15)$$

从式(3.12)中可知, 当  $\tan(\alpha)^2 = \frac{(1 - \xi^2)}{\xi^2}$  时, 判别式  $\Delta = 0$ 。即若平面  $\Pi$  上的大

圆与平面  $X_c O_c Y_c$  交于一点时, 二次曲线  $\Omega$  是抛物线; 若大圆与平面  $X_c O_c Y_c$  交于两点, 则二次曲线  $\Omega$  是双曲线; 若大圆与平面  $X_c O_c Y_c$  不相交, 则二次曲线  $\Omega$  是椭圆或者圆。

### 2. 二次曲线的主轴和角点

从式(3.7)中可以求得, 二次曲线  $\Omega$  的两条主轴分别为



$$\mu = [-n_y, n_x, 0]^T \quad (3.16)$$

和

$$\zeta = [n_x \Delta, n_y \Delta, (n_x^2 + n_y^2) n_z]^T \quad (3.17)$$

长轴和短轴的长度分别为  $\frac{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}{|\Delta|}$  和  $\frac{n_z^2 \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \xi^2}{\Delta^2}$ 。两个焦点的坐标分别为

$$F_1 = \left( \frac{n_x}{n_z + \sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)(1 - \xi^2)}}, \frac{n_y}{n_z + \sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)(1 - \xi^2)}}, 1 \right)^T \quad (3.18)$$

$$F_2 = \left( \frac{n_x}{n_z - \sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)(1 - \xi^2)}}, \frac{n_y}{n_z - \sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)(1 - \xi^2)}}, 1 \right)^T \quad (3.19)$$

### 3.1.3. 直线在投影过程中的几何不变量

在线性投影过程中，点仍被投影为点，直线仍被投影为直线（或点）[Semple and Kneebone, 1952]，因此，无穷远平面上直线之间的相交关系和极点/极线关系，在度量平面和图像平面上仍能保持不变，成为投影过程中的几何不变量。无穷远平面到度量平面到图像平面，约束逐渐降低，图像平面上的几何不变量，在度量平面必然也是几何不变量。本节从无穷远平面开始，讨论了一系列直线之间的关系和极点/极线关系，这些关系在图像平面上保持不变。

在图3-3中，平面 $\Pi$ 的法向量为 $\mathbf{n}$ ，经过有效视点 $O_w$ ，和单位球的相交于一个大圆。大圆上的点定义了一个以 $O_c$ 为顶点的圆锥 $Q$ 。圆锥 $Q$ 和无穷远交于二次曲线 $\Omega$ 。直线 $\nu$ 是平面 $\Pi$ 和无穷远平面 $\Pi_\infty$ 的交线。 $F$ 和 $B$ 分别是单位球上大圆到无穷远平面的最近点和最远点。点 $L$ 是直线 $BF$ 与无穷远平面的交点。 $N$ 是法向量 $\mathbf{n}$ 与无穷远平面 $\Pi_\infty$ 的交点。直线 $BF$ 在平面 $\Pi$ 上，因此点 $L$ 在直线 $\nu$ 上，即 $\nu^T L = 0$ 。此外，直线 $BF$ 、 $O_c O$ 和射线 $O_c F$ 、 $O_c B$ 以及向量 $\mathbf{n}$ 共面，所以 $L$ 、 $O$ 、 $L_1$ 、 $L_2$ 和 $N$ 共线。

无穷远平面上的图像经过摄像机的内参矩阵 $\mathbf{K}$ 投影到图像平面，比如主点 $O$ 被投影为 $\hat{O} = \mathbf{K}O$ ，二次曲线 $\Omega$ 被投影为 $\hat{\Omega} = \mathbf{K}^{-T} \Omega \mathbf{K}^{-1}$ ，直线 $\pi$ 被投影为 $\hat{\nu} = \mathbf{K}^{-T} \nu$ 。经过射影变换，主点 $O = (0 \ 0 \ 1)^T$ 和平面 $\Pi$ 的法向量在无穷远平面 $\Pi_\infty$ 上的交

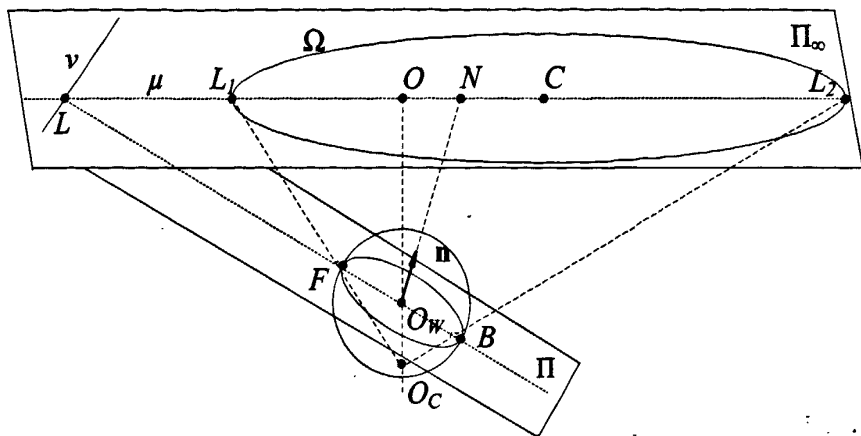


图 3-3. 一条直线在无穷远平面上的投影

点  $N = (n_x \ n_y \ n_z)^T$  以及平面  $\Pi$  和无穷远平面  $\Pi_\infty$  的交线  $v$ , 分别被投影到了图像平面上的  $\hat{O}$ 、 $\hat{N}$  和  $\hat{v}$ 。

**命题 3-2** 如果二次曲线  $\hat{\Omega}$  是直线的投影, 那么图像中心  $\hat{O}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}$  的极线是过有效视点  $O_w$  的平面  $\Pi$  的地平线  $v$  在图像平面上的投影  $\hat{v}$

$$\hat{v} = \hat{\Omega} \hat{O} \tag{3.20}$$

已知三维空间中的直线在平面  $\Pi$  上, 后者交单位球于大圆, 经过有效视点  $O$ 。直线  $BF$  交无穷远平面  $\Pi_\infty$  于点  $L$ 。直线  $BF$  交大圆于  $B$ 、 $F$  两点, 这两点到球心等距离。这也就意味着, 在无穷远平面  $\Pi_\infty$  上, 点  $L$  和点  $O$  关于点  $L_1$  和点  $L_2$  成调和比, 即  $\{L, O; L_1, L_2\} = -1$ 。点  $L_1$  和点  $L_2$  在二次曲线  $\Omega$  上, 而点  $L$  的轨迹线就是平面  $\Pi$  的地平线  $v$ , 即平面  $\Pi$  和无穷远平面  $\Pi_\infty$  的交线。因此直线  $v$  是点  $O$  关于二次曲线  $\Omega$  的极线。无穷远平面上的图像经过矩阵  $K$  投影到图像平面上, 而极点极线之间的关系是射影变换下的几何不变量。

**命题 3-3** 在图像平面上, 直线  $\hat{\mu}$  由点  $\hat{O}$  和法向量的方向点  $\hat{N}$  决定

$$\hat{\mu} = \hat{O} \wedge \hat{N} \tag{3.21}$$

根据公式(3.16), 二次曲线  $\Omega$  的主轴为  $\mu = [-n_y \ n_x \ 0]^T$ 。主点  $O = (0 \ 0 \ 1)^T$  和法向量的方向点  $N = (n_x \ n_y \ n_z)^T$  在主轴  $\mu$  上, 即  $\mu^T O = 0$ 、 $\mu^T N = 0$ 。如图 3-3 所示,  $\mu$  是  $Z$  轴和法向量  $n$  定义的平面和无穷远平面  $\Pi_\infty$  的交线。由于摄影变换

$\mathbf{K}$  保持了点和直线之间的关系, 因此在图像平面上点  $\hat{O}$  和点  $\hat{N}$  仍在直线  $\hat{\mu}$  上。

但在图像平面上  $\hat{\mu}$  不一定是二次曲线  $\hat{\Omega}$  的主轴。

**命题 3-4** 直线  $\hat{\mu}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}$  的极点在直线  $\hat{\pi}_\infty$  上。

无穷远平面  $\Pi_\infty$  上的直线  $\pi_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$  经过矩阵  $\mathbf{K}$  变换到图像平面上的直线  $\hat{\pi}_\infty$ 。直线  $\hat{\pi}_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$ , 当且仅当矩阵  $\mathbf{K}$  是仿射变换。直线  $\hat{\pi}_\infty$  是无穷远平面  $\Pi_\infty$  和图像平面  $\Pi_{\text{image}}$  的交线 [Semple and Kneebone, 1952]。直线  $\nu$  与直线  $\mu$  的交点为  $L$ , 直线  $\pi_\infty$  与直线  $\mu$  的交点为  $M$ 。这两个点被投影到了图像上的点  $\hat{L}$  和  $\hat{M}$ , 而经过矩阵  $\mathbf{K}$  的变换之后, 仍为图像上对应直线  $\hat{\nu}$  与直线  $\hat{\mu}$ , 直线  $\hat{\pi}_\infty$  与直线  $\hat{\mu}$  的交点。主轴  $\mu$  是二次曲线  $\Omega$  的一条直径, 根据文献 [Semple and Kneebone, 1952] 中直径的定义, 主轴  $\mu$  关于二次曲线  $\Omega$  的极点在无穷远直线  $\pi_\infty$  上。极点/极线关系式在射影变换下的不变量。

从上文的研究中, 我们已经得到了  $O = (0 \ 0 \ 1)^T$ 、法向量的方向点  $N = (n_x \ n_y \ n_z)^T$ , 以及无穷远直线  $\pi_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$ 、主轴  $\mu = [-n_y \ n_x \ 0]^T$  还有二次曲线  $\Omega$  的表达式 (3.7)。从式 (3.20) 中可得平面  $\Pi$  的地平线  $\pi = \Omega O$ 。直线  $\pi$  与直线  $\mu$  的交点为  $L = \mu \wedge \pi = (-n_x n_z \ -n_y n_z \ n_x^2 + n_y^2)^T$ , 直线  $\pi_\infty$  与直线  $\mu$  的交点为  $M = \mu \wedge \pi_\infty = (n_x \ n_y \ 0)^T$ 。计算点  $M$ 、 $O$  关于点  $N$ 、 $L$  的交比

$$\{M, O; N, L\} = -\frac{n_z^2}{n_x^2 + n_y^2} = -\tan(\alpha)^2 \quad (3.22)$$

其中  $\alpha$  在式 (3.15) 中定义。射影变换不会改变交比的值, 因此在图像平面上, 直线  $\hat{\mu}$  上的四点  $\hat{M}$ 、 $\hat{O}$ 、 $\hat{N}$ 、 $\hat{L}$  的交比仅与平面  $\Pi$  与平面  $XO_WY$  之间的夹角有关。

$$\{\hat{M}, \hat{O}; \hat{N}, \hat{L}\} = -\tan(\alpha)^2 \quad (3.23)$$

**命题 3-5** 在图像平面上, 直线  $\hat{\mu}$  经过二次曲线  $\hat{\Omega}$  的中心  $\hat{C}$ 。

点  $C$  是无穷远平面  $\Pi_\infty$  上二次曲线  $\Omega$  的中心。根据二次曲线中心的定义, 点  $C$  是无穷远直线  $\pi_\infty$  关于二次曲线  $\Omega$  的极点。极点/极线关系在摄影变换下保持不变。点  $C$  在图像平面  $\Pi_{\text{image}}$  上的投影点  $\hat{C}$  满足

$$\hat{C} = \hat{\Omega} \cdot \hat{\pi}_\infty \quad (3.24)$$

由于主轴  $\mu$  经过点  $C$ , 因此点  $\hat{C}$  必然在直线  $\hat{\mu}$  上。

我们已经得到了点  $O$ 、 $L$ 、 $N$  和  $C$  的坐标, 计算交比  $\{O, L; N, C\} = \xi^2$ 。交比是摄影变换下的不变量。在文献[Barreto and Araujo, 2002]中最早证明了如下命题

**命题 3-6** 在图像平面上, 直线  $\hat{\mu}$  上的四点  $\hat{O}$ 、 $\hat{L}$  关于  $\hat{N}$ 、 $\hat{C}$  的交比是一个常数

$$\{\hat{O}, \hat{L}; \hat{N}, \hat{C}\} = \xi^2 \quad (3.25)$$

这一不变量对于任何一种类型的镜面都成立。

### 3.2. 一组直线在三个平面上的投影

不失一般性, 如图 3-4 所示, 假设三维空间中的平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Pi_3$  经过有效视点  $O_w$ , 三个平面的法向量分别为  $\mathbf{n}_1$ 、 $\mathbf{n}_2$  和  $\mathbf{n}_3$ , 并且三个平面共线, 交于直线  $BF$ 。三个平面与单位球相交于三个大圆, 三个大圆在无穷远平面上分别投影为二次曲线  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$  和  $\Omega_3$ 。二次曲线  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$  和  $\Omega_3$  相交于点  $L_1$  和  $L_2$ 。平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Pi_3$  包含了三维空间中的三条直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$ 。平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Pi_3$  上的任意直线都可以满足, 它们在无穷远平面上二次曲线交于两点。曲线和曲线的交点在摄影变换下保持不变, 也就意味着无穷远平面上的交点经过矩阵  $\mathbf{K}$  投影到图像平面后, 二次曲线  $\hat{\Omega}_1$ 、 $\hat{\Omega}_2$  和  $\hat{\Omega}_3$  仍旧相较于两点  $\hat{L}_1$  和  $\hat{L}_2$ 。

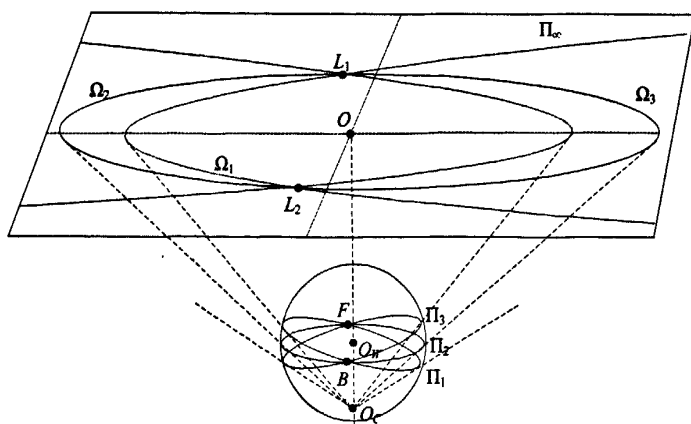


图 3-4 一组直线在无穷远平面的投影

### 3.2.1. 平面上一组直线的相互关系

为了简化研究对象,我们假设平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Pi_3$  上的直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$  在同一平面  $\Pi_4$  上,如图 3-5 所示,  $\pi_1 = \Pi_1 \wedge \Pi_4$ 、 $\pi_2 = \Pi_2 \wedge \Pi_4$ 、 $\pi_3 = \Pi_3 \wedge \Pi_4$ 。此时,有如下命题

**命题 3-7** 直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$  之间的关系可能是两两平行或者三条直线交于一点  $L$ 。

在下文中,我们对直线之间的关系进行分类讨论。

#### 1. 直线 $\pi_1$ 、 $\pi_2$ 和 $\pi_3$ 之间相交于一点

若直线  $\pi_1$  和交线  $BF$  相交于点  $L$ 。因此点  $L$  既在平面  $\Pi_1$  上也在平面  $\Pi_2$  上,即  $L \in \pi_1 \in \Pi_1$ ,  $L \in BF \in \Pi_2$ 。假设直线  $\pi_2$  和交线  $BF$  相交于点  $L'$ 。因此点  $L'$  既在平面  $\Pi_1$  上也在平面  $\Pi_2$  上,即  $L' \in \pi_2 \in \Pi_2$ ,  $L' \in BF \in \Pi_1$ 。假设直线  $\pi_1$  和直线  $\pi_2$  相交于点  $L''$ 。因此点  $L''$  既在平面  $\Pi_1$  上也在平面  $\Pi_2$  上,即  $L'' \in \pi_1 \in \Pi_1$ ,  $L'' \in \pi_2 \in \Pi_2$ 。直线  $BF$  是平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  的交线,因此平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  的公共点必然在

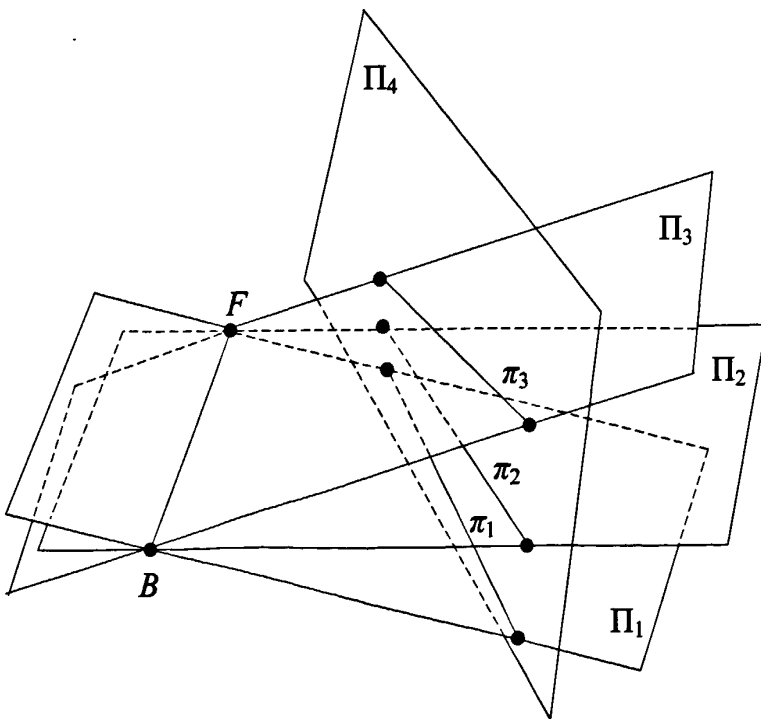


图 3-5 平面与平面的交线

直线  $BF$  上, 即  $L'' \in BF$ 。由此可知, 点  $L''$  是直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $BF$  的公共交点, 即直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $BF$  三条直线共点, 点  $L$ 、 $L'$  和  $L''$  三点重合。同理可得, 直线  $\pi_1$ 、 $\pi_3$  和  $BF$  相交于点  $L$ 。因此, 直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$  三条直线共点。

## 2. 直线 $\pi_1$ 、 $\pi_2$ 和 $\pi_3$ 之间两两平行

若直线  $\pi_1$  和交线  $BF$  是两条平行直线, 即两条直线的交点在无穷远处, 记为  $L$ 。参考上文的推导过程, 我们可以得出结论, 在齐次坐标系中, 直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$  三条直线共点, 相交于无穷远点  $L$ 。在笛卡尔坐标系中, 直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$  三条直线两两平行。在图像平面上, 直线  $\pi_1$ 、 $\pi_2$  和  $\pi_3$  的投影, 二次曲线  $\hat{\Omega}_1$ 、 $\hat{\Omega}_2$  和  $\hat{\Omega}_3$  相交于两个公共点  $\hat{L}_1$  和  $\hat{L}_2$ 。

由此可知, 我们得到如下结论。同一平面上的一组直线, 当且仅当它们是平行线或者共点直线时, 直线在图像平面上的投影二次曲线相交于两个公共点。

### 3.2.2. 图像平面上点、直线和二次曲线之间的约束

在本节中, 我们将结合 3.1.3 节和 3.2.1 节得到的若干命题, 从无穷远平面出发, 讨论图像平面上点、直线和二次曲线之间的关系。

在图 3-6 中, 平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  相交于点  $B$  和点  $F$ , 在无穷远平面  $\Pi_\infty$  上投影为二次曲线  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ 。平面  $\Pi$  是经过  $BF$  两点的大圆所在的平面。大圆距离无穷远平面的最近点为  $F$ , 最远点为  $B$ 。平面  $\Pi$  与图 3-3 中的平面  $\Pi$  类似。平面  $\Pi$  在无穷远平面  $\Pi_\infty$  上的投影为二次曲线  $\Omega$ 。退化的二次曲线不在考查范围内, 因此, 三维空间中的直线所在的平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $Z$  轴不共面。直线  $BF$  交无穷远平面  $\Pi_\infty$  于点  $L$ 。平面  $\Phi$  经过原点  $O_W$ , 并且垂直于直线  $BF$ 。平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Pi$  的法向量在平面  $\Phi$  上。平面  $\Phi$  与无穷远平面  $\Pi_\infty$  相交于直线  $\eta$ 。平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Pi$  的法向量与无穷远平面  $\Pi_\infty$  分别相交于点  $N_1$ 、 $N_2$  和  $N$ 。点  $N_1$ 、 $N_2$  和  $N$  在直线  $\eta$  上。

每个大圆与透视中心  $O_C$  构成了一个顶点在  $O_C$  的圆锥, 与无穷远平面  $\Pi_\infty$  相交于二次曲线。所有的二次曲线相交在两个公共点  $L_1$  和  $L_2$ 。点  $L_1$  和  $L_2$  是单位球上的点  $F$  和  $B$  的投影。经过这两个点的直线为  $\mu = L_1 \wedge L_2$ 。

二次曲线  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  在度量平面  $\Pi_M$  上被投影为二次曲线  $\Omega'_1$  和  $\Omega'_2$ , 在图像平

面  $\Pi_{image}$  上被投影为二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$ 。点  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L$ 、 $N_1$ 、 $N_2$  和  $N$  在量平面  $\Pi_M$  上被投影为点  $L'_1$ 、 $L'_2$ 、 $L'$ 、 $N'_1$ 、 $N'_2$  和  $N'$ ，在图像平面  $\Pi_{image}$  上被投影为点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 、 $\hat{L}$ 、 $\hat{N}_1$ 、 $\hat{N}_2$  和  $\hat{N}$ 。射影变换  $K$  保持了点和线之间的关系。

**命题 3-8** 点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  是图像上的二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$  的公共点，而且主点  $\hat{O}$  和点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  在同一直线上。

平面  $\Lambda$  经过点  $B$ 、 $F$  和透视中心  $O_C$  已经有效视点  $O_W$ 。射线  $O_C B$ 、 $O_C F$  在平面  $\Lambda$  上，平面  $\Lambda$  与无穷远平面  $\Pi_\infty$  的交线为  $\mu$ 。射线  $O_C O_W$  也在平面  $\Lambda$  上，交无穷远平面  $\Pi_\infty$  于点  $O$ 。点  $O$  在直线  $\mu$  上，并与  $L_1$ 、 $L_2$  共线。以上关系在图像平面  $\Pi_{image}$  同样成立。因此，点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  是图像上的二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$  的公共点，而且主点  $\hat{O}$  和点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  在同一直线上。

**命题 3-9** 若二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$  相交于两点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ ，则主点  $\hat{O}$  分别关于二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$  的极线  $\hat{v}_1$  和  $\hat{v}_2$  于过点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  的直线  $\hat{\mu}$  相交于点  $\hat{L}$ ，即

$$\hat{L} = \hat{\mu} \wedge \hat{v}_i \quad (i=1,2) \tag{3.26}$$

直线  $BF$  是平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和  $\Lambda$  的公共交线，而平面  $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  和无穷远平面  $\Pi_\infty$  分别交于直线  $v_1$  和  $v_2$ 。因此直线  $\mu$  和直线  $v_1$  和  $v_2$  相交在点  $L$ 。根据公式(3.20)，可知直线  $\hat{v}_1$  和  $\hat{v}_2$  是主点  $\hat{O}$  分别关于二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$  的极线。因此，主点  $\hat{O}$  分别关于二次曲线  $\hat{\Omega}_1$  和  $\hat{\Omega}_2$  的极线  $\hat{v}_1$  和  $\hat{v}_2$  于过点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  的直线  $\hat{\mu}$  相交于点。

**命题 3-10** 在图像平面  $\Pi_{image}$  上，二次曲线  $\hat{\Omega}_1$ 、 $\hat{\Omega}_2$  经过点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ ，则直线  $\hat{\mu}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}$  的极点在直线  $\hat{\eta}$  上，即

$$\hat{\Omega} \cdot \hat{\mu} \in \hat{\eta} \tag{3.27}$$

以上命题由 Barreto [Barreto, 2003] 首先证明，本文简单引述如下。二次曲线  $\hat{\Omega}_1$ 、 $\hat{\Omega}_2$  和  $\hat{\Omega}$  交于点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 。直线  $\hat{\mu}$  经过点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 。假设点  $\hat{Y}$  是直线  $\hat{\mu}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}$  的极点，即  $\hat{Y} = \hat{\Omega} \cdot \hat{\mu}$ 。直线  $\hat{v}$  是主点  $\hat{O}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}$  的极线。由于主点  $\hat{O}$  在直线  $\hat{\mu}$  上，则点  $\hat{Y}$  必然在直线  $\hat{v}$  上。直线  $\hat{v}$  与直线  $\hat{\mu}$  相交于点  $\hat{L}$ ，交二次

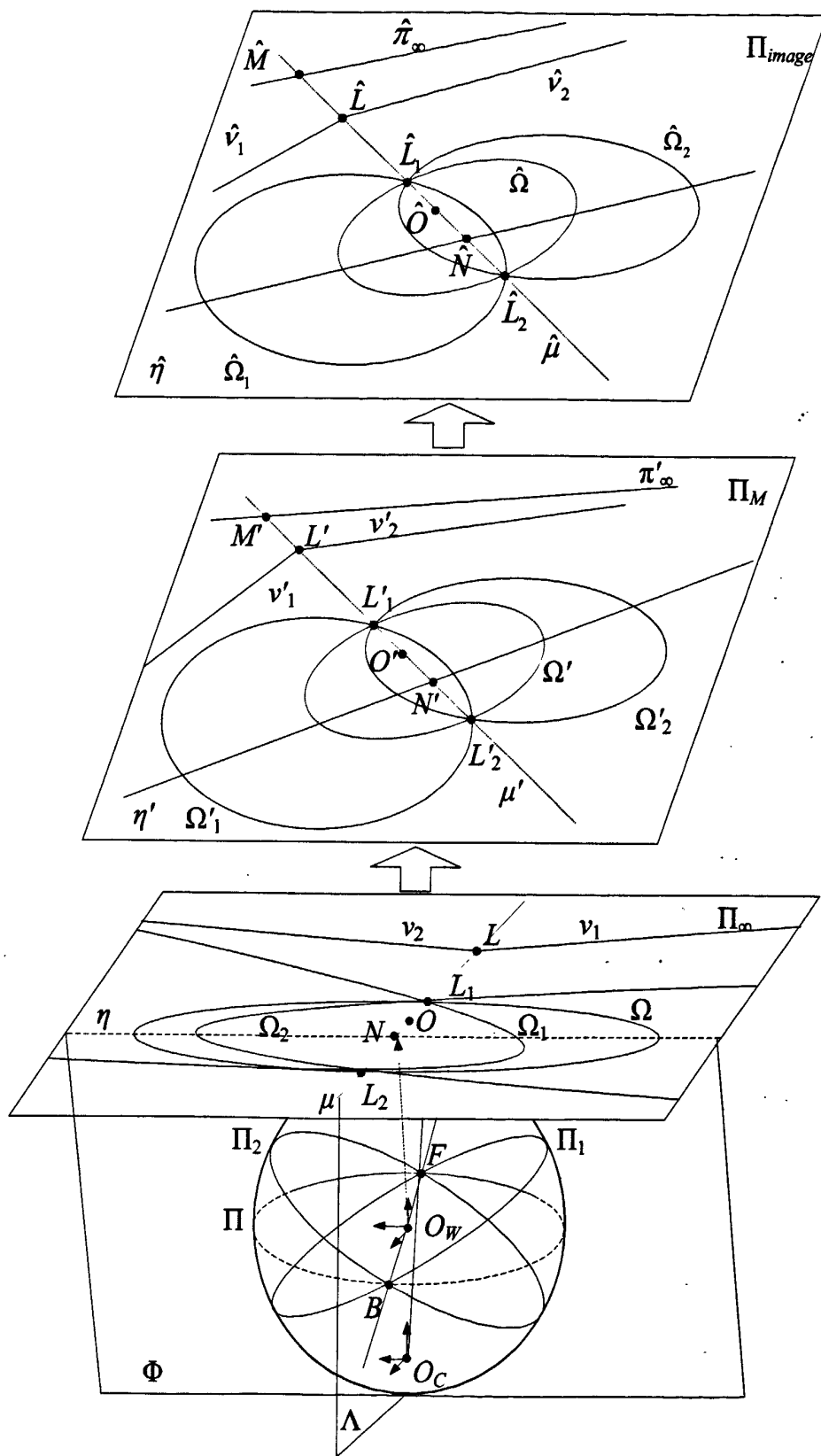


图 3-6 一组直线在折反射系统的投影



曲线  $\hat{\Omega}$  于点  $\hat{I}$ 、 $\hat{J}$ 。点  $\hat{Y}$  和直线  $\hat{\mu}$  为极点/极线的关系, 因此点对  $\{\hat{I}, \hat{J}\}$  和  $\{\hat{L}, \hat{Y}\}$  成调和比, 即  $\{\hat{I}, \hat{J}; \hat{L}, \hat{Y}\} = -1$ 。直线  $\hat{\nu}$  是平面  $\Pi$  在无穷远平面  $\Pi_\infty$  上的交线  $\nu$  的投影。平面  $\Phi$  和直线  $BF$  正交并交无穷远平面  $\Pi_\infty$  于  $\eta$ 。因此, 如果绝对二次曲线被投影到  $\hat{\Omega}_\infty$ , 则点  $\hat{L}$  和直线  $\hat{\eta}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}_\infty$  成极点/极线的关系 [Hartley and Zisserman, 2000]。直线  $\hat{\nu}$  和二次曲线  $\hat{\Omega}_\infty$ 、 $\hat{\Omega}$  相交于相同的两点  $\hat{I}$  和  $\hat{J}$  [Semple and Kneebone, 1952]。假设直线  $\hat{\nu}$  和直线  $\hat{\eta}$  交于点  $\hat{K}$ 。由于点  $\hat{L}$  和直线  $\hat{\eta}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}_\infty$  成极点/极线的关系, 则点对  $\{\hat{I}, \hat{J}\}$  和  $\{\hat{L}, \hat{K}\}$  成调和比, 即  $\{\hat{I}, \hat{J}; \hat{L}, \hat{K}\} = -1$ 。因此点  $\hat{Y}$  和点  $\hat{K}$  是同一个点。因此, 二次曲线  $\hat{\Omega}_1$ 、 $\hat{\Omega}_2$  经过点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ , 则直线  $\hat{\mu}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}$  的极点在直线  $\hat{\eta}$  上。

**命题 3-11** 若投影矩阵  $K$  是仿射变换, 则在图像平面  $\Pi_{image}$  上, 点  $\hat{C}$  和二次曲线的两个交点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  的单比满足

$$\{\hat{L}_1, \hat{L}_2; \hat{C}\} = -1 \quad (3.28)$$

令点  $F = (l_x \ l_y \ l_z)^T$ , 其中  $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$ , 则直线  $BF$  在无穷远平面  $\Pi_\infty$  上的交点的坐标为  $L = (l_x \ l_y \ l_z)^T$ 。平面  $\Phi$  和直线  $BF$  正交并交无穷远平面  $\Pi_\infty$  于直线  $\eta$ 。点  $\hat{L}$  和直线  $\hat{\eta}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}_\infty$  成极点/极线的关系

$$\eta = \Omega_\infty L = [l_x \ l_y \ l_z]^T \quad (3.29)$$

单位球上两点  $B$  和  $F$  被投影到无穷远平面  $\Pi_\infty$  上的点  $L_1$ 、 $L_2$

$$L_1 = (l_x \ l_y \ l_z + \xi)^T \quad (3.30)$$

$$L_2 = (l_x \ l_y \ l_z - \xi)^T \quad (3.31)$$

直线  $\mu = [l_y \ -l_x \ 0]^T$  交无穷远直线  $\pi_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$  于点  $M = (l_x \ l_y \ 0)^T$ , 交直线  $\eta$  于点  $N$

$$N = (-l_x l_z \ -l_y l_z \ l_x^2 + l_y^2)^T \quad (3.32)$$

根据二次曲线中心点的定义 [Semple and Kneebone, 1952], 点  $C$  是无穷远直线  $\pi_\infty$  关于二次曲线  $\Omega$  的极点

$$C = \Omega^* \pi_\infty = (l_1 l_2 \quad l_1 l_2 \quad l_2^2 - \xi^2)^T \quad (3.33)$$

我们已经得到了点  $L_1$ 、 $L_2$  和  $C$  的坐标，点对关于点  $C$  的单比  $\{L_1, L_2; C\} = -1$ 。单比是仿射变换下的几何不变量，因此，在图像平面  $\Pi_{image}$  上，点  $\hat{C}$  和二次曲线的两个交点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$  的单比保持不变。

**命题 3-12** 在图像平面上，点  $\hat{C}$  和直线  $\hat{\mu}$  和二次曲线直径的交点

$$\hat{C} = \hat{\mu} \wedge (\hat{\Omega}_i \hat{M}), i=1,2 \quad (3.34)$$

点对  $\{C, M\}$  关于点对  $\{L_1, L_2\}$  成调和比。点  $M$  在无穷远直线  $\pi_\infty$  上，根据二次曲线直径的定义，直线  $\Omega_i M$  是二次曲线  $\Omega_i$  的直径，其中  $i=1,2$ 。点  $C$  是直线  $\Omega_i M$  和直线  $\mu$  的交点。在射影变换下，以上的关系保持不变。

### 3.2.3. 度量平面上点、直线和二次曲线之间的约束

如图 3-4 所示，点  $O_C$  和平面  $\Pi$  上的大圆决定了圆锥  $Q$ 。考查度量平面上的二次曲线  $\Omega'$ ，单位球到度量平面的投影矩阵

$$P = \begin{bmatrix} f_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

由此可得，圆锥

$$Q = P^T \Omega' P = \begin{pmatrix} a'_e f_e^2 & b'_e f_e^2 & d'_e f_e & d'_e \xi f_e \\ b'_e f_e^2 & c'_e f_e^2 & e'_e f_e & e'_e \xi f_e \\ d'_e f_e & e'_e f_e & f' & f' \xi \\ d'_e \xi f_e & e'_e \xi f_e & f' \xi & f' \xi^2 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

点  $O_C$  和点  $B$ 、 $F$  是图 3-4 中所有圆锥  $Q_i$  的公共点，因此，直线  $O_C B$  和  $O_C F$  是所有圆锥  $Q_i$  的公共母线。点  $F$  处的切平面

$$T_i = Q_i F = \begin{bmatrix} a'_i f_e^2 l_x + b'_i f_e^2 l_y + d'_i f_e l_z + d'_i \xi f_e \\ b'_i f_e^2 l_x + c'_i f_e^2 l_y + e'_i f_e l_z + e'_i \xi f_e \\ d'_i f_e l_x + e'_i f_e l_y + f'_i l_z + f'_i \xi \\ d'_i f_e l_x + e'_i f_e l_y + f'_i \xi l_z + f'_i \xi^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

切平面方程的前三项即为切平面  $T_i$  的法向量方向

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} a'_i f_e^2 l_x + b'_i f_e^2 l_y + d'_i f_e l_z + d'_i \xi f_e \\ b'_i f_e^2 l_x + c'_i f_e^2 l_y + e'_i f_e l_z + e'_i \xi f_e \\ d'_i f_e l_x + e'_i f_e l_y + f l_z + f \xi \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

由此，我们得到度量平面上是如下命题

**命题 3-13** 直线  $O_C B$  直线  $O_C F$  和每一个圆锥  $Q_i$  在点  $F$  处切平面  $\tau_i$  的法向量

$\mathbf{n}_i$  正交

$$\mathbf{n}_i \cdot O_C B = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z + \xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a'_i f_e^2 & b'_i f_e^2 & d'_i f_e \\ b'_i f_e^2 & c'_i f_e^2 & e'_i f_e \\ d'_i f_e & e'_i f_e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z + \xi \end{pmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

$$\mathbf{n}_i \cdot O_C F = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z - \xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a'_i f_e^2 & b'_i f_e^2 & d'_i f_e \\ b'_i f_e^2 & c'_i f_e^2 & e'_i f_e \\ d'_i f_e & e'_i f_e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z - \xi \end{pmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

以上的约束对于任何满足图 3-5 所示的直线组都成立。因此，平面上的一组直线或者一组共点线都满足以上的约束。

### 3.3. 小结

本章首先讨论了，三维空间中的直线所在的过单位球球心的平面，这些平面在单位球上的大圆相交于两个公共点，若三维空间中的直线在一个平面上，那么这些直线之间的关系，或者相互平行，或者相交于同一个公共点。而后，我们从大圆在无穷远平面上的投影二次曲线出发，讨论了大圆所在的平面与无穷远平面的交线，大圆所在的平面的法向量所组成的平面与无穷远平面的交线以及大圆所在的平面公共交线在无穷远平面上的投影。从极点/极线的关系，推导出了上述交线关于二次曲线的极点，和主点关于二次曲线的极线，并且探讨了点、线和二次曲线直线的约束。最后，我们又在基于度量平面的三维空间坐标中，研究了以透视中心为顶点的圆锥的公共母线，以及过公共母线的切面之间的约束关系。在后面的章节里，我们将把以上所讨论的约束应用到以直线拟合为基础的标定算法中，即平行线标定法和共点线标定法。

## 4. 使用直线标定单视点折反射系统

前一章节研究了折反射系统中二次曲线和直线的性质, 这些性质在无穷远平面、度量平面和图像平面上保持一致。空间中的直线被投影到图像平面上的二次曲线。在使用直线的标定中, 我们需要计算直线和二次曲线, 二次曲线和二次曲线的交点。本章首先提出了二次曲线交点的计算方法, 然后研究了从稀疏的点拟合二次曲线的算法, 特别是当稀疏的点只分布在二次曲线的一部分时, 各种拟合算法的效果。在此基础上, 我们提出了平行线的单图标定方法和共点线标定方法, 分别解决当镜面类型已知和未知情况下, 折反射系统内参的估计算法。最后, 本章给出了两种算法使用仿真数据和真实图像的标定结果。

### 4.1. 二次曲线的交点

本章给出了直线和二次曲线, 二次曲线和二次曲线的交点的闭合形式的解, 以及求取交点的鲁棒的数值方法。我们回顾了二次曲线、二次曲线包络和反对称矩阵的定义。

二次曲线的轨迹点是一系列二阶代数方程的解。二阶代数方程可以表示为  $3 \times 3$  的对称矩阵  $\Omega$ 。

$$\Omega = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

对于平面上的点  $\mathbf{x}$ , 当且仅当满足  $\mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x} = 0$ , 则点  $\mathbf{x}$  在二次曲线  $\Omega$  上。二次曲线是标准形式还是退化形式, 取决于矩阵  $\Omega$  能否被简化。如果二次曲线是标准形式, 那么对应的矩阵  $\Omega$  是满秩矩阵, 如果二次曲线是退化形式, 那么对应的矩阵  $\Omega$  是不满秩矩阵。退化矩阵有两种形式: 两条相异的直线 (秩为 2), 两条重合的直线 (秩为 1)。

二次曲线  $\Omega$  的对偶曲线是二次曲线的包络  $\Omega^*$ 。

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} fc - e^2 & ed - bf & be - cd \\ ed - bf & af - d^2 & bd - ae \\ be - cd & bd - ae & ac - b^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

如果  $\Omega$  是满秩的, 则  $\Omega^* = \det\{\Omega\}\Omega^{-1}$ 。

对于一个  $3 \times 1$  的向量  $\mathbf{a}$ , 我们用符号  $[\mathbf{a}]_x$  表示向量  $\mathbf{a}$  所对应的  $3 \times 3$  反对称矩阵。

$$[\mathbf{a}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

由上式可知, 反对称矩阵满足  $[\mathbf{a}]_x^T = -[\mathbf{a}]_x$ 。反对称矩阵可以表示两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的向量积。

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_x \mathbf{b} \quad (4.4)$$

#### 4.1.1. 直线与二次曲线的交点

直线与二次曲线的交点分为三种情况: 直线与二次曲线交于两个不同的点, 直线与二次曲线交于两个相同的点, 直线与二次曲线没有交点。如图 4-1a 所示, 直线  $\pi$  和二次曲线  $\Omega$  交于  $P^+$ 、 $P^-$  两点, 图 4-1b 和图 4-1c 表示了直线  $\pi$  和二次曲线  $\Omega$  交于两个重合的点和没有交点的情况。

从直线上任取两点  $M$  和  $N$ 。直线上的任意一点可以表示为

$$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2 \quad (4.5)$$

当点  $\lambda = 0$  时, 点  $P$  在点  $P_1$  处; 当点  $\lambda = \infty$  时, 点  $P$  在点  $P_2$  处。  $P$  是直线  $\pi$  和二次曲线  $\Omega$  交点也就意味着点  $P$  在直线  $\pi$  上, 也在二次曲线  $\Omega$  上

$$P(\lambda)^T \Omega P(\lambda) = 0 \quad (4.6)$$

将式(4.5)代入式(4.6)之后, 我们得到了如下的二次方程

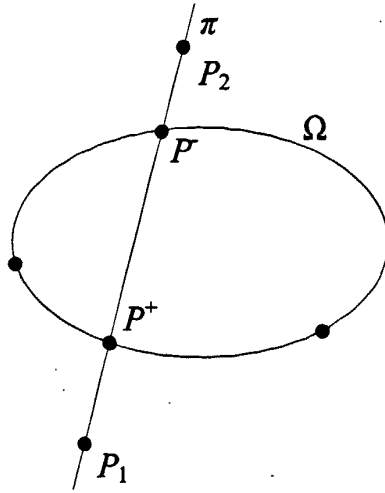
$$P_2^T \Omega P_2 \lambda^2 + 2P_1^T \Omega P_2 \lambda + P_1^T \Omega P_1 = 0 \quad (4.7)$$

令

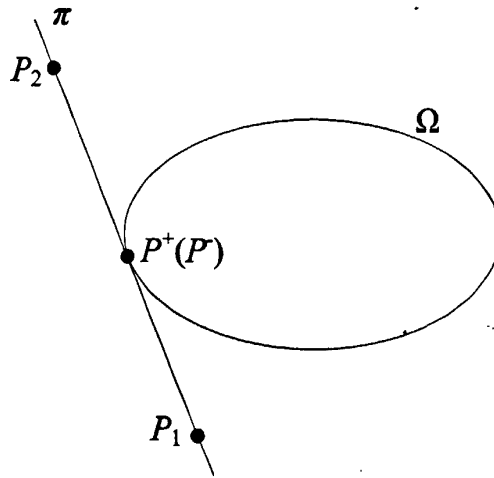
$$\Delta = (P_1^T \Omega P_2)^2 - P_1^T \Omega P_1 \cdot P_2^T \Omega P_2 \quad (4.8)$$

直线  $\pi$  和二次曲线  $\Omega$  交点

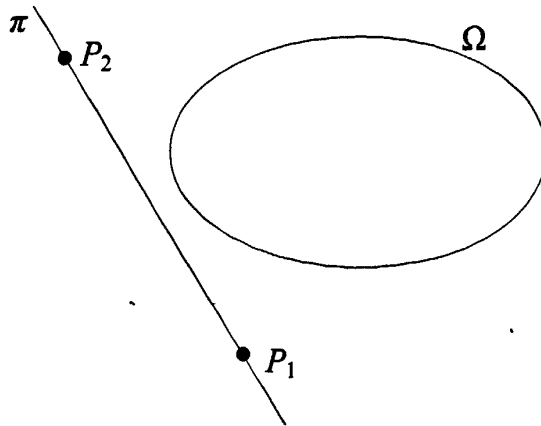
$$\begin{cases} P^+ = P_1 + \lambda_1 P_2 \\ P^- = P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases} \quad (4.9)$$



(a) 直线与二次曲线交于两点



(b) 直线与二次曲线交于一点



(c) 直线与二次曲线没有点

图 4-1 直线与二次曲线的交点

当(4.8)式大于 0 时, 点  $P^+$ 、点  $P^-$  是两个不同的实点; 当(4.8)式等于 0 时, 点  $P^+$  和点  $P^-$  重合; 而当(4.8)式小于 0 时, 点  $P^+$ 、点  $P^-$  是两个不同的虚点, 即在实数平面上没有交点。

以上的解对于退化的二次曲线一样成立。若二次曲线  $\Omega$  的秩为 2, 则二次曲线  $\Omega$  可以表示为

$$\Omega = lm^T + ml^T \tag{4.10}$$

(4.8)式在这种情况下,  $\Delta = ((l^T P_1)^T (m^T P_2) - (m^T P_1)^T (l^T P_2))^2 \geq 0$ , 则直线  $\pi$  和退化二次曲线  $\Omega$  至少有一个交点, 或者两个不同的交点, 包括无穷远点, 即直线  $\pi$  和退化二次曲线  $\Omega$  中的一条直线平行。若二次曲线  $\Omega$  的秩为 1, 则二次曲线  $\Omega$  可以表示为

$$\Omega = ll^T \tag{4.11}$$

(4.8)式在这种情况下,  $\Delta = 0$ , 则直线  $\pi$  和退化二次曲线  $\Omega$  有一个交点, 包括无穷远点。

### 4.1.2. 二次曲线与二次曲线的交点

一般情况下, 二次曲线  $\Omega_1$  与二次曲线  $\Omega_2$  交于不同的四点  $P^{++}$ 、 $P^{+-}$ 、 $P^{-+}$  和  $P^{--}$ , 如图 4-2 所示。椭圆曲线族  $\Omega(\lambda)$  是由二次曲线  $\Omega_1$  与二次曲线  $\Omega_2$  线性组合的有限集合。

$$\Omega(\lambda) = \Omega_1 + \lambda\Omega_2 \tag{4.12}$$

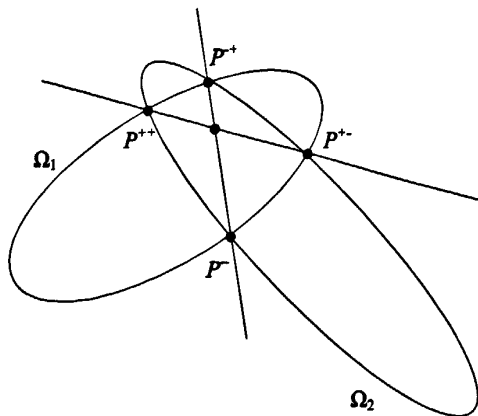


图 4-2 二次曲线与二次曲线的交点

如果点  $P$  是二次曲线  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$  的公共点，即  $P^T \Omega_1 P = 0$ 、 $P^T \Omega_2 P = 0$ ，则对于任意的  $\lambda$ ，点  $P$  都在  $\Omega(\lambda)$  上，即  $P^T \Omega(\lambda) P = 0$ 。一对二次曲线总相交于四点，这四个点可能是实点也可能是虚点，可能重合也可能不重合。在图 4-3 中给出了四种退化的情况，图 4-3a 四个交点中，两个是实点，两个是虚点；图 4-3b 四个交点都是实点，其中三个实点重合；图 4-3c 中四个交点都是实点，其中两个重合；图 4-3d 中四个实交点重合于一点。图 4-2 和图 4-3 中所示的各种情况，二次曲线  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的组合满足一个退化的二次曲线，即  $\Omega(\lambda)$  是两条不重合的直线或者两条重合的直线，即二次曲线族  $\Omega(\lambda)$  不满秩。由此我们得到如下方程

$$\det(\Omega(\lambda)) = \det(\Omega_1 + \lambda \Omega_2) = 0 \tag{4.13}$$

我们用符号  $\Omega_{1i}$  表示矩阵  $\Omega_1$  的  $i$  列，将(4.14)式展开后，我们得到了以  $\lambda$  为未知数的三次方程(4.15)。求解三次方程，并取实数解代入(4.13)式，得到退化的二次

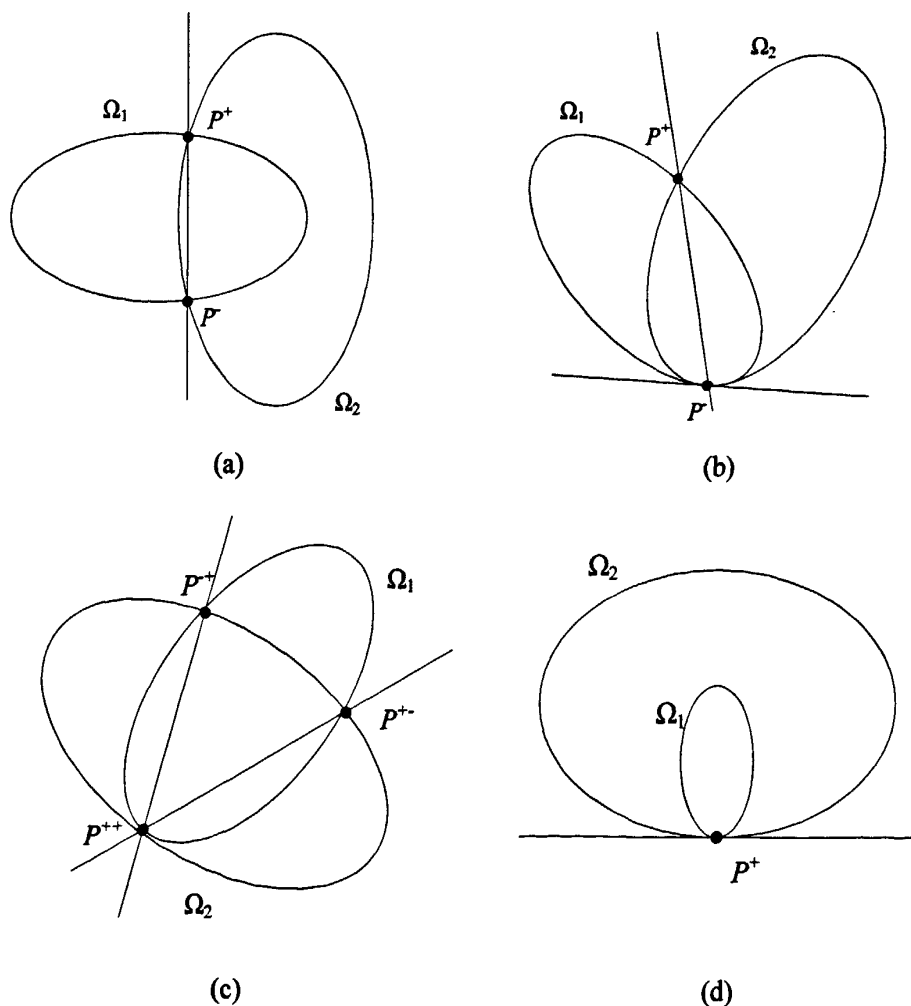




图 4-3 二次曲线与二次曲线的交点的退化情况

曲线  $\Omega(\lambda)$ 。而后根据(4.11)式和(4.12)式将退化二次曲线分解为两条重合或者不重合的直线。二次曲线和二次曲线的交点转化成为直线和二次曲线的交点, 根据上一章节推导, 即可求得直线和二次曲线的所有交点。

$$\begin{aligned} & \det(\Omega_1)\lambda^3 \\ & + \det\left(\left[\Omega_{1,1}, \Omega_{1,2}, \Omega_{2,3}\right] + \left[\Omega_{1,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{1,3}\right] + \left[\Omega_{2,1}, \Omega_{1,2}, \Omega_{1,3}\right]\right)\lambda^2 \\ & + \det\left(\left[\Omega_{1,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{2,3}\right] + \left[\Omega_{2,1}, \Omega_{1,2}, \Omega_{2,3}\right] + \left[\Omega_{2,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{1,3}\right]\right)\lambda \\ & + \det(\Omega_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

若二次曲线中的一个退化的二次曲线, 则直接将退化的二次曲线分解为直线, 然后求解直线和二次曲线的交点。以上方法对图 4-2 和图 4-3 所示的各种情况都适用。图 4-3a、图 4-3b、图 4-3d 中二次曲线  $\Omega_1$  与二次曲线  $\Omega_2$  组成的二次曲线族  $\Omega(\lambda)$  是秩为 1 的退化二次曲线, 图 4-3(c) 中二次曲线  $\Omega_1$  与二次曲线  $\Omega_2$  组成的二次曲线族  $\Omega(\lambda)$  是秩为 2 的退化二次曲线。

## 4.2. 从离散点拟合二次曲线

二次曲线表示为  $3 \times 3$  的对称矩阵  $\Omega$  (如 4.1 式)。由于二次曲线在投影空间  $\mathbf{P}^2$  有 5 个相互无关的自由度, 很自然地, 二次曲线可以表示为  $\mathbf{P}^5$  空间里的一个点。另一种参数化二次曲线  $\Omega$  可以表示为

$$\omega = (a \ b \ c \ d \ e \ f)^T \quad (4.15)$$

在  $\mathbf{P}^5$  空间中的二次曲线表示方法在二次曲线拟合算法中非常适用。二次曲线拟合算法在一定的度量约束下确定一条符合数据点的最佳二次曲线。研究人员发表了许多种根据点的坐标拟合二次曲线的算法 [Bookstein, 1979][Porril, 1990][Taubin, 1991][Kanatani, 1994][Fitzgibbon et al., 1999]。各种算法的优化准则有所不同, 即代价函数和度量方式所有不同。本节回顾了儿种流行的二次曲线拟合算法, 并且针对本文的应用情况, 仅根据少量的点拟合二次曲线的情况下, 比较了各种方法的优劣。

### 4.2.1. 归一化最小二乘算法：基于几何距离

考查同一平面上的一组点集  $\{\mathbf{x}_i = (x_i \ y_i)^T\}$ ，任意两个点不相同，其中  $i = 1, 2, \dots, M (M \geq 5)$ 。某个点  $\mathbf{x}_i$  的几何距离定义为

$$\alpha_i = \alpha(\mathbf{x}_i) = ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + f, i = 1 \dots M \quad (4.16)$$

若点  $\mathbf{x}_i$  在二次曲线上，则相应的几何距离为零。

所有点集  $\{\mathbf{x}_i\}$  中的点组成了一个  $M \times 6$  的矩阵  $\mathbf{A}$  (如 4.18 式)。所有点和二次曲线的几何距离向量表示为  $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_M)^T = \mathbf{A}\omega$ 。如果点集中所有的点都在二次曲线上，矩阵  $\mathbf{A}$  的秩为 5，向量  $\omega$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的零空间。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & 2x_M y_M & y_M^2 & 2x_M & 2y_M & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

假设二次曲线上的点的数量大于 5。一般情况下，在存在噪声的数据中，矩阵  $\mathbf{A}$  的秩是 6。如果矩阵  $\mathbf{A}$  是满秩矩阵，那么方程  $\mathbf{A}\omega = 0$  的唯一解只有一个平凡解  $\omega = 0$ 。拟合二次曲线的常用方法是最小化几何距离的平方和。因此，我们得到了一个代价函数

$$\varepsilon(\omega) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^2 = \omega^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \omega \quad (4.18)$$

显然，平凡解  $\omega = 0$  是代价函数  $\varepsilon(\omega)$  的全局最小值。为了避免平凡解，我们必须约束  $\omega$  的取值。

在归一化最小二乘算法中 [Papoulis, 1965]，向量  $\omega$  被约束为  $\|\omega\|^2 = 1$ 。经过约束后的代价函数

$$E = \|\mathbf{A}\omega\|^2 - \lambda (\|\omega\|^2 - 1) = \omega^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \omega - \lambda (\omega^T \omega - 1) \quad (4.19)$$

其中  $\lambda$  是拉格朗日乘子。对向量  $\omega$  求导数之后，我们将上面的最小化问题，转变成成为特征向量的问题

$$\nabla_{\omega} E = 0$$

$$2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \omega - 2\lambda \omega = 0$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \omega = \lambda \omega \quad (4.20)$$

最小化代价函数  $E$  的向量  $\omega_{\min}$  就是矩阵  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  的特征向量中对应于最小特征值的特征向量。

#### 4.2.2. Bookstein 算法：基于几何距离和二次曲面约束

二次曲线可以理解为二次曲面在某个平面上的截面。二次曲面约束是指二次曲线所在的二次曲面在无穷远平面上投影。因此基于几何距离和二次曲面约束的曲线拟合问题可以表示为

$$\min_{\omega \neq 0} \varepsilon = \|\mathbf{A}\omega\|^2, \omega^T\mathbf{C}\omega = \beta \quad (4.21)$$

其中矩阵  $\mathbf{C}$  是针对系数  $a, b, c$  的二次曲面约束。Bookstein 在文献 [Bookstein, 1979] 中指出上述的最小化问题可以表示为拉格朗日乘子法的问题，然后作为特征向量的问题来解决。[Bookstein, 1979] 中，作者取  $\beta = 1$  和

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而得到了如下的代价函数

$$E = \|\mathbf{A}\omega\|^2 - \lambda(\omega^T\mathbf{C}\omega - 1) = \omega^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\omega - \lambda(\omega^T\mathbf{C}\omega - 1) \quad (4.22)$$

同样对上式求导数

$$\begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\omega = \lambda\mathbf{C}\omega \\ \omega^T\mathbf{C}\omega = 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

令  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ，将矩阵  $\mathbf{D}$  分块表示为 4 个子矩阵  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}$ ，每个子矩阵的大

小都是  $3 \times 3$ 。同时将矩阵  $\mathbf{C}$  也分块表示为 4 个子矩阵  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$ ，每个子矩阵

的大小都是  $3 \times 3$ 。向量  $\omega$  也相应地分为两  $3 \times 1$  向量  $\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T]^T$ 。首先求取前三个系数。此时我们需要求解如下方程的特征向量

$$C_1^{-1}(D_1 - D_2D_4^{-1}D_3)\omega_1 = \lambda\omega_1 \quad (4.24)$$

则向量  $\omega$  也可以求得

$$\omega_2 = -D_4^{-1} D_3 \omega_1 \quad (4.25)$$

如此便完成了(4.24)式的求解。

### 4.2.3. 近似均方算法：基于近似均方距离

Taubin 在文献[Taubin, 1991]中进入了近似均方距离 (Approximate Mean Square) 的概念。Taubin 提出的二次曲线拟合算法在如下约束下最小化几何距离

$$\omega^T (\mathbf{A}_x^T \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y^T \mathbf{A}_y) \omega = 1 \quad (4.26)$$

其中  $\mathbf{A}_x$  和  $\mathbf{A}_y$  是矩阵  $\mathbf{A}$  关于  $x, y$  的偏导数。

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 2y_2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_M & 2y_M & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2y_1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 2y_2 & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2x_M & 2y_M & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

利用拉格朗日乘子法，我们得到了代价函数

$$E = \omega^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \omega - \lambda (\omega^T (\mathbf{A}_x^T \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y^T \mathbf{A}_y) \omega - 1) \quad (4.28)$$

因此上述方程也可以转换为特征值问题

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \omega = \lambda (\mathbf{A}_x^T \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y^T \mathbf{A}_y) \omega \quad (4.29)$$

最小的特征值对应的特征向量就是待拟合的二次曲线参数。

### 4.2.4. 统计偏差算法：基于统计距离

Kanatani 在文献[Kanatani, 1994]、Porril 在文献[Porril, 1990]提出了一种算法改进了归一化最小二乘算法。该算法计算了估计值的固有统计偏差，并从最小向量中减去这一偏差。偏差的计算依赖于已知真实的最小值和噪声水平，因此该算法通过迭代的方法直到预测的偏差在噪声意义下趋向于零。这种度量方式被称为统计距离。当噪声在数据点周围球形分布时，估计值偏差的估计效果优于几何距离下的估计效果。Kanatani 提出的是一种基于张量计算的偏差校正算法，算法表述比较复杂，由于篇幅的关系，具体细节请参考文献[Kanatani, 1994]。值得注意的是，该文献中的噪声水平更新公式应为

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_m}{\text{tr}(Q)\text{tr}(MQ) + 2\text{tr}(MQ^2)}$$

即文献[Kanatani, 1994]中的 21 式。

#### 4.2.5. 直接最小二乘算法：基于几何距离和二次约束

直接最小二乘算法是一种特别针对于椭圆的算法[Fitzgibbon et al., 1999]。如果被拟合的对象确定是椭圆，那么最合理的约束是判别式  $b^2 - 4ac$  小于零。遗憾的是，在不等式的约束下很难保证求得一个解。二次曲线的系数有一个自由度，即二次曲线的系数同比例增加或减小时，对应的二次曲线不变。因此 Fitzgibbon 简化了不等式约束，令  $4ac - b^2 = 1$ ，使得原来的不等式约束，成为等式约束。这一约束同样可以表示成为二次曲面约束的形式  $\omega^T C \omega = 1$ ，其中

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

于是，曲线拟合问题转化为在一定约束条件下的最小化问题

$$\min_{\omega \neq 0} \varepsilon = \|A\omega\|^2, \omega^T C \omega = 1 \quad (4.31)$$

引入拉格朗日乘子  $\lambda$ ，得到方程

$$E = \|A\omega\|^2 - \lambda(\omega^T C \omega - 1) = \omega^T A^T A \omega - \lambda(\omega^T C \omega - 1) \quad (4.32)$$

然后对两边求导数

$$A^T A \omega = \lambda C \omega \quad (4.33)$$

$$\omega^T C \omega = 1 \quad (4.34)$$

然后就可以求解上面的特征值问题。若某一对  $(\hat{\lambda}, \hat{\mathbf{u}})$  是(4.34)式的解，我们可以找到

到一个  $\mu$ ，令  $\mu = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{u}^T A^T A \mathbf{u}}} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{u}^T C \mathbf{u}}}$ ，那么最终的解是  $\hat{\omega} = \mu \mathbf{u}$ 。

#### 4.2.6. 梯度权重最小二乘算法：基于梯度权重

一般认为，不同点的噪声相互不相关。对于所有的点使用了相同的处理算法，因此，可以假设对于所有的点而言，噪声是个常量。假设对于某个点  $\mathbf{x}_i = (x_i \ y_i)^T$  而言，它的噪声可以假设为零均值的高斯噪声，相关矩阵为  $2 \times 2$  的对角阵  $\sigma^2 \mathbf{I}$ 。所有点的噪声被假设为独立同分布。数据中的噪声影响到几何距离的度量。根据(4.17)式中几何距离的定义，噪声对几何距离  $\alpha_i$  的影响如下

$$\sigma_i^2 = \left( \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} \right)^2 \right) \sigma^2 \quad (4.35)$$

最小二乘估计器的思路一般是估计一组二次曲线参数  $\omega$ ，使得  $|\mathbf{A}\omega|$  最小化，其中  $\mathbf{A}$  在(4.18)式中给出。文献[Papoulis, 1965]证明了如果方程  $\alpha_i = 0$  (4.18)有相同的方差而且统计无关，则归一化最小二乘算法在最小化相关矩阵的情况下，给出了参数  $\omega$  的最优解。如(4.36)式所示，点  $\mathbf{x}_i$  的拉普拉斯函数决定了几何距离  $\alpha_i$  中噪声的方差。由于方程中的方差不是常量，因此归一化最小二乘算法不能给出一个最优解。估计值是一种统计意义上的有偏估计[Kanatani, 1994]。为了使得方程的方差为常量，有效的方法是几何距离  $\alpha_i$  除以它的梯度。最终的代价函数如下

$$E(\omega) = \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i^2}{\left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} \right)^2} \quad (4.36)$$

最小化(4.37)式的代价函数不能通过像前面归一化最小二乘、近似均方误差等算法中讨论的特征值的方法求解。(4.37)式是非线性函数，因此最小化代价函数的问题，没有一个闭合形式的解，需要使用迭代形式的梯度下降法比如 Gauss-Newton 或者 Levenberg-Marquardt 等算法求解。

#### 4.2.7. 算法性能比较

本节评估和比较了之前章节进入的二次曲线拟合算法：归一化的最小二乘算法、Bookstein 算法、近似平方误差算法、统计偏差算法、直接线性二乘算法、梯度权重最小二乘算法。下文我们用 LIN 算法、BOOK 算法、AMS 算法、BIAS

算法、B2AC 算法、GRAD 算法分别对应以上的算法。

本节使用仿真数据测试以上算法的性能。我们在二次曲线上等弧度地取 120 个点。每个采样点叠加均值为零方差为  $\sigma$  的二维高斯白噪声。不同的估计器处理同一组采样数据。二次曲线的中心和长轴的方向与真实值相比较。在实验中，分别增加噪声的方差和减少数据点占二次曲线的比例，生成不同的测试用例。同一组仿真数据由不同的估计器处理，运行 100 次求取平均值作为一组仿真结果。

图 4-4 表示了当方差  $\sigma=12$  个像素，仿真点占整个二次曲线的比例为 1 时的仿真结果。图中黑色点表示仿真点，绿色曲线是二次曲线的真实值。从图上可知，当完整的二次曲线上的点作为拟合的输入值时，噪声对拟合结果影响不大。当在二次曲线在图像上可见比例减少时，拟合的结果逐渐变差。如图 4-5 所示，可见的二次曲线上的点从 80% 减少到 50%，这个算法拟合效果的差异逐渐显现出来。当可见比例为 80% (图 4-5a) 到 70% (图 4-5b) 时，各种算法的几何效果没有太大的差异。当可见比例为 60% 时，拟合的二次曲线从外到内依次为 LIN 算法、BIAS 算法、AMS 算法、GRAD 算法、B2AC 算法和 BOOK 算法，其中后三种算法的拟合结果比较接近真值。当可见比例为 50% 时，拟合的二次曲线从外到内依次为 LIN 算法、AMS 算法、BIAS 算法、B2AC 算法、GRAD 算法和 BOOK 算法，其中 AMS 算法、BIAS 算法、B2AC 算法这三种算法的拟合结果比较接近真值。由实验结果可知，拟合的效果随着二次曲线可见比例的减少而逐渐变差。

同样，当二次曲线的可见比例固定时，噪声的增加对拟合效果的影响也非常明显，如图 4-6，特别是当可见比例比较小的时候。在图 4-6 中，二次曲线的可见比例为 20%，只有一小部分的二次曲线在图像上可见，叠加在每个点上的高斯

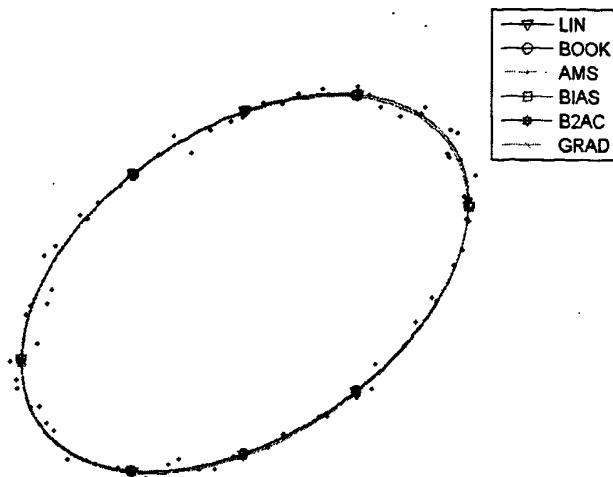


图 4-4. 噪声存在时的二次曲线拟合结果

白噪声分别为  $\sigma=1$  个像素(图 4-6a)、 $\sigma=2$  个像素(图 4-6b)、 $\sigma=7$  个像素(图 4-6c)、 $\sigma=9$  个像素(图 4-6d)。当  $\sigma=1$  个像素时, LIN 算法和 AMS 算法的拟合结果基本相同, BOOK 算法、B2AC 算法和 GRAD 算法的拟合结果接近。随着噪声的增加, LIN 算法、AMS 算法和 BIAS 算法拟合的椭圆逐渐增大, 而其他几种算法拟合的椭圆逐渐缩小。当噪声进一步增加到  $\sigma=7$  个像素和 9 个像素时, 所有的拟合结果都收缩到很小的范围 LIN 算法、AMS 算法、BOOK 算法、BIAS 算法和 GRAD 算法的拟合结果都有超出真值的边界的趋势, 而 B2AC 算法的拟合结果一直比较好地限定在真值的边界也就是绿色曲线的范围内, 这可能是因为 B2AC 算法是一种完全针对于椭圆拟合的算法, 而其他几种算法的约束更加地一般化, 只针对一般的二次曲线。在前文 3.1.2 节的讨论中, 我们知道, 折反射图像上的二次曲线在比较多的情况下是椭圆, 特别是当  $\xi$  接近于 1 时。从定性分析的角度而言, 图 4-5 和图 4-6 很明显地显示出 B2AC 算法对拟合椭圆有更好的效果。



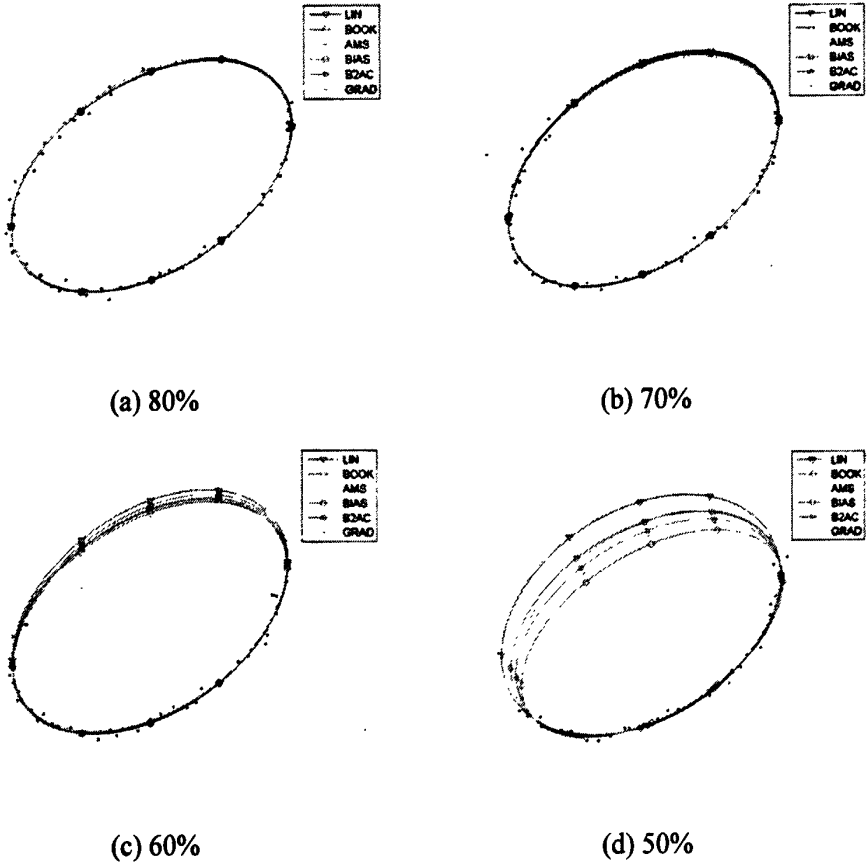
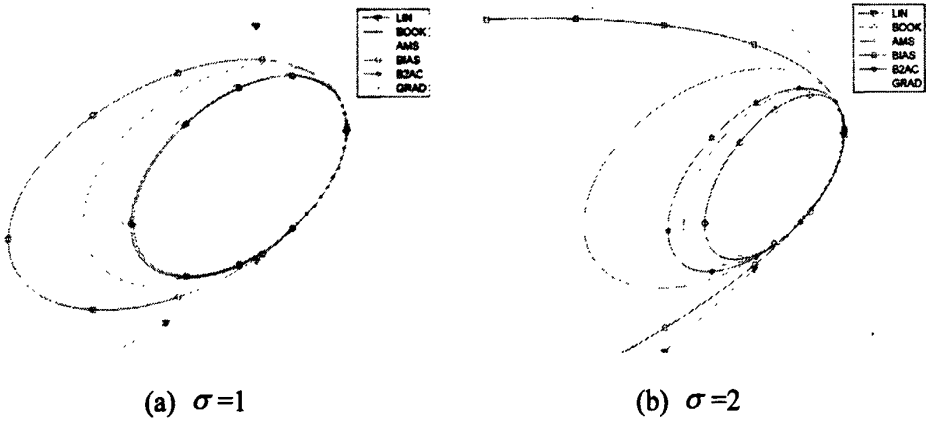
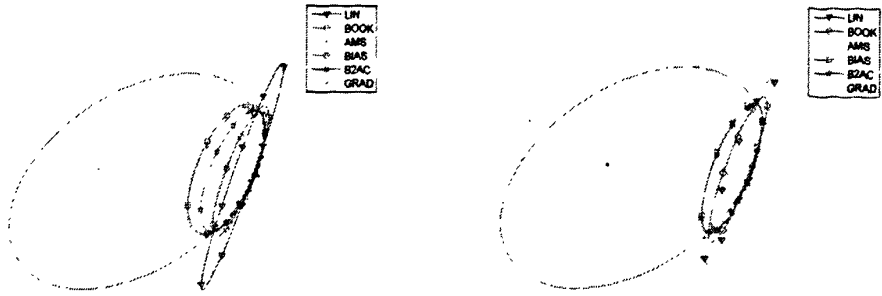


图 4-5. 仿真点占整个二次曲线不同比例下的拟合结果





(c)  $\sigma=7$

(d)  $\sigma=9$

图 4-6. 可见比例为 20% 时, 噪声的变化对拟合结果的影响

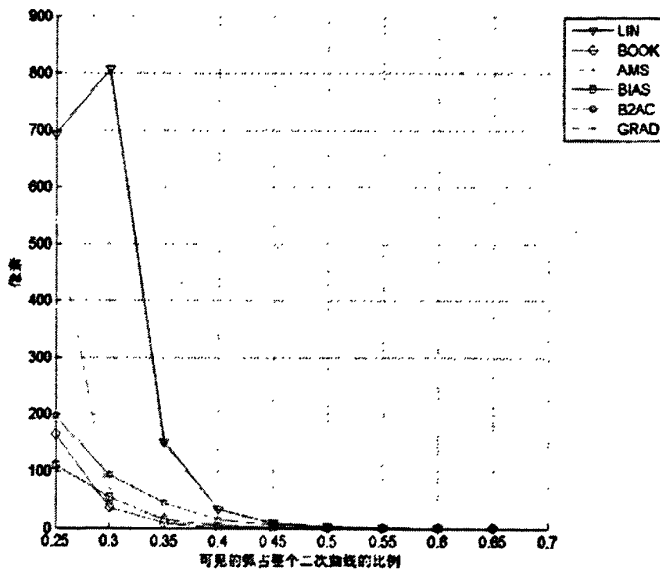


图 4-7. 中心点与真实值的差异

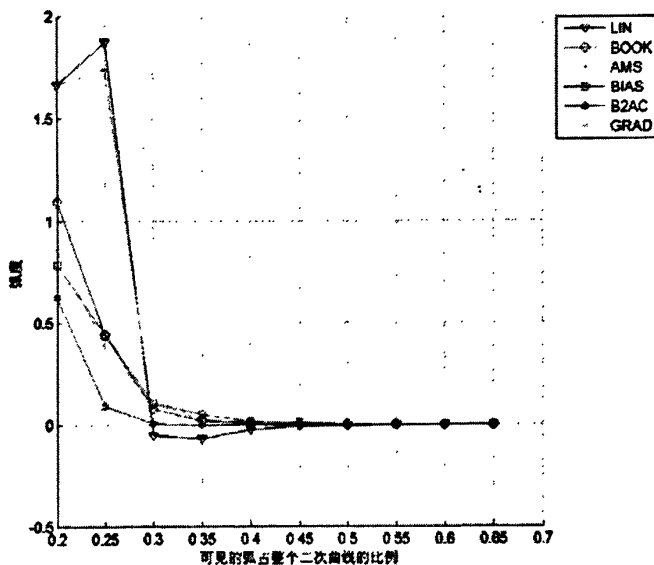


图 4-8. 主轴方向与真实值的差异

接着，我们从定量的角度比较各种算法的效果。我们取定了噪声水平  $\sigma = 3$  个像素，改变二次曲线在图像上的可见比例，每组实验结果是 100 次实验的平均值。然后，我们比较了各种估计器估计出来的二次曲线的中心点(图 4-7)和主轴与 X 轴的夹角(图 4-8)与真实值之间的差异。图 4-7 中，对中心点的估计结果，BOOK 算法和 BIAS 算法的效果优于其他几种算法，而 LIN 算法的效果最差。这是因为 LIN 算法的约束过于简单和一般化，因此拟合的二次曲线变化比较大。在图 4-8 中，主轴方向的估计结果，当可见比例比较小时，各种算法估计的主轴方向和真值都存在一定的差异，随着比例的增加，和真值的差异逐渐趋向于零。B2AC 算法特别针对于椭圆的拟合，因此能够比较快地和真值的差异趋向于零。LIN 算法和 AMS 算法的效果比较接近，BOOK 算法、BIAS 算法和 GRAD 算法的效果比较接近。因此，从比较稀疏的点中拟合二次曲线，B2AC 算法优于其他几种算法的效果，更加详细的分析请参考文献[Fitzgibbon, 1999]。

### 4.3. 单视点折反射系统的单图标定方法

图 4-9 是使用折反射相机(图 1-3b)拍摄的图像。折反射镜面的边界在图像上投影为一个椭圆或者圆。在折反射系统中，有 6 个参数需要估计，包括像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像的中心点坐标  $(u_0, v_0)$ 、有效焦距  $f_e$  以及镜面的参数  $\xi$ 。本节假设镜面参数已知，估计其中的 5 个参数：包括像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像



图 4-9. 单视点折反射图像

的中心点坐标 $(u_0, v_0)$ 、有效焦距 $f_e$ ，讨论如何使用线性的方法求解以上参数，并使用仿真数据和实际图像分析了算法的效果。相机本身的失真包含径向失真和切向失真，由于反射面镜的对称性，径向失真会影响到镜面参数，因此，在实际图像中，我们预先对图像进行了矫正。

#### 4.3.1. 相机参数的初始化

度量平面上的二次曲线和图像平面上的二次曲线之间的关系，如(3.9)式所示。在(3.9)式的两端左乘和右乘矩阵 $\mathbf{K}_M$ ，我们得到

$$\Omega' = \mathbf{K}_M \hat{\Omega} \mathbf{K}_M \quad (4.37)$$

然后将上述式子展开，我们便得到了度量平面和图像平面上二次曲线各个系数之间的对应关系

$$\begin{cases} a' = r^2 \hat{a} \\ b' = rs' \hat{a} + r \hat{b} \\ c' = s'^2 \hat{a} + 2s' \hat{b} + \hat{c} \\ d' = ru_0 \hat{a} + rv_0 \hat{b} + r \hat{d} \\ e' = s' u_0 \hat{a} + u_0 \hat{b} + s' v_0 \hat{b} + v_0 \hat{c} + s' \hat{d} + \hat{e} \\ f' = u_0^2 \hat{a} + 2u_0 v_0 \hat{b} + v_0^2 \hat{c} + 2u_0 \hat{d} + 2v_0 \hat{e} + \hat{f} \end{cases} \quad (4.38)$$

其中  $s' = s/f_2$ 。

如图 4-9 所示，镜面的边界在度量平面上投影为一个圆。假设镜面的边界在

度量平面上的二次曲线为  $\omega = (a' \ b' \ c' \ d' \ e' \ f')^T$ , 则这些参数满足如下约束

$$\begin{cases} a' = c' \\ b' = 0 \\ d' = 0 \\ e' = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

将(4.39)式代入(4.40)式, 我们得到了像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像的中心点坐标  $(u_0, v_0)$  的初始化方程

$$\begin{cases} r = \sqrt{-\frac{\hat{b}^2}{\hat{a}^2} + \frac{\hat{c}}{\hat{a}}} \\ s' = -\frac{\hat{b}}{\hat{a}} \\ u_0 = \frac{\hat{b}\hat{e} - \hat{c}\hat{d}}{\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2} \\ v_0 = \frac{\hat{b}\hat{d} - \hat{a}\hat{e}}{\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2} \end{cases} \quad (4.40)$$

文献[Ying and Hu, 2004]给出了度量平面上几个直线相关的几何不变量, 其中一个与有效焦距  $f_e$  有关, 以上的不变量, 对于所有直线投影的二次曲线都成立。假设直线投影的二次曲线参数为  $\omega_i = (a'_i \ b'_i \ c'_i \ d'_i \ e'_i \ f'_i)^T$ , 因此我们得到  $f_e$  的初始化方程

$$f_e = \sqrt{-\frac{f'_i(b'_i f'_i - d'_i e'_i)}{d'_i(b'_i d'_i - a'_i e'_i)}} \quad (4.41)$$

就此, 所有需要估计的相机参数的初始化方程都已给出。

### 4.3.2. 平行线在图像上的约束

在 3.2.1 节中, 我们证明了一组平行线将在球面上交于两点。考虑到射影几何的唯一性, 一组平行线在图像平面上将投影为一组二次曲线, 并且交于两点(图 4-10)。在 3.2.3 节中, 我们证明了一组平行线在球面上的截面圆与投影中心  $O_C$  构成了一组圆锥, 这组圆锥共享一个公共顶点  $O_C$  以及两条公共母线  $O_C B$  和  $O_C F$ 。每个圆锥  $Q_i$  经过点  $B$  和点  $F$  的切平面, 这些切平面包含了公共母线  $O_C B$  和  $O_C F$ , 因此公共母线垂直于上述切平面的法向量, 如(3.39)式和(3.40)式所示。

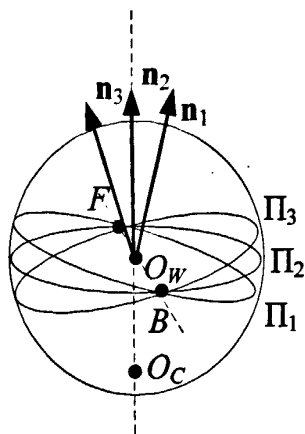


图 4-10. 平面的法向量和公共交点

根据(3.29)和(3.30)式, 公共交点  $L_1$  和  $L_2$  在图像平面上的投影可得

$$\hat{L}_1 = \left( \frac{l_x}{l_z + \xi} r f_e + \frac{l_y}{l_z + \xi} s + u_0, \frac{l_y}{l_z + \xi} f_e + v_0, 1 \right)^T \quad (4.42)$$

$$\hat{L}_2 = \left( \frac{l_x}{l_z - \xi} r f_e + \frac{l_y}{l_z - \xi} s + u_0, \frac{l_y}{l_z - \xi} f_e + v_0, 1 \right)^T \quad (4.43)$$

在无穷远平面上  $L_1 = (l_x \ l_y \ l_z)^T$ , 其中  $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$ , 交点  $L_1$  有可以表示为

$$L_1 = (\cos\theta \sin\varphi \ \sin\theta \sin\varphi \ \cos\varphi)^T \quad (4.44)$$

因此, 交点  $L_1$  和  $L_2$  有 2 个自由度(DOF)。如果有  $m$  幅图像, 就有  $2m+6$  个未知数需要估计, 包括  $2m$  个交点的参数和像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像的中心点坐标  $(u_0, v_0)$ 、有效焦距  $f_e$  以及镜面的参数  $\xi$ 。

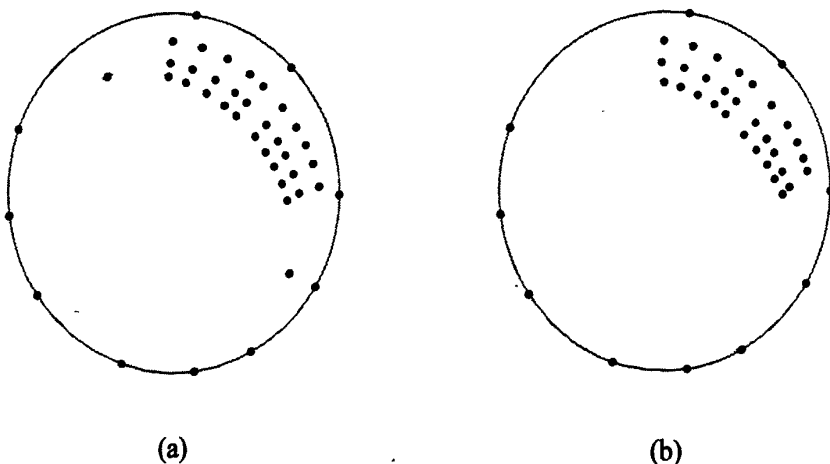


图 4-11. 平行线在图像平面上的投影

如图 4-9 所示, 每个大圆所在的平面, 它的法向量  $\mathbf{n}_i = (\cos\theta_i \sin\varphi_i \quad \sin\theta_i \sin\varphi_i \quad \cos\varphi_i)^T$ 。将(2.17)式代入(3.8)式, 我们得到

$$\tan\theta_i = \frac{e'}{d'}$$

$$\frac{f_e n_x}{n_x} = \frac{f_e}{\cos\theta_i \tan\varphi_i} = \frac{f'}{d'}$$

对以上两个式子整理之后, 我们得到

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{e'}{d'}\right) \quad (4.45)$$

$$\varphi_i = \arctan\left(\frac{d' f_e}{f' \cos\theta_i}\right) \quad (4.46)$$

由此, 我们求得了向量  $\mathbf{n}_i$ 。所有的向量  $\mathbf{n}_i$  组成了矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T \\ \mathbf{n}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{n}_i^T \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

交点  $F$  垂直于所有的向量  $\mathbf{n}_i$ , 我们有如下方程

$$\mathbf{M}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.48)$$

当二次曲线的数量大于等于 3 时,  $\mathbf{M}$  是一个满秩矩阵。(4.46)式是一个超定方程, 因此可以通过求解特征值和特征向量的方法求得。当二次曲线的数量为 2 时, 交点  $F$  是两个法向量的向量积

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad (4.49)$$

当图像没有噪声时, 所有的二次曲线将交于两点, 如图 4-11a 所示。然而, 在实际图像中, 由于成像效果、角点提取等过程中的问题, 图像中往往存在噪声。这些噪声影响到二次曲线的拟合, 假设有  $m$  条二次曲线, 那么这些二次曲线至多会有  $\binom{2}{m}$  个交点, 如图 4-11b 所示。结合(4.45)式, 3.2.3 节中给出的两个约束(3.39)式和(3.40)式包含了周期性的三角函数, 这使得优化的过程成为非凸问题, 可能使得优化参数陷入局部最小值。为了加速优化的速度, 我们需要引入额外的约束, 即公共点和所有二次曲线之间的几何距离

$$\alpha(\hat{\omega}_i, \mathbf{x}_i) = \hat{a}_i x_i^2 + 2\hat{b}_i x_i y_i + \hat{c}_i y_i^2 + 2\hat{d}_i x_i + 2\hat{e}_i y_i + \hat{f}_i \quad (4.50)$$

对一副图像而言，我们需要最小化两个代价函数

$$\min_{p=\{r,s,u_0,v_0,f_e,\xi\}} (n_i, O_c F) \quad (4.51)$$

$$\min_{p=\{r,s,u_0,v_0,f_e,\xi\}} \alpha(\hat{\omega}_i, \hat{L}_1), \alpha(\hat{\omega}_i, \hat{L}_2) \quad (4.52)$$

因此，理论上最少需要一幅图像，图像上至少包含两条直线的投影，便可以标定出折反射系统的参数。该算法的流程如图 4-12 所示。

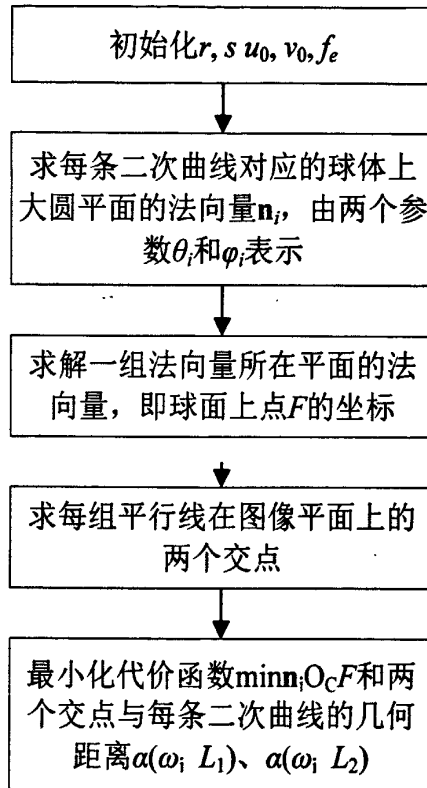


图 4-12. 基于平行线的单图标定算法流程图

### 4.3.3. 实验结果

理论上，标定算法总是能够很好地收敛到最优解。然而在实际图像中，噪声和量化误差会造成角点提取的不准确，进而影响到二次曲线的拟合以后后面的标定算法。在下面的实验中，我们假设镜面参数  $\xi$  已知，所有有 5 个参数需要估计：像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像的中心点坐标  $(u_0, v_0)$ 、有效焦距  $f_e$ 。首先，我们使用仿真数据，验证标定算法的有效性。



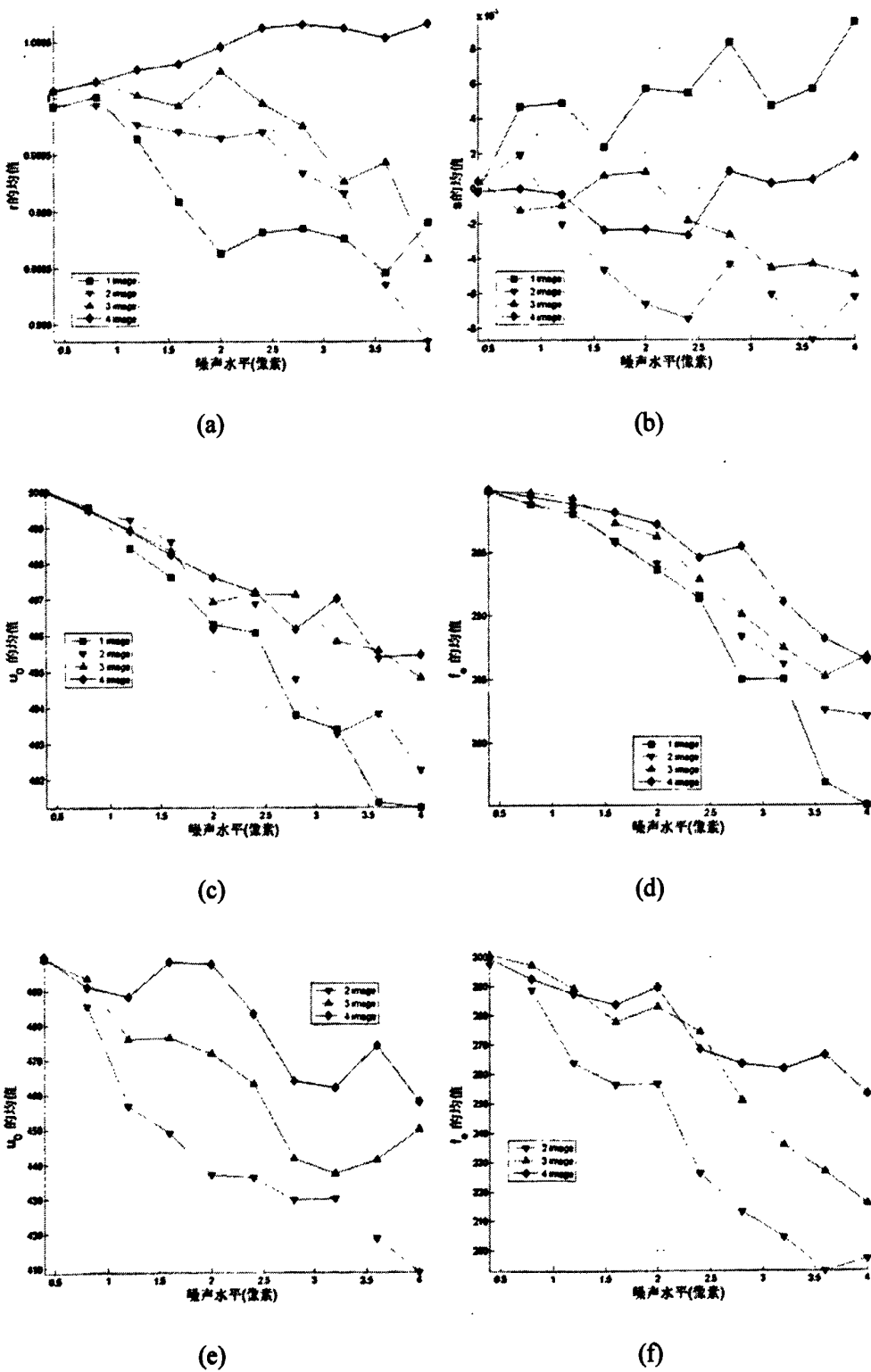


图 4-13. 单图标定算法的仿真结果

### 4.3.3.1. 仿真数据

在仿真实验中,我们预设了如下参数作为真实值: $r=1$ 、 $s=0$ 、 $u_0=500$ 、 $v_0=500$ 、 $f_e=300$ 。图像的分辨率设定为  $1000 \times 1000$ , 镜面参数设定为  $\zeta=0.9$ 。当镜面参数  $\zeta=0.9$ , 投影二次曲线可能为椭圆、抛物线或者双曲线这三种类型的任意一种。根据(3.7)式,  $b^2-ac=1-\xi^2-n_i^2 < 0$  时, 二次曲线是一个椭圆。图像的法向量和 Z 轴的夹角  $0 \leq \varphi < 79.0472^\circ$ 。考虑到镜面的边界, 在实验中, 我们设定  $0 \leq \varphi < 20^\circ$ 。因此我们使用了 4.2.5 节中的直接最小二乘法估计二次曲线的参数。

在仿真图像中, 10 个离散点表示镜面的边界, 并且随机分布在整个边界上。围绕 Z 轴随机转动并有随机扰动的角点平面代表标定板。每个标定板由 4 条线构成, 每条线由 10 个点构成(如图 4-11b), 每个点附加了均值为 0 方差为  $\sigma$  加性高斯白噪声。在仿真实验中, 噪声的方差以步进 0.4 个像素从 0 到 4 个像素。每组实验分别运行 100 次, 求取平均值, 结果如图 4-13。图 4-13a-d 分别显示了像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像的中心点坐标  $u_0$ 、有效焦距  $f_e$ , 由于  $u_0$  和  $v_0$  的统计结果十分相似, 我们只给出了  $u_0$  的仿真实验结果。图 4-13e-f 给出了文献[Barreto and Araujo, 2002]中提出的算法的结果比较, 这种方法至少需要两幅图像。从实验结果中可知, 参数的估计效果随着噪声的增加而变差。然而, 实验结果并没有因此图像数量的增加而有明显的变化, 这可能是由于二次曲线是由一小段弧少非常少的点拟合得到, 因此二次曲线的不准确性影响到了非线性优化的结果。

### 4.3.3.2. 实际图像

在对实际图像的测试中, 我们使用了双曲面镜和 Sony XCD-SX910CR 相机的组合。从双曲面镜的参数中, 可以计算出双曲线的离心率  $\varepsilon=1.3017$ , 从而得到镜面参数  $\zeta=0.9662$  (<http://www.neovision.cz/prods/panoramic/h3s.html>)。图像的分辨率为  $1280 \times 960$ 。透视相机的镜头和成像系统本身存在失真, 为了使得实验更准确, 我们预先对图像进行了矫正, 去除透视相机的径向和切向失真, 如图 4-14。图像的边界和角点被手动提出来, 图 4-15a-b 显示了边界点提取和拟合的过程, 图 4-15c-d 显示了标定板上角点的提取和二次曲线拟合的过程。在实际操作中, 我们对边界点和角点进行了优化, 只需要在一定范围内选择点, 然后自动

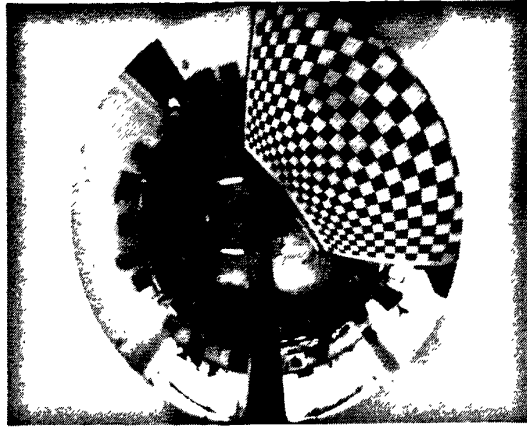
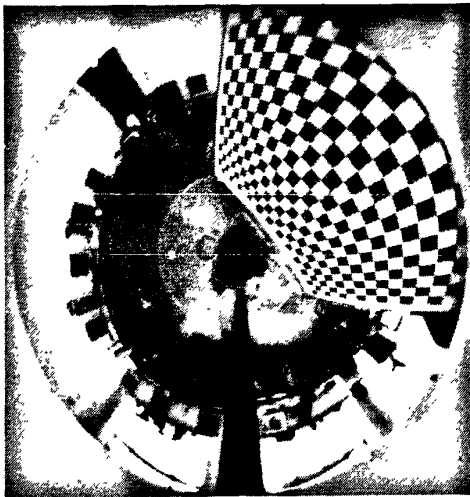


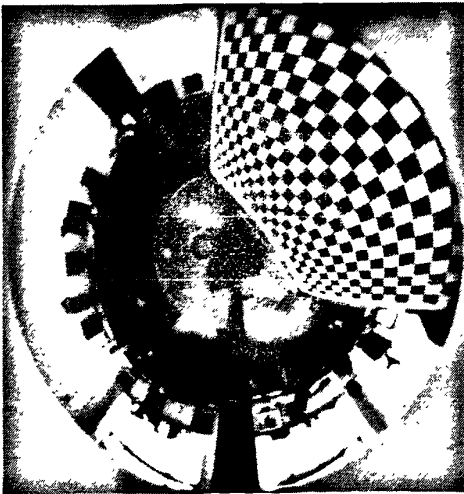
图 4-14 去除径向和切向失真后的图像



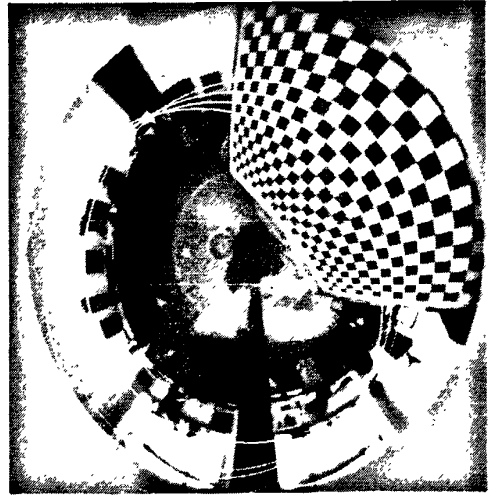
(a)



(b)

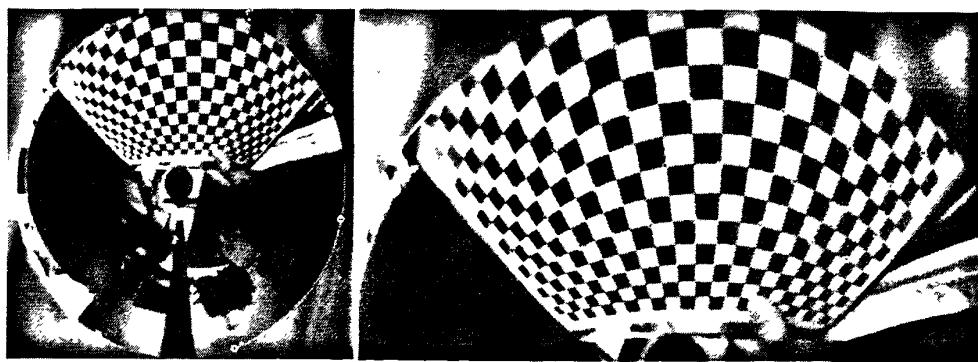


(c)



(d)

图 4-15. 标定和曲线拟合的过程过程



(a)

(b)

图 4-16. 边界点和角点的提取与优化

一副图像	结果	方差
$r$	1.01624	$\pm 6.1636 \times 10^{-4}$
$s$	0.00744	$\pm 2.3 \times 10^{-2}$
$(u_0, v_0)$	(636.7727, 486.4721)	( $\pm 4.1289, \pm 3.8957$ )
$f_e$	335.1572	$\pm 3.4537$
四副图像	结果	方差
$r$	1.0002	$\pm 9.7450 \times 10^{-5}$
$s$	0.0147	$\pm 4.5 \times 10^{-3}$
$(u_0, v_0)$	(635.5244, 480.2509)	( $\pm 1.1578, \pm 1.1607$ )
$f_e$	339.5925	$\pm 0.9399$

表 4-1. 实际图像的实验结果

找到最优的边界点或者角点，如图 4-16 所示，点表示一开始选择的点，圆圈表示优化后的结果。使用 1 幅图像和 4 幅图像的实验结果列在表 4-1 中。从结果中，我们发现，随着图像数量的增加，计算结果的方差减小，这也就意味着优化的残差减小。比较 1 幅图像的标定结果和 4 幅图像的标定结果，两者没有数量级上的太大差异，也就说明我们提出的标定算法，在已知镜面参数的情况下，可以仅仅依靠一副图像，就足够估计出相机的内参，即使二次曲线是任意的类型。在抛物面折反射系统中，所有度量平面上的二次曲线都将是圆。在抛物面折反射系统中，像素的长宽比  $r$  和斜率  $s$ ，使得度量平面上的圆在图像平面上成为椭圆。现今常用的相机，它的像素的长宽比  $r$  和斜率  $s$  已经比较接近理想值 1 和 0，因此抛物面折反射图像上的椭圆非常接近于圆，这使得二次曲线的估计变得简单而且鲁棒。

#### 4.4. 单视点折反射系统的共点线标定法

在本节中,我们将尝试在估计相机内参的同时,估计出镜面的参数。因此,我们需要估计以下6个参数:像素的长宽比 $r$ 、斜率 $s$ 、图像的中心点坐标 $(u_0, v_0)$ 、有效焦距 $f_e$ 以及镜面的参数 $\xi$ 。同时,在本节中,我们将考虑镜头的失真。在文献[Weng et al., 1992]中,作者将失真分为径向失真和切向失真,分别用多项式表述

$$\delta_{\rho_d} = 1 + k_1\rho^2 + k_2\rho^4 + k_3\rho^6 \quad (4.53)$$

$$\delta_{td} = \begin{bmatrix} 2k_3xy + k_4(\rho^2 + 2x^2) \\ k_3(\rho^2 + 2y^2) + 2k_4xy \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。因此,失真函数一共有5个参数 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ 。

##### 4.4.1. 共点线模板的引入

经过3.2.1节中证明,共点线是在图像平面上能够相交于两点的直线组。类似图4-11,共点线在图像平面上也相交于两点(图4-17)。当图像上的点没有噪声和量化误差时,共点线拟合的二次曲线和平行线相同;当图像存在噪声和量化误差时,共点线的投影仍然保持了一个交点。在共点线的投影中,各条直线仍保持一定的联系,在本节的后续章节里,我们将利用这种直线之间的联系,加强二次

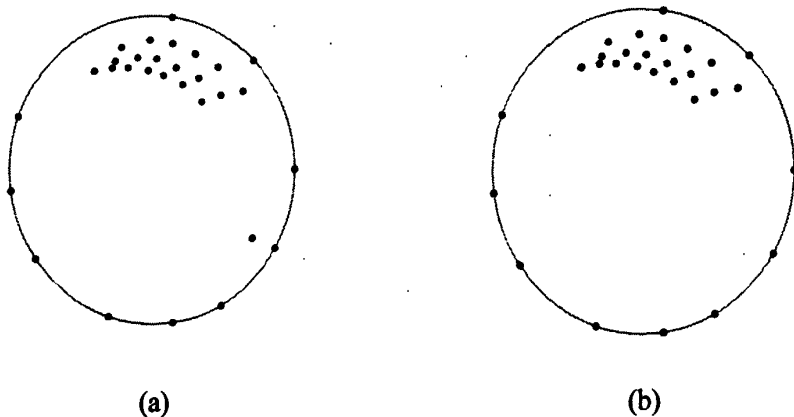


图 4-17. 共点线模板的仿真图像

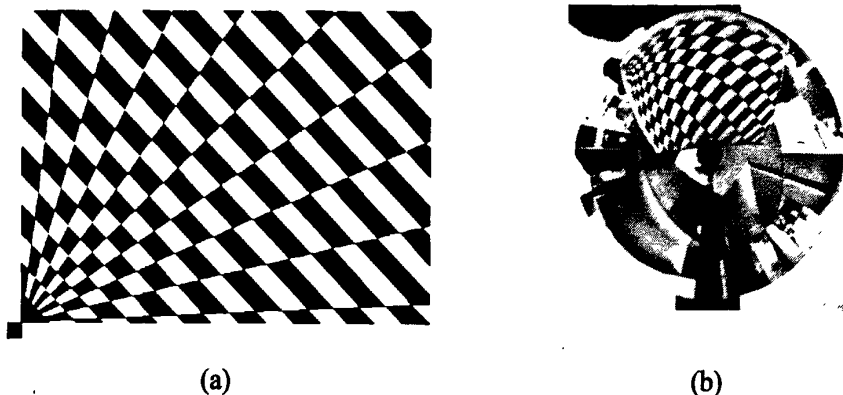


图 4-18. 共点线模板的图像

曲线拟合的准确性，从而增强相机参数估计的准确性。

我们设计了如图 4-18a 所示的共点线标定板。该标定板由一系列射线组成，为了方便提取角点，我们仿照传统棋盘格标定板的形式。图像上公共交点的准确位置对于共点线系统非常重要。我们增加了左下角黑色方格，方便公共交点的提取。

#### 4.4.2. 相机参数的初始化

我们需要初始化以下参数：像素的长宽比  $r$ 、斜率  $s$ 、图像的中心点坐标  $(u_0, v_0)$ 、有效焦距  $f_e$  以及镜面的参数  $\zeta$ ，以及 5 个失真参数  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ 。类似于 4.3.1 节，我们初始化  $r=1, s=0$ ，使用镜面的边界初始化

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\hat{b}\hat{e} - \hat{c}\hat{d}}{\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2} \\ v_0 = \frac{\hat{b}\hat{d} - \hat{c}\hat{e}}{\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2} \end{cases}$$

假设主点  $\hat{O}$  在图像的中心。第三章证明了，在无穷远平面上原点  $O$  关于二次曲线  $\Omega_i$  的极线经过点  $L$  (图 4-19)。这一性质在图像平面上同样成立。参考(3.20)式，我们求得了点  $L$  在图像平面上的坐标

$$\begin{bmatrix} (\hat{\Omega}_1, \hat{O})^T \\ (\hat{\Omega}_2, \hat{O})^T \\ \vdots \\ (\hat{\Omega}_i, \hat{O})^T \end{bmatrix} \hat{L} = 0 \tag{4.55}$$

直线  $\hat{\mu}$  经过点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 、 $\hat{O}$  和  $\hat{L}$ ，我们得到直线  $\hat{\mu} = \hat{L} \wedge \hat{O}$ 。点  $\hat{M}$  是直线  $\hat{\mu}$  和无穷远直线  $\hat{\pi}_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$  的交点。根据定义，二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  的直径是点  $\hat{M}$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  的极线。考虑到(3.34)式，每条直径  $\hat{\Omega}_i \hat{M}$  和直线  $\hat{\mu}$  相交于二次曲线点  $\hat{\Omega}$  的中心点  $\hat{C}$ ，如图 4-19。由此，点  $\hat{C}$  可得

$$\begin{bmatrix} (\hat{\Omega}_1 \hat{M})^T \\ (\hat{\Omega}_2 \hat{M})^T \\ \vdots \\ (\hat{\Omega}_i \hat{M})^T \end{bmatrix} \hat{C} = 0 \tag{4.56}$$

根据(3.33)式，点  $\hat{L}_2$  可得，即  $\hat{L}_2 = 2\hat{C} - \hat{L}_1$ ，得到了点  $\hat{L}_2$  之后，便可以重新估计每条二次曲线  $\hat{\Omega}_i$ 。此时，所有的二次曲线都交于两个公共点  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 。若二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  经过点  $L_1$ 、 $L_2$ ，则直线  $\mu$  关于二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  的极线在直线  $\eta$  上。参考(3.27)式，直线  $\hat{\eta}$  是如下齐次方程的解

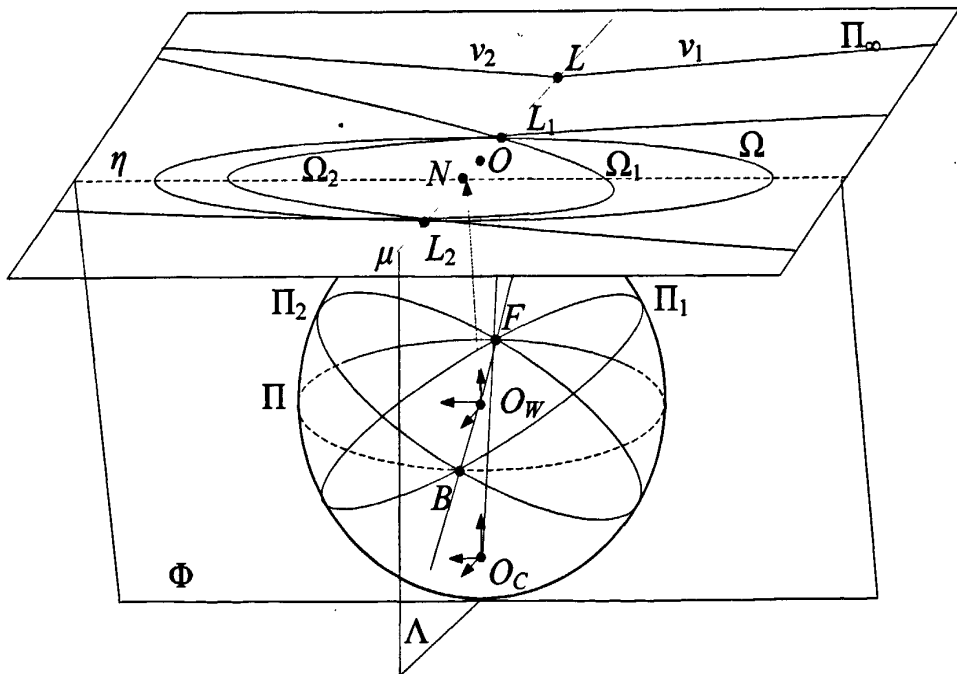


图 4-19. 共点线在无穷远平面上的投影

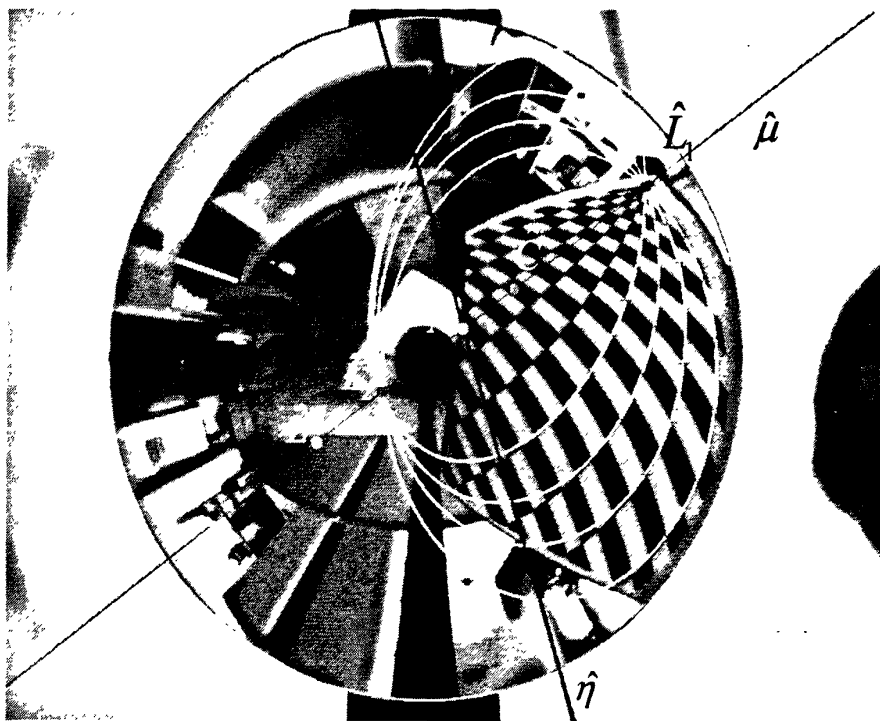


图 4-20. 在图像平面上初始化的参数点

$$\begin{bmatrix} (\hat{\Omega}_1^* \hat{\mu})^T \\ (\hat{\Omega}_2^* \hat{\mu})^T \\ \vdots \\ (\hat{\Omega}_n^* \hat{\mu})^T \end{bmatrix} \hat{\eta} = 0 \quad (4.57)$$

其中  $\hat{\Omega}_i^*$  是二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  的对偶曲线。如图 4-19 所示，直线  $\hat{\mu}$  和直线  $\hat{\eta}$  的交点  $\hat{N}$  可得，即  $\hat{N} = \hat{\mu} \wedge \hat{\eta}$ 。我们已经得到图像平面上的点  $\hat{L}$  和点  $\hat{N}$ 。这两个点在度量平面上的对应点  $L'$  和  $N'$  的笛卡尔坐标如下

$$L' = \mathbf{K}_M^{-1} \hat{L} = \begin{pmatrix} l_x f_e & l_y f_e \\ l_z & l_z \end{pmatrix}^T \quad (4.58)$$

$$N' = \mathbf{K}_M^{-1} \hat{N} = \begin{pmatrix} -\frac{l_x l_z}{l_x^2 + l_y^2} f_e & -\frac{l_y l_z}{l_x^2 + l_y^2} f_e \end{pmatrix}^T \quad (4.59)$$

根据以上两个式子，经过整理之后，我们得到了焦距  $f_e$  的方程

$$f_e = \text{mean} \left( \sqrt{\frac{-\|\mathbf{K}_M^{-1} \hat{L}\|^2 \mathbf{K}_M^{-1} \hat{N}}{\mathbf{K}_M^{-1} \hat{L}}} \right) \quad (4.60)$$



其中，括号中的除法表示向量的对应元素相除，然后求向量的各个元素的均值。

最后，参考(3.25)式，镜面参数  $\xi$  可以求得， $\xi = \sqrt{\{\hat{O}, \hat{L}; \hat{N}, \hat{C}\}}$ 。

考虑到镜面的对称性，我们将径向失真归并到镜面参数  $\xi$  中。因此，仅需要估计切向失真参数  $k_4$ 、 $k_5$ ，并把这两个参数初始化为零，即  $k_4 = 0$ 、 $k_5 = 0$ 。此时，我们已经求得了所有参数的初始化值。图 4-20 给出了增加了公共交点的约束后，二次曲线的拟合结果，已经标定过程中的关键点和直线的位置。

当  $l_2 = 0$  时，点  $\hat{L}$  在无穷远处，值得注意的时候，公式(4.56)仍然正确。而点  $\hat{N}$ 、 $\hat{C}$  和点  $\hat{O}$  重合，仍可使用上述的公式初始化相机参数。

#### 4.4.3. 共点线标定算法

在图像平面上，公共交点中的一个  $\hat{L}_1$  在我们的算法中预先得到。我们需要估计另一个交点  $\hat{L}_2$ ，并可以矫正二次曲线的估计参数。已知点  $\hat{L}_1$  和点  $\hat{C}$ ，就可以求得点  $\hat{L}_2$ 。所有的二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  都应经过两个公共点，因此增加了点  $\hat{L}_2$  之后，二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  可以重新估计。而后，更新点  $\hat{L}$ 、 $\hat{C}$  和直线  $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\eta}$  的坐标。

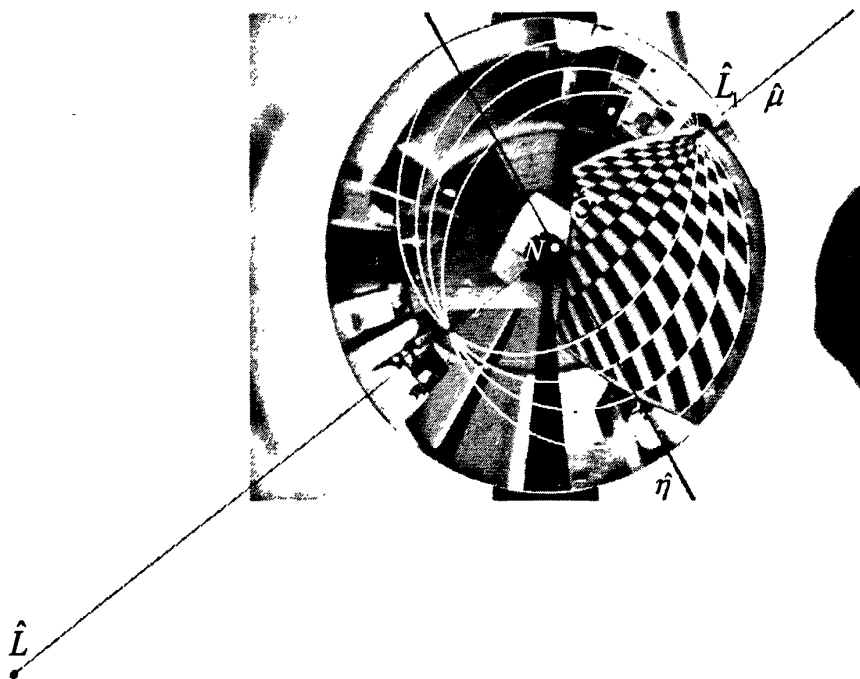


图 4-21. 在图像平面上经过矫正后的参数点

然而，点  $\hat{L}_2$  估计的坐标可能并不完全正确，因此我们引入了新的约束。在无穷远平面上，直线  $OL$  正交于平面  $\Lambda$ ，同时对称轴  $OO_C$  也垂直于无穷远平面  $\Pi_\infty$ 。直线  $\eta$  垂直于直线  $\mu$ ，所以直线  $\eta$  垂直于平面  $\Lambda$ 。这一性质在度量平面上保持不变。因此，在度量平面上，直线  $\eta'$  垂直于直线  $\mu'$

$$(\mathbf{K}_M^T \hat{\mu})^T \Omega_\infty \mathbf{K}_M^T \hat{\eta} = 0 \tag{4.61}$$

其中  $\Omega_\infty = \text{diag}[1 \ 1 \ 0]$ 。

点  $\hat{L}_2$  在直线  $\hat{\mu}$  上移动，使得(4.61)的最小化，同时也更新了二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  的参数。之后，点  $\hat{L}$ 、点  $\hat{N}$ 、二次曲线  $\hat{\Omega}$  的中心点  $\hat{C}$  被重新估计，镜面参数  $\xi$  和焦距  $f_e$  也被更新。最后，角点被重投影到图像平面上，所有的参数  $\{r, s, u_0, v_0, f_e, \xi, k_4, k_5\}$  经过全局优化之后，得到比较准确的估计值。

图 4-21 中，点  $\hat{L}_2$  经过调整之后，点  $\hat{L}$  的位置也随之调整。二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  被重新估计，直线  $\hat{\mu}$  和  $\hat{\eta}$  渐渐趋向于正交。二次曲线  $\hat{\Omega}_i$  的估计参数相比于初始化的时候，更加接近共点线所在的二次曲线。整个算法的流程如图 4-22 所示。

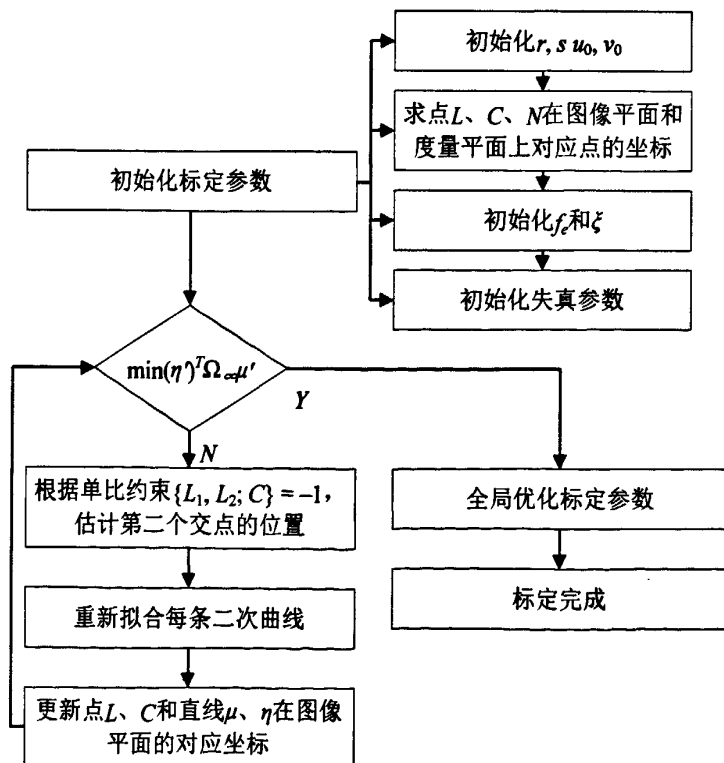


图 4-22. 共点线标定算法流程图

#### 4.4.4. 实验结果

在实际应用中, 标定算法受到各种噪声, 如系统噪声和量化误差等的影响。基于直线性质的标定算法中, 二次曲线的拟合受到最严重的影响。为此, 我们设计了特殊的共点线标定模板, 共点线上的角点被检查和提取出来。在仿真实验中, 每条直线由 10 个点构成, 每幅图像生成 4 条直线。如今的相机一般而言满足方形像素的条件, 因此我们假设斜率  $s=0$ 。

文献[Barreto and Araujo, 2002]中提供针对抛物面折反射相机的标定工具箱, 更够比较有效地估计抛物面折反射相机参数。同时, 作者也提供了针对一般情况的标定工具箱。但是由于负责的非线性优化和不准确的二次曲线估计, 该工具箱往往不收敛。我们的算法与文献[Mei and Rives, 2007]中的算法提供的标定工具箱做比较。该工具箱可以处理所有类型的单视点折反射系统, 并且一般能够收敛。

##### 4.4.4.1. 仿真数据

首先, 我们在仿真实验中验证我们提出的算法的性能。在仿真实验中, 折反射系统的参数被设定如下:  $r=1, s=0, u_0=500, v_0=500, f_e=300$  以及  $\xi=0.9$ 。图像的分辨率为  $1000 \times 1000$ 。二次曲线的拟合在标定算法中是非常重要的环节。我们假设直线图像都是椭圆, 因此我们使用了针对椭圆的二次曲线估计算法[Fitzgibbon et al., 1999]。

仿真图像中, 镜面的边界又 10 个点构成。4 条直线组成了标定模板。在每幅图像中, 标定模板在边界内随机旋转和扰动。在每条直线上, 我们旋转了十分之一二次曲线上的 10 个点。然后加上均值为 0 方差为  $\sigma$  的高斯白噪声。方差从 0.5 个像素到 4 个像素, 以 0.5 个像素为步进, 图像的数量从 2 幅到 6 幅, 以 2 幅为步进逐次生成仿真数据。对于每种情况, 我们都进行了 1000 次测试, 并求得均值和方差。

如图 4-23 所示, 相机参数  $u_0$ 、 $v_0$ 、 $f_1$ 、 $f_2$  和  $\xi$  的实验结果分别显示了各自的均值和方差随着噪声水平和图像数量的变化。由图中可知, 估计结果的方差和噪声水平成正比而与图像数量成反比。均值背离真实值的幅度也有类似的性质。 $u_0$ 、 $v_0$  的均值较之其他三个参数收噪声的影响较小。这可能是由于可能是由于成像系

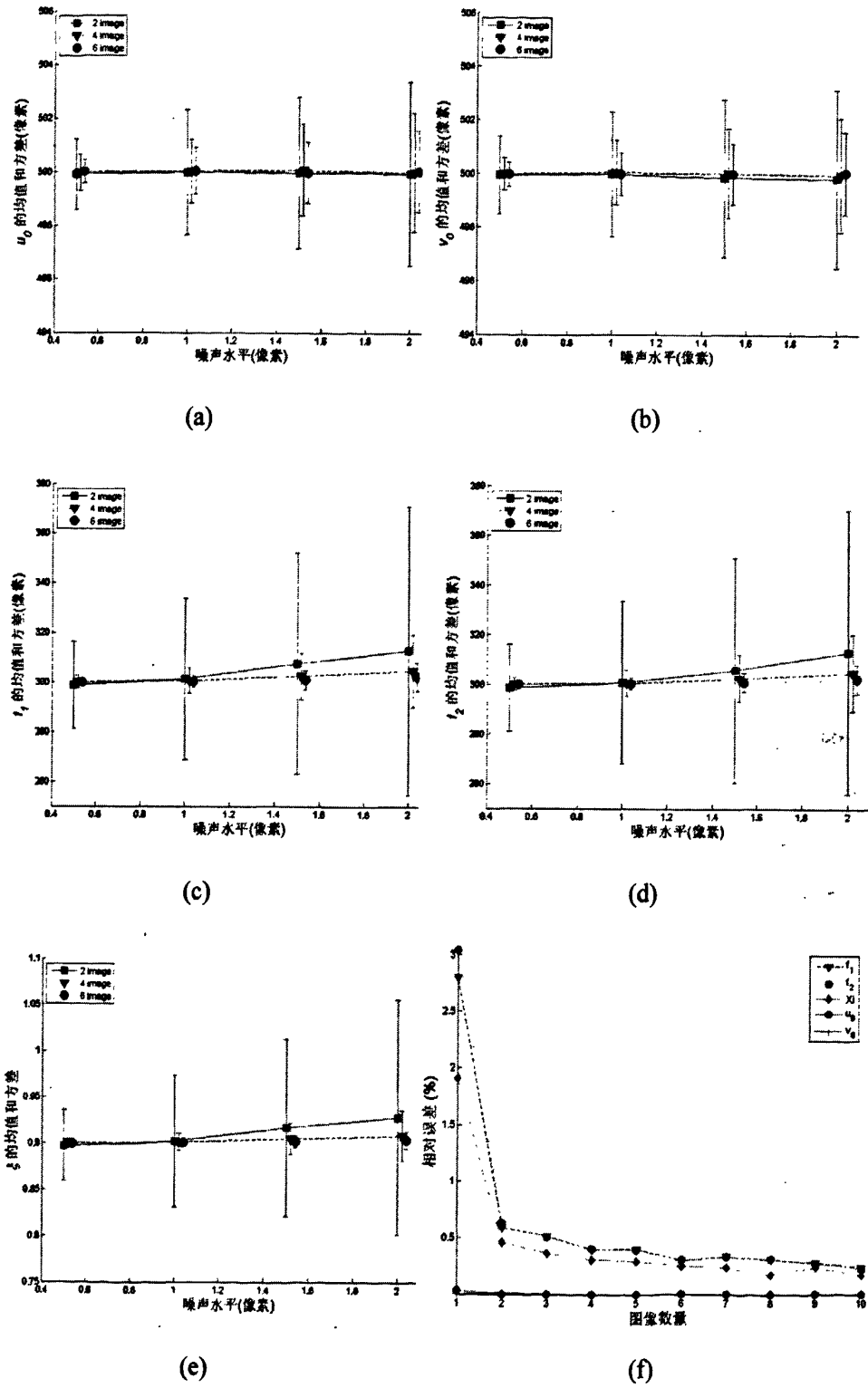


图 4-23. 共点线标定算法的仿真实验结果

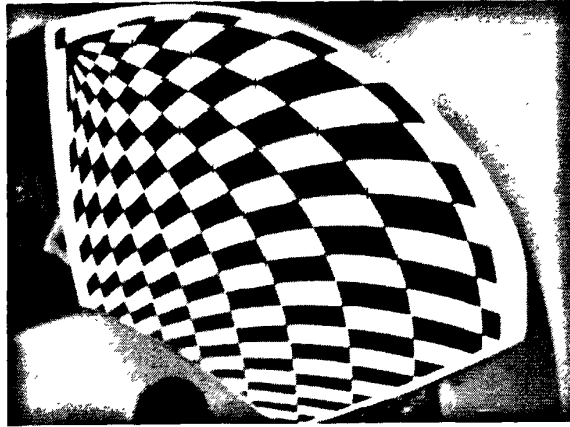


图 4-24. 共点线标定模板提取角点

统的中心对称性,使得估计值比较鲁棒。图 4-23f 显示了,使用图像数量和参数相对于真值的误差之间的关系。随着图像数量的增加,参数估计结果改善。

4.4.4.2. 实际图像

在实际图像的测试中,我们使用了双曲面镜和 Sony XCD-SX910CR 相机的组合。从双曲面镜的参数(<http://www.neovision.cz/prods/panoramic/h3s.html>)中,

参数	结果	方差
$(u_0, v_0)$	(637.25, 473.08)	( $\pm 0.2126, \pm 0.2617$ )
$(f_1, f_2)$	(333.63, 333.09)	( $\pm 1.2295, \pm 1.1304$ )
$\xi$	0.9617	$\pm 0.0032$
$(k_3, k_4)$	(0.0086, -0.0075)	
$(e_u, e_v)$	(0.6108, 0.5560)	

表 4-2. 共点线标定算法的实际图像测试结果

参数	结果	方差
$(u_0, v_0)$	(639.37, 474.92)	( $\pm 1.6451, \pm 1.3889$ )
$(f_1, f_2)$	(372.13, 372.62)	( $\pm 26.6492, \pm 26.6576$ )
$\xi$	1.1860	$\pm 0.1555$
$(k_3, k_4)$	(0.0133, -0.0129)	
$(e_u, e_v)$	(0.2138, 0.1835)	

表 4-3. Mei 算法的测试结果

参数	结果	方差
$(u_0, v_0)$	(639.16, 474.92)	(0.2556, 0.3214)
$(f_1, f_2)$	(323.45, 325.25)	(2.0346, 2.1168)
$\xi$	0.9481	0.0053
$(k_3, k_4)$	(0.0115, -0.0020)	
$(e_u, e_v)$	(0.7871, 0.6813)	

表 4-4. 使用共点线标定板的 Mei 算法的测试结果

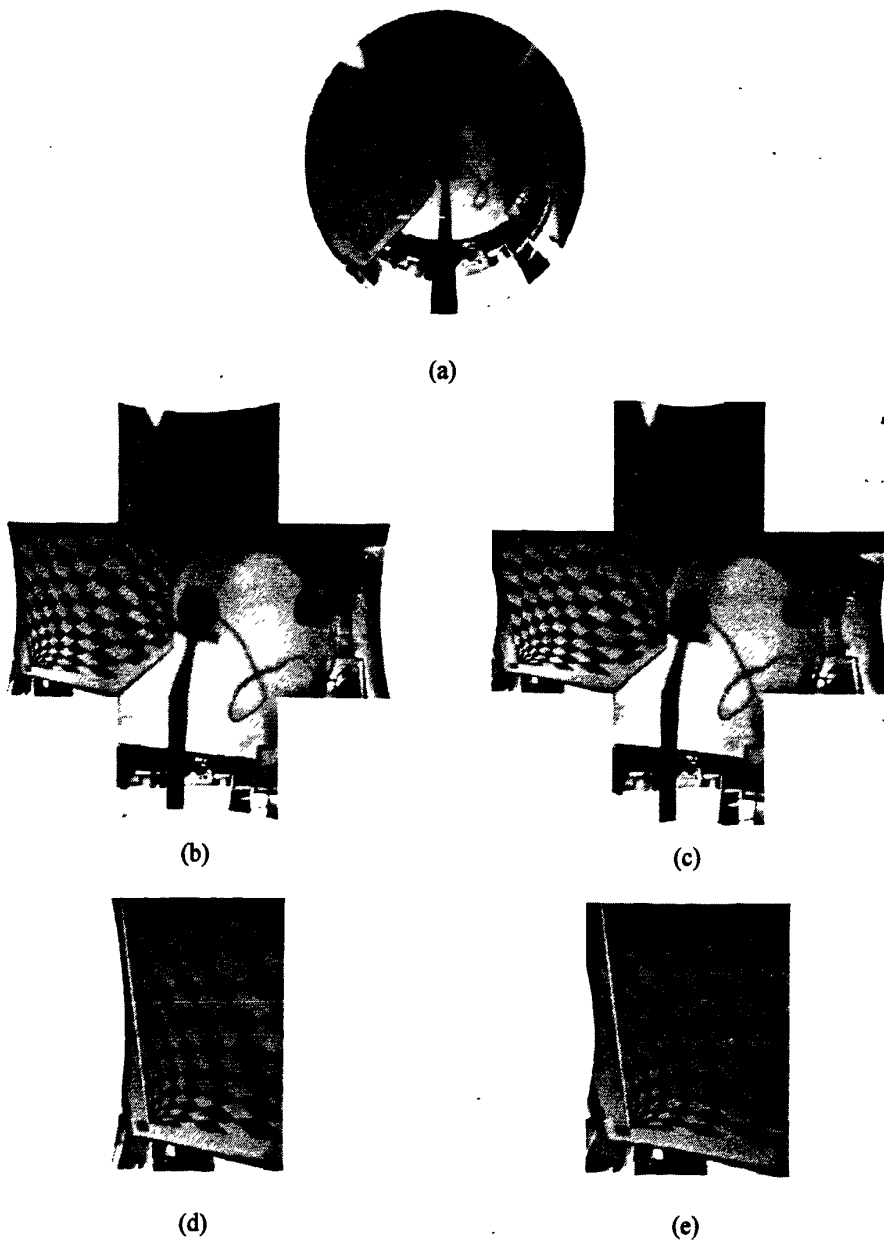


图 4-25. 使用不同标定结果将折反射图像投影到立方体的展开图

可以计算出双曲线的离心率  $\varepsilon = 1.3017$ , 从而得到镜面参数  $\xi = 0.9662$ 。图像的分辨率为  $1280 \times 960$ 。相机的径向失真归入到镜面参数中, 我们仅估计切向失真参数  $k_4$  和  $k_5$ 。我们分别在二次曲线上取 7 个点, 图像边界上取 6 个点(图 4-24)。我们使用了 5 幅图像进行标定, 参数的估计结果在表 4-2 中, 其中  $(e_u, e_v)$  表示重投影误差。文献[Mei and Rives, 2007]提供的标定工具箱的参数估计结果列在表 4-3 中, 使用了 10 幅图像。我们对该工具箱做了修改, 使得它可以处理共点线标定板作为输入数据, 实验结果在表 4-4 中。从表 4-3 和表 4-4 中, 不难发现镜面参数的估计结果影响到焦距的准确性, 两者具有一定的正相关性。即使镜面参数的微小变化也可能引起焦距估计比较大的变化。结果显示, 使用共点线标定板的结果由于使用传统标定板, 而本文提出的分布优化的方法使得镜面参数更加接近真值。

有许多种展开全景图像的方法, 这些方法将球面映射到不同的面上, 比如圆柱面、立方体的 6 个面, 立方体的 4 个面等等。我们使用的折反射相机, 垂直方向的视角为  $212^\circ$ , 我们将全景图像展开到立方体的 5 个面上: 前、后、左、右、下 5 个面, 每个面的视场为  $90^\circ \times 90^\circ$ , 如图 4-25。图 4-25b 使用了表 4-2 的结果, 图 4-25c 使用了表 4-3 的结果。从图 4-25b-c 的图像中, 当参数正确时, 全景图像上严重失真的曲线被矫正为直线, 这验证了共点线标定算法的有效性。

## 4.5. 小结

本章首先回顾了儿种常用的二次曲线拟合算法, 包括归一化的最小二乘法、Bookstein 算法、近似均方算法、统计偏差算法、直接最小二乘法、梯度权重最小二乘法, 而后以仿真实验验证和比较了各种算法的性能。通过实验, 我们发现直接最小二乘法的估计效果优于其他儿种算法。在我们的应用中, 需要在极少的点中估计出二次曲线的参数, 这些点仅分布在二次曲线的四分之一。由于镜面参数的关系, 二次曲线又以椭圆为主, 直接最小二乘法针对于椭圆, 因此效果优于其他算法。对于折反射系统中, 除了传统相机的 5 个内参需要估计以外, 还需要再考虑一个额外的参数, 即镜面参数。在更一般的模型中, 还需要考虑成像系统的失真。结合第三章的推导, 我们分两种情况, 提出了两种折反射系统标定方法。当镜面参数已知时, 我们利用了传统的标定模板, 将平行线的约束引入到标定算

法中,提出了平行线模板的标定算法,并在理论证明和实际数据两个方面,验证了该算法最少需要一张折反射图像。镜面参数未知是更加普遍的情况,而且成像系统也存在失真。我们引入了共点线模板,加入直线之间的关系作为约束,以此优化二次曲线的估计,从而能够更加鲁棒地估计相机的内参和镜面参数。我们利用仿真实验,考查了以上两种算法的性能,并且与现有的算法进行比较。最后,我们将折反射图像展开到立方体的5个表面上,验证标定方法的有效性。



## 5. 全景图像的场景与运动同时重建

在前面的章节里,我们分析和研究折反射系统的几何模型,提出了两种标定成像系统相关参数的方法。为了使得折反射相机更好地应用到机器人导航等领域,我们将在本章中,研究和讨论使用折反射系统实现运动和场景同时重建的方法。本章首先列举了几种计算摄像机运动和场景重建的常用算法,在此基础上进行拓展,推广了原有的算法,使得原有的线性解法可以应用到非线性的折反射系统中。最后,我们使用图像序列验证了算法的正确性。

### 5.1. 传统相机的运动与场景同时重建

假设空间中的一点  $\mathbf{X}$ , 用齐次坐标表示为  $4 \times 1$  的向量。经过透视变换, 空间中的点被投影到某个平面上的点  $\mathbf{x}$ , 点  $\mathbf{x}$  和点  $\mathbf{X}$  之间投影关系表示为一个  $3 \times 4$  的矩阵  $\mathbf{P}$ 。

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (5.1)$$

相机运动是一种单纯的刚体运动, 因此, 如果点  $\mathbf{x}$  在归一化的平面上, 则

$$\mathbf{P} = [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}]$$

如果点  $\mathbf{x}$  在图像平面上, 在传统相机中, 我们定义了一个放射矩阵  $\mathbf{K}$ , 从归一化平面投影到图像平面则

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R} \quad \mathbf{t}]$$

在折反射系统中, 非线性的投影函数将点  $\mathbf{X}$  投影到图像平面上的点  $\mathbf{x}$ , 即

$$\mathbf{x} = f([\mathbf{R} \quad \mathbf{t}]\mathbf{X})$$

为了简化问题, 我们仅分析归一化平面到空间点之间的运动关系, 即旋转和平移。

#### 5.1.1. 传统相机的对极几何

相机之间的运动仅有旋转和平移, 如图 5-1。假设相机  $C$  在坐标原点, 则透视矩阵  $\mathbf{P} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$ , 相机  $C'$  的透视矩阵表示为  $\mathbf{P}' = [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}]$ 。空间中某一点  $\mathbf{X}$ , 在相机  $C$  上投影为  $\mathbf{x}$ , 在相机  $C'$  上投影为  $\mathbf{x}'$ 。

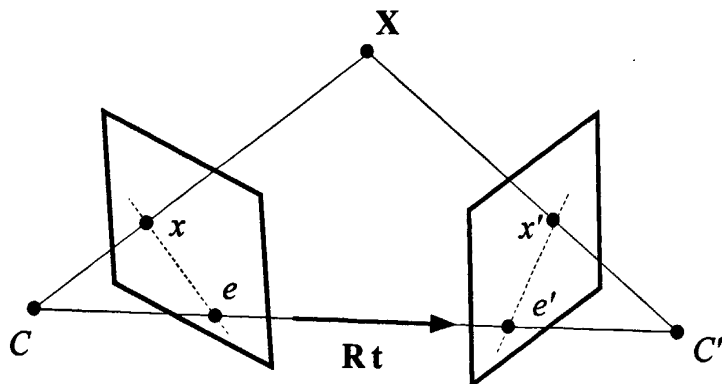


图 5-1. 对极几何

$$\mathbf{x} \sim [\mathbf{I} \ 0] \mathbf{X}$$

$$\mathbf{x}' \sim [\mathbf{R} \ \mathbf{t}] \mathbf{X}$$

$\sim$ 表示左右两边的向量相差一定的比例系数，图像坐标  $\mathbf{x} = (x \ y \ 1)^T$ 。点  $\mathbf{X}$  和两个图像平面存在一定的约束。点  $C$ 、 $C'$  和  $\mathbf{X}$  在同一个平面上，那么直线  $CC'$ 、 $CX$  和  $C'X$  共面

$$(\mathbf{C}\mathbf{X} \times \mathbf{C}'\mathbf{X}) \cdot \mathbf{C}\mathbf{C}' = 0 \tag{5.2}$$

经过整理，我们得到如下关系

$$\mathbf{x}'^T (\mathbf{t} \times \mathbf{R}) \mathbf{x} = 0$$

向量积可以表示为反对称矩阵的乘积，即  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}$ ，上式重写为

$$\mathbf{x}'^T [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{x} = 0 \tag{5.3}$$

其中  $[\mathbf{t}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

定义基本阵  $\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$ 。分解矩阵  $\mathbf{E}$  可以得到旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和平移向量  $\mathbf{t}$ 。在文献 [Ma, 2003]，作者提出了一个分解基本矩阵  $\mathbf{E}$  的方法。设

$$R_z \left( \frac{\pi}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

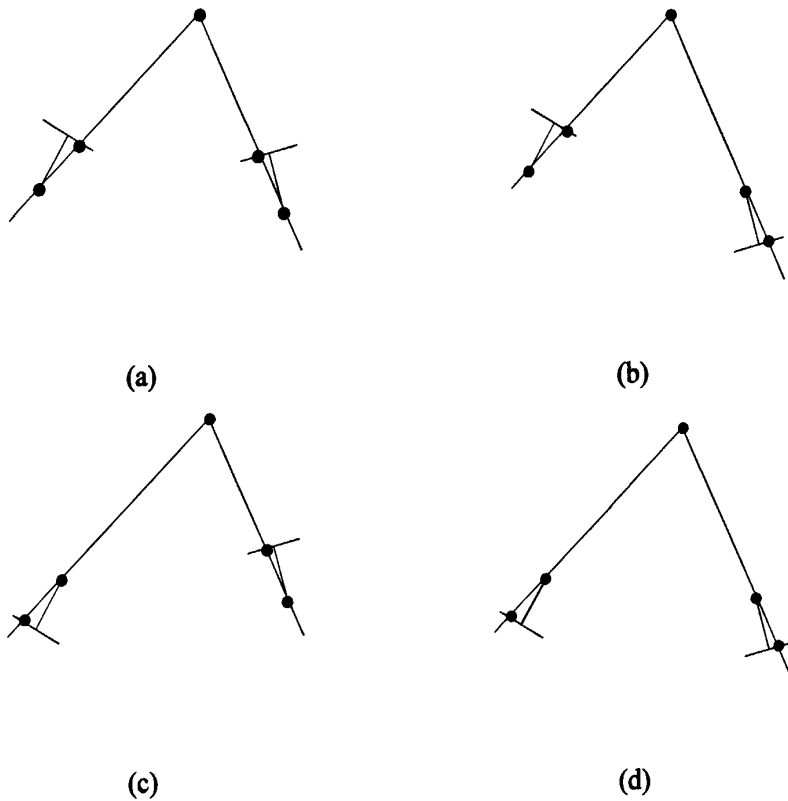


图 5-2. 相机与空间点之间的位置关系

对  $\mathbf{E}$  做奇异值分解之后  $\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 其中  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$  是两个正交阵,  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}[1 \ 1 \ 0]$ 。因此, 我们得到了  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{t}$  的两组解

$$\begin{cases} (\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_1) = \left( \mathbf{U}\mathbf{R}_z\left(+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \mathbf{U}\mathbf{R}_z\left(+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{V}^T \right) \\ (\mathbf{R}_2, \mathbf{t}_2) = \left( \mathbf{U}\mathbf{R}_z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \mathbf{U}\mathbf{R}_z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{V}^T \right) \end{cases} \quad (5.4)$$

值得注意的是  $-\mathbf{E}$  同样满足(5.3)式, 所以我们有 4 组  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{t}$  的可能解(图 5-2)。这 4 组解得到的图像上的投影可能在相机前方也可能在背后, 正确的解是所有的投影点都在相机前方的一组(图 5-2a)。

### 5.1.2. 传统相机的运动轨迹估计

由上一节的讨论可知, 相机的旋转和平移通过分解基本阵得到, 因此, 求得了基本阵也就意味着得到了相机的运动轨迹。本节我们将讨论针对传统相机的计算基本阵的方法。

一个实数非零矩阵是基本阵, 则矩阵  $\mathbf{E}$  的秩为 2, 因此矩阵  $\mathbf{E}$  的行列式为 0

[Faugeras, 1993]:

$$\det(\mathbf{E}) = 0 \quad (5.5)$$

$$\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{E} - \frac{1}{2}\text{trace}(\mathbf{E}\mathbf{E}^T)\mathbf{E} = 0 \quad (5.6)$$

(5.6)式包含了(5.5)式的约束。将(5.3)式展开后,我们得到如下等式

$$xx'E_{11} + xy'E_{12} + xE_{13} + yx'E_{21} + yy'E_{22} + yE_{23} + x'E_{31} + y'E_{32} + E_{33} = 0$$

对于一组输入点对,可以构造矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1x'_1 & x_1y'_1 & y_1x'_1 & y_1y'_1 & x_1 & y_1 & x'_1 & y'_1 & 1 \\ x_2x'_2 & x_2y'_2 & y_2x'_2 & y_2y'_2 & x_2 & y_2 & x'_2 & y'_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ix'_i & x_iy'_i & y_ix'_i & y_iy'_i & x_i & y_i & x'_i & y'_i & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

使得  $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , 其中  $\mathbf{e} = [E_{11} \ E_{12} \ E_{13} \ E_{21} \ E_{22} \ E_{23} \ E_{31} \ E_{32} \ E_{33}]^T$ 。

#### 5.1.2.1. 8点法

当  $i=8$  时,输入数据是8个点对。矩阵  $\mathbf{A}$  是一个  $8 \times 9$  的矩阵。对矩阵  $\mathbf{A}$  做奇异值分解  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 向量  $\mathbf{e}$  的解是矩阵  $\mathbf{V}$  中对应最小奇异值的列向量。对向量  $\mathbf{e}$  重新调整之后得到矩阵  $\mathbf{E}$ 。

8点法得到的矩阵  $\mathbf{E}$  并没有完全考虑(5.5)和(5.6)式的约束。当成像系统已标定时,矩阵  $\mathbf{E}$  仅和旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和平移  $\mathbf{t}$  相关。我们将矩阵  $\mathbf{E}$  做奇异值分解  $\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 将矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  改为  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}[1,1,0]$ , 从而强化了(5.5)和(5.6)式的约束。

#### 5.1.2.2. 7点法

当  $i=7$  时,输入数据是7个点对。矩阵  $\mathbf{A}$  是一个  $7 \times 9$  的矩阵。对矩阵  $\mathbf{A}$  做奇异值分解  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 向量  $\mathbf{e}$  的解是矩阵  $\mathbf{V}$  中对应最小的两个奇异值的列向量, 记为  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$ 。对向量  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  整理之后,得到矩阵  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$ 。矩阵  $\mathbf{E}$  是矩阵  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  的线性组合

$$\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E}_1 + (1-\alpha)\mathbf{E}_2 \quad (5.8)$$

考虑约束  $\det(\mathbf{E}) = 0$ , 将(5.8)式代入得  $\det(\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E}_1 + (1-\alpha)\mathbf{E}_2) = 0$ 。由于矩阵  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  已知,因此上式整理为关于变量  $\alpha$  的多项式方程。解多项式方程可以得到

变量  $\alpha$  的解。多项式方程总有 1 个或者 3 个实数解,复数解被舍弃[Hartley, 1994]。将  $\alpha$  的解代回到等式  $\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{E}_2$ , 我们得到一个或者三个可能的矩阵  $\mathbf{E}$  的解。

### 5.1.2.3. 5 点法

当  $i=5$  时, 输入数据是 5 个点对。矩阵  $\mathbf{A}$  是一个  $5 \times 9$  的矩阵。对矩阵  $\mathbf{A}$  做奇异值分解  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 向量  $\mathbf{e}$  的解是矩阵  $\mathbf{V}$  中对应最小的四个奇异值的列向量, 也就是矩阵  $\mathbf{A}$  的零空间, 记为  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  和  $\mathbf{e}_4$ 。对向量  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  和  $\mathbf{e}_4$  整理之后, 得到矩阵  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{E}_3$  和  $\mathbf{E}_4$ 。矩阵  $\mathbf{E}$  是矩阵  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{E}_3$  和  $\mathbf{E}_4$  的线性组合

$$\mathbf{E} = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3 + w\mathbf{E}_4 \quad (5.9)$$

文献[Nister, 2004]考虑了(5.6)式, 将(5.9)式代入(5.6)式, 假设  $w=1$ , 得到关于  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的三元三次方程。求解三元三次方程之后, 得到至多 10 组可能解, 代入(5.9)式, 得到矩阵  $\mathbf{E}$ 。Nister 指出正确的矩阵  $\mathbf{E}$  可能是计算得到的矩阵  $\mathbf{E}$  的转置, 这是由于矩阵  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}^T$  同样满足(5.6)式。

## 5.1.3. 传统相机的场景重建

我们已经得到了相机的投影矩阵, 此时可以使用点的三角化的方法求取三维点的坐标。在给定视角几何和图像时, 三角化的方法可以根据点在两个或者多个视角中的位置确定三维空间中的坐标。当空间点所有的反投影射线在两帧或者多帧中可见并且互不相同时, 三角化的方法可以决定三维点的坐标, 即空间点和相机中心不共线。

### 5.1.3.1. 齐次三角化

假设有若干个视角, 每个视角存在一个透视矩阵  $\mathbf{P}_i$ , 图像上的点  $\mathbf{x}_i \sim \mathbf{P}_i\mathbf{X}$ 。这个式子还可以表示为两个向量的向量积

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}_i\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

因此, 所有的视角可以组成一个齐次方程

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{x}_1]_x \mathbf{P}_1 \\ [\mathbf{x}_2]_x \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ [\mathbf{x}_i]_x \mathbf{P}_i \end{bmatrix} \mathbf{X} = 0 \quad (5.11)$$

其中齐次向量  $\|\mathbf{X}\|_2 = 1$ 。最小二乘法求解以上方程可以通过奇异值分解左边的矩

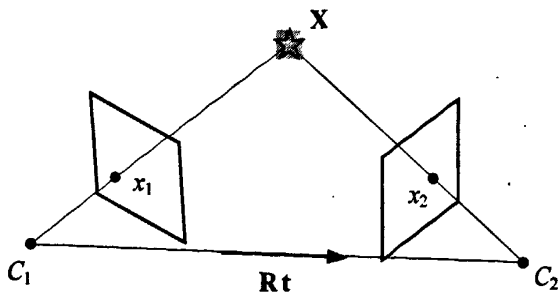


图 5-3. 齐次三角化

阵。每个投影矩阵  $\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1^i)^T \\ (\mathbf{p}_2^i)^T \\ (\mathbf{p}_3^i)^T \end{bmatrix}$ ，其中  $\mathbf{p}^k$  是矩阵  $\mathbf{P}$  的第  $k$  个行向量。(5.11)式又可

以写作

$$\begin{bmatrix} x\mathbf{p}_1^{3T} - \mathbf{p}_1^{1T} \\ y\mathbf{p}_1^{3T} - \mathbf{p}_1^{2T} \\ \vdots \\ x\mathbf{p}_i^{3T} - \mathbf{p}_i^{1T} \\ y\mathbf{p}_i^{3T} - \mathbf{p}_i^{2T} \end{bmatrix} \mathbf{X} = 0 \quad (5.12)$$

这种三角化的方法计算得到的三维点可以是无穷远点。当输入的点不是理想点时，三角化结果的好还依赖于图像的选择。

### 5.1.3.2. 中点三角化

如果图像序列中的帧数有限，而且所有的三维点不是无穷远点，三角化方法可以实现空间反投影射线的最小二乘拟合[Beardsley et al., 1997]。对于两视角而言，重点是两条反投影射线的公垂线的中点。假设  $i$  个视角有若干个点对  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i$ ，各个视角的投影矩阵

$$P_i = [R_i, t_i]$$

反投影射线表示为

$$\{-R_i^T t_i + \lambda D_i : \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{5.13}$$

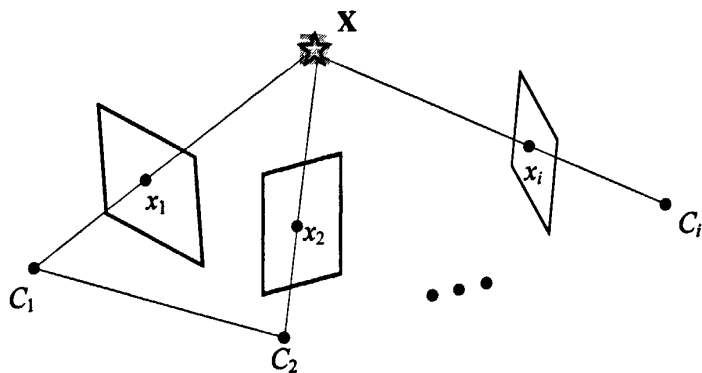


图 5-4. 中点三角化

其中  $D_i = \frac{R_i^T x_i}{\|R_i^T x_i\|}$  是图像上点的归一化向量。假设待求的三维点记为  $X$ ，存在系数

$$\lambda = D_i^T (X + R_i^T t_i)$$

反投影射线上最近的点为

$$X_i = -R_i^T t_i + D_i D_i^T (X + R_i^T t_i)$$

最小化问题如下

$$\begin{bmatrix} X - X_1 \\ X - X_2 \\ \vdots \\ X - X_i \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (I - D_1 D_1^T) \\ (I - D_2 D_2^T) \\ \vdots \\ (I - D_i D_i^T) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} (I - D_1 D_1^T)(-R_1^T t_1) \\ (I - D_2 D_2^T)(-R_2^T t_2) \\ \vdots \\ (I - D_i D_i^T)(-R_i^T t_i) \end{bmatrix}$$

对上式整理之后，我们得到了点  $X$  的闭合形式的解

$$X = \left( \sum_{i=1}^m (I - D_i D_i^T) \right)^{-1} \sum_{i=1}^m (I - D_i D_i^T)(-R_i^T t_i) \tag{5.14}$$

### 5.1.3.3. 两视角最优三角化

Olinesis 在文献[Olinesis, 2002]中提出了 2 视角最优三角化的方法。除了最小化重投影点和图像点的残差之外，我们还可以最小化反投影向量和图像点向

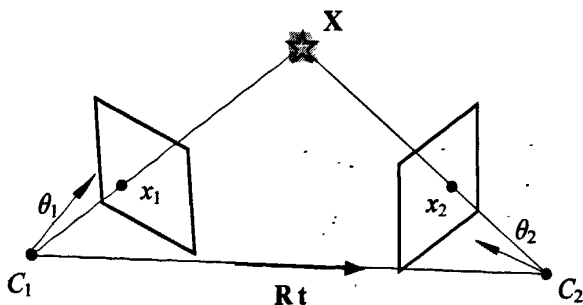


图 5-5.2 视角最优三角化

量的角度残差，定义如下

$$\begin{aligned}
 E_{\theta_{LS}}(\mathbf{R}, \mathbf{t}, \{\mathbf{X}\}) &= \sum_j \left( \left| \frac{\mathbf{X}_j}{|\mathbf{X}_j|} \times \mathbf{x}_j \right|^2 + \left| \frac{\mathbf{R}(\mathbf{X}_j - \mathbf{t})}{|\mathbf{R}(\mathbf{X}_j - \mathbf{t})|} \times \mathbf{x}'_j \right|^2 \right) \\
 &= \sum_j (\sin^2 \theta_{1j} + \sin^2 \theta_{2j})
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

对于图像上的某个点  $\mathbf{x}_i$  而言，它在第二幅图像中的对应点  $\mathbf{x}'_i$ 。为我们首先将坐标系转换到与原有的坐标系无关的位置。Olinesis 将坐标 Z 轴旋转到平移  $\mathbf{t}$  的方向，两幅图像的对应点各自乘以旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{t}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{t}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_i)|} & \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{x}_i}{|\mathbf{t} \times \mathbf{x}_i|} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{x}_i$  是光学中心到图像点的向量。三维点的闭合表达式为

$$\mathbf{X} = \lambda_0 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{2G} \begin{pmatrix} x^2 + x'^2 - y'^2 + G \\ 2x'y' \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{5.16}$$

其中

$$G = \sqrt{(x^2 - x'^2 - y'^2)^2 + 4x'^2 y'^2}$$



$$\lambda_0 = \frac{(x^2 - x'^2 - y'^2 - G)y'}{D'y'}$$

$$D' \equiv 2x'z'x + z(x^2 - x'^2 - y'^2 - G)$$

之后, 三维点  $\mathbf{X}$  再经过旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{t}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{t}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_i)|} & \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{x}_i}{|\mathbf{t} \times \mathbf{x}_i|} & \mathbf{t} \end{bmatrix}^T$$

回到原有的坐标系。推导的细节请参考文献 [Oliensis, 2002]。

## 5.2. 从球面投影到多平面投影

图像上的点的齐次坐标  $\mathbf{x} = (x \ y \ 1)^T$ , 表示平面上的一个点, 投影矩阵  $\mathbf{P}$  是线性变换。因此计算相机运动的方法, 如 8 点法、7 点法、5 点法适用于线性成像系统。折反射相机的投影过程如 2.2.2 节所示, 投影过程中包含了非线性变换, 所以上述方法不能直接应用于折反射系统。我们需要对原有的方法进行修改, 使得折反射系统可以利用现有的比较鲁棒的算法。

### 5.2.1. 扩展的 8 点法

透视相机的成像系统中, 假设成像系统的像素比  $r$ , 斜率  $s$ , 主点  $(u_0, v_0)$  和焦距  $f_e$ 。已标定的图像上的点  $\mathbf{x} = (x \ y \ 1)^T$ , 未标定的图像上的点  $\mathbf{m} = (u \ v \ 1)^T$ , 已标定图像上的点  $\mathbf{x}$  经过投影变换  $\mathbf{K}$  投影到未标定图像上的点  $\mathbf{m}$ 。

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}\mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} rf_e & s & u_0 \\ 0 & f_e & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。在未标定的成像系统中, 焦距为  $f_e$ , 图像平面在三维空

间中是  $z = f_e$  的平面, 平面上的坐标轴不正交, 而且不等长(图 5-6b)。在已标定的成像系统中, 焦距为 1, 图像平面在三维空间中是  $z = 1$  的平面, 平面上的坐标轴正交, 而且等长(图 5-6a)。图像点更一般的写法可以表示为

$$\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T, ax + by + cz + d = 0 \quad (5.17)$$

满足约束  $ax + by + cz + d = 0$  的点在一个平面上。此时, 图像上的点仍满足在同一个

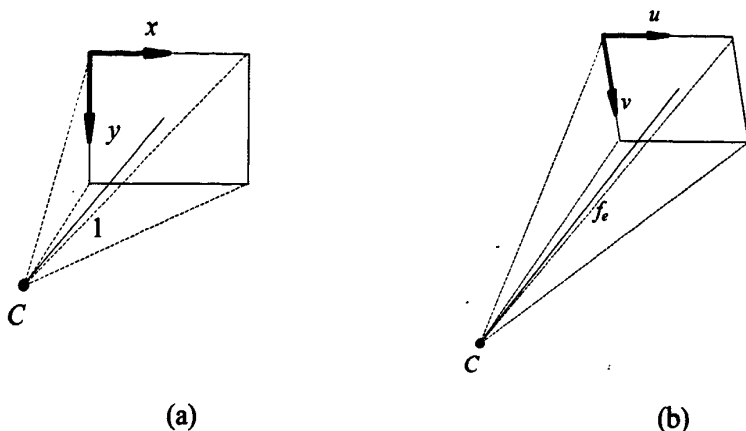


图 5-6. 标定和未标定的成像系统

平面上要求，因此图像平面的法向量可以为任意方向。我们有如下命题

**命题 5-1** 假设存在  $n$  个透视系统，当且仅当这些成像系统有公共的投影中心  $O$  时，这  $n$  个透视系统组成的复杂成像系统仍满足单视点约束(图 5-7a)。

这个复杂的单视点系统中，图像上的点表示为  $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T$ ，若两帧之间的对应点能在同一平面上，则两帧之间的点对能满足对极几何。我们将球面上的点投影到若干个平面上，如图 5-7b，在多平面单视点系统中，我们可以利用对极几何的性质和现有的算法，求得折反射系统的相机运动参数。

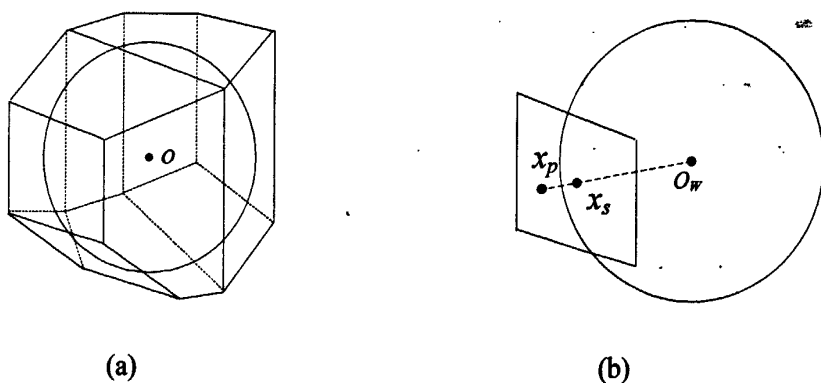


图 5-7. 多面单视点系统和球面投影系统

### 5.2.2. 从折反射成像系统到单视点多相机系统

我们选择球体的外界立方体，作为和球体对应的多平面单视点系统，如图 5-8a。在立方体成像系统中，单视点系统由 6 个成像平面组成，分别为  $C_1$ 、 $C_2$ 、

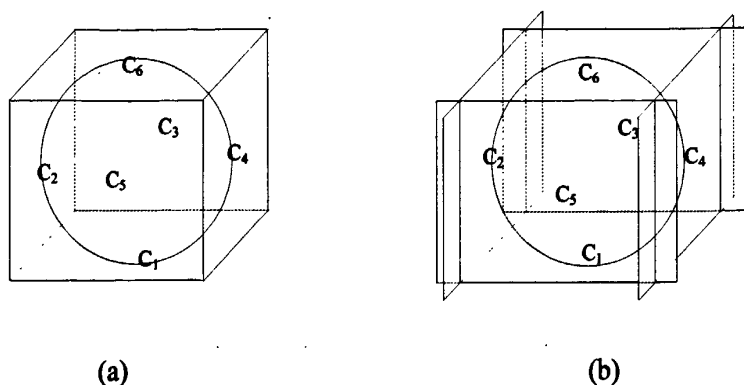


图 5-8. 折反射球面投影到立方体投影

$C_3, C_4, C_5, C_6$ 。以第二个投影点  $O_C$  为原点，球面点  $\mathbf{x}_s$  是以  $O_C$  为原点经过点  $\mathbf{x}$  射线，球面上的点  $\mathbf{x}_s = O_C + k\mathbf{x}$  满足

$$\|\mathbf{x}_s\|_2 = 1$$

解上述方程可得

$$k = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - (\xi^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)}}{x^2 + y^2 + 1} \tag{5.18}$$

以球心为原点的坐标系中，图像上的点  $\mathbf{x}$  在球面上对应点的坐标为

$$\mathbf{x}_{sphere} = k\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

立方体成像系统在图像上投影为 6 个区域。相机在运动过程中，图像上的点会发生移动。点对在图像上可能处在不同区域，不同子相机相机之间存在旋转的差异。

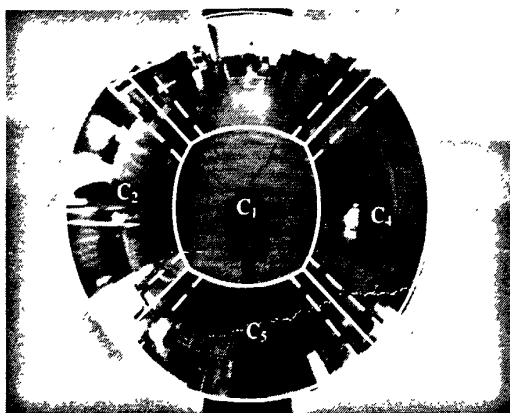


图 5-9. 图像平面上多相机的划分

因此我们将立方体的每个面加以扩大，如图 5-8b 所示，不同的区域存在重叠。所有点对仍满足对极几何的约束。

### 5.3. 折反射系统的运动与场景同时重建

经过以上章节的推导，我们将原有的平面 8 点法扩展到了立体空间的多平面成像系统中，本节通过实验的方法验证算法的可行性。本节提出的运动与场景同时重建的方法如下：对于输入的图像序列选取特征点、帧间匹配、跟踪匹配点；根据匹配的特征点的数量选取关键帧；当匹配的特征点出现在 3 帧关键帧，则认为该特征点是有效特征点；对图像进行标定矫正；将标定后的点投影到球面，再从球面投影到立方体上；得到一定数量的关键帧后，找出其中对于同一个点的视角差最大的两帧；求得两帧相机的运动轨迹，然后重建三维场景，初始化相机位置姿态和场景；根据已有的帧，求得余下的帧的相机运动；根据所有这些帧运动，估计三维场景，并进行局部优化，完成初始化过程；当新的关键帧出现，估计新关键帧的相机运动和新出现的有效特征点的空间位置；当新关键帧积累到一定数量，局部初始化新的关键帧，根据新的运动轨迹，更新场景的三维点。为了增加优化算法的鲁棒性，本文使用了残差为重尾分布的光束法平差。

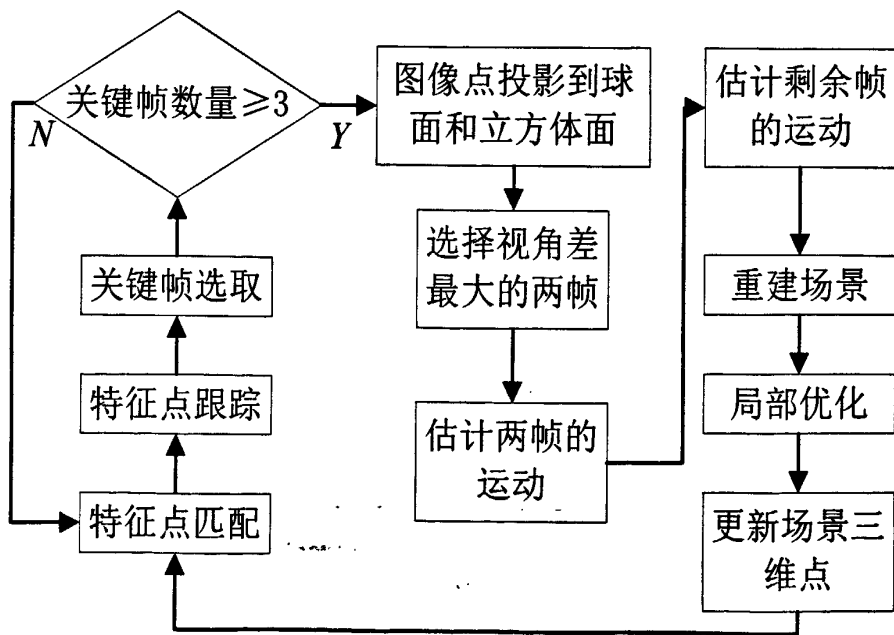


图 5-10. 相机运动和场景同时重建算法流程

### 5.3.1. 特征点匹配和关键帧的选取



图 5-11. 特征点匹配和跟踪

常用的特征点提取与跟踪的方法有KLT算法[Shi and Tomasi, 1994]和SIFT算法 (Scale Invariant Feature Transform)[Lowe, 2004]等等。KLT算法通常要求匹配的两幅图像中对应的特征点之间的像素位移不超过10个像素。然而在折反射图像中, 两帧图像之间有明显的尺度变换和特征点的旋转, 因此我们选择SIFT算法。在文献[Lowe, 2004]中, Lowe首先建立不同尺度的图像金字塔, 对每一层使用高斯差分滤波器(DoG)处理图像。然后在金字塔的各层图像中提取空间域和尺度域的共同极值点。作者利用特征点周围的梯度直方图的统计得到的特征点主方向并构建了主方向的DoG 梯度直方图, 然后生成128 维特征点描述子。SIFT算法对于图像的尺度和旋转变换有非常好的鲁棒性。图5-11显示了两帧图像的SIFT特征匹配和跟踪的结果, 蓝色十字表示特征点, 图像中的特征点并未去除外点, 但是不难发现大部分特征点能够正确匹配。

输入的视频序列中有些可能是冗余帧, 因此需要去除冗余帧而提取关键帧。Nister在文献[Nister, 2001b]中提出了一种应用于高速输入序列的去冗余帧方法。我们采用了其中的基本思想。当某一帧能够跟踪的特征点小于某个阈值 $T_1$ 时, 图像的内容发生了比较大的变化, 此时停止特征点跟踪, 从下一帧开始提取特征点, 如果提取的特征点数量大于阈值 $T_2$ , 则这一帧被认为是关键帧。由于折反射图像的特点, 水平方向 $360^\circ$ 的视角使得特征点基本不会突然消失或出现, 如传统相机那样, 因此关键帧基本上是等间距的。

### 5.3.2. 相机运动和场景重建

我们首先标定关键帧图像，然后将图像上的点反投影到球面上，进而投影到立方体上。图 5-12 显示的是图 5-11 中的两帧图像的特征点对中图 5-11a 的特征点的反投影结果。图 5-12a-b 显示了球面上的反投影点，其中图 5-12b 是球面的顶视图。图 5-12c-d 显示了立方体上的反投影点，其中图 5-12d 是立方体的顶视图。5-11 中的两帧图像的特征点对可能存在于两个子相机的边界处，因此，如图 5-12d 所示，我们选择了其中的一侧交界区域(图 5-9)作为特征点对在立方体上反投影坐标。

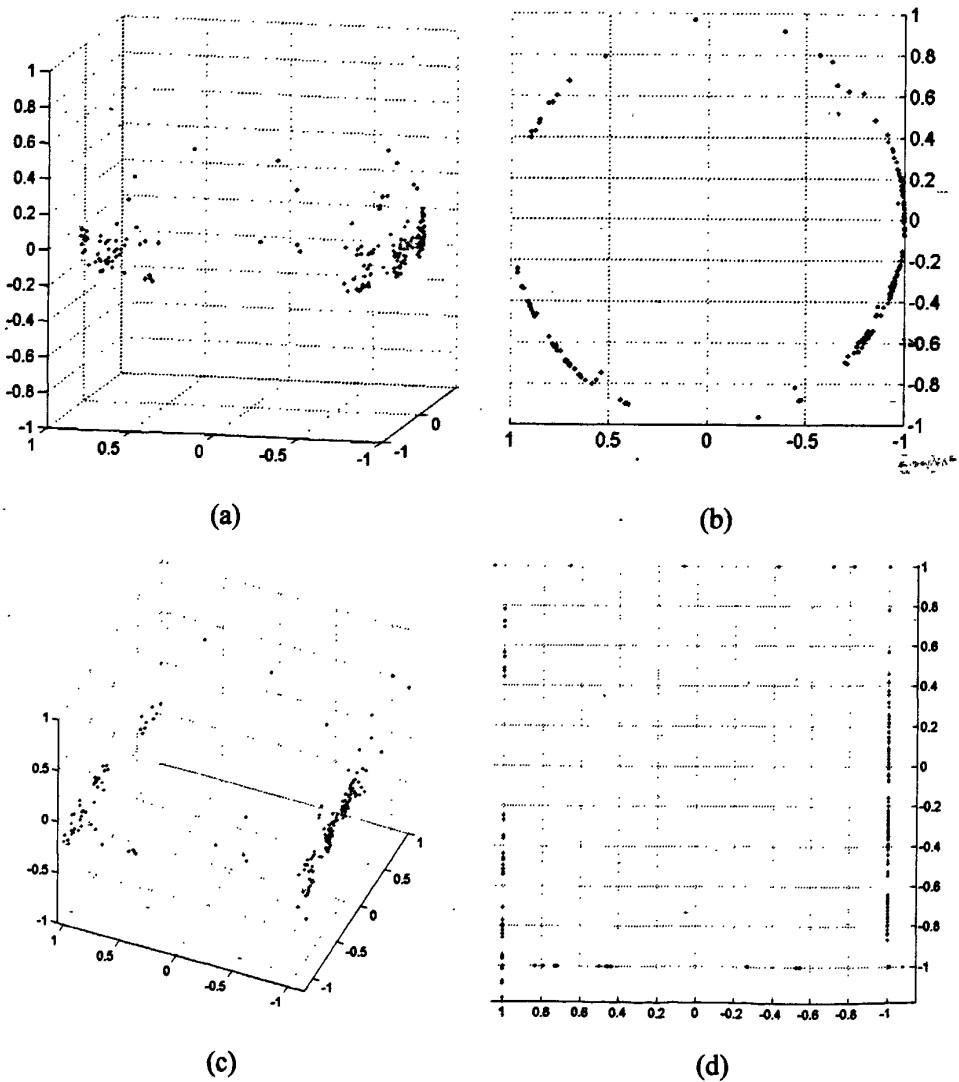


图 5-12. 反投影到球面和立方体

将特征点反投影到立方体之后，我们计算一定帧数内的图像点向量，找出对于同一点而言视角最大的两帧作为初始帧。我们使用 5.3.1 节提出的扩展的 8 点法，估计两帧之间的运动方向和姿态变化。不难发现，5.2 节罗列的几种三角化的方法都是基于图像点的向量方向和两帧之间的旋转和平移。因此，用于三角化的向量不需要在一个平面上。我们在得到旋转和平移之后，对球面上的向量代表的特征点对，使用 5.3.1 的齐次三角化方法，从两帧中恢复出三维场景。8 点法能够计算的是旋转矩阵和归一化的平移向量。对于某一帧  $j$ ，旋转矩阵为  $R_j$ ，归一化的平移为  $t_j$ ，假设待求的平移的距离为  $\tau_j$ ，则  $x_j \sim R_j X + \tau_j t_j$ ， $\tau$  就可以求得

$$\tau_j = -\frac{(\mathbf{x}_j \times \mathbf{t}_j)^T (\mathbf{x}_j \times \mathbf{R}_j \mathbf{X})}{(\mathbf{x}_j \times \mathbf{t}_j)^T (\mathbf{x}_j \times \mathbf{t}_j)} \quad (5.20)$$

可以使用 RANSAC 的方法，使得  $\tau_j$  的估计更加准确。在得到了各帧相对于第一帧的运动之后，我们使用 5.3.2 节的中点三角化，重新计算所有三维点的坐标。而后对已有的帧进行局部优化，再次使用中点三角化更新场景。

### 5.3.3. 重尾分布的光束法平差

光束法平差是一种基于稀疏矩阵的 Levenberg-Marquardt 算法，该算法被用于优化相机的运动轨迹和三维场景。光束法平差的基本思想如图 5-13 所示，相机中心和三维点之间可以认识是一些光束联系在一起，通过调整相机和三维点的位置

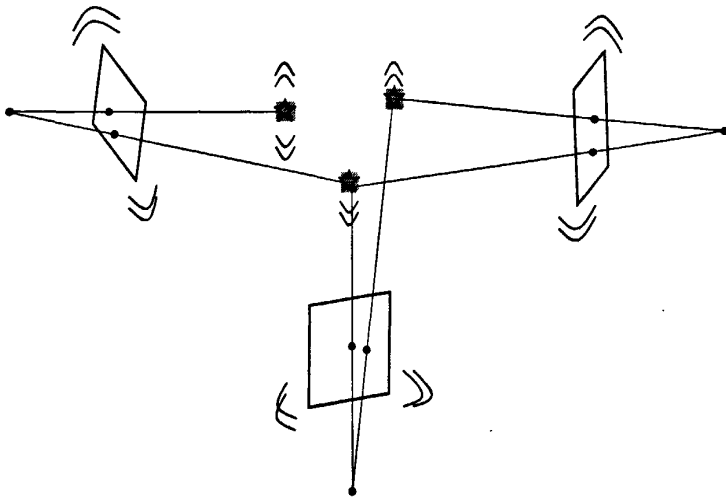


图 5-13. 光束法平差

置。使得所有的三维点和相机中心的联系都能经过图像上的投影点。光束法平常的目标在于最小化一个代价函数

$$c(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p})^T \mathbf{f}(\mathbf{p}) \quad (5.21)$$

其中  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  是一个向量函数，可以是线性函数也可以是非线性函数， $\mathbf{p}$  表示待优化的参数向量。对上式在某一点  $\mathbf{p}$  处做泰勒展开，并舍弃掉高次项

$$c(\mathbf{p} + d\mathbf{p}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p})^T \mathbf{f}(\mathbf{p}) + 2\mathbf{f}(\mathbf{p})^T \mathbf{J}_r(\mathbf{p}) d\mathbf{p} + d\mathbf{p}^T \mathbf{J}_r(\mathbf{p})^T \mathbf{J}_r(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (5.22)$$

其中  $\mathbf{J}_r(\mathbf{p})$  是 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_M}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial p_1}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial p_M}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

对(5.22)式中的  $d\mathbf{p}$  求导数得

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{p})^T \mathbf{J}_r(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = -\mathbf{J}_r(\mathbf{p})^T \mathbf{f}(\mathbf{p})$$

假设  $\lambda$  为某个正数，那么每次增加的步长  $d\mathbf{p}$  为

$$d\mathbf{p} = -\frac{1}{\lambda} \text{diag}(\mathbf{J}_r(\mathbf{p})^T \mathbf{J}_r(\mathbf{p}))^{-1} \mathbf{J}_r(\mathbf{p})^T \mathbf{f}(\mathbf{p}) \quad (5.23)$$

关于光束法平常的细节请参考文献[Triggs et al., 1999]。

一般情况下，代价函数  $c(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{x}}$ ，其中  $\mathbf{x}(\mathbf{p})$  表示反投影点， $\hat{\mathbf{x}}$  表示图像点。在这种代价函数下，残差满足高斯分布。为了提高算法对外点的鲁棒性，Engels 等在文献[Engels et al., 2006]中提出了一种满足柯西分布的代价函数，这是一种重尾分布。Engels 等定义了代价函数

$$c(\mathbf{p}) = \ln \left( 1 + \frac{e(\mathbf{p})^2}{\sigma^2} \right) = \ln \left( 1 + \frac{(\mathbf{x}(\mathbf{p}) - \hat{\mathbf{x}})^2}{\sigma^2} \right) \quad (5.24)$$

其中  $\sigma$  是标准方差。假设残差向量为  $(e_x, e_y)$ ，那么

$$e_x = \sqrt{\ln \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$e_y = \sqrt{\ln \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

以上两个式子的平方和满足(5.24)式。



## 5.4. 实验结果

我们采集了一组室内图像序列作为测试用例。在折反射系统中，反射面镜垂直于地面向下方式，摄像机位于反射面镜的下方。折反射相机从房间的一侧移动到另一侧，共移动了约 6m。每前进约 20cm 的距离，拍摄一幅图像。场景中，

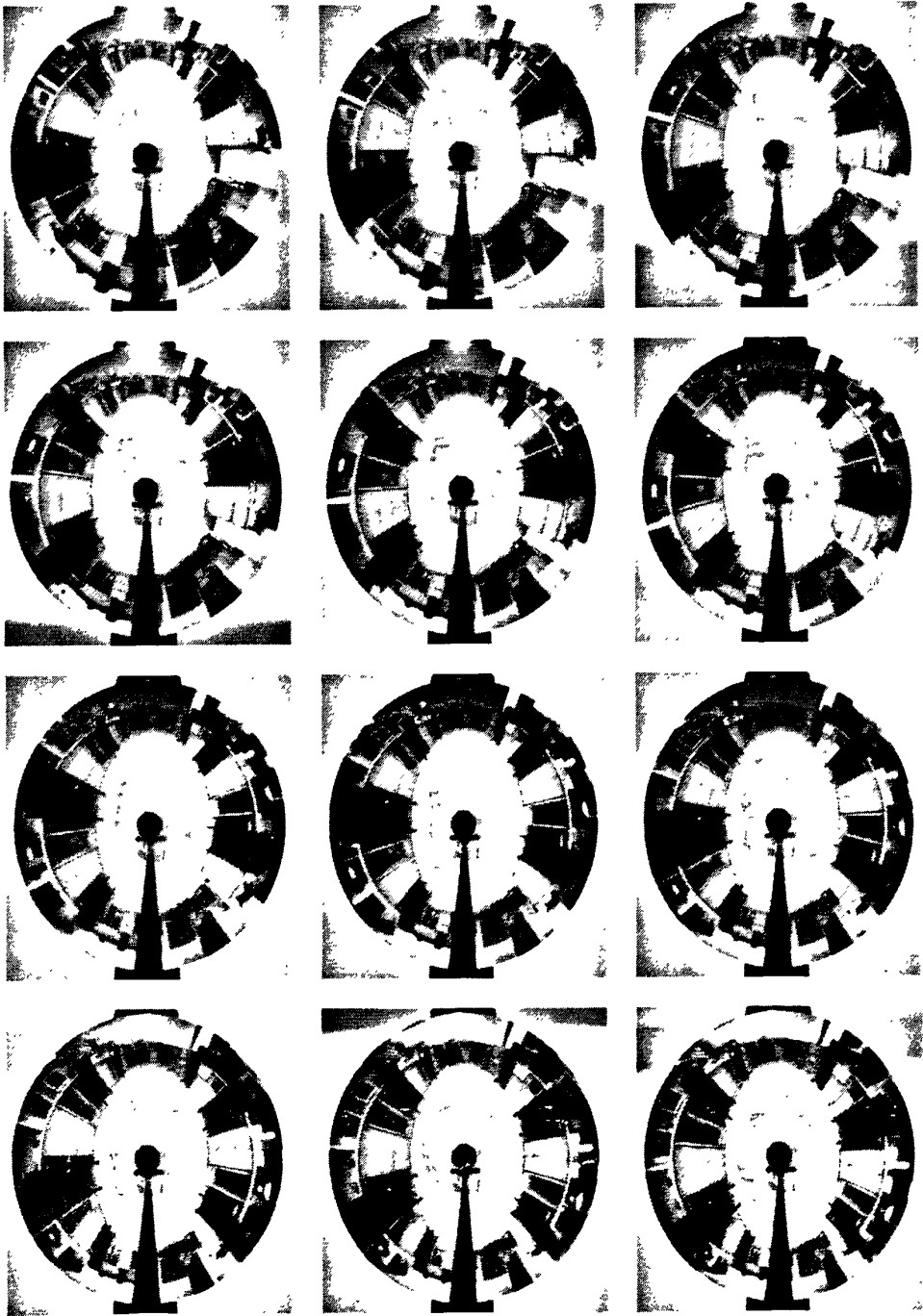


图 5-14. 折反射图像序列

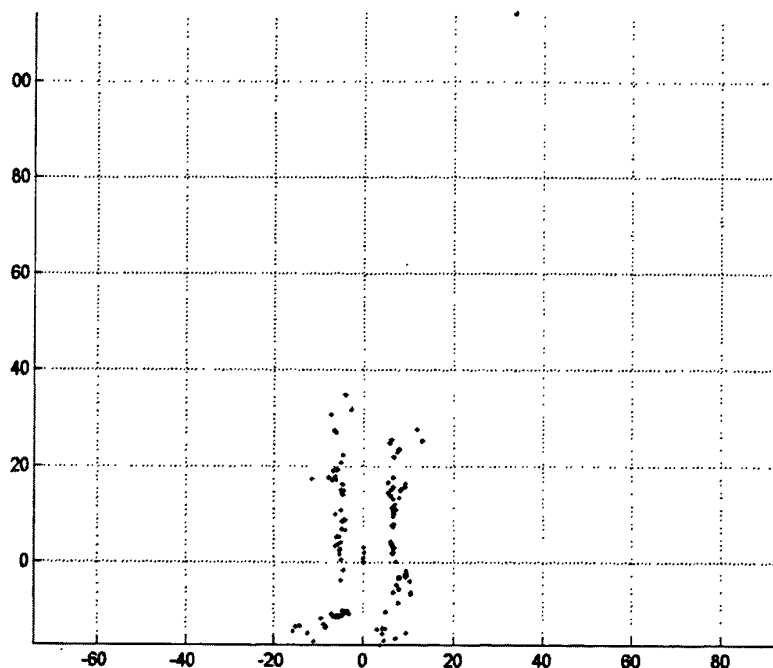


图 5-15. 初始化 4 帧的运动轨迹和场景

两侧宽约 2m。总共有 31 帧图像被挑选出来作为关键帧。由于缺少对极几何的约束，我们只得到了稀疏重建的结果。致密重建的方法有待进一步研究。

我们取前 4 帧为相机运动和场景做初始化，而后以 4 帧作为局部优化的窗口大小，更新场景和相机运动。图 5-15 显示了前 4 帧的初始化结果的顶视图。红点表示相机的运动轨迹，蓝点表示场景中的特征点。摄像机的实际运动基本上沿着某个方向做直线运动。摄像机运动轨迹的估计值显示，相机的运动轨迹有一定的弯曲，因此与实际值存在偏差。沿着相机的运动方向，两边的场景特征点估计得比较准确，而前方和后方的特征点沿着前进方向扩散。这是由于沿着运动方向的点，图像噪声和量化误差对点的估计造成比较大的影响。对于折反射图像而言，有效区域只占很小的一部分，一定程度上降低了各个区域的分辨率，这也使得特征点更加不准确。

随着帧数的增加，相机的运动轨迹逐渐被矫正，更多的三维点被估计和更新，如图 5-16。相机前方的点逐渐趋向于收敛。在图 5-16b-f 中，在相机的运动轨迹附近存在一些离散的外点。随着帧数的增加，这些点逐渐往前推进。外点的数量并没有明显地减少，这可能是由于场景中物体颜色的相似性和重复的图形，比如

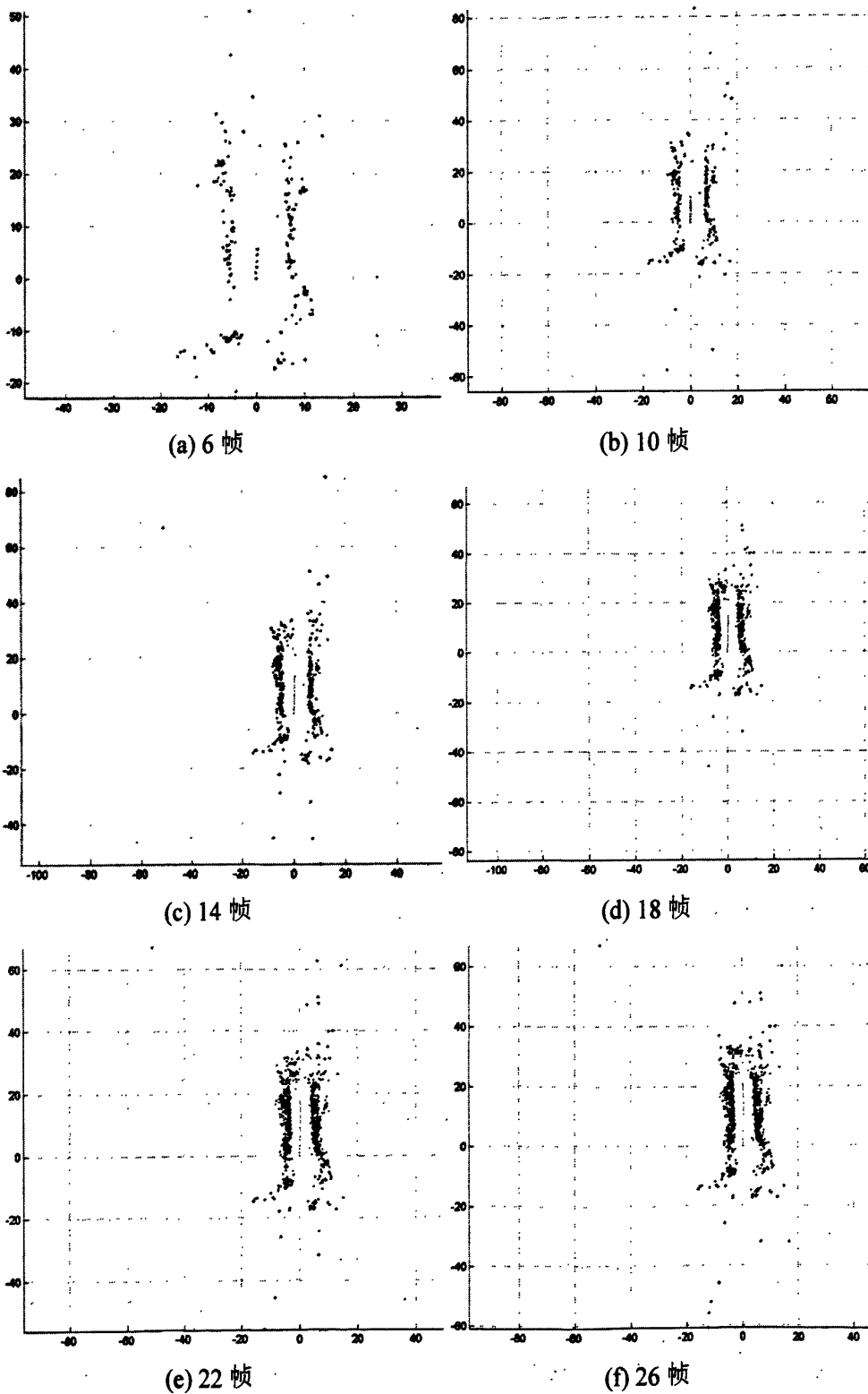
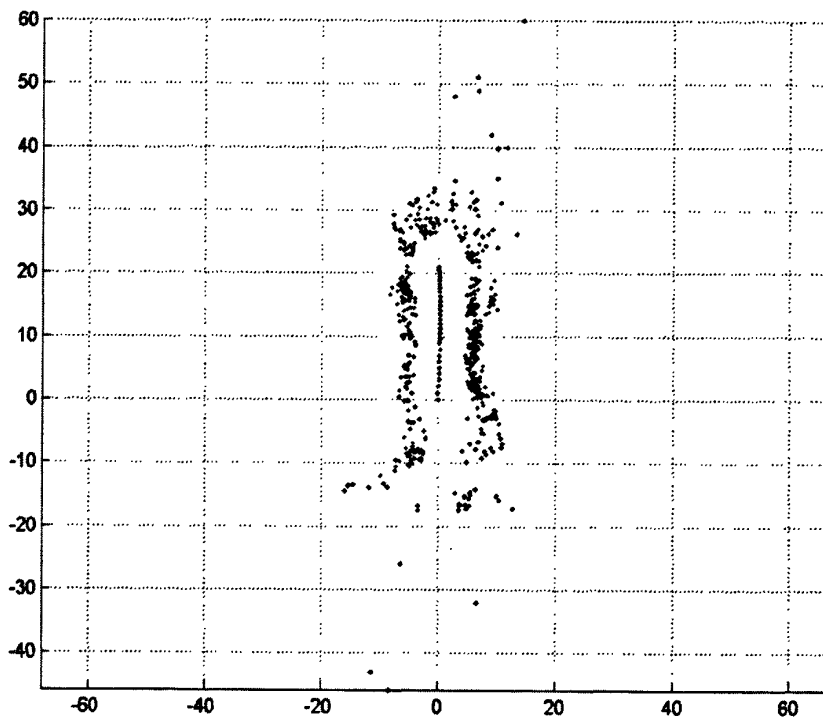
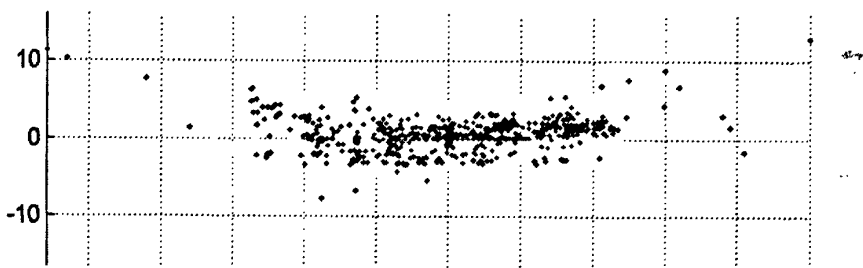


图 5-16. 运动轨迹和场景随着帧数的变化



(a) 顶视图



(b) 侧视图

图 5-17. 最终结果

抽屈,造成了一定程度的无匹配,而且这些无匹配一直存在于图像序列中,不能被 RANSAC 方法完全去除。但是随着帧数的增加,这些外点逐渐远离摄像机的运动路径。图 5-17 显示了运动和场景重建算法的最终结果。由于遮挡的关系,折反射相机运动方向后方的场景未被重建出来。红色点表示的相机运动轨迹,约占 22 格,相机移动全程约 6m,比值约为 0.2727。场景宽约占 8 格,实际测量场景宽 2.15 m,两者之比为 0.2687,与重建的结果基本吻合。最后结果显示,沿着相机运动方向的外点比较难以去除,而两侧的估计效果优于前方的估计效果。相机的运动轨迹保持了直线的状态,这和真实值一致。扩展的 8 点法能够比较准确地估计相机的旋转和平移。

## 5.5. 小结

本章首先回顾了目前已有的针对传统相机的对极几何约束,和由此发展而来的计算基本阵的方法以及三角化计算三维点的方法。本章所提到的各种计算基本阵的方法要求成像是线性系统。然而折反射系统的成像过程中包含了非线性的步骤,所以现有的计算基本阵的方法不能直接应用到折反射成像系统中。本文分析了基本阵计算方法在几何空间里的意义,指出多成像平面的成像系统同样满足对极几何,从而扩展了现有的 8 点法,使之可以应用到多平面的成像系统中。之后,本文以球的外界立方体为桥梁,将折反射系统线性化。扩展的 8 点法可以用于估计折反射系统的运动轨迹,包括旋转和平移。估计场景三维点的三角化方法仅考虑对应点向量的方向,不要求对应点在同一平面上,因此在已知旋转和平移的前提下,球面上的点可以直接通过三角化的方法,估计它在三维空间中的点。最后,我们用实际采集的图像数据验证了这一方法的正确性。

## 6. 总结和展望

### 6.1 本文总结

随着机器人导航、视频监控等技术的发展,计算机视觉技术得到了长足的发展。摄像机作为计算机视觉的信息采集系统,其性能对于很多复杂功能的实现起着至关重要的作用。更大的视场也就意味着同时获取更多的信息,从透视相机到鱼眼相机到全景相机,人们对摄像机视场的要求进一步提高。单视点折反射成像系统作为全景相机中的一种,因为其满足单视点约束的特性,近年来成为研究的热点。本文从单视点折反射相机入手,针对单视点折反射相机的建模、标定和应用,采用了目前流行的球面统一模型,将模型中的线性投影过程拆分为三个子过程,在对各个子投影过程深入分析的基础上,提出了基于直线投影性质的平行线单图标定方法和共点线标定方法,之后扩展了传统的8点法,使之可以应用到单视点折反射系统中,实现相机运动和场景的稀疏重建。本文提出的标定方法考虑更加一般的状况,比如双曲面折反射系统,可以有效地同时估计相机的内参和镜面的参数。扩展的8点法使得针对透视相机的经典算法可以应用到单视点折反射系统中。线性方法的引入,使得在非线性的折反射系统中也可以使用线性的方向估计相机运动和重建三维场景。本文的贡献可以归纳为以下几点:

1. 线性子过程的划分。本文将无穷远平面和度量平面整合到球面同一模型中,提出了从球面到无穷远平面,从无穷远平面到度量平面,从度量平面到图像平面的投影过程。在无穷远平面上,平行直线相交于两点,在度量平面上,坐标轴正交,而在图像平面上坐标轴可能存在倾斜,以及不同的比例关系。三个投影子过程中,各个平面的约束逐渐减弱,各个平面上的投影性质更容易被分别研究,并且依据一定的投影不变性,在约束比较弱的平面上得以保持。
2. 单图标定方法。本文提出了一种基于平行直线投影性质的单图标定方法。该方法利用了一个共识,即平行直线在无穷远处交于一点。由于单视点折反射系统的对称性,平行直线在无穷远处的交点被单视点折反射系统投影到了两点。利用直线拟合的结果,以及本文推导出的平行直线在度量平面上的约束,该方法可以在仅有一副全景图像的情况下,标定出折反射相机的内参。然而,

由于约束的非线性以及图像上两个交点的不确定性,该方法在已知镜面参数的前提下,可以得到比较准确的内参估计值。

3. 共点线标定方法。为了克服单图标定方法需要预知镜面参数的缺点,本文提出了改进方案。本文首次将共点线模板引入到单视点折反射系统的标定算法中。共点线模板充分考虑了一组共点线之间的相互关系,将原来的非线性投影问题,在无穷远平面上拆分成若干个线性子问题,使用特征向量的方法求解线性问题,提高算法的抗噪性能。该算法能够同时估计镜面的参数和相机的内参,并得到比现有方法更准确的估计值。
4. 扩展的8点法。本文扩展了经典的8点法算法,将原有的只能适用于平面的8点法扩展到三维空间中。同时也对球面投影进行了修改,从球面投影转换到多平面投影,后者同样满足单视点约束。经过转换之后,适用于透视相机的运动估算和三维重建的经典方法在单视点折反射系统中也可以使用。本文在实验中验证了上述方法对于估计摄像机运动轨迹的准确性。

## 6.2 工作展望

折反射系统仍处在研究阶段,新的方法正在被不断提出。本文在几何研究的层面,依据建模、标定和应用的顺序,对单视点折反射成像系统做了初步的探讨。笔者认为在以下几个方面还有待进一步的深入研究:

1. 对极几何。实现场景的致密重建之前,对极几何是必不可少的几何约束。对于图像中的一个点,在另一副图像上的对应极线上搜索匹配点,对极几何的约束不仅加速了搜索的过程,也让匹配结果更加准确。目前已知的对极几何仅适用于抛物面折反射系统[Geyer and Daniilidis, 2001],对于更加一般的情况,比如双曲面折反射系统不适用。因此,针对普遍情况的对极几何仍有待研究。
2. 非单视点折反射系统。单视点折反射系统中,存在唯一的有效视点,如在球面统一模型中,球心就是成像系统的有效视点。非单视点系统中,不存在唯一的有效视点,因此目前还没有简单的统一模型,这使得非单视点折反射系统分析起来比较困难,算法收到噪声等因素的影响也比较大。本文列出的单视点折反射系统的图像投影性质不能直接应用到非单视点折反射系统中,因此目前非单视点折反射系统更被限制在以视频跟踪为主的应用领域中。

## 参考文献

## B

- [Baker and Nayar, 1998] Baker, S. and Nayar, S. (1998). A theory of catadioptric image formation. *IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 35-42.
- [Baker and Nayar, 1999] Baker, S. and Nayar, S. (1999). A theory of singleview-point catadioptric image formation. *International Journal of Computer Vision*, 35:175-196.
- [Bakstein and Pajdla, 2002] Bakstein, H. and Pajdla, T. (2002). Panoramic mosaicing with a 180 field of view lens. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Omni-directional Vision*, pages 60-67.
- [Barreto, 2003] Barreto, J. (2003). *General Central Projection System Modelling, Calibration and Visual Servoing*. PhD thesis, University of Coimbra.
- [Barreto and Araujo, 2002] Barreto, J. and Araujo, H. (2002). Geometric properties of central catadioptric line images and their application in calibration. *European Conference on Computer Vision*, pages 237-251.
- [Barreto and Araujo, 2005] Barreto, J. and Araujo, H. (2005). Geometric properties of central catadioptric line images and their application in calibration. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(8):1327-1333.
- [Barreto and Araujo, 2006] Barreto, J. and Araujo, H. (2006). Fitting conics to paracatadioptric projections of lines. *Computer Vision and Image Understanding*, 101(3):151-165.
- [Bartoli et al., 2004] Bartoli, A., Coquerelle, M., and Sturm, P. (2004). A framework for pencil-of-points structure from motion. *In Eighth European Conference on Computer Vision*, pages 28-40.
- [Basu and Licardie, 1995] Basu, A. and Licardie, S. (1995). Alternative models for fish-eye lense. *Pattern Recognition Letters*, 16:433-441.
- [Beardsley et al., 1997] Beardsley, P., Zisserman, A., and Murray, D. (1997). Sequential updating of projective and affine structure from motion. *International*



*Journal of Computer Vision*, 23:235-259.

[Beauchemin et al., 1999] Beauchemin, S. S., Bajcsy, R., and Givaty, G. (1999). A unified procedure for calibrating intrinsic parameters of fish-eye lenses. *In Proceedings of the Conference on Vision Interface*, pages 272-279.

[Benosman et al., 2000] Benosman, R., Deforas, E., and Devars, J. (2000). A new catadioptric sensor for panoramic vision of mobile robots. *In IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 112-118.

[Benosman and Kang, 2000] Benosman, R. and Kang, S. (2000). *Panoramic Vision*. Springer-Verlag.

[Benosman and Mouaddib, 2002] Benosman, R. and Mouaddib, E., editors (2002). *Workshop on Omnidirectional Vision*. IEEE Computer Society Press.

[Bolles et al., 1997] Bolles, R., Konolige, K., and Fischler, M. (1997). Extra set of eyes. *In DARPA-IUW*, pages 41-44.

[Bookstein, 1979] Bookstein, F. L. (1979). Fitting conic sections to scattered data. *Computer Graphics and Image Processing*, 9:56-71.

[Boult, 1998] Boult, T. (1998). Remote reality demonstration. *In IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 966-967.

[Brauer-Burchardt and Voss, 2001] Brauer-Burchardt, C. and Voss, K. (2001). A new algorithm to correct fish-eye and strong wide-angle-lens-distortion from single images. *In Proceedings of the Conference on Image Processing*, pages 225-228.

[Bruckstein and Richardson, 2000] Bruckstein, A. and Richardson, T. (2000). Omniview cameras with curved surface mirrors. *In IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 79-86.

[Bunschoten and Krose, 2002] Bunschoten, R. and Krose, B. (2002). Robust scene reconstruction from an omnidirectional vision system. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 19.

## C

[Chang and Hebert, 2000] Chang, P. and Hebert, M. (2000). Omnidirectional structure from motion. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 127-133.

## D

- [Daniilidis, 2000] Daniilidis, K., editor (2000.). *IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*.
- [Daniilidis and Nagel, 1990] Daniilidis, K. and Nagel, H. (1990). Analytical results on error sensitivity of motion estimation from two views. *Image and Vision Computing*, 8:297-303.
- [Derrien and Konolige, 2000] Derrien, S. and Konolige, K. (2000). Aproximating a single viewpoint in panoramic imaging devices. *In International Conference on Robotics and Automation*, pages 3932-3939.
- [Devernay and Faugeras, 1995] Devernay, F. and Faugeras, O. D. (1995). Automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments. *International Society for Optical Engineering*.
- [Doubek and Svoboda, 2002] Doubek, P. and Svoboda, T. (2002). Reliable 3d reconstruction from a few catadioptric images. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 71-78.

## E

- [Engels et al., 2006] Engels, C., Stewnius, H., and Nister, D. (2006). Bundle adjustment rules. *Photogrammetric Computer Vision*.

## F

- [Fabrizio et al., 2002] Fabrizio, J., Tarel, J. P., and R., B. (2002). Calibration of panoramic catadioptric sensors made easier. *In Proceedings of the IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 45-52.
- [Farid and Popescu, 2001] Farid, H. and Popescu, A. C. (2001). Blind removal of image non-linearities. *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, 1:76-81.
- [Faugeras, 1993] Faugeras, O. (1993). *Three Dimensional Computer Vision. A Geometric Viewpoint*. MIT Press.
- [Faugeras et al., 2001] Faugeras, O., Luong, Q.-T., and Papadopoulos, T. (2001). *The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications*. MIT Press.

[Fitzgibbon et al., 1999] Fitzgibbon, A., Pilu, M., and Fisher, R. (1999). Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(5):476-480.

[Fitzgibbon, 2001] Fitzgibbon, A. W. (2001). Simultaneous linear estimation of multiple view geometry and lens distortion. *In IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1:125-132.

## G

[Geyer and Daniilidis, 1999] Geyer, C. and Daniilidis, K. (1999). Catadioptric camera calibration. *In Proceedings of International Conference on Computer Vision*, pages 398-404.

[Geyer and Daniilidis, 2000] Geyer, C. and Daniilidis, K. (2000). A unifying theory for central panoramic systems and practical implications. *European Conference on Computer Vision*, pages 455-461.

[Geyer and Daniilidis, 2001] Geyer, C. and Daniilidis, K. (2001). Structure and motion from uncalibrated catadioptric views. *Proceedings on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 279-286.

[Geyer and Daniilidis, 2002] Geyer, C. and Daniilidis, K. (2002). Paracatadioptric camera calibration. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(5):687-695.

[Geyer and Daniilidis, 2003] Geyer, C. and Daniilidis, K. (2003). Mirrors in motion: Epipolar geometry and motion estimation. *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pages 766-773.

[Geyer, 2003] Geyer, C. M. (2003). *Catadioptric Projective Geometry: Theory and Application*. PhD thesis, University of Pennsylvania.

[Greguss, 1985] Greguss, P. (1985). The tube-peeper: a new concept in endoscopy. *Optics and Laser Technology*, 32:41-45.

[Grossberg and Nayar, 2001] Grossberg, M. and Nayar, S. (2001). A general imaging model and a method for finding its parameters. *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pages 108-115.

## H

[Hartley, 1994] Hartley, R. (1994). Projective reconstruction and invariants from multiple images. *IEEE transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16:1036-1041.

[Hartley and Zisserman, 2000] Hartley, R. and Zisserman, A. (2000). *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press.

[Hecht and Zajac, 1997] Hecht, E. and Zajac, A. (1997). *Optics*. Addison-Wesley.

[Hicks and Bajcsy, 2000] Hicks, R. and Bajcsy, R. . (2000). Catadioptric sensors that approximate wide-angle perspective projections. *In Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 545-551.

[Hicks and Perline, 2002] Hicks, R. and Perline, R. (2002). Equi-area catadioptric sensors. *In Proceedings of OMNIVIS*, page 13.

[Hong et al., 1990] Hong, J., Tan, X., Pinette, B., Weiss, R., and Riseman, E. (1990). Image-based navigation using 360 views. *In DARPA-IUW*, pages 782-791.

## I

[Ishiguro et al., 1992] Ishiguro, H., Yamamoto, M., and Tsuji, S. (1992). Omnidirectional stereo. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2):257-262.

## K

[Kanatani, 1994] Kanatani, K. (1994). Statistical bias of conic fitting and renormalization. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16:320 - 326.

[Kang, 2000] Kang, S. B. (2000.). Catadioptric self-calibration. *In Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1:201-207.

[Kang and Szeliski, 1997] Kang, S. B. and Szeliski, R. (1997.). 3-d scene data recovery using omnidirectional multibaseline stereo. *International Journal of Computer Vision*, 25(2).

[Kannala and Brandt, 2004] Kannala, J. and Brandt, S. (2004). A generic camera calibration method for fish-eye lenses. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition*.

## L

- [Leonardis and Jogan, 2000] Leonardis, A. and Jogan, M. (2000). Robust localization using eigenspace of spinning-images. In *IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 37-46.
- [Lhuillier, 2007] Lhuillier, M. (2007). Toward exible 3d modeling using a catadioptric camera. In *Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*.
- [Lowe, 2004] Lowe, D. (2004). Distinctive image features from scale invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2):91-110.

## M

- [Ma, 2003] Ma, Y. (2003). *An Invitation to 3-D Vision*. Springer Press.
- [Mei and Rives, 2007] Mei, C. and Rives, P. (2007). Single view point omnidirectional camera calibration from planar grids. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3945-3950.
- [Mellor, 2003] Mellor, J. (2003). Geometry and texture from thousands of images. *International Journal of Computer Vision*, 51(1).
- [Micusik, 2004] Micusik, B. (2004). *Two-View Geometry of Omnidirectional Cameras*. PhD thesis, Czech Technical University.
- [Micusik and Pajdla, 2003a] Micusik, B. and Pajdla, T. (2003a). Estimation of omnidirectional camera model from epipolar geometry. In *Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1:485-490.
- [Micusik and Pajdla, 2003b] Micusik, B. and Pajdla, T. (2003b). Omnidirectional camera model and epipolar geometry estimation by ransac with bucketing. In *Proceedings of the Scandinavian Conference on Image Analysis*, pages 83-90.
- [Micusik and Pajdla, 2004] Micusik, B. and Pajdla, T. (2004). Autocalibration & 3d reconstruction with non-central catadioptric cameras. In *Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*.

## N

- [Nakagawa and Rosenfeld, 1979] Nakagawa, Y. and Rosenfeld, A. (1979). A note on polygonal and elliptical approximation of mechanical parts. *Pattern Recognition*, 11(2):133-142.

- [Nalwa, 1996] Nalwa, V. S. (1996). A true omnidirectional viewer. Technical report, Bell Laboratories, Holmdel, NJ, USA.
- [Nayar and Karmarkar, 2000] Nayar, S. and Karmarkar, A. (2000). 360×360 mosaics. *In Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 388-395.
- [Nayar and Peri, 1999] Nayar, S. and Peri, V. (1999). Folded catadioptric cameras. *In IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 217-225.
- [Nene and Nayar, 1998] Nene, S. A. and Nayar, S. K. (1998.). Stereo with mirrors. *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, 2:1087-1094.
- [Nister, 2001a] Nister, D. (2001a). *Automatic Dense Reconstruction from Uncalibrated Video Sequences*. PhD thesis, Royal Institute of Technology KTH, Stockholm, Sweden.
- [Nister, 2001b] Nister, D. (2001b). Frame decimation for structure and motion. *In Proceedings of 2nd Workshop on Structure from Multiple Images of Large Environments*, 2018:17-34.
- [Nister, 2004] Nister, D. (2004). An efficient solution to the five-point relative pose problem. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26:756-770.
- [Nister, 2005] Nister, D. (2005). Preemptive ransac for live structure and motion estimation. *Machine Vision and Applications*, 16:321-329.
- O**
- [Oliensis, 2002] Oliensis, J. (2002). Exact two-image structure from motion. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24:1618-1633.
- [Onoe et al., 1998] Onoe, Y., Yamazawa, K., Takemura, H., and N., Y. (1998). Telepresence by real-time view-dependent image generation from omnidirectional video streams. *Computer Vision and Image Understanding*, 71:588-592.
- P**
- [Pajdla et al., 1997] Pajdla, T., Werner, T., and Hlavac, V. (1997). Correcting radial lens distortion without knowledge of 3-d structure. Technical Report Technical Report K335-CMP-1997-138, Czech Technical University, Prague, Czech Republic.

lic.

[Papoulis, 1965] Papoulis, A. (1965). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill.

[Peleg et al., 2001] Peleg, S., Ben-Ezra, M., and Y., P. (2001). Omnistere: Panoramic stereo imaging. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23:279-290.

[Philip, 1998] Philip, J. (1998). Critical point configurations of the 5-, 6-, 7-, and 8-point algorithms for relative orientation. *TRITA-MAT-1998-MA-13*.

[Porril, 1990] Porril, J. (1990). Fitting ellipses and predicting confidence using a bias corrected kalman filter. *Image and Vision Computing*, 8:37-41.

## R

[Rees, 1971] Rees, D. W. (1971.). Panoramic television viewing system.

## S

[Scaramuzza, 2006] Scaramuzza, D. (2006). A toolbox for easy calibrating omnidirectional cameras. *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*.

[Scaramuzza et al., 2006] Scaramuzza, D., Martinelli, A., and Siegwart, R. (2006). A exible technique for accurate omnidirectional camera calibration and structure from motion. *IEEE International Conference on Computer Vision Systems.*, page 45.

[Schaffalitzky and Zisserman, 2002] Schaffalitzky, F. and Zisserman, A. (2002). Multi-view matching for unordered image sets, or "how do i organize my holiday snaps?". *In Seventh European Conference on Computer Vision*, pages 414-431.

[Semple and Kneebone, 1952] Semple, J. and Kneebone, G. (1952). *Algebraic Projective Geometry*. Clarendon Press.

[Shah and Aggarwal, 1996] Shah, S. and Aggarwal, J. K. (1996). Intrinsic parameter calibration procedure for a (high distortion) fish-eye lens camera with distortion model and accuracy estimation. *Pattern Recognition*, 29:1775-1788.

[Shi and Tomasi, 1994] Shi, J. and Tomasi, C. (1994). Good features to track. *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 593-600.

[Spacek, 2004] Spacek, L. (2004). Coaxial omnidirectional stereopsis. *In Proceedings*

- of the *European Conference on Computer Vision*, pages 354-365.
- [Spain, 1957] Spain, B. (1957). *Analytical Conics*. Pergamon Press.
- [Srinivasan, 2003] Srinivasan, M. (2003). New class of mirrors for wide-angle imaging. In *Proceedings of Omnidirectional Vision*.
- [Stein, 1997] Stein, G. P. (1997). Lens distortion calibrating using point correspondences. In *Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 602-609.
- [Strelow et al., 2001] Strelow, D., Mishler, J., Koes, D., and Singh, S. (2001). Precise omnidirectional camera calibration. In *Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1:689-694.
- [Sturm, 2000] Sturm, P. (2000). A method for 3d reconstruction of piece-wise planar objects from single panoramic images. *IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 119-126.
- [Svoboda, 1999] Svoboda, T. (1999). *Central Panoramic Cameras Design, Geometry, Egomotion*. PhD thesis, Czech Technical University.
- [Svoboda et al., 1998] Svoboda, T., Pajdla, T., and Hlavac, V. (1998). Epipolar geometry for panoramic cameras. In *Proceedings of 5th European Conference on Computer Vision*, pages 218-231.
- [Swaminathan et al., 2006] Swaminathan, R., Grossberg, M., and Nayar, S. (2006). Non-single viewpoint catadioptric cameras: Geometry and analysis. *International Journal of Computer Vision*, 66:211-229.
- [Swaminathan et al., 2001] Swaminathan, R., Grossberg, M. D., and Nayar, S. K. (2001). Caustics of catadioptric cameras. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, 2:2-9.
- [Swaminathan and Nayar, 2000] Swaminathan, R. and Nayar, S. (2000). Non-metric calibration of wide-angle lenses and polycameras. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 413-419.

## T

- [Taubin, 1991] Taubin, G. (1991). Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and



range image segmentation. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13:1115 - 1138.

[Taylor, 2002] Taylor, C. J. (2002). Video plus: A method for capturing the structure and appearance of immersive environments. *IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics*, 8:171-183.

[Triggs et al., 1999] Triggs, B., McLauchlan, P., Hartley, R., and Fitzgibbon, A. (1999). Bundle adjustment a modern synthesis. *Proceedings of the International Workshop on Vision Algorithms*, pages 298-372.

## W

[Weng et al., 1992] Weng, J., Cohen, P., and Herniou, M. (1992). Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(10):965-980.

[Werner and Pajdla, 2001] Werner, T. and Pajdla, T. (2001). Chirality in epipolar geometry. *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pages 548-553.

[Winters et al., 2000] Winters, N., Gaspar, J., Lacey, G., and Santos-Victor, J. (2000). Omnidirectional vision for navigation. *In IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 21-28.

## X

[Xiong and Turkowski, 1997] Xiong, Y. and Turkowski, K. (1997). Creating image-based vr using a self-calibrating fisheye lens. *In Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 237-243.

## Y

[Yagi, 1999] Yagi, Y. (1999). Omnidirectional sensing and its application. *IEICE Transaction Information Systems*, E82-D:568-579.

[Yagi et al., 1994] Yagi, Y., Kawato, S., and Tsuji, S. (1994). Real-time omnidirectional image sensor (copis) for vision-guided navigation. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 10:11-22.

[Ying and Hu, 2003] Ying, X. and Hu, Z. (2003). Catadioptric camera calibration using geometric invariants. *In Proceedings of the International Conference on*

*Computer Vision*, 2:1351-1358.

[Ying and Hu, 2004a] Ying, X. and Hu, Z. (2004a). Can we consider central catadioptric cameras and fisheye cameras within a unified imaging model. *European Conference on Computer Vision*, 3021:442-455.

[Ying and Hu, 2004b] Ying, X. and Hu, Z. (2004b). Catadioptric camera calibration using geometric invariants. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(10):1260-1271.

## Z

[Zhang et al., 2009] Zhang, L., Du, X., Zhu, Y., and Liu, J. (2009). Central catadioptric camera calibration with single image. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1253-1256.

[Zhang et al., 2010] Zhang, L., Du, X., Shen, M., and Liu, J. (2010). Central catadioptric camera calibration using concurrent lines. *Journal of Zhejiang University Science C*. (Accepted)

[Zhang, 1995] Zhang, Z. (1995). Parameter estimation techniques: A tutorial with application to conic fitting. Technical report, In INRIA Raport de Recherche n 2676.

[Zhang, 1996a] Zhang, Z. (1996a). A new multistage approach to motion and structure estimation : From essential parameters to euclidean motion via fundamental matrix. Technical Report Theme 3, INRIA.

[Zhang, 1996b] Zhang, Z. (1996b). On the epipolar geometry between two images with lens distortion. *In Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition*, pages 407-411.

[Zhu et al., 2000] Zhu, Z., Rajasekar, K., Riseman, E., and Hanson, A. (2000). Panoramic virtual stereo vision of cooperative mobile robots for localizing 3d moving objects. *In IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 29-36.

作者在攻博期间发表(录用)的论文

论文:

- [1] Zhang, L., Du, X., Zhu, Y., and Liu, J. (2009). Central catadioptric camera calibration with single image. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pages 1253-1256.
- [2] Zhang, L., Du, X., Shen, M., and Liu, J. (2010). Central catadioptric camera calibration using concurrent lines. Journal of Zhejiang University Science C. (已录用)

专利:

1. 杜歆, 张雷, 朱云芳, 刘济林, 刘加海。全景相机的单图标定方法。申请号 200810162046 (2008年11月19日受理)