摘 要

马尔可夫骨架过程的概念正式形成于 1997 年，这是一个涵盖面十分宽广的概念。在马尔可夫骨架过程理论的初期研究中，重点在于过程的瞬时性态的分析。在这篇学位论文中，回顾和系统地总结了马尔可夫骨架过程瞬时性态的理论及其在排队论、可靠性理论和存储论等方面的应用结果。在这个基础上，对马尔可夫骨架过程的理论进一步进行了探讨，将注意力集中于一类特殊的马尔可夫骨架过程 Doob 骨架过程，给出了这类过程的广义极限分布、极限分布以及不变测度存在性条件和表达式,并应用这些结论于排队论、可靠性理论和存储论等领域－具体分析了 GI/G/1 排队论系统模型、并联系统模型、水库储水模型、易腐烂物品库存模型－－这些模型都不同程度地被许多学者研究过，特别，如前面提及，已有人成功地应用马尔可夫骨架过程的瞬时性态理论，获得了上述各模型中的主要参量过程的瞬时分布,但是,却并没有探讨它们的极限性态－－建立了若干关于上述各模型的主要参量过程的极限性态的结果。

关键词：马尔可夫骨架过程，有限分布，排队论，可靠性分析，存储模型。

Limit theory of Markov skeleton processes and its applications

Abstract

The concept of Markov skeleton process (MSP) was originated in 1997. This concept constitutes of a broad class of stochastic processes. In earlier study of MSP, the emphasis is laid on the transient behavior of these processes.

In this doctoral thesis, first, an overview of transient behavior of MSP and the applications to queueing theory, reliability theory and inventory theory is presented. And with these results, I delve further into the theoretical issues of MSP and the concentration is on a special class of MSP-Doob skeleton processes. Generalized limit distribution, limit distribution of these processes and conditions and the expressions for the existence of invariable measure of such processes are provided. Finally, these new results are then applied to queueing theory, reliability theory and inventory theory.

A detailed study of GI/G/1 queuing model, parallel connection system model, water reservoir model and perishable inventory model is discussed. These models have already been investigated to some degree. In particular, as mentioned above, some scholars have already successfully applied the transient behavior theory of MSP to these models and transient distributions of main variables in such models have been obtained. However, the limit behavior has not been addressed. In this thesis, limit behavior of main variables in the above-mentioned models is established.

Keywords: Markov skeleton processes, limit distribution, queueing system, reliability analysis, inventory model

原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中南大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：__________ 日期：04 年 11 月 30 日

关于学位论文使用授权说明

本人了解中南大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用复印、缩印或其它手段保存学位论文；学校可根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文。

作者签名：__________ 导师签名__________ 日期：04 年 11 月 10 日

第一章 绪 论

1997 年，侯振挺 [18, 34] 等提出了一类新的随机过程——马尔可夫骨架过程的概念，并建立了这一类随机过程的理论框架．该随机过程的定义如下：

设（Ω,F,P）是一完备的概率空间，（E,ε）是一可测空间．并设 $X=\{X\{t,\omega),0\le t<\infty\}$ 是定义在（Ω,F,P）上取值于（E,ε）的随机过程，$\{\mathrm{F}_t^X,t\ge 0\}$ 是 X 的自然 σ 一代数流．

定义 1.1.1 **称随机过程** $X=\{X\{t,\omega),0\le t<\infty\}$ 为马尔可夫骨架过程，如果存在一停时列 $\{\tau_n\}_{n\ge 0}$，满足

（1）$\tau_0=0$ 且 $\tau_n\uparrow\infty$，并对任意的 $n\ge 0,\tau_n<\infty\Rightarrow\tau_n<\tau_{n+1}$；

（2）对每个 τ_n 和任意定义在 $E^{[0,\infty)}$ 上的有界 $\varepsilon^{[0,\infty)}$ 一可测函数 f，有

$$E[f(X(\tau_n+\cdot))|\mathrm{F}_{\tau_n}^X]=E[f(X(\tau_n+\cdot))|\ X(\tau_n)],\qquad P-a.\ s.,\quad(1.1.1)$$

其中 $\Omega_{\tau_n}=(\omega:\tau_n(\omega)<\infty)$，并且

$$\mathrm{F}_{\tau_n}^X=\{A:\forall t\ge 0,A\cap(\omega:\tau_n\le t)\in\mathrm{F}_t^X\}$$

是 Ω_{τ_n} 上的 σ 一代数．

进而，如果在 Ω_{τ_n} 上

$$\begin{aligned}E[f(X(\tau_n+\cdot))|\mathrm{F}_{\tau_n}^X]&=E[f(X(\tau_n+\cdot))|\ X(\tau_n)]\\&=E_{X(\tau_n)}[f(X(\cdot))]\end{aligned}\qquad(1.1.2)$$

P 一$a.\ s.$ 成立，这里 $E_x(\cdot)$ 表示对应于 $P(\cdot|X(0)=x)$ 的期望，则我们称 X 是时齐的马尔可夫骨架过程．

由定义 1.1.1 可知，马尔可夫过程，半马尔可夫过程，逐段决定马尔可夫过程，更新过程及半再生过程等诸多类型的随机过程均可视为马尔可夫骨架过程的特例，关于这一点，可如下说明之：

设$\{X_t, t<\tau\}$是一个随机过程，$0=\tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n \uparrow \tau$，$\tau_i, i=1,2,\cdots$ 是$\{X_t\}$的第 i 个跳点，τ 为爆炸点．若

$(i)\{X_t, t<\tau\}$ 在$\tau_n, n\geq 0$具有马尔可夫性,

$(ii) X_t = X_{\tau_n}, \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n=0,1,2\cdots,$

$(iii)\tau_{n+1}-\tau_n$ 的分布是依赖于 X_{τ_n} 的负指数分布，即

$$P(\tau_{n+1}-\tau_n \leq t | X_{\tau_n}) = \begin{cases} 1-e^{-2m}, t>0 \\ 0, t\leq 0 \end{cases}$$

则显然$\{X_t, t<\tau\}$是一个马尔可夫过程．此类过程由马尔可夫于 1906 年提出．若$\{X_t, t<\tau\}$满足（i）和（ii），而不必满足（iii），则$\{X_t, t<\tau\}$是一半马尔可夫过程，这一概念由Levy[41]及若干学者于1953年提出．之后，Davis [12, 13] 放弃了条件（ii），引入了逐段决定马尔可夫过程的概念．而由定义 1.1 可见，马尔可夫骨架过程是一类放弃了上述条件（ii）和（iii），仅只保留（i）的随机过程．

由于马尔可夫骨架过程是一个涵盖面极广的概念，因而其应用前景将十分宽广，侯振挺等已成功地应用马尔可夫骨架过程的理论于多个领域[25, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 38]．在本学位论文中，我们进一步探讨了马尔可夫骨架过程的理论，对一类特殊的马尔可夫骨架过程---Doob 骨架过程，建立了若干极限状态下的结果，这是在马氏骨架过程理论中的新的进展，我们将其应用于排队理论，可靠性理论，存储理论等多个方面，得到了一些新的结果．

本论文的主要内容如下：

第二章介绍了马尔可夫骨架过程的概念及基本性质．这一部分内容是其后各章的理论基础．第三章讨论了 GI/G/1 排队系统，利用第二章的结果，给出了这个排队系统的队长和等待时间的极限分布存在的充分条件．第四章主要是应用第二章的结果于可靠性理论，具体分析了并联系统在极限状态下的性态．在第五章中，分析了二个水库储水模型及一个易腐烂物品库存模型，所得结果详见相应章节．

第二章　马尔可夫骨架过程

§2.1　马尔可夫骨架过程的概念

设（E,ε）是一可测空间，$X=\{X(t,\omega),0\le t<\infty\}$是定义在完备的概率空间（$\Omega$,F,$P$）上取值于（E,$\varepsilon$）的随机过程，$\{F_t^x,t\ge 0\}$是X的自然$\sigma$一代数流．$\theta_t$为推移算子：$(\theta_t\omega)_s=\omega_{t+s}$，$(\omega_s)_{s\ge 0}\in\Omega$．

定义 2.1.1　称随机过程$X=X\{t,\omega),0\le t<\infty\}$为马尔可夫骨架过程，如果存在一停时列$\{\tau_n\}_{n\ge 0}$，满足

（C1）$\tau_0=0$且$\tau_n\uparrow\infty$，并对任意的$n\ge 0,\tau_n<\infty\Rightarrow\tau_n<\tau_{n+1}$；

（C2）对于一切n=0,1,…，有$\tau_{n+1}=\tau_n+\theta_{\tau_n}\tau_1$；

（C3）对每个τ_n和任意定义在$E^{[0,\infty)}$上的有界$\varepsilon^{[0,\infty)}$一可测函数f，有

$$E[f(X(\tau_n+\cdot))|F_{\tau_n}^X]=E[f(X(\tau_n+\cdot))|\ X(\tau_n)],\qquad P-a.\ s.,\ (2.1.1)$$

其中$\Omega_{\tau_n}=(\omega:\tau_n(\omega)<\infty)$，$F_{\tau_n}^X=\{A:\forall t\ge 0,A\cap(\omega:\tau_n\le t)\in F_t^X\}$是$\Omega_{\tau_n}$上的$\sigma$一代数．我们把$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$叫做马尔可夫骨架过程$X$的骨架时序列．进而，如果在$\Omega_{\tau_n}$上

$$E[f(X(\tau_n+\cdot))|F_{\tau_n}^X]=E[f(X(\tau_n+\cdot))|\ X(\tau_n)]$$

$$= E_{X_{(\tau_n)}}[f(X(\cdot))] \qquad (2.1.1')$$

$P-a.\ s.$ 成立，则称 X 是时齐马尔可夫骨架过程,记为 MSP．这里 $E_x(\cdot)$ 表示对应于 $P(\cdot|X(0)=x)$ 的期望.

注 2.1.1 在本文中，设 E 为 Polish 空间，ε 是 Borel σ 一代数，Ω 是定义在 $I\!R^+=[0,\infty)$ 上取值于 E 的右连续函数空间.

我们考虑取值于 E 的右连续随机过程 $X=X\{t,\omega),0\le t<\infty\}$．设 $\mathrm{F}_\infty=V_{t=0}^{\infty}\mathrm{F}_t^X$．假定存在（Ω，F）上的一族概率测度 P_x，$x\in \mathrm{E}$，满足 $\forall A\in \mathrm{F}_\infty$，$x\to P_x(A)$ 是 ε－可测的，且 $\forall x\in \mathrm{E}$，

$$P_x(A)=P(A|X_0=x),$$

对（E,ε）上的任意概率测度 μ，我们定义 $(\Omega,\mathrm{F}_\infty)$ 上的概率测度 P_μ 如下：$\forall A\in \mathrm{F}_\infty$，$P_\mu(A)=\int_E P_x(A)\mu(dx)$．令 F_t^{μ} 为 F_t^X 关于测度 P_μ 的完备化，并且

$$\mathrm{F}_t=\cap_{\mu\in P(E)}\mathrm{F}_t^{\mu},t\ge 0$$

这里 P（E）为（E,ε）上的概率测度的集合.

注 2.1.2　由于 Polish 空间可度量化，可视 X 是定义在度量空间上的右连续随机过程，所以 X 关于 $\{\mathrm{F}_t^X,t\ge 0\}$ 是循序可测的．故 $X(\tau_n)$ 和 $f(X(\tau_n+\cdot))$ 是可测的，这里 f 是 $(\mathrm{E}^{[0,+\infty)},\varepsilon^{[0,\infty)})$ 上的可测函数.

设 $X=\{X(t),0\le t<\infty\}$ 是一马尔可夫骨架过程，令 $\eta_n=(\sigma_n,X(\tau_n))$，$n\ge 0$，这里 $\sigma_0=0$，$\sigma_n=\tau_n-\tau_{n-1}$，$n\ge 1$（约定：$\infty-\infty=0$），则 η_n，$n\ge 0$ 是取值于可测空间 $(I\!R^+\times \mathrm{E},\mathrm{B}(I\!R^+)\times\varepsilon)$ 的一随机变量序列.

命题 2.1.1　如果 $\{X_{(t)};t\ge 0\}$ 是以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的马尔可夫骨架过程．则 $\tau_{n+1}-\tau_n$ 是 $\sigma(X(\tau_n+t);t\ge 0)$ 一可测的.

证明 由τ_1是一停时可知它是F_∞可测的，从而存在一可测函数f和一序列$\{t_1,t_2,\cdots\}$使得

$$\tau_1(\omega)=f(X(t_1,\omega),X(t_2,\omega),\cdots)$$

故，由$\tau_{n+1}-\tau_n=\theta_{\tau_n}\cdot\tau_1=f(X(\tau_n+t_1),X(\tau_n+t_2),\cdots)$可得$\tau_{n+1}-\tau_n$是$\sigma(X(\tau_n+t);t\geq 0)-$可测的.

定义 2.1.2 设G为F的一个子σ代数，$(U,\ \mathrm{U})$为一可测空间，且ξ为在(U,U)中取值的随机元．如果$\{K(\omega,A),\omega\in\Omega,A\in\mathrm{U}\}$是$(U,\mathrm{U})$上的一簇概率测度，满足条件：

（1）$\forall A\in\mathrm{U}, k(\cdot,A)$是$\Omega$上G可测函数；

（2）$\forall A\in\mathrm{U}, k(\cdot,A)$是$P(\xi^{-1}(A)|\mathrm{G})$的一个版本，即$\forall B\in\mathrm{G}$，

$$\int_B K(\omega,A)P(d\omega)=P(B\cap\xi^{-1}(A)).$$

则称$\{K(\omega,A),\omega\in\Omega,A\in\mathrm{U}\}$为$\xi$关于G的混合条件分布.

定理 2.1.1 若(U,U)为一个 Radon 可测空间，则对于任意的取值于(U,U)的随机元及F的子σ代数G，存在关于G的混合条件分布.

（参考严加安，测度论讲义，P180，定理 3.1.3).

定理 2.1.2 如果Y是取值于可测空间$(V,\ \mathrm{V})$的随机元，ξ是取值于(U,U)的随机元，(U,U)为一个 Radon 可测空间，则存在$V\times U$上的(混合)条件分布$K(y,A)$，使得

(i) 对于固定的$y\in V, K(y,\cdot)$是(U,U)上的概率测度；

(ii) 对于固定的$A\in\mathrm{U}, K(\cdot,A)$是$V$上的V可测函数；

(iii) 对于固定的$A\in\mathrm{U}, K(y,A)$是$P(\xi^{-1}(A)|\sigma(Y))$的一个版本.

证明：显然 (Y,ξ) 是取值于 $(V\times U,\mathscr{V}\times\mathscr{U})$ 的随机元，(Y,ξ) 的分布记作 $P^{(Y,\xi)}(\cdot)$．令 $\zeta: V\times U\to U,\zeta((\upsilon,u))=u$，$\zeta$ 是 $(V\times U,\mathscr{V}\times\mathscr{U})$ 上的随机元；令 $\eta: V\times U\to V,\zeta((\upsilon,u))=\upsilon$，$\eta$ 也是 $(V\times U,\mathscr{V}\times\mathscr{U})$ 的随机元．令 $\mathscr{G}=\sigma(\eta)\subset\mathscr{V}\times\mathscr{U}$，由定理 2.1.1 知，存在 ζ 关于 $\mathscr{G}$ 的混合条件分布 $\widetilde{K}((\upsilon,u)),\cdot A)$ $((u,\upsilon)\in V\times U,A\in\mathscr{U})$，使得

（i）对于固定的 $A\in\mathscr{U}$，$\widetilde{K}(\cdot,A)$ 是 $\mathscr{G}$ 可测函数，从而 $\widetilde{K}((\upsilon,u),A)$ 与 u 无关；

（ii）对于固定的 $(\upsilon,u)\in V\times U,\widetilde{K}(\cdot,A)$ 是 $(U,\mathscr{U})$ 上的概率测度；

（iii）对 $\forall B\in\mathscr{V}$，

$$\int_B\widetilde{K}((u,\upsilon),A)P^{(Y,\xi)}(d\upsilon du)$$

$$=\int_{\{\eta\in B\}}\widetilde{K}((\eta,\zeta),A)P^{(Y,\xi)}(d(\eta,\zeta))$$

$$=P^{(Y,\xi)}\{\eta\in B,\zeta\in A\}$$

由于 $\widetilde{K}((\upsilon,u),A)$ 与 u 无关，故可令 $K(\upsilon,A)=\widetilde{K}((\upsilon,u),A)$，则 $\{K(\upsilon,A);\upsilon\in V,A\in\mathscr{U}\}$ 满足如下条件：

（i）　固定 $A\in\mathscr{U}$，$K(\cdot,A)$ 是 $\mathscr{V}$ 可测的；

（ii）　固定 $\upsilon\in V,K(\upsilon,\cdot)$ 是 $(U,\mathscr{U})$ 上测度；

$$\int_{\{Y\in B\}}K(Y,A)P(d\omega)$$

$$=\int_{\{\eta\in B\}}K((\eta,A)P^{(Y,\xi)}(d\eta d\zeta)$$

$$=\int_{\{\eta\in B\}}\widetilde{K}((\eta,\zeta),A)P^{(Y,\xi)}(d\eta d\zeta)$$

$$=P^{(Y,\xi)}\{\eta\in B,\zeta\in A\}$$

即 $K(Y,A)=P(\xi\in A|\sigma(Y))\quad P-a.s.$

$\{K(\upsilon,A);\upsilon\in V,A\in\mathscr{U}\}$ 称为随机元 ξ 关于随机元 Y 的混合条件分布．

注 2.1.3 由于 Polish 空间是 Radon 可测空间，故上述二定理对于取值于 Polish 空间的随机元亦成立.

对于马尔可夫骨架过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 来说，由于其轨道右连续，所以 $X(\tau_n), n = 1,2,\cdots$ 是取值于（E,ε）的随机变量，（$\tau_n, X(\tau_n)$）是取值于 Polish 空间 $\mathbb{R}^+ \times E$ 的随机变量，于是由定理 1.1.2 知，（$\tau_n, X(\tau_n)$）关于随机变量 $X(0)$ 的条件分布 $q^{<n>}(x, ds, dy) \equiv P(\tau_n \in ds, X_{\tau_n} \in dy | X(0) = x)$ 存在.

对于任意的 $x \in E, t \geq 0, q^{<n>}(x, [0,t), dy)$ 是（E,ε）上的测度，记作 $q^{<n>}(x, t, dy)$.

由过程 X 的齐次性及定理 1.1.2 易证

定理 2.1.3 $q^{<n>}(x,t,dy)$，$x \in E, t \geq 0, A \in \varepsilon$ 满足以下条件：

（i）对于固定的 $A \in \varepsilon, q^{<n>}(\cdot,\cdot,A)$ 是 $E \times \mathbb{R}^+$ 上的 $\varepsilon \times B(\mathbb{R}^+)$ 可测的函数；

（ii）对于固定的 $x \in E, t \geq 0, q^{<n>}(x,t,\cdot)$ 是（E,ε）上的有限测度；

（iii）对于任意的 $t \geq 0, A \in \varepsilon$ 和 $m \in Z^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$q^{<n>}(X(\tau_m), t, A) = P\{X(\tau_{m+n}) \in A, \tau_{m+n} \leq t | X(\tau_m)\}, P-a.s.$

$q^{<1>}(x,t,A)$ 简记作 $q(x,t,A), q^{<1>}(x,dt,dy)$ 简记作 $q(x,dt,dy)$

定理 2.1.4 对于任意的 $n \in N, t \geq 0, A \in \varepsilon, x \in E$，

$$
\begin{aligned}
& q^{<n+1>}(x,t,A) \\
&= \int_E \int_0^t q^{<n>}(x,ds,dy) q(y,t-s,A) \\
&= \int_E \int_0^t q(x,ds,dy) q^{<n>}(y,t-s,A)
\end{aligned}
$$

证明： 由条件概率的基本性质

$$q^{<n+1>}(x,t,A)$$

$$= P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} \le t | X(0) = x)$$

$$= \int_E \int_0^t P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} \le t | X(\tau_n) = y, \tau_n = s, X(0) = x)$$

$$P(X(\tau_n) \in dy, \tau_n \in ds | X(0) = x)$$

$$= \int_E \int_0^t P(X(\tau_1) \in A, \tau_1 \le t - s | X(0) = y) P(X(\tau_n) \in dy, \tau_n \in ds | X(0) = x)$$

$$= \int_E \int_0^t q(y, t-s, A) q^{<n>}(x, ds, dy)$$

利用数学归纳法可以证明对任意 $n \in IN$，

$$\int_E \int_0^t q(x, ds, dy) q^{<n>}(y, t-s, A) = \int_E \int_0^t q^{<n>}(x, ds, dy) q(y, t-s, A)$$

定理证毕.

§2.2 向后和向前方程

定义 2.2.1 称时齐马尔可夫骨架过程 $X = \{X(t,\omega), 0 \le t < \infty\}$ 是正规的，如果存在 $E \times IR^+ \times \varepsilon$ 上的函数 $h(x,t,A)$，使得

（i）固定 x,t，$h(x,t,\cdot)$ 是 ε 上的有限测度；

（ii）固定 $A \in \varepsilon$，$h(\cdot,\cdot,A)$ 是 $E \times R^+$ 上的 $\varepsilon \times B(IR^+)$ 可测函数；

（iii）对于任意的 $t \ge 0, A \in \varepsilon$，

$$h(X(\tau\ ), t, A) = P\{X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t | X(\tau_n)\} \quad P-a.s.$$

令

$$P(x,t,A) = P\{X(t) \in A | X(0) = x\}$$

定理 2.2.1 设 $X = \{X(t), t \ge 0\}$ 是以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的正规马尔可夫骨架过程，则对于任意的 $x \in E, t \ge 0, A \in \varepsilon$，有

$$P(x,t,A)=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t(\sum_{n=1}^{\infty}q^{<n>}(x,ds,dy))h(y,t-s,A) \tag{2.2.1}$$

从而 $\{P(x,t,A)\}$ 是如下非负方程组的最小非负解：

$$P(x,t,A)=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t q(x,ds,dy)P(y,t-s,A) \quad x\in \mathrm{E},t\geq 0,A\in\varepsilon \tag{2.2.2}$$

证明：对于任意的 $x\in \mathrm{E},t\geq 0,A\in\varepsilon,n\in \mathrm{N}$，

$$P(X(t)\in A,\tau_n\leq t<\tau_{n+1}|X(0)=x)$$

$$=\int_E\int_0^t P(X(t)\in A,\tau_n\leq t<\tau_{n+1}|X(\tau_n)=y,\tau_n=s,X(0)=x)$$

$$P(X(\tau_n)\in dy,\tau_n\in ds|X(0)=x)$$

$$=\int_E\int_0^t P(X(t-s+\tau_n)\in A,t-s<\theta_{\tau_n}\cdot\tau_1|X(\tau_n)=y,\tau_n=s,X(0)=x)$$

$$\cdot\, q^{<n>}(x,ds,dy)$$

由命题 2.2.1，$X=\{X(t),t\geq 0\}$ 的齐次性及 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 在 τ_n 处的马尔可夫性立得

$$P(X(t-s+\tau_n)\in A,t-s<\theta_{\tau_n}\cdot\tau_1|\ X(\tau_n)=y,\tau_n=s,X(0)=x)$$

$$=P(X(t-s)\in A,t-s<\tau_1|X(0)=y)=h(y,t-s,A)$$

故

$$P(X(t)\in A,\tau_n\leq t<\tau_{n+1}\Big|X(0)=x)=\int_E\int_0^t q^{<n>}(x,ds,dy)h(y,t-s,A)$$

从而

$$P(x,t,A)=P(X(t)\in A|X(0)=x)$$

$$=P(X(t)\in A,t<\tau_1\Big|X(0)=x)+\sum_{n=1}^{\infty}P(X(t)\in A,\tau_n\leq t<\tau_{n+1}|X(0)=x)$$

$$=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}q^{<n>}(x,ds,dy)h(y,t-s,A)$$

即 $\{P(x,t,A);t\geq 0,x\in \mathrm{E}\}$ 满足方程（2.2.1）．由最小非负解理论可知

$\{P(x,t,A)\}$ 是方程组（2.2.2）的最小非负解.

方程组（2.2.2）称为正规马尔可夫骨架过程 $\{(X(t),t\geq 0\}$ 的向后方程组.

$\{h(x,t,A)\}$ 记作 H，$\{q(x,dt,dy)\}$ 记作 Q. 由定理 2.2.1 可知 $X(t)$ 的一维分布由（H,Q）唯一决定.

定义 2.2.2 如果存在测度簇 $\hat{Q}=\{\hat{q}(x,dt,dy)\}_{t\geq 0}$，使得对于任意的 $A\in\varepsilon, x\in \mathrm{E}, t\geq 0,$

$$\int_E\int_0^t h(y,t-s,A)q(x,ds,dy)=\int_E\int_0^t h(x,t-s,dy)\hat{q}(y,ds,A) \tag{2.2.3}$$

则称如下方程组：

$$P(x,t,A)=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t P(x,t-s,dy)\hat{q}(y,ds,A)$$

$$x\in \mathrm{E}, t\geq 0, A\in\varepsilon \tag{2.2.4}$$

为马尔可夫骨架过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的向前方程组.

令

$$\hat{q}^{<1>}(x,ds,dy)=\hat{q}(x,ds,dy)$$

$$\hat{q}^{<2>}(x,ds,dy)=\int_E\int_0^t \hat{q}^{<1>}(x,ds,dz)\hat{q}(z,t-s,dy)$$

$$\cdots$$

$$\hat{q}^{<n>}(x,ds,dy)=\int_E\int_0^t \hat{q}^{<n-1>}(x,ds,dz)\hat{q}(z,t-s,dy)$$

$$\cdots$$

定理 2.2.2 如果存在满足等式（2.2.3）的 $\hat{Q}=\{\hat{q}(x,dt,dy)\}_{t\geq 0}$，则马尔可夫骨架过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的转移概率 $P(x,t,A)=P(X(t)\in A|X(0)=x)$ 也是向前方程组（2.2.4）的最小非负解.

证明：利用数学归纳法可以证明，若等式(2.2.3)成立，则对于任意的 $n\in N$，

有

$$\int_E \int_0^t h(y,t-s,A)q^{<n>}(x,ds,dy) = \int_E \int_0^t h(x,t-s,dy)\hat{q}^{<n>}(y,ds,A)$$

由定理 2.2.1，对于任意的 $A\in\varepsilon, t\geq 0, x\in \mathrm{E}$ ，

$$P(x,t,A) = h(x,t,A) + \int_E \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} q^{<n>}(x,ds,dy)h(y,t-s,A)$$

$$= h(x,t,A) + \int_E \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} h(x,t-s,dy)\hat{q}^{<n>}(y,ds,A)$$

故 $P(x,t,A)$ 也是（2.2.4）的最小非负解．定理证毕．

令

$$h_\lambda(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}h(x,t,A)dt,$$

$$q_\lambda(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}q(x,t,A)dt,$$

$$P_\lambda(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x,t,A)dt,$$

$$q_\lambda^{<n>}(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}q^{<n>}(x,t,A)dt.$$

于是由定理 2.2.1 得

定理 2.2.3 设 $X=\{X_t;t\geq 0\}$ 是以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的正规的马尔可夫骨架过程，则对于任意的 $x\in \mathrm{E}, \lambda>0, A\in\varepsilon$ ，有

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + \int_E \sum_{n=1}^{\infty} q_\lambda^{<n>}(x,dy)h_\lambda(y,A). \tag{2.2.5}$$

从而 $\{P_\lambda(x,A)\}$ 是如下方程的最小非负解．

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + \int_E q_\lambda(x,dy)P_\lambda(y,A). \tag{2.2.6}$$

方程（2.2.6）也称为 X 的向后方程．同样，我们也把与（2.2.4）等价的方程

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + \int_E P_\lambda(x,dy)\hat{q}_\lambda(y,A). \tag{2.2.7}$$

称为 X 的向前方程，其中 $\hat{q}_\lambda(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\hat{q}(x,t,A)dt$.

由定理 2.2.1 知正规马尔可夫骨架过程应是我们进一步研究的对象. 下面我们给出马尔可夫骨架过程成为正规马尔可夫骨架过程的一个充分条件，这个条件就是过程轨道以概率 1 处处有左极限. 在实际应用中，到目前为止，我们所遇到的马尔可夫骨架过程都具有这个性质.

在今后的研究中，我们所说的马尔可夫骨架过程都是指正规马尔可夫骨架过程，不再一一申明.

令 $D_E[0,\infty)=\{W:[0,\infty)\to E;W(\cdot)$ 是 $[0,\infty)$ 上右连左极的映射$\}$，周知，$D_E[0,\infty)$ 在 Skorohod 度量下是一个 Polish 空间. 令 $\{W(t)_{t\geq 0}\}$ 为 $D_E[0,\infty)$ 上的坐标过程，B $(D_E[0,\infty))$表示 $D_E[0,\infty)$ 上的 Borel 代数. 显然 $\mathrm{B}(D_E[0,\infty))=\sigma\{W(t),t\in I\!R^+\}$.

引理 2.2.1 对于任意的 $A\in\varepsilon, I_A(W(t))$ 是 $I\!R^+\times D_E[0,\infty)$ 上的 $\mathrm{B}(I\!R^+)\times\mathrm{B}(D_E[0,\infty))$ 可测函数.

证明：(1) 对于 E 上的任意的有界连续函数 $f(\cdot)$，对于固定的 $\delta>0$，以及 $s\geq 0$，易知 $f(W(s)I_{[t,t+\delta)})$ 是关于 t 和 w 的 $\mathrm{B}(I\!R^+)\times\mathrm{B}(D_E[0,\infty))$ 上的可测函数.

显然

$\frac{1}{\delta}\int_0^\infty I_{[t,t+\delta)}(s)f(W(s))ds$ 是 $I\!R^+\times D_E[0,\infty)$ 上的可测函数. 令 $\delta\to 0$，显然由 $W(t)$ 的右连续性以及 $f(\cdot)$ 的连续性，$f(W(t))=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^\infty I_{[t,t+\delta)}(s)f(W(s))ds$ 是 $I\!R^+\times D_E[0,\infty)$ 上的 Borel 可测函数.

(2)利用单调类定理，可以证明对于任意的 $A\in\varepsilon$，$I_A(W(t))$ 是 $I\!R^+\times D_E[0,\infty)$ 上的 Borel 可测函数，即 $(t,W)\to I_A(W(t))$ 是 $I\!R^+\times D_E[0,\infty)$ 上的 Borel 可测函数.

定理 2.2.4 如果（E,ε）是 Polish 空间，$\{X(t),t\geq 0\}$ 是取值于（E,ε）且

具有右连左极轨道的马尔可夫骨架过程，则$\{X(t),t\geq 0\}$是正规的.

证明：设$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$是$\{X(t),t\geq 0\}$的骨架时序列．由于$\{X(t),t\geq 0\}$的所有轨道是右连左极的，故可以将$\{X(t),t\geq 0\}$看成是取值于$D_E[0,\infty)$的随机元$\xi$．由定理 2.1.3 以及注 2.1.3 存在$\xi$关于$(X(0),\tau_1)$的混合条件分布$K(x,s,d\omega)\equiv P(\xi\in d\omega|X(0)=x,\tau_1=s)$使得：

（i）对于固定的$x\in \mathrm{E},s\geq 0,K(x,s,.)$是$D_E[0,\infty)$上的测度；

（ii）对于固定的$C\in \mathrm{B}(D_E[0,\infty))$, $K(\cdot,\cdot,C)$是$\varepsilon\times \mathrm{B}(I\!R^+)$可测的；

（iii）$\forall C\in \mathrm{B}(D_E[0,\infty))$, $K(X(0),\tau_1,C)$ 是$P(\xi\in C|X(0),\tau_1)$的一个版本.

对于任意的$A\in\varepsilon$，由引理 2.1.1，$I_A(W(t))$是$I\!R^+\times D_E[0,\infty)$上$\mathrm{B}(I\!R^+)\times \mathrm{B}(D_E[0,\infty))$可测函数．令$\hat{h}(x,s,t,A)=\int_{D_E[0,\infty)} I_A(W(t))K(x,s,d\omega)$, 显然$\hat{h}(x,s,t,A)$满足以下条件：

（i）对于固定的x,s,t, $\hat{h}(x,s,t,A)$是(E,ε)上的概率测度；

（ii）对于固定的$A\in\varepsilon,\hat{h}(x,s,t,A)$是$\mathrm{E}\times I\!R^+\times I\!R^+$上的$\varepsilon\times \mathrm{B}(I\!R^+)\times \mathrm{B}(I\!R^+)$可测的函数；

（iii）对于固定的$t\geq 0,A\in\varepsilon$

$$\hat{h}(x,s,t,A)=P(X(t)\in A|X(0)=x,\tau_1=s)\qquad P-a.s.$$

令$h(x,t,A)=\int_0^t \hat{h}(x,s,t,A)\hat{P}(x,ds)$, 其中$\hat{P}(x,ds)$是$\tau_1$关于 $X(0)$的混合条件分布$P(\tau_1\in dx|X(0)=x)$.

显然有：

（i）对于固定的A, $h(\cdot,\cdot,A)$是$\mathrm{E}\times I\!R^+$上的$\varepsilon\times \mathrm{B}(I\!R^+)$可测的函数；

（ii）固定$x\in \mathrm{E},t\geq 0$, $h(x,t,\cdot)$是(E,ε)上的有限测度；

（iii）由条件概率的性质，对于固定的$t \ge 0, A \in \varepsilon$，

$$h(x,t,A) = \int_t^{\infty} \hat{h}(x,s,t;A)\hat{P}(x,ds)$$

$$= \int_t^{\infty} P(X(t) \in A | X(0) = x, \tau_1 = s) P(\tau_1 \in ds | X(0) = x)$$

$$= P(X(t) \in A, t < \tau_1 | X(0) = x) \qquad P-a.\ s.$$

即

$$h(X(0),t,A) = P(X(t) \in A, t < \tau_1 | X(0)) \qquad P-a.\ s.$$

由$\{X(t), t \ge 0\}$在τ_n上的马尔可夫性及该过程的齐次性，立得

$$P(X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t | X(\tau_n) = x)$$

$$= P(X(t) \in A, \tau_1 > t | X(0) = x)$$

$$= h(x,t,A) \qquad P-a.\ s.$$

即

$$P(X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t | X(0)) = h(X(0),t,A) \qquad P-a.\ s.$$

故$\{X(t), t \ge 0\}$是正规的马尔可夫骨架过程.

§2.3 正则性准则

为了讨论方便，我们假定马尔可夫骨架过程$\{X(t), t \ge 0\}$是不中断的（或称正则的）. 实际上，上面得到的定理 2.2.1——2.2.4 对于中断马尔可夫骨架过程$\{X(t); 0 \le t < \tau\}$也成立，这里τ称为$X(t)$的生命. 在应用中常需要判定一个马尔可夫骨架过程是否是正则的，下面我们给出判别准则.

定义 2.3.1 过程$\{X(t); 0 \le t < \tau\}$称为正则的，如要对于每个$x \in \mathrm{E}$有

$$P\{\tau=\infty | X(0)=x\}=1 \tag{2.3.1}$$

引理 2.3.1　$\{X(t)\}$ 为正则的充分必要条件是对于每个 $x\in \mathrm{E}$ 及 $t\ge 0$，有

$$P(x,t,\mathrm{E})=1.$$

或等价地，对于每个 $x\in \mathrm{E}$ 及 $\lambda>0$，有

$$\lambda P_\lambda(x,\mathrm{E})=1.$$

证明　结论显然.

令 $B_E \underline{\Delta}\{f: f$ 是 E 上的有界 Borel 可测函数$\}$.

引理 2.3.2　若 $0\le f\in B_E$，且对于某 $\lambda>0$，存在 $0\le u(x)\in B_E$，使得

$$f(x)-\int_E q_\lambda(x,dy)f(y)=\int_E h_\lambda(x,dy)u(y)\ge 0, \tag{2.3.2}$$

则

$$f(y)\ge \int_E P_\lambda(x,dy)u(y), \quad \forall x\in \mathrm{E}. \tag{2.3.3}$$

进一步，若方程

$$\begin{cases} g(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)g(y), \forall x\in \mathrm{E}; \\ \qquad 0\le g(x)\in B_E. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

只有零解，则（2.3.3）成为等式，即

$$f(x)=\int_E P_\lambda(x,dy)u(y); \qquad \forall x\in \mathrm{E}. \tag{2.3.5}$$

证明　由定理 2.2.3 知 $\{P_\lambda(x,A); x\in \mathrm{E}\}$ 是非负方程

$$Z(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)Z(y)+\int_E h_\lambda(x,A), \qquad x\in \mathrm{E}$$

的最小非负解，从而易证 $\{\int_E P_\lambda(x,dy)u(y); x\in E\}$ 是非负方程

$$Z(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)Z(y)+\int_E h_\lambda(x,dy)u(y), \qquad x\in \mathrm{E} \tag{2.3.6}$$

的最小非负解．而由引理的条件得

$$f(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)f(y)+\int_E h_\lambda(x,dy)u(y), \qquad \forall x\in \mathrm{E}.$$

从而（2.3.3）成立

对于任意的$x\in E$，令

$$g(x)\triangleq f(x)-\int_E P_\lambda(x,dy)u(y)$$

则$0\le g\in B_E$，且g（•）满足方程(2.3.4) 故若（2.3.4）只有零解，则$g\equiv 0$，

即（2.3.5）成立.

B_E表示(E,ε)上的所有有界可测函数的全体.

定理 2.3.1 正规的$\{X(t),t\ge 0\}$正则的充分必要条件是方程

$$\begin{cases} f(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)f(y), & \forall x\in E,\lambda>0, \\ & 0\le f(x)\le 1, f(\cdot)\in B_E. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

只有零解.

证明 充分性：在（2.3.6）中令$u(y)\equiv\lambda$，可知$\{\lambda P_\lambda(x,E);x\in E\}$是非负方程

$$\begin{cases} Z(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)Z(y)+h_\lambda(x,E), & \forall x\in E \\ & 0\le Z(x)\le 1,\quad Z(\cdot)\in B_E. \end{cases}, \tag{2.3.8}$$

的最小非负解．由于（2.3.7）只有零解，从而（2.3.8）只有唯一解$\{\lambda P_\lambda(x,E);x\in E\}$．易知$\forall x\in E$,

$$q(x,t,E)+h(x,t,E)=1,$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}q(x,dt,E)+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(x,dt,E)=\frac{1}{\lambda}.$$

即

$$q_\lambda(x,E)+h_\lambda(x,E)=1,$$

从而$Z(x)\equiv 1$也是（2.3.8）的解．因此$\lambda P_\lambda(x,E)=1,\forall x\in E$.由引理 2.3.1，过程$X$正则.

必要性：由于$\{\lambda P_\lambda(x,E);x\in E\}$和$Z(x)\equiv 1$分别是（2.3.8）的最小解和最大

解，因此$\{1-\lambda P_\lambda(x,\mathrm{E});x\in\mathrm{E}\}$是（2.3.7）的最大解，事实上，（2.3.7）的最大解

可从如下迭代法得到：

$$f^{(0)}(x)\equiv 1,$$

$$f^{(n+1)}(x)\equiv\int_E q_\lambda(x,dy)f^{(n)}(y),$$

$$n=1,2,\cdots$$

显然

$$f^{(1)}(x)=q_\lambda(x,\mathrm{E})$$

$$=1-h_\lambda(x,\mathrm{E}),$$

$$f^{(2)}(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)f^{(1)}(y)$$

$$=q_\lambda(x,E)-\lambda\int_E q_\lambda(x,dy),h_\lambda(y,\mathrm{E})$$

$$=f^{(1)}-\lambda\int_E q_\lambda(x,dy)h_\lambda(y,\mathrm{E}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n+1)}(x)=f^{(n)}(x)-\lambda\underbrace{\int_E q_\lambda(x,dy_1)\int_E\cdots\int_E q_\lambda(y_{n-1},dy_n}_{n}h(y_n,\mathrm{E})$$

$$=1-\lambda[\sum_{k=0}^{n}Q^k\bullet H](x,\mathrm{E}),$$

n=1, 2, …

从而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=1-\lambda[\sum_{k=0}^{\infty}Q^k\cdot H](x,\mathrm{E})=1-\lambda P_\lambda(x,\mathrm{E})$$

由X正则及引理 2.3.1，$\lambda P_\lambda(x,E)=1$，从而（2.3.7）只有零解. 定理证毕.

下面给出一个较易验证的充分条件.

定理 2.3.2 如果$q_\lambda(x,A)$满足条件

$$\beta(\lambda) \underline{\underline{\Delta}} \sup_{x\in E} q_\lambda(x,\mathrm{E}) < 1, \quad \forall \lambda > 0, \qquad (2.3.9)$$

则 X 正则.

证明 由（2.3.9）及方程（2.3.7）的最大解迭代求解法知

$$f^{(1)}(x) = q_\lambda(x,E) \le \beta(\lambda),$$

$$f^{(2)}(x) = \int_E q_\lambda(x,dy) f^{(1)}(y) \le \beta^2(\lambda),$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n+1)}(x) = \int_E q_\lambda(x,dy) f^{(n)}(y) \le \beta^{n+1}(\lambda),$$

$$\cdots\cdots$$

从而

$$0 \le f(x) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) \le \lim_{n\to\infty} \beta^n(\lambda) = 0.$$

故（2.3.7）只有零解，由定理 1.3.2 知 X 正则.

推论 2.3.1 如果状态空间 E 只有有限个点，且 $\forall x \in \mathrm{E}$,

$$P(\tau > 0 | X(0) = x) > 0$$

则 X 正则

§2.4 有限维分布

令 $D^{(n)} = \{(t_1,t_2,\cdots,t_n); t_1,\cdots,t_n \in IR^+, 0 < t_1, t_2, \cdots < t_n\}$

定义 2.4.1 称时齐马尔可夫骨架过程 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是严正规的，如果对于任意的 $n \in \mathrm{N}$ ，存在 $\mathrm{E} \times D^{(n)} \times \varepsilon^n$ 上的函数 $h(x,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)$, 使得

（i）对于固定的 $x,t_1,\cdots,t_n, h(x,t_1,\cdots,t_n,\cdot)$ 是 $(\mathrm{E}^n,\varepsilon^n)$ 上的有限测度；

（ii）对于固定的 $A_1,\cdots,A_n \in \varepsilon, h(\cdot,\cdots,A_1,\cdots,A_n)$ 是 $\mathrm{E} \times D^{(n)}$ 上的 Borel 可测的

函数;

（iii） 对于任意的$0<t_1<t_2\cdots<t_n, A_1,\cdots A_n\in\varepsilon$,

$$P\{X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_n)\in A_n,t_n<\tau_1|X(0)=x\}$$

$$=h(x,t_1,t_2,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)\qquad P-a.s.$$

对于任意的$n\in\mathrm{N}$，$(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in D^{(n)}$，$A_1,\cdots,A_n\in\varepsilon$, 令

$$\xi=\tau_1 I_{A_1}(X(t_1))\cdots I_{A_n}(X(t_n))I_{[t_n,+\infty)}(\tau_1)$$

$$\eta=X(\tau_1)I_{A_1}(X(t_1))\cdots I_{A_n}(X(t_n))I_{[t_n,+\infty)}(\tau_1)$$

(ξ,η) 关于 $X(0)$ 的混合条件分布记作$q(x,t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,\cdots A_n,dt,dy)$即

$$P(\xi\in dt,\eta\in dy|X(0))=q(X(0),t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,\cdots A_n,dt,dy)\qquad P-a.s..$$

当$n=0$时，即为$q(x,dt,dy)$.

下面我们利用$\overline{H}\equiv\{h(x,t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,\cdots A_n);n\in\mathrm{N}\}$ 和

$\hat{Q}\equiv\{q(x,t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,\cdots A_n,dt,dy);n\in\mathrm{N}\}$ 来确定马尔可夫骨架过程的有限维分布.

对于任意的$A\in\varepsilon$，$t_1<t_2\cdots<t_n$，令

$$P(x,t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,\cdots A_n)=P(X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_n)\in A_n|X(0)=x).$$

定理 2.4.1 设$X=\{X(t);t\ge 0\}$是严正规的马尔可夫骨架过程，X的有限维分布由下列递推公布被$(\overline{H},\overline{Q})$唯一决定：

$$P(x,t_1,A)$$

$$=h(x,t_1,A)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_E\int_0^{t_1}q^{<n>}(x,ds,dy)h(x,t-s,A)\qquad(2.4.1)$$

$(\forall x\in\mathrm{E},\ \ \forall t\ge 0,\ \ A\in\varepsilon)$

$$P(x,t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,A_2,\cdots A_n)$$

$$= h(x,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_E \int_{t_i}^{t_{i+1}} q(y,t_1,t_2,\cdots,t_i,A_1,A_2,\cdots,A_i,ds,dy)$$

$$\cdot P(y,t_{i+1}-s,\cdots,t_n-s,A_{i+1},\cdots,A_n)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \int_E \int_0^{t_1} q^{<m>}(x,ds_1,dy_1)[h(y_1,t_1-s_1,\cdots,A_1,\cdots,A_n)$$

$$+\int_E \int_{t_i-s_1}^{t_{i+1}-s_1} q(x,ds_1,dy_1)q(y_1,t_1-s_1,\cdots,t_i-s_1,A_1,\cdots,A_i,ds_2,dy_2)$$

$$P(y_2,t_{i+1}-s_1-s_2,\cdots,t_n-s_1-s_2,A_{i+1},\cdots,A_n)]$$

$$(\forall n>1,x\in \mathrm{E},\quad \forall(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in D^{(n)},\qquad A_1\in\varepsilon,\cdots,A_n\in\varepsilon) \tag{2.4.2}$$

证明：（2.4.1）即是（2.2.1），故只须证明（2.4.2）.

由马氏性以及

$$P(x,t_1,t_2\cdots,t_n,A_1,A_2,\cdots A_n)$$

$$=P(X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_n)\in A_n,t_n<\tau_1)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} P(X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_n)\in A_n,t_i<\tau_1\le t_{i+1})$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} P(X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_n)\in A_n,\tau_m\le t_1<t_n<\tau_{m+1})$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1} P(X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_n)\in A_n,\tau_m\le t_1<t_i<\tau_{m+1}\le t_{i+1})$$

立得（2.4.2）. 定理证毕.

下面我们给出马尔可夫骨架过程成为严正规马尔可夫骨架过程的充分条件——过程的轨道以概率 1 处处有左极限.

引理 2.4.1 对于任意的 $n\in\mathrm{N}$ ，$A_1\cdots A_n\in\varepsilon$，

$$\omega\mapsto I_{A_1}(\omega(t_1))\cdots I_{A_1}(\omega(t_n))$$

是$D^{(n)}\times D_E[0,\infty)$上的 Borel 可测函数.

证明（1）对于任意的(E,ε)上的连续函数$f_1(\cdot),\cdots f_n(\cdot)$，对于固定的$\delta>0$以及$s_1>0,s>0,\cdots,s_n>0$，

$$\omega\mapsto f(\omega(s_n))I_{[t_1,t_1+\delta]}(s_1),\cdots I_{[t_n,t_n+\delta]}(s_n)$$

是$D^{(n)}\times D_E[0,\infty)$上的 Borel 可测函数.

因此

$$\omega\mapsto\frac{1}{\delta^n}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}f_1(\omega(s_1))\cdots f_n(\omega(s_n))I_{[t_1,t_1+\delta]}(s_1),\cdots I_{[t_n,t_n+\delta]}(s_n)ds_1,ds_2,\cdots ds_n$$

是$D^{(n)}\times D_E[0,\infty)$上的 Borel 可测函数.

令$\delta\downarrow 0$得：

$$\omega\mapsto f_1(\omega(t_1))\cdots f_1(\omega(t_n))=$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta^n}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}f_1(\omega(s_1))\cdots f_n(\omega(s_n)I_{[t_1,t_1+\delta]}(s_1),\cdots I_{[t_n,t_n+\delta]}(s_n)ds_1,ds_2,\cdots ds_n$$

是$D^{(n)}\times D_E[0,\infty)$上的 Borel 可测函数.

（2）由单调类定理，知对于任意的$n\in\mathrm{N}$，$A_1\cdots A_n\in\varepsilon$.

$\omega\mapsto I_{A_1}(\omega(t_1))\cdots I_{A_n}(\omega(t_n))$是$D^{(n)}\times D_E[0,\infty)$上的 Borel 可测函数.

定理 2.4.2 设$X=\{X(t);t\geq 0\}$是以$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$为骨架时序列的马尔可夫骨架过程. 如果$X$的轨道都是左极的，则$\{X(t);t\geq 0\}$是严正规的马尔可夫骨架过程.

证明：由于$\{X(t);t\geq 0\}$的所有轨道都是右连左极的，故可以将$\{X(t);t\geq 0\}$. 看成是取值于$D_E[0,\infty)$的随机元ξ. 由定理 2. 1. 3 以及注 2.1.3, 存在ξ关于$(X(0),\tau_1)$的混合条件分布$K(x,s,d\omega)\equiv P(\xi\in d\omega|X(0)=x,\tau_1=s)$使得：

（1） 对于固定的$x\in\mathrm{E}$，$s\geq 0$，$K(x,s,\cdot)$是$D_E[0,\infty)$上的概率测度,

（2） 对于固定的$C\in \mathrm{B}(D_E[0,\infty)), K(\cdot,\cdot,C)$是$\varepsilon\times \mathrm{B}(I\!R^+)$可测的，

（3） $\forall C\in \mathrm{B}(D_E[0,\infty))$， $K(X(0),\tau_1,C)$是$P(\xi\in C|X(0),\tau_1)$的一个版本

对于任意的$n\in \mathrm{N}$， $A_1,\cdots,A_n\in\varepsilon$，由引理 2.4.1

$\omega\mapsto I_{A_1}(\omega(t_1))\cdots I_{A_n}(\omega(t_n))$是$D^{(n)}\times D_E[0,\infty)$上的 Borel 可测函数.

令

$$\widetilde{h}(x,s,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)=\int_{D_E[0,\infty)} I_{A_1}(\omega(t_1))\cdots I_{An}(W(t_n)K(x,s,d\omega)$$

显然$\widetilde{h}(x,s,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)$满足以下条件，

（i）对于固定的$x,s,t_1,\cdots,t_n$， $\widetilde{h}(x,s,t_1,\cdots,t_n,\cdot)$是$(\mathrm{E}^n,\varepsilon^n)$上的概率测度

（ii）对于固定的 $A_1\cdots,A_n\in\varepsilon$， $\hat{h}(\cdots,\cdots,\cdots,A_1,\cdots,A_n)$ 是 $\mathrm{E}\times I\!R^+\times D^{(n)}$ 上的 Borel 可测函数.

（iii）对于固定的$0<t_1<t_2\cdots<t_n$， $A_1\cdots,A_n\in\varepsilon$，

$$\hat{h}(x,s,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)=P(X(t_1)\in A_1,\cdots X(t_n)\in A_n|X(0)=x,\tau_1=s)\qquad P-a.s.$$

令

$$h(x,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)=\int_0^t \hat{h}(x,s,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)P(x,ds)$$

其中$P(x,ds)$是τ_1关于$X(0)$的混合条件分布$P(\tau_1\in ds|X(0)=x)$.

显然． $h(x,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)$满足以下条件：

（1） 对于固定的$A_1,\cdots,A_n$， $h(\cdot,\cdots,A_1,\cdots,A_n)$是$\mathrm{E}\times D^{(n)}$上的 Borel 可测函数.

（2） 对于固定的x， $t_1<t_2\cdots<t_n$， $h(x,t_1,\cdots,t_n,\cdot)$是$(\mathrm{E}^n,\varepsilon^n)$上的有限测度.

（3） 对于固定的$A_1,\cdots,A_n\in\varepsilon$， $t_1<t_2\cdots<t_n$，

$\hat{h}(x,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)$

$$= \int_0^t h(x,s,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)P(x,ds)$$

$$= \int_0^t P(X(t) \in A_1,\cdots,X(t) \in A_n | \tau_1 = s, X(0) = x) P(\tau_1 \in ds | X(0) = x)$$

$$= P(X(t_1) \in A_1,\cdots X(t_n) \in A_n, \tau_1 < t | X(0) = x) \qquad P - a.s.$$

由 $\{X(t);t \geq 0\}$ 在 τ_n 处的马尔可夫性及齐次性，可得 $\forall_m \in \mathrm{N}$.

$$P(X(\tau_m + t_1) \in A_1,\cdots,X(\tau_m + t_m) \in A_m, \tau_{m+1} - \tau_n > t_n | X(\tau_n) = x)$$

$$= P(X(t_1) \in A_1,\cdots X(t_n) \in A_n, t_n < \tau_1 | X(0) = x)$$

$$= h(x,t_1,\cdots,t_n,A_1,\cdots,A_n)$$

因此, $\{X(t);t \geq 0\}$ 是严正规的马尔可夫骨架过程.

§2.5 极限分布

定义 2.5.1 设 $X(t)$ 是 (Ω,F,P) 上的取值于 (E,ε) 的随机过程, $P(x,t,A) \triangleq P(X(t) \in A | X(0) = x)$. 若对于任意的 $x \in \mathrm{E}, A \in \varepsilon$, $\lim_{t\to\infty} P(x,t,A)$ 存在且与 x 无关, 并且 $P(A) \equiv \lim_{t\to\infty} P(x,t,A)$ $(A \in \varepsilon)$ 是 (E,ε) 上的概率分布，则称 $X(t)$ 的极限（概率）分布存在，称 $P(\cdot)$ 为 $X(t)$ 的极限（概率）分布.

定义 2.5.2 设 $X(t)$ 是一个以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的马尔可夫骨架过程. 如果存在 (E,ε) 上的概率测度 $\pi(\cdot)$, 使得对于任意的 $A \in \varepsilon$,

$$P(X(\tau_1) \in A | X(0) = x, \tau_1 = s) = P(X(\tau_1) \in A) = \pi(A) \tag{2.5.1}$$

则称 $X(t)$ 为 Doob 骨架过程，称 $\pi(\cdot)$ 为 $X(t)$ 的特征测度，$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 称为 $X(t)$ 的再生点.

注2.5.1　Doob骨架过程是齐次可列马尔可夫过程中Doob过程的推广.在应用中，我们会常常遇到Doob骨架过程，或者通过骨架时序列的再选择而得到Doob骨架过程.

令

$$F(x,t)=P(\tau_1 \le t | X(0)=x), \quad \forall x \in \mathrm{E}, t \ge 0;$$

$$F(t)=\int_0^{\infty} \pi(dx) F(x,t), \quad \forall t \ge 0.$$

引理2.5.1　设$X(t)$为Doob骨架过程，则

$$q(x,ds,dy)=F(x,ds)\pi(dy) \tag{2.5.2}$$

证明：由（2.5.1）得

$$q(x,ds,dy)=P(\tau_1 \in ds, X(\tau_1) \in dy | X(0)=x)$$

$$=P(\tau_1 \in ds | X(0)=x) P(X(\tau_1) \in dy | X(0)=x, \tau_1=s)$$

$$=F(x,ds)P(X(\tau_1) \in dy)$$

$$=F(x,ds)\pi(dy)$$

引理2.5.2　若$X(t)$是Doob骨架过程，则

$$P(X(\tau_n) \in A)=P(X(\tau_1) \in A)=\pi(A) \quad (n \ge 1)$$

证明：由（2.5.1）得

$$P(X(\tau_2) \in A)$$

$$=\int_E P_{x(\tau_1)}(dx) P(X(\tau_2) \in A | X(\tau_1)=x)$$

$$=\int_E \pi(dx) P(X(\tau_1) \in A | X(0)=x)$$

$$=\int_E \pi(dx)\pi(A)=\pi(A)\int_E \pi(dx)=\pi(A)$$

用归纳法立得我们的引理.

引理 2.5.3 若 $X(t)$ 是 Doob 骨架过程，则

$$P(\tau_{n+1}-\tau_n \le t) = P(\tau_2-\tau_1 \le t) = F(t) \qquad (n \ge 1)$$

证明：

$$\begin{aligned}
P(\tau_{n+1}-\tau_n \le t) &= \int_E P_{x(\tau_n)}(dx) P(\tau_{n+1}-\tau_n \le t \mid X(\tau_n)=x) \\
&= \int_E \pi(dx) P(\tau_2-\tau_1 \le t \mid X(\tau_1)=x) \\
&= P(\tau_2-\tau_1 \le t) \\
&= \int_E \pi(dx) P(\tau_2-\tau_1 \le t \mid X(\tau_1)=x) \\
&= \int_E \pi(dx) P(\tau_1 \le t \mid X(0)=x) \\
&= \int_E \pi(dx) F(x,t) = F(t)
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
F_\lambda(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(x,dt), \\
F_\lambda &= \int_E F_\lambda(x)\pi(dx), \\
h_\lambda(A) &= \int_E h_\lambda(x,A)\pi(dx).
\end{aligned}$$

定理 2.5.1 设 X 为 Doob 骨架过程，则

$$P_\lambda(A) = \frac{h_\lambda(A)}{1-F_\lambda}, \tag{2.5.3}$$

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + \frac{F_\lambda(x)h_\lambda(A)}{1-F_\lambda}. \tag{2.5.4}$$

证明：由向后方程可知

$$\begin{aligned}
P_\lambda(x,A) &= h_\lambda(x,A) + \int_E F_\lambda(x)\pi(dy)P_\lambda(y,A) \\
&= h_\lambda(x,A) + F_\lambda(x)\int_E \pi(dy)P_\lambda(y,A),
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

于是

$$\int_E \pi(dx)P_\lambda(x,A) = \int_E \pi(dx)h_\lambda(x,A)+\int_E \pi(dx)F_\lambda(x)\int_E \pi(dy)P_\lambda(y,A)$$

$$=h_\lambda(A)+F_\lambda\int_E \pi(dx)P_\lambda(x,A)$$

所以

$$P_\lambda(A)=\int_E \pi(dx)P_\lambda(x,A)=\frac{h_\lambda(A)}{1-F_\lambda} \tag{2.5.6}$$

把（2.5.6）代入（2.5.5）即得（2.5.4）．定理证毕．

定理 2.5.2 设 $X(t)$ 为 Doob 骨架过程且 $\int_0^\infty tdF(t)<\infty$．若对于一切的 $x\in \mathrm{E}, A\in\varepsilon$，极限 $\lim_{t\to\infty}P(x,t,A)$ 存在，则

$$P(x,A)\underset{=\!=}{\Delta}\lim_{t\to\infty}P(x,t,A)=\frac{F(x,\infty)\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}.$$

（2.5.7）从而 $P(x,A)$ 与 x 无关，当且仅当 $F(x,\infty)=\text{const.}$，这时令 $P(A)=P(x,A)\ (\forall A\in\varepsilon), P(\cdot)$ 是 (E,ε) 上的概率测度当且仅当 $F(x,\infty)=1,\forall x\in\mathrm{E}$．

证明 由定理 2.5.1，得

$$\lambda P_\lambda(A)=\frac{h_\lambda(A)}{\frac{1-F_\lambda}{\lambda}}. \tag{2.5.8}$$

对于固定的 $t>0$, 当 $\lambda\downarrow 0$ 时，$\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\uparrow t$．故

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-F_\lambda}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}dF(t)=\int_0^\infty \lim_{\lambda\to 0}\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}dF(t)=\int_0^\infty tdF(t), \tag{2.5.9}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}h_\lambda(A)=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt=\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt. \tag{2.5.10}$$

由（2.5.8），（2.5.9）及（2.5.10）得

$$P(A) \equiv \lim_{\lambda\to 0} P_\lambda(A) = \frac{\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}. \qquad (2.5.11)$$

由定理 2.5.1，得

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + F_\lambda(x)P_\lambda(A) \qquad (2.5.12)$$

由（2.5.11）及（2.5.13）得

$$\begin{aligned} P(x,A) &= \lim_{t\to\infty} P(x,t,A) \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \lambda P_\lambda(x,A) \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \lambda h_\lambda(x,A) + \lim_{\lambda\to 0} F_\lambda \lim_{\lambda\to 0} \lambda P_\lambda(A) \\ &= 0 + F(x,\infty)\cdot \frac{\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)} \end{aligned}$$

定理证毕.

定义 2.5.3 设 $X(t)$ 为 Doob 骨架过程，若 $\int_0^\infty tdF(t) < \infty$ 且对于任意的 $x \in \mathrm{E}, F(x,0)=0, F(x,\infty)\equiv 1$，则称 $X(t)$ 为正常返 Doob 骨架过程.

由定理 2.5.1 立得

定理 2.5.3 设 $X(t)$ 为正常返 Doob 骨架过程. 若对于任意的 $x \in \mathrm{E}$，$A \in \varepsilon$，极限 $\lim_{t\to\infty} P(x,t,A)$ 存在，则 $X(t)$ 的极限分布 $P(\cdot)$ 存在且

$$P(A) = \frac{\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}, \qquad (\forall A \in \varepsilon).$$

并非每个正常返的 Doob 骨架过程都有极限分布，有时甚至极限 $\lim_{t\to\infty} P(x,t,A)$ 不存在，且看

例 2.5.1 (D/D/1 排队) 考虑如下的排队系统：

（1） 顾客到达时间间隔为 2 小时；

（2） 顾客服务时间为 1 小时.

令 $L(t)$ 表示上述排队系统的 t 时刻的队长，$\gamma_0=0,\gamma_n$ 表示第 n 个忙期的开始时刻. 易知 $L(t)$ 是以 $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的正常返的 Doob 骨架过程. 设在 $t=0$ 以前服务台前没有顾客，$t=0$ 时恰好有一个顾客到达服务台前并且立即对他开始服务. 显然

$$P_{11}(t)\underline{\underline{\Delta}}P(L(t)=1\big|L(0)=1)=\begin{cases}1,\text{如果}2n\le t<2n+1\\0,\text{如果}2n+1\le t<2n+2,\end{cases}$$

$$n=0,1,2,\cdots.$$

故极限 $\lim_{t\to\infty}P_{11}(t)$ 不存在.

下面我们给出正常返的 Doob 骨架过程存在极限分布的一个充分条件.

引理 2.5.4 设 $X(t)$ 是 Doob 骨架过程，若 $\pi(x\text{：}F(x)$ 绝对连续）$=1$，则 $F(t)$ 绝对连续.

证明：由（2.5.2）得

$$q(x,t,A)=F(x,t)\pi(A) \tag{2.5.13}$$

由（2.5.14）及 $q(x,t,A)$ 对固定 A 是 (x,t) 的 Borel 可测函数，知 $F(x,t)$ 是 (x,t) 的 Borel 可测函数，从而其密度函数 $f(x,t)$ 也是 (x,t) 的 Borel 可测函数. 于是由 Fubini 定理得

$$F(t)=\int_E\pi(dy)F(y,t)=\int_E\pi(y)\int_0^t f(y,s)ds$$

$$=\int_0^t\left(\int_E\pi(y)f(y,s)\right)ds$$

从而 $F(t)$ 是以 $\int_E\pi(y)f(y,t)$ 为分布密度的绝对连续函数，证毕.

引理 2.5.5 设 $K_1(x),K_2(x),\cdots,K_m(x)$ 是 $m(m\ge 2)$ 个分布函数，若其中之一

是绝对连续的，则其卷积$K_1(x)*K_2(x)*\cdots*K_m(x)$也是绝对连续的（$*$表示卷积）.

证　显然只需考虑$m=2$的情形，不妨设$K_1(x)$绝对连续，因而

$$K_1(x)*K_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x-u)dK_2(u)=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty}K_1^{'}(t-u)dt\}dK_2(u).$$

由于$K_1(x)$为分布函数，其微商$K_1^{'}(t-u)\geq 0$，因而由富比尼定理，积分次序可交换，于是得到

$$K_1(x)*K_2(x)=\int_{-\infty}^{x}\{\int_{-\infty}^{\infty}K_1^{'}(t-u)dK_2(u)\}dt.$$

此式左端$<\infty$，因而右端被积函数$\int_{-\infty}^{\infty}K_1^{'}(t-u)dK_2(u)$为$t$的可积函数，由此可见，$K_1(x)*K_2(x)$为绝对连续，引理证毕.

引理 2.5.5 及下面的引理 2.5.7 的证明摘自徐光辉的书“随机服务系统（第二版），北京，科学出版社，1988”．下面不加证明地引用更新理论的两个定理作为我们的引理 2.5.6 与引理 2.5.8，前一引理可参看 J.·L. Doob[1]，后一引理可参看 W. L. Smith[1].

引理 2.5. 6　设$x_1,x_2,\cdots$为相互独立的非负随机变量，$x_2,x_3,\cdots$具有相同分布$F(t)$，且$F(0)<1$．令

$$n(t)\equiv\max\{n:\sum_{i=1}^{n}x_i\leq t\},\tag{2.5.14}$$

则对任一$t\geq 0$，

$$E(n(t)\}<\infty.\tag{2.5.15}$$

引理 2.5.7 设$K(t),F(t)$为两个任意的非负随机变量的分布函数，而$K(0)<1$．令

$$\begin{cases} F_K^{(0)}(t) \equiv K(t) \\ F_K^{(m)}(t) \equiv F_K^{(m-1)}(t) * F(t), \quad m = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{2.5.17}$$

则

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)}(t) < \infty. \tag{2.5.18}$$

又若 $K(t)$ 或 $F(t)$ 绝对连续，且记

$$H_K(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)}(t) \tag{2.5.19}$$

则 $H_K(t)$ 绝对连续，且对 $a.a.t$，有

$$H'_K(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)'}(t) \tag{2.5.20}$$

证　取 $x_1, x_2, \cdots$ 为一串相互独立的非负随机变量，使 x_1 的分布函数为 $K(t)$, $X_i (i \geq 2)$ 的分布函数均为 $F(t)$，则显见

$$F_K^{(m)}(t) = P\{\sum_{i=1}^{m+1} x_i \leq t\}, \ m \geq 0. \tag{2.5.21}$$

若令

$$n(t) \equiv \max\{n: \sum_{i=1}^{n} x_i \leq t\}$$

则

$$F_K^{(m)}(t) = P\{n(t) \geq m+1\}, m \geq 0$$

因而

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} P\{n(t) \geq m+1\} = E\{n(t)\}. \tag{2.5.22}$$

由引理 2.5.6, 即得（2.5.18）式.

其次，若 $K(x)$ 或 $F(t)$ 绝对连续，则由(2.5.17) 及引理 2.5.5，即知所有

$F_K^{(m)}(t)$ $(m \geq 0)$ 均绝对连续．另一方面，由（2.5.21）知 $F_K^{m}(t)$ 为 t 的非降函数，

因而由（2.5.18），应用富比尼逐项微分定理于（2.5.19）得

$$H_K'(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)'}(t), \quad a.a.t. \tag{2.5.23}$$

此即所要证的（2.5.20）式．

由于 $F_K^{(m)}(t)$ 非降，$F_K^{(m)'}(t) \geq 0$，故上面的级数可逐项积分，将上式两端积分，

并利用 $F_K^{(m)}(t)$ 的绝对连续性，即得

$$\int_0^t H_K'(u)du = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t F_k^{(m)'}(u)du = \sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)}(t) = H_K(t). \tag{2.5.24}$$

此式表明 $H_K(t)$ 是绝对连续的．引理证毕．

引理 2.5.8　$K(t), F(t)$ 为两个任意的非负随机变量的分布函数，并假定：

1）$\psi(t)$在 $t \geq 0$ 上为有界函数；

2）$\psi(t) \in L_1(0,\infty)$；

3）$\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$

4）$F(t)$ 在任意有限区间 $[0, X]$ 内都绝对连续，且 $F(0) = 0$

5）$\Delta \equiv \int_0^{\infty} tdF(t) < \infty$

再令

$$\begin{cases} F_K^{(0)}(t) \equiv K(t) \\ F_K^{(m)}(t) \equiv F_K^{(m-1)}(t) * F(t), \quad m \geq 1 \end{cases} \tag{2.5.25}$$

$$H_K(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} F_K^{(m)}(t), \tag{2.5.26}$$

则

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \psi(t-u)dH_K(u) = \frac{K(+\infty)}{\Delta} \int_0^{\infty} \psi(u)du. \tag{2.5.27}$$

引理 2.5.9 设 $X(t)$ 是 Doob 骨架过程，令

$$F^{<1>}(t)=F(x,t)$$

$$F^{<n+1>}(t)=F^{<n>}*F(t)=\int_0^t F^{<n>}(ds)F(t-s)\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{<n>}(t)$$

若 $F(x,t)(x\in \mathrm{E})$ 绝对连续，则 $F^{<n>}(t)$ 和 $H(t)$ 绝对连续，且对 $a.a.t$，有

$$H'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{<n>'}(t)$$

从而

$$dH(t)=\sum_{n=1}^{\infty}dF^{<n>}(t)$$

证明：由引理 2.5.5 和引理 2.5.7 立得本引理.

定理 2.5.4 设 $X(t)$ 是正常返 Doob 骨架过程.

如果 $\pi(x:F(x,\cdot)$ 绝对连续）=1．则 $X(t)$ 的极限分布 $P(\cdot)$ 存在，且有

$$P(A)=\frac{\int_0^{\infty}\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^{\infty}tdF(t)},\qquad (\forall A\in\varepsilon)$$

证明: 令

$$\Psi(t)=\int_E \pi(dy)h(y,t,A)$$

于是由引理 2.5.9 得

$$P(x,t,A)=h(x,t,A)+\int_E\int_0^t(\sum_{n=1}^{\infty}q^{<n>}(x,ds,dy))h(y,t-s,A)$$

$$=h(x,t,A)+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}F^{<n>}(ds)\int_E \pi(dy)h(y,t-s,A)$$

$$=h(x,t,A)+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}F^{<n>}(ds)\Psi(t-s)$$

$$=h(x,t,A)+\int_0^t\Psi(t-s)\sum_{n=1}^{\infty}dF^{<n>}(s)$$

$$=h(x,t,A)+\int_0^t\Psi(t-s)d\sum_{n=1}^{\infty}F^{<n>}(s)$$

$$=h(x,t,A)+\int_0^t\Psi(t-s)\sum_{n=1}^{\infty}dH(s)$$

于是由定理 2.5.2 及引理 2.5.8 立得我们所要证的结论.

§2.6 广义极限分布与不变概率测度

定义 2.6.1 设 $X(t)$ 是 (Ω,F,P) 上的取值于 (E,ε) 的随机过程,若 $\prod(\cdot)$ 是 (E,ε) 上的概率测度,使得对于任意的 $A\in\varepsilon,x\in\mathrm{E}$,

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t I_A(X(s))ds}{t}=\prod(A)\mid X(0)=x\right)=1,$$

则称 $\prod(\cdot)$ 为 $X(t)$ 的广义极限(概率)分布.

定理 2.6.1 设 $X(t)$ 是以 $(\tau_n)_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的正常返的 Doob 骨架过程,则广义极限分布 $\prod(\cdot)$ 存在且

$$\prod(A)=\frac{\int_0^{\infty}\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^{\infty}tdF(t)},\forall A\in\varepsilon.$$

证明 显然对于任意的 $A\in\varepsilon$, $\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}I_A(X(s))ds$, $n=0,1,2,\cdots$ 是一列独立的随机变量, $\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}I_A(X(s))ds$, $n=1,2,\cdots$ 独立同分布并且与 $X(0)$ 独立. 于是有

$$E\left\{\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} I_A(X(s))ds\right\}=E\left\{\int_{\tau 1}^{\tau 2} I_A(X(s))ds\right\}=\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt.$$

由强大数定理,对于任意的 $A\in\varepsilon$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=i}^{n}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} I_A(X(s))ds}{n}=\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt,\quad P-a.s.$$

特别地,若取 $A=\mathrm{E}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tau_{n+1}-\tau_1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} I_E(X(s))ds}{n}=\int_0^\infty \int_E h(y,t,\mathrm{E})\pi(dy)dt=\int_0^\infty tdF(t).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_{n+1}} I_A(X(s))ds}{\tau_n-\tau_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_{n+1}} I_A(X(s))ds}{n}\cdot\frac{n-1}{\tau_n-\tau_1}=\frac{\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}.$$

同理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_n} I_A(X(s))ds}{\tau_{n+1}-\tau_1}=\frac{\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}$$

又由于 $\{X(t)\}$ 是正常返 Doob 骨架过程，所以 $\tau_1<\infty, P-a.s.$. 从而 $\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\tau_1} I_A(X(s))ds}{t}=0$.令

$$\Omega_0=\left\{\omega;\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_{n+1}} I_A(X(s))ds}{\tau_n-\tau_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_n} I_A(X(s))ds}{\tau_{n+1}-\tau_1}=\frac{\int_0^\infty \int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}\right\}$$

于是 $P(\Omega_0)=1$.

对 $t>0$ 及任意固定的 $\omega\in\Omega_0$,存在 n,使 $\tau_n\le t<\tau_{n+1}$，且当 $t\uparrow\infty$ 时，$n\uparrow\infty$，从而 $\tau_n\uparrow\infty$，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_0^t I_A(X(s))ds}{t}$$

$$\le \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\tau_1} I_A(X(s))ds}{t}+\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^t I_A(X(s))ds}{t}$$

$$=0+\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_{n+1}} I_A(X(s))ds}{\tau_n-\tau_1}$$

$$=\frac{\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)},$$

另外，

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^t I_A(X(s))ds}{t}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_n} I_A(X(s))ds}{\tau_{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\tau_{n+1}-\tau_1}{\tau_{n+1}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_n} I_A(X(s))ds}{\tau_{n+1}-\tau_1}$$

$$=\frac{\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}.$$

故

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t I_A(X(s))ds}{t}=\frac{\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}=\prod(A),\quad P-a.s.$$

显然$\prod(\cdot)$与$X(0)$的分布无关，故$\prod(\cdot)$是$\{X(t)\}_t\ge 0$的广义极限分布.

定理 2.6.2 设$\{X(t)\}$是取值于(E,ε)的齐次 Markov 过程,并且是一个正常返的 Doob 骨架过程，则

$$\prod(A)=\frac{\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)},\quad (A\in\varepsilon)$$

是$\{X(t)\}$的唯一的不变概率测度.

证明(i) 这时 $P(x,t,dy)$ 是 $\{X(t)\}$ 的转移函数，对于固定的 $t>0$ 及 $A\in\varepsilon$, $n\geq 1$, 取 $f_x(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}I_{\left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]}(P(x,t,A))$. 显然 $\|f_n(x)-P(x,t,A)\|\leq\frac{1}{n}$

令

$$B_i=\left\{x;P(x,t,A)\in\left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\right\},\ i=1,2,\cdots,n,$$

显然 $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}I_{B_i}(x)$.

对任意的 $T>0$, 显然

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{T+t}P(X(s)\in A)ds\\
&=\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{t}P(X(s)\in A)ds+\frac{1}{T+t}\cdot\int_t^{t+T}P(X(s)\in A)ds\\
&=\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{t}P(X(s)\in A)ds+\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{T}\int_E P(X(s)\in dy)P(y,t,A)ds\\
&=\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{t}P(X(s)\in A)ds+\frac{1}{T+t}\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T}P(X(s)\in B_i)\frac{i}{n}ds\\
&\quad+\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{T}\int_E P(X(s)\in dy)\left[P(y,t,A)-f_n(y)\right]ds
\end{aligned}$$

所以

$$\left|\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{T+t}P(X(s)\in A)ds-\frac{1}{T+t}\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T}P(X(s)\in B_i)\frac{i}{n}ds\right|$$

$$\leq\frac{1}{T+t}\cdot\int_0^{t}P(X(s)\in A)ds+\frac{1}{n}.$$

令 $T\to\infty$, 得

$$\left|\Pi(A)-\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\Pi(B_i)\right|\leq\frac{1}{n}.$$

再令 $n\to\infty$, 得

$$\left|\Pi(A)-\int_E\Pi(dy)P(y,t,A)\right|=0.$$

即$\prod(A)=\int_E\prod(dy)P(y,t,A)$.这意味着$\prod(\cdot)$是$\{X(t)\}$的不变概率测度.

(ii) 设$\prod^*(\cdot)$也是$\{X(t)\}$的不变概率测度. 若$X(0)$的分布为$\prod^*(\cdot)$,则对于任意的$A\in\varepsilon$及$t>0$, $P(X(t)\in A)=\prod^*(A)$.于是对于任意的$A\in\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\prod^*(A)&=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T P(X(t)\in A)dt\\
&=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\int_E P(X(0)\in dx)P(X(t)\in A\mid X(0)=x)dt\\
&=\int_E\prod^*(dx)\frac{1}{T}\cdot\int_0^T P(X(t)\in A\mid X(0)=x)dt\\
&=\int_E\prod^*(dx)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_0^T P(X(t)\in A\mid X(0)=x)dt\\
&=\int_E\prod^*(dx)\prod(A)\\
&=\prod(A)=\frac{\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)},
\end{aligned}$$

所以$\prod^*(\cdot)=\prod^*(\cdot)$.从而$\prod^*(\cdot)$是$\{X(t)\}$的唯一的不变概率测度.

定理 2.6.3 设$X(t)$是正常返的 Doob 骨架过程，若极限$\lim_{t\to\infty}P(t,x,A)$存在，则极限分布$P(A)$ $(A\in\varepsilon)$存在，且等于广义极限分布$\prod(A)$ $(A\in\varepsilon)$:

$$P(A)=\prod(A)=\frac{\int_0^\infty\int_E h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty tdF(t)}$$

证明 由定理 2.5.2 和定理 2.6.1 立得定理 2.6.3.

第三章　GI/G/1 排队系统

§3.1　引言

所谓 GI/G/1 排队系统，即为如下描述的系统：

（i）顾客在时刻…，$\tau_{-2},\tau_{-1},\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots$ 陆续到达服务台，到达时间间隔 $t_m=\tau_m-\tau_{m-1}(m\in Z=(\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots))$ 是独立同分布的随机变量，其分布函数记为 $A(x)$，即

$$A(t)=P(t_m\le t)\qquad(m\in Z).\tag{3.1.1}$$

（ii）顾客的服务时间…，$\upsilon_{-3},\upsilon_{-2},\upsilon_{-1},\upsilon_0,\upsilon_1,\upsilon_2$，…相互独立，并且与 $\{t_m,m\in Z\}$ 相互独立，而各 υ_m 有相同的分布

$$B(t)=P(\upsilon_m\le t)\qquad(m\in Z),\tag{3.1.2}$$

(iii)服务台只有一个服务员，且按先到先服务规则进行服务.

设 $L(t)$ 表示 $GI/G/1$ 排队系统在时刻 t 的队长（即为时刻 t 在服务台前等待的顾客数与正在被服务的顾客数之和），$\theta_1(t)$ 表示在时刻 t 之前最后到达的那个顾客的到达时刻到时刻 t 的时间，$\theta_2(t)$ 定义如下：若在时刻 t 服务台空闲，则令 $\theta_2(t)=0$，否则令 $\theta_2(t)$ 等于在时刻 t 正在接受服务的顾客已消耗的服务时间。一般而言，$L(t)$ 本身未必是一个马尔可夫过程，但 $(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t))$ 是一个马尔可夫过程，也是马尔可夫骨架过程。设 $W(t)$ 表示 $GI/G/1$ 排队系统在时刻 t 到达的顾客的等待时间（包括对该顾客的服务时间），令 $\theta(t)=\theta_1(t)$，显然 $(W(t),\theta(t))$ 是一个

马尔可夫过程，也是一个马尔可夫骨架过程.

令

$$A_{\theta_1}(t)=\frac{A(\theta_1+t)-A(\theta_1)}{1-A(\theta_1)} \tag{3.1.3}$$

$$B_{\theta_2}(t)=\frac{B(\theta_2+t)-B(\theta_2)}{1-B(\theta_2)} \tag{3.1.4}$$

以 $\mathrm{B}(IR^+)$ 表示 $IR^+=[0,\infty)$ 上的 Borel 集的全体，$r_0\equiv 0,r_1,r_2,\cdots$ 为 $(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t))$ 的一系列相继的断点（即在时刻 $r_n(n\ge 1)$ 有一个顾客到达或有一个顾客被服务完毕而离去，或以上这两个事件在时刻 r_n 都发生）

对 $i,j\in \mathrm{E}=\{0,1,2\cdots\},\theta_1,\theta_2\in IR^+,A_1,A_2\in \mathrm{B}(IR^+)$, 令

$$h(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$
$$=P(L(t)=j,\theta_1(t)\in A_1,\theta_2(t)\in A_2,t<r_1|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2) \tag{3.1.5}$$

$$q(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)$$
$$=P(r_1\in ds,L(r_1)=j,\theta_1(r_1)\in A_1,\theta_2(r_1)\in A_2|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2) \tag{3.1.6}$$

特别对 $a,b\in IR^+$,

$$q(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,a,b)\triangleq q(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,\{a\},\{b\}) \tag{3.1.7}$$

$$P(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$
$$=P(L(t)=j,\theta_1(t)\in A_1,\theta_2(t)\in A_2|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2) \tag{3.1.8}$$

关于 $(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t)$ 的瞬时分布，蒋放鸣在其博士学位论文[38]中，已得如

下结果：

引理 3.1.1

$$h(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)=\begin{cases}0, & j\neq i\\ I_{A_1}(\theta_1+t)(1-A_{\theta_1}(t))I_{A_2}(0)I_{\{0\}}(\theta_2), & j=i=0\\ I_{A_1}(\theta_1+t)(1-A_{\theta 1}(t))I_{A_2}(\theta_2+t)(1-B_{\theta_2}(t)) & j=i>0,\end{cases}$$

(3.1.9)

引理 3.1.2

$$q(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)=$$

$$\begin{cases}dA_{\theta_1}(s) & i=0,j=1,\theta_2=0,0\in A_1,0\in A_2\\ (1-B_{\theta_2}(s))dA_{\theta_1}(s), & i\neq 0,j=i+1,0\in A_1,s+\theta_2\in A_2\\ (1-A_{\theta_1}(s))dB_{\theta_2}(s), & i\neq 0,j=i-1,s+\theta_1\in A_1,0\in A_2\\ (A_{\theta_1}(s)-A_{\theta_1}(s-))(B_{\theta_2}(s)-B_{\theta_2}(s-)), & j=i\neq 0,0\in A_1,0\in A_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(3.1.10)

特别有

$$\begin{cases}q(0,\theta_1,0,ds,1,0,0)=dA_{\theta_1}(s)\\ q(i,\theta_1,\theta_2,ds,i+1,0,s+\theta_2)=(1-B_{\theta_2}(s))dA_{\theta_1}(s),i\neq 0\\ q(i,\theta_1,\theta_2,ds,i-1,s+\theta_1,0)=(1-A_{\theta_1}(s))dB_{\theta_2}(s),i\neq 0\\ q(i,\theta_1,\theta_2,ds,i,0,0)=(A_{\theta_1}(s)-A_{\theta_1}(s-))(B_{\theta_2}(s)-B_{\theta_2}(s-)),i\neq 0\end{cases}$$

(3.1.11)

定理 3.1.1 $\{P(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)\}$是下列非负线性方程的最小非负解，也是其唯一有界解：

$$P(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$

$$=h(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$

$$+I_{\{0\}}(i)\int_0^t dA_{\theta_1}(s)P(i+1,0,\theta_2+s,j,A_1,A_2,t-s)$$

$$+I_{\{1,2\cdots\}}(i)(\int_o^t(1-A_{\theta_1}(s))dB_{\theta_2}(s)P(i-1,\theta_1+s,0,j,A_1,A_2,t-s)$$

$$+\sum_{s\le t}A_{\theta_1}(s)-A_{\theta_1}(s-))(B_{\theta_2}(s)-B_{\theta_2}(s-))P(i,0,0,j,A_1,A_2,t-s)$$

$$+\int_o^t(1-B_{\theta_2}(s))dA_{\theta_1}(s)P(i+1,0,\theta_2+s,j,A_1,A_2,t-s)) \qquad (3.1.12)$$

定理 3.1.2 若 $A(x)$ 和 $B(x)$ 中至少有一个为连续函数，则 $\{P(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)\}$ 是下列非负线性方程的最小非负解，也是其唯一有界解：

$$P(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$

$$=h(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$

$$+I_{\{0\}}(i)\int_o^t dA_{\theta_1}(s)P(i+1,0,\theta_2+s,j,A_1,A_2,t-s)$$

$$+I_{\{1,2\cdots\}}(i)(\int_o^t(1-A_{\theta_1}(s))dB_{\theta_2}(s)P(i-1,\theta_1+s,0,j,A_1,A_2,t-s)$$

$$+\int_o^t(1-B_{\theta_2}(s))dA_{\theta_1}(s)P(i+1,0,\theta_2+s,j,A_1,A_2,t-s)) \qquad (3.1.13)$$

定理3.1.1和定理3.1.2乃是应用马尔可夫骨架过程理论中有关瞬时分布的结论而得。

下面，我们将应用第二章中有关极限分布的结果，建立 GI/G/1 系统的队长过程的极限分布存在的充分条件。

§3.2 关于系统的忙期和忙闲期的若干结果

所谓 GI/G/1 系统的忙期，是指这样的一段时间：它起始于一个顾客到达空闲的系统的时刻，截止于系统再次成为空闲的时刻。

与忙期对应的是闲期，即系统连续保持空闲的时间长度。

在统计平衡下，忙期和闲期是交替出现的。

令

$$d=\begin{cases}\inf\{t>0|L(t)=0\} & 若\{t>0|L(t)=0\}\neq\phi\\ +\infty\quad , & 若\{t>0|L(t)=0\}=\phi\end{cases}$$

$$\gamma_1=\begin{cases}\inf\{t>d|\angle(t)=1\} & 若\{t>d|L(t)=1\}\neq\phi\\ +\infty & 若\{t>d|L(t)=1\}=\phi\end{cases}$$

在这一小节中，还将假设 $A(0)=B(0)=0$ 及

$$0<\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty tdA(t)<\infty \tag{3.2.1}$$

$$0<\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty tdB(t)<\infty\text{,} \tag{3.2.2}$$

称 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ 为服务强度。

引理 3.2.1 若 $\{X_i\}$ 独立同分布，$E|X_i|<\infty, EX_i=0, P\{X_i=0\}<1$，则对任一 x，有

$$P\{\sum_{i=1}^{k}X_i>x, i.o.\}=1 \tag{3.2.3}$$

这个引理的证明见 Chung 和 Fuchs[10]。

以 t_1 表示 $t=0$ 后第一个顾客的到达时刻，$t_i(i=2,\cdots)$ 表示 $t=0$ 后第 i 个到达的顾客与第 $(i-1)$ 个到达的顾客的时间差。

设 $L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2$, 于是在时刻 $t\geq 0$ 之后顾客第一个到达点 t_1 的分布不是 $A(x)$，而是 $A_{\theta_1}(x)$。对于在 $t=0$ 时已到的 i 个顾客的服务时间记为 υ_1，υ_1 的分布函数不是 $B^{(i)}(x)$，而是 $B_{\theta 2}(x)*B^{(i-1)}(x)$。令 $\sigma_1=t_1-\upsilon_1$，

$\sigma_i=t_i-\upsilon_i(i=2,3,\cdots),\sigma_1,\sigma_2,\cdots$ 相互独立，$\sigma_2,\sigma_3,\cdots$ 同分布。令

$$\prod_k(i,\theta_1,\theta_2)=P(\sigma_1\leq 0,\sigma_2\leq 0,\cdots,\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{k-1}\leq 0\text{,}$$

$$\sigma_1+\sigma_2,+\cdots+\sigma_k>0|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2) \tag{3.2.4}$$

于是，$\Pi_k(i,\theta_1,\theta_2)$表示在$L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2$的条件下，在[0，d]中服务了$k+(i-1)$个顾客的概率。为了简洁，不致引起混肴，在引理3.2.2～3.2.4的证明中把条件$L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2$省去未写。

引理 3.2.2 若$\rho<1$，则

$$\sum_{k=i}^{\infty}\Pi_k(i,\theta_1,\theta_2)=1 \tag{3.2.5}$$

证 以M表示在$[0,d]$中服务了的顾客数目。于是，为了证明（3.2.5），只需证明：若$\rho<1$，则有

$$P(M=+\infty)=P(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\le 0,k>0)=0 \tag{3.2.6}$$

下面证明（3.2.6）。由强大数定律知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_k}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_k}{k-1}=E\sigma_2 \quad a.e. \tag{3.2.7}$$

若$\rho<1$，即$E\sigma_2>0$，则由（3.2.7）得

$$P(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i>x,i.o.)=1 \tag{3.2.8}$$

于是，由$P(\sigma_1<+\infty)=1$得

$$P(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i>0,i.o.)=1 \tag{3.2.9}$$

故（3.2.6）成立。引理得证。

引理 3.2.3 若$\rho<1$，则

$$P(0<d<+\infty)=1 \tag{3.2.10}$$

证 由$A(0)=B(0)=0$知$P(d=0)=0$，由引理 3.2.2 知

$$P(d<+\infty)=\sum_{k=i}^{\infty}p(d<+\infty,M=k)=$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} P(M=k)P(d<+\infty|M=k)=$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} P(M=k)P(v_1+v_2+\cdots+v_k<+\infty)=$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} P(M=k)=\sum_{k=i}^{\infty}\prod_k(i,\theta_1,\theta_2)=1, \tag{3.2.11}$$

引理得证。

引理 3.2.4 若 $\rho<1$，则

$$P(0<\gamma_1<+\infty)=1. \tag{3.2.12}$$

证 由 $\gamma_1\geq d$ 及 $P(d=0)=0$ 得 $P(\gamma_1=0)=0$. 以 N 表示在 $(o,\gamma_1]$ 中到达顾客的数目，显然有 $M=N+i-1$. 由引理 3.2.2 知

$$P(\gamma_1<+\infty)=\sum_{k=i}^{\infty} p(\gamma_1<+\infty,N=k)=$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} P(M=k+i-1)P(\gamma_1<+\infty)|M=k+i-1)=$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} P(M=k+i-1)P(t_1+t_2+\cdots+t_k<+\infty)=$$

$$\sum_{k=i}^{\infty} P(M=k+i-1)=\sum_{k=i}^{\infty}\prod_k(i,\theta_1,\theta_2)=1, \tag{3.2.13}$$

于是，引理得证。

令

$$\prod_k=\prod_k(1.0.0) \tag{3.2.14}$$

于是有

$$\sum_{k=i}^{\infty}\prod_k=1 \tag{3.2.15}$$

令

$$F(t) = P(\gamma_1 \le t | L(0) = 1, \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0) \tag{3.2.16}$$

引理 3.2.5 设 $\rho < 1$. 若 $A(t)$ 绝对连续，则 $F(t)$ 绝对连续

证　以 $f(t)$ 表示 $A(t)$ 的密度函数，在 $L(0) = 1, \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0$ 条件下，在 $(0, d]$ 中服务的顾客数等于在 $(0, \gamma_1]$ 中到达的顾客数，从而

$$\gamma_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_M \tag{3.2.17}$$

故

$$F(t) = P(t_1 + t_2 + \cdots + t_M \le t | L(0) = 1, \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(M = k | L(0) = 1, \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0) P(t_1 + t_2 + \cdots +$$

$$t_N \le t) | L(0) = 1, \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = \theta_2, M = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k \cdot$$

$$P(t_1 + t_2 + \cdots + t_k < t | L(0) = 1, \theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = \theta_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k \int_0^t f^{<k>}(s) ds$$

$$= \sum_{k=1}^{L} \Pi_k \int_0^t f^{<k>}(s) ds + \sum_{k=L+1}^{\infty} \Pi_k \int_0^t f^{<k>}(s) ds \tag{3.2.18}$$

$$\sum_{k=1}^{L} \Pi_k \int_0^t f^{<k>}(s) ds = \int_0^t \sum_{k=1}^{L} \Pi_k f^{<k>}(s)) ds$$

$$\to \int_0^t (\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k f^{<k>}(s)) ds, \quad L \to \infty \tag{3.2.19}$$

$$\sum_{k=L+1}^{\infty} \Pi_k \int_0^t f^{<k>}(s) ds \le \sum_{k=L+1}^{\infty} \Pi_k \to 0, \quad L \to \infty$$

(3.2.20)

由（3.2.18），（3.2.19）以及（3.2.20）得

$$F(t)=\int_0^\infty(\sum_{k=1}^{\infty}\prod_k f^{<k>}(s))ds \qquad (3.2.21)$$

所以 $F(t)$ 绝对连续，其密度函数为 $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_k f^{<k>}(t)$. 定理证毕。

令

$$E_{(1,0,0)}M=E(M|L(0)=1,\theta_1(0)=0,\theta_2(0)=0) \qquad (3.2.22)$$

$$E_{(1,0,0)}d=E(d|L(0)=1,\theta_1(0)=0,\theta_2(0)=0) \qquad (3.2.23)$$

$$E_{(1,0,0)}\gamma_1=E(\gamma_1|L(0)=1,\theta_1(0)=0,\theta_2(0)=0) \qquad (3.2.24)$$

下面的命题是 Finch[10]的一个结果：

命题 3.2.1 若 $\rho<1$，则

$$E_{(1,0,0)}M=\exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_k}{k}\}<+\infty \qquad (3.2.25)$$

$$E_{(1,0,0)}d=\frac{1}{\mu}\exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_k}{k}\}<+\infty \qquad (3.2.26)$$

其中

$$a_k=\int_0^\infty(1-A^{(k)}(t))dB^{(k)}(t) \qquad (3.2.27)$$

我们进一步得到如下结果：

定理 3.2.1 若 $\rho<1$，则

$$E(1,0,0)\gamma_1=\frac{1}{\lambda}\exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_k}{k}\}<+\infty \qquad (3.2.28)$$

证 由（3.2.17）及（3.2.25）得

$$E_{(1,0,0)}\gamma_1=E(t_1+t_2+\cdots+t_M)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P(M=k)E(t_1+t_2+\cdots+t_M|M=k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_k E(t_1+t_2+\cdots+t_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_k \sum_{i=1}^{k} Et_i$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_k k\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\prod_k$$

$$=\frac{1}{\lambda}\exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_x}{k}\}<+\infty$$

于是定理得证。

§3.3 系统队长的极限分布

令

$$\gamma_o=0,\qquad \gamma_{n+1}=\gamma_n+\theta_{r_n}\cdot\gamma_1,\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3.3.1}$$

$$\hat{r}_o=0,\qquad \hat{r}_n=r_n\wedge\gamma_1,\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3.3.2}$$

显然 $(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t),t<\gamma_1)$ 是以 $(\hat{r}_n)$ 为骨架时序列的马尔可夫骨架过程。

令

$$\hat{h}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$

$$=P(L(t)=j,\theta_1(t)\in A_1,\theta_2(t)\in A_2,t<\hat{r}_1|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2)$$

(3.3.3)

$$\hat{q}(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)$$

$$=P(\hat{r}_1\in ds,L(\hat{r}_1)=j,\theta_1(\hat{r}_1)\in A_1,\theta_2(\hat{r}_1)\in A_2|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2)$$

(3.3.4)

$$\hat{P}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)$$

$$=P(L(t)=j,\theta_1(t)\in A_1,\theta_2(t)\in A_2,t<\gamma_1|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2)$$

$$(3.3.5)$$

于是有

$$\hat{h}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)=h(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t). \tag{3.3.6}$$

$$\hat{q}(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)$$

$$=\begin{cases}0, & i=0\\ q(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2), & i>0.\end{cases} \tag{3.3.7}$$

$$\hat{P}(0,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)=h(0,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t) \tag{3.3.8}$$

令

$$\hat{P}(i,j,A_1,A_2,t)=\hat{P}(i,0,0,j,A_1,A_2,t) \tag{3.3.9}$$

$$\hat{P}_{ij}(t)=\hat{P}(i,0,0,j,IR^+,IR^+,t) \tag{3.3.10}$$

$$P(i,j,A_1,A_2,t)=P(i,0,0,j,A_1,A_2,t) \tag{3.3.11}$$

$$P_{ij}(t)=P(i,0,0,j,IR^+,IR^+,t) \tag{3.3.12}$$

由（3.3.6），（3.3.7），（3.3.8）以及定理 2.2.1 立得

引理 3.3.1 $\{\hat{P}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)\}$ 是下列非负线性方程的最小非负解：

$$\hat{P}(0,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)=h(0,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t).$$

$$\begin{aligned}\hat{P}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)&=h(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t).\\ &+\int_0^t(1-A_{\theta_1}(s))dB_{\theta_2}(s)\hat{P}(i-1,\theta_1+s,0,j,A_1,A_2,t-s)\\ &+\sum_{s\le t}(A_{\theta_1}(s)-A_{\theta_1}(s-))(B_{\theta_2}(s)-B_{\theta_2}(s-))\hat{P}(i,0,0,j,A_1,A_2,t-s)\\ &+\int_0^t(1-B_{\theta_2}(s))dA_{\theta_1}(s)\hat{P}(i+1,0,\theta_2+s,j,A_1,A_2,t-s).\end{aligned}$$

$$(i=1,2,\cdots,j=0,1,2\cdots,0\le\theta_1,\theta_2,t<\infty,A_1,A_2\in B(IR^+)) \tag{3.3.13}$$

令

$$\hat{m}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)=\int_0^\infty\hat{h}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)dt \tag{3.3.14}$$

$$\hat{M}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)=\int_0^\infty \hat{P}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)dt \tag{3.3.15}$$

于是有

$$\hat{m}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)=$$

$$E(I_{\{j\}}(L(t))\cdot I_{A_1}(\theta_1(t))\cdot I_{A_2}(\theta_2(t))\cdot I_{[0,t)}(\hat{r}_1)\big|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2) \tag{3.3.16}$$

$$\hat{M}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)=$$

$$E(I_{\{j\}}(L(t))\cdot I_{A1}(\theta_1(t))\cdot I_{A2}(\theta_2 t))\cdot I_{[0,t)}(\gamma_1)\big|L(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2) \tag{3.3.17}$$

令

$$\hat{M}(i,j,A_1,A_2)=\hat{M}(i,0,0,j,A_1,A_2) \tag{3.3.18}$$

$$\hat{M}_{ij}=\hat{M}(i,j,IR^+,IR^+),\hat{M}_{1j}=\hat{M}_j \tag{3.3.19}$$

显然有

$$\hat{m}(0,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)=\begin{cases}\int_0^\infty I_{A_1}(\theta_1+t)dA_{\theta_1}(t), j=0,\theta_2=0\in A_2\\ 0, & \text{其它.}\end{cases} \tag{3.3.20}$$

$$\hat{m}(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)\begin{cases}\int_0^\infty I_{A_1}(\theta_1+t)I_{A_2}(\theta_2+t)[(1-B_{\theta_2}(t))dA_{\theta_1}(t)+(1-A_{\theta_1}(t))\\ dB_{\theta_2}(t)]+\sum_{0\le t<\infty} I_{A_1}(\theta_1+t)I_{A_2}(\theta_2+t)[(A_{\theta_1}(t)-A_{\theta_1}(t-))\\ (B_{\theta_1}(t)-B_{\theta_1}(t-))], j=i>0,\\ 0, j\ne i>0.\end{cases} \tag{3.3.21}$$

引理 3.3.2 $\{\hat{M}(i,\theta_1,\theta_2,ds,j,A_1,A_2)\}$ 是下列非负线性方程的最小非负解：

$$\hat{M}(0,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)=\hat{m}(0,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2).$$

$$\hat{M}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)=\hat{m}(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2)$$

$$+\int_0^t(1-A_{\theta_1}(s))dB_{\theta_2}(s)\hat{M}(i-1,\theta_1+s,0,j,A_1,A_2)$$

$$+\sum_{s\le t}(A_{\theta_1}(s)-A_{\theta_1}(s-))(B_{\theta_2}(s)-B_{\theta_2}(s-))\hat{M}(i,0,0,j,A_1,A_2)$$

$$+\int_0^t(1-B_{\theta_2}(s))dB_{\theta_1}(s)\hat{M}(i+1,0,\theta_2+s,j,A_1,A_2).$$

$$(i=1,2,\cdots,j=0,1,2,\cdots,0\le\theta_1,\theta_2,t<\infty,A_1,A_2\in B(IR^+)\qquad(3.3.22)$$

证明 仿定理 2.2.1 的证明立得本引理。

定理 3.3.1 $(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t))$ 的广义极限分布 $\Pi(\bullet)$ 存在的充要条件是

$$\rho<1,$$

此时，

$$\Pi(j,A_1,A_2)=\frac{\hat{M}(1,j,A_1,A_2)}{\frac{1}{\lambda}\exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_k}{k}\}}$$

特别

$$\Pi(j)=\frac{\hat{M}_j}{\frac{1}{\lambda}\exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_k}{k}\}}$$

其中，$\hat{M}(1,j,A_1,A_2)$ 和 $\hat{M}_j$ 由引理 3.3.2 决定。

证明 显然，$(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t))$ 是一个以 $(\gamma_n,n\ge 1)$ 为骨架时序列的骨架过程，于是由定理 2.6.1 和定理 3.2.1 立得证明。

定理 3.3.2 若 $\rho<1$，且 $A(t)$ 绝对连续，则 $(L(t),\theta_1(t),\theta_2(t))$ 的极限分布 $P(\bullet)$ 存在，且等于它的广义极限分布 $\Pi(\bullet)$：

$$\lim_{t\to\infty}P(i,\theta_1,\theta_2,j,A_1,A_2,t)=\prod(j,A_1,A_2),$$

特别有

$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \Pi(j)$.

证明，由定理 2.5.4，定理 2.6.1，定理 2.6.3，引理 3.2.2 和引理 3.2.3 立即导出。

§3.4 等待时间的瞬时分布和极限分布

这一节，仍将使用前节的方法，即马尔可夫骨架过程方法首先考察 $(W(t),\theta(t))$，然后获得关于 $W(t)$ 的极限性态的结果。

取 (τ_n) 为 $(W(t),\theta(t))$ 的骨架时序列.

$\forall A \in B(IR^+)$ $x,t \in IR^+$ 令

$$h(x,t,A) = P(W(t) \in A, t < \tau_1 | W(0) = x), \tag{3.4.1}$$

$$q(x,t,A) = P(W(\tau_1) \in A, t \geq \tau_1 | W(0) = x), \tag{3.4.2}$$

$$P(x,t,A) = P(W(t) \in A | W(0) = x), \tag{3.4.3}$$

引理 3.4.1

$$h(x,t,A) = (1 - A(t)) I_A((x-t)^+), \tag{3.4.4}$$

$$q(x,t,A) = \int_0^t \int_{A-(x-t)^+} dB(x) dA(s) \tag{3.4.5}$$

证

$$h(x,t,A) = P(W(t) \in A, t < \tau_1 | W(0) = x) =$$

$$P((x-t)^+ \in A, t < \tau_1) = P((x-t)^+ \in A) P(t < \tau_1) =$$

$$I_A((x-t)^+)(1 - A(t))$$

$$q(x,t,A)=P(W(\tau_1)\in A,t\geq\tau_1|W(0)=x)=$$

$$\int_0^t P(W(s)\in A,\tau_1\in ds|W(0)=x)=$$

$$\int_0^t P((x-s)^+ +\upsilon_1\in A)dA(s)=\int_0^t P(\upsilon_1\in A-(x-s)^+)dA(s)=$$

$$\int_0^t\int_{A-(x-t)^+}dB(x)dA(s)$$

于是，引理得证。

由引理 3.4.1 和定理 2.2.1 立得

定理 3.4.1 $\{p(x,t,A),0\leq x,t<+\infty,A\in B(R^+)\}$ 是下列非负线性方程的最小非负解（也是唯一有界解）：

$$P(x,t,A)=\int_0^\infty\int_0^t P(y,t-s,A)dB(y-(x-t)^+)dA(s)+(1-A(t))I_A((x-t)^+)$$

$$(0\leq x<+\infty,A\in B(R^+))$$

（3.4.6）

以下是关于极限分布的计论

$\sigma_1,\sigma_i(i=2,3,\cdots),d_1,\gamma_1$ 的定义均见 § 3.2.　　令

$$\prod_k(x,\theta)=P(\sigma_1\leq 0,\sigma_1+\sigma_2\leq 0,\cdots\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{k-1}\leq 0,$$

$$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k>0|W(0)=x,\theta(0)=\theta)$$

仿引理 3.2.2 的证明，可得

引理 3.4.2　若 $\rho\leq 1$，则

$$\sum_{k=1}^\infty\prod_k(x,\theta)=1\tag{3.4.7}$$

仿引理 3.2.3 和引理 3.2.4 的证明，立得

引理 3.4.3　若 $\rho\leq 1$，则

$$P(d<+\infty|W(0)=x,\theta(0)=\theta)=1\tag{3.4.8}$$

$$P(\gamma_1 < +\infty | W(0) = x, \theta(0) = \theta) = 1 \quad (3.4.9)$$

$\forall A \in B(R^+)$，令

$$\hat{\tau}_0 \equiv 0, \hat{\tau}_n = \tau_n \wedge \gamma_1 (n = 1,2,\cdots)$$

$$h^{(n)}(x,\theta,A,t) = P(W(t) \in A, t < \hat{\tau}_n | W(0) = x, \theta(0) = \theta) \quad (3.4.10)$$

$$h(x,\theta,A,t) = P(W(t) \in A, t < \gamma_1 | W(0) = x, \theta(0) = \theta) \quad (3.4.11)$$

由于 $\hat{\tau}_n \uparrow \gamma_1$，故有

$$h^{(n)}(x,\theta,A,t) \uparrow h(x,\theta,A,t) \quad (n \uparrow +\infty) \quad (3.4.12)$$

并且有

$$h^{(1)}(x,\theta,A,t) = I_A((x-t)^+)(1 - A_\theta(t)) \quad (3.4.13)$$

定理 3.4.2 $\{h(x,\theta,A,t), 0 \le x,\theta,t < +\infty, A \in B(R^+)\}$ 如下唯一决定：$\{h(x,0,A,t), 0 \le x,t < +\infty, A \in B(R^+)\}$ 是下列非负线性方程的最小非负解：

$$h(x,0,A,t+) = h^{(1)}(x,0,A,t) + \int_0^\infty h((x-s)^+, 0, A, t-s) dA(s)$$

$$(0 \le x,t < +\infty, A \in B(R^+)) \quad (3.4.14)$$

而

$$h(x,\theta,A,t) = h^{(1)}(x,\theta,A,t) + \int_0^\infty h((x-s))^+, 0, A, t-s) dA_\theta(s)$$

$$(0 \le x,\theta,t < +\infty, A \in B(R^+)) \quad (3.4.15)$$

证 显然 $(W(t),\theta(t), t < \gamma_1)$ 是一个马尔可夫过程，且是以 $(\hat{\tau}_n)$ 为骨架时序列的马尔可夫骨架过程。

$$h^{(1)}(x,\theta,A,t)=I_A(x-t))^+(1-A_\theta(t)) \tag{3.4.16}$$

$$h^{(n+1)}(x,\theta,A,t)=h^{(1)}(x,\theta,A,t)+$$

$$\int_0^\infty h^{(n)}((x-s)^+,0,A,t-s)dA_\theta(s) \tag{3.4.17}$$

于是立得我们的定理。

令

$$A_{(x,\theta)}(t)=P(\gamma_1\le t|W(0)=x,\theta(0)=\theta) \tag{3.4.18}$$

仿引理 3. 2. 5 的证明立得

引理 3. 4. 4 设 $P(t_1=\upsilon_1=$常数$)<1$及$\rho\le 1$.若 $A(x)$ 绝对连续，则 $A_{(x,\theta)}$ 也绝对连续，且 $A_{(x,\theta)}(+\infty)=1$.

令

$$P(x,\theta,A,t)=P(W(t)\in A|W(0)=x,\theta(0)=\theta) \tag{3.4.19}$$

仿定理 3. 4. 1 的证明立得

定理 3. 4. 3 设 $P(t_1=\upsilon_1=$常数$)<1$及$\rho\le 1$. 若 $A(x)$ 绝对连续，则 $\lim\limits_{t\to\infty}P(x,\theta,A,t)$存在，且

1）$\lim\limits_{t\to\infty}P(x,\theta,A,t)=P(A)$ 与 x,θ 无关；

2）
$$P(A)=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty h(x,A,t)dB(x)dt}{\frac{1}{\lambda}\exp\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_k}{k}} \tag{3.4.25}$$

3）
$$\lim_{s\to\infty}P((0,s])=1 \tag{3.4.26}$$

其中 $h(x,A,t)=h(x,0A,t)$ 可由定理 3. 4. 2 计算出来。

第四章　马氏骨架过程与可靠性理论

§4.1　引言

可靠性理论大约起源于上世纪三十年代。最早被研究的领域之一是机器维修问题，另一个重要的研究工作是将更新论应用于更换问题。此外，威布尔（Weibull）、龚贝尔（Gumbel）和爱泼斯坦（Epstein）等研究了材料的疲劳寿命问题和有关的极值理论。

在解决可靠性问题中所用到的数学模型常为概率模型和统计模型。在这一章，我们将考察机器维修问题中的一个概率模型：两个部件的寿命及修理时间均服从一般分布的并联系统。这样的系统为如下所描述：

系统由两个不同部件和一个修理工组成，若两个部件都工作或一个部件工作，另一个部件故障，则系统均能正常工作，只有当两个部件都发生故障时，系统才处于故障状态。若部件一旦发生故障，修理工立即对故障的部件进行维修，而维修好的部件立即进入工作状态。若一个故障部件未修好时，另一个部件也故障，则它处于待修状态，此时系统故障。

设两个部件每次故障后均能修复如新，第 i 个部件的寿命 X_i 的分布函数为

$$F_{X_i}(t)=p\{X_i\le t\},\quad E[X_i]=\int_0^\infty tdF_{X_i}(t)=\frac{1}{\lambda_i}$$

第 i 个部件故障后的修理时间 Y_i 的分布函数为

$$G_{Y_i}(t)=P\{Y_i\le t\},\quad E[Y_i]=\int_0^\infty tdF_{Y_i}(t)=\frac{1}{\mu_i}$$

设 X_1，X_2，Y_1，Y_2 为相互独立的随机变量。在本章中，总以 L(t)表示时刻 t 系统的状态，即

$$L(t)=\begin{cases}0，\text{时刻 t 两部件均在工作}\\ 1，\text{时刻 t 部件 1 在维修，部件 2 在工作}\\ 2，\text{时刻 t 部件 2 在维修，部件 2 在工作}\\ 3，\text{时刻 t 部件 1 在维修，部件 2 在待修}\\ 4，\text{时刻 t 部件 2 在维修，部件 1 在待修}\end{cases}$$

显然，$\{L(t),t\geq 0\}$ 为一随机过程，其状态空间为 $E=\{0,1,2,3,4\}$，而系统的工作状态集为 $W=\{0,1,2\}$，故障状态集为 $F=\{3,4\}$，由系统假设知

$\{L(t),t\geq 0\}$ 一般不是 Markov 过程。现引进补充变量：

对 $i\in\{1,2\}$，令

$$X_i(t)=\begin{cases}\text{部件 i 在时刻}t\text{以前最后一次连续工作至}t\text{的时间，}\\ \quad\text{如果在时刻}t\text{部件 i 处于工作状态；}\\ 0\quad\text{如果在时刻}t\text{部件 i 处于被修理状态。}\end{cases}$$

$X_i(t)$ 称为部件 i 在时刻 t 的寿命.

$$Y_i(t)=\begin{cases}\text{部件 i 在时刻}t\text{已花去的修理时间，若时刻}t\text{部件在修理}\\ 0，\text{若时刻}t\text{部件在运行.}\end{cases}$$

则 $\{L(t),X_1(t),X_2(t),Y_1(t),Y_2(t)\}$ 构成一个马尔可夫过程.

令 $T_0=0$， T_n 表示 $(L(t),X_1(t),X_2(t),Y_1(t),Y_2(t))$ 的第 n 个断点，显见 $(L(t),X_1(t),X_2(t),Y_1(t),Y_2(t))$ 是以（T_n）为骨架时序列的马尔可夫骨架过程.

令

$$F_{i,}x_i^{(t)} = \frac{F_i(x_i+t)-F_i(x_i)}{1-F_i(x_i)}, i=1,2$$

$$G_i, y_i^{(t)} = \frac{G_i(y_i+t)-G_i(y_i)}{1-G_i(y_i)}, i=1,2$$

设 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in IR^+$， $A_1, A_2, B_1, B_2 \in B(IR^+)$,并令

$$P_{00}(t, x_1, x_2, A_1, A_2) = P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2 \mid L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$P_{10}(t, x_2, y_1, A_1, A_2) = P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2 \mid L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{20}(t, x_1, y_2, A_1, A_2) = P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2 \mid L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{30}(t, y_1, A_1, A_2) = P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2 \mid L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{40}(t, y_2, A_1, A_2) = P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2 \mid L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{01}(t, x_1, x_2, B_1, A_2) = P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \mid L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$P_{11}(t, x_2, y_1, B_1, A_2) = P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \mid L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{21}(t, x_1, y_2, B_1, A_2) = P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \mid L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{31}(t, y_1, B_1, A_2) = P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \mid$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{41}(t,y_2,B_1,A_2)=P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \big|$$

$$L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{02}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2 \big|$$

$$L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$P_{12}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2 \big|$$

$$L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{22}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2 \big|$$

$$L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{32}(t,y_1,A_1,B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2 \big|$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{42}(t,y_2,A_1,A_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2 \big|$$

$$L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{03}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)=P(L(t)=3, Y_1(t)\in B_1, X_2(t)\in A_2 \big|$$

$$L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$P_{13}(t,x_2,y_1,B_1,A_2)=P(L(t)=3, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \big|$$

$$L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{23}(t,x_1,y_2,B_1,A_2)=P(L(t)=3, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \big|$$

$$L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{33}(t,y_1,B_1,A_2)=P(L(t)=3, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1 \big|$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{43}(t,y_2,B_1,A_2)=P(L(t)=3,X_2(t)\in A_2,Y_1(t)\in B_1|$$
$$L(0)=4,Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{04}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)=P(L(t)=4,X_1(t)\in A_1,Y_2(t)\in B_2|$$
$$L(0)=0,X_1(0)=x_1,X_2(0)=x_2)$$

$$P_{14}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)=P(L(t)=4,X_1(t)\in A_1,Y_2(t)\in B_2|$$
$$L(0)=1,X_2(0)=x_2,Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{24}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)=P(L(t)=4,X_1(t)\in A_1,Y_2(t)\in B_2|$$
$$L(0)=2,X_1(0)=x_1,Y_2(0)=y_2)$$

$$P_{34}(t,y_1,A_1,B_2)=P(L(t)=4,X_1(t)\in A_1,Y_2(t)\in B_2|$$
$$L(0)=3,Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{44}(t,y_2,A_1,B_2)=P(L(t)=4,X_1(t)\in A_1,Y_2(t)\in B_2|$$
$$L(0)=4,Y_2(0)=y_2)$$

§4.2 瞬时性态

由定理 2.2.1，我们有

定理 4.2.1 $\{P_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2,t),P_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2),P_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2),$

$P_{30}(t,y_1,A_1,A_2),P_{40}(t,y_2,A_1,A_2)\}$是下列非负方程的最小非负解:

$$P_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=(1-F_{1,x_1}(t))(1-F_{2,x_2}(t))1_{A_1}(x_1+t)1_{A_2}(x_2+t)+$$
$$\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s)dF_{1,x2}(s)P_{10}(t-s,0,x_2+s,A_1,A_2)+$$
$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s)dF_{2,x_2}(s)P_{20}(t-s,x_1+s,0,A_1,A_2)$$

$$P_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)P_{00}(t-s,0,x_2+s,A_1,A_2)+$$
$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s)dF_{2,x_2}(s)P_{30}(t-s,y_1+s,A_1,A_2)$$

$$P_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)P_{00}(t-s,x_1+s,0,A_1,A_2)$$

$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s)dF_{1,x_1}(s)P_{40}(t-s,y_2+s,A_1,A_2)$$

$$P_{30}(t,y_1,A_1,A_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)P_{20}(t-s,0,0,A_1,A_2)$$

$$P_{40}(t,y_2,A_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)P_{10}(t-s,0,0,A_1,A_2)$$

定理 4.2.2 $\{P_{01}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)$，$P_{11}(t,x_2,y_1,B_1,A_2)$，$P_{21}(t,x_1,y_2,B_1,A_2)$，$P_{31}(t,y_1,B_1,A_2)$，$P_{41}(t,y_2,B_1,A_2)\}$，是下列非负方程的最小非负解；

$$P_{01}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s)dF_{1,x_2}(s)P_{11}(t-s,x_2+s,0,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_2,x_2(s)P_{21}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{11}(t,x_2,y_1,B_1,A_2)=(1-G_{1,y_1}(t))(1-F_{2,x_2}(t)1A_2(x_2+t)1_{B_1}(y_1+t)+1-F_{2,x_2}(s))$$

$$dG_{1,y_1}(s)P_{11}(t-s),0,x_2+s,B_1,A_2+$$

$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{31}(t-s,y_1+s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{21}(t,x_1,y_2,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s)dG_{2,y_2}(s)P_{01}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)$$

$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)P_{41}(t-s,y_2+s,B_1,A_2)$$

$$P_{31}(t,y_1,B_1,A_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)P_{21}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

$$P_{41}(t,y_2,B_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)P_{11}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

定理 4.2.3 $\{P_{02}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)$，$P_{12}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)$，$P_{22}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)$，$P_{32}(t,y_1,A_1,B_2)$，$P_{42}(t,y_2,A_1,B_2)\}$是下列非负方程的最小非负解：

$$P_{02}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)P_{12}(t-s,x_2+s,0,A_1,B_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{22}(t-s,x_1+s,0,A_1,B_2)$$

$$P_{12}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)P_{02}(t-s,0,x_2+s,A_1,B_2)+$$

$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{32}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$P_{22}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)=(1-G_{2,y_2}(t))(1-F_{1,x_2}(t))1_{A_1}(x_1+t)1_{B_2}(y_2+t)$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)P_{22}(t-s,x_1+s,0,A_1,B_2)$$

$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)P_{42}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$P_{32}(t,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)P_{12}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

$$P_{42}(t,y_2,A_1,B_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)P_{22}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

定理 4.2.4 $\{P_{03}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)$, $P_{13}(t,x_2,y_1,B_1,A_2$, $P_{23}(t,x_1,y_2,B_1,A_2)$ $P_{33}(t,y_1,B_1,A_2)$, $P_{43}(t,y_2,B_1,A_2)\}$，是下列非负方程的最小非负解：

$$P_{03}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)P_{13}(t-s,x_2+s,0,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{23}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{13}(t,x_2,y_1,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)P_{03}(t-s,0,x_2+s,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{33}(t-s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{23}(t,x_1,y_1,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)P_{03}(t-s,0,x_1+s,0,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)P_{43}(t-s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{33}(t,y_1,B_1,A_2)=(1-G_{1,y_1}(t))1_{B1}(y_1+t)+\int_0^t dG_{1,y_1}(s)P_{23}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

$$P_{43}(t,y_2,B_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)P_{13}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

定理 4.2.5 $\{P_{04}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)$, $P_{14}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)$, $\{P_{24}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)$, $\{P_{34}(t,y_1,A_1,B_2)$, $\{P_{44}(t,y_2,A_1,B_2)\}$，是下列非负方程的最小非负解：

$$P_{04}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)P_{14}(t-s,x_2+s,0,A_1,B_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{24}(t-s,x_1+s,0,A_1,B_2)$$

$$P_{14}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)P_{04}(t-s,0,x_2+s,A_1,B_2)+$$

$$\int_0^t (1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)P_{34}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$P_{24}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)=\int_0^t (1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)P_{04}(t-s,x_1+s,0,A_1,B_2)$$

$$\int_0^t (1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)P_{44}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$P_{34}(t,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)P_{24}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

$$P_{44}(t,y_2,A_1,B_2)=(1-G_{2,y_2}(t))1_{B_2}(y_2+t)+\int_0^t dG_{2,y_2}(s)P_{14}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

以上结果, 参见[37].

§4.3 极限性态

为方便计，在这一小节，以$W(t)$表示$(L(t),X_1(t),x_2(t),Y_1(t),Y_2(t))$。此外，令

$$\tau_1 =: \inf\{t : t > 0, W(t) = (2,0,0,0,0)\}$$

$$\tau_0 \equiv 0,\quad \forall n \ge 0,\quad \tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{\tau_n}\tau_1$$

由τ_1的定义知，在时刻τ_1.系统必处在故障状态（3,0,0,Y_1,0)。在现实世界中，

任一系统必在一个有限的时间段内发生故障，鉴于此，下面的假设是合理的：

$E(\tau_1|W(0)=(2,0,0,0,0))<+\infty$。

我们还将假定

$G_{Y_1}(t)$是绝对连续的。

以下，将应用马尔可夫骨架过程的理论，求得$\{W(t),t\ge 0\}$的平稳分布。

设$W(t)$的全体取值的集合为E^W，则

$$E^W=\{(i,x_1,x_2,y_1,y_2): i\in\{0,1,\cdots,4\} x_1,x_2,y_1,y_2\in[0,+\infty)\}.$$

设$W(t)$的状态空间为$(E^W,\mathfrak{I})$，$\mathfrak{I}$是E^W上的一个$\sigma-$代数。

$\forall x\in E^W, t\ge 0,$令

$$D(x,t)=P(\tau_1\le t|W(0)=x),$$

$$D(t)=P(\tau_2-\tau_1\le t),$$

$\forall A\in\Im$,

$$\pi(A)=:P(W(\tau_1)\in A)$$

容易验证$\{W(t),t\ge 0\}$是一个以$\{\tau_n\}_{n\ge 0}$为骨架时序列的Doob骨架过程，且$\pi(\bullet)$为其特征测度。

由引理 2.5.3 可以推知：

$$D(t)=\int_{E^W}\pi(dx)D(x,t)=P(\tau_{n+1}-\tau_n\le t),\qquad n\ge 1。$$

进一步，还可得到

$$\int_0^\infty tdD(t)=E(\tau_2-\tau_1)$$

$$=E(\tau_2-\tau_1|W(\tau_1)=(2,0,0,0,0))$$

$$=E(\tau_1|W(0)=(2,0,0,0,0))$$

$$<+\infty$$

此外，由$D(x,t)$的定义，亦易看到

$$D(x,0)=0,\qquad D(x,\infty)=1,\qquad \forall x\in E^W$$

故由定义 2.4.3 知，$\{W(t),t\ge 0\}$是一个正常返的 Doob 骨架过程。

由系统的状态转移规律及τ_1的定义，可以知道：无论$W(0)$取E^W中何值，τ_1总可以表示为若干相互独立的随机变量之和，这些随机变量可以分为四类：

a) 部件 1 在时刻 0 的剩余工作寿命或剩余修理时间；

b) 部件 1 的工作寿命；

c) 部件 1 的修理时间；

d) 部件 1 的待修时间。

注意：a)类随机变量至多只有一个，而 d)类随机变量等于相应时刻部件 2 的剩余修理时间，此外，上述 τ_1 的表示中，必含有一个部件 1 的修理时间。

于是可知，τ_1 的条件分布函数 $D(x,t)$ 为若干个分布函数的卷积，且构成卷积的这些分布函数中，含有 $G_{y_1}(\cdot)$，由引理 2.5.5 知，$D(x,t)$ 是绝对连续的 $(\forall x \in E^W)$。

至此，对过程 $\{W(t),t \geq 0\}$，我们验证了其满足定理 2.5.4 的所有条件。故由定理 2.5.4 知，$W(t)$ 的平稳分布 P(·)存在，且有

$$P(A) = \frac{\int_0^\infty \int_{E^W} h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int_0^\infty t dD(t)}, \quad \forall A \in \Im.$$

其中，$h(y,t,A) = P(W(t) \in A, t < \tau_1 | W(0) = y).$

余下的事情，便是确定 $h(y,t,A)$ 及 $\int_0^\infty t dD(t)$

设 $r_0 = 0$, $r_n = T_n \wedge \tau_1$, $n = 1,2,\cdots$，则

$(W(t), 0 \leq t < \tau_1)$ 是一个以 $\{r_n\} n \geq 0$ 为骨架时序列的正规马尔可夫骨架过程，从而，可以应用定理 2.2.1，确定 $P(W(t) \in A, t < \tau_1 | W(0) = y).$

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R_+$，$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \Im$，令

$$\widetilde{P}_{00}(t, x_1, x_2, A_1, A_2) = P(L(t) = 0, X_1(t) \in A_1, X_2(t) \in A_2, t < \tau_1 | L(0) = 0, X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2)$$

$$\widetilde{P}_{10}(t, x_2, y_1, A_1, A_2) = P(L(t) = 0, X_1(t) \in A_1, X_2(t) \in A_2, t < \tau_1 | L(0) = 0, X_2(0) = x_2, Y_1(0) = y_1)$$

$$\widetilde{P}_{20}(t, x_1, y_2, A_1, A_2) = P(L(t) = 0, X_1(t) \in A_1, X_2(t) \in A_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{30}(t, y_1, A_1, A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<\tau_1|$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{P}_{40}(t, y_2, A_1, A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<\tau_1|$$

$$L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{01}(t, x_1, x_2, B_1, A_2)=P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1, t<\tau_1|$$

$$L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$\widetilde{P}_{11}(t, x_2, y_1, B_1, A_2)=P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1, t<\tau_1|$$

$$L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=Y_1)$$

$$\widetilde{P}_{21}(t, x_1, y_2, B_1, A_2)=P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1, t<\tau_1|$$

$$L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{31}(t, y_1, B_1, A_2)=P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1, t<\tau_1|$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{P}_{41}(t, y_2, B_1, A_2)=P(L(t)=1, X_2(t)\in A_2, Y_1(t)\in B_1, t<\tau_1|$$

$$L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{02}(t, x_1, x_2, A_1, B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2, t<\tau_1|$$

$$L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$\widetilde{P}_{12}(t, x_2, y_1, A_1, B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2, t<\tau_1|$$

$$L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{P}_{22}(t, x_1, y_2, A_1, B_2)=P(L(t)=2, X_1(t)\in A_1, Y_2(t)\in B_2, t<\tau_1|$$

$$L(0)=2, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{32}(t, y_1, A_1, B_2) = P(L(t) = 2, X_1(t) \in A_1, Y_2(t) \in B_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 3, Y_1(0) = y_1)$$

$$\widetilde{P}_{42}(t, y_2, A_1, A_2) = P(L(t) = 2, X_1(t) \in A_1, Y_2(t) \in B_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 4, Y_2(0) = y_2)$$

$$\widetilde{P}_{03}(t, x_1, x_2, B_1, A_2) = P(L(t) = 3, Y_1(t) \in B_1, X_2(t) \in A_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 0, X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2)$$

$$\widetilde{P}_{13}(t, x_2, y_1, B_1, A_2) = P(L(t) = 3, X_2(t) \in A_2, Y_1(t) \in B_1, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 1, X_2(0) = x_2, Y_1(0) = y_1)$$

$$P_{23}(t, x_1, y_2, B_1, A_2) = P(L(t) = 3, X_2(t) \in A_2, Y_1(t) \in B_1, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 2, X_1(0) = x_1, Y_2(0) = y_2)$$

$$\widetilde{P}_{33}(t, y_1, B_1, A_2) = P(L(t) = 3, X_2(t) \in A_2, Y_1(t) \in B_1, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 3, Y_1(0) = y_1)$$

$$\widetilde{P}_{43}(t, y_2, B_1, A_2) = P(L(t) = 3, X_2(t) \in A_2, Y_1(t) \in B_1, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 4, Y_2(0) = y_2)$$

$$P_{04}(t, x_1, x_2, A_1, B_2) = P(L(t) = 4, X_1(t) \in A_1, Y_2(t) \in B_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 0, X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2)$$

$$P_{14}(t, x_2, y_1, A_1, B_2) = P(L(t) = 4, X_1(t) \in A_1, Y_2(t) \in B_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 1, X_2(0) = x_2, Y_1(0) = y_1)$$

$$P_{24}(t, x_1, y_2, A_1, B_2) = P(L(t) = 4, X_1(t) \in A_1, Y_2(t) \in B_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0) = 2, X_1(0) = x_1, Y_2(0) = y_2)$$

$$P_{34}(t, y_1, A_1, B_2) = P(L(t) = 4, X_1(t) \in A_1, Y_2(t) \in B_2, t < \tau_1 |$$

$$L(0)=3,Y_1(0)=y_1)$$

$$P_{44}(t,y_2,A_1,B_2)=P(L(t)=4,X_1(t)\in A_1,Y_2(t)\in B_2,t<\tau_1|$$

$$L(0)=4,Y_2(0)=y_2)$$

则我们有

定理 4.3.1 $\{\widetilde{P}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2,t),\widetilde{P}_{10}(t,x_2,y_1A_1,A_2),\widetilde{P}_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2),$ $\widetilde{P}_{30}(t,y_1,A_1,A_2),\widetilde{P}_{40}(t,y_2,A_1,A_2)\}$ 是下列非负方程的最小非负解:

$$\widetilde{P}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=(1-F_{1,x_1}(t))(1-F_{2,x2}(t))1_{A_1}(x_1+t)1_{A_2}(x_2+t)+$$

$$\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)\widetilde{P}_{10}(t-s,0,x_2+s,A_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{20}(t-s,x_1+s,0,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{00}(t-s,0,x_2+s,A_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{30}(t-s,y_1+s,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{00}(t-s,x_1+s,0,A_1,A_2)$$

$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)\widetilde{P}_{40}(t-s,y_2+s,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{30}(t,y_1,A_1,A_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{20}(t-s,0,0,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{40}(t,y_2,A_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{10}(t-s,0,0,A_1,A_2)$$

证明 因为 $(L(t),x_1(t),x_2(t),Y_1(t),Y_2(t),t<\tau_1)$ 是马尔可夫过程，也是以 $(r_n,n\geq 0)$ 为骨架时序列的马尔可夫骨架过程。

令

$$\widetilde{h}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=P(L(t)=0,X_1(t)\in A_1,X_2(t)\in A_2,t<r_1|$$

$$L(0)=0,X_1(0)=x_1,X_2(0)=x_2)$$

$$\widetilde{h}_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=P(L(t)=0,X_1(t)\in A_1,X_2(t)\in A_2,t<r_1|$$

$$L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{h}_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_1|$$

$$L(0)=1, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{h}_{30}(t,y_1,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_1|$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{h}_{40}(t,y_2,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_1|$$

$$L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{00}^{(n)}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_n|$$

$$L(0)=0, X_1(0)=x_1, X_2(0)=x_2)$$

$$\widetilde{P}_{10}^{(n)}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_n|$$

$$L(0)=1, X_2(0)=x_2, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{P}_{20}^{(n)}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_n|$$

$$L(0)=1, X_1(0)=x_1, Y_2(0)=y_2)$$

$$\widetilde{P}_{30}^{(n)}(t,y_1,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_n|$$

$$L(0)=3, Y_1(0)=y_1)$$

$$\widetilde{P}_{40}^{(n)}(t,y_2,A_1,A_2)=P(L(t)=0, X_1(t)\in A_1, X_2(t)\in A_2, t<r_n|$$

$$L(0)=4, Y_2(0)=y_2)$$

于是有

$$\widetilde{h}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=\widetilde{P}_{00}^{(1)}(t,x_1,x_2,A_1,A_2),$$

$$\widetilde{h}_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=\widetilde{P}_{10}^{(1)}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{h}_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=\widetilde{P}_{20}^{(1)}(t,x_1,y_2,A_1,A_2),$$

$$\widetilde{h}_{30}(t,y_1,A_1,A_2)=\widetilde{P}_{30}^{(1)}(t,y_1,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{h}_{40}(t,y_2,A_1,A_2)=\widetilde{P}_{40}^{(1)}(t,y_2,A_1,A_2)$$

当 $n\to\infty$ 时

$$\widetilde{P}_{00}^{(n)}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)\to\widetilde{P}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2),$$

$$\widetilde{P}_{10}^{(n)}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)\to\widetilde{P}_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{20}^{(n)}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)\to\widetilde{P}_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{30}^{(n)}(t,y_1,A_1,A_2)\to\widetilde{P}_{30}(t,y_1,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{40}^{(n)}(t,y_2,A_1,A_2)\to\widetilde{P}_{40}(t,y_2,A_1,A_2)$$

显然有

$$\widetilde{h}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=(1-F_{1,x1}(t))(1-F_{2,x2}(t))I_{A1}(x_1+t)I_{A2}(x_2+t)$$

$$\widetilde{h}_{10}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=0,\widetilde{h}_{20}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=0$$

$$\widetilde{h}_{30}(t,y_1,A_1,A_2)=0,h_{40}(t,y_2,A_1,A_2)=0$$

由马尔可夫骨架过程理论有

$$\widetilde{P}_{00}^{(n)}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)=\widetilde{h}_{00}(t,x_1,x_2,A_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)\widetilde{P}_{10}^{(n)}(t-s,0,x_2+s,A_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{20}^{(n)}(t-s,x_1+s,0,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{10}^{(n)}(t,x_2,y_1,A_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{00}^{(n)}(t-s,0,x_2+s,A_1,A_2)+$$

$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{40}^{(n)}(t-s,0,y_1+s,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{20}^{(n)}(t,x_1,y_2,A_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{00}^{(n)}(t-s,x_1+s,0,A_1,A_2)$$

$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)\widetilde{P}_{30}^{(n)}(t-s,0,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{30}^{(n)}(t,y_1,A_1,A_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{20}^{(n)}(t-s,0,0,A_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{40}^{(n)}(t,y_2,A_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{10}^{(n)}(t-s,0,0,A_1,A_2)$$

因而由定理 2.2.1，立知定理成立。

定理 4. 3. 2 $\{\widetilde{P}_{01}(t,x_1,x_2,B_1,A_2),\widetilde{P}_{11}(t,x_2,y_1,B_1,A_2),\widetilde{P}_{21}(t,x_1,y_2,B_1,A_2),$ $\widetilde{P}_{31}(t,y_1,B_1,A_2),\widetilde{P}_{41}(t,y_2,B_1,A_2)\}$ 是下列非负方程的最小非负解:

$$\widetilde{P}_{01}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)\widetilde{P}_{11}(t-s,x_2+s,0,B_1,A_2)+$$
$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{21}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{11}(t,x_2,y_1,B_1,A_2)=(1-G_{1,y_1}(t))(1-F_{2,x_2}(t))1_{A2}(x_2+t)1_{B1}(y_1+t)+$$
$$\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{11}(t-s),0,x_2+s,0,B_1,A_2)+$$
$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{31}(t-s,y_1+s,B_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{21}(t,x_1,y_2,B_1,A_2)=\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{01}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)$$
$$\int_0^t(1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)\widetilde{P}_{41}(t-s,y_2+s,B_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{31}(t,y_1,B_1,A_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{21}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

$$\widetilde{P}_{41}(t,y_2,B_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{11}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

证明 同定理 4.3.1 的证明，此处略。

定理 4.3.3 $\{\widetilde{P}_{02}(t,x_1,x_2,A_1,B_2),\widetilde{P}_{12}(t,x_2,y_1,A_1,B_2),\widetilde{P}_{22}(t,x_1,y_2,A_1,B_2),$ $\widetilde{P}_{32}(t,y_1,A_1,B_2),\widetilde{P}_{42}(t,y_2,A_1,B_2)\}$ 是下列非负方程的最小非负解:

$$\widetilde{P}_{02}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)=\int_0^t(1-F_{2,}(s))dF_{1,x_2}(s)\widetilde{P}_{12}(t-s,x_2+s,0,A_1,B_2)+$$
$$\int_0^t(1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{22}(t-s,x_1+s,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{12}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t(1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{02}(t-s,0,x_2+s,A_1,B_2)+$$
$$\int_0^t(1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{32}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{22}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)=(1-G_{2,y_2}(t))(1-F_{1,x2}(t))1_{A1}(x_1+t)1_{B2}(y_2+t)$$

$$\int_0^t (1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{22}(t-s,x_1+s,0,A_1,B_2)$$

$$\int_0^t (1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)\widetilde{P}_{42}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{32}(t,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t dG_{1y_1}(s)\widetilde{P}_{12}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{42}(t,y_2,A_1,B_2)=\int_0^t dG_{2y_2}(s)\widetilde{P}_{22}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

证明 同定理 4.3.1 的证明，此处略。

定理 4.3.4 $\{\widetilde{P}_{03}(t,x_1,x_2,B_1,A_2),\widetilde{P}_{13}(t,x_2,y_1,B_1,A_2),\widetilde{P}_{23}(t,x_1,y_2,B_1,A_2),$ $\widetilde{P}_{33}(t,y_1,B_1,A_2),\widetilde{P}_{43}(t,y_2,B_1,A_2)\}$ 是下列非负方程的最小非负解：

$$P_{03}(t,x_1,x_2,B_1,A_2)=\int_0^t (1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)\widetilde{P}_{13}(t-s,x_2+s,0,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t (1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{23}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{13}(t,x_2,y_1,B_1,A_2)=\int_0^t (1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{03}(t-s,x_2+s,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t (1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{33}(t-s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{23}(t,x_1,y_1,B_1,A_2)=\int_0^t (1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{03}(t-s,x_1+s,0,B_1,A_2)+$$

$$\int_0^t (1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)\widetilde{P}_{43}(t-s,0,B_1,A_2)$$

$$P_{33}(t,y_1,B_1,A_2)=(1-G_{1,y_1}(t))1_{B_1}(y_1+t)+\int_0^t dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{23}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

$$P_{43}(t,y_2,B_1,A_2)=\int_0^t dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{13}(t-s,0,0,B_1,A_2)$$

证明 同定理 4.3.1 的证明，此处略。

定理 4. 3. 5 $\{\widetilde{P}_{04}(t,x_1,x_2,A_1,B_2),\widetilde{P}_{14}(t,x_2,y_1,A_1,B_2),\widetilde{P}_{24}(t,x_1,y_2,A_1,B_2),$ $\widetilde{P}_{34}(t,y_1,A_1,B_2),\widetilde{P}_{44}(t,y_2,A_1,B_2)\}$ 是下列非负方程的最小非负解：

$$\widetilde{P}_{04}(t,x_1,x_2,A_1,B_2)=\int_0^t (1-F_{2,x_2}(s))dF_{1,x_2}(s)\widetilde{P}_{14}(t-s,x_2+s,0,A_1,B_2)+$$

$$\int_0^t (1-F_{1,x_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{24}(t-s,_{x_1}+s,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{14}(t,x_2,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t (1-F_{2,x_2}(s))dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{04}(t-s,0,x_2+s,A_1,B_2)+$$

$$\int_0^t (1-G_{1,y_1}(s))dF_{2,x_2}(s)\widetilde{P}_{34}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{24}(t,x_1,y_2,A_1,B_2)=\int_0^t (1-F_{1,x_1}(s))dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{04}(t-s,x_2+s,0,A_1,B_2)$$

$$\int_0^t (1-G_{2,y_2}(s))dF_{1,x_1}(s)\widetilde{P}_{44}(t-s,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{34}(t,y_1,A_1,B_2)=\int_0^t dG_{1,y_1}(s)\widetilde{P}_{24}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

$$\widetilde{P}_{44}(t,y_2,A_1,B_2)=(1-G_{2,y_2}(t))1_{B_2}(y2+t)+)\int_0^t dG_{2,y_2}(s)\widetilde{P}_{14}(t-s,0,0,A_1,B_2)$$

证明 同定理 4.3.1 的证明，此处略。

于是，$\forall x\in E^W, A\in\Im$，由上述之各定理，便可确定

$$P(W(t)\in A, t<\tau_1|W(0)=x).$$

从而，可得 $P(\tau_1\le t|W(0)=x)\quad(=D(x,t))$,

最终，便可确定 $\int\limits_0^\infty tdD(t)=\int\limits_0^\infty td\{\int\limits_{E^W}\pi(dx).D(x,t)\}$.

综上，有

定理 4.3.6 如果 $E(\tau_1|L(0)=2,X_1(0)=X_2(0)=Y_1(0)=Y_2(0)=0)<\infty$，且 $G_{Y_i}(t)$ 是绝对连续的 $(i=1,2)$，则 $(L(t),X_1(t),X_2(t),Y_1(t),Y_2(t))$ 的极限分布 P(•)存在，且有

$$P(A)=\frac{\int\limits_0^\infty\int\limits_{E^W}h(y,t,A)\pi(dy)dt}{\int\limits_0^\infty tdD(t)},\forall A\in\Im$$

其中，$h(y,t,A)$ 和 $\int\limits_0^\infty tdD(t)$ 可由定理 4.3.1——定理 4.3.5 导出。

第五章　马尔可夫骨架过程与存储论

§5.1　水库储水模型（Ⅰ）

本节所讨论的水库储水模型可以概括如下：

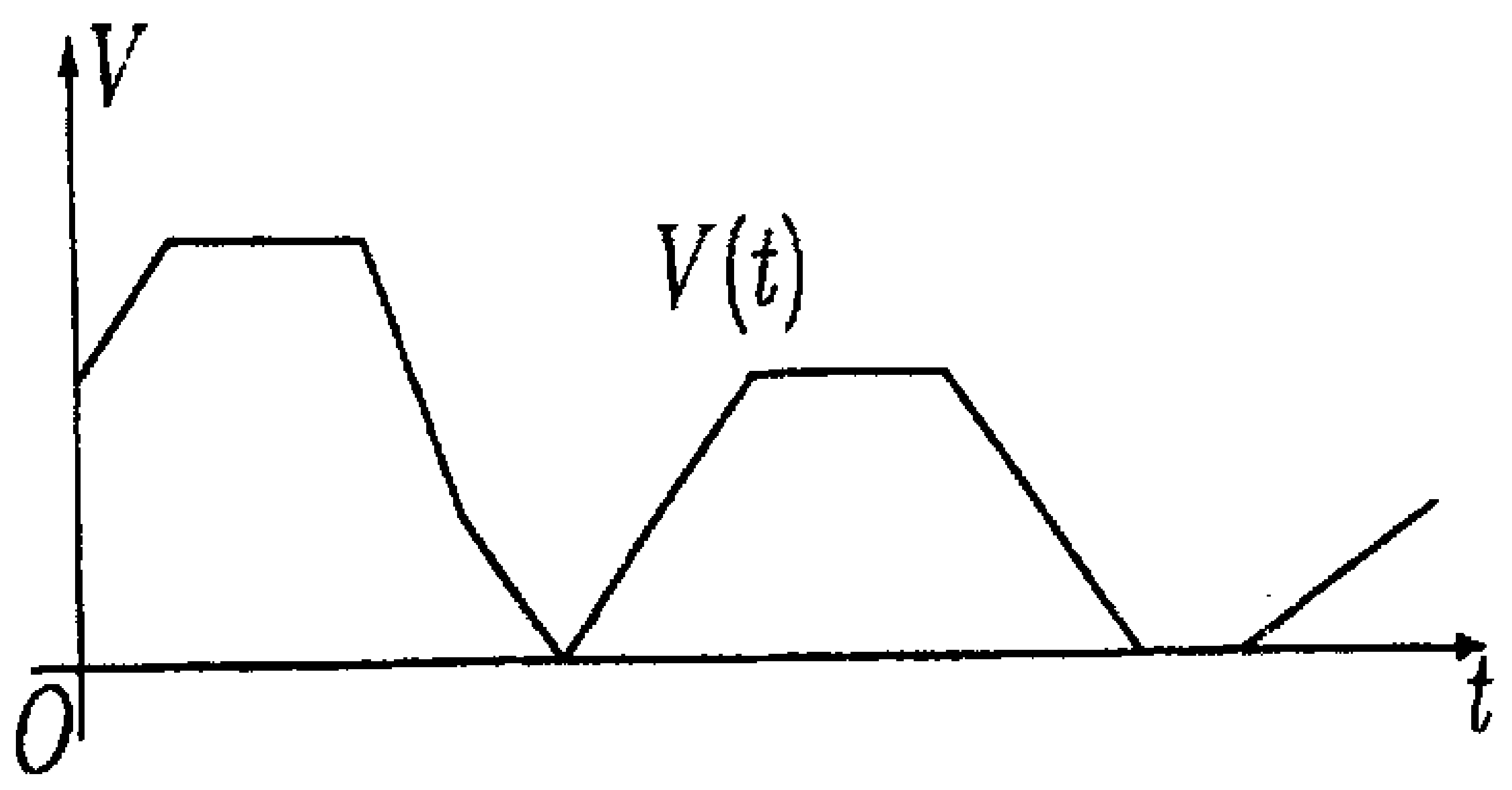
（1）假设有一个水库，总容量为$\bar{V}$，当水库的容量达到$\bar{V}$时，水库中的水就自动溢出。在时刻t水库的储水量记作$V(t)$；

（2）水库有N个进水速度$C_1,\cdots,C_N$，进水速度是被取值于$E=\{1,2,\cdots,N\}$的半马尔可夫过程$X(t)$所控制，在时刻t水库的进水速度为$C_{X(t)}$；

（3）水库的闸门用于水库泻水，闸门的开和关是由取值于$\{0,1\}$的半马尔可夫过程$Y(t)$所控制。在时刻t，如果$Y(t)=0$，则闸门关闭；如果$Y(t)=1$，则闸门开放。泻水速度为$\bar{C}_1$，为了行文方便，令$\bar{C}_0=0$，即闸门关闭时泻水速度为0；

（4）假设$\{X(t);t\geq 0\}$与$\{Y(t);t\geq 0\}$独立.

$\{V(t);t\geq 0\}$称为储水量过程，它的轨道如下图所示.



如果$\{Y(t);t\geq 0\}$是一个马尔可夫链，水库的进水速度只有一个，这时的水库储水

模型退化为经典的随机流体模型. 如果 $\{X(t);t\geq 0\}$ 是马尔可夫链，这时的水库储水模型退化为 Mitra[1]的生产消费流体模型。对于 $\{X(t);t\geq 0\}$ 和 $\{Y(t);t\geq 0\}$ 都只是半马尔可夫过程的情况，从我们掌握的资料来看，迄今为止国内外还没有人研究.

下面我们应用马尔可夫骨架过程的理论，建立了这类问题的数学模型

令

$$\theta_1(t)=\inf\{s\geq 0;X(t-s)\neq X(t)\}; \tag{3.1.1}$$

$$\theta_2(t)=\inf\{s\geq 0;Y(t-s)\neq Y(t)\}; \tag{3.1.2}$$

$\tau_0=0,\tau_n$ 为 $(X(t),Y(t))$ 在 $[0,\infty)$ 上的第 n 个间断点。一般来说，储水量过程 $\{V(t);t\geq 0\}$ 不是马尔可夫过程，但 $\{(V(t),X(t),Y(t),\theta_1(t),\theta_2(t))\}_{t\geq 0}$ 是一个马尔可夫过程，并且是以 $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为骨架时序列的马尔可夫骨架过程。

以 T_1 表示 $X(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上的第一个跳跃时刻。令

$$F_i(t)=P\{T_1\leq t|X(0)=i,\theta_1(0)=0\};$$

$$F_{i,k}(t)=P\{X(T_1)=k,T_1\leq t|X(0)=i,\theta_1(0)=0\};$$

$$F_{i,\theta_1}(t)=P\{T_1\leq t|X(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1\};$$

$$F_{i,k,\theta_1}(t)=P\{X(T_1)=k,T_1\leq t|X(0)=i,\theta_1(0)=\theta_1\}$$

以 $\hat{T}_1$ 表示 $Y(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上的第一个跳跃时刻。令

$$G_i(t)=P\{\hat{T}_1\leq t|Y(0)=i,\theta_2(0)=0\};$$

$$G_{i,\theta_2}(t)=P\{\hat{T}_1\leq t|Y(0)=i,\theta_2(0)=\theta_2\}.$$

由于 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是已知的半马尔可夫过程，所以 $F_i(t),F_{i,k}(t),$ 和 $G_i(t)$ 是已知的。从而 $F_{i,\theta_1}(t),F_{i,k,\theta_1}(t),$ 和 $G_{i,\theta_2}(t)$ 可由 $F_i(t),F_{i,k,}(t)$ 和 $G_i(t)$ 计算出来，即:

$$F_{i,\theta_1}(t)=\frac{F_i(\theta_1+t)-F_i(\theta_1)}{1-F_i(\theta_1)};$$

$$F_{i,k,\theta_1}(t)=\frac{F_{i,k}(\theta_1+t)-F_{i,k}(\theta_1)}{1-F_{i,k}(\theta_1)};$$

$$G_{i,\theta_2}(t)=\frac{G_i(\theta_2+t)-G_i(\theta_2)}{1-G_i(\theta_2)}.$$

对于 IR^+ 上的 Borel 集 $A,B,V,i,m\in E,j,n\in\{0,1\},t\geq 0$，令

$$h(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$=P\{V(t)\in V,X(t)=m,Y(t)=n,\theta_1(t)\in A,\theta_2(t)\in B,t<\tau_1|V(0)=v,X(0)=i,$$

$$Y(0)=j,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2\}$$

显然有：

$$h(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$=(1-F_{i,\theta_1}(t))(1-G_{j,\theta_2})\delta_{i,m}\delta_{j,n}I_V(\min\{\overline{V},(v+(C_i-\overline{C}_j)t)^+\})I_A(\theta_1+t)I_B(\theta_2+t).$$

令

$$P(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$=P\{V(t)\in V,X(t)=m,Y(t)=n,\theta_1(t)\in A,\theta_2(t)\in B|V(0)=v,X(0)=i.$$

$$Y(0)=j,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2\}$$

由定理 2.2.1，我们得：

定理 5.1.1 $P(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$ 是下列非负线性方程组的最小非负解.

$$P(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$=h((v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t))$$

$$+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\int_0^t F_{i,k,\theta_1}(ds)(1-G_{j,\theta_2}(s)$$

$$\cdot\ P(\min\{\overline{V},(v+(C_i-\overline{C}_j)s)^+\},k,j,0,\theta_2+s,V,m,n,A,B,t-s)$$

$$+\int_0^t G_{j,\theta_2}\ (ds)(1-F_{i,\theta_1}(s))$$

$$\cdot\ P(\min\{\overline{V},(v+(C_i-\overline{C}_j)s)^+\},i,1-j,\theta_1+s,0,V,m,n,A,B,t-s)$$

$$+\sum_{s\le t}\sum_{k=1,k\neq i}^{N}(F_{i,k,\theta_1}(s)-F_{i,k,\theta_1}(s-))(G_{j,\theta_2}(s)-G_{j,\theta_2}(s-))$$

$$P(\min\{\overline{V},(v+(C_i-\overline{C}_j)s)^+\},k,j,0,0,V,m,n,A,B,t-s)$$

利用定理 5.1..1 可以唯一确定储水量过程 $\{V(t),t\ge 0\}$ 的有限维分布(参见[38])。

下面，考察 $V(t)$ 的极限性态。

方为便计，令

$W(t)=(V(t),X(t),Y(t),\theta_1(t),\theta_2(t)),t\ge 0$。

且以 $(E^W,\Im)$ 表示 $\{W(t),t\ge 0\}$ 的状态空间。

以下的讨论，均建立在假定

$$P(V=0)=1 \tag{*}$$

之下；（*）的直观意义是：水库可以以概率 1 干枯。此外，鉴于问题的实际背景，还假定 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是一个既约的正常返的马尔可夫过程。

令

$r_i=\inf\{t\ge 0|W(t)=(0,i_0,0,0,0)\}$

其中，$i_0\in E$ 是 $X(t)$ 的一个给定的状态；

设 $r_0\equiv 0,\quad r_{n+1}=r_n+\theta_{Y_n}r_1,\quad n=1,2,\cdots$；

$\forall x\in E^W,t\ge 0$，令

$$D(x,t)=P(r_1\le t|W(0)=x)$$

$$D(t)=P(r_2-r_1\le t)$$

在假设 $E(r_i|W(0)=(0,i_0,0,0,0))<\infty$ 之下，容易验证 $\{W(t);t\ge 0\}$ 是一个以 $\{r_n\}_{n\ge 0}^{\infty}$ 为骨架时序列的正常返的 Doob 骨架过程，又若假定 $X(t)$ 在各状态的逗留时间均是绝对连续的随机变量，则易知：$\forall x\in E^W, D(x,t)$ 是绝对连续的。从而，由第二章中定理 2.4.2 可得：$W(t)$ 的平稳分布 P(•)存在，且 $\forall A\in\Im$，

$$P(A)=\frac{\int_0^{\infty}\int_{E^W}h(x,t,A)\pi(dx)}{\int_0^{\infty}tdD(t)}$$

其中， $\pi(\cdot)$ 是 $\{W(t),t\ge 0\}$ 的特征测度（见第二章），

$$h(x,t,A)=P(W(t)\in A,t<r_1|W(0)=x),$$

若能确定 $h(x,t,A)$ $(\forall x\in E^W)$ 及 $\int_0^{\infty}tdD(t)$，则通过取某些特定的 $A(\in\Im)$，譬如取 $A=V\times E\times\{0,1\}\times R_+\times R_+$ 便能确定 $V(t)$ 的极限分布。

为此，考虑如下的马氏骨架过程：

$$\{W(t),0\le t<r_1\},$$

其骨架时序列为 $\{\overline{\tau}_n\}^{\infty}{}_{n=0}$, 其中 $\overline{\tau}_0\equiv 0,\overline{\tau}_n=\tau_n\wedge r_1,n\ge 1$；

对 R_+ 上任意的 Borel 集合 A,B,V, 令

$$\widetilde{h}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,v,m,n,A,B,t)$$

$$=P\{V(t)\in V,X(t)=m,y(t)=n,\theta_1(t)\in A,\theta_2(t)\in B.$$

$$\widetilde{\tau}_1>t|V(0)=v,X(0)=i,Y(0)=j,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2\ \}$$

直接计算可得

$$\widetilde{h}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,v,m,n,A,B,t)$$

$$=(1-F_{i\theta_1}(t))(1-G_{j\theta_2}(t))\delta_{i,m}\delta_{j,n}I_v\{\min(\overline{V},v+(C_i-\overline{C}_j)t\}$$

$$\cdot\ I_A(\theta_1+t)I_B(\theta_2+t),$$

令

$$\widetilde{P}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,v,m,n,A,B,t)$$

$$=P\{V(t)\in V,X(t)=m,y(t)=n,\theta_1(t)\in A,\theta_2(t)\in B.$$

$$t<r_1|V(0)=v,X(0)=i,Y(0)=j,\theta_1(0)=\theta_1,\theta_2(0)=\theta_2\},$$

亦即

$$\widetilde{P}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$=h((v,i,j,\theta_1,\theta_2),t,V\times\{m\}\times\{n\}\times A\times B),$$

由第二章所建立的结论，可得

定理 5.1.2 $\{\widetilde{P}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)\}$ 是下列非负线性方程组的最小非负解：

$$\widetilde{P}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$=\widetilde{h}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t F_{i,k,\theta_1}(ds)(1-G_{j,\theta_2}(s))\widetilde{P}(\min\{\widetilde{V},v+(C_i-\widetilde{C}_j)s\},k,j,0,\theta_2+s,V,m,n,A,B,t-s)$$

$$+\int_0^t G_{j,\theta_1}(ds)(1-F_{i,\theta_1}(s))\widetilde{P}(\min\{\overline{V},v+(C_i-\overline{C}_j)s\},i,1-j,\theta_1+s,0,V,m,n,A,B,t-s)$$

$$\times\sum_{s\le1}(F_{i,k,\theta_1}(s)-F_{i,k,\theta_1}(s-))(G_{j,\theta_1}(s)-G_{j,\theta_1}(s-))$$

$$\times\widetilde{P}(\min\{\overline{V},v+(C_i-\overline{C}_j)s\},i,1-j,\theta_1+s,0,V,m,n,A,B,t-s)$$

由此定理及 $\widetilde{P}(v,i,j,\theta_1,\theta_2,V,m,n,A,B,t)$ 的定义，便知 $h(x,t,A)$ 可被完全确定，从而又可导出 $D(x,t)=P(r_1\le t|W(0)=x)$，再由第二章引理 2.4.3，可求得

$$D(t)=\int_{E^W} D(x,t)\pi(dx)$$

最终求得 $\int_0^\infty tdD(t)$

经以上步骤，便能求得 $V(t)$ 的极限分布.

§5.2 水库储水模型（II）

在实际的水库储水过程中，一般而言，水库的泻水速度是依赖于进水速度和储水量的，因此较模型（I）更符合实际情况的水库储水模型可概括如下：

（1）假设有一个水库，总容量为 $\bar{V}=Md_o$（其中 $d_o>0, M\in IN$），当水库的容量达到 $\bar{V}$ 时，水库中的水就自动溢出。$md_o, m=1,2\cdots$； M 称为标志水位，在时刻 t 水库的储水量记作 $V(t)$；

（2）水库有 N 个进水速度 $C_1,\cdots,C_N$. 进水速度是被取值于 $E=\{1,2,\cdots,N\}$ 的半马尔可夫过程 $X(t)$ 所控制，在时刻 t 水库的进水速度为 $C_{X(t)}$；

（3）水库的泻水速度是依赖于储水量和进水速度的，具体说，当储水量 $v\in[md_0,(m+1)d_0]$，进水速度为 C_i 时，泻水速度 $\overline{C}(v,C_i)=\varphi(m,i)$. 其中 $\varphi(m,i)$ 是整数 $m\in\{1,2,\cdots,M\}$ 和 $i\in E$ 的函数.

（4）假定对于任意的 $m\in\{0,1,2,\cdots,M\}$，存在 $i,j\in E$，使得

$$\varphi(m,i)>C_i \tag{3.2.1}$$

$$\varphi(m,j)<C_j. \tag{3.2.2}$$

对于任意的 $i\in E$，

$$\varphi(M,i)>C_i, \tag{3.2.3}$$

$$\varphi(0,i)<C_i\ . \tag{3.2.4}$$

我们首先引入几个记号.

对于任意的 $v\in[0,\overline{V}]$，如果 $v\in[md_0,(m+1)d_0)$， $m=0,1,\cdots N$，则令 $[v]=md_0$.

对于任意的$v\in[0,\overline{V}],i\in E$，令

$$S(v,i)=\begin{cases}\dfrac{v-[v]}{\overline{C}(v,C_1)-C_i}, & if\ \overline{C}(v,C_i)>C_i;\\ \dfrac{[v]+d_0-v}{C_1-\overline{C}(v,C_1)}, & if\ \overline{C}(v,C_i)<C_i.\end{cases}$$

$S(v,i)$ 表示当水库储水量为v，进水速度为C_i，泻水速度为$\overline{C}(v,C_i)$时，储水量从v到达下一个标志水位所需要的时间.

令$\theta(t)=\inf\{s\geq 0,X(t-s)\neq X(t)\},\theta(t)$表示时刻$t$以前$X(\cdot)$的最后一个断点到$t$的时间间隔. 令$\tau_0=0,\tau_n$是$\left(\overline{C}(V(t),C_{X(t)}\right),X(t))$在$[0,\infty)$上的第$n$个间断点. 一般来说，储水量过程$\{V(t);t\geq 0\}$不是马尔可夫过程，但$\{(V(t),X(t),\theta(t))\}$是一个马尔可夫过程，并且是以$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$为骨架时序列的马尔可夫骨架过程.

以T_1表示$X(t)$在时刻 0 以后的第一个跳跃点，令

$$F_i(t)=P\{T_1\leq t|X(0)=i,\theta(0)=0\};$$

$$F_{i,k}(t)=P\{X(T_1)=k,T_1\leq t|X(0)=i,\theta(0)=0\};$$

$$F_{i,\theta}(t)=P\{T_1\leq t|X(0)=i,\theta(0)=\theta\};$$

$$F_{i,k,\theta}(t)=P\{X(T_1)=k,T_1\leq t|X(0)=i,\theta(0)=\theta\}.$$

于是有:

$$F_{i,\theta}(t)=\frac{F_i(\theta+t)-F_i(\theta)}{1-F_i(\theta)};$$

$$F_{i,k,\theta}(t)=\frac{F_{i,k}(\theta+t)-F_{i,k}(\theta)}{1-F_{i,k}(\theta)}.$$

任给$[0,\infty)$上的 Borel 集$V,A,v\in[0,\overline{V}],j\in E,\theta\geq 0,t\geq 0,$令

$$h(v,i,\theta,V,j,A,t)$$

$$=P\{V(t)\in V,X(t)=j,\theta(t)\in A,t<\tau_1|V(0)=v,X(0)=i,\theta(0)=\theta\},$$

显然有：

$$h(v,i,\theta,V,j,A,t)$$

$$=(1-F_{i,\theta}(t))I_{(0,s(v,i))}\delta_{i,j}I_A(t+\theta)I_V((v+C_i-\overline{C}(v,C_i))t)^+)$$

令

$$P(v,i,\theta,V,j,A,t)$$

$$=P(v(t)\in V,X(t)=j,\theta(t)\in A|V(0)=v,X(0)=i,\theta(0)=\theta),$$

由定理 2.2.1 可得：

定理 5.2.1　$P(v,i,\theta,V,j,A,t)$ 是下列非负线性方程组的最小非负解：

$$P(v,i,\theta,V,j,A,t)$$

$$=h(v,i,\theta,V,j,A,t)$$

$$+[1-F_{i,\theta}(s(v,i))]P([v+(C_i-\overline{C}(v,C_i))S(v,i)]^+),i,$$

$$\theta+S(v,i),V,j,A,t-S(v,i))$$

$$+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\int_0^{S(v,i)}F_{i,k,\theta}(ds)P([v+(C_i-\overline{C}(v,C_i))s]^+,k,$$

$$\theta+s,V,j,A,t-s)\,.$$

类似于 § 5.1 中的讨论，亦可得到模型（II）的储水量过程的极限性态。为此，令

$$W(t)=(V(t),X(t),\theta(t)),t\geq 0\,;$$

以 $(E^W,\Im)$ 表示 $W(t)$ 的状态空间，仍维持 § 5.1 中的假定 (*)：$P(V=0)=1$。并设 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是既约的、正常返的。取定 $i_0\in E$。这里，i_0 表示 $V(t)=0,\theta(t)=0$

时，$X(t)$所在的状态，令

$r_1 = \inf\{\, t > 0 | W(t) = (0, i_0, 0)\}, r_0 \equiv 0, \quad r_{n+1} = r_n + \theta_{r_n} r_n, \quad n = 1,2,\cdots.$

假定 $E(r_1 | W(0) = (0, i_0, 0)) < +\infty$

$\forall x \in E^W, t \geq 0$, 令

$D(x,t) = P(r_1 \leq t | W(0) = x)$,

$D(t) = P(r_2 - r_1 \leq t)$.

易验证$\{W(t), t \geq 0\}$是以$\{r_n\}$为骨架时序列的正常返的 Doob 骨架过程。且若设$X(t)$在各状态的逗留时间的分布函数是绝对连续的，则可知$D(x,\cdot)$是绝对连续的$(\forall x \in E^W)$，于是，由定理 2.4.2 得$W(t)$的极限分布$P(\cdot)$如下：

$\forall A \in \Im$,

$$P(A) = \frac{\int_0^\infty \int_{E^W} h(x,t,A)\pi(dx)}{\int_0^\infty t dD(t)}$$

其中，$h(x,t,A) = P(W(t) \in A, t < r_1 | W(0) = x)$，若能求得$P(A)(\forall A \in \Im)$，则可以确定$\{V(t), t \geq 0\}$的极限分布。为此，如同在 § 5.1 中一样，只须确定$h(x,t,A)$即可。

考虑过程$\{W(t); 0 \leq t < r_1\}$:

令$\bar{\tau}_0 \equiv 0, \quad \bar{\tau}_n = \tau_n \wedge r_1, \quad n = 1,2,\cdots$, 易知，$\{W(t), 0 \leq t < r_1\}$是一个以$\{\bar{\tau}_n\}$为骨架时序列的正规马尔可夫骨架过程。

$\forall i, j \in E, v, \theta \in IR^+, V, B \in B(IR^+)$，令

$\widetilde{h}(v,i,\theta,V,j,B,t)$

$= P(V(t) \in V, X(t) = j, \theta(t) \in B, t < \widetilde{\tau}_1 | V(0) = v, X(0) = i, \theta(0) = \theta)$,

$\widetilde{P}(v,i,\theta,V,j,B,t)$

$= P(V(t)\in V, X(t)=j,\theta(t)\in B, t<r_1 | V(0)=v, X(0)=i,\theta(0)=\theta)$

显然有

$\widetilde{h}(v,i,\theta,V,j,B,t)$

$=(1-F_{i,\theta}(t))I_{[0,S(v,i)]}(t)\delta_{ij}I_B(t+\theta)I_V((v+(C_i-\overline{C}(v,C_i))t)^+)$.

而关于 $\widetilde{P}(v,i,\theta,V,j,B,t)$，则由定理 2.2.1，有

定理 5.2.2 $\widetilde{P}(v,i,\theta,V,j,B,t)$ 是下列非负线性方程组的最小非负解:

$\widetilde{P}(v,i,\theta,V,j,B,t)$

$=\widetilde{h}(v,i,\theta,V,j,B,t)$

$+[1-F_{i,\theta}(S(v,i))]P([v+(C_i-\widetilde{C}(v,C_i))S(v,i)]^+,i,$

$\theta+S(v,i),V,j,B,t-s(v,i))$

$+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\int_0^{S(v,i)}F_{i,k,\theta}(ds)P([v+(C_i-\overline{C}(v,C_i))s]^+,k,$

$\theta+s,V,j,B,t-s)$.

注 意： $\widetilde{P}(v,i,\theta,V,j,B,t) = P(W(t)\in A,t<r_1|W(0)=x)=h(x,t,A)$ ， 这 里 ， $A=V\times\{j\}\times B, x=(v,i,\theta)$。

§5.3 易腐烂物品库存模型

易腐烂物品的储存是现实生活中经常出现的问题。这一节，我们建立了一个关于此类问题的模型，并对此模型进行了分析。为简单计并不失一般性，仅考虑库存物品为单一种类的情况。

问题可以概括如下：

（1）假定库存物品的寿命是一个随机变量，且各库存物品的寿命是相互独立同分布的，其共同的分布函数为$F(t)$。

（2）每次出售只售出一件物品，相邻两次出售的时间间隔是相互独立同分布的随机变量，它们与物品寿命亦是相互独立的，其共同的分布函数为$G(t)$。

（3）仓库的容量为一个固定的值$S_{\max}$，当缺货量达到$-s(s>0)$时，立即进新鲜货品，补足缺货并使库存量达到$S_{\max}$。

设$S(t)$为时刻t的库存量。欲考察其在任意时刻t的分布规律及其在统计平衡状态下的分布规律。

一般而言，$\{S(t);t\geq 0\}$不是马尔可夫过程。引入补充变量如下：

$\theta(t)$表示时刻t仓库中物品的寿命；

$\hat{\theta}(t)$表示时刻t前（包括时刻t）最后一次出售物品的时刻到t的时间间隔。

易见，$\{(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t));t\geq 0\}$是一个马尔可夫过程。令$\tau_0=0,\tau_n$为$(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t))$在$[0,\infty)$上的第n个间断点。显然$(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t))$是一个以$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$为骨架时序列的马尔可夫骨架过程。

对于任意的$\theta,\hat{\theta}\geq 0,t\geq 0,$令

$$F_{\theta}(t)=\frac{F(\theta+t)-F(\theta)}{1-F(\theta)};$$

$$G_{\hat{\theta}}(t)=\frac{G(\hat{\theta}+t)-G(\hat{\theta})}{1-G(\hat{\theta})}.$$

对于任意的$i,j\in\{s+1,s+2,\cdots,S_{\max}\},\theta,\hat{\theta}\in[0,\infty)$以及$[0,\infty)$上的Borel集$A,\hat{A},$

若 $i>0$, 令

$$h(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$
$$=P\{S(t)=j,\theta(t)\in A,\hat{\theta}(t)\in\hat{A},t<\tau_1\big|S(0)=i,\theta(0)=\theta,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\};$$

$$P(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$
$$=P\{S(t)=j,\theta(t)\in A,\hat{\theta}(t)\in\hat{A}\big|S(0)=i,\theta(0)=\theta,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\}.$$

若 $i\le 0$，则令

$$h(i,\hat{\theta},j,\hat{A},t)$$
$$=P\{S(t)=j,\hat{\theta}(t)\in\hat{A},t<\tau_1\big|S(0)=i,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\};$$

$$P(i,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$
$$=P\{S(t)=j,\theta(t)\in A,\hat{\theta}(t)\in\hat{A}\big|S(0)=i,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\}.$$

显然，

$$h(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)=\delta_{i,j}I_A(\theta+t)I_{\hat{A}}(\hat{\theta}+t)(1-F_\theta(t))^i(1-G_{\hat{\theta}}(t)) \qquad if\ i>0;$$

$$h(i,\hat{\theta},j,\hat{A},t)=\delta_{i,j}I_{\hat{A}}(\hat{\theta}+t)(1-G_{\hat{\theta}}(t)) \qquad if\ i\le 0.$$

由定理 2.2.1，我们得:

定理 5.3.1 $P(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$ 是如下非负方程的最小非负解.

$$P(i,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$
$$=I_{\{s+2,\cdots,0\}}(i)\int_0^t G_{\hat{\theta}}(ds)P(i-1,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+I_{\{s+1\}}(i)\int_0^t G_{\hat{\theta}}(ds)P(S_{\max},0,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$(s<i\le 0)$；

$$P(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$

$$=h(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$

$$+I_{\{2,\cdots,S_{\max}\}}(i)\sum_{l=1}^{i}\int_0^t i(1-F_\theta(s))^{i-1}(1-G_{\hat{\theta}}(s))F_\theta(ds)$$

$$\times P(i-1,\theta+s,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+I_{\{1\}}(i)\sum_{l=1}^{i}\int_0^t i(1-G_{\hat{\theta}}(s))F_\theta(ds)P(0,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+I_{\{2,\cdots,S_{\max}\}}(i)\int_0^t i(1-F_\theta(s))^i G_{\hat{\theta}}(ds)P(i-1,\theta+s,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+I_{\{1\}}(i)\int_0^t (1-F_\theta(s))G_{\hat{\theta}}(ds)P(0,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+\sum_{s\le t}\sum_{l=1}^{i-1}C_i^l(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^l(1-F_\theta(s))^{i-l}(1-G_{\hat{\theta}}(s))$$

$$\bullet\ P(i-l,\theta+s,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+\sum_{s\le t}(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^i(1-G_{\hat{\theta}}(s))P(0,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+\sum_{s\le t}\sum_{l=1}^{i-2}iC_i^l(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^l(1-F_\theta(s))^{i-l-1}(G_{\hat{\theta}}(s)-G_{\hat{\theta}}(s-))$$

$$\bullet\ P(i-l,\theta+s,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$+\sum_{s\le t}i(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^{i-1}(G_{\hat{\theta}}(s)-G_{\hat{\theta}}(s-))P(0,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$(0<i\le S_{\max})$。

定理 5. 3. 2 如果 $F(t),G(t)$ 是连续的，则 $P(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A})$ 是如下非负方程的最小

非负解.

$$
\begin{aligned}
&P(i,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)\\
&=I_{\{s+2,\cdots,0\}}(i)\int_0^t G_{\hat{\theta}}(ds)P(i-1,0,j,A,\hat{A},t-s)\\
&\quad+I_{\{s+1\}}(i)\int_0^t G_{\hat{\theta}}(ds)P(S_{\max},0,0,j,A,\hat{A},t-s)\\
&\qquad (s<i\le 0)\ ;\\
&P(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)\\
&=h(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)\\
&\quad+I_{\{2,\cdots,S_{\max}\}}(i)\sum_{l=1}^{i}\int_0^t i(1-F_\theta(s))^{i-1}(1-G_{\hat{\theta}}(s))F_\theta(ds)\\
&\qquad\times P(i-1,\theta+s,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s)\\
&\quad+I_{\{1\}}(i)\sum_{l=1}^{i}\int_0^t(1-G_{\hat{\theta}}(s)F_\theta(ds)P(0,\hat{\theta}+s,j,A,A,\hat{t}-s)\\
&\quad+I\{2,\cdots,S_{\max}\}(i)\int_0^t i(1-F_\theta(s))^i G_{\hat{\theta}}(ds)P(i-1,\theta+s,0,j,A,\hat{A},t-s)\\
&\quad+I_{\{1\}}(i)\int_0^t(1-F_\theta(s))G_{\hat{\theta}}(ds)P(0,0,j,A,\hat{A},t-s)\,,\\
&\qquad (0<i\le S_{\max})\text{。}
\end{aligned}
$$

令

$$\delta=\inf\{t>0;S(t)=S_{\max}\};$$

$$\gamma_n=\tau_n\wedge\delta;$$

$$n=1,2,\cdots,$$

$$h^*(i,\hat{\theta},j,\hat{A},t)=P\{S(t)=j,\hat{\theta}(t)\in\hat{A},t<\gamma_1\,|\,S(0)=i,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\}\ ;$$

$$P^*(i,\hat{\theta},j,\hat{A},A,t)=P\{S(t)=j,\theta(t)\in\hat{A},\hat{\theta}(t)\in\hat{A},t<\delta \mid S(0)=i,\hat{\theta}(0)=\theta\},$$

$(s<i\le 0)$;

$$h^*(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)=P\{S(t)=j,\theta(t)\in A,\hat{\theta}(t)\in\hat{A},t<\gamma_1 \mid S(0)=i,\theta(0)=\theta,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\}$$

$$P^*(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)=P\{S(t)=j,\theta(t)\in A,\hat{\theta}(t)\in\hat{A},t<\delta \mid S(0)=i,\theta(0)=\theta,\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}\}$$

$(0<i\le S_{\max})$.

显然，我们有

$$h^*(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$
$$=\begin{cases}\delta_{i,j}I_A(\theta+t)I_{\hat{A}}(\hat{\theta}+t)(1-F_\theta(t))^i(1-G_{\hat{\theta}}(t)) & if\ 0<i<S_{\max};\\ i_{\{0\}}(t)I_{\{0\}}(\theta)I_{\{0\}}(\hat{\theta})I_A(0)I_{\hat{A}}(0) & if\ i=S_{\max};\end{cases}$$

$$h^*(i,\hat{\theta},j,\hat{A},t)$$
$$=\delta_{i,j}I_{\hat{A}}(\hat{\theta}+t)(1-G_{\hat{\theta}}(t)) \qquad if\ i\le 0.$$

由定理 2. 2. 1，立得

定理 5. 3. 3 $P^*(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A})$ 是如下非负方程的最小非负解：

$$P^*(s+1,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)=h^*(s+1,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$

$$P^*(i,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$

$$=h^*(i,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t)$$

$$+\int_0^t G_{\hat{\theta}}(ds)P^*(i-1,0,j,A,\hat{A},t-s)$$

$$(s+2<i\le 0)$$

$$
\begin{aligned}
&P^*(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t) \\
&= h^*(i,\theta,\hat{\theta},j,A,\hat{A},t) \\
&\quad + I_{\{2,\cdots,S_{\max}\}}(i)\sum_{l=1}^{i}\int_0^t i(1-F_\theta(s)^{i-1}(1-G_{\hat{\theta}}(s))F_\theta(ds) \\
&\qquad \times P^*(i-1,\theta+s,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + I_{\{1\}}(i)\sum_{l=1}^{i}\int_0^t(1-G_{\hat{\theta}}(s)F_\theta(ds)P^*(0,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + I_{\{2,\cdots,S_{\max}\}}(i)\int_0^t i(1-F_\theta(s))^i G_{\hat{\theta}}(ds)P^*(i-1,\theta+s,0,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + I_{\{1\}}(i)\int_0^t(1-F_\theta(s))G_{\hat{\theta}}(ds)P^*(0,0,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + \sum_{s\le t}\sum_{l=1}^{i-1}C_i^l(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^l(1-F_\theta(s))^{i-l}(1-G_{\hat{\theta}}(s)) \\
&\qquad \bullet\ P^*(i-l,\theta+s,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + \sum_{s\le t}(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^i(1-G_{\hat{\theta}}(s))P^*(0,\hat{\theta}+s,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + \sum_{s\le t}\sum_{l=1}^{i-2}iC_i^l(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^l(1-F_\theta(s))^{i-l-1}(G_{\hat{\theta}}(s)-G_{\hat{\theta}}(s-)) \\
&\qquad \bullet\ P^*(i-l,\theta+s,0,j,A,\hat{A},t-s) \\
&\quad + \sum_{s\le t}i(F_\theta(s)-F_\theta(s-))^{i-1}(G_{\hat{\theta}}(s)-G_{\hat{\theta}}(s-))P^*(0,0,j,A,\hat{A},t-s)\,,
\end{aligned}
$$

$(0<i\le S_{\max})$。

令$T_0=0, T_n$表示$(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t))$的第 n 次回到状态$(S_{\max},0,0)$的时刻，即$T_n$表示在初始时刻 0 以后第 n 次进货的时刻。显然$(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t))$是以$\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$为骨架时序列的 Dood 骨架过程。令

$$h(x,t,A)$$

$$= P((s)t,\theta(t),\hat{\theta}(t)) \in A, t < T_1 \Big| (s(0),\theta(0),\hat{\theta}(0)) = x),$$

$$M = E(T_1 \Big| S(0),\theta(0),\hat{\theta}(0)) = (S_{\max},0,0)).$$

由第二章的结论，容易导出

$$M = \int_0^\infty \sum_{j=s}^{S_{\max}} h((S_{\max},0,0),t,\{j\} \times IR^+ \times IR^+)dt$$

而 $h(x,t,A)$，特别地，$h((S_{\max},0,0),t,\{j\} \times IR^+ \times IR^+)$ 由定理 5.3.3 唯一决定。

定理 5.3.4 若 $M < \infty$，且 $G(t)$ 绝对连续，则 $(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t))$ 的极限分布 $P(\bullet)$ 存在，且

$$P(A) = \frac{1}{M}\int_0^\infty \int_{\tilde{E}} h(x,t,A)\pi(dx)dt, \forall A \in \tilde{\Im}.$$

其中 $(\tilde{E},\tilde{\Im})$ 是 $(S(t),\theta(t),\hat{\theta}(t))$ 的状态空间。

证明：由定理 2.5.4 立得。

此外，类似于§3.2，可得

定理 5.3.5

（1） $P\{T_1 < \infty \Big| (S(0),\theta(0),\hat{\theta}(0)) = S_{\max},0,0)\} = 1$

（2） $\int_0^\infty tF(dt) < \infty, \int_0^\infty tG(dt) < \infty \Leftrightarrow M < \infty.$

参考文献

[1] Anderson,W.J., Continuous-time Markov chains. Springer Series in Statistics[M], New York: Springer-Verlag,1991.

[2] Bailey,N.T.J., A contiunous time treatment of a simple queue using generating functions, J.Roy.Soc.,B,1954,16,288-291.

[3] Bhat,U.N.,Nance,R.E.,and Claybrook,B.G., Busy period analysis of a time-sharing system:Transform inversion, J.ACM,1972,19,453-463.

[4] Chen, M.F. and Wang, Y.Z., Algebraic Convergence of Markov Chains, Ann. Appl.Prob., To appear.

[5] Chen, M.F., Eigenvalues,inequalities and ergodic theory (II), Advances in Math. (China), 1999,28(6),481-505.

[6] Chen, M.F., Ergodic donvergence rate of Markov processes- Eigenvalues, Inequalities and Ergodic Theory. Proceedings of ICM 2002, Vol.III,25-40. Beijing: Higher Education Press, 2002.

[7] Chen, M.F., Estimate of exponential convergence rate in total variation by spectral gap, Acta Math.sin.New Ser.(A),1998 41(1), 9-16.

[8] Chen, M.F., From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems, Singapore: World Scientific, 1992.

[9] Chung, K.L., Markov chains with stationary transition probabilities[J]. 2nd Springer-Verlag, Berlin,1967.

[10] Chung, K.L. and Fuchs W.H.J., On the distribution of values of sums of random variables, Mem.Amer.Math.Soc.,1951,6,1-12.

[11] Davis, J.L., Renewal theory from the point of view of the theory of probability, Tran.Amer.Math.Soc.,1948,63,422-438.

[12] Davis,M.H.A, Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of non-diffusion stochastic models, J.R. Statist. Soc.B. 1988, 46, 353-388.

[13] Doshi,B.,Queueing systems with vacation ---a survey , Queueing Systems,1(1986)29-66.

[14] Finch, P.D., On the distribution of gueue size in gueuing problem,Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,1959,10,327-336.

[15] Finch, P.D., On the busy period in the gueuing system GI/G/1， J. Aust. Math. Soc.,1961,2,217-228.

[16] Foster, F.G., On the stochastic matrices associated with certain queuing processes, Ann.Math.Statist., 1953,24,355-360.

[17] 侯振挺等, 生灭过程, 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000.

[18] 侯振挺等, 马尔可夫骨架过程-混杂系统模型, 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000.

[19] 侯振挺, 刘源远, 排队过程的马氏化及各种遍历性,待发表.

[20] 侯振挺, Q-过程的唯一性准则[M], 长沙：湖南科学技术出版社, 1982.

[21] 侯振挺, 邹捷中，张汉君等, 马尔可夫过程的 Q-矩阵问题[M], 长沙：湖南科学技术出版社，1994.

[22] Hou Zhenting, Markov skeleton processes and applications to queueing systems, Acta Mathematicae Applicatae Sinica,English Series, 2002, 18(4), 537-552.

[23] Hou Zhenting, Yuan Chenggui, Zou Jiezhong et al, Transient distribution of the length of GI/G/n queueing systems, Stochastic Analysis and Applications, 21(3), 2003,567-592.

[24] Hou, Z.T. and Li, X.H., Ergodicity of Quasi-birth and death processes(I) (II), submitted.

[25] Hou Z.T. Lin X. Wang Y.M., Ergodicity of the queue length L(t) of M/G/1 queueing system, submitted.

[26] Hou, Z.T. and Liu, Y.Y., Explicit Criteria for Several Types of Ergodicity of Markov Chains in M/G/1 Queue with vacations, submitted.

[27] Hou,Z.T. and Liu, Y.Y., Explicit Criteria for Several Types of Ergodicity of Markov Chains in Classical GI/G/n Queue, submitted.

[28] Hou, Z.T. and Li, X.H., Ergodicity of queue length L(t) of M/M/c queue systems with server vacations, submitted.

[29] Hou, Zhenting and Li,Min, GI/G/1 Queueing System.submitted

[30] Hou Zhenting,Wang yimin. Explicit Expression for Laplice Transformation of Transient Queue Length Distribution of GI/G/1 Queuing System,Systems Science and Information,2003(4).

[31] 侯振挺，郭先平，马尔可夫决策过程，长沙：湖南科学技术出版社，1997

[32] Hou, Z.T., Guo,Q.F., Time-homogeneous Markov processes with countable state space[M]. New York: Springer-Verlag,1988

[33] Hou, Zhenting, Liu Zaiming, Zou Jiezhong., QNQL Processes:(H,Q)- processes and their Applications, Chinese Science Bulletin, 1977, 42(11): 881-886.

[34] Hou, Zhenting, Liu Zaiming, Zou Jiezhong., Markov Skeleton Processes. Chinese Science Bulletin, 1998, 43(11): 881-889.

[35] 胡迪鹤, 可数状态的可尔可夫过程论[M], 武汉：武汉大学出版社，1983.

[36] 华兴[美], 排队论与随机服务系统，上海翻译出版公司，1987.

[37] 蒋放鸣，马尔可夫骨架过程及其应用:[博士学位论文].2004.

[38] 黄奇，马尔可夫骨架过程在可靠性理论中的应用:[博士学位论文].2004.

[39] Kendall, D.G., Some problems in the theory of queues, J. Roy. Statist. Soc., B,1951,13,151-185.

[40] Kendall, D.G., Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the methods of the imbedded Markov chain, Ann. Math. Statist .,1953,24,338-354.

[41] Levy,P., Semi-Markovian Processes,Proc:III Internat. Congr.Math. (Amsterdam), 1954,416-426

[42] 李民, 马尔可夫骨架过程与 GI/G/1 排队系统:[博士学位论文]. 长沙：中南大学，2002.

[43] Li, X.H. and Hou, Z.T., Ergodicity of markov chains of the GI/M/1 type and the application in queue system, submitted.

[44] Li, X.H. and Hou, Z.T., Ergodicity of PH/G/1 Queueing System, submitted.

[45] Li, X.H. and Hou, Z.T., Ergodicity of markov chains of the GI/M/1 type and the application in queue system, submitted.

[46] Li, X.H. and Hou, Z.T., Ergodicity of PH/G/1 Queueing System, submitted.

[47] Liu, Y.Y. and Hou, Z.T., Ergodicity of waiting time and queue length of M/G/1 queueing system with vacations, submitted.

[48] Liu, Y.Y. and Hou, Z.T., Ergodicity of waiting time and queue length of M/G/1 queueing system with vacations, submitted.

[49] Lindley D.V., The theory of gueues with a simgle server, Proc. Camb. Phil. Soc.,1951,48,227-289.

[50] 陆传赉, 排队论, 北京: 北京邮电学院出版社,1994.

[51] Mao,Y.H., Alebraic Convergence for Discrete-time Ergodic Markov Chains, Scientia Sinica, 2003, 33(2),152-160.

[52] Mao, Y.H., Algebraic Convergence for Dicrete-time Markov Chains, Scientia Sinica, submitted, 2002.

[53] Meyn, S.P. and Tweedie, R.L., Markov Chains and Stochastic Stability Springer-Verlag & Beijing World Publishing Corporation,1999.

[54] Neuts, M.F., Probability distributions of phase type, in Liber Amicorum Prof. Belgium Univ. Of Louvain,1975,173-206.

[55] Neuts, M., Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. Baltimore: The Johns Hopink University Press, 1981.

[56] Saaty, T.J., Time dependent solution of the many server Poisson queue, Operat. Res.,1951,13,151-185.

[57] Serfozo, R, Introduction to stochastic networks, Springer-Verlag, 1999.

[58] 盛友招，排队论及其在计算机通信中的应用，北京：北京邮电大学出版社，1998.

[59] 史定华，随机模型的密度演化方法 北京：科学出版社，1999.

[60] Tian,N. ,Zhang,D. and Cao C.,X., M/G/1 queue with controllable vacations and optimation of vacaction policy, **Acta Math. Appl**. Sinica,3(1999)363-373

[61] Takács, L., Delay distributions for simple trunk groups with recurrent input and exponential service times, Bell Syst.Tech.J.,1962,41,311-320.

[62] 田乃硕，拟生灭过程与矩阵几何解，北京：科学出版社,2002.

[63] 田乃硕，休假随机服务系统，北京：北京大学出版社,2001.

[64] 吴芳，GI/M/n 队列，应用数学学报,1961,11,295-305.

[65] 徐光辉，随机服务系统，北京：科学出版社,1988.

[66] 徐光辉，GI/M/n 的瞬时分布性质，应用数学学报，1965, 15, 91-120.

[67] 严加安，鞅与随机分析引论，上海：上海科技出版社,1981.

[68] 越明义，队列理论中的 M/M/s 问题，应用数学,1959,9,494-502.

[69] Zhang, H.J.et al, Strong ergodicity of monotone transition functions, Statistic & Probability Letters, 2001,55,63-69.

[70] 张汉君等，标准转移函数的多项式一致收敛,数学年刊,2000,21(3).351-356.

[71] 张福德，排队论及其程序设计，长春：吉林大学出版社，1986.

攻读学位期间主要的研究成果

1. 输入和服务均与系统状态相依的排队模型,中山大学学报(自然科学版),第 43 卷第 1 期,2004 年 1 月;

2. 马氏骨架过程与一个排队系统的瞬时队长,铁道科学与工程学报, 2004 年第二期.

3. GI/G/1 系统队长的极限分布,数学理论与应用,2005 第 2 期(待发表).

致 谢

本文是在我的导师侯振挺教授的悉心教诲和亲自指导下完成的。侯老师广博丰富的知识、精深独到的见解、循循善诱的教学方法、严谨的治学态度、踏实的学术作风和高尚的人格魅力对我产生了极大的影响，令我终身受益。在此，谨向我的导师侯振挺教授表示崇高的敬意和最衷心的感谢！

我也诚挚地感谢邹捷中教授、俞政教授等老师们在我攻读学位期间给予我的精心指导和教诲。

同时，我深深地感谢我的同事和朋友们，是他们的大力支持与关心，才使我能在紧张的工作之余顺利完成学业和论文。

衷心感谢所有授予我知识的老师们。感谢所有关心和帮助过我的领导、老师和朋友们。

你们的期望和重托，将激励我继续学习、不断进取。

谢谢你们！