

摘要

无网格伽辽金法 (EFGM) 是基于移动最小二乘法的一种用来求解偏微分方程非常有效的方法, 在处理诸如高度大变形、裂纹动态扩展等有限元法 (FEM) 较难解决的问题时有其独特的优势, 但是存在处理边界条件复杂, 计算量大的不足, 将无网格法同有限元耦合可以解决这些缺点, 极大的提高计算效率。

本文首先分析研究无网格方法、无网格同有限元耦合方法在国内外的历史 and 现状, 对 EFGM 法进行了较为深入的研究, 探讨了权函数中参数的选取对 EFGM 法精度的影响。针对最为常用的高斯型权函数, 有效地引入一个综合控制因子反映权函数的紧支性, 并经算例验证了控制因子的有效性。其次, 深入研究基于积分弱形式的 EFGM—FEM 耦合方法, 详细推导了刚度方程, 指出其理论推导中的不足, 并进行了修正。再次, 基于广义单元的概念, 提出 EFGM—FEM 直接耦合方法, 该方法不需要构造过渡区形函数, 也没有引入拉格朗日乘子, 实现简单, 计算量小, 算例证明其可以很好的保证精度, 具有较好的工程应用前景。最后, 将 EFGM—FEM 直接耦合方法同直接位移法结合计算了典型结构的应力强度因子, 并同手册解进行比较, 证明了方法的有效性及其正确性。

同时, 本文使用 APDL 语言编制了前处理程序, 使用 C++ 语言编制主体计算程序, 使用 Matlab 进行后处理, 并实现了三者之间的接口, 程序通用性好, 计算功能强, 为程序的软件化奠定了坚实的基础。

关键词: 无网格伽辽金法 综合控制因子 EFGM—FEM 耦合 EFGM—FEM 直接耦合法 直接位移法 应力强度因子

Abstract

Element-free Galerkin Method (EFGM) is a effective method for solving partial differential equations with the help of shape functions coming from moving least squares approximation. It is well-suited to problems involving large deformation and crack propagation etc on which Finite Element Method (FEM) can not be used easily. But EFGM is computationally expensive and it is hard to impose the essential boundary condition. Coupling the EFGM and FEM can fetch up the defect of EFGM and improve the efficiency highly.

At first, EFGM and kinds of methods used to couple EFGM and FEM are studied. In this part, the basis of EFGM, for example , weight function and parameters involving the precision of the method are studied. A coefficient used to control the relative weight and compact domain is proposed. Numerical examples show methods with the controlling coefficient can compute displacement field accurately and effectively. Then, Study on the EFGM-FEM Coupling Method Based on the weak forms of control equations is carried out. The mathematical and physical meanings of the coupled part are discussed. Then, a new method named EFGM-FEM Direct Coupling Method which is based on the concept of generalized element is brought forward. This method does not need construct a complicated transition shape function or involve additional computational cost like methods coupling EFGM and FEM with lagrange multiplier. Numerical studies show that the coupling method can get the displacement field correctly and efficiently which proved it is a potential method. At last, the EFGM-FEM Direct Coupling Method is used on the stress intensity factor analysis of classic structure and the computed results are compared with theory values which proved the direct coupling method is correct and effective.

The C++ language is used to make up the mainly computing part while APDL language is used in the preprocessing part and Matlab is in the postprocessing part. The connecting between these three parts is carried out too. All of these programming works establish a base of a generalized soft.

Key words: Element-free Galerkin Method Controlling coefficient EFGM-FEM Coupling
EFGM-FEM Direct Coupling Method Direct Displacement Method Stress Intensity Factor

第一章 绪论

1.1 选题意义

随着科学的进步, 计算力学的发展面临着许多难以处理的问题^[1,2], 例如:

(1) 高度大变形问题, 如冲压成型; (2) 动态裂纹扩展问题; (3) 内外边界奇异问题; (4) 高速撞击引起的几何畸变问题; (5) 高振荡, 陡梯度问题; (6) 自适应计算问题; (7) 相变问题等。对于这些问题, 传统的计算方法如有限元法、有限差分法等都难于应付, 其主要原因是网格的存在妨碍了处理与原始网格线不一致的不连续性和大变形。这些基于网格的计算方法, 在处理随时间变化的不连续性和大变形时, 常用的是网格重构。然而, 这样不仅计算费用较高且往往导致计算精度严重受损。于是, 无网格法应运而生, 由于采用基于点的近似, 网格可以彻底或部分地消除, 使得该种新方法具有较大的灵活性, 在处理常规方法不易解决的问题时可以完全抛开网格重构, 从而保证了计算精度。

在固体力学, 特别是在断裂力学领域, 无网格伽辽金法^[3,4,5] (EFGM) 最为流行。它是求解偏微分方程的一种非常有效的方法。由于没有单元的连续性问题, 可以在场函数梯度较大的区域方便的添加节点。这使得 EFGM 方法比有限元方法(FEM)更加灵活。在求解含裂纹的问题时, 可围绕裂尖分布任意密度的节点; 当裂纹长度变化时, 无须重新分布所有的节点, 只需改变在裂尖附近点的分布即可。但是, 两点限制了 EFGM 法的广泛应用。

一、参数选取方法不成熟。EFGM 法基于移动最小二乘法^[6] (MLSA)。在用 MLSA 获得节点形函数时, 需要事先确定一系列的基函数和权函数 (而不是像有限元那样通过单元内插值得到形函数), 在具体计算时, 影响域的确定, 权函数参数的确定等等都无成熟的方法, 已有的确定影响域半径和权函数参数的原则适应性较差。

二、计算量较大。在使用 MLSA 计算形函数时, 同 FEM 相比要多求一次逆。同时, 由于所使用的形函数并不满足严格的插值条件 $N_i(x_j) = \delta_{ij}$, 要精确地求

解所得的线性方程组，需要使用高阶的高斯积分；处理边界条件时也比较复杂。这些因素综合导致了完全使用 EFGM 方法所需的计算费用较大，在处理实际的工程问题时有很大的限制。

EFGM 和 FEM 相耦合 (EFGM-FEM 方法) 则可以很好的解决上述第二个问题。即只在关心的局部区域使用 EFGM 方法，而在其它区域使用 FEM 法。这种耦合可以极大地减少计算时间，简化边界条件的处理，充分利用 FEM 和 EFGM 二者的长处，具有更大的工程应用潜力。

总结以上论述可以看出，由于 EFGM-FEM 方法在解决不连续问题时所具有的独特优势，使之在疲劳断裂问题的分析研究方面，前景远大，这也是本选题的意义所在。

1.2 文献综述

1.2.1 无网格方法的研究历史及现状

无网格法最早发展于七十年代末，Lucy^[7]引入一种粒子方法称为光滑粒子动力学，简称 SPH，用来模拟天文物理现象。Gingold 和 Monaghan^[8]使用该种方法处理无边界的旋转星体和云团。Libersky 和 Petschek^[9]将该种方法扩展于固体力学领域。Swegle 等人^[10]发现了 SPH 方法不稳定的现象并给出一种解决方案。Jonhson 和 Beissel^[11]等人提出了一些改善应变计算的方法；Attaway et al^[12]通过一种接触算法将 SPH 方法和有限元耦合起来。

无网格法的另一分支起源于 Nayroles 等^[13]提出的离散单元法，简称 DEM，该方法使用基函数和权函数来构造基于节点的局部近似函数，即基于由 Lancaster 和 Salkauskas 提出的移动最小二乘近似，简称 MLSA 方法^[6]。Belytschko 等^[3]将 DEM 进行了发展，提出了无网格伽辽金法，简称 EFGM，该方法被证明是解决断裂和裂纹扩展等问题的一种非常有效的方法^[4-5]。Liu 等人^[14]提出了基于核函数的再生核质点法。核函数的形式与 SPH 的核函数相似，但包含了一修正函数，

用来增强协调性。Belytschko 等证明了修正的核函数近似同最小二乘近似一致。

第三种无网格法的思想基于单位分解法。这些方法包括 hp-云团法^[15]和有限单元的单位分解法 (PUFEM)^[16]。在 hp-云团法中, 构造了一种基于 MLSA 的单位分解方法。Melenk 和 Babuska 对该法进行了进一步的增强。其他无网格方法还有胞质点法 (PIC)^[17], 一般有限差分法^[18], 有限点法^[19], 自然单元法^[20], 小波伽辽金法^[21]等。

国内对无网格方法的研究始于 20 世纪 90 年代。1995 年, 清华大学的周维垣教授对无网格方法的基本理论进行了比较全面的阐述, 并首次将无网格方法应用于岩土工程力学问题中。

清华大学工程力学系的陆明万和张雄^[22,23,24]等于 1996 年开始研究无网格方法, 受国家自然科学基金资助, 取得了许多研究成果: (1) 以紧支函数作为试函数, 以加权残量法为离散方法, 建立了紧支函数加权残量法及最小二乘配点型无网格方法, 并在此基础上建立了加权最小二乘无网格方法。(2) 建立了基于子域法的无网格方法, 控制方程的残差在每个子域内予以消除 (3) 将其建立的无网格法应用于求解弹塑性问题、波动传播问题、对流—扩散方程等问题中, 显示了无网格法在求解某些特殊问题中的优势。

刘欣、朱德懋^[25,26]提出了求解节点影响域的四象限法则, 并对边界奇异性半解析无网格方法进行了初步探讨。

周瑞忠、周小平等^[27]研究了无网格方法的权函数问题, 提出了求解权函数影响域半径的自适应方法, 算例表明采用该方法在处理非均匀离散时有一定的优势。

庞作会等人^[28,29,30]在 1999 年第一次详细的介绍了无网格伽辽金法。庞作会^[37]在后续工作中又提出一种处理集中力边界的方法, 通过一个 Dirac 函数将集中力转换为分布力。

目前已有的主要无网格法小结如下:

名称	代表学者	近似方案	离散方案	背景网格
光滑质点流体动力学方法 (SPH)	Lucyt	核函数近似	配点法	无
离射单元法(DEM)	Nayrdes	移动最小二乘近似	Galerkin 法	有
无网格伽辽金法 (EFGM)	Belytschko	移动最小二乘近似	Galerkin 法	有
无网格局部伽辽金法(MLPGM)	Atluri	移动最小二乘近似	Petrov-Galerkin 法	无
有限点法(FPM)	Odate	移动最小二乘近似	配点法	无
再生核质点法 (RKPM)	Liu	核重构近似	Galerkin 方法	有
无网格配点法 (PCM)	Aluru	重构核近似	配点法	无
Hp 云团法 (Hp-clouds)	Oden	移动最小二乘近似	Galerkin 方法	有
单位分解法(PUM)	Babuska	单位分解近似	Galerkin 方法	有
紧支径向基函数无网格法	张雄等	紧支径向基函数近似	配点法	无

表 1.1 无网格法小结

1.2.2 耦合方法的研究现状

由于 EFGM 中通过最小二乘法得到形函数，FEM 中通过单元节点插值得到形函数，所以一般情况下，在二者的边界上，节点的位移并不匹配。EFGM 和 FEM 结合时需要考虑二者的交界如何处理的问题。近些年来，国际上主要发展了三种方法^[31-34]：一是由 Hegen 提出的，当节点的影响域和有限元中的单元一致时，由移动最小二乘法得出的形函数与有限元中的形函数相同，Hegen 将与

FEM 区域相邻的点的影响域取为有限元单元,称为虚单元,这些虚单元同 FEM 区的单元是相容的;二是同样由 Hegen 提出的,根据变分原理,引用拉格朗日乘子,使用拉格朗日插值处理 FEM 区同 EFGM 区的耦合边界;三是由 Belytschko 和 Organ 提出的,他们在交界区域引入一种过渡单元。这种过渡单元的形函数是由 FEM 和 EFGM 的形函数共同组成的,且具有线性的连续性。第一种方法实现起来最为方便,但却由于 EFGM 区与 FEM 区相邻的节点的影响域须取为有限元单元,影响域半径较小,由此得出的形函数及其导数出现较大振荡,给数值积分带来较大困难,降低了解的精确度。第二种方法 FEM 区域同 EFGM 区域的计算独立进行,编制程序较为方便,经证明也可得到较好的结果,但由于额外引入了拉格朗日乘子,增加了计算量。第三种方法引入过渡区域,在理论上保证了两个区域的形函数在公共边界上连续,但在计算前须确定过渡区的大小,构造过渡区域形函数(一般情况下,该函数形式较为复杂),给计算带来较大不便。

1.3 本文主要研究工作及创新点

本文的主要工作主要体现在以下几个方面:

一 EFGM 的基本原理的研究

1 研究 EFGM 法的基础,MLSA 方法,探讨基函数,权函数,影响域大小等对计算精度的影响,研究了影响域内节点数对 MLSA 方法拟合精度的影响;

2 研究 EFGM 方法的基函数、权函数、影响域的确定方法,根据矩阵可逆条件,找到适应性较好的参数选取方案。提出能够反映权函数紧支性的综合控制因子,并经算例验证了控制因子的有效性;

二 EFGM 与 FEM 耦合方法研究

1 深入研究了已有的 EFGM 与 FEM 耦合的各种方法,探讨这些方法的长处和不足;

2 对基于积分弱形式的耦合方法进行了详细推导,明确了耦合区域部分的数学、物理意义,发展了一种基于广义单元概念的 EFGM 同 FEM 耦合的新方法。

三 EFGM-FEM 法在断裂力学中的应用研究

1 研究如何使用 EFGM-FEM 法处理不连续问题、采用可视性准则确定节

点的影响域:

- 2 运用直接位移法求解典型结构裂尖的应力强度因子。

四 EFGM-FEM 法计算程序的编制

- 1 使用 c++语言自行编制了具有较好通用性的 EFGM-FEM 程序;
- 2 编制了初步的前处理, 后处理程序, 为程序的进一步完善奠定了基础。

本文的创新点主要体现在以下两个方面:

- 1 提出了能够反映权函数紧支性的综合控制因子, $\beta = \frac{d_m}{c}$;
- 2 发展了一种 EFGM 同 FEM 的耦合新方法—直接耦合法。

1.4 章节简介

第一章绪论。对无网格方法的起源及发展历史, 现阶段的主流方法进行了概述, 对无网格法的长处和不足进行分析, 指出了研究 EFGM 同 FEM 耦合方法的重要意义。

第二章基础理论介绍及研究。详细介绍了移动最小二乘法 (MLSA), EFGM 方法刚度方程的推导, 现有的 EFGM-FEM 耦合方法以及计算应力强度因子必需的理论。并研究了影响域内节点数对 MLSA 方法拟合精度的影响。

第三章基于积分弱形式的无网格-有限元耦合方法研究。指出了基于本构方程积分弱形式的耦合方法在理论推导中的不足, 对其进行了修正, 详细推导了刚度方程, 并使用一次, 二次和不连续算例验证了方法的正确性。

第四章无网格-有限元直接耦合方法。基于广义单元的概念提出一种新的耦合方法, EFGM-FEM 直接耦合法, 使用具体算例验证了其在耦合边界上的连续性, 证明新方法能够很好的保证精度, 且实现简单, 计算量小。

第五章 EFGM-FEM 直接耦合方法在断裂力学中的应用。将直接耦合方法应用于断裂力学领域, 同直接位移法相结合, 求解了典型结构的应力强度因子并同手册解进行比较, 证明了方法的正确性。

第二章 基础理论介绍及研究

2.1 移动最小二乘法

移动最小二乘法, 又称移动最小二乘近似 (Moving Least Square Approximation, 简称 MLSA), 最早由 Lancaster 和 Salkauskas 提出, 主要进行数据拟合; Nayroles 等人对其进行了发展, 把它用于散射单元法, 最后 Belytschko 将其用于更具应用前景的 EFGM 方法中。可以说 MLSA 方法是 EFGM 法的基础, 它的一些性质以及参数的确定对 EFGM 法有着重要的影响。

移动最小二乘法使用空间 Ω 上已知的一系列点 $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ 来拟合该空间上未知的函数 u , 近似的表示为:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p^T(x) a(x) \quad (2.1.1)$$

式中 $u^h(x)$ 表示函数 $u(x)$ 的近似值, $p_j(x)$ 称为基函数, m 为基函数中的项数, $a_j(x)$ 为相应的系数, 它是空间坐标 x 的函数, 与一般的最小二乘法的区别在于参数 $a(x)$ 也是 x 的函数, 体现了移动的概念。对二维域来说, 常用的基函数有

$$\text{线形基 } p^T(x) = [1, x, y]$$

$$\text{平方基 } p^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$$

式(2.1.1)中的系数矩阵 $a(x)$ 可通过使得范数 $J(x) = (Pa - \bar{u})^T W(x)(Pa - \bar{u})$

取极小值得到, 即使得对函数的局部近似误差最小, 其中

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad W(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(x-x_n) \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

由 $\frac{\partial J(x)}{\partial a(x)} = 0$ 得到

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)\bar{u} \quad (2.1.2)$$

其中 $A(x) = P^T W(x) P$, $B(x) = P^T W(x)$

可见, 在求解 $u(x)$ 的过程中引入了一个权函数矩阵。权函数 $w(x-x_i)$, $i=1,2,\dots,n$ 用来控制点 x_i 对点 x 影响的大小, $x_i, i=1,2,\dots,n$ 组成了 x 的影响域。 $w(x-x_i)$ 的数学意义对其性质提出了一定的要求, 稍后对其进行详细的讨论。

将 (2.1.2) 带入 (2.1.1) 中得到

$$u^h(x) = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) \bar{u} = \Phi(x) \bar{u} \quad (2.1.3)$$

其中 $\Phi(x) = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ 称为由移动最小二乘法得到的形函数, 其对空间变量的导数为

$$\begin{aligned} \Phi(x)_{,i} &= [p^T(x) A^{-1}(x) B(x)]_{,i} \\ &= p^T(x)_{,i} A^{-1}(x) B(x) + p^T(x) A^{-1}(x)_{,i} B(x) + p^T(x) A^{-1}(x) B(x)_{,i} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

式中 $A^{-1}(x)_{,i} = -A^{-1}(x) A(x)_{,i} A^{-1}(x)$, i 代表空间变量 x 。

2.1.1 基函数的选择

常用的基函数主要是多项式基函数, 如一次基, 二次基等。多项式基函数有计算简便, 适应性强的特点。实际上, 由泰勒展开知, 绝大多数函数都存在泰勒展开式, 这是多项式基能够较好的逼近各种函数的理论基础。

由 (2.1.3)、(2.1.4) 式看出, MLSA 拟合得到的近似解 $u^h(x)$ 及形函数 $\Phi(x)$ 的连续性与基函数 $p^T(x)$ 和权函数 $w(x)$ 的连续性有关, 如果基函数在域内有 k 阶连续导数, 权函数有 l 阶连续导数, 则 $u^h(x)$ 和 $\Phi(x)$ 有 $\min(k, l)$ 阶连续导数。所以在选取基函数时, 要考虑待解问题的连续性要求, 例如, 使用 EFGM 方法求解位移场时, 要得到连续的位移场, 采用一次基即可, 但要得到连续的应力场, 至少须取二次基。在固体力学领域, 基本的平衡方程中对空间坐标的导数不超过两次, 多数情形下二次基都可满足要求。

2.1.2 权函数的选择

由 MLSA 法的推导过程可以看出,影响拟合局部性的有两个因素,一是权函数本身的性质,二是影响域的大小。一般情况下,影响域的确定与权函数的确定是相结合的。权函数应遵循以下原则来选取:

- (1) 权函数在求解域内非负;
- (2) 在 x 的近处大远处小;
- (3) 同基函数共同保证矩阵 $A(x)$ 可逆。

要求 (1) 较易满足,要求 (2) 决定了权函数应是 x, x_i 之间距离 d 的函数,即 $w(x-x_i) = w_i(d)$, 其中 $d = \|x - x_i\|$ 为两点之间的距离。为了方便讨论权函数关于变量 x 的导数是否存在,将 $w_i(x)$ 写为 $w_i(x) = w_i(d^{2k})$, 且假设 $w_i(d^{2k})$ 关于 d 的 m 阶导数连续。 $w_i(d^{2k})$ 关于 x 的导数为如下形式:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = 2kd^{2k-1} \frac{\partial w_i}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial x} = 2k(x-x_i)d^{2k-2} \frac{\partial w_i}{\partial d} \quad (2.1.5)$$

$(x-x_i)/d$ 在 x 趋于 x_i 时极限不存在,因此只有在 $k \geq 1/2$ 时上面的导数才存在。

$w_i(d^{2k})$ 关于 x 的二阶导数为:

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 2k(2k-2)(x-x_i)^2 d^{2k-4} \frac{\partial w_i}{\partial d} + 2kd^{2k-2} \frac{\partial w_i}{\partial d} + 4k^2(x-x_i)^2 d^{4k-4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial d^2} \quad (2.1.6)$$

可以看出,二阶导数存在要求 $k \geq 1$ 。通过求解 $w_i(d^{2k})$ 对 x 的 n 阶导数,总结出如下规律:

- (1) 如果 k 为正整数,则权函数对 x 的 m 阶导数存在;
- (2) 如果 k 非整数,但 $k > n/2$,则权函数对 x 的 n 阶导数存在。

k 的确定与所求解的微分方程中对 x 求导的最高次数有关。在满足以上宏观上的要求后,权函数的选择有一定的任意性。常用的权函数有高斯型权函数,圆锥形权函数,样条函数等,下面对这些权函数进行简单的介绍。

高斯型权函数的形式为

$$w(d_I) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_I}{c}\right)^{2k}} - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^{2k}}}{1 - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^{2k}}} & , d_I < d_m \\ 0 & , d_I > d_m \end{cases} \quad (2.1.7)$$

式中 d_I 是 x 与 x_I 的距离, $d_I = \|x - x_I\|$; d_m 是 x 的影响域半径; c 是控制权函数相对权重的参数, $k=1$ 时高斯型权函数的形状如图 2.1 所示。

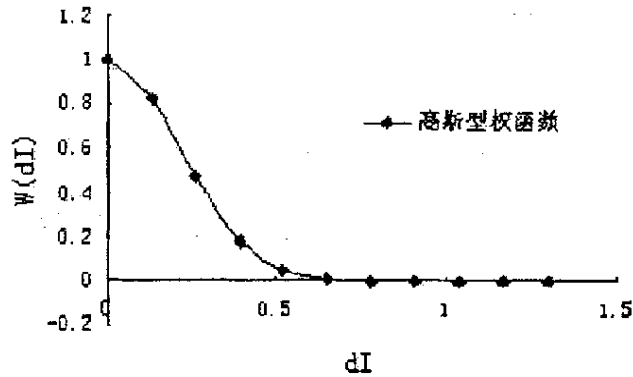


图 2.1 高斯型权函数的形状

圆锥型权函数的形式为

$$w_I(d_I^{2k}) = \begin{cases} 1 - (d_I/d_{m_I})^{2k} & , d_I \leq d_{m_I} \\ 0 & , d_I > d_{m_I} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

式中 d_I 是 x 与 x_I 的距离, $d_I = \|x - x_I\|$; d_{m_I} 是节点 I 的影响域半径; 当 $k=1$ 时, 圆锥型权函数的形状如图 2.2 所示。

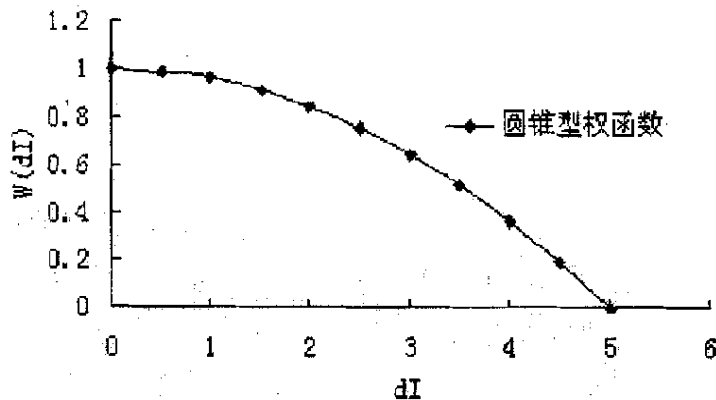


图 2.2 圆锥型权函数的形状

三次样条权函数的形式为

$$w(\bar{d}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq 1/2 \\ 4/3 - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - 4\bar{d}^3/3 & 1/2 < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (2.1.9)$$

式中 $\bar{d} = d/d_{\max}$, $d = \|x - x_i\|$, 其中 d_{\max} 是节点影响域的半径。三次样条权函数的形状如图 2.3 所示。

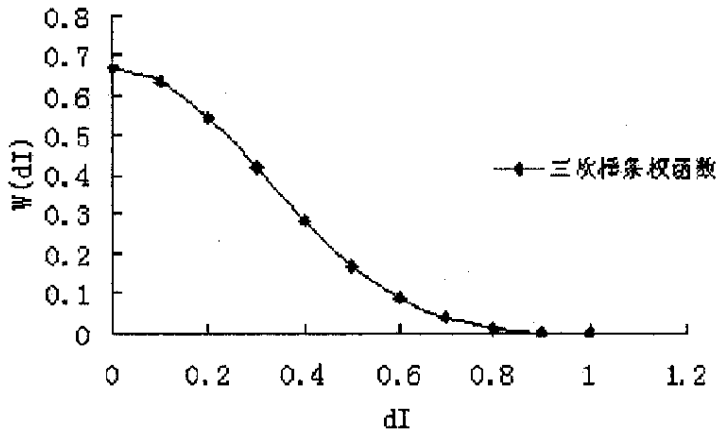


图 2.3 三次样条权函数的形状

2.1.3 影响域的确定

影响域的确定对 MLSA 的计算精度有很大影响, 如果影响域取得太大, 局部近似就很不明显, 计算精度下降; 如果影响域取得太小, 又很容易导致 $A(x)$ 不可逆或者形函数的导数在节点附近有较大波动, 不利于 EFGM 法中刚度方程的积分计算^[34]。理论上影响域可以为任意形状, 常用的有圆形域和矩形域两种。2.1.2 节中介绍的权函数的影响域都为圆形域, 需要先确定影响域半径 d_m 且权函数只与计算点距节点的广义距离 $\|x - x_i\|$ 有关。文献[35]提出一种矩形的影响域:

$$w(x - x_i) = w(r_x) \cdot w(r_y)$$

其中 $r_x = \frac{|x - x_i|}{d_{mx}}$, $r_y = \frac{|y - y_i|}{d_{my}}$, d_{mx}, d_{my} 分别为计算点 x 方向和 y 方向的影响域

半径。采用矩形影响域的优点是可以将积分网格同计算点的影响域方便的联系起

来,有利于提高积分的精度,但也存在实现复杂的缺点,本文采用圆形域。

具体的计算影响域的方法有如下几种:

(1) 四象限法则

四象限法则是一种求解计算点影响域比较好的方法,方便而实用,对于不增加计算时间而保证计算精度是很重要的。该方法由刘欣、朱德懋,陆明万^[26]等人提出。其基本思想是:

1) 总节点数 N 循环;

2) 对每个节点,以此节点为原点建立局部坐标系,确定各象限与该点距离最近的点,其自动计算得到的四个象限内的距离分别为 $h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}$, 确定 $h_i = \max\{h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}\}$ 。为保证求解能正常进行,当采用线性基时,要求节点影响域内至少包含不成一线的三个节点;当采用二次基时,要求节点影响域内至少包含不成一线的六个节点;

3) 循环结束;

4) 每个 h_i 乘以一个系数 α_c , 节点的影响域半径 $d_m = \alpha_c h_i$ 一般取 $\alpha_c = 1.2 \sim 1.5$ 。

通过对比任一节点 I 和计算点 Q 之间的距离 d_{IQ} 与该节点影响域半径 d_m 的大小,来确定该节点是否属于计算点的影响域。该方法在处理节点密度变化较大的区域会出现“舍近求远”的现象问题。

(2) 多参数法

引入描述特征长度的参数 c_i 和影响域半径放大因子 d_{\max} 。计算点的影响域半径定义为 $d_m = d_{\max} c_i$ 。特征长度 c_i 须保证影响域内的点可以确保(2.1.2)式中的矩阵 $A(x)$ 在计算点处可逆。该方法引入较多的参数,增加了方法的灵活性,但实现起来较为复杂,如 d_{\max} 的取法, c_i 的取法无一定的确定规则等。在进行计算时,需先得到计算点的影响域半径,然后根据计算点距邻近节点的距离确定节点对该计算点是否有影响。

(3) 自适应方法

所谓自适应影响域半径,就是在求解某一高斯点 P 的影响域半径时,人为指定其影响域内应包含一定数量的节点 Q_i ,然后将 P 与 Q_i 之间的最大距离作为节点 P 的影响域半径。在文献[27]中根据经验建议计算采用线性基、二次基和三次基时,节点影响域内的节点数分别为15、25和30。使用由节点数确定的自适应影响域半径,对于节点分布的疏密随意性或局部加密都具有较强的适应能力,且取得了较好的计算结果。

与前两种方法相比,自适应方法实现起来较为简单,但根据经验得到的影响域内的节点数无理论依据,在很多情况下计算结果并不理想。实际上,节点的密度,分布形式,权函数的形式对影响域内应取的节点数都有所影响,本文通过对 $A(x)$ 可逆性的分析,给出了影响域内的合适点数。

2.1.4 MLSA 的两个特点

(1) 基函数中的任何函数都可以通过 MLSA 方法近似再生。

考虑某个函数 $u(x) = \sum_i \alpha_i p_i(x)$,取 $p_i(x)$ 作为基函数,采用 MLSA 进行拟合,

令 $a(x) = \alpha_i$,则 $J = 0$ 取得最小值,近似函数

$$u^h(x) = \sum_i p_i(x) a_i(x) = \sum_i \alpha_i p_i(x) = u(x)$$

具体推导以多项式基为例,即采用多项式基时可以重生多项式函数。设 $u(x)$ 为域 Ω 内的真实函数, $u^h(x)$ 为由移动最小二乘法得到得近似函数, $u^h(x) = p^T(x)a(x)$,其中 $p(x)$ 为 m 阶的多项式基。如果 $u(x)$ 为小于或者等于 m 阶的多项式函数,则 $u^h(x) = u(x)$ 。

拟合节点的函数值 $u_l = p_0^T(x_l)\beta$, $p_0(x)$ 的阶数为 $l, l \leq m$ 。则 $p(x)^T$ 可写为:

$p(x)^T = (p_0^T(x), x^{l+1}, \dots, x^m)$; $u^h(x)$ 表达式中的 $a(x)$ 是通过加权余量

$R = \sum_{l=1}^n w(x-x_l)(p^T(x_l)a(x) - u_l)^2$ 求最小值得到,很明显当 $a(x)^T = (\beta^T, 0, \dots, 0)$

时, R 取得最小值零。于是

$$u(x) = p_0^T(x)\beta = p(x)^T a \quad (2.1.10)$$

$$\bar{u} = Pa \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned} u^h(x) &= p^T(x)A^{-1}(x)B(x)\bar{u} = p^T(x)A^{-1}(x)B(x)Pa = p^T(x)A^{-1}(x)P^TW(x)Pa \\ &= p^T(x)A^{-1}(x)A(x)a = p^T(x)a = u(x) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

(2) 不具备插值函数的性质, 近似函数不通过节点变量, 即 $\phi_j(x_j) \neq \delta_{jj}$ 。

这个特点使得基于 MLSA 的无网格方法在引入基本边界条件时比较困难。

2.1.5 矩阵 $A(x)$ 的可逆性

MLSA 能否很好的定义, 即能不能得到形函数取决于求解系数 $a(x)$ 时, 矩阵 $A(x)$ 是否可逆。可以从 $A(x)$ 的构成来讨论影响 $A(x)$ 可逆性的因素及解决办法, 由式 (2.1.2), 有

$$A(x) = P^TW(x)P$$

可以看出, $A(x)$ 是否可逆, 与基函数矩阵 P , 权函数矩阵 W 有关。文献[34]指出了 $A(x)$ 可逆的两个必要条件: 基函数矩阵 P 的秩为基函数的项数 m ; 影响域内至少有 m 个点, 使权函数矩阵中有 m 项不为零。

2.1.6 函数逼近问题的研究

如前所述, MLSA 方法是 EFGM 法的基础, 它的性质及参数对 EFGM 法有着重要的影响。为此, 本节就此问题进行深入研究, 讨论了影响域内节点数对拟合精度的影响。

采用高斯型权函数, 自适应法获得计算点影响域半径 d_m , 令权函数中另一参数 $c = 0.2d_m$ 。

取简单算例分析, 将函数 $f(x) = \sin(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 内离散为均匀的 11 个

节点(间距为 $\pi/5$),使用 MLSA 方法,二次基对该函数进行逼近。图 2.4 给出影响域内节点数不同(分别为 5、8、9、10)时的计算误差。

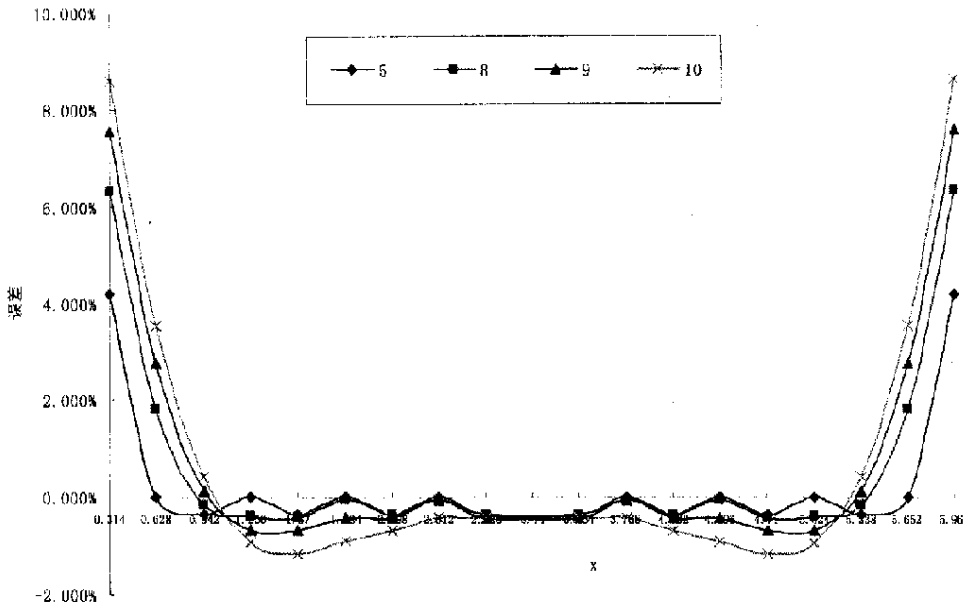


图 2.4 MLS 拟合 $\sin(x)$ 时的误差

由图 2.4 可以看出以下四点:

(1) 除拟合区间的始点及终点外,在其余区域,MLSA 方法可以达到较高的精度。

(2) 在保证 $A(x)$ 可逆的情况下,MLSA 方法拟合的精度随影响域内节点数的增加而降低。这是因为采用自适应法确定计算点得影响域时,影响域半径随着影响域内节点数地增加而增加,导致拟合的局部性下降,精度下降。

(3) 在拟合的起点和终点,拟合精度急剧下降。该处影响域内的节点只能处于计算点的一侧,实际上降低了拟合的局部性,导致精度下降。

(4) 在影响域较小的情况下,在拟合节点处 MLSA 方法与 $\sin(x)$ 的函数值(图 2.4 中误差接近零的点)相似,即得到的形函数通过进行拟合的节点。但当影响域增大时,此种性质消失。

2.2 EFGM 方法

考虑弹性力学问题中的二维边值问题

$$\nabla^2 u - f = 0 \quad \text{在域 } V \text{ 内} \quad (2.2.1a)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{在边界 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (2.2.1b)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{在边界 } \Gamma_t \text{ 上} \quad (2.2.1c)$$

式中 $u(x)$ 为待求的场函数, f 为不含 u 的已知项, \bar{u} 为在边界 Γ_u 上已知的 u 值, n 为外法线, \bar{t} 为在边界 Γ_t 上已知 t 的值。目标是寻找满足基本方程和边界条件的解 $u(x)$ 。

在 $u(x)$ 满足位移边界条件的前提下, 方程 (2.2.1) 的伽辽金积分等效形式为

$$\int_{\Omega} (\delta u)^T (\nabla \sigma + b) d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T (\sigma \cdot n - \bar{t}) d\Gamma = 0 \quad (2.2.2)$$

将 (2.2.2) 式展开如下:

$$\int_{\Omega} (\delta u)^T \nabla \sigma d\Omega + \int_{\Omega} (\delta u)^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \sigma \cdot n d\Gamma + \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (2.2.3)$$

将 (2.2.3) 式中的第一项进行分部积分, 并考虑到试函数满足位移边界条件, 于是可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\delta u)^T \nabla \sigma d\Omega &= \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \sigma \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^T \sigma d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \sigma \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^T \sigma d\Omega \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

将 (2.2.4) 式代入 (2.2.3) 式可得

$$\int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \sigma \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} (\delta u)^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \sigma \cdot n d\Gamma + \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (2.2.5)$$

即

$$- \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} (\delta u)^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (2.2.6)$$

于是可以构造出弹性力学二维边值问题的自然变分原理:

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} u^T \bar{t} d\Gamma \quad (2.2.7)$$

当 $u(x)$ 不满足位移边界条件时, 通过拉格朗日乘子法将位移边界条件引入, 可以构造出约束变分原理的能量泛函:

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \Pi - \int_{\Gamma} \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma} \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

上式中

$$u = \Phi \hat{u} \quad (2.2.9)$$

$$\lambda = N \hat{\lambda} \quad (2.2.10)$$

$$\sigma = D\varepsilon = DB\hat{u} \quad (2.2.11)$$

其中 Φ 为由移动最小二乘近似产生的形函数、 N 为位移边界上拉格朗日插值函数, $B = \Phi_{,j}$ 。

将式(2.2.9)~(2.2.11)代入式(2.2.8)中可得

$$\Pi^* = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \hat{u}^T B^T DB \hat{u} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{u}^T \Phi^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{u}^T \Phi^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{\lambda}^T N^T (\Phi \hat{u} - \bar{u}) d\Gamma \quad (2.2.12)$$

u 、 λ 、 σ 的变分为

$$\delta u = \Phi \delta \hat{u} \quad (2.2.13)$$

$$\delta \lambda = N \delta \hat{\lambda} \quad (2.2.14)$$

$$\delta \varepsilon = B \delta \hat{u} \quad (2.2.15)$$

对式(2.2.12)求变分, 将式(2.2.13)~(2.2.15)代入, 可得

$$\begin{aligned}\delta \Pi^* &= \delta \hat{u}^T \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \cdot \hat{u} - \delta \hat{u}^T \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega - \delta \hat{u}^T \int_{\Gamma} \Phi^T \bar{t} d\Gamma \\ &\quad - \delta \hat{\lambda}^T \int_{\Gamma} N^T (\Phi \hat{u} - \bar{u}) d\Gamma - \delta \hat{u}^T \int_{\Gamma} \Phi^T N d\Gamma \cdot \hat{\lambda}\end{aligned}\quad (2.2.16)$$

令 $\delta \Pi^* = 0$, 则可得到如下方程组

$$\int_{\Omega} B^T DB d\Omega \cdot \hat{u} - \int_{\Gamma} \Phi^T N d\Gamma \cdot \hat{\lambda} = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (2.2.17)$$

$$\int_{\Gamma} N^T \Phi d\Gamma \cdot \hat{u} = \int_{\Gamma} N^T \bar{u} d\Gamma \quad (2.2.18)$$

整理可得

$$K\hat{u} + G\hat{\lambda} = f_I \quad (2.2.19)$$

$$G^T \hat{u} = q \quad (2.2.20)$$

即

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_l \\ q \end{Bmatrix} \quad (2.2.21)$$

其中

$$K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \quad (2.2.22)$$

$$G = - \int_{\Gamma} \Phi^T N d\Gamma \quad (2.2.23)$$

$$f_l = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (2.2.24)$$

$$q = - \int_{\Gamma} N^T \bar{u} d\Gamma \quad (2.2.25)$$

由于最小二乘法得到的形函数不具备插值函数的性质, EFGM 法在处理位移边界条件时并不能像有限元那样使用置大数、删行删列等方法, 常用的有有限元耦合合法, 拉格朗日乘子法, 罚函数法等。下面简单介绍拉格乘子法的具体实现过程, 主要是式(2.2.23)和式(2.2.25)的计算

$$G = - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & 0 \\ 0 & \varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x) & 0 \\ 0 & \varphi_n(x) \end{bmatrix} L^T \begin{bmatrix} N_1(s) & 0 & \cdots & N_k(s) & 0 \\ 0 & N_1(s) & \cdots & 0 & N_k(s) \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$= - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \varphi_1 N_1 \cos \alpha & -\varphi_1 N_1 \sin \alpha & \cdots & \varphi_1 N_k \cos \alpha & -\varphi_1 N_k \sin \alpha \\ \varphi_1 N_1 \sin \alpha & \varphi_1 N_1 \cos \alpha & \cdots & \varphi_1 N_k \sin \alpha & \varphi_1 N_k \cos \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n N_1 \cos \alpha & -\varphi_n N_1 \sin \alpha & \cdots & \varphi_n N_k \cos \alpha & -\varphi_n N_k \sin \alpha \\ \varphi_n N_1 \sin \alpha & \varphi_n N_1 \cos \alpha & \cdots & \varphi_n N_k \sin \alpha & \varphi_n N_k \cos \alpha \end{bmatrix} d\Gamma \quad (2.2.26)$$

$$q_x = - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1(s) & 0 \\ 0 & N_1(s) \\ \vdots & \vdots \\ N_k(s) & 0 \\ 0 & N_k(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_l \\ \bar{u}_n \end{Bmatrix} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 \bar{u}_l \\ N_1 \bar{u}_n \\ \vdots \\ N_k \bar{u}_l \\ N_k \bar{u}_n \end{bmatrix} d\Gamma \quad (2.2.27)$$

其中 $L = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ 称为转换矩阵, $N_i(s)$ 为位移边界上拉格朗日插值函数。

由公式推导过程可见, EFGM 的形函数通过 MLSA 方法拟合得到, 其导数是连续的, 因此 EFGM 法计算得到的应力是连续的 (如图 2.5 所示), 无需进行应力磨

平之类的处理。

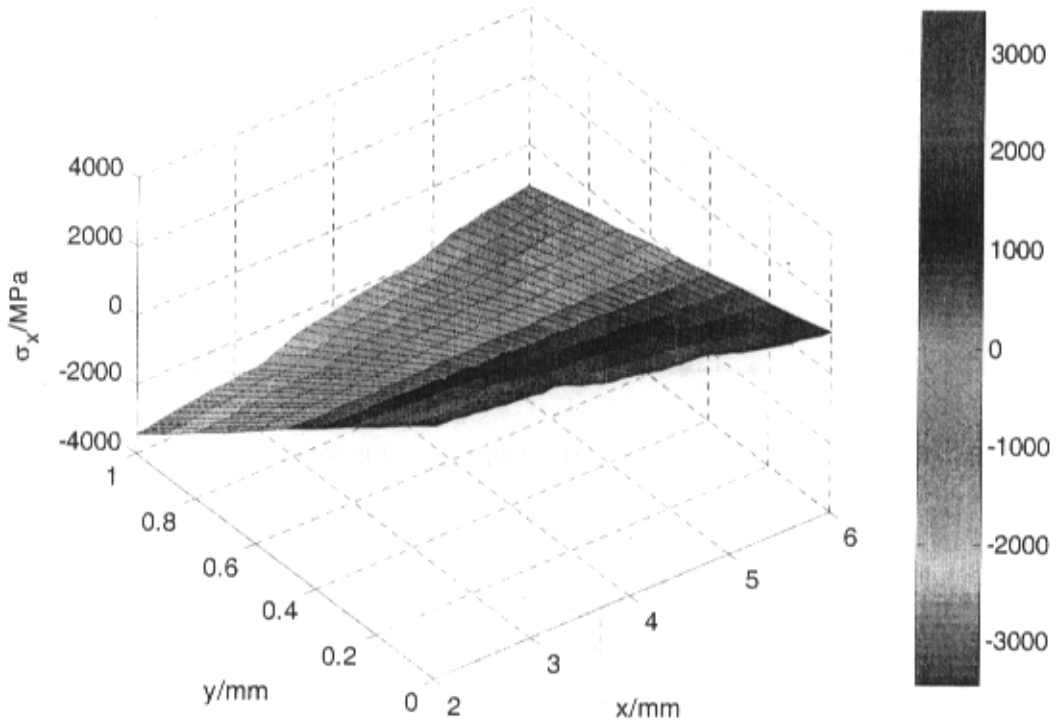


图 2.5 悬臂梁的 y 向应力

2.3 EFGM-FEM 耦合方法介绍

使用有限元法处理无网格边界是耦合两种方法的基础，现有的耦合方法主要有列三种。

第一种是由Hegen提出的，其基本思想是：当EFGM区（图2.6中的 Ω_1 ）中节点的影响域和由这些节点对应的有限元单元一致时，由最小二乘法得出的形函数与有限元得出的形函数相同，Hegen将与FEM区域（图2.6中的 Ω_2 ）相邻的节点的影响域取为对应的有限元单元，称为虚单元，这些虚单元同FEM区的单元在耦合边界上是协调的。该方法简单易行，但由于需要将部分EFGM区的节点的影响域控制在对应的虚单元内，导致影响域过小，给数值积分带来较大困难，计算精度较低。图2.7为一维情况下，EFGM形函数随节点影响域的变化，可以看出，在部分区域，当节点影响域 r_i 较小时，形函数的导数显示出高度的非线性性质，这使得刚度方程中的积分项很难精确获得，文献[34]中验证了这一点。

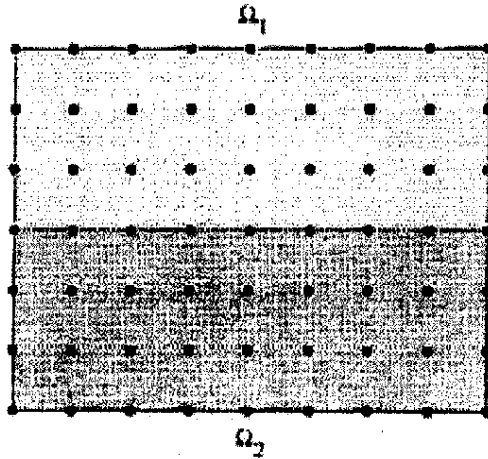
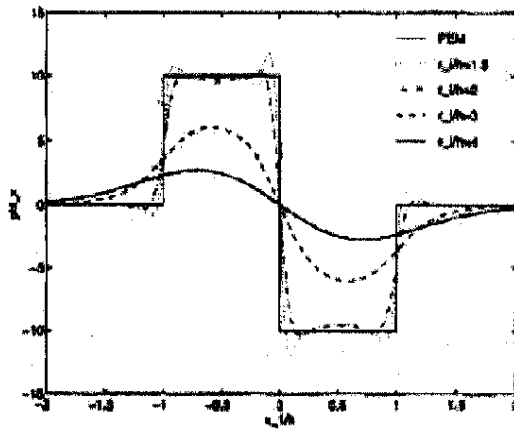


图2.6 使用FEM和EFGM的高散图

图2.7 形函数导数 ϕ_x 随节点影响域大小的变化

二是同样由Hgen提出的, 根据变分原理, 引用拉格朗日乘子, 使用拉格朗日插值处理FEM区同EFGM区的边界, 在第三章中进行详细讨论。

三是由Belytschko和Organ提出的^[33,36], 他们在交界区域引入过渡单元, 如图2.8虚线部分。过渡单元的形函数是由FEM和EFGM的形函数共同组成的, 且具有线性的连续性。过渡单元的近似函数为

$$u = u^{FE} + R(\mathbf{x}) [u^{EFG}(\mathbf{x}) - u^{FE}(\mathbf{x})] \quad (2.3.1)$$

其中

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{I \in \Omega_1 \\ \xi_I \geq \xi_n}} N_I(\mathbf{x}) \quad (2.3.2)$$

由近似函数,可以得到过渡元素的形函数

$$\tilde{N}_i(\mathbf{x}) = [1 - R(\mathbf{x})]N_i(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})\Phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.3.3)$$

其中 $\tilde{N}_i(\mathbf{x})$ 是FEM形函数, $\Phi_i(\mathbf{x})$ 是EFGM的形函数。而过渡元素形函数的导数为

$$\tilde{N}_{i,j} = -R_{,j}N_i + [1 - R]N_{i,j} + R_{,j}\Phi_i + R\Phi_{i,j} \quad (2.3.4)$$

其中

$$R_{,j} = \frac{\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{\infty}} N_{\gamma,j}}{\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{\infty}} N_{\gamma}} \quad (2.3.5)$$

于是,整个离散域的位移近似函数可以表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum \tilde{N}_i(\mathbf{x}) u_i \quad (2.3.6)$$

其中 $\tilde{N}_i(\mathbf{x})$ 是形函数, $\tilde{N}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} N_i(\mathbf{x}), x \in \text{FEM区} \\ \Phi_i(\mathbf{x}), x \in \text{EFGM区} \\ \tilde{N}_i(\mathbf{x}), x \in \text{过渡区} \end{cases}$

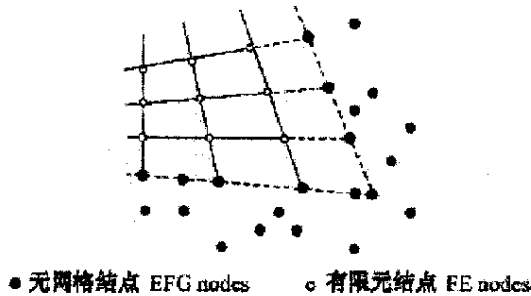


图2.8 耦合方法三的示意图

该方法引入过渡区域,在理论上保证了两个区域的形函数在公共边界上连续,但在计算前须确定过渡区的大小,构造复杂的过渡区域形函数,给计算带来较大不便。

2.4 裂尖应力强度因子的计算

2.4.1 处理不连续问题的可视性准则

本文使用可视性法则处理由裂纹引起的不连续,下面对该法则进行介绍。

在可视性准则中,当构造权函数时,物体的边界和内部不连续线都被看成是不透明的界面。在考虑权函数的影响域时,把某点 I 到节点 B 的连线看作光线,如果这光线碰到不可穿透的界面,则该光线中止, B 点不包括在影响域内。参看图2.9, DA 为一条裂纹,位移不连续线中止于裂纹顶点 A ,一般节点 I 和 J 的影响域如图所示,阴影区要从点的影响域中去掉。

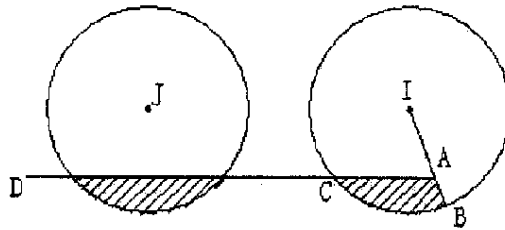


图 2.9 节点 I 和节点 J 的影响域

采用可视性准则的不足之处在于,可能在权函数和形函数中引入了不真实的间断性。例如图中的节点 J ,其权函数与形函数在真实的不连续线 DA 处具有不连续性,代表了期望的间断性;然而对于位于不连续尖端附近的点 I 而言,这种准则产生的间断性就不太合理,因为在 AB 也将间断。这种不连续性依赖于裂纹尖端节点的细化程度,以及计算点影响域半径的大小。当节点间距趋于零时,不连续性将消失。三、四章的算例证明当裂尖附近节点细化到一定程度时,由可视性准则导致的不连续性可以忽略不计(如图2.10所示)。

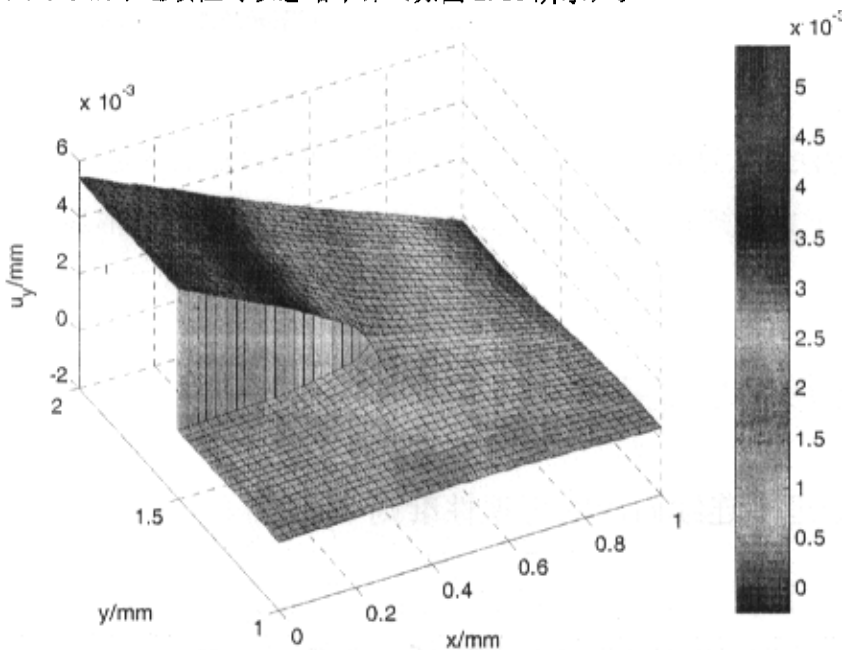


图 2.10 裂尖附近区域的 y 向位移

可视性准则在保证精度的条件下, 实现起来较为简便, 且能够容易的推广于三维情形, 所以本文中涉及到的由裂纹引起的不连续性问题皆采用可视性准则处理。

2.4.2 直接位移法

直接位移法是计算应力强度因子的一种重要方法。根据数值方法可以求解结构在裂纹尖端附近的位移场, 也可以根据线弹性力学求出其位移场, 其中包括所求的应力强度因子在内, 将数值计算的位移解与线弹性力学的位移解进行比较, 就可以求出结构的应力强度因子。

由线弹性力学方法, I 型裂纹尖端的位移场为^[39]:

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \frac{K_I}{E} (1+\mu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \left(k-1+2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(k+1-2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

$$\text{式中: } k = \begin{cases} \frac{3-\mu}{1+\mu} (\text{平面应力}) \\ 3-4\mu (\text{平面应变}) \end{cases}$$

r, θ 为极坐标, 坐标系规定如图 2.11。

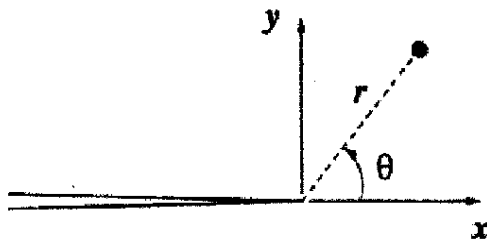


图 2.11 原点在裂尖的极坐标系

在裂纹面上 $\theta = \pi$, 代入式 (2.4.1) 第二式得:

$$v = \frac{K_I}{E} (1+\mu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) \quad (2.4.2)$$

在裂纹面上选择 N 个不重复的节点, 其垂直于裂纹面的数值解为 V_i , 径向坐

标为 $r_i (i = 1, 2, \sim N)$, 则代入(2.4.2)式得到不同节点处的 K_{ij} 为:

$$K_{ij} = \frac{V_i E}{(1 + \mu)(k + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} \quad (i = 1, 2, \sim N) \quad (2.4.3)$$

作出 $K_{ij} - r_i$ 曲线, 利用外推法, 求出 $r = 0$ 处即裂纹尖端处的应力强度因子 K_I 。利用外推法求 K_I 时, 为了使误差较小, 使用最小二乘法处理数据。

在 $K_{ij} - r_i$ 曲线中, 设其曲线方程为:

$$K_{ij} = Ar + B \quad (2.4.4)$$

式中: A 、 B 为待定常数。根据最小二乘法:

$$A = \frac{\sum r_i K_{ij} - \bar{K}_I \sum r_i}{\sum r_i^2 - \bar{r} \sum r_i}, \quad B = \bar{K}_I - A \bar{r} \quad (2.4.5)$$

式中

r_i —— 有张口位移的节点到裂尖的极径;

K_{ij} —— 对应于 r_i 的应力强度因子;

$$\bar{r} \text{ —— } \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n};$$

$$\bar{K}_I \text{ —— } \bar{K}_I = \frac{\sum_{i=1}^n K_{ij}}{n};$$

\bar{r} —— 用最小二乘法所求的点的极径;

\bar{K}_I —— 用最小二乘法所要求的点的应力强度因子。

根据式(2.4.5)求出系数 B 即为所求的含裂结构的裂尖应力强度因子, 从而求出其无量纲的应力强度因子。

第三章 基于积分弱形式的 无网格—有限元耦合方法研究

本章根据 D. Hegen^[34] 提出的积分弱形式, 用变分法将 FEM 同 EFGM 进行耦合, 指出 D. Hegen 理论推导过程中的不足, 进一步明确了处理耦合区域部分的数学、物理意义, 有效地引入一个综合控制因子反映权函数的紧支性, 并使用算例验证了方法及计算程序的正确性和控制因子的有效性。

3.1 耦合方法公式推导

3.1.1 刚度方程

将整个求解域 Ω 离散为 FEM 部分 Ω_1 与 EFGM 部分 Ω_2 , 满足 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ 。文献[34]给出了变分后 Ω_1 、 Ω_2 上平衡方程的积分弱形式。

$$\int_{\Omega_1} \delta u_{(i,j)}^1 \sigma_{ij}^1 d\Omega - \int_{\Omega_1} \delta u_i^1 b_i d\Omega - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \delta u_i^1 \bar{t}_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_1} \delta \lambda_i^1 (u_i^1 - u_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_1} \delta u_i^1 \lambda_i^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \delta \lambda_i u_i^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \delta u_i^1 \lambda_i d\Gamma = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\int_{\Omega_2} \delta u_{(i,j)}^2 \sigma_{ij}^2 d\Omega - \int_{\Omega_2} \delta u_i^2 b_i d\Omega - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \delta u_i^2 \bar{t}_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_1} \delta \lambda_i^2 (u_i^2 - u_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_1} \delta u_i^2 \lambda_i^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \delta \lambda_i u_i^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \delta u_i^2 \lambda_i d\Gamma = 0 \quad (3.1.2)$$

反推其对应的变分原理为:

$$\Pi_1^* = \Pi_1 - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_1} \lambda_1^T (u_1 - \bar{u}_1) d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \lambda^T u_1 d\Gamma \quad (3.1.3)$$

$$\Pi_2^* = \Pi_2 - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \lambda_2^T (u_2 - \bar{u}_2) d\Gamma + \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \lambda^T u_2 d\Gamma \quad (3.1.4)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \varepsilon_1^T \sigma_1 d\Omega - \int_{\Omega_1} u_1^T b_1 d\Omega - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_1} u_1^T \bar{t}_1 d\Gamma \quad (3.1.5)$$

$$\Pi_2 = \int_{\Omega_2} \frac{1}{2} \varepsilon_2^T \sigma_2 d\Omega - \int_{\Omega_2} u_2^T b_2 d\Omega - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} u_2^T \bar{t}_2 d\Gamma \quad (3.1.6)$$

Γ_1, Γ_2 为 Ω_1, Ω_2 的边界, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 为处理位移边界条件时引入的拉格朗日乘子, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 为 EFGM 同 FEM 的公共边界。式(3.1.3)、(3.1.4)的最后一项, 并不

是拉格朗日乘子法的形式, 无法保证在边界 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 上位移相等。

基于广义变分原理, 将耦合部分看作内部边界条件, 如下式所示

$$\Pi^* = \Pi_1 + \Pi_2 - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \lambda_1^T (u_1 - \bar{u}_1) d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \lambda_2^T (u_2 - \bar{u}_2) d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \lambda^T (u_1 - u_2) d\Gamma \quad (3.1.7)$$

即使用拉格朗日乘法强制场函数 u_1, u_2 在公共边界 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 上满足 $u_1 = u_2$, λ 的物理意义是节点上的应力集度。显然, 式 (3.1.7) 的数学、物理意义比式 (3.1.1)、(3.1.2) 更为清晰。

$$\text{令 } \delta \Pi^* = 0 \quad (3.1.8)$$

将 u_1, u_2 分别用 FEM 形函数, EFGM 形函数离散化, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 用拉格朗日插值离散化, 得到

$$u_1 = \Phi_1 \hat{u}_1 \quad (3.1.9)$$

$$u_2 = \Phi_2 \hat{u}_2 \quad (3.1.10)$$

$$\lambda_1 = N_1 \hat{\lambda}_1 \quad (3.1.11)$$

$$\lambda_2 = N_2 \hat{\lambda}_2 \quad (3.1.12)$$

$$\lambda = N \hat{\lambda} \quad (3.1.13)$$

把 (3.1.9) ~ (3.1.13) 代入 (3.1.8) 式

$$\begin{aligned} \delta \Pi^* = & \delta \hat{u}_1 (K_1 \hat{u}_1 + G_1 \hat{\lambda}_1 + H_1 \lambda - f_1) + \delta \lambda_1^T (G_1^T \hat{u}_1 - q_1) \\ & + \delta \hat{u}_2 (K_2 \hat{u}_2 + G_2 \hat{\lambda}_2 + H_2 \lambda - f_2) + \delta \lambda_2^T (G_2^T \hat{u}_2 - q_2) + \delta \hat{\lambda} (H_1^T \hat{u}_1 - H_2^T \hat{u}_2) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

得到如下方程组

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & G_1 & 0 & H_1 \\ 0 & K_2 & 0 & G_2 & H_2 \\ G_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2^T & 0 & 0 & 0 \\ H_1^T & H_2^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

其中 $K_i, G_i, f_i, q_i, i=1,2$ 的形式与第二章 EFGM 刚度方程式相似。 K_1, K_2 分别为 FEM 区域, EFGM 区域的刚阵, G_i, q_i 为使用拉格朗日乘子处理位移边界条件得

到的积分项, 其形式同式(2.2.23), (2.2.25), f_i 为节点等效载荷, 形式同式(2.2.24), H_1, H_2 为耦合项, 在积分意义上保证了 FEM 和 BFGM 在公共边界上的位移连续, 其形式为:

$$H_1 = - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \Phi_1^T N d\Gamma, H_2 = \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \Phi_2^T N d\Gamma \quad (3.1.16)$$

在实际运用中, 为了充分利用有限元可以方便处理边界条件的优点, 简化计算, 在施加位移约束和力边界条件的区域都使用有限元进行离散, 则 G_1, G_2, q_1, q_2, f_2 都为零, 式(3.1.15)简化为:

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & H_1 \\ 0 & K_2 & H_2 \\ H_1^T & H_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.17)$$

3.1.2 耦合项 H_1, H_2 的计算

H_1, H_2 体现了 FEM 与 BFGM 的耦合, 准确得到这两项在该种耦合方法中很重要。当 FEM 区采用等参元离散时, H_1 中形函数 Φ_1 为自然坐标 ξ, η 的函数, H_2 中 ϕ_2 为全局坐标 x, y 的函数而 N 为曲线坐标 s 的函数, 这为计算 H_1, H_2 带来一定的困难, 下面介绍如何解决此问题。

由(3.1.14)式知, 导出 H_1 的项为 $-\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} u_1^T \lambda d\Gamma = -\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} u_1^T dP$, 通过讨论该项可以得到计算 $H_1 = -\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \Phi_1^T N d\Gamma$ Φ_1 和 N 的具体形式。设公共边界上分 k 段进行插值且 k 取为该边界上有限单元数, 插值节点为落在公共边界上的有限元节点。

FEM 区节点的位移向量为: $\hat{u}_1 = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \cdots \quad \bar{u}_n \quad \bar{v}_n]^T$, n 为 FEM 区节点数,

则 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 上位移:

$$\begin{bmatrix} u_{s1} \\ v_{s1} \\ \vdots \\ u_{sk} \\ v_{sk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & N_{11} & 0 & \cdots & N_{12} & 0 & \cdots & N_{13} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{11} & \cdots & 0 & N_{12} & \cdots & 0 & N_{13} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{k1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & N_{k2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_{k2} & 0 \\ 0 & N_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{k2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & N_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}$$

其中 N_{ij} 为第 i 段第 j 个节点的形函数, (3.1.16) 式中的 Φ_1 即为上式等号右侧左乘的矩阵。

λ 是应力集度, λ_t, λ_n 分别为切向和法向集度 (规定 λ_t 逆时针为正, λ_n 垂直表面指向外为正, 如图 3.1)。使用拉格朗日三点插值, 则第 i 段上任意一点的内力集度为:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{ti} \\ \lambda_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 N_{ij} \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{tj})_i \\ (\bar{\lambda}_{nj})_i \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

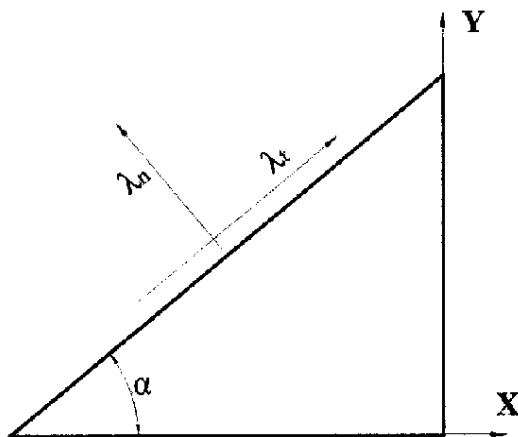


图 3.1 λ_t, λ_n 正向的规定

考虑第 i 段上作用在一个微段长度 ds 上的力, 其在 x 和 y 方向上的分力分别是

$$dP_x = (\lambda_n ds \cos \alpha - \lambda_t ds \sin \alpha) = \lambda_n dx - \lambda_t dy \quad (3.1.19)$$

$$dP_y = (\lambda_n ds \sin \alpha + \lambda_t ds \cos \alpha) = \lambda_n dy + \lambda_t dx \quad (3.1.20)$$

此时对曲线坐标 s 的积分转化为对全局坐标 x, y 的积分, 还须转化为对自然坐标 ε, η 的积分。

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (3.1.21)$$

由于积分边界取为有限单元的边, 因此在边界上必有 $\varepsilon = \pm 1$ 或者 $\eta = \pm 1$, 假

设取 $\eta = \pm 1$ ，则式(3.1.19)、(3.1.20)变为

$$dP_x = (\lambda_u \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \lambda_v \frac{\partial y}{\partial \varepsilon})d\varepsilon, dP_y = (\lambda_u \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \lambda_v \frac{\partial y}{\partial \varepsilon})d\varepsilon \quad (3.1.22)$$

综合式(3.1.18)

$$\begin{bmatrix} dP_x \\ dP_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & -\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_1)_i \\ (\bar{\lambda}_n)_i \\ (\bar{\lambda}_{21})_i \\ (\bar{\lambda}_{2n})_i \\ (\bar{\lambda}_{31})_i \\ (\bar{\lambda}_{3n})_i \end{bmatrix} d\varepsilon \quad (3.1.23)$$

令 $J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & -\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix}$ ， J_i 为第*i*段上的坐标转化矩阵： $N_{ij}, i=1, \dots, k, j=1, 2, 3$ 为关于坐标 ε 的拉格朗日插值函数，即对应的有限元节点的形函数。在整个公共边界上有

$$d \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ \vdots \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{12} & 0 & N_{13} \end{bmatrix}_{J_1} & & & & & & & 0 \\ & \begin{bmatrix} N_{21} & 0 & N_{22} & 0 & N_{23} & 0 \\ 0 & N_{21} & 0 & N_{22} & 0 & N_{23} \end{bmatrix}_{J_2} & & & & & & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & \begin{bmatrix} N_{k3} & 0 \\ 0 & N_{k3} \end{bmatrix}_{J_k} & & & 0 & \begin{bmatrix} N_{k1} & 0 & N_{k2} & 0 \\ 0 & N_{k1} & 0 & N_{k2} \end{bmatrix}_{J_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{1i} \\ \bar{\lambda}_{1n} \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_{mi} \\ \bar{\lambda}_{mn} \end{bmatrix} d\varepsilon \quad (3.1.24)$$

m 为公共边界上有限元的节点数，也即计算分段插值函数的节点数。上式等号右侧左乘矩阵记为 N ，最终得到 H_1 计算时的形式

$$H_1 = - \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \Phi_1^T N d\varepsilon \quad (3.1.25)$$

导出 H_2 的项为 $-\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} u_2^T \lambda d\Gamma = -\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} u_2^T dP$ ，同讨论 H_1 时的形式相似， dP 写作式(3.1.19)、(3.1.20)的形式，只是不需要把积分变量转换到自然坐标系，只转换到全局坐标 x, y 即可，此时

$$\begin{bmatrix} dP_{ix} \\ dP_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -f'(x) \\ f'(x) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & N_{i2} & 0 & N_{i3} & 0 \\ 0 & N_{i1} & 0 & N_{i2} & 0 & N_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{1i})_i \\ (\bar{\lambda}_{1n})_i \\ (\bar{\lambda}_{2i})_i \\ (\bar{\lambda}_{2n})_i \\ (\bar{\lambda}_{3i})_i \\ (\bar{\lambda}_{3n})_i \end{bmatrix} dx \quad (3.1.26)$$

$N_{ij}, i=1, \dots, k, j=1, 2, 3$ 为关于坐标 x 的拉格朗日插值函数；当 $f'(x)$ 在边界上不存在时

$$\begin{bmatrix} dP_{ix} \\ dP_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'(y) & 1 \\ -1 & g'(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & N_{i2} & 0 & N_{i3} & 0 \\ 0 & N_{i1} & 0 & N_{i2} & 0 & N_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\lambda}_{1i})_i \\ (\bar{\lambda}_{1n})_i \\ (\bar{\lambda}_{2i})_i \\ (\bar{\lambda}_{2n})_i \\ (\bar{\lambda}_{3i})_i \\ (\bar{\lambda}_{3n})_i \end{bmatrix} dy \quad (3.1.27)$$

N_{ij} 为关于坐标 y 的插值函数。

EFGM 区节点的位移向量为： $\hat{u}_2 = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \dots \quad \bar{u}_l \quad \bar{v}_l]^T$ ， l 为 FEM 区节点数，

则 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 上位移：

$$\begin{bmatrix} u_{si} \\ v_{si} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & \varphi_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & \varphi_j & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.1.28)$$

其中 $i=1 \dots k$ ， φ_j 为计算点影响域内节点的形函数。

3.1.3 基于积分弱形式的耦合方法的特点

由上述推导过程可以看出，基于积分弱形式的耦合方法有如下特点：

- (1) FEM 区刚阵同 EFGM 刚阵是分别独立计算的，节点的编号之间也无联系。在公共边界上可能会出现同一位置两个节点的情况，但这并不影响耦合的进行。
- (2) 该方法只是保证公共边界上位移在积分意义上连续，并不是在每一点连续。

3.2 EFGM—FEM 耦合方法的程序结构

3.2.1 EFGM—FEM 法的求解步骤

利用无网格—有限元求解域 Ω 上位移场的一般步骤为:

(1) 将 Ω 分为两部分 Ω_1, Ω_2 , 满足 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ 。域 Ω_1 使用有限元单元离散, 域 Ω_2 使用无网格节点离散;

(2) 分别计算 Ω_1, Ω_2 上的刚阵 K_1, K_2 ;

(3) 根据 (3.1.16) 式计算耦合部分的矩阵 H_1, H_2 ;

(4) 为了便于计算, 在力边界和位移边界处都使用了有限单元进行了离散, 因此只计算力边界节点的等效载荷 f_1 , 使用置大数法处理位移边界条件;

(5) 将 K_1, K_2, H_1, H_2 装入总刚 K ;

(6) 求解刚度方程 (式 (3.1.17)), 得到位移场。

FEM 域刚阵 K_1 的计算已非常成熟, 在这里不作说明。现将 EFGM 域刚阵 K_2 的求解思路介绍如下。

(1) 在求解域 Ω_2 内按需分布 l 个节点;

(2) 分布背景网格, 把每个背景网格称为一个 *cell*, 这些 *cell* 结构与节点无关, 仅用来完成 Ω_2 内的分块积分。

(3) 对每一个 *cell*, 重复 (a) → (g)

(a) 得到 *cell* 中的一个高斯点;

(b) 若高斯点在 Ω 内, 则进行 (c) → (f), 否则进行 (g);

(c) 根据一定的规则, 从 N 个节点中找出该高斯点影响域内的点;

(d) 用式 (2.1.3)、(2.1.4) 计算该高斯点处的形函数及其导数;

(e) 由式 (2.2.22) 计算刚度矩阵 K^e

- (f) 将 K^e 并入总刚 K ;
 - (g) 重复(a)→(f), 直到遍历该 *cell* 内的所有高斯点。
- (4) 重复(3), 直到遍历 Ω 内的所有 *cell*。

3.2.2 EFGM—FEM 程序介绍

根据前面对该方法计算步骤的介绍, 本文编制的程序主要分为三部分, 前处理、求解和后处理。

前处理部分完成的主要工作是计算所需信息的获取, 即建模。这些信息包括:

FEM 区: 有限元节点坐标、编号, 有限元单元的编号及其所属节点, 力边界条件和位移边界条件的描述;

EFGM 区: 无网格节点的坐标和编号;

耦合区: 关于公共边界的描述, 包括公共边界上有限元单元的编号, 节点的编号及节点用于线积分时的顺序号。

如果自行编制程序完成 EFGM—FEM 法的建模, 一是工作量太大, 二是没有必要。本文利用大型有限元仿真软件 ansys 进行前处理工作, 使用 APDL 语言编制程序实现建模过程, 生成耦合方法所需文件。使用 APDL 编制的宏命令文件主要有 fem.mac, efgm.mac, q_cell.mac。

fem.mac 生成有限元单元节点信息的 fem.txt 文件, 力边界条件 x_load.txt 文件, 位移边界条件 constrain.txt 文件;

efgm.mac 生成包含无网格节点坐标、编号的 efgm.txt 文件;

q_cell.mac 生成包含背景网格信息的 q_cell.txt 文件。

计算部分主要完成有限元刚阵计算, 无网格刚阵计算, 等效节点载荷及位移边界条件的计算, 有限元同无网格的耦合, 组装总刚, 求解刚度方程等。使用 c++ 编制了程序, 程序包括 12 个类:

k_elem: 计算单元刚阵, 采用何种有限元单元在此类中选择。其公有变量有单元节点坐标矩阵, 单元刚阵, 单元的弹性模量及泊松比;

k_fem: 计算 FEM 区刚阵 K_1 。从文件 fem.txt 读入单元节点信息, 将 k_elem

实例化并将其装入刚阵 K_1 。其公有变量有 FEM 区单元数, 节点数, 单元包含的节点标号数组, 指向刚阵的指针及材料常数:

interface_fem: 计算耦合矩阵 H_1 。从 interface.txt 文件读入耦合边界信息, 进行积分计算求得 H_1 。其公有变量有耦合边界上的有限元单元数(即进行分段拉格朗日插值的段数), 有限元节点数, 及指向单元编号数组和节点编号数组的指针, 指向 H_1 的指针;

point: 为计算 EFGM 区刚阵准备数据。从 q_cell.txt 文件读入积分网格信息, 生成高斯点坐标; 从 efgm.txt 文件读入 EFGM 区节点, 使用即时法求得各高斯点的影响域半径。主要公有变量有: 指向高斯点坐标的指针, 指向各高斯点影响域节点坐标的指针, 指向高斯点影响域半径的指针;

shape_func: 计算积分点的 EFGM 形函数。根据由初始化时输入的积分点坐标, 影响域节点坐标, 影响域半径等参数, 计算积分点的形函数, 在类 k_efg 和 interface_efg 中实例化。主要公有变量: 指向形函数矩阵, 形函数导数矩阵的指针;

k_efg: 计算 EFGM 区刚阵 K_2 。将类 point 实例化, 并根据从 point 得到的数据积分, 求得刚阵 K_2 。主要公有变量有: EFGM 区节点数, 指向 K_2 的指针。材料常数等;

point_b: 功能同类 point 类似, 为耦合阵 H_2 准备数据。从 interface.txt 文件读入耦合边界信息, 计算进行边界积分时使用的高斯点坐标, 影响域, 影响域半径等。

interface_efgm: 计算耦合阵 H_2 。将 point_b 实例化, 根据得到的积分点和积分域计算 H_2 。其公有变量有分段拉格朗日插值的段数, 指向插值点坐标的指针和指向 H_2 的指针。

constrain: 使用置大数法处理位移边界条件, 在 coupling 中实例化;

x_load: 将集中载荷或者分布载荷转化为节点等效载荷, 在 coupling 中实例化;

coupling: 组装 K_1, K_2, H_1, H_2 得到总刚 K , 并求解刚度方程, 得到位移场。
k_fem, k_efg, interface_fem, interface_efg, constrain, x_load 的初始化都在该类中进行。公有变量为: 指向总刚的指针, 指向载荷相量(刚度方程求解后为位移相量)的指针, 结构的总的自由度。

后处理部分主要是根据得出的位移计算节点的应变应力以及进行力学分析需要的一些参数, 例如应力强度因子等, 本文的程序也实现了这一部分。图 3.2 为程序流程图。

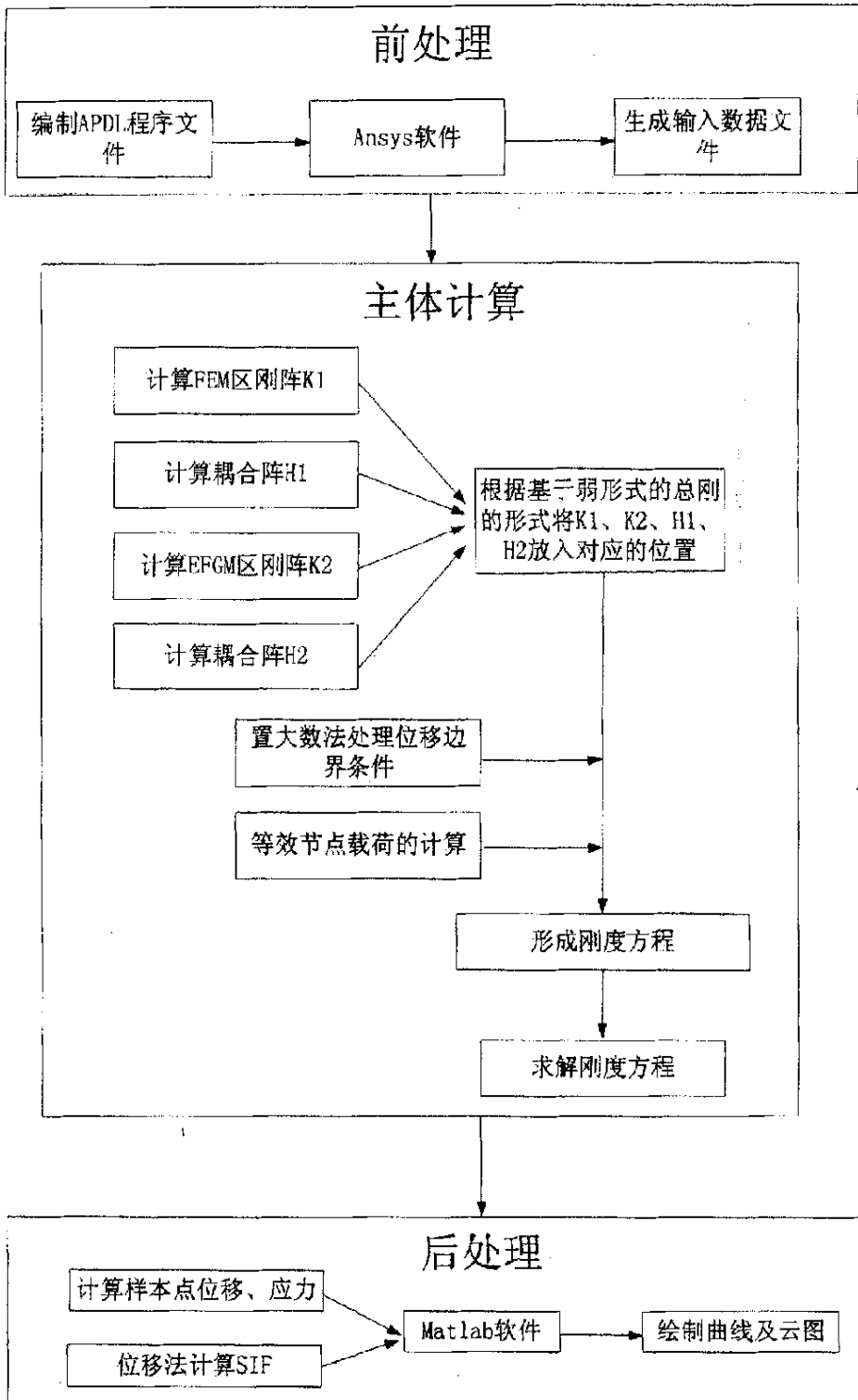


图 3.2 基于弱形式耦合方法的程序流程图

3.3 算例分析

如第二章中所述, EFGM 方法中权函数的选择、权函数参数的选择对计算精度有较大的影响, 在进行具体的算例分析之前, 介绍了本文采取的权函数及其紧支性控制参数的选取。

3.3.1 紧支性控制因子

常用的权函数有高斯型权函数, 三次样条权函数, 四次样条权函数等。由于高斯型权函数的计算精度较高, 紧支性可调, 所以应用最为广泛。在这里对其进行详细讨论。高斯型权函数形式如式(2.1.7):

$$w(d_i) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_i}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}} & , d_i < d_m \\ 0 & , d_i > d_m \end{cases}$$

式中 d_i 是 x 与 x_i 的距离, x_i 为点 x 影响域内的点, $d_i = \|x - x_i\|$; d_m 是 x_i 的影响域半径; c 是控制权函数相对权重的参数。在确定权函数时往往须事先确定 d_m 和 c 的值, 多数文章中只通过调节 c 的值来调节权函数的紧支性, 实际上在某些情况下, d_m 对紧支性也有较大影响, 如图 3.3。可以看出, 在 $d_m > 2$ 时, 其对权函数的影响已经非常小, 所以如果只是通过 c 来控制权函数的紧支性时须保证 $d_m > 2c$ 。

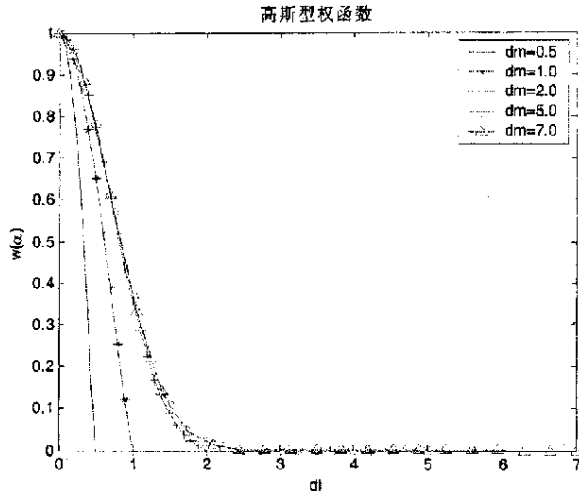


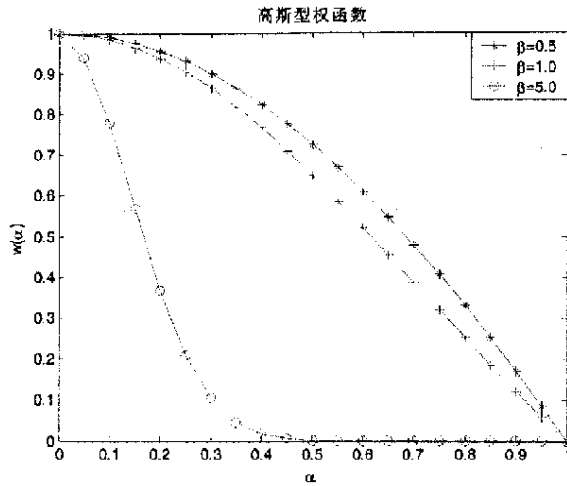
图 3.3 $c=1$ 时不同 d_m 值对权函数的影响

现有的求解节点影响域半径的方法有：“多参数”求法^[3]，四象限法则^[26]、自适应求法^[27]，在这三种算法中由于事先无法得知 d_m 的大小，如果只是通过调整 c (c 一般是积分网格密度或者节点密度的函数) 来控制紧支性很可能导致 $d_m < 2c$ 的情况发生，此时权函数的紧支性并不像预想的那样受到控制。

本文提出使用一组合参数 $\beta = \frac{d_m}{c}$ 来控制紧支性。由 β 的表达式可看出，该参数综合考虑了 c 和 d_m 的影响。令 $\alpha = \frac{d_l}{d_m}$ ，将 α, β 代入式 (2.1.7) 得到高斯型权函数的另一种表达形式：

$$w(d_l) = \begin{cases} \frac{e^{-(\alpha\beta)^2} - e^{-(\beta)^2}}{1 - e^{-(\beta)^2}}, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

$\alpha = \frac{d_l}{d_m}$ 决定了影响域中点 x_l 距计算点的相对距离，实际上决定了点 x_l 在影响域中的相对位置。图 3.4 给出了 β 对权函数紧支性的影响。

图 3.4 β 对权函数紧支性的影响

3.3.2 算例 1

如图 3.5a、b 所示，一个 $1\text{mm} \times 3\text{mm}$ 的矩形板及其使用 EFGM-FEM 离散后的图形。该矩形板下端 y 向固支，上端受 100MPa 的拉应力。离散形式为：上下两端分别为一个八节点等参单元，中间部分均匀布置 9 个无网格节点。材料常数为：弹性模量 $E = 202000\text{MPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ 。

根据文献[3]中提出的积分方案，计算过程中 EFGM 部分采用 2×2 的背景网格和四阶高斯积分；求解形函数时采用二次基函数，采用自适应法求得影响域半径。FEM 区同 EFGM 区的交界处使用分段的二阶拉格朗日插值处理。

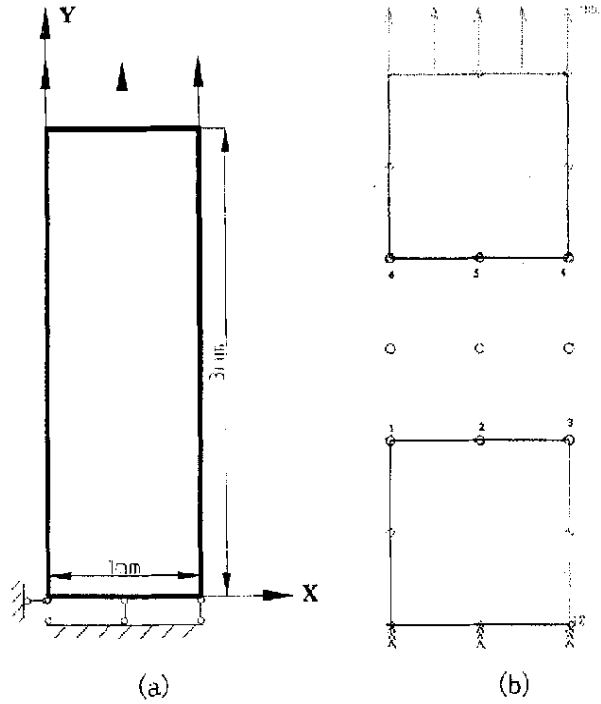


图 3.5 矩形板及其离散图

图 3.6 给出紧支性控制参数取不同值时计算值和理论值的比较。

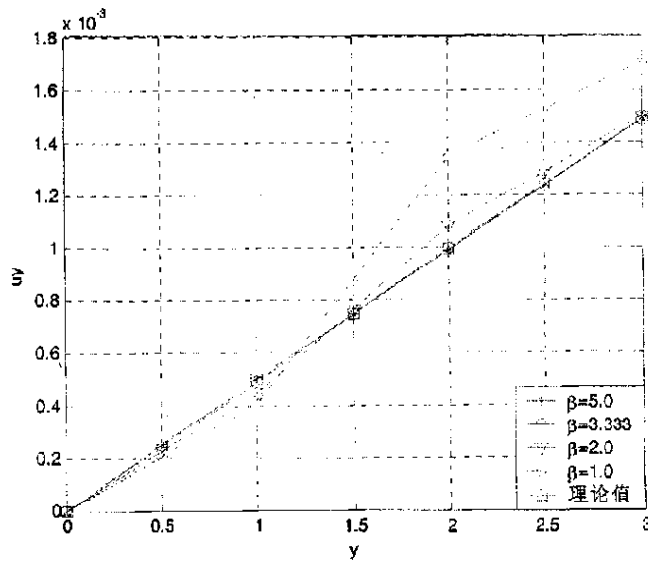


图 3.6 不同 β 下的 y 向位移及同理论值的比较

由图 3.6 可见当 $\beta = 3.333, 5.0$ 时, 精确度较高, 当 $\beta = 1.0, 2.0$ 时就要差一些。

这是因为在保证(2.1.2)式中 $A(x)$ 可逆和影响域中节点的个数不变的情况下,权函数的紧支性越好,由(2.1.3)式拟合得到的节点处的位移值 $u^h(x_i)$ 就更接近 $\bar{u}(x_i)$,从而使得最终的计算结果精度较高。

必须注意的是 β 越大,权函数的紧支性越好,但计算过程中发现在 $\beta > 5$ 时,经常会出现矩阵 $A(x)$ 不可逆的现象,此时需要增加影响域内节点数,增大影响域半径,导致计算量增加且精度下降,故建议 β 取3~5。

讨论:

(1) EFGM 区节点密度对计算结果的影响

FEM 区不变, EFGM 区分别使用均布的 9 节点, 16 节点, 25 节点离散, 积分网格的节点同无网格的节点重合, 紧支性因子 $\beta = 5$ 时, 计算值相对理论值的误差如图 3.7。

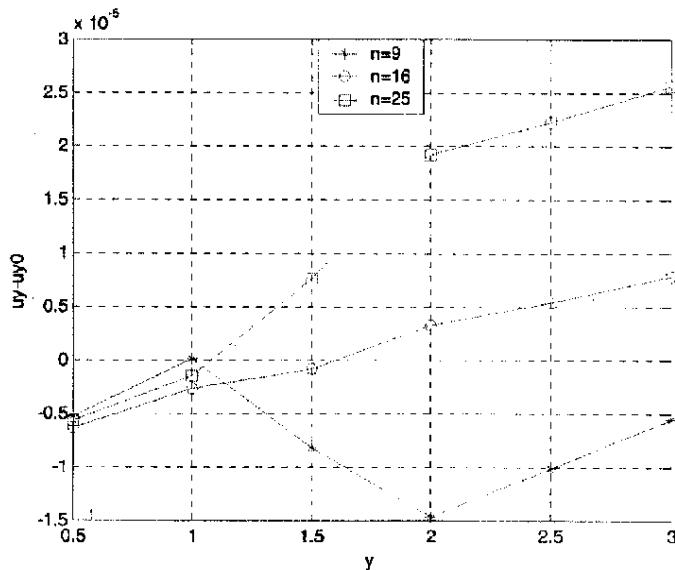


图 3.7 EFGM 采用不同节点数离散时的误差

从图 3.7 可以看出:

- 1) EFGM 区的计算是独立的, 即在耦合边界上并不要求无网格的节点间有限元的节点重合;
- 2) 在 FEM 区离散情况不变时, 单纯的加密 EFGM 区节点数, 并不能提高计算

精度。

(2) 拉格朗日乘子 λ 的理论解与计算解的比较

表 3.1、3.1、3.3 给出拉格朗日乘子 λ 的理论解与计算解的比较。 λ 的物理意义是节点上的内力集度， λ_n, λ_t 分别是 EFGM—FEM 交界处第 i 个节点内力集度的法向分量和切向分量。

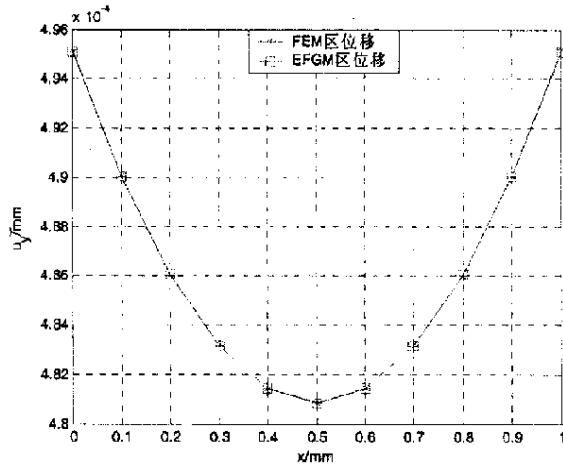
i	λ_n	理论值	误差	λ_t	理论值
1	101.05	100	1.05%	-1.8593	0.0
2	99.474	100	-0.63%	2.5423e-009	0.0
3	101.05	100	1.05%	1.8593	0.0
4	-102.96	-100	-2.96%	2.3073	0.0
5	-98.519	-100	-1.58%	5.326e-009	0.0
6	-102.96	-100	-2.96%	-2.3073	0.0

表 3.1 λ 的计算值同理论值的比较

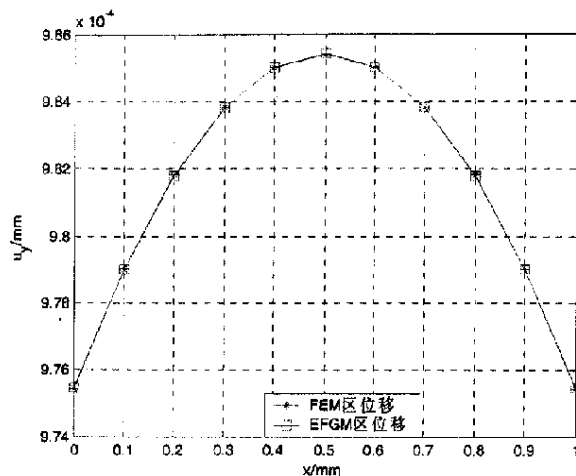
由表 3.1 可见，计算值与理论值相对理论值的误差很小。

(3) 耦合边界上位移、应力连续性问题

图 3.8a、b 为耦合边界上 y 向位移的计算结果。图中 FEM 区位移指 FEM 区在耦合边界上插值得到的位移，EFGM 区位移指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的位移。

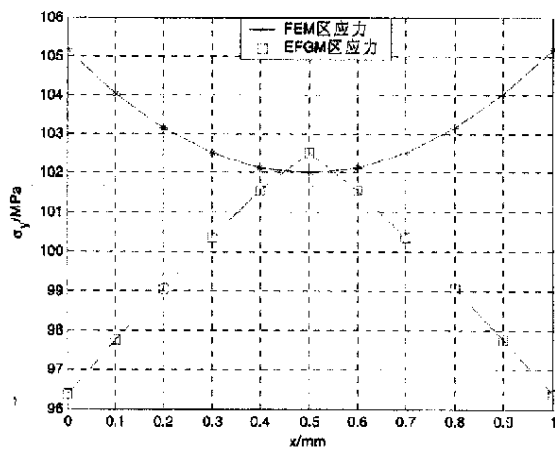


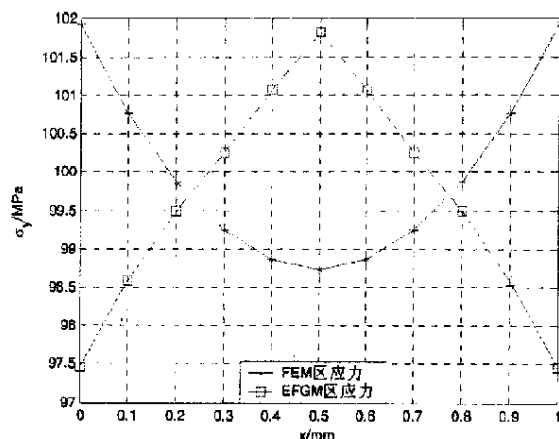
(a) $y=1.0$ 处的 y 向位移

(b) $y=2.0$ 处的 y 向位移图 3.8 耦合边界上的 y 向位移

由图 3.8 可见，位移在耦合边界上的连续性很好。

图 3.9a、b 为耦合边界上 y 向应力的计算结果。图中 FEM 区应力指 FEM 区在耦合边界上插值得到的应力，EFGM 区应力指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的应力。

(a) $y=1.0$ 处的 y 向应力

(b) $y=2.0$ 处的 y 向应力图 3.9 耦合边界上的 y 向应力

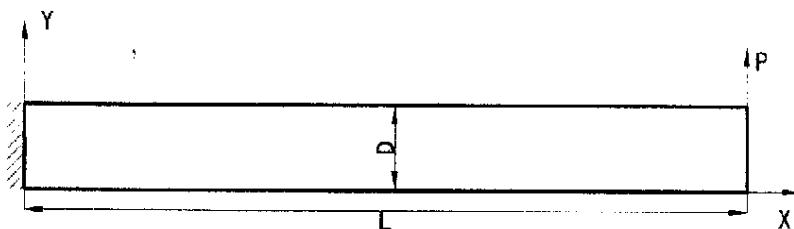
由图 3.9 可见，应力在耦合边界上的连续性较差。

3.3.3 算例 2

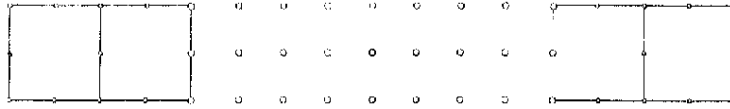
厚度为 1 的矩形截面悬臂梁如图 3.10a、b 所示，其中 $L=8m$ ， $D=1m$ ，载荷 $P=100MPa$ ，材料参数弹性模量 $E=202000MPa$ ，泊松比 $\nu=0.3$ 。该问题位移的理论解^[37]为：

$$u = -\frac{P(y-0.5)}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+\nu) \left((y-0.5)^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (3.3.2)$$

$$v = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3l-x)x^2 \right] \quad (3.3.3)$$



(a) 悬臂梁的结构图



(b) 悬臂梁的离散图

图 3.10 自由端受切向载荷的悬臂梁

应力的理论解为：

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)(y-0.5)}{I} \quad (3.3.4)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (3.3.5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - (y-0.5)^2 \right) \quad (3.3.6)$$

计算时所采用的参数为：EFGM 部分采用图 3.10b 的离散方法， 6×2 的背景网格和四阶高斯积分；求解形函数时采用二次基函数，自适应法求得影响域半径，权函数紧支性控制因子 β 取 5.0。

图 3.11a、b 为 $y=1.0$ 处的位移解同理论解的比较。

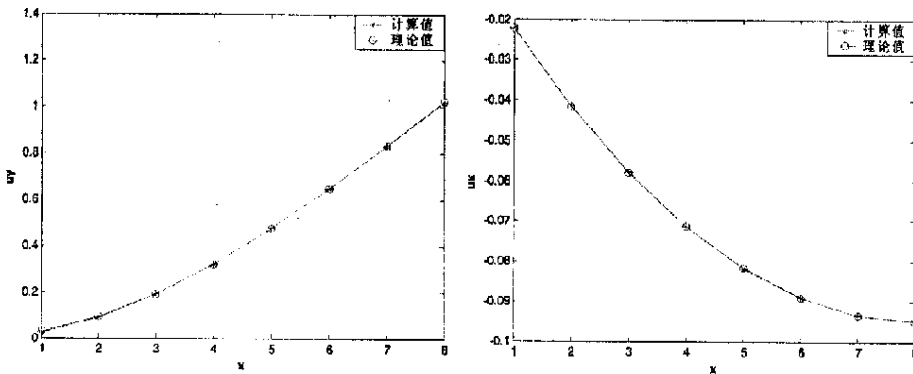
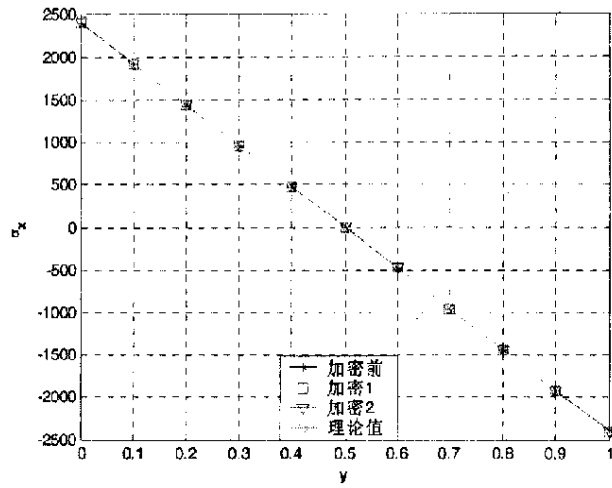
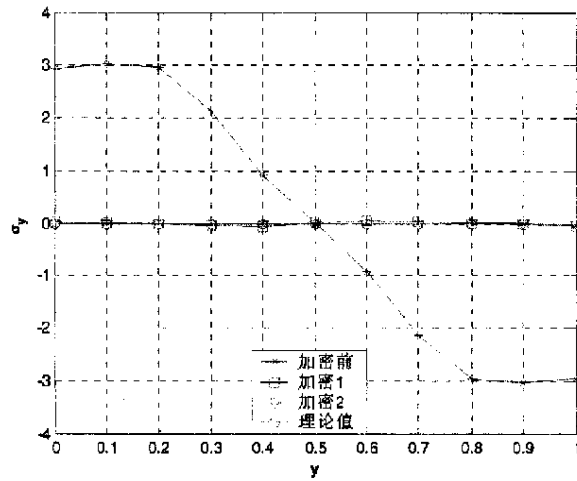
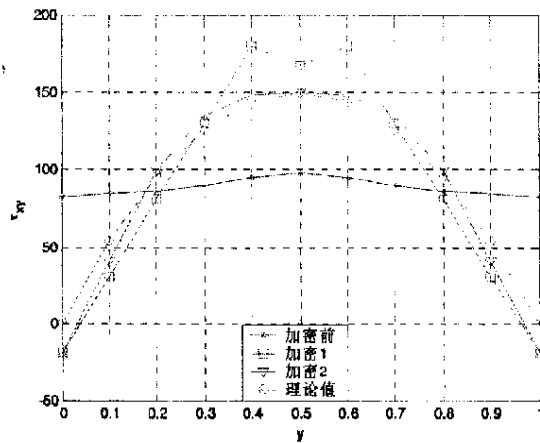
(a) $y=1.0$ 处 y 向位移(b) $y=1.0$ 处 x 向位移

图 3.11 位移计算解同理论解的比较

由图 3.11 可见，使用该耦合方法计算得到的位移解同理论值吻合得很好。

图 3.12a、b、c 为 $x=4$ 处 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 在采用不同加密方案下计算值同理论值的比较。图中加密 1，加密 2 分别表示 EFGM 区域节点间距取 0.25，0.1667，背景网格节点同无网格节点重合，FEM 区单元边长取 EFGM 区节点间距的两倍。

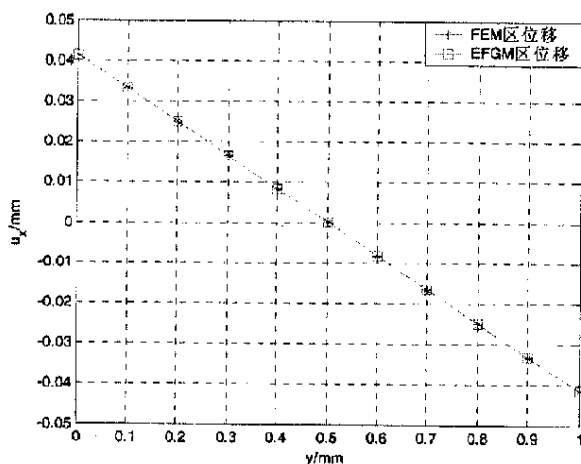
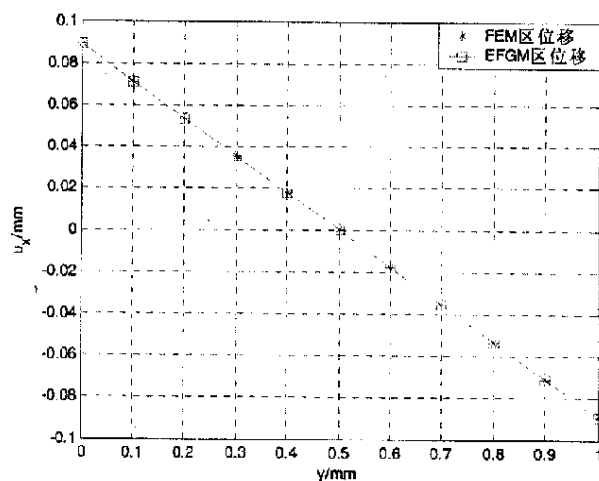
(a) $x=4$ 处的 σ_x (b) $x=4$ 处的 σ_y 

(c) $x=4$ 处的 τ_{xy}

图 3.12 应力的计算值同理论值的比较

由图 3.12 可见在不加密的情况下, σ_x 的计算精度较高, 而 σ_y, τ_{xy} 同理论值相差较大, 这是由于不加密情况下, 结构 y 向布点不足导致。随着节点密度的增加, 应力的计算精度增加。

图 3.13a、b、c、d 为耦合边界上的位移值。图中 FEM 区位移指 FEM 区在耦合边界上插值得到的位移, EFGM 区位移指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的位移。

(a) $x=2.0$ 处的 x 向位移(b) $x=6.0$ 处的 x 向位移

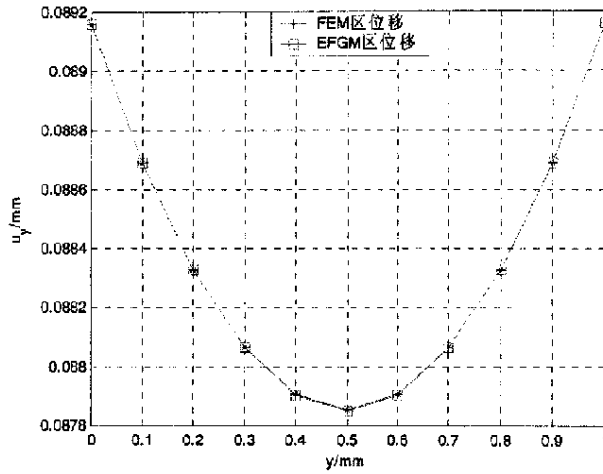
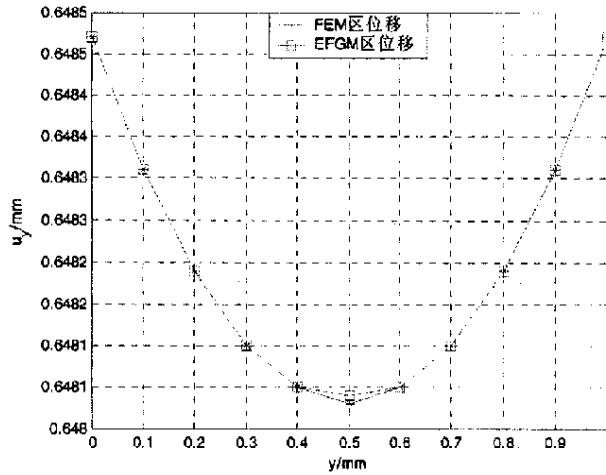
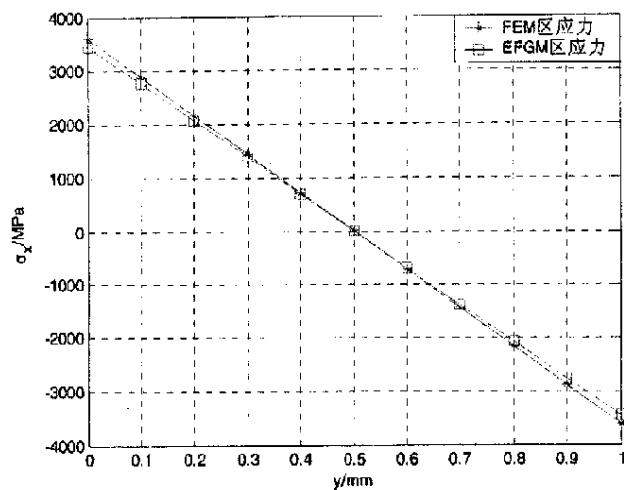
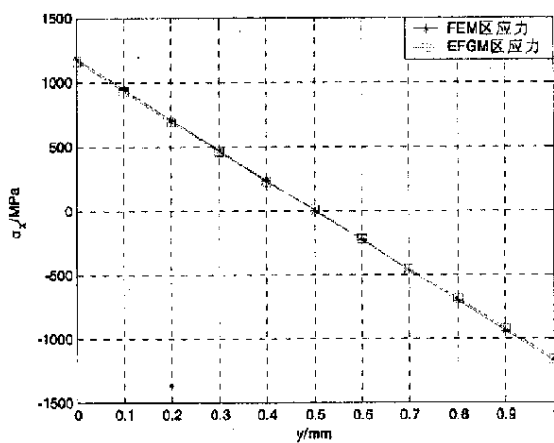
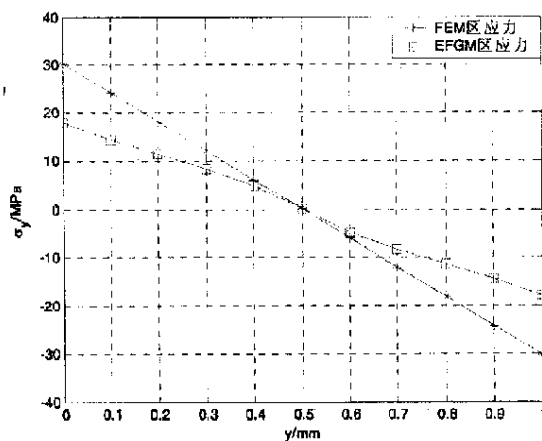
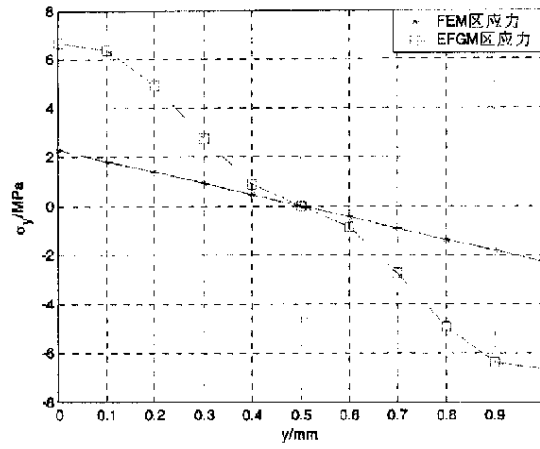
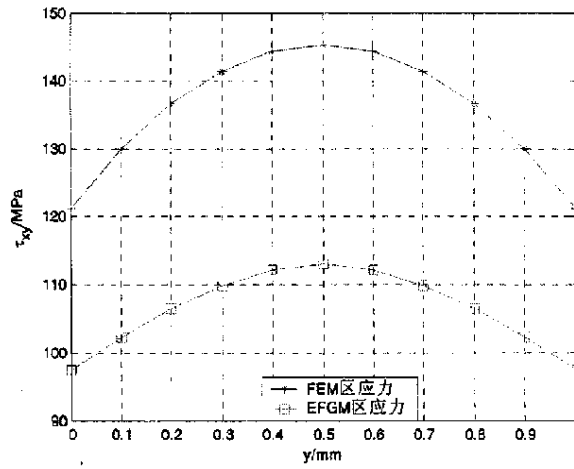
(c) $x=2$ 处的 y 向位移(d) $x=6$ 处的 y 向位移

图 3.13 耦合边界上的位移

由图 3.13 可见，位移在耦合边界上的连续性较好。

图 3.14~3.16 为耦合边界上应力的计算结果。

(a) $x=2.0$ 处的 x 向应力(b) $x=6.0$ 处的 x 向应力图 3.14 耦合边界上的 x 向应力

(a) $x=2.0$ 处的 y 向应力(b) $x=6.0$ 处的 y 向应力图 3.15 耦合边界上的 y 向应力(a) $x=2.0$ 处的剪应力

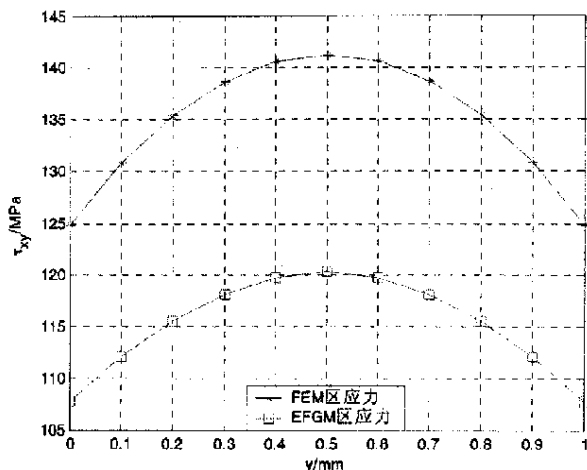
(b) $x=6.0$ 处的剪应力

图 3.16 耦合边界上的剪应力

由图 3.14~3.16 可见, σ_x 在耦合边界上的连续性较好, σ_y, τ_{xy} 在耦合边界上的连续性较差。

3.3.4 算例 3

几何结构、约束及受载形式与算例 1 相似, EFGM、FEM 离散区域的划分也相同, 只是在 $y=1.5$ 处存在裂纹, 如图 3.17 所示。FEM 区域使用单元边长为 0.2 的等参元进行离散, EFGM 区域使用间距为 0.1 的节点进行离散, 裂尖处加密, 背景网格的节点同无网格点重合, 如图 3.18(a)、(b)所示。基函数取二次基, 紧支性因子取 5.0, 采用可视性法则处理裂纹导致的不连续性。

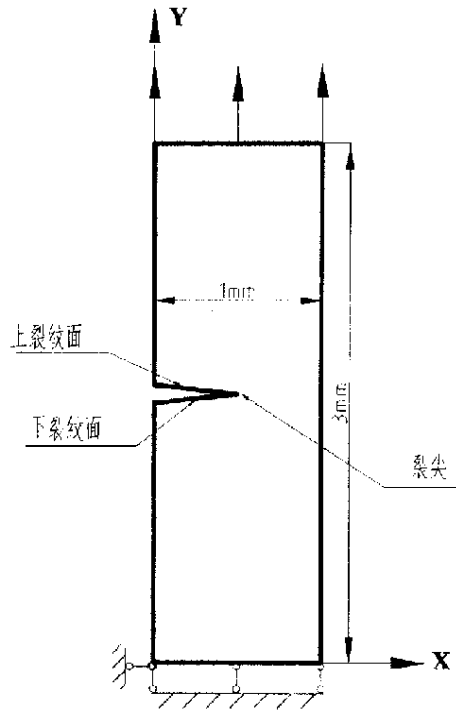
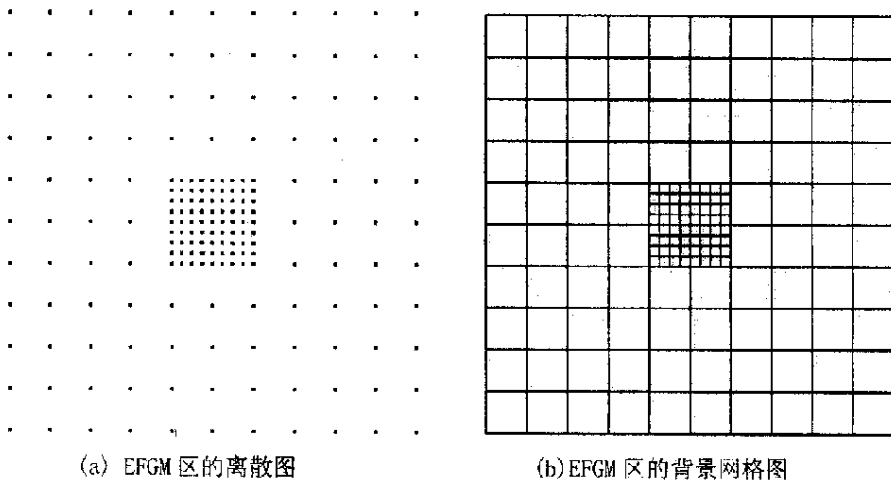


图 3.17 边裂纹板结构图



(a) EFGM 区的离散图

(b) EFGM 区的背景网格图

图 3.18 加密 4 时 EFGM 区的离散图及其背景网格图

图 3.19 为计算所得的裂纹面上的 y 向位移。图中上方曲线为上裂纹面上的 y 向位移，下方曲线为下裂纹面上的位移。

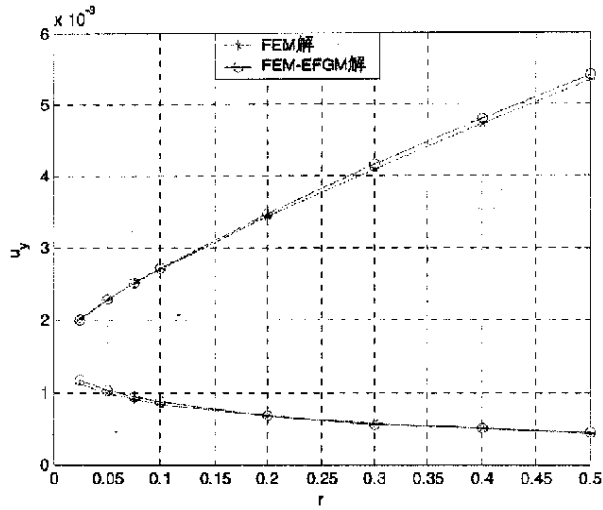
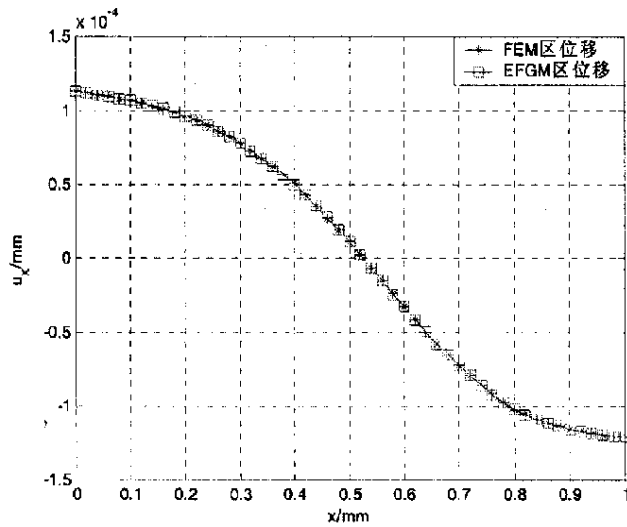


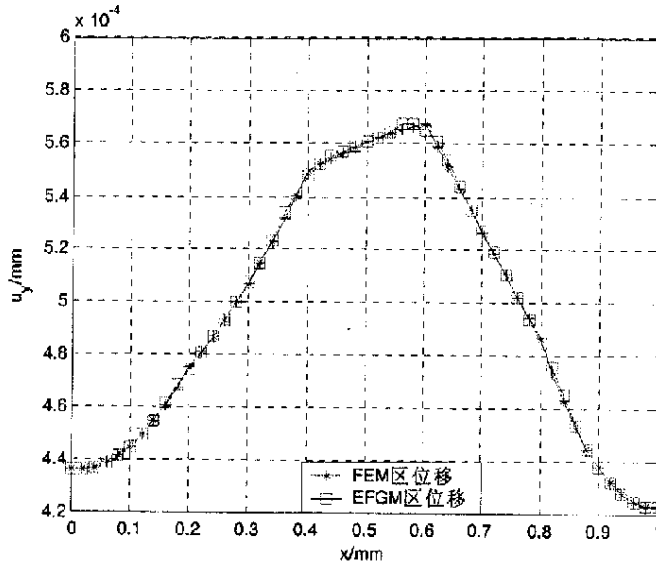
图 3.19 裂纹面上 y 向位移同有限元解的比较

可见，基于积分弱形式的耦合方法在计算含裂结构的位移场时精度很好。

图 3.20 为算例 3 中耦合边界上的位移的计算结果，图中 FEM 区位移指 FEM 区在耦合边界上插值得到的位移，EFGM 区位移指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的位移。

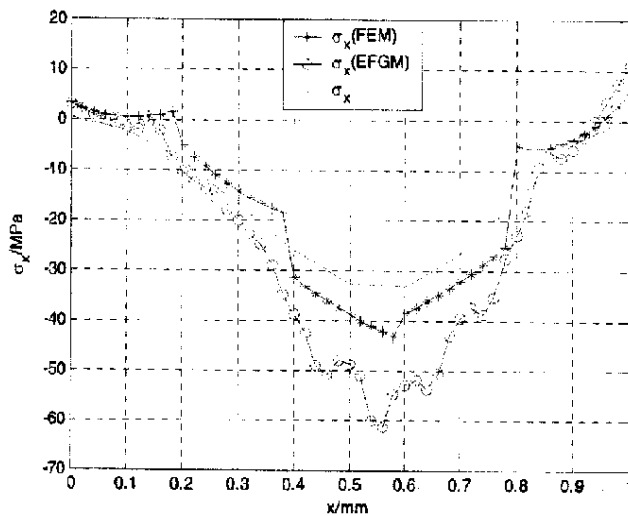


(a) $y=1.0$ 处的 x 向位移

(b) $y=1.0$ 处的 y 向位移图 3.20 耦合边界上($y=1.0$)的位移

由图 3.20 可见，基于积分弱形式的耦合方法在耦合边界上 FEM 和 EFGM 分别计算的位移曲线几乎重合，即在耦合边界上位移的连续性很好。

图 3.21a、b、c 分别为耦合边界上的 x 向应力， y 向应力及剪应力， σ_x (FEM)、 σ_y (FEM)、 τ_{xy} (FEM) 分别指 FEM 区在耦合边界上插值得到的应力值， σ_x (EFGM)、 σ_y (EFGM)、 τ_{xy} (EFGM) 分别指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的应力， σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 是整个结构使用 Ansys 计算得到的经过应力磨平处理的应力。



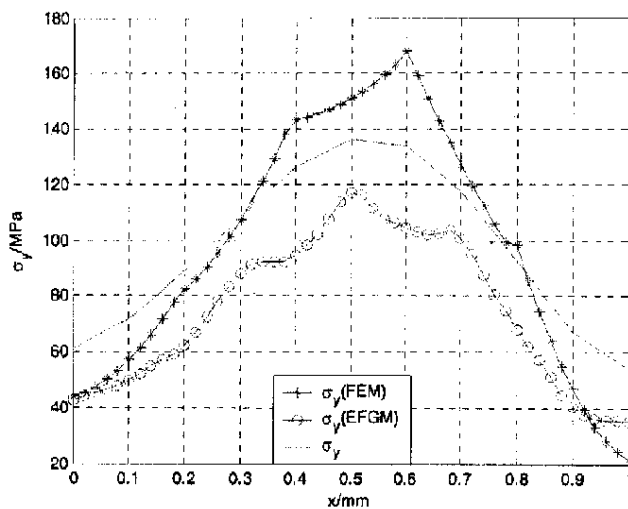
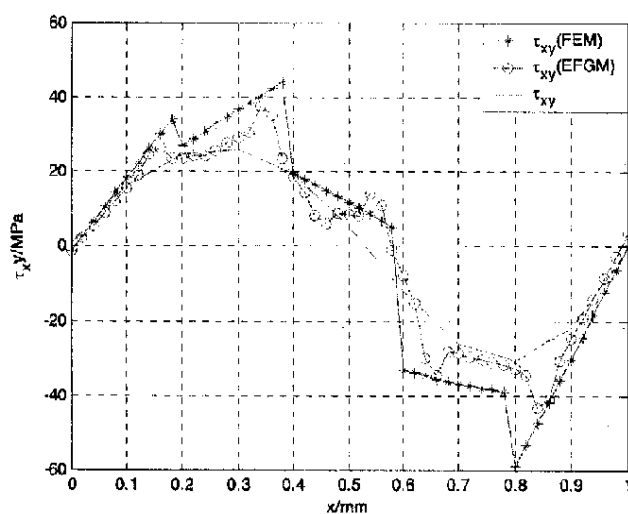
(a) $y=1.0$ 处的 σ_x (b) $y=1.0$ 处的 σ_y (c) $y=1.0$ 处的 τ_{xy}

图 3.21 耦合边界上的应力

由图 3.21 可以看出,使用该种耦合方法进行耦合时,虽然反映了应力的变化趋势,但在耦合边界上应力的连续性较差。

3.3.5 算例中影响域的确定

采用自适应算法求解影响域，最重要的一点是确定影响域内点的个数。根据 2.1.5 的叙述，矩阵 $A(x)$ 可逆的必要条件是基函数矩阵 P 的秩为基函数的项数 m ，权函数矩阵 W 中至少有 m 个点不为零，即对于二次基的情况，至少应有 6 个点。但注意到对于高斯型权函数，当 $\beta = 5$ 时，由图 3.4 可以看出，当 $\alpha \geq 0.4$ 时，权函数的值已经几乎为零，故实际上需保证在 $0 \sim 0.4$ 范围内至少有 6 个点，因此算例中影响域内节点数都取为 15。

第四章 无网格—有限元直接耦合方法

由于基于本构方程积分弱形式的耦合方法需使用拉格朗日乘子法处理边界条件,使得耦合部分的程序实现较为复杂,且增大了计算量。为了解决这些问题,本章基于广义单元的概念,提出了无网格—有限元直接耦合方法。算例证明该方法在能很好保证精度的前提下,简便易用,具有更好的应用前景。

4.1 广义单元定义

无网格和有限元的基本思想都是将连续的求解区域离散为有限个且按一定方式相互连接在一起的“单元”的组合体。区别有两点:一是有限元的单元不仅是数值意义上的,也是几何意义上的,其几何意义表现为几何网格。这些几何网格实际上决定了高斯积分计算中高斯点的坐标,高斯点影响域的大小、形状及包含的节点。无网格法的“单元”则只是数值意义上的,是按照某种原则选择的一定数目节点的集合,即节点或者积分点的影响域。“单元”的大小形状以及所包含的节点与采用的选取原则有直接关系。二是有限元中单元形函数是通过该单元的节点的插值得到,而无网格“单元”的形函数则是通过对“单元”中节点使用移动最小二乘法或者核函数等其他方法计算得到。从以上分析可以看出,两种方法的区别主要集中在是否存在几何网格及单元形函数的具体构造上。通过定义一种广义的单元,可以将这两种方法统一起来。

我们将有限元、无网格中数值意义上的单元定义为广义单元,即利用在每一个单元内假设的形函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数,这样一来,无网格法和有限元法只是在求解单元内的形函数时有所区别,二者可以看作不同种类的广义单元。

4.2 直接耦合法

将整个求解域用无网格单元和有限元单元离散。得到的离散模型的系统位能是各单元位能之和,表示为:

$$\Pi_p = \sum_e \left(a^{eT} \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} B^T D B t dx dy a^e \right) - \sum_e \left(a^{eT} \int_{\Omega_e} N^T f dx dy \right) - \sum_e \left(a^{eT} \int_{\Omega_e} N^T T dx dy \right) \quad (4.2.1)$$

将单元节点位移 a^e 用结构节点位移 a 表示

令 $\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} B^T D B t dx dy = K^e$, $\int_{\Omega_e} N^T f dx dy + \int_{\Omega_e} N^T T dx dy = P^e$ 则(4.2.1)式变为:

$$\Pi_p = a^T \frac{1}{2} \sum_e (G^T K^e G) a - a^T \sum_e (G^T P^e) \quad (4.2.2)$$

由 $\delta \Pi_p = 0$ 得到刚度方程

$$K a = P \quad (4.2.3)$$

其中 $K = \sum_e G^T K^e G$, $P = \sum_e (G^T P^e)$ 。 G 为单元节点转换矩阵, 决定了单元刚阵在总刚中的位置。

在实际计算中, 分别计算得有限元部分的刚阵 K_1 和无网格部分刚阵 K_2 , 然后根据节点的全局编号, 把 K_1 、 K_2 装入总刚, 求解刚度方程, 得到位移值。需要强调的是, 求解 K_1 、 K_2 的过程中使用的是局部节点编号, 组装过程中使用的是全局编号, FEM 和 EFGM 的共用节点有两个局部编号, 只有一个全局编号, 这个特点使得组装总刚时, K_1 、 K_2 出现叠加, 体现了 FEM 与 EFGM 的耦合。与 FEM 对单元交界面上连续性的要求相同, 必须保证在耦合的公共边上没有除共用节点的其他节点。

4.3 程序结构介绍

与基于积分弱形式的耦合方法相比, 直接耦合合法在程序上也简化不少, c++ 程序包括 9 个类, 除去了处理耦合边界的 `interface_fem`, `point_b`, `interface_efgm` 三个类; 在 `coupling` 类中处理 EFGM-FEM 的耦合程序也有不同, 组装总刚时无耦合项 H_1, H_2 的参与, 根据节点的全局编号, 将 FEM 刚阵 K_1 , EFGM 刚阵 K_2 装入总刚。程序流程图如图 4.1。

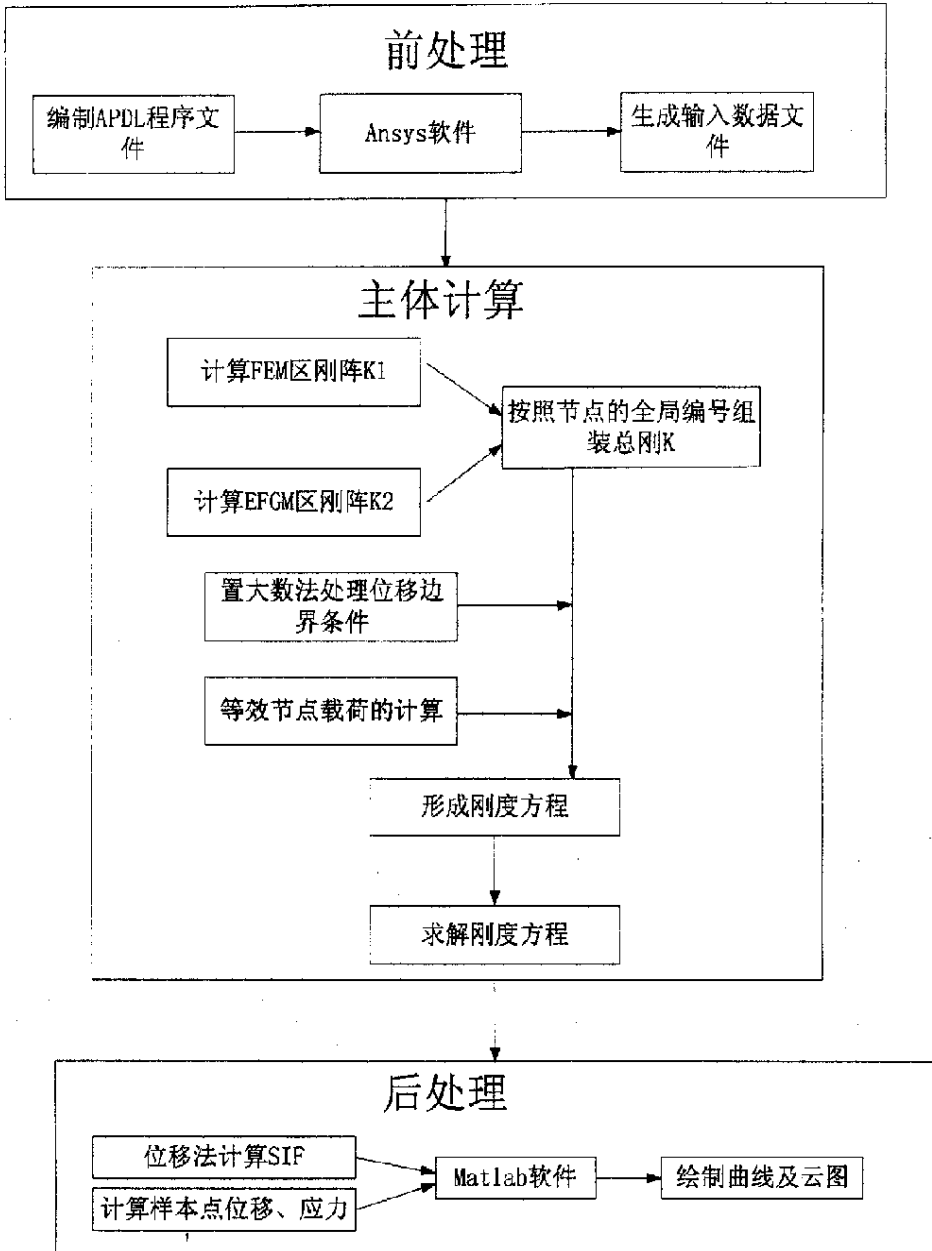


图 4.1 直接耦合法的程序流程图

4.4. 算例分析

4.4.1 算例 1

算例 1 的计算结构、离散方案、基函数、权函数、积分方案等的选择都与第

三章算例 1 相同, 表 4.1 为采用直接耦合法计算所得结果同理论解的比较。

$y(x=0)$	(数值解)	u_y (理论解)	相对误差/%
0.5	0.00024266	0.000247525	-1.97%
1.0	0.000496019	0.00049505	0.2%
1.5	0.000742761	0.000742574	0.03%
2.0	0.00097467	0.000990099	-1.56%
2.5	0.0012273	0.001237624	-0.83%
3.0	0.0014801	0.001485149	-0.34%

表 4.1 数值解同理论解的比较 (直接耦合法)

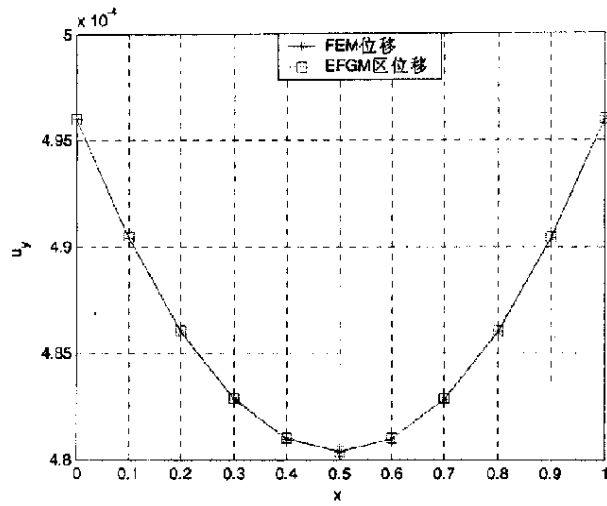
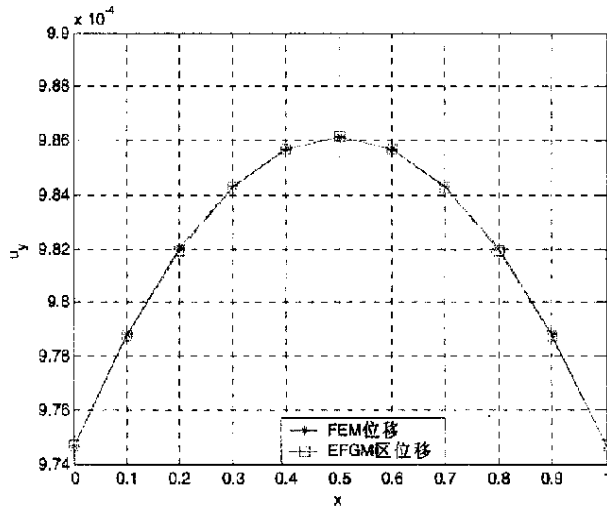
表 4.2 为采用基于弱形式的耦合方法时的计算结果同理论解的比较。

y	u_y (数值解)	u_y (理论解)	相对误差/%
0.5	0.00024223	0.000247525	-2.14%
1.0	0.00049516	0.00049505	0.22%
1.5	0.00073441	0.000742574	-1.1%
2.0	0.00097542	0.000990099	-1.48%
2.5	0.0012274	0.001237624	-0.826%
3.0	0.0014795	0.001485149	-0.38%

表 4.2 计算解同理论解的比较 (基于弱形式的耦合方法)

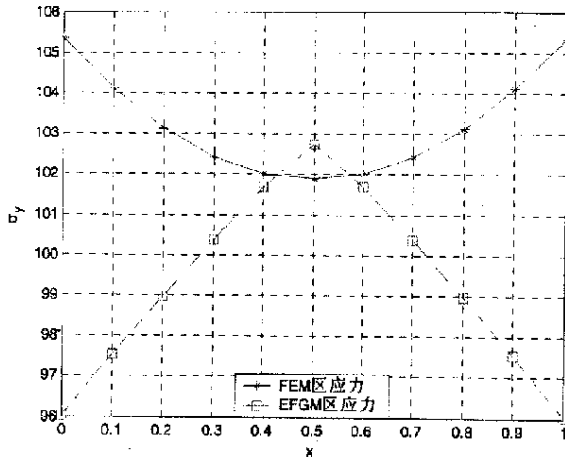
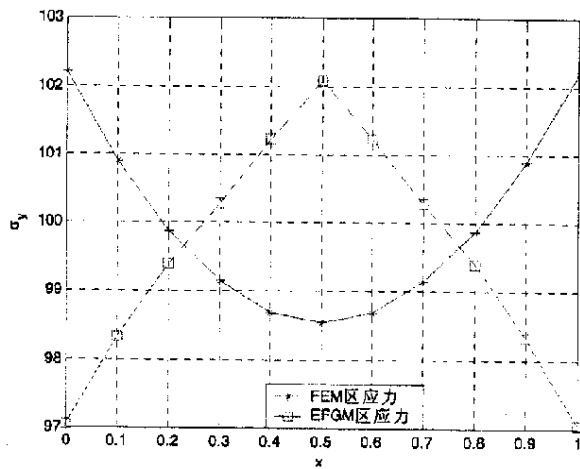
由表 4.1, 表 4.2 对比可以看出, EFGM 部分只分布 9 个节点时直接耦合法就可得出很好的结果, 其精度并不比基于弱形式的耦合方法差, 但在实际计算中, 计算量却要小的多。

图 4.2a、b 给出直接耦合法在耦合边界上 Y 向位移计算结果。同第三章中的规定类似, 图中 FEM 区位移指 FEM 区在耦合边界上插值得到的位移, EFGM 区位移指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的位移。

(a) $y=1.0$ 处的 y 向位移(b) $y=2.0$ 处的 y 向位移图 4.2 耦合边界上的 y 向位移

由图 4.2 可见，在耦合边界上，位移是连续的。

图 4.3a、b 给出直接耦合法在耦合边界上的 Y 向应力的计算结果。图中 FEM 区应力指 FEM 区在耦合边界上插值得到的应力，EFGM 区应力指 EFGM 区在耦合边界上拟合得到的应力。

(a) $y=1.0$ 处的 y 向应力(b) $y=1.0$ 处的 y 向应力图 4.3 耦合边界上的 y 向应力

由图 4.3 可见,同基于弱形式的耦合方法类似,直接耦合法计算的到的应力在耦合边界上也较差。算例 2、3 中在耦合边界上位移、应力的连续性同基于弱形式的耦合方法类似,所以算例 2、算例 3 中对连续性不作讨论。

4.4.2 算例 2

算例 2 的计算结构、离散方案、基函数、权函数、积分方案等的选择都与第三章算例 2 相同。

图 4.4 为使用直接耦合法计算得到的 $y=1.0$ 处的位移值同理论值的比较。

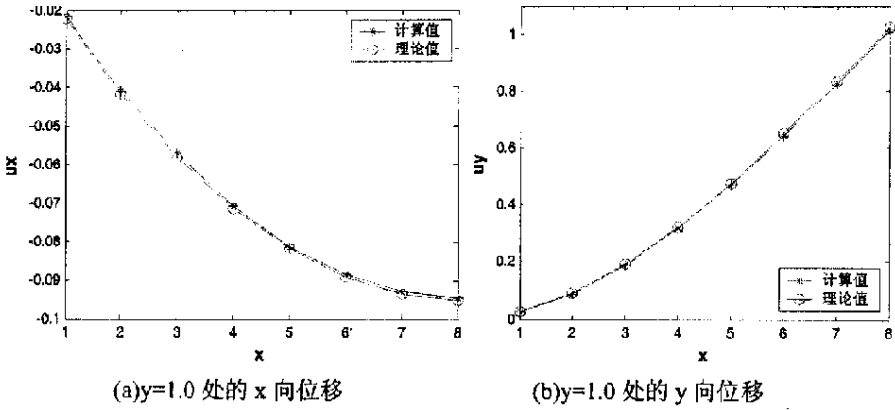


图 4.4 位移计算值同理论值的比较

由图 4.4 可见由该耦合方法得出的位移解同理论解吻合得很好。

图 4.5~4.7 给出 $x=4.0$ 处应力的计算结果同理论解的比较。

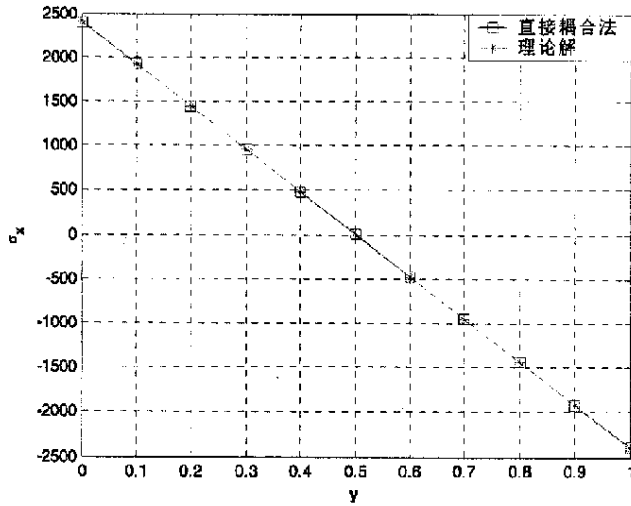


图 4.5 $x=4.0$ 处的 σ_x 同理论解的比较

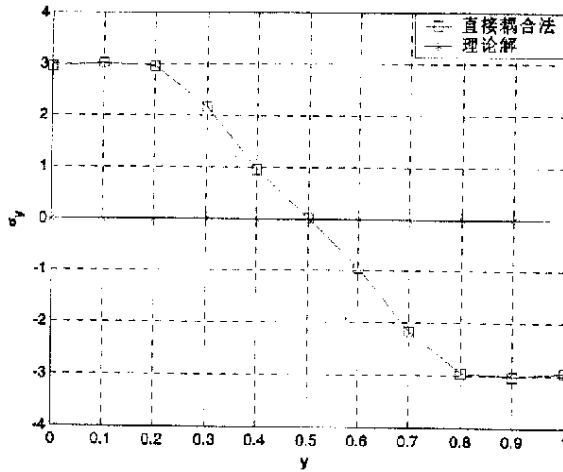
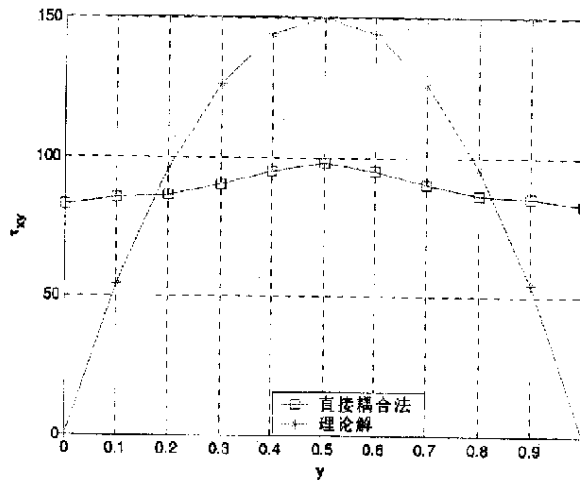
图 4.6 $x=4.0$ 处 σ_y 同理论解的比较图 4.7 $x=4.0$ 处 τ_{xy} 同理论解的比较

图 4.5~4.7 同第三章图 3.12 相比可以看出,在纵向仅布 3 个节点的情况下, σ_x , σ_y , τ_{xy} 的计算结果与第三章算例 2 的计算结果相比,它们相对理论解的偏移是类似的,这说明结构内部应力的计算不会随耦合方法的改变而有显著变化。

4.4.3 算例 3

算例 3 的计算结构、离散方案、基函数、权函数、积分方案等的选择都与第三章算例 3 相同。

图 4.8 给出使用直接耦合法计算裂纹面上 y 向位移的结果，并同使用基于弱形式的耦合方法和使用 FEM 的计算结果作了比较。

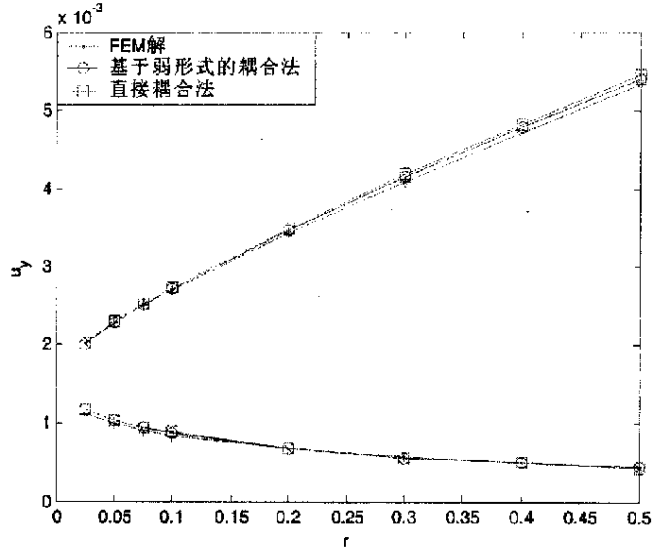


图 4.8 裂纹面上的 y 向位移

由图 4.8 可见，直接耦合法同基于弱形式的耦合方法给出的曲线几乎重合，进一步说明耦合方法的不同对内部位移场的求解影响很小。

第五章 EFGM—FEM 直接耦合方法 在断裂力学中的应用

应力强度因子是断裂力学分析中一个非常重要的参数,代表了裂纹尖端应力场的强弱,表达了构件和裂纹形状,裂纹开裂模式及构件所受力的大小对裂纹尖端应力场的影响。所以该参数同裂纹的扩展方式及裂纹扩展准则的确定都有密切的关系。直接位移法是计算应力强度因子的一种重要方法,本章将第四章中提出的 EFGM—FEM 耦合方法同直接位移法相结合,计算了典型结构的应力强度因子。

5.1 EFGM—FEM 直接耦合法同直接位移法的结合

采用第四章提出的直接耦合法计算含裂结构裂纹面上的位移,然后通过直接位移法求得裂尖的应力强度因子。直接位移法对裂纹面上计算点位移的精确度要求较高,使用直接耦合方法求解含裂结构的位移时必须注意 EFGM 法中对不连续问题的处理,本章使用可视性法则处理由裂纹引起的不连续性。

5.2 算例

5.2.1 双向拉伸边裂纹板

计算结构、基函数、权函数的选择等同第三章、第四章算例 3,使用 EFGM—FEM 法计算裂纹面上节点位移,直接位移法求得裂尖应力强度因子。

计算中发现,裂尖局部加密程度对应力强度因子的计算有较大影响。图 5.1~5.6 为不同程度的局部加密离散图。非加密区节点间距为 0.1,加密 2~加密 6 在加密区的节点间距分别为 0.05, 0.0333, 0.025, 0.02, 0.0167。

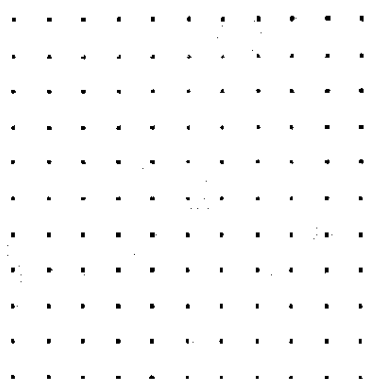


图 5.1 加密 1

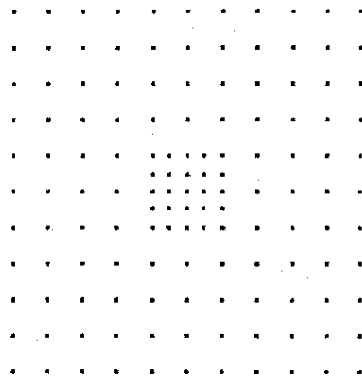


图 5.2 加密 2

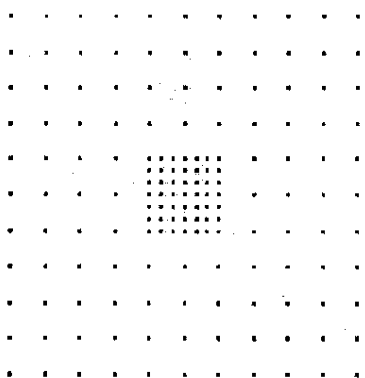


图 5.3 加密 3

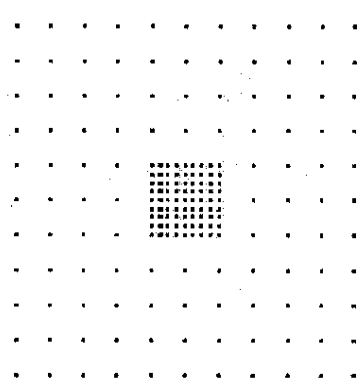


图 5.4 加密 4

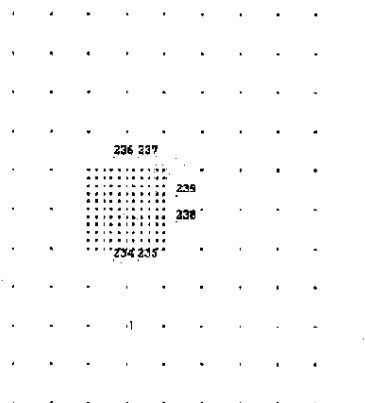


图 5.5 加密 5

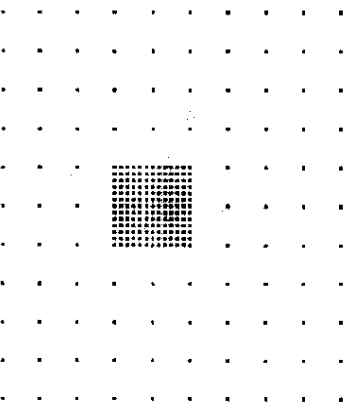


图 5.6 加密 6

计算发现在一定范围内随着局部加密程度的增加，结果的精确度增加。但是，如第三章所述，当加密程度超过一定值时，由于过渡区节点密度变化梯度较大，容易造成矩阵 $A(x)$ 在积分点处不可逆，这就需要增大过渡区的影响域半径。

例如在加密 5 (图 5.5 所示) 的情况下, 如将影响域内节点数取为 15, 在高斯点 234, 235, 236, 237 等处 $A(x)$ 不可逆, 图 5.7 中给出各个加密情况下裂纹面上的位移结果, $0 \leq r \leq 0.1$ 为加密区域。加密 5 的过渡区影响域内节点数取为 20, 加密 6 的过渡区影响域内节点数取为 25, 其余加密情况影响域内节点数均取为 15。

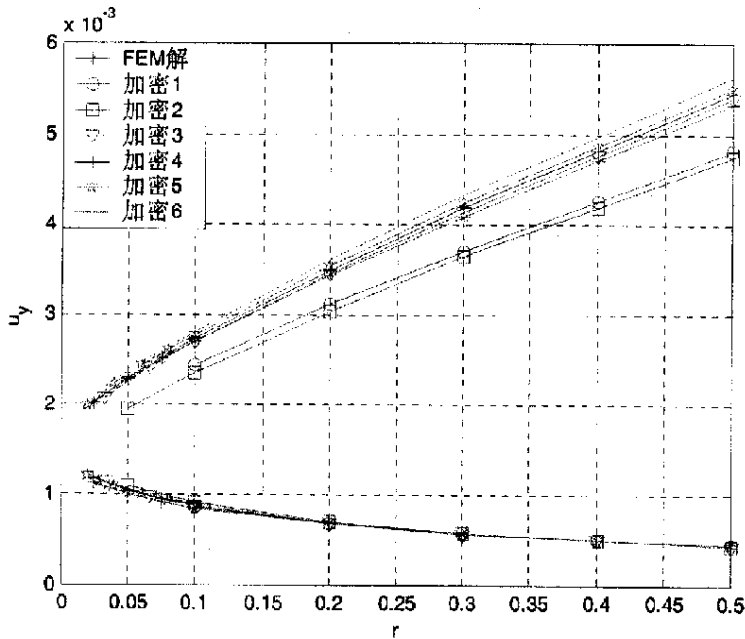


图 5.7 不同加密程度裂纹面上的 y 向位移

由图 5.7 可见, 裂纹面上计算点位移的精度并非随加密程度的增加而单调提高。当加密达到一定程度时, 精度达到最高。此后随着加密程度的增加, 精度下降。这主要是数值积分产生的累积误差逐渐占主导地位的缘故。

图 5.8~5.11 给出加密区域的 y 向应力。

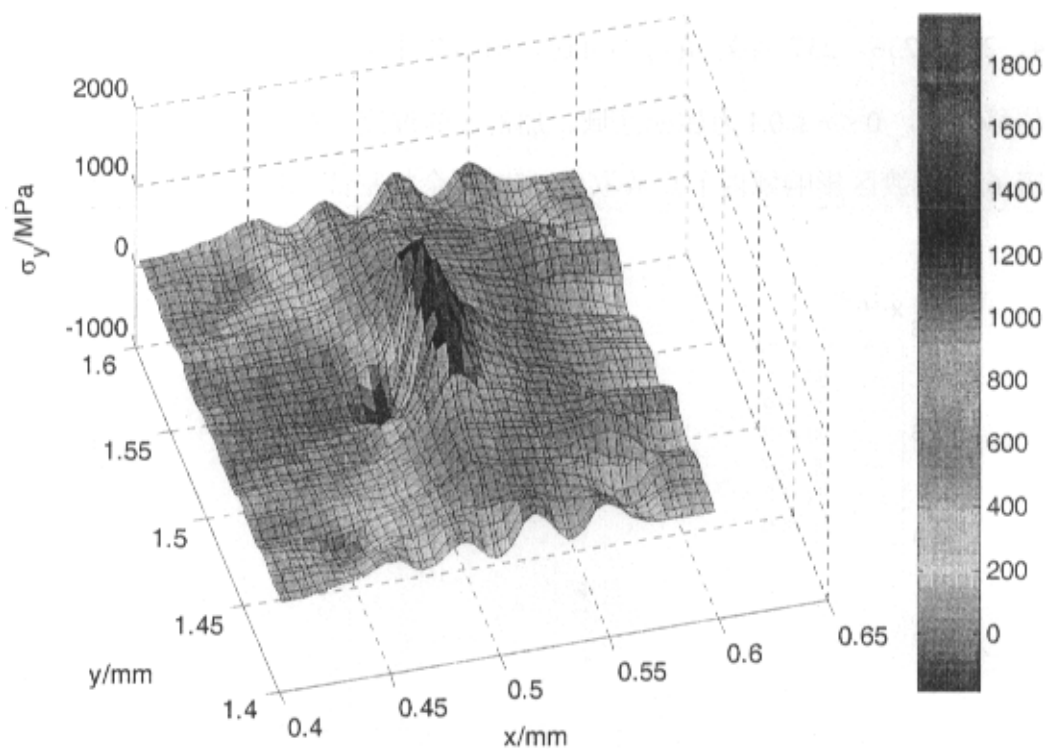


图 5.8 加密 6 时加密区域的应力

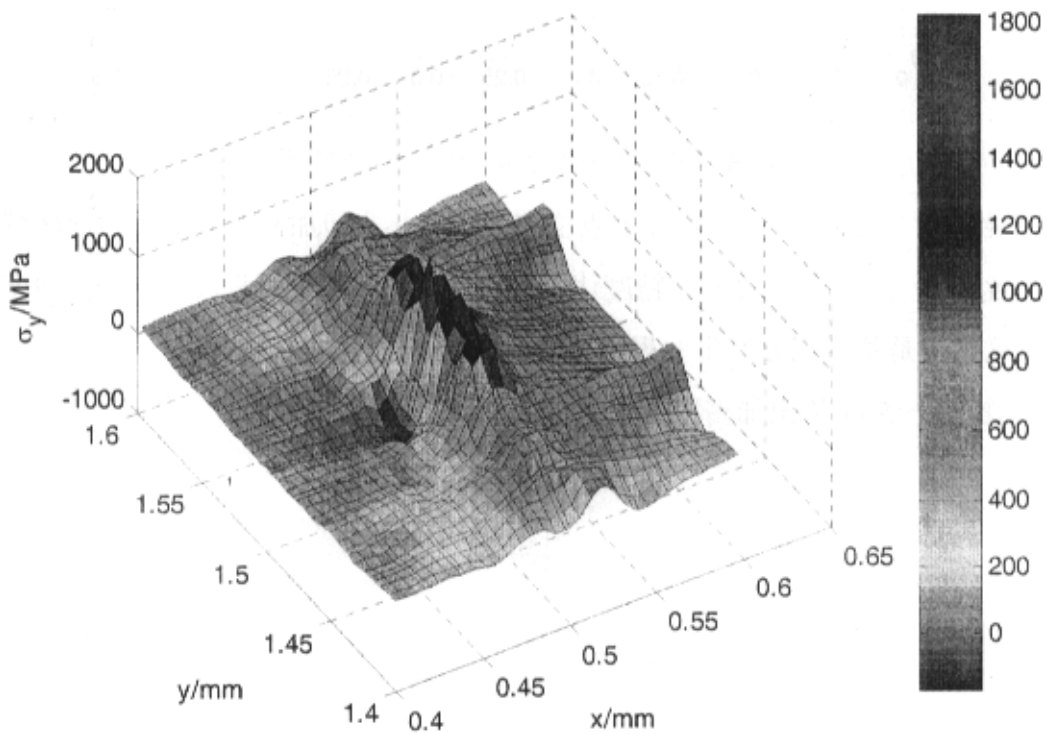


图 5.9 加密 5 时加密区域应力

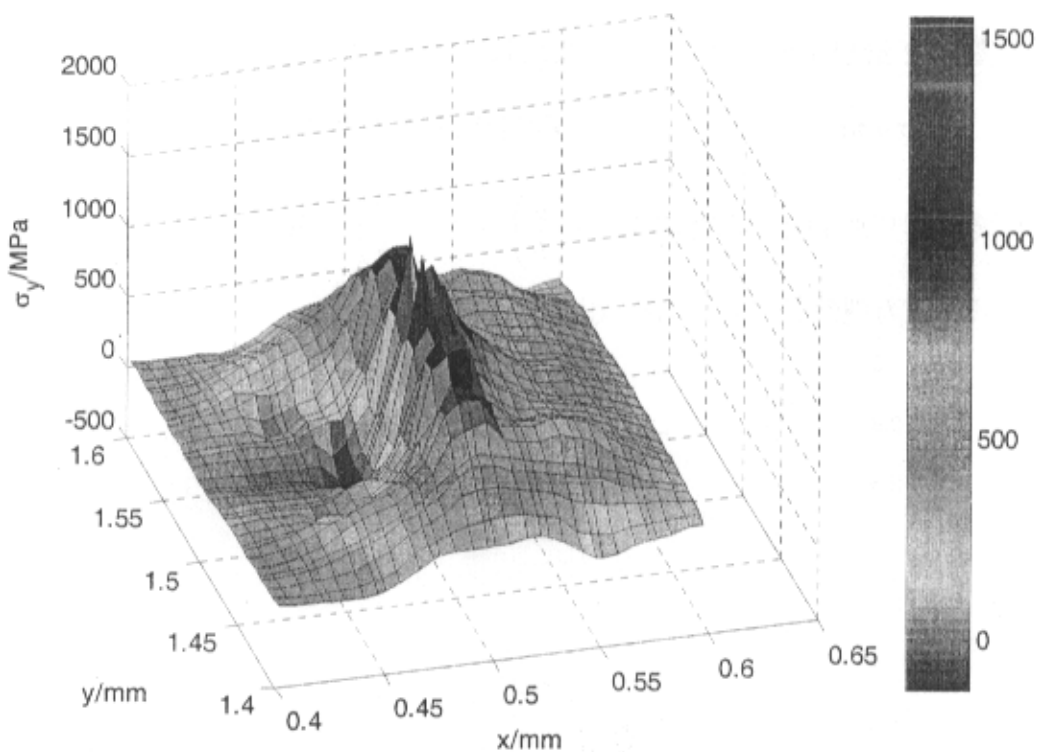


图 5.10 加密 4 时加密区的应力

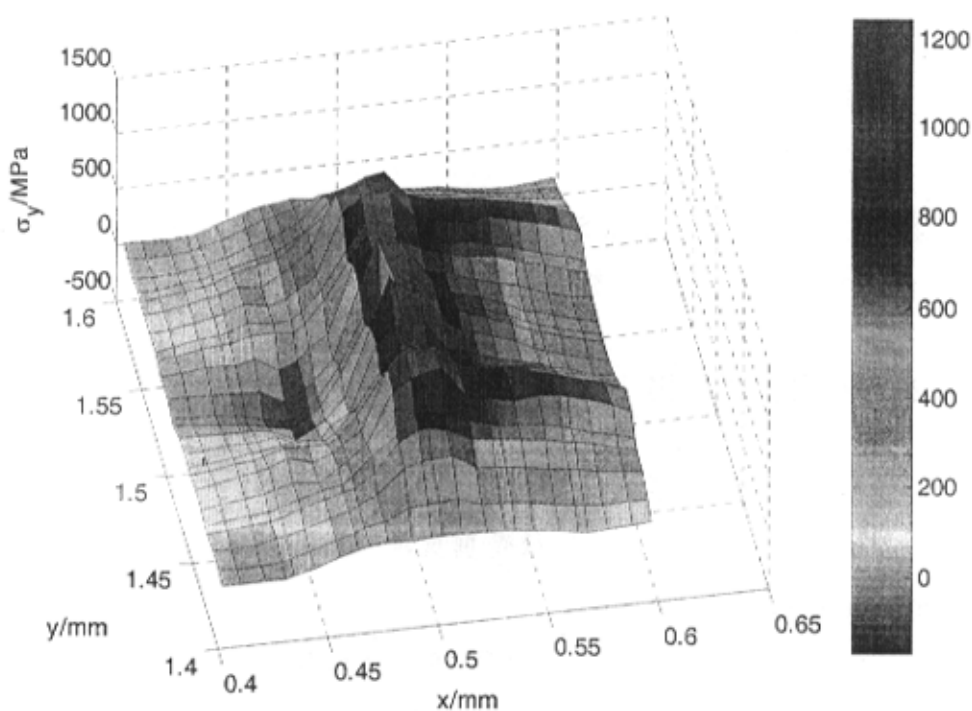


图 5.11 加密 3 时加密区的应力

由图 5.8~5.11 可见, 过渡区应力波动随着节点密度梯度的增加而增加。可

视性法则准确地反映了裂尖附近应力场的奇异性。

图 5.12 给出不同加密程度下, 裂纹长度由 0.1 变到 0.5 时无量纲应力强度因子 $F = K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 同手册解的比较。文献[39]给出的 F 表达式为:

$$F = 1.12 - 0.23 \frac{a}{b} + 10.6 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 21.7 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 30.4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \quad (5.2.1)$$

式中 a 为裂纹长度, b 为板宽。

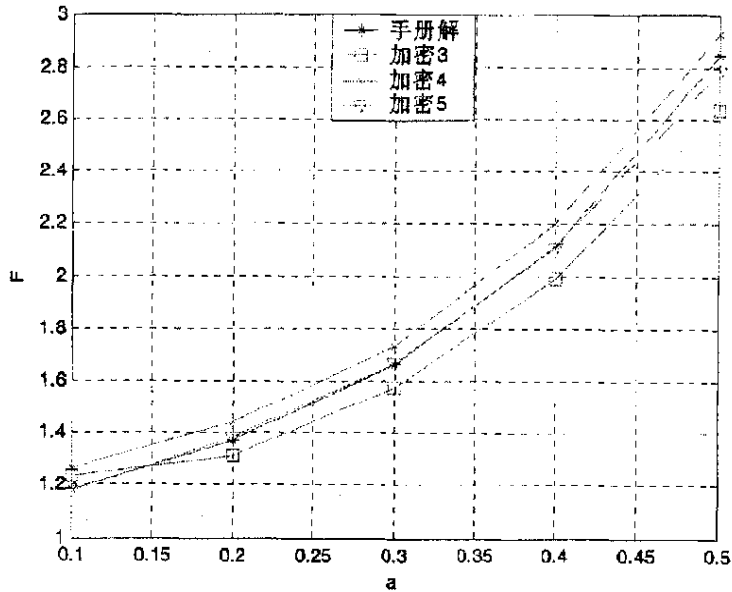


图 5.12 双向拉伸边裂纹板的无量纲应力强度因子

由图 5.12 可见, 局部加密 5 时, 应力强度因子的计算可以达到很高的精度。局部加密对应力强度因子的计算有较大影响。

5.2.2 三点弯曲梁结构

图 5.13、.5.14 为含裂纹三点弯曲梁结构及其离散图。梁的长度 $L = 4mm$, 宽度 $W = 1mm$, 厚度 $B = 1mm$ 。承受垂直集中压载荷 $P = 100N$, 弹性模量 $E = 202000MPa$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。

FEM 区使用八节点等参元进行离散, 单元边长为 0.2, EFGM 区非加密区节点间距为 0.1, 加密区节点间距为 0.02。采用高斯型权函数和二次基计算, 可视性法则处理不连续性。

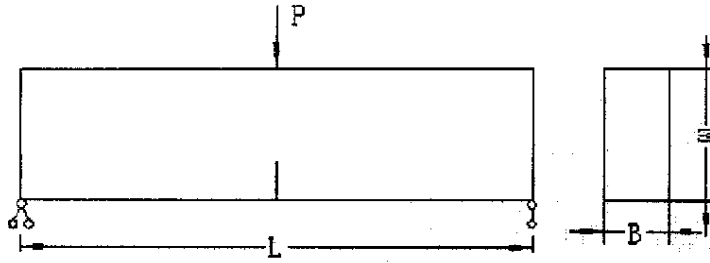


图 5.13 三点弯曲梁结构

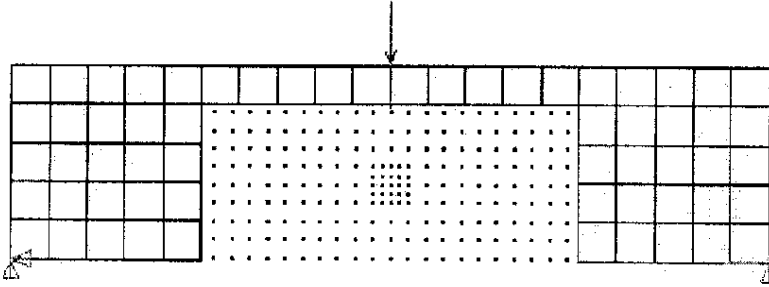


图 5.14 三点弯曲梁的离散模型

由算例 1 知，局部加密 5 时，计算结果较为精确，此算例裂尖局部区域取同样加密方案。由手册知，无量纲应力强度因子 $f = \frac{K_1 B (\sqrt{H})^3}{M}$ ，其中 $M = \frac{1}{4} PL$ 。

计算值同理论值的比较如图 5.15。

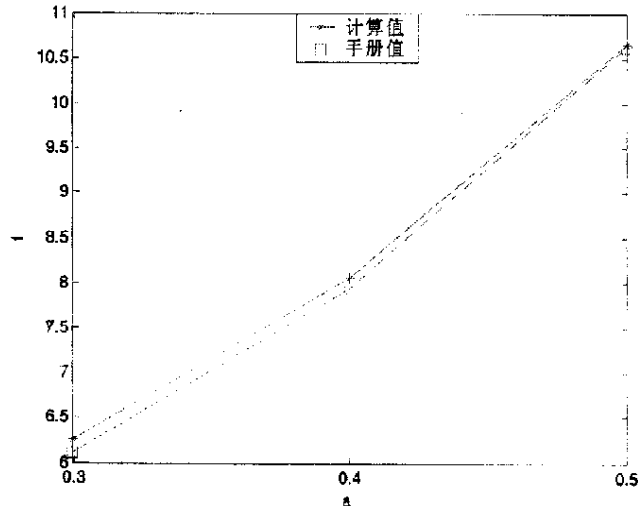


图 5.15 三点弯曲梁结构的应力强度因子计算

由图 5.15 可见，计算得到的无量纲应力强度因子同手册解较为吻合。

第六章 结论与展望

6.1 主要工作总结

本文的主要工作主要分为两个部分：理论研究和算法实现。

6.1.1 理论研究

在这部分工作中，又分为三小部分。一是无网格法的理论研究，主要是无网格伽辽金法（EFGM）的研究，清晰 EFGM 方法的基本思路，具体公式推导以及长处和不足。二是耦合方法的理论研究，对各种耦合方法的特点进行了探讨，提出 EFGM-FEM 直接耦合方法。三是耦合方法同直接位移法的结合，求解了典型结构的应力强度因子并同手册解进行比较，证明了方法的正确性。

6.1.2. 算法实现

算法实现分为三部分：前处理部分、计算部分、后处理部分。

由于涉及到两种离散方式，有限元单元离散和无网格的节点离散。寻求合适的前处理方案，对整个程序的计算效率及易用性有较大影响。本文中利用大型有限元软件 ansys 强大的前处理及良好的接口功能，使用 APDL 语言编制宏命令实现了前处理。使用易于程序升级，思路清晰的 C++ 语言编制了主要的计算程序，该程序具有良好的适应性，理论上对计算规模没有限制。本文使用 matlab 仿真软件实现后处理工作，主要包括各种曲线的绘制，位移云图和应力云图的绘制，三维曲面的绘制等。本文中结构离散图、位移云图、应力云图、计算曲线等均由前、后处理程序绘制。

6.2 主要结论

1. 本文提出的紧支性控制因子 $\beta = \frac{d_m}{c}$ 可以有效地控制高斯型权函数的紧

支性，并不受影响域半径的影响。算例证明， $\beta = 3 \sim 5$ 时计算结果精确度较高。

2. 本文提出的针对二次基函数在节点影响域内取 15 个点的布点方案, 在二维均匀分布的情况下, 且选用本文提出的权函数参数选取方法时, 可以确保矩阵 $A(x)$ 可逆。

3. 与有限元相比, 使用 EFGM 方法计算得到的应力是连续的, 不需进行应力磨平等处理, 给后处理带来了方便。

4. 基于本构方程积分弱形式的 EFGM-FEM 耦合方法在耦合边界上位移的连续性较好, 应力有小的跳跃, 但并不影响结构内部位移和应力的正确获取。

5. 本文提出的基于广义单元的概念的 EFGM-FEM 直接耦合法, 能够很好的保证计算精度, 且简便、实用、计算量小。

6. 采用可视性准则可以较好的处理裂纹不连续性问题, 在裂尖附近节点的间距很小时, 由可视性准则引入的额外的不连续性可以忽略, 并不影响裂尖位移的计算精度。

7. 一般情况下, 在位移、应力变化剧烈的区域加密节点密度可以提高计算精度, 但并不是局部加密程度越高, 计算精度越高。局部加密的梯度不宜过大。

8. EFGM-FEM 直接耦合法同直接位移法相结合, 可以精确地计算含裂结构裂尖的应力强度因子。

6.3 改进和展望

本文工作有待于在以下几个方面进行改进和提高:

1. 积分方案的改进

EFGM 方法中, 积分的精度对最终计算结果的精度有直接的影响。使用背景积分网格方案, 积分网格的大小应与计算点的影响域之间满足一定对应的关系, 积分精度才能达到最高, 这一方面有待探讨。

2. 布点方案的优化

如何选择合适的布点方案, 节点的密度如何控制才能同时保证计算效率和精度, 需要找出通用方法。

3. 对裂纹等不连续问题的处理。

虽然使用可视性总则可以精确地得到裂纹面上的位移, 但由三维图可以看出, 裂尖附近的应力是有波动的, 应该进一步寻求解决方法。

4. 直接耦合方法的应用

EFGM-FEM 直接耦合方法潜力很大,有必要将其推广应用于三维断裂分析以及复杂的接触问题等方面的研究。

参考文献

1. T.Belytschko, Y.Krongauz, D.Organ. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139(1996)3-47.
2. 曹国金, 姜弘道. 无单元法研究和应用现状及动态. *力学进展*, 2002, 32 (4) 526-534
3. Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Engrg.* 1994, 37(2): 229~256
4. Belytschko T, Gu L, Lu Y Y, Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods. *Modelling and in Simulation Material Science and Engineering*, 1994, 2: 519~534
5. Belytschko T, Lu Y Y, Gu L, Tabbara M. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal for Solids Structures*, 1995,32(17): 2547~2570
6. Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*1981;37:141~158.
7. Lucy L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *A.J.*, 82:1013~1024
8. Gingold RA, Monaghan JJ. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *Journal of Computational Physics* 1982;46:429~453.
9. Libersky LD, Petschek AG. Smoothed particle hydro-dynamics with strength of materials. In *The Next FreeLagrange Conference*. Trease H, Fritts J, Crowley W, editors. 248~257, 1991.
10. Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, 1995, 116(1): 123~134
11. Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. SPH for high velocity impact computations. *Comput Methods Appl Mech Engrg.*1996,139: 347~373
12. Attaway SW, Heinstein MW, Swegle JW. Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method. *Nuclear Engineering and Design* 1994;150:199~205
13. Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics* 1992;10:307~318.
14. Liu W K, Jun S, Adee J, Belytschko T. Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Methods Engrg.* 1995, 38(10):1655~1679
15. Duarte CAM, Oden JT. An hp adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering 1996;139:237~262.
16. Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method: Basic theory and application. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139(3): 289~314
 17. Sulsky D, Zhou SJ, Schreyer HL. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computers and Physics Communications* 1995;87:236~253.
 18. Liszka T, Orkisz J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers and Structures* 1980;11:83~95.
 19. Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OC, Taylor RL, Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1996;139:315~346.
 20. Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics. *Int J Numer Methods Engrg*, 1998, 43(5): 839~887
 21. Amaratunga K, Williams J R. Wavelet-Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations. *Int J Numer Methods Engrg*, 1994,37(16):2703~2716
 22. 张雄, 宋康祖, 陆明万. 紧支试函数加权残量法. *强度与环境*, 2000, 增刊: 58~63
 23. 张雄, 厚胡炜, 潘小飞, 陆明万. 加权最小二乘无网格法. 见: 袁明武, 孙树立编. *工程与科学中的计算力学*, 中国计算力学大会 2001 论文集, 广州, 2001 年 12 月 6-8 日. 北京: 北京大学出版社, 2001. 333~338
 24. 宋康祖. 紧支函数无网格方法研究: [博士论文]. 北京: 清华大学, 2000
 25. 刘欣. 无网格数值方法研究: [博士论文]. 南京: 南京航空航天大学, 1998
 26. 刘欣, 朱德懋, 陆明万, 张雄. 基于流行覆盖思想的无网格方法的研究. *计算力学学报*, 2001, 18(1):21~27
 27. 周忠瑞, 周小平, 缪冰. 具有自适应影响半径的无单元法. *工程力学*, 2001, 18(6):94~99
 28. 庞作会, 葛修润, 郑宏等. 一种新的数值计算方法—无网格伽辽金法. *计算力学学报*, 1999, 16(3): 320~329
 29. 庞作会, 葛修润, 王水林等. 对无网格伽辽金法 (EFGM) 的两点补充. *岩土力学与工程学报*, 1999, 18(5): 581~584
 30. Pang ZH. Treatment of point loads in element free Galerkin method(EFGM). *Commun Numer Meth Engrg* 2000;16:335~341

31. B.N.Rao,S.Rahman. A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 78(2001) 647-657
32. Q.Z.Xiao,M.Dhanasekar . Coupling of FE and EFG using collocation approach. *Advance in Engineering Software* 33(2002) 507-515
33. Y. Krongauz, T. Belytschko. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Compu.Methods Appl.Mech.Engrg.* 131(1996) 133-145
34. D.Hegen. Element-free Galerkin method in combination with finite element approaches. *Compu.Methods Appl.Mech.Engrg.* 135(1996) 143-166
35. J.Dolbow, T. Belytschko. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. *Computational Mechanics* 23(1999) 219-230.
36. Belytschko T , Organ D , Krongauz Y. A coupled finite element-element-freeGalerkin method. *Computer Mechanics* ,1995 ,17 :186 ~ 195.
37. Timosheko Sp,Goodier JN. *Theory of elasticity*,3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970.
38. 黄维扬. 工程断裂力学, 航空工业出版社, 1992 年。
39. 黄玉珊等. 应力强度因子手册, 科学出版社, 1981。

在研期间发表的学术论文：

1. 贾亮, 黄其青, 殷之平。含裂铆接搭接结构的应力强度因子求解方法, 机械强度, 2004, 26(4): 439~442.
2. 贾亮, 黄其青, 刘进征, 王锋。基于积分弱形式的无网格—有限元法耦合方法研究, 机械强度, 已录用.
3. 贾亮, 黄其青。无网格—有限元直接耦合法, 已投稿。

致 谢

本文的完成得到了黄其青老师的悉心指导和大力支持。黄老师严谨的治学态度、渊博的专业知识、细致认真的工作作风和诲人不倦的育人精神一直是我学习的榜样，这种精神也使我获益匪浅，是我今后工作和进行科研的一笔宝贵财富。衷心感谢黄老师三年来对我无微不至的关怀和悉心教导！

感谢师兄殷之平在我论文研究过程中热心的指导和大力支持，殷之平师兄开阔的眼界和丰富的专业知识给了我很多启发和灵感，其平易近人的态度和不厌其烦的讲解，使我深感同学之间真诚朴实的感情。

感谢师兄梁尚清在我论文研究过程中热心的指导和大力支持！

感谢 504 教研室谢伟、陈建设、谷迎松、舒仲平等同学对我的鼓励和支持！

贾亮

2006-3-8

西北工业大学

学位论文知识产权声明书

本人完全了解学校有关保护知识产权的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属于西北工业大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。学校可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律注明作者单位为西北工业大学。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名：贾亮

2006年 3月 20日

指导教师签名：董明

2006年 3月 20日

西北工业大学

学位论文原创性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容和致谢的地方外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表或撰写过的研究成果，不包含本人或他人已申请学位或其它用途使用过的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本人学位论文与资料若有不实，愿意承担一切相关的法律责任。

学位论文作者签名：贾亮

2006年 3月 20日