

摘 要

分别针对连续和离散情形的奇异摄动系统,以线性矩阵不等式的形式给出了其降阶有限频域 H_∞ 滤波问题有解的充分必要条件,而且,当问题有解时给出了一组适当的滤波器参数。另外,为了避免由于慢快子系统相互作用而产生病态的线性矩阵不等式,给出了与奇异摄动参数 ε 无关的充分条件。由于不需要对奇异摄动系统的状态进行快慢分解,这一方法可以推广到非标准奇异摄动系统。

对于一般的线性系统,在广义 KYP 引理的基础上,给出了存在状态反馈控制律使其闭环系统稳定并且具有有限频域正实特性的充分必要条件,而且当条件可行时,给出了一组适当解。然后,用一般线性系统的结论去研究奇异摄动系统,给出了使其闭环系统稳定且有限频域正实的合成状态反馈控制律。

基于广义 KYP 引理,研究了 SISO 奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题,推导出了存在 H_∞ 次优控制器的充分必要条件,而且控制器具有奇异摄动形式。

最后,用特征结构配置的完全参数化方法研究了带有极点配置要求的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题。证明了全阶问题可以分解为快慢子问题,通过分别设计状态反馈控制器去解决快慢子问题,进而构造合成控制器。

关键词: 奇异摄动系统, 有限频域, H_∞ 控制, 正实控制, 线性矩阵不等式。

Abstract

This paper deals with the reduced-order finite frequency H_∞ filtering problem for singularly perturbed systems. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to continuous-time and discrete-time problems are derived in terms of linear matrix inequalities. Furthermore, a formula for all the desired reduced-order filters is given when these conditions are feasible. In order to alleviate ill-conditioned LMIs resulting from the interaction of slow and fast dynamic, the sufficient conditions which are independent of the singularly perturbation ϵ are given. Since the separation of states into slow and fast ones is not involved, the results are applicable to not only standard, but also non-standard singularly perturbed systems.

For the general linear systems, necessary and sufficient conditions for the existence of a stabilizing state feedback controller are given based on the generalized KYP lemma, and use the results to study singularly perturbed systems, a composite state feedback controller is constructed, which preserves the stability and positive real property.

This paper also studies the model matching problem for SISO singularly perturbed systems in the (semi)finite frequency ranges. The necessary and sufficient conditions for the existence of an H_∞ sub-optimal controller are derived based on the generalized KYP lemma, moreover, the controller is also singularly perturbed. It is further shown that this controller is obtained through designing its slow and fast parts, and then the composite controller is established.

Finally, based on the completely parametric approach to eigenstructure assignment, the problem of finite frequency H_∞ control for singularly perturbed systems with pole assignment constraint is studied. The purpose is to design a state feedback controller such that the eigenvalues of the closed-loop state matrix are at desired locations, and a prescribed H_∞ performance level is also achieved in the given low and high frequency ranges. It is further shown that the problem of full-order system could be break down into fast and slow subproblems, through designing state feedback controllers to solve the fast and slow subproblems, respectively, a composite controller is constructed on the basis of the above two controllers.


Key words: Singularly perturbed systems, finite frequency, H_∞ control, positive real control, linear matrix inequality.

符号及缩写语说明

R	实数集合
$R^{m \times n}$	$m \times n$ 维实矩阵
C	复数集合
$C^{m \times n}$	$m \times n$ 维复矩阵
M^T	矩阵 M 的转置
M^{-1}	矩阵 M 的逆
M^*	矩阵 M 的复共轭转置
M^\dagger	矩阵 M 的 Moore-Penrose 逆
M^\perp	表示满足 $M^\perp M = 0$ 且 $M^\perp M^{\perp T} > 0$ 的矩阵
H_n	$n \times n$ 维 Hermitian 矩阵
$\Phi \otimes P$	矩阵 Φ 和 P 的 Kronecker 乘积
$\text{He}(M)$	$\text{He}(M) = M + M^*$
$\sigma(G, \Pi)$	$\sigma(G, \Pi) = \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix}^\top \Pi \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix}$
$\Lambda(\Phi, \Psi)$	$\Lambda(\Phi, \Psi) = \{\lambda \in C \mid \sigma(\lambda, \Phi) = 0, \sigma(\lambda, \Psi) \geq 0\}$
$X < Y$	$X = X^*, Y = Y^*, X - Y$ 为负定矩阵
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
RH_∞	所有正则稳定的有理函数
Φ_z	所有稳定的两频率尺度传递函数
SISO	单输入单输出
MIMO	多输入多输出

声 明

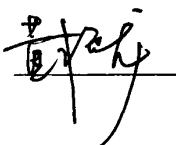
本学位论文是我在导师的指导下取得的研究成果，尽我所知，在本学位论文中，除了加以标注和致谢的部分外，不包含其他人已经发表或公布过的研究成果，也不包含我为获得任何教育机构的学位或学历而使用过的材料。与我一同工作的同事对本学位论文做出的贡献均已 在论文中作了明确的说明。

研究生签名：

2010年6月24日

学位论文使用授权声明

南京理工大学有权保存本学位论文的电子和纸质文档，可以借阅或上网公布本学位论文的部分或全部内容，可以向有关部门或机构送交并授权其保存、借阅或上网公布本学位论文的部分或全部内容。对于保密论文，按保密的有关规定和程序处理。

研究生签名：

2010年6月24日

第1章 绪论

本章首先简要叙述奇异摄动系统的背景及其数学模型；然后，围绕本论文的研究内容讨论奇异摄动系统在控制理论中的研究现状及存在的问题；最后介绍了本论文的主要工作。

1.1 引言

一般较复杂一些的工程实际问题总含有多个不同量级的时间常数^[1-3]，即系统的动态变化速度存在极大的差异。早期对这类系统的处理方法是简单地忽略较小时间常数从而降低系统的阶数，达到简化模型的目的。但是，为了提高系统分析与设计的精度，必须考虑这些小参数的影响。因此如何有效的处理这类系统成为在系统理论与控制工程中较为重要的实际问题。

奇异摄动系统就是一种典型的具有双时间尺度的系统，有时也称为为双时标系统。边界层法是研究上述系统主要的手段^[1]。边界层法是由 Prandtl 在研究流体动力学问题时提出的，它把高阶含小参数的奇异摄动问题转化成不含小参数的问题来求解，给系统的分析和设计地带来了好处，同时避免了维数的灾难以及 Stiff 方程求解的困难。在系统理论研究中，线性时不变奇异摄动控制系统的相关问题得到了充分的关注^[2-3]。该系统模型具有如下形式^[1]：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 ε 为摄动项，它是一个趋近于零的正数； x_1 为适当维数的慢变状态变量； x_2 为适当维数的快变状态变量；这里如果矩阵 A_{22} 非奇异，那么系统(1.1)就是标准奇异摄动系统，反之则是非标准奇异摄动系统。

实际上，奇异摄动特性的快变变量出现在许多系统中，这其中包括大多数维数很大的系统。如电力系统，频率和电压的瞬变过程占用的时间可以从几秒钟到几分钟。在许多其他的实际过程中也有类似的时标特性，如飞机和火箭系统等。

与奇异摄动概念对应的是正则摄动，正则摄动发生在系统状态方程的右边，是系统参数的摄动；而奇异摄动在发生在状态方程的左边，是状态的摄动，在形式上是小参数乘以状态变量的时间导数。

对于离散奇异摄动系统, 由于采样速率的不同存在多种形式, 下面给出本论文主要研究的快采样模型^[3]:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= (I + \varepsilon A_{11})x_1(k) + \varepsilon A_{12}x_2(k) + \varepsilon B_1u(k) \\x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u(k) \\y(k) &= C_1x_1(k) + C_2x_2(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{1.2}$$

1.2 奇异摄动系统的研究现状

本节将要介绍与本论文工作相关的问题研究现状及存在的问题。

1.2.1 奇异摄动系统的 H_∞ 控制

在过去几十年中, 奇异摄动系统的 H_∞ 控制问题得到了广泛的关注^[4-18]。众所周知, 对于奇异摄动系统, 多时间尺度和多频率尺度是其内在特性。传统的研究方法都采用了分两步的设计步骤, 也就是所谓的降阶技术。首先针对快子系统和修正后的慢子系统分别设计次优控制器, 然后根据上述控制器可以得到合成控制器。文[5]研究了加权灵敏度问题, 将其分解成慢快子问题, 然后通过合并子问题的解给出了原问题的近似解。文[6]解决了 MIMO 奇异摄动系统的 H_∞ 控制问题, 给出了存在次优解得充分必要条件。文[7]基于线性矩阵不等式(LMI)方法, 研究了一类非线性奇异摄动系统的 H_∞ 滤波问题。文[8]研究了 SISO 两频率尺度系统的次优模型匹配问题, 通过求解慢快子系统的模型匹配问题得到了次优 H_∞ 解。文[12]给出了具有两频率尺度结构的次优 H_∞ 控制器以及设计独立于 ε 的 H_∞ 次优控制器的步骤。文[14]研究了带有慢快模态的线性系统的 H_∞ 滤波问题, 给出了完全独立的降阶快慢 H_∞ 滤波器。尽管在 H_∞ 问题上, 已经存在大量的结果, 然而, 这些结果都将研究范围定义在整个频域范围内。考虑到实际应用中通常给出不同频段上的性能指标, 而且奇异摄动系统又具有特殊的频域特性, 因此, 若研究有限频域上的 H_∞ 问题是很有意义的。

本文将基于广义 KYP (GKYP) 引理^[19-20], 在统一时间尺度上研究有限频域上的降阶 H_∞ 滤波问题, 得到的结论较全频域的结论更具有普遍性。另外, 本文从快慢分解的思想出发, 研究了分时标分频标下的模型匹配问题以及 H_∞ 控制问题, 分别在不同频段上针对子系统设计控制器, 进而得到合成控制器。通过和已有的相关结果对比, 证明本文的结论具有更低的保守性。

1.2.2 奇异摄动系统的正实控制

线性电路和线性系统理论中, 正实性是一个非常重要的概念^[21-22]。这个概念出现在系统和控制理论中的许多领域, 其中, 与之相关的一个著名结论就是: 当正实系统通过负反馈与严格正实控制器相连接时, 闭环系统稳定^[21]。对于奇异摄动系统, 正实

性也是其重要性质,然而就目前而言,很少有文献涉及。

有限频域正实特性这一概念首次出现在文[19, 23]中,该文献指出,实际中的控制带宽是有限的,有限频域上的正实特性是至关重要的,并且给出了一系列的例证来说明有限频域上的正实特性对实现较好控制性能的重要性。既然有限频域正实特性实质上起到了重要的作用,考虑到奇异摄动系统在低频和高频可以分别由其慢快子系统近似,那么研究奇异摄动系统的有限频域正实特性将是合情合理的,这时奇异摄动系统的频域特性将会充分考虑进去,相应地,保守性将会减少,设计过程将得到简化。

考虑到正实性的重要性,近期文[22]研究了奇异摄动系统的有限频域正实控制问题,以非线性矩阵不等式的形式给出了问题可行的充分条件。在本文中,首先研究一般线性系统在有限频域上的状态反馈控制,继而用上述结果去研究奇异摄动系统的有限频域严格正实控制问题。针对快子系统和慢子系统分别设计状态反馈控制器,进而可以构造合成控制律,最后通过简单的算例验证了本文结论的有效性。

1.2.3 奇异摄动系统的稳定性问题

对线性时不变奇异摄动系统,其稳定性的分析结果通常是根据快慢分解得到的,也就是如果慢、快子系统均是稳定的,那么对于系统的摄动参数,一定存在一个稳定的上界,使得在此范围内奇异摄动系统都是稳定的^[1]。该方法避免了由于摄动参数引入的病态问题,并且将奇异摄动系统的稳定性转化为快慢两个子系统的稳定性,因此直到现在,仍然是分析稳定性的主要方法之一^[3]。

在线性系统理论方面,特征结构配置是非常重要的问题,已经得到了许多学者的关注^[24-29]。文[26]提出了特征结构配置的完全参数化方法,该方法给出了所有反馈增益和闭环特征向量的数学表达式,提供了完备的可行解空间,全部的自由度也可以用来满足一些附加的系统指标。

本文在文[26-27]的基础上,研究奇异摄动系统的极点配置问题,从而解决奇异摄动系统的稳定性问题。通过将全阶问题分解为快慢子问题,然后分别针对子问题进行极点配置,就可以得到实现全阶系统极点配置的合成状态反馈控制律。

1.3 本论文的研究思路与主要工作

在实际应用中,设计指标常常以不同频段来刻画。GKYP 引理可以将有限频域上的频域不等式直接转换成相应的线性矩阵不等式,因此 GKYP 引理可作为本文有限频域研究的理论基础。对于奇异摄动系统,慢快子系统可以分别理解为在低频和高频对全阶系统的近似,本文将充分考虑这一频域特性,结合双时标分解的方法,进一步深入研究分时标和分频标组合的设计思想。

论文的主要工作如下:

(1) 研究了奇异摄动系统的降阶有限频 H_∞ 滤波问题, 分别针对连续和离散情形, 以 LMI 的形式给出了滤波问题有解的充分必要条件, 而且, 给出了解存在情形下的一组滤波器参数。另外, 对于滤波问题给出了与奇异摄动参数 ϵ 无关的充分条件。特别地, 当滤波器阶数为零时, 本文给出了零阶滤波器存在的充分必要条件。

(2) 研究了有限频域上奇异摄动系统的严格正实控制问题。对于一般的线性系统, 在 GKYP 引理的基础上, 给出了存在状态反馈控制律使其闭环系统稳定并且具有有限频域正实特性的充分必要条件, 而且当条件可行时, 给出了一组适当解。然后, 用一般线性系统的结论去研究奇异摄动系统, 给出了使其闭环系统稳定且具有有限频域正实特性的合成状态反馈控制律。

(3) 研究了 SISO 奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题。给出了奇异摄动系统的低频和高频的定义, 并且对 PID 控制器进行简单的改进。基于 GKYP 引理, 推导出了存在 H_∞ 次优控制器的充分必要条件, 而且控制器具有奇异摄动形式。

(4) 研究了带有极点配置限制的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题。也就是设计状态反馈控制器使得闭环系统的极点在要求的位置, 同时在低频和高频段内满足预定的 H_∞ 性能指标。基于完全参数化方法, 自由度可以用来实现有限频域上的预定 H_∞ 性能指标, 而这一指标又可以通过 GKYP 引理转化为 LMIs。证明了全阶问题可以分解为两个降阶子问题, 即快子问题和慢子问题。同时, 本文以 LMIs 的形式给出了子问题有解的充分条件, 并且当条件满足时, 进一步给出了适当解, 最后在两个子问题的适当解的基础上可以构造合成控制器。

本论文具体章节安排如下: 第二章研究了奇异摄动系统的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题; 第三章研究了奇异摄动系统的有限频域正实控制问题; 第四章讨论了 SISO 奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题; 第五章带有极点配置要求的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题。

第2章 奇异摄动系统的降阶有限频域 H_∞ 滤波

本章研究了奇异摄动系统的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题, 分别针对连续和离散情形, 以线性矩阵不等式(LMI)的形式给出了滤波问题有解的充分必要条件, 而且, 给出了解存在情形下的一组滤波器参数。为了避免由于慢快子系统相互作用而产生病态 LMI, 给出了与奇异摄动参数 ε 无关的充分条件, 既然不需要对奇异摄动系统的状态进行快慢分解, 本章的结论不只可以应用到标准奇异摄动系统, 也可以是非标准系统。

2.1 引言

在航空、导航和信号处理领域, Kalman 滤波是最基础的理论之一^[30-33]。在系统和测量噪声密度矩阵已知的前提下, Kalman 滤波方法提供了一种迭代算法^[32], 该算法可以使得状态估计误差的方差最小化。近来, H_∞ 滤波得到了广泛的应用, 原因就在于和 Kalman 滤波相比, 前者不需要噪声的统计特性, 同时针对来自内部或外部的扰动更具有鲁棒性。

降阶 H_∞ 滤波问题, 即设计小于给定系统阶数的滤波器, 使得滤波误差系统稳定, 并且其 H_∞ 范数满足预定要求, 已经引起了学者的重视^[34-36]。例如文[35]研究了连续和离散线性时不变系统的降阶 H_∞ 滤波问题, 并且给出了滤波问题有解的充分必要条件。在过去很长一段时间里, 奇异摄动系统也得到了充分的关注。由于小摄动参数的存在, 这通常导致奇异摄动系统的出现。奇异摄动系统的 H_∞ 滤波问题方面也有深入的研究^[7, 34, 37], 如文[7]基于 LMI 方法, 研究了一类非线性奇异摄动系统的 H_∞ 滤波问题。文[34]研究了带有快慢模态的线性系统的降阶 H_∞ 最优滤波。尽管在 H_∞ 滤波问题上, 已经存在大量的结果, 然而, 这些结果都将研究范围定义在整个频域范围内。考虑到实际应用中通常给出不同频段上的性能指标, 而且噪声的频域范围一般是事先知道的, 因此若研究有限频域上的 H_∞ 滤波问题是很有意义的。

本章将研究奇异摄动系统的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题, 即设计小于给定系统阶数的滤波器, 使得滤波误差系统稳定, 并且使其在给定频段内的 H_∞ 范数满足预定要求。基于广义 KYP (GKYP) 引理^[19, 38], 分别针对连续和离散情形, 本章以 LMI 的形式给出了滤波问题可行的充分必要条件, 并且当问题可行时, 给出了一组适当解。同时, 考虑到由于慢快子系统相互作用将会出现病态的 LMI, 文中给出了与奇异摄动参数 ε 无关的充分条件, 该结论对标准和非标准奇异摄动系统同样适用。

2.2 连续情形下的有限频域 H_∞ 滤波

考虑 n 阶稳定的连续奇异摄动系统:

$$(\Sigma_e): \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_e x(t) + B_e \omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Gx(t) \end{aligned}$$

或其扩展形式为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1\omega(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2\omega(t) \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \\ z(t) &= G_1x_1(t) + G_2x_2(t) \end{aligned}$$

其中: $x(t) = [x_1(t)^T \ x_2(t)^T]^T \in R^n$ 是状态向量, $y(t) \in R^m$ 是测量输出, $z(t) \in R^q$ 是需要估计的信号, $\omega(t) \in R^p$ 是干扰信号. A_e, B_e, C, G 为具有适当维数的实常数矩阵.

考虑 \hat{n} 阶线性滤波器, 这里, $\hat{n} \leq n$:

$$(\Sigma_f): \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + B_f y(t) \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) + D_f y(t) \end{aligned}$$

其中: $\hat{x}(t) \in R^{\hat{n}}$, $\hat{z}(t) \in R^q$. 滤波参数 $A_f \in R^{\hat{n} \times \hat{n}}$, $B_f \in R^{\hat{n} \times m}$, $C_f \in R^{q \times \hat{n}}$, $D_f \in R^{q \times m}$ 为需要计算的矩阵.

相应地, 滤波误差系统如下:

$$(\Sigma_\alpha): \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\omega(t) \\ e(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

其中: $\tilde{x}(t) = [x(t)^T \ \hat{x}(t)^T]^T$, $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_e & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [G - D_f C \quad -C_f].$$

记从干扰信号 $\omega(t)$ 到估计误差 $e(t)$ 的传递函数为 $G_\alpha(s)$. 那么, 连续情形下, 降阶有限频域 H_∞ 滤波问题可以描述为:

给定 $\Phi, \Psi \in H_2$, $\gamma > 0$, 寻求 Σ_f 使得:

(C1) Σ_{ce} 稳定.

(C2) $\|G_{ce}(s)\|_{\infty} < \gamma, \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$.

注2.1 对连续情形, 选择 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 通过恰当的选择 Ψ, Λ 就可以表示低频、中频或是高频^[19], 这时如果定义 $W = \{\omega | j\omega \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)\}$, 那么有限频域 H_{∞} 范数条件(C2)是指 $\sup_{\omega \in W} \sigma_{\max}(G_{ce}(j\omega)) < \gamma$.

值得指出的是, 当 $\hat{n} = 0$, 即为零阶(静态)滤波器, 这时, Σ_{cf} 为 $\hat{z}(t) = D_f y(t)$.

在给出本章的主要结论之前, 先给出两个引理.

引理 2.1^[19] 给定 $\Phi, \Psi \in H_2, \Pi \in H_{p \times q}$ 和 $G(s) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D$. 假设 Λ 表示复平面上的曲线并且 A 在 Λ 上无特征值. 那么, 下列描述是等价的:

(i) 对 $\forall \lambda \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T), \sigma(G^*(\lambda), \Pi) < 0$. (2.1)

(ii) 存在矩阵 $\mathcal{N}, P = P^*$ 和 $Q = Q^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} \mathcal{N} \tag{2.2}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

其中 $A \in R^{n \times n}, D \in R^{q \times p}, T$ 是置换矩阵并满足

$$[M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4] T = [M_1 \ M_3 \ M_2 \ M_4] \tag{2.3}$$

其中, M_1, M_2, M_3 和 M_4 是列数分别为 n, p, n 和 q 的任意矩阵.

证明: 对 $\forall \lambda \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T), \sigma(G^*(\lambda), \Pi) < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} (\lambda^* I - A^T)^{-1} C^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda^* I - A^T)^{-1} C^T \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \lambda^* \in \bar{\Lambda}(\Phi, \Psi).$$

根据GKYP引理^[19], 上式等价于存在矩阵 $P = P^*$ 和 $Q = Q^* > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

即

$$\begin{bmatrix} A & I & B & 0 \\ C & 0 & D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I & B & 0 \\ C & 0 & D & I \end{bmatrix}^T < 0 \quad (2.4)$$

考虑到(2.3)式中定义的 T , 可得:

$$\begin{bmatrix} A & B & I & 0 \\ C & D & 0 & I \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} A & I & B & 0 \\ C & 0 & D & I \end{bmatrix}$$

令 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, (2.4)等价于

$$\begin{bmatrix} M & I \\ I & M \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^T \begin{bmatrix} M & I \\ I & M \end{bmatrix}^T < 0 \quad (2.5)$$

注意到 $\begin{bmatrix} M & I \\ I & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} = 0$, 根据 Finsler 定理^[39], (2.5)等价于存在矩阵 \mathcal{N} 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} \mathcal{N} \right)$$

证毕。

引理 2.2^[20] 给定 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $\Phi \in \mathbb{H}_2$ 并假设 $\det(\Phi) < 0$ 。那么, 下列描述是等价的:

$$(i) \quad A \text{ 的任意特征值 } \lambda \text{ 满足 } \sigma(\lambda, \Phi^T) < 0 \quad (2.6)$$

(ii) 存在矩阵 W 和 $P = P^* > 0$ 使得

$$\Phi \otimes P < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I \\ A \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \right) \quad (2.7)$$

其中 $r = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ 任意满足 $r^* \Phi r < 0$ 的固定向量。

证明: 根据[40]中的定理 1 可知, $\sigma(\lambda^*, \Phi) = \sigma(\lambda, \Phi^T) < 0$ 当且仅当存在矩阵 $P = P^* > 0$ 满足 $\sigma(A^*, \Phi \otimes P) < 0$ 。考虑 projection 引理^[41], 可知(i) \Leftrightarrow (ii)。

证毕。

下面给出关于连续奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 滤波问题的相关结论。

定理 2.1 考虑连续奇异摄动系统 Σ_ε 的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题, 存在 n 阶滤波器 Σ_ε 的充分必要条件是存在矩阵 $X, Y, H, P = P^*, Q = Q^* > 0, P_\varepsilon = P_\varepsilon^* > 0$ 满足

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_0 YZ + \bar{B}HZ + B_0 XZ \\ C_0 YZ + \bar{E}HZ \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_0 YL + \bar{B}HL \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

其中:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}, C_0 = [G \ 0], \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \bar{E} = [0 \ -I], Z = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -qI & pI \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, p, q \in \mathbb{C} \text{ 是满足 } pq^* + qp^* < 0 \text{ 的固定向量, } T \text{ 是置换阵. 并且如果(2.8)和(2.9)}$$

成立, \hat{n} 阶 Σ_{ef} 可由下式给出:

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = H(\bar{C}Y)^{\dagger} + R(\bar{C}Y)^{\perp} \quad (2.10)$$

其中, $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$, R 是任意 $(\hat{n}+q) \times (\hat{n}+m-r)$ 维矩阵.

证明: 滤波误差系统 Σ_{ce} 具有如下形式:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_0 + \bar{B}K\bar{C})\hat{x}(t) + B_0\omega(t)$$

$$e(t) = (C_0 + \bar{E}K\bar{C})\hat{x}(t)$$

其中, $A_0 = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_0 = [G \ 0]$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{E} = [0 \ -I]$,

$$K = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix}.$$

令 $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 则

$$\sigma(G_{ce}^*(s), \Pi) = G_{ce}(s)G_{ce}^*(s) - \gamma^2 I.$$

相应的, $\|G_{ce}(s)\|_{\infty} < \gamma, \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$ 等价于 $\sigma(G_{ce}^*(s), \Pi) < 0, \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$.

根据引理 1 可知, 滤波误差系统 Σ_{ce} 满足条件(C1)的充分必要条件是存在矩阵 $\mathcal{N}, P = P^*$

和 $Q = Q^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} \mathcal{N} \quad (2.11)$$

其中 $P, Q \in \mathbb{C}^{(n+\hat{n}) \times (n+\hat{n})}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{C}^{(n+\hat{n}+p) \times (2n+2\hat{n}+q+p)}$, $M = \begin{bmatrix} A_0 + \bar{B}K\bar{C} & B_0 \\ C_0 + \bar{E}K\bar{C} & 0 \end{bmatrix}$.

令 $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix}$, (2.11)则变形为

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_{n+\hat{n}} & 0 \\ 0 & -I_p \\ A_0 + \bar{B}K\bar{C} & B_0 \\ C_0 + \bar{E}K\bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix} \right) \quad (2.12)$$

其中, $W_a \in \mathbb{C}^{(n+\hat{n}) \times (2n+2\hat{n}+q+p)}$, $W_b \in \mathbb{C}^{p \times (2n+2\hat{n}+q+p)}$.

令(2.6)中 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\sigma(\lambda, \Phi^T) = \lambda + \lambda^* < 0$. 因此, 系统 Σ_{σ} 满足要求(C2)的充分必要条件是存在矩阵 W_c , $P_a = P_a^* > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_{n+\hat{n}} \\ A_0 + \bar{B}K\bar{C} \end{bmatrix} W_c \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \right) \quad (2.13)$$

其中, $P_a \in \mathbb{C}^{(n+\hat{n}) \times (n+\hat{n})}$, $W_c \in \mathbb{C}^{(n+\hat{n}) \times (n+\hat{n})}$, $pq^* + qp^* < 0$.

由于(2.12)和(2.13)中出现了乘积项, 故二者均不可解, 同时, W_a 和 W_c 又是具有不同维数的不相关矩阵. 为了使得上面两式可行且获得非保守的结论, 需要引入新的变量来统一 W_a 和 W_c .

(2.12)的另一种形式可以是:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_{n+\hat{n}} & 0 \\ 0 & -I_p \\ A_0 + \bar{B}K\bar{C} & B_0 \\ C_0 + \bar{E}K\bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a & W_c \\ W_b & W_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n+2\hat{n}+q+p} \\ 0_{(n+\hat{n}) \times (2n+2\hat{n}+q+p)} \end{bmatrix} \right) \quad (2.14)$$

其中 $W_d \in \mathbb{C}^{p \times (n+\hat{n})}$.

类似地, (2.13)可以写成

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_{n+\hat{n}} \\ A_0 + \bar{B}K\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a & W_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(2n+2\hat{n}+q+p) \times (n+\hat{n})} \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \right) \quad (2.15)$$

令 $[W_a \ W_c] = Y$, $[W_b \ W_d] = X$, 则(2.14)和(2.15)分别等价于(2.16)和(2.17)

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_{n+\hat{n}} & 0 \\ 0 & -I_p \\ A_0 + \bar{B}K\bar{C} & B_0 \\ C_0 + \bar{E}K\bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} Z \right) \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_{n+\hat{n}} \\ A_0 + \bar{B}K\bar{C} \end{bmatrix} YL \right) \quad (2.17)$$

$$\text{其中 } Z = \begin{bmatrix} I_{2n+2\hat{n}+q+p} \\ 0_{(n+\hat{n}) \times (2n+2\hat{n}+q+p)} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0_{(2n+2\hat{n}+q+p) \times (n+\hat{n})} & 0 \\ -qI & pI \end{bmatrix}.$$

通过矩阵乘法, (2.16)和(2.17)可以进一步变形如下:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_0 YZ + \bar{B} K \bar{C} YZ + B_0 XZ \\ C_0 YZ + \bar{E} K \bar{C} YZ \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_0 YL + \bar{B} K \bar{C} YL \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

令 $K \bar{C} Y = H$, 那么(2.18)和(2.19)分别等价于下列两式:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_0 YZ + \bar{B} HZ + B_0 XZ \\ C_0 YZ + \bar{E} HZ \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_0 YL + \bar{B} H L \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

这时满足 $K \bar{C} Y = H$ 的 K 可以由下式给出:

$$K = H(\bar{C} Y)^\dagger + R(\bar{C} Y)^\perp \quad (2.22)$$

其中, R 是任意 $(\hat{n}+q) \times (\hat{n}+m-r)$ 维矩阵.

证毕.

注2.2 值得指出的是, 定理2.1得到的结论有别于文[20]中的结果. 针对一些特殊的情况, 文[20]获得了非保守的结果, 然而该结果仅针对闭环传递函数进行频域整形, 并未涉及稳定性, 当需要引入稳定性限制条件时, 该结果则是充分条件, 原因就在于变量(2.2)中的变量 \bar{z} 和(2.7)中的 W 是相互独立的. 本文中的结论是充分必要条件, 不只包括传递函数的频域整形, 还有稳定性.

当 ε 充分小时, 定理 2.1 中的 LMIs 将变成病态条件, 这正是奇异摄动系统具有特殊性质的表现. 为了避免病态问题的出现, 可得如下结论:

定理 2.2 如果存在矩阵 $X_1, Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}, H, P = P^*, Q = Q^* > 0$ 和 $P_a = P_a^* > 0$ 满足

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -Y_2 Z \\ 0 \\ \bar{Y}_2 Z + \bar{B} H Z + \bar{X}_2 Z \\ C_0 Y_2 Z + \bar{E} H Z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -Y_2 L \\ \bar{Y}_2 L + \bar{B} H L \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

其中:

$$C_0 = [G \ 0], \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = [0 \ -I], \quad Z = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -qI & pI \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 Y_{11} & \bar{A}_2 Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} \bar{B}_2 X_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ 是满足 } pq^* + qp^* < 0$$

的固定向量, T 是置换阵.

则存在充分小的 $\varepsilon^* > 0$, 使得对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, 系统 Σ_ε 的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题有解. 并且 \hat{n} 滤波器 Σ_{ε_f} 可以如下给出:

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = H(\bar{C}Y_2)^\dagger + R(\bar{C}Y_2)^\perp \quad (2.25)$$

其中, $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$, R 是任意 $(\hat{n}+q) \times (\hat{n}+m-r)$ 维矩阵.

证明: 令 $K = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = H(\bar{C}Y_2)^\dagger + R(\bar{C}Y_2)^\perp$, 则 $H = K\bar{C}Y_2$, 将 H 分别代入(2.23)和

(2.24)可得:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -Y_2 Z \\ 0 \\ \bar{Y}_2 Z + \bar{B} K \bar{C} Y_2 Z + \bar{X}_2 Z \\ C_0 Y_2 Z + \bar{E} K \bar{C} Y_2 Z \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -Y_2 L \\ \bar{Y}_2 L + \bar{B} K \bar{C} Y_2 L \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\text{令 } Y = \begin{bmatrix} \varepsilon Y_{11} & \varepsilon Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \varepsilon Y_1 + Y_2,$$

$$\text{则 } A_0 Y = \begin{bmatrix} \varepsilon A_c Y_{11} & \varepsilon A_c Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{注意到 } \varepsilon A_c = \begin{bmatrix} \varepsilon A_{c1} & \varepsilon A_{c2} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \varepsilon \bar{A}_1 + \bar{A}_2, \text{ 那么 } A_0 Y = \begin{bmatrix} \varepsilon \bar{A}_1 Y_{11} & \varepsilon \bar{A}_1 Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_2 Y_{11} & \bar{A}_2 Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2.$$

$$\text{令 } X = \varepsilon X_1, \text{ 则 } B_0 X = \begin{bmatrix} \varepsilon B_c X_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{注意到 } \varepsilon B_c = \begin{bmatrix} \varepsilon B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \varepsilon \bar{B}_1 + \bar{B}_2, \text{ 那么}$$

$$B_0 X = \begin{bmatrix} \varepsilon \bar{B}_1 X_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_2 X_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon \bar{X}_1 + \bar{X}_2.$$

若(2.26)和(2.27)成立, 则存在充分小 $\varepsilon^* > 0$, 满足对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ 都有下列两式成立:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -Y_2 Z \\ 0 \\ \bar{Y}_2 Z + \bar{B}K\bar{C}Y_2 Z + \bar{X}_2 Z \\ C_0 Y_2 Z + \bar{E}K\bar{C}Y_2 Z \end{bmatrix} + \varepsilon \text{He} \begin{bmatrix} -Y_1 Z \\ -X_1 Z \\ \bar{Y}_1 Z + \bar{B}K\bar{C}Y_1 Z + \bar{X}_1 Z \\ C_0 Y_1 Z + \bar{E}K\bar{C}Y_1 Z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -Y_2 L \\ \bar{Y}_2 L + \bar{B}K\bar{C}Y_2 L \end{bmatrix} + \varepsilon \text{He} \begin{bmatrix} -Y_1 L \\ \bar{Y}_1 L + \bar{B}K\bar{C}Y_1 L \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

(2.28)和(2.29)分别等价于:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_0 YZ + \bar{B}K\bar{C}YZ + B_0 XZ \\ C_0 YZ + \bar{E}K\bar{C}YZ \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_0 YL + \bar{B}K\bar{C}YL \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

证毕.

下面给出零阶有限频域 H_∞ 滤波问题的相关结论, 该结论也是充分必要条件.

定理 2.3 考虑连续奇异摄动系统 Σ_ε 的零阶有限频域 H_∞ 滤波问题, 存在零阶滤波器 Σ_f 当且仅当满足下列条件之一:

(i) 存在矩阵 $P=P^*, Q=Q^* > 0$ 使得

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} \bar{A} & \bar{B} & & & \bar{C}^T \\ I & 0 & (\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q) & \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \hline & & \bar{C} & 0 & -I \end{array} \right] < 0 \quad (2.32)$$

其中 $\bar{A}=A_\varepsilon, \bar{B}=B_\varepsilon, \bar{C}=G-D_f C$.

(ii) 存在矩阵 $X, Y, H, P=P^*, Q=Q^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -Y \\ -X \\ \bar{A}Y + \bar{B}X \\ GY - H \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

其中 $\bar{A}=A_\varepsilon, \bar{B}=B_\varepsilon, \Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, T 是置换阵.

并且如果(2.33)可行, Σ_f 可取为

$$D_f = H(CY)^+ + R(CY)^\perp \quad (2.34)$$

其中 R 是任意 $q \times (m-r)$ 维矩阵.

证明: 滤波误差系统 Σ_α 具有如下形式:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}\omega(t)$$

$$e(t) = \bar{C}\bar{x}(t)$$

其中 $\bar{A} = A_e$, $\bar{B} = B_e$, $\bar{C} = G - D_f C$.

应用 Schur 补定理, (2.32) 等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q) \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

令 $G_\alpha(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$, 应用 GKYP 引理, (i) 成立当且仅当:

$$\begin{bmatrix} G_\alpha(s) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_\alpha(s) \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$$

上式即为条件(C1).

令 $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 则 $\sigma(G_\alpha^*(s), \Pi) < 0$, $\forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$ 等价于条件(C1). 滤波误差系统 Σ_α

满足(C1)当且仅当存在矩阵 \mathcal{W} , $P = P^*$ 和 $Q = Q^* > 0$ 满足

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} \mathcal{W} \right) \quad (2.35)$$

其中 $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathcal{W} \in \mathbb{C}^{(n+p) \times (2n+q+p)}$, $M = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ G - D_f C & 0 \end{bmatrix}$.

将 \mathcal{W} 进行块分解有 $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$, 则(2.35)变成

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_p \\ \bar{A} & \bar{B} \\ G - D_f C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \right) \quad (2.36)$$

其中 $Y \in \mathbb{C}^{n \times (2n+q+p)}$, $X \in \mathbb{C}^{p \times (2n+q+p)}$.

令 $D_f C Y = H$, 则(2.36)变成

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -Y \\ -X \\ \bar{A}Y + \bar{B}X \\ GY - H \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

这时, 满足 $D_f CY = H$ 的 D_f 可以由下式给出:

$$D_f = H(CY)^\dagger + R(CY)^\perp \quad (2.38)$$

其中 R 是任意 $q \times (m-r)$ 维矩阵。

证毕.

注2.3 (i) 降阶有限频域 H_∞ 滤波的最优化问题可以通过求解基于LMI的极小化问题:

minimize γ

受限于(2.8)和(2.9). 这是一个LMI凸优化问题, 可以用LMI工具箱求解^[42].

(ii) 零阶有限频域 H_∞ 滤波的最优化问题也是一个凸极小化问题:

minimize γ

受限于(2.32)或(2.33).

2.3 离散情形下的有限频域 H_∞ 滤波

考虑 n 阶稳定的快采样离散奇异摄动系统:

$$\begin{aligned} (\Sigma_d): \quad x(k+1) &= A_\varepsilon x(k) + B_\varepsilon \omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ z(k) &= Gx(k) \end{aligned}$$

或其扩展形式为:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (I + \varepsilon A_{11})x_1(k) + \varepsilon A_{12}x_2(k) + \varepsilon B_1\omega(k) \\ x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2\omega(k) \\ y(k) &= C_1x_1(k) + C_2x_2(k) \\ z(k) &= G_1x_1(k) + G_2x_2(k) \end{aligned}$$

其中: $x(k) = [x_1(k)^T \quad x_2(k)^T]^T \in R^n$ 是状态向量, $y(k) \in R^m$ 是测量输出, $z(k) \in R^q$ 是需要估计的信号, $\omega(k) \in R^p$ 是干扰信号. $A_\varepsilon, B_\varepsilon, C, G$ 为具有适当维数的实常数矩阵。

考虑 \hat{n} 阶线性滤波器, 这里, $\hat{n} \leq n$:

$$\begin{aligned} (\Sigma_{df}): \quad \hat{x}(k+1) &= A_f \hat{x}(k) + B_f y(k) \\ \hat{z}(k) &= C_f \hat{x}(k) + D_f y(k) \end{aligned}$$

其中: $\hat{x}(k) \in R^{\hat{n}}$, $\hat{z}(k) \in R^{\hat{q}}$. 滤波参数 $A_f \in R^{\hat{n} \times \hat{n}}$, $B_f \in R^{\hat{n} \times m}$, $C_f \in R^{\hat{q} \times \hat{n}}$, $D_f \in R^{\hat{q} \times m}$ 为需要计算的矩阵。

相应地,滤波误差系统如下:

$$(\Sigma_{de}): \quad \bar{x}(k+1) = \tilde{A}\bar{x}(k) + \tilde{B}\omega(k)$$

$$e(k) = \tilde{C}\bar{x}(k)$$

其中: $\bar{x}(k) = [x(k)^T \quad \hat{x}(k)^T]^T$, $e(k) = z(k) - \hat{z}(k)$,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [G - D_f C \quad -C_f].$$

记从干扰信号 $\omega(k)$ 到估计误差 $e(k)$ 的传递函数为 $G_{de}(z)$ 。那么,离散情形下,降阶有限频域 H_∞ 滤波问题可以描述为:

给定 $\Phi, \Psi \in H_2$, $\gamma > 0$, 寻求 Σ_{df} 使得:

(D1) Σ_{de} 稳定.

(D2) $\|G_{de}(z)\|_\infty < \gamma$, $\forall z \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$.

注 2.4 对离散情形,选择 $\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 通过恰当的选择 Ψ , Λ 就可以表示低频、中频或是高频^[19], 这时如果定义 $W = \{\theta | e^{j\theta} \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)\}$, 那么有限频域 H_∞ 范数条件(D2)是指 $\sup_{\theta \in W} \sigma_{\max}(G_{de}(e^{j\theta})) < \gamma$.

值得指出的是,当 $\hat{n} = 0$, 即为零阶(静态)滤波器,这时, Σ_{df} 为 $\hat{z}(t) = D_f y(t)$ 。

下面给出关于快采样离散奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 滤波问题的相关结论,这里的证明过程与连续情形类似,故均略去。

定理 2.4 考虑离散奇异摄动系统 Σ_d 的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题,存在 \hat{n} 阶滤波器 Σ_{df} 的充分必要条件是存在矩阵 $X, Y, H, P = P^*$, $Q = Q^* > 0$, $P_a = P_a^* > 0$ 满足

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_0 YZ + \bar{B}HZ + B_0 XZ \\ C_0 YZ + \bar{E}HZ \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & -P_a \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_0 YL + \bar{B}HL \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

其中:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} B_\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, C_0 = [G \ 0], \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \bar{E} = [0 \ -I], Z = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -qI & pI \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, p, q \in \mathbb{C} \text{ 是满足 } pq^* + qp^* < 0 \text{ 的固定向量, } T \text{ 是置换阵. 并且如果(2.39)和(2.40)}$$

成立, \hat{n} 阶 Σ_{df} 可由下式给出:

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = H(\bar{C}Y)^\dagger + R(\bar{C}Y)^\perp \quad (2.41)$$

其中, $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$, R 是任意 $(\hat{n}+q) \times (\hat{n}+m-r)$ 维矩阵.

与连续情形类似, 为了避免定理 2.4 中病态 LMIs 的出现, 可得如下结论:

定理 2.5 如果存在矩阵 $X, Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}, H, P = P^*, Q = Q^* > 0$ 和 $P_a = P_a^* > 0$ 满足

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ \bar{Y}_2 Z + \bar{B}HZ + \bar{X}_2 Z \\ C_0 YZ + \bar{E}HZ \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & -P_a \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ \bar{Y}_2 L + \bar{B}HL \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

其中:

$$C_0 = [G \ 0], \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \bar{E} = [0 \ -I], Z = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -qI & pI \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \bar{Y}_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 Y_{11} & \bar{A}_2 Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} \bar{B}_2 X_1 \\ 0 \end{bmatrix}, p, q \in \mathbb{C} \text{ 是满足 } pq^* + qp^* < 0$$

的固定向量, T 是置换阵.

则存在充分小的 $\varepsilon^* > 0$, 使得对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, 系统 Σ_ε 的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题有解.

并且 \hat{n} 滤波器 Σ_{df} 可以如下给出:

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = H(\bar{C}Y)^\dagger + R(\bar{C}Y)^\perp \quad (2.44)$$

其中, $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$, R 是任意 $(\hat{n}+q) \times (\hat{n}+m-r)$ 维矩阵.

下面给出离散情形下零阶有限频域 H_∞ 滤波问题的相关结论.

定理 2.6 考虑离散奇异摄动系统 Σ_d 的零阶有限频域 H_∞ 滤波问题, 存在零阶滤波器 Σ_f 当且仅当满足下列条件之一:

(i) 存在矩阵 $P = P^*$, $Q = Q^* > 0$ 使得

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \bar{C} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \bar{C}^T \\ -I \end{array} < 0 \quad (2.45)$$

其中 $\bar{A} = A_c$, $\bar{B} = B_c$, $\bar{C} = G - D_c C$.

(ii) 存在矩阵 $X, Y, H, P = P^*$, $Q = Q^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -Y \\ -X \\ \bar{A}Y + \bar{B}X \\ GY - H \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

其中 $\bar{A} = A_c$, $\bar{B} = B_c$, $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, T 是置换阵.

并且如果(2.46)可行, Σ_f 可取为

$$D_f = H(CY)^\dagger + R(CY)^\perp \quad (2.47)$$

其中 R 是任意 $q \times (m-r)$ 维矩阵.

2.4 数值仿真

算例 2.1 考虑如下连续奇异摄动系统:

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + \omega \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 2\omega \\ y = 2x_1 + x_2 \\ z = x_1 + x_2 \end{cases}$$

其中 $\varepsilon = 0.025$.

令 $\omega_h = 1000$, $\gamma = 0.1$.

应用本节的结论可以得到一阶滤波参数为：

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & \approx 0 \\ \approx 0 & 0.1422 \end{bmatrix}$$

作为对比，这里也给出了零阶滤波参数：

$$D_f = 0.9878$$

可以看出滤波误差系统是稳定的，并且在高频段上满足 H_∞ 范数指标要求。

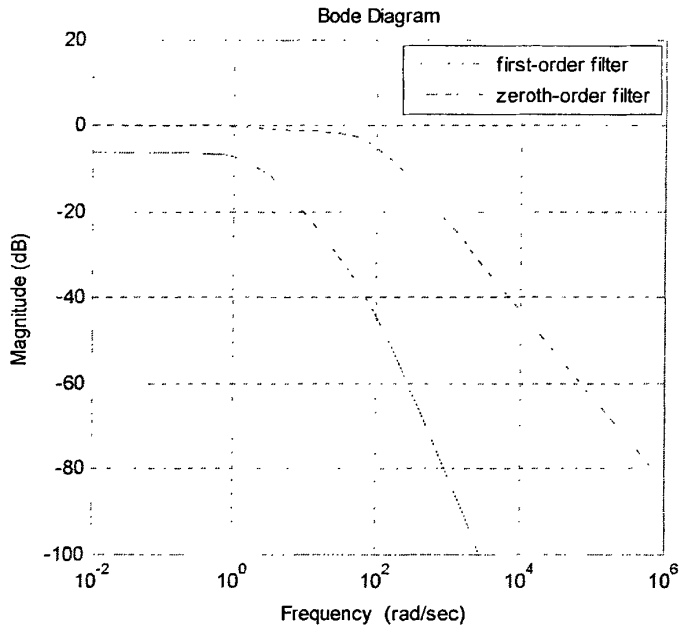


图 2.1 高频段上的滤波误差系统

2.5 本章小结

本节研究了奇异摄动系统的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题。针对连续和离散情形，分别给出了滤波问题有解的充分必要条件。为了避免病态 LMIs 的出现，给出了独立于小参数 ϵ 的充分条件。注意到本节中的结论并未涉及状态的快慢分解，因此本文的结果不只可以应用于标准奇异摄动系统，也可以是非标准系统。

第3章 奇异摄动系统的有限频域正实控制

本章研究了在有限频域上奇异摄动系统的严格正实控制问题。对于一般的线性系统,在广义KYP(GKYP)引理的基础上,给出了存在状态反馈控制律使其闭环系统稳定并且具有有限频域正实特性的充分必要条件,而且当条件可行时,给出了一组适当解。然后,用一般线性系统的结论去研究奇异摄动系统,给出了使其闭环系统稳定且具有有限频域正实特性的合成状态反馈控制律。

3.1 引言

众所周知,对于一类具有慢快动态的系统,其数学处理上通常应用奇异摄动理论。由于奇异摄动系统具有极大的实际应用价值,近年来得到了广泛的关注。关于奇异摄动系统的 H_∞ 控制问题,已有许多研究成果^[4-6,8-10],其中主要是针对快子系统和修正后的慢子系统分别设计 H_∞ 次优控制器,进一步得到合成控制器。然而,上述提到的方法都是基于整个频域范围,实际上,奇异摄动系统的快子系统和慢子系统可以分别理解为原系统在高频和低频的描述^[43]。传统的方法并未考虑子系统的频域特性,故而保守性会增加,且设计过程将趋于繁琐。

作为一个实质性的特征,正实这个概念出现在系统和控制理论中的许多领域,其中,与之相关的一个著名结论就是:当正实系统通过负反馈与严格正实控制器相连接时,闭环系统稳定^[21]。有限频域正实特性这一概念首次出现在文[23]中,该文献指出,实际中的控制带宽是有限的,有限频域上的正实特性是至关重要的,并且给出了一系列的例证来说明有限频域上的正实特性对实现较好控制性能的重要性。既然有限频域正实特性实质上起到了重要的作用,考虑到奇异摄动系统在低频和高频可以分别由其慢快子系统近似,那么研究奇异摄动系统的有限频域正实特性将是合情合理的,这时奇异摄动系统的频域特性将会充分考虑进去,相应地,保守性将会减少,设计过程将得到简化。

在过去几十年中,KYP引理被公认为是系统理论中最重要的定理之一^[44-46],它在频域不等式(FDI)和线性矩阵不等式(LMI)之间建立的等价关系。然而,当实际指标以不同频段来描述时,KYP引理则不能有效地进行处理。为了将KYP引理推广至更一般的情况,Iwasaki等^[19-20,47-48]得到了GKYP引理,该引理可以将有限频域上的FDI直接转换成相应的LMI。

近期文[22]研究了奇异摄动系统的有限频域正实控制问题,以非线性矩阵不等式的形式给出了问题可行的充分条件。文[49]研究了奇异摄动系统在有限频域上的 H_∞ 指标,并且设计了静态状态反馈控制器。在本文中,首先研究一般线性系统在有限频

域上的状态反馈控制, 继而用上述结果去研究奇异摄动系统的有限频域严格正实控制问题. 针对快子系统和慢子系统分别设计状态反馈控制器, 进而可以构造合成控制律, 最后通过简单的算例验证了本文结论的有效性.

3.2 问题描述

考虑如下奇异摄动系统 $G(s)$:

$$G: \begin{cases} \dot{x} = A_1x + A_{12}z + B_1u + B_1w \\ \varepsilon \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u + B_2w \\ y = C_1x + C_2z + Dw \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $x \in R^n, z \in R^l, u \in R^p, w \in R^p, y \in R^p$, A_{22} 非奇异. 这里 $0 < \varepsilon \ll 1$ 是奇异摄动参数^[50]. 假设 $G(s)$ 没有不稳定的消隐极点.

考虑状态反馈控制律 $u = K \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, 将其应用到系统(3.1)可得闭环系统. 本文所研究的问题就是, 寻求内稳定的状态反馈增益 K , 使得闭环系统满足:

- a) $\bar{G}(j\omega) + \bar{G}^*(j\omega) > 0 \quad \forall |\omega| \leq \omega_1$,
- b) $\bar{G}(j\omega) + \bar{G}^*(j\omega) > 0 \quad \forall |\varepsilon\omega| \geq \omega_2$,

其中 $\varepsilon\omega_1 < \omega_2$.

3.3 一般线性系统的状态反馈控制

本节将就一般线性系统的状态反馈控制进行研究, 进而去研究奇异摄动系统的有限频域正实控制.

考虑如下线性系统:

$$G_m: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

其中 $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times n}, D \in R^{p \times p}, u \in R^p, y \in R^p$.

在状态反馈控制律 $u = Kx + v$ 作用下, 上述系统的闭环系统为:

$$\bar{G}_m: \begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + Bv \\ y = (C + DK)x + Dv \end{cases} \quad (3.2)$$

注意到引理 2.1 并未涉及稳定性, 故而引理 2.2 也将会在本文中得到应用. 接下来将给出存在内稳定状态反馈控制器的充分必要条件, 而且当条件满足时, 给出了一组适当解. 主要结果如下:

定理 3.1 给定 $\Phi, \Psi \in H_2$ 和形如(3.2)式的 $\bar{G}_m(s)$. 假设 Λ 表示复平面上的曲线, 那么

如下描述是等价的:

(i) 存在状态反馈增益 K 使得(3.2)稳定, 并且对于 $\forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T), \bar{G}_m(s) + \bar{G}_m^*(s) > 0$.

(ii) 存在矩阵 $X, Y, H, P = P^*, Q = Q^* > 0$ 和 $P_a = P_a^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ AYZ + BHZ + BXZ \\ CYZ + DHZ + DXZ \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ AYL + BHL \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

其中 $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} I_{2n+2p} \\ 0_{n \times (2n+2p)} \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p) \times n} & 0 \\ -qI & pI_n \end{bmatrix}$, $p, q \in \mathbb{C}$ 是满足 $pq^* + qp^* < 0$ 的固定向量, T 是置换阵. 并且如果(3.3)和(3.4)成立, K 可由下式给出: $K = HY^t + RY^\perp$. 其中, R 是任意 $p \times (n-r)$ 维矩阵.

证明: 令 $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\bar{G}_m(s) + \bar{G}_m^*(s) > 0$ 等价于

$$\sigma(\bar{G}_m^*(s), \Pi) = \begin{bmatrix} \bar{G}_m^*(s) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_m^*(s) \\ I \end{bmatrix} < 0$$

根据引理 2.1, 对 $\forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T)$, $\sigma(\bar{G}_m^*(s), \Pi) < 0$ 等价于存在矩阵 $\mathscr{W}, P = P^*$ 和 $Q = Q^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} \mathscr{W} \quad (3.5a)$$

其中 $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathscr{W} \in \mathbb{C}^{(n+p) \times (2n+2p)}$, $M = \begin{bmatrix} A+BK & B \\ C+DK & D \end{bmatrix}$.

将 \mathscr{W} 进行快分解为 $\mathscr{W} = \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix}$, 这样有

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_p \\ A+BK & B \\ C+DK & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

其中 $W_a \in \mathbb{C}^{n \times (2n+2p)}$, $W_b \in \mathbb{C}^{p \times (2n+2p)}$.

进一步, (3.5b)等价于

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -W_a \\ -W_b \\ AW_a + BKW_a + BW_b \\ CW_a + DKW_a + DW_b \end{bmatrix} \quad (3.5c)$$

又因为闭环系统(3.2)是稳定的当且仅当 $A+BK$ 的任意特征值 λ 具有负实部. 令(2.6)中

$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 可知 $\sigma(\lambda, \Phi^T) = \lambda + \lambda^* < 0$, 那么闭环系统是稳定的充分必要条件是存在矩阵

$W_c, P_a = P_a^* > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left[\begin{array}{c} -I_n \\ A+BK \end{array} \right] W_c \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \quad (3.6a)$$

其中 $W_c \in C^{n \times n}, P_a \in C^{n \times n}, [p \ q] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [p \ q]^* = pq^* + qp^* < 0$.

(3.6a)的另一种形式可以是:

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left[\begin{array}{c} -W_c \\ AW_c + BKW_c \end{array} \right] \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

因此存在内稳定的状态反馈增益 K 使得对 $\forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T), \bar{G}_m(s) + \bar{G}_m^*(s) > 0$ 当且仅当 (3.5c)和(3.6b)同时成立.

比较(3.5c)和(3.6b)可知, 这两个条件均不可行, 不只因为乘积项, 还有 w_a 和 w_c 是具有不同维数的不相关矩阵. 为了统一变量 w_a 和 w_c , 将引入新的变量.

将(3.5b)写成如下形式:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_p \\ A+BK & B \\ C+DK & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a & W_c \\ W_b & W_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n+2p} \\ 0_{n \times (2n+2p)} \end{bmatrix} \right) \quad (3.7a)$$

其中 $w_d \in C^{p \times p}$. 显然, (3.7a)是独立于变量 w_c 和 w_d , 这也意味着 w_c 作为附加矩阵已经引入到条件(3.7a)中.

类似的, (3.6a) 可写成:

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left[\begin{array}{c} -I_n \\ A+BK \end{array} \right] \begin{bmatrix} W_a & W_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p) \times n} \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

这里, w_a 独立于(3.8a).

令 $[W_a \ W_c] = Y, [W_b \ W_d] = X$, 那么上述两个条件也就是

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \left(\begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_p \\ A+BK & B \\ C+DK & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n+2p} \\ 0_{n \times (2n+2p)} \end{bmatrix} \right) \quad (3.7b)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \left[\begin{array}{c} -I_n \\ A+BK \end{array} \right] Y \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p) \times n} \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -qI & pI \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

进一步简化(3.7b)和(3.8b)可得:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ AYZ + BKYZ + BXZ \\ CYZ + DKYZ + DXZ \end{bmatrix} \quad (3.7c)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ AYL + BKYL \end{bmatrix} \quad (3.8c)$$

$$\text{其中 } Z = \begin{bmatrix} I_{2n+2p} \\ 0_{n \times (2n+2p)} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p) \times n} & 0 \\ -qI & pI_n \end{bmatrix}.$$

令 $KY = H$, (3.7c)和(3.8c) 分别等价于

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ AYZ + BHZ + BXZ \\ CYZ + DHZ + DXZ \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ AYL + BHL \end{bmatrix} \quad (3.9b)$$

这时, 满足 $KY = H$ 的 K 可以由下式给出:

$$K = HY^t + RY^t \quad (3.10)$$

其中 R 是任意 $p \times (n-r)$ 维矩阵.

证毕.

注 3.1 值得指出的是, 引理 2.1 并未涉及闭环稳定性, 因此, 保证稳定性的条件如区域极点配置等, 常常作为附加的设计指标被考虑进入.

注 3.2 考虑到(3.7a)和(3.8a)分别等价于(3.5b)和(3.6a), 但在实质上前者确实是必不可少的. 因为矩阵变量 w_a 和 w_c 是不同维数且不相关的矩阵, (3.7a)和(3.8a)可以不带保守的统一 w_a 和 w_c . 因此, 本文的结果是充分必要条件, 不只可以保证闭环系统的正实性, 还有其稳定性.

3.4 奇异摄动系统的有限频域正实控制

在上一节中, 给出了对于一般线性系统, 存在内稳定的状态反馈增益 K 的充分必要条件, 接下来, 将应用上述结论去研究奇异摄动系统.

奇异摄动系统具有多时间尺度以及多频率尺度, 将其控制问题分解成快慢部分是行之有效的, 其中经常应用的是奇异摄动理论. 按照通常的处理方法, 首先引入一个变量 $p = \varepsilon s$. 文[1, 51]研究了奇异摄动系统的合成状态反馈控制, 其中通过针对快慢子系统分别设计控制器, 进而可以构造合成控制器. 本节中, 对于系统(3.1), 这里采用如下合成状态反馈控制器:

$$u = \begin{bmatrix} K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21} + K_2 A_{22}^{-1} B_2 K_0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

这时, 闭环系统 $\bar{G}(s)$ 为:

$$\bar{G}: \begin{cases} \dot{x} = \bar{A}_1 x + \bar{A}_2 z + B_1 w \\ \varepsilon \dot{z} = \bar{A}_{21} x + \bar{A}_{22} z + B_2 w \\ y = C_1 x + C_2 z + D w \end{cases}$$

其中 $\bar{A}_1 = A_1 + B_1 K_0 + B_1 K_2 A_{22}^{-1} (A_{21} + B_2 K_0)$, $\bar{A}_2 = A_2 + B_1 K_2$,

$$\bar{A}_{21} = A_{21} + B_2 K_0 + B_2 K_2 A_{22}^{-1} (A_{21} + B_2 K_0), \quad \bar{A}_{22} = A_{22} + B_2 K_2.$$

根据奇异摄动了理论，可以得到 $\bar{G}(s)$ 的慢快子系统，其中 \bar{A}_0 的求法已经在文[1]中给出，为了本文的完整性，这里将给出所有的推导过程：

$$\bar{A}_0 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21}$$

$$= A_{11} + B_1 K_0 + B_1 K_2 A_{22}^{-1} (A_{21} + B_2 K_0) - A_{12} \bar{A}_{22}^{-1} (I + B_2 K_2 A_{22}^{-1}) A_{21} - A_{12} \bar{A}_{22}^{-1} (B_2 + B_2 K_2 A_{22}^{-1} B_2) K_0 \\ - B_1 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} (I + B_2 K_2 A_{22}^{-1}) A_{21} - B_1 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} (B_2 + B_2 K_2 A_{22}^{-1} B_2) K_0$$

因为 $\bar{A}_{22}^{-1} B_2 K_2 A_{22}^{-1} = \bar{A}_{22}^{-1} (\bar{A}_{22} - A_{22}) A_{22}^{-1} = A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1}$ ，所以

$$\bar{A}_0 = A_{11} + B_1 K_0 + B_1 K_2 A_{22}^{-1} A_{21} + B_1 K_2 A_{22}^{-1} B_2 K_0 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 K_0 - B_1 K_2 A_{22}^{-1} A_{21} - B_1 K_2 A_{22}^{-1} B_2 K_0 \\ = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + B_1 K_0 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 K_0.$$

$$\bar{B}_0 = B_1 - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_2$$

$$= B_1 - A_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_2 - B_1 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 \\ = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 - B_1 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 + A_{12} A_{22}^{-1} B_2 - A_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_2 \\ = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 - B_1 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 + A_{12} A_{22}^{-1} B_2 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 \\ = (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) - (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 \\ = (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) (I - K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2) \\ = (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) (I + K_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1}.$$

$$\bar{C}_0 = C_1 - C_2 \bar{A}_{22}^{-1} (I + B_2 K_2 A_{22}^{-1}) A_{21} - C_2 \bar{A}_{22}^{-1} (B_2 + B_2 K_2 A_{22}^{-1} B_2) K_0 \\ = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} - C_2 A_{22}^{-1} B_2 K_0.$$

$$\bar{D}_0 = D - C_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2$$

$$= D + C_2 A_{22}^{-1} B_2 - C_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \\ = D + C_2 A_{22}^{-1} (\bar{A}_{22} - A_{22}) \bar{A}_{22}^{-1} B_2 - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \\ = D + C_2 A_{22}^{-1} B_2 K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2 - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \\ = D - C_2 A_{22}^{-1} B_2 (I - K_2 \bar{A}_{22}^{-1} B_2) \\ = D - C_2 A_{22}^{-1} B_2 (I + K_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1}.$$

$$\text{令 } A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2, \quad C_0 = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}, \quad D_0 = -C_2 A_{22}^{-1} B_2, \quad T = (I + K_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1},$$

那么， $\bar{G}(s)$ 的慢、快子系统分别是：

$$\bar{G}_s : \begin{cases} \dot{x}_s = (A_0 + B_0 K_0) x_s + B_0 T w_s \\ y_s = (C_0 + D_0 K_0) x_s + (D_0 + D_0 T) w_s \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\bar{G}_f : \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_f = (A_{22} + B_2 K_2) x_f + B_2 w_f \\ y_f = C_2 x_f + D w_f \end{cases} \quad (3.12)$$

而且，如果 $A_0 + B_0 K_0$ 和 $A_{22} + B_2 K_2$ 都是 Hurwitz 矩阵，那么对充分小的 ε 闭环系统 $\bar{G}(s)$ 稳定。

相应的,可以得到慢、快子系统的传递函数:

$$\bar{G}_s(s) = (C_0 + D_0 K_0)(sI - A_0 - B_0 K_0)^{-1} B_0 T + (D + D_0 T)$$

$$\bar{G}_f(p) = C_2(pI - A_{22} - B_2 K_2)^{-1} B_2 + D$$

根据文[43]可知,慢快子系统分别在低频和低频近似全阶系统。因此可以研究 $\bar{G}_s(s)$ 和 $\bar{G}_f(p)$ 的特性代替 $\bar{G}(s)$,也就是若 $\bar{G}_s(s)$ 和 $\bar{G}_f(p)$ 都是稳定的并且分别在低频和高频严格正实。那么对充分小的 ε , $\bar{G}(s)$ 也是稳定的并且在低频和高频严格正实。基于上述分析,下面给出奇异摄动系统有限频域严格正实控制问题的求解算法:

正实控制算法

- (a) 对于快子系统(3.12),设计 K_2 使得(3.12)是稳定的并且在高频严格正实。
 (b) 对于慢子系统(3.11),设计 K_0 使得(3.11)是稳定的并且在低频严格正实。
 (c) 状态反馈控制律 $u = [K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21} + K_2 A_{22}^{-1} B_2 K_0 \quad K_2] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ 可计算出来。

令 $\bar{\omega} = \varepsilon \omega$, 则 $p = j\bar{\omega}$ 。下面给出快子系统的相关结论:

定理 3.2 考虑系统(3.12),并且给定 $\mathcal{W}_1 = \{\bar{\omega} \in \mathbb{R} : |\bar{\omega}| \geq \omega_h\}$,则下面的描述是等价的:

- (i) 存在增益阵 K_2 ,使得(3.12)稳定并且对于 $\forall \bar{\omega} \in \mathcal{W}_1, \bar{G}_f(p) + \bar{G}_f^*(p) > 0$ 。
 (ii) 存在矩阵 $X, Y, H, P = P^*, Q = Q^* > 0, P_a = P_a^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} Q & P & 0 & 0 \\ P & -\omega_h^2 Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_{22}YZ + B_2HZ + B_2XZ \\ C_2YZ + DXZ \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_{22}YL + B_2HL \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

其中: $Z = \begin{bmatrix} I_{2l+2p} \\ 0_{l \times (2l+2p)} \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0_{(2l+2p) \times l} & 0 \\ -qI & pI_l \end{bmatrix}$, $p, q \in \mathbb{C}$ 是满足 $pq^* + qp^* < 0$ 的固定向量, T 是置

换阵。并且如果(3.13)和(3.14)成立, K_2 可由下式给出: $K_2 = HY^t + RY^t$.其中, R 是任意

$p \times (l-r)$ 维矩阵。

证明: 令 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_h^2 \end{bmatrix}$, 那么 $\Lambda(\Phi, \Psi) = \{j\bar{\omega} \mid |\bar{\omega}| \geq \omega_h\}$ 。

对比(3.12)和(3.2),将(3.7b)和(3.8b)中的 $A+BK, B, C+DK, D$ 分别替代为 $A_{22} + B_2 K_2, B_2, C_2, D$,可以得到(3.13)和(3.14)。

证毕.

关于慢子系统的结果可以类似给出:

定理 3.3 考虑系统(3.11),并且给定 $W_2 = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq \omega_i\}$, 则下面的描述是等价的:

(i) 存在增益阵 K_0 , 使得(3.11)稳定并且对于 $\forall \omega \in W_2, \bar{G}_i(s) + \bar{G}_i^*(s) > 0$.

(ii) 存在矩阵 $X, Y, H, P = P^*, Q = Q^* > 0, P_a = P_a^* > 0$ 使得

$$T \begin{bmatrix} -Q & P & 0 & 0 \\ P & \omega_i^2 Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -YZ \\ -XZ \\ A_0 YZ + B_0 HZ + B_0 T XZ \\ C_0 YZ + D_0 HZ + (D + D_0 T) XZ \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_a \\ P_a & 0 \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -YL \\ A_0 YL + B_0 HL \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

其中: $Z = \begin{bmatrix} I_{2n+2p} \\ 0_{n \times (2n+2p)} \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0_{(2n+2p) \times n} & 0 \\ -qI & pI_n \end{bmatrix}$, $p, q \in \mathbb{C}$ 是满足 $pq^* + qp^* < 0$ 的固定向量, T 是置

换阵. 并且如果(3.15)和(3.16)成立, K_0 可由下式给出: $K_0 = HY^T + RY^T$. 其中, R 是任意 $p \times (n-r)$ 维矩阵.

证明: 令 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Psi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_i^2 \end{bmatrix}$, 那么 $\Lambda(\Phi, \Psi) = \{j\omega \mid |\omega| \leq \omega_i\}$.

对比(3.11)和(3.2),将(3.7b)和(3.8b)中的 $A+BK, B, C+DK, D$ 分别替代为 $A_0 + B_0 K_0, B_0 T, C_0 + D_0 K_0, D + D_0 T$, 可以得到(3.15)和(3.16).

证毕.

注 3.3 令 $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 定理 3.2 和定理 3.3 可以应用于有限频域 H_∞ 控制, 这时合成状态反馈控制律仍是 $K = [K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21} + K_2 A_{22}^{-1} B_2 K_0 \quad K_2]$.

3.5 数值仿真

针对奇异摄动系统的有限频域正实控制问题, 之前已经给出了设计合成状态反馈控制器的步骤. 下面将通过简单的例子验证上述结论.

算例 3.1 考虑如下 SISO 奇异摄动系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2z + u + w \\ \varepsilon \dot{z} = 2x + z + u + w \\ y = 3x - 2z + 0.5w \end{cases}$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$.

在本例中, 令 $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$. 应用本文的方法, 可以得到合成状态反馈控制律:

$$K = [-2.4 \quad -2]$$

闭环系统的特征值是 $(-1.4, -1000)$, 其传递函数是

$$G(s) = \frac{0.5s^2 - 1496s + 1700}{s^2 + 1001s + 1400}.$$

闭环系统的 Nyquist 曲线如图 3.1 所示, 容易看出闭环系统在给定的低频和高频范围内严格正实。

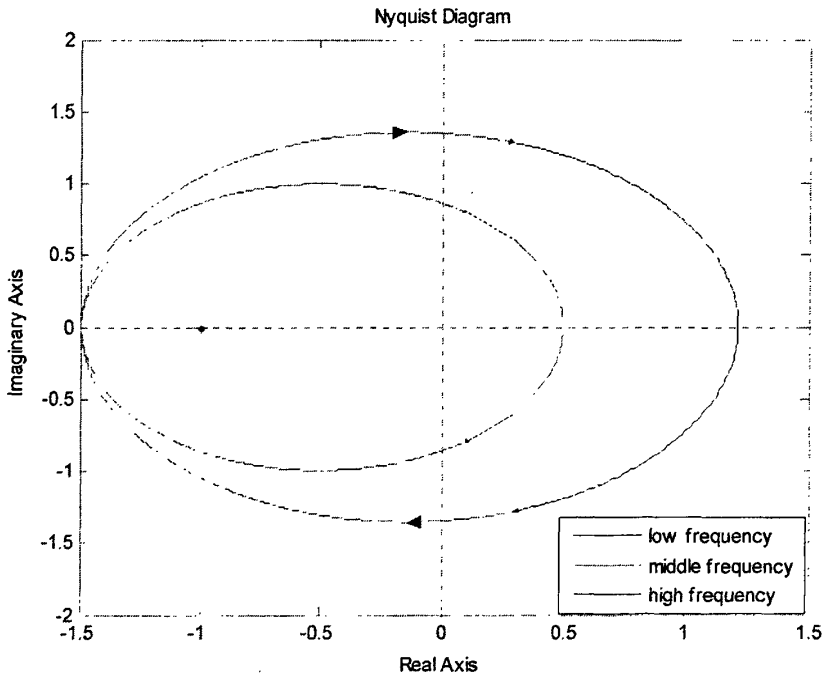


图 3.1 低频和高频上的严格正实控制

为了更好的说明本文中提到的有限频域特性, 这里将和全频域上的正实控制作为对比。文[21]研究了全频域上的严格正实控制问题, 根据其中的算法, 可以得到状态反馈控制器:

$$K = [-51.7591 \quad -36.5798].$$

闭环系统的 Nyquist 曲线如图 3.2 所示, 可以看出闭环系统在全频域上严格正实。

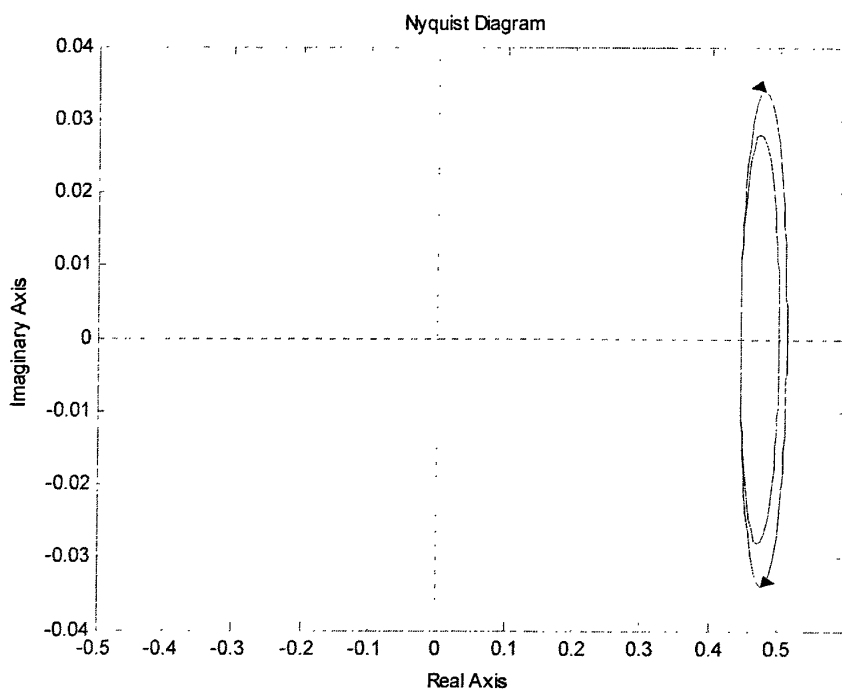


图 3.2 全频域上的严格正实控制

3.6 本章小结

本章研究了奇异摄动系统的有限频域严格正实控制问题。对于一般线性系统，基于广义KYP引理，给出了存在内稳定状态反馈控制器的充分必要条件，然后用上述结果去研究奇异摄动系统。针对快子系统和慢子系统分别设计状态反馈控制器，进而可以构造合成控制律，使得原系统稳定并且严格正实。

第4章 奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 模型匹配

本章研究了 SISO 奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题。基于广义 KYP (GKYP)引理, 推导出了存在 H_∞ 次优控制器的充分必要条件, 而且控制器具有奇异摄动形式。可以分别设计该控制器的慢和快部分, 然后得到合成控制器。通过和传统 H_∞ 方法对比, 验证了本文所提出方法的有效性。

4.1 引言

作为两时间尺度系统的频率对比, 文[43]引入了两频率尺度系统, 并且给出了这样的结论: 慢快子系统可以分别理解为在低频和高频对全阶系统的近似。文[51]研究了奇异摄动系统的合成状态反馈控制和输出反馈控制, 给出了一系列的可以保持受控对象两时间尺度特性的内稳定控制器。奇异摄动系统的 H_∞ 控制也得到广泛的关注^[4-18]。文[5]研究了加权灵敏度问题, 将其分解成慢快子问题, 然后通过合并子问题的解给出了原问题的近似解。文[6, 9]解决了MIMO奇异摄动系统的 H_∞ 控制问题, 给出了存在次优解得充分必要条件。文[8]研究了SISO两频率尺度系统的次优模型匹配问题, 通过求解慢快子系统的模型匹配问题得到了次优 H_∞ 解。文[12]给出了具有两频率尺度结构的次优 H_∞ 控制器以及设计独立于 ϵ 的 H_∞ 次优控制器的步骤。然而, 上述结论都是研究整个频域上的相关问题, 并没有充分考虑到子系统的频率特性。

在系统理论的研究领域, KYP^[44, 46]引理起着重要的作用, 原因就在于KYP引理在频域不等式(FDI)和线性不等式(LMI)之间建立了等价关系。然而, KYP引理仅能处理全频域上的FDIs, 而实际中的指标常常在不同频段上来给出。GKYP 引理在文[19-20, 23, 38, 47-48]中引入, 它可以有限频域上的FDI转化成LMI。

本文的主要贡献在于不只提供了具有奇异摄动形式的控制器, 而且给出了奇异摄动系统的低频和高频的定义。如前所述, 慢快子系统可以分别理解为对原系统在低频和高频的近似, 那么如何定义低频的最大值和低频的最小值成为了重要的问题。也就是说, 在什么范围内, 给定一个频率范围属于低频或是高频。既然在低频段内, 可以研究慢子系统代替全阶系统, 在高频段内, 可以研究快子系统代替全阶系统, 自然可以得到这样的结论: 低频和高频的定义应该由子系统和全阶系统的关系来决定。

本文研究了奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题, 设计了满足不同频域指标的具有奇异摄动形式的控制器。基于 GKYP 引理, 该控制器可以通过设计其快慢部分而得到。最后, 在算例中和传统 H_∞ 方法进行对比, 证明了本文结论的优越性。

4.2 问题描述

考虑奇异摄动系统 $G_p(s), G_m(s) \in \Phi_\varepsilon$:

$$G_p : \begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u \\ \varepsilon \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u \\ y = C_1x + C_2z + Du \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $x \in R^n, z \in R^m, u \in R, y \in R, A_{22}$ 非奇异.

$$G_m : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_{11}\tilde{x} + \tilde{A}_{12}\tilde{z} + \tilde{B}_1e \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}} = \tilde{A}_{21}\tilde{x} + \tilde{A}_{22}\tilde{z} + \tilde{B}_2e \\ y = \tilde{C}_1\tilde{x} + \tilde{C}_2\tilde{z} + \tilde{D}e \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $\tilde{x} \in R^{\tilde{n}}, \tilde{z} \in R^{\tilde{m}}, e \in R, y \in R, \tilde{A}_{22}$ 非奇异.

寻求控制器 $G_c(s) \in \Phi_\varepsilon$ 使得:

$$R1) \quad \|G_p(s)G_c(s) - G_m(s)\|_\infty < \gamma + 0(\varepsilon): \quad |\omega| \leq \omega_l$$

$$R2) \quad \|G_p(s)G_c(s) - G_m(s)\|_\infty < \gamma + 0(\varepsilon): \quad \omega_h \leq |\omega|$$

其中 $0 < \omega_l < \omega_h$.

注4.1 文[13]研究了类似的问题,和本文相比,主要的区别在于前者研究的是全频域上问题,而本文则是有限频域上的问题.

在本文中作如下假设,其中下标 s 和 f 分别表示慢快子系统.

$$(A1) \quad G_{ps}(s), G_{pf}(s), G_{ms}(s), G_{mf}(s) \in RH_\infty.$$

$$(A2) \quad G_{ps}(j\omega) \neq 0 \quad |\omega| \leq \omega_l.$$

$$(A3) \quad G_{pf}(j\omega) \neq 0 \quad \omega_h \leq |\omega|.$$

$$(A4) \quad G_p(s) \text{ 和 } G_m(s) \text{ 没有不稳定的消隐极点.}$$

这里,关于两频率尺度传递函数的消隐极点的定义已经在文[4, 43]中给出.

在给出本章的主要结论之前,先给出两个引理.

引理 4.1^[48] 给定 Hermitian 矩阵 $\Psi \in C^{2 \times 2}$ 和 Π , 假设 $W = \left\{ \omega \in R: \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} j\omega \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$ 并

且 $\det(j\omega I - A) \neq 0 (\forall \omega \in W)$ 。那么下列描述是等价的:

$$(i) \quad [C(sI - A)^{-1}B + D \quad I] \Pi [C(sI - A)^{-1}B + D \quad I]^* < 0 \quad \forall \omega \in W \quad (4.3)$$

(ii) 存在 Hermitian 矩阵 P, Q , 使得 $Q > 0$ 并且

$$\begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \Psi^T \otimes Q \right] \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix}^* < 0 \quad (4.4)$$

其中 $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}, D \in R^{p \times m}$.

引理 4.2^[43] 给定两频率尺度有理函数矩阵 $G(s)$ 。假设 $G_s(s)$ 和 $G_f(s)$ 在虚轴均没有极点, 并且 $G(s)$ 在虚轴上没有消隐极点。那么

$$\sup_{s \in D} \|G(s) - G_s(s) - G_f(s) + V\| = 0(\varepsilon) \quad (4.5)$$

其中 $V = G_s(s)|_{s \rightarrow \infty} = G_f(s)|_{s \rightarrow 0}$, $\|\cdot\|$ 是矩阵范数, D 表示虚轴。

4.3 主要结论

应用奇异摄动理论, 可以得到 $G_p(s)$ 的慢、快子系统的状态空间实现:

$$G_{ps} := \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array} \right] \text{ 和 } G_{pf} := \left[\begin{array}{c|c} A_{22} & B_2 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon \\ \hline C_2 & D \end{array} \right] \quad (4.6)$$

其中 $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, $C_0 = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}$, $D_0 = D - C_2A_{22}^{-1}B_2$.

同样地,

$$G_{ms} := \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_0 & \tilde{B}_0 \\ \hline \tilde{C}_0 & \tilde{D}_0 \end{array} \right] \text{ 和 } G_{mf} := \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \tilde{C}_2 & \tilde{D} \end{array} \right] \quad (4.7)$$

其中 $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}$, $\tilde{B}_0 = \tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21}$, $\tilde{D}_0 = \tilde{D} - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2$.

考虑具有奇异摄动形式的控制器 $G_c(s)$:

$$G_c : \begin{cases} \dot{p} = E_{11}p + E_{12}q + F_1e \\ \varepsilon \dot{q} = E_{21}p + E_{22}q + F_2e \\ u = G_1p + G_2q + H_2e \end{cases} \quad (4.8)$$

其中 $p \in R^n, q \in R^m, e \in R, u \in R, E_{22}$ 非奇异。 $G_c(s)$ 的慢、快部分的状态空间实现为:

$$G_{cs} := \left[\begin{array}{c|c} E_0 & F_0 \\ \hline G_0 & H_0 \end{array} \right] \text{ 和 } G_{cf} := \left[\begin{array}{c|c} E_{22} & F_2 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon \\ G_2 & H_2 \end{array} \right] \quad (4.9)$$

其中 $E_0 = E_{11} - E_{12}E_{22}^{-1}E_{21}, F_0 = F_1 - E_{12}E_{22}^{-1}F_2, G_0 = G_1 - G_2E_{22}^{-1}E_{21}, H_0 = H_2 - G_2E_{22}^{-1}F_2$ 。

PID 控制器在许多工程应用中被广泛采用。文[48]研究了多频率范围内直接的开环 PID 整形, 该控制器的形式是:

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{T_d s + 1} \quad (4.10)$$

其中 $T_d > 0$ 是小常数。然而, 该控制器存在纯虚的极点, 即它有一极点在原点, 因此不适合本文的讨论, 具体原因在本节最后给出。

为了避免在原点处的极点, 本文在形如(4.10)式的 PID 控制器的基础上作简单的改进, 这时, $G_{cs}(s)$ 和 $G_{cf}(s)$ 具有如下形式:

$$G_{cs}(s) = k_p + \frac{k_i}{s+a} + \frac{k_d s}{T_d s + 1}, \quad (4.11)$$

$$G_{cf}(s) = \tilde{k}_p + \frac{\tilde{k}_i}{\varepsilon s + a} + \frac{\tilde{k}_d \varepsilon s}{T_d \varepsilon s + 1} \quad (4.12)$$

并且

$$G_{cs}(s)|_{s=\infty} = G_{cf}(s)|_{\varepsilon s=0} \quad (4.13)$$

其中 $T_d > 0$ 和 $a > 0$ 都是小常数。

注 4.2 对于奇异摄动系统, 限制条件(4.13)是这类系统的内在特性, 这一特性已经在文[43]中指出, 因此设计 $G_{cs}(s)$ 和 $G_{cf}(s)$ 时必须考虑这一限制条件。

对于固定的 $T_d > 0$ 和 $a > 0$, 下面给出 $G_{cs}(s)$ 和 $G_{cf}(s)$ 的状态空间形式, 其中 F_0, H_0 和 F_2, H_2 是分别是设计参数 (k_p, k_i, k_d) 和 $(\tilde{k}_p, \tilde{k}_i, \tilde{k}_d)$ 的仿射函数。

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{E_0}{G_0} & \frac{F_0}{H_0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -a & 0 & k_i \\ 0 & -\frac{1}{T_d} & -\frac{k_d}{T_d^2} \\ \hline 1 & 1 & k_p + \frac{k_d}{T_d} \end{array} \right] \quad (4.14)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{E_{22}}{G_2} & \frac{F_2}{H_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{a}{\varepsilon} & 0 & \frac{\tilde{k}_i}{\varepsilon} \\ 0 & -\frac{1}{T_d\varepsilon} & -\frac{\tilde{k}_d}{T_d^2\varepsilon} \\ \hline 1 & 1 & \tilde{k}_p + \frac{\tilde{k}_d}{T_d} \end{array} \right] \quad (4.15)$$

定义 $G(s) = G_p(s)G_c(s) - G_m(s)$, $G_i(s) = G_{pi}(s)G_{ci}(s) - G_{mi}(s)$, $G_f(s) = G_{pf}(s)G_{cf}(s) - G_{mf}(s)$ 。容易验证 $G_i(s)$ 和 $G_f(s)$ 分别是 $G(s)$ 的慢、快子系统。为了叙述的简洁, 这里称假设 $G_i(s)$ 和 $G_f(s)$ 在虚轴上没有极点, 并且 $G(s)$ 在虚轴上没有消隐极点为标准假设。作为引理 4.2 的一个应用, 可以得到如下结果:

定理 4.1 给定 $W_1 = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq \omega_1\}$, $W_2 = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \geq \omega_h\}$, 其中 $\omega_1 < \omega_h$ 。在标准假设下, 假定 $\|G_i(s) - V\|_\infty \leq 0(\varepsilon)$ ($\forall \omega \in W_2$) 同时 $\|G_f(s) - V\|_\infty \leq 0(\varepsilon)$ ($\forall \omega \in W_1$)。如果 $\|G_i(s)\|_\infty \leq \gamma$ ($\forall \omega \in W_1$) 并且 $\|G_f(s)\|_\infty \leq \gamma$ ($\forall \omega \in W_2$), 那么 $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma + 0(\varepsilon)$ ($\forall \omega \in W_0$)

其中 $V = G_i(s)|_{s=\infty} = G_f(s)|_{s=0}$, $W_0 = W_1 \cup W_2$ 。

证明: 根据(4.5)可知

$$\|G(s) - G_i(s) - G_f(s) + V\|_2 \leq 0(\varepsilon), \quad \forall \omega \in W_2$$

考虑到范数的特性, 那么

$$\|G(s)\|_2 \leq \|G_i(s) - V\|_2 + \|G_f(s)\|_2 + 0(\varepsilon), \quad \forall \omega \in W_2$$

考虑到有限频域上的 H_∞ 范数的定义可知, 如果 $\|G_i(s) - V\|_\infty \leq 0(\varepsilon)$ ($\forall \omega \in W_2$) 并且 $\|G_f(s)\|_\infty \leq \gamma$ ($\forall \omega \in W_2$), 那么 $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma + 0(\varepsilon)$ ($\forall \omega \in W_2$)。

同理, 如果 $\|G_f(s) - V\|_\infty \leq 0(\varepsilon)$ ($\forall \omega \in W_1$) 并且 $\|G_i(s)\|_\infty \leq \gamma$ ($\forall \omega \in W_1$), 那么 $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma + 0(\varepsilon)$

$(\forall \omega \in W_1)$.

因此, $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma + 0(\varepsilon) (\forall \omega \in W_0)$.

证毕。

事实上, 对于奇异摄动系统, 在适当的低频和高频范围内, 假设条件 $\|G_s(s) - V\|_\infty \leq 0(\varepsilon) (\forall \omega \in W_2)$ 和 $\|G_f(s) - V\|_\infty \leq 0(\varepsilon) (\forall \omega \in W_1)$ 将会自然地成立。定理 4.1 实质上提供了低频和高频的定义, 低频的最大值 ω_{lmax} 和高频的最小值 ω_{hmin} 定义如下:

$$\omega_{lmax} = \max \{ \omega_l > 0 \mid \|G_f(s) - G_s(\infty)\|_\infty \leq 0(\varepsilon) \quad \forall |\omega| \leq \omega_l \}$$

$$\omega_{hmin} = \min \{ \omega_h > 0 \mid \|G_s(s) - G_s(\infty)\|_\infty \leq 0(\varepsilon) \quad \forall |\omega| \geq \omega_h \}$$

根据定理 4.1 的结论可以知道, 在有限频域上奇异摄动系统的模型匹配问题可以转为两个低阶的模型匹配问题, 相应的步骤包括如下三步:

第一步: 设计控制器的慢部分 $G_{cs}(s)$ 使得 $\|G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)\|_\infty < \gamma \quad (\forall |\omega| \leq \omega_l)$.

第二步: 设计控制器的快部分 $G_{cf}(s)$ 使得 $\|G_{pf}(s)G_{cf}(s) - G_{mf}(s)\|_\infty < \gamma \quad (\forall |\omega| \geq \omega_h)$ 同时受限于 (4.13).

第三步: 当 $G_{cs}(s)$ 和 $G_{cf}(s)$ 设计完成之后, 可以采用如下形式的合成控制器^[4]:

$$\tilde{G}_c(s) := G_{cs}(s) + G_{cf}(s) - G_{cs}(\infty) \tag{4.16}$$

注 4.3 考虑到限制条件(4.13), 可以首先解决慢(快)问题, 这是一个标准的问题, 然而这时快(慢)问题就不是标准问题了。

注 4.4 如果 $\|G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)\|_\infty < \gamma \quad (\forall |\omega| \leq \omega_l)$ 并且 $\|G_{pf}(s)G_{cf}(s) - G_{mf}(s)\|_\infty < \gamma \quad (\forall |\omega| \geq \omega_h)$, 那么 $\|G_p(s)G_c(s) - G_m(s)\|_\infty < \gamma + 0(\varepsilon) (\forall \omega \in W_0)$ 。考虑到引理 4.2, 可知 $\|G_c(s) - \tilde{G}_c(s)\|_\infty = 0(\varepsilon)$, 那么

$$\begin{aligned} \|G_p(s)\tilde{G}_c(s) - G_m(s)\|_\infty &= \|G_p(s)[\tilde{G}_c(s) - G_c(s)] + G_p(s)G_c(s) - G_m(s)\|_\infty \\ &\leq \|G_p(s)[\tilde{G}_c(s) - G_c(s)]\|_\infty + \|G_p(s)G_c(s) - G_m(s)\|_\infty \end{aligned}$$

$$\leq \|G_p(s)G_c(s) - G_m(s)\|_\infty + 0(\varepsilon)$$

$$< \gamma + 0(\varepsilon), \quad \forall \omega \in W_0.$$

下面给出有关慢子系统的相关结果:

定理 4.2 给定 $W_1 = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq \omega_1\}$ 同时假设 $\det(j\omega I - A) \neq 0$ ($\forall \omega \in W_1$)。则存在形如 (4.11) 式的控制器 $G_{cs}(s)$ 使得 $\|G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)\|_\infty < \gamma$ ($\forall \omega \in W_1$) 当且仅当存在实对称矩阵 P, Q , 满足 $Q > 0$, 并且

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T - AQA^T + \omega_1^2 Q & -AQC^T + PC^T & B \\ -CQA^T + CP & -CQC^T - \gamma^2 I & D_1 \\ B^T & D_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 G_0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_0 H_0 \\ F_0 \\ \tilde{B}_0 \end{bmatrix}, C = [C_0 \quad D_0 G_0 \quad -\tilde{C}_0] \quad D_1 = D_0 H_0 - \tilde{D}_0.$$

证明: 考虑引理 4.1 和 Schur 引理, 令 (4.4) 中 $\Psi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 那么 (4.17) 等价于 (4.4)。根据 (4.3) 可得

$$\begin{bmatrix} C(sI - A)^{-1}B + D_1 & I \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C(sI - A)^{-1}B + D_1]^T \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

而且 (4.18) 等价于

$$\|C(sI - A)^{-1}B + D_1\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in W_1 \quad (4.19)$$

考虑 (4.6-4.7) 和 (4.9), $G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)$ 的状态空间形式为^[52]:

$$G_{ps}G_{cs} - G_{ms} : \left[\begin{array}{ccc|c} A_0 & B_0 G_0 & 0 & B_0 H_0 \\ 0 & E_0 & 0 & F_0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_0 & \tilde{B}_0 \\ \hline C_0 & D_0 G_0 & -\tilde{C}_0 & D_0 H_0 - \tilde{D}_0 \end{array} \right] \quad (4.20)$$

那么 (4.19) 等价于

$$\|G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in W_1$$

证毕。

考虑之前提到的设计步骤, 设计 $G_{cs}(s)$ 需要考虑限制条件 (4.13), 也就是

$$k_p + \frac{k_d}{T_d} = \tilde{k}_p + \frac{\tilde{k}_i}{a} \quad (4.21)$$

根据定理 4.2, 可以设计控制器 $G_{cr}(s)$, 求得参数 k_p, k_i, k_d , 然后考虑到(4.21), $G_{cf}(s)$ 的状态空间实现就是:

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{E_{22}}{\varepsilon} & \frac{F_2}{\varepsilon} \\ \hline \frac{G_2}{H_2} & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{a}{\varepsilon} & 0 & \frac{\tilde{k}_i}{\varepsilon} \\ 0 & -\frac{1}{T_d \varepsilon} & -\frac{\tilde{k}_d}{T_d^2 \varepsilon} \\ \hline 1 & 1 & k_p + \frac{k_d}{T_d} - \frac{\tilde{k}_i}{a} + \frac{\tilde{k}_d}{T_d} \end{array} \right] \quad (4.22)$$

同理, 下面给出快子系统的结论:

定理 4.3 给定 $W_2 = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \geq \omega_h\}$ 同时假设 $\det(j\omega I - A) \neq 0 (\forall \omega \in W_2)$ 。则存在形如(4.12)式的控制器 $G_{cf}(s)$ 使得 $\|G_{pf}(s)G_{cf}(s) - G_{mf}(s)\|_\infty < \gamma (\forall \omega \in W_2)$ 当且仅当存在实对称矩阵 P, Q , 满足 $Q > 0$, 并且

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T + AQA^T - (\varepsilon\omega_h)^2 Q & AQC^T + PC^T & B \\ CQA^T + CP & CQC^T - \gamma^2 I & D_2 \\ B^T & D_2^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 G_2 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_2 H_2 \\ F_2 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_2 \quad DG_2 \quad -\tilde{C}_2], \quad D_2 = DH_2 - \tilde{D}.$$

证明: 令(4.4)中 $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(\varepsilon\omega_h)^2 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$, 那么(4.23)等价于(4.4)。由式(4.3)可知

$$\|C(pI - A)^{-1}B + D_2\|_\infty < \gamma \quad \forall |\bar{\omega}| \geq \varepsilon\omega_h \quad (4.24)$$

其中 $p = j\bar{\omega}$ 。

(4.24)等价于

$$\|C(\varepsilon sI - A)^{-1}B + D_2\|_\infty < \gamma \quad \forall |\omega| \geq \omega_h \quad (4.25)$$

这时, (4.25)可以写成

$$\left\| C\left(sI - \frac{A}{\varepsilon}\right)^{-1} \frac{B}{\varepsilon} + D_2 \right\|_\infty < \gamma \quad \forall |\omega| \geq \omega_h \quad (4.26)$$

$G_{pf}(s)G_{cf}(s) - G_{mf}(s)$ 的状态空间实现是:

$$G_{pf}G_{cf} - G_{mf} : \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{A_{22}}{\varepsilon} & \frac{B_2 G_2}{\varepsilon} & 0 & \frac{B_2 H_2}{\varepsilon} \\ 0 & \frac{E_{22}}{\varepsilon} & 0 & \frac{F_2}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{A}_{22}}{\varepsilon} & \frac{\tilde{B}_2}{\varepsilon} \\ \hline C_2 & D G_2 & -\tilde{C}_2 & D H_2 - \tilde{D} \end{array} \right] \quad (4.27)$$

那么, (4.26)等价于

$$\|G_{pf}(s)G_{cf}(s) - G_{mf}(s)\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in W_2.$$

证毕。

在本节的最后, 对形如(4.10)的 PID 控制器做简单的讨论, 说明其不适合本文的原因。

假设 $G_{cs}(s)$ 形如(4.10), 即 $G_{cs}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{T_d s + 1}$, 那么 $G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)$ 在虚轴上存在极点, 定理 4.1 中的标准假设条件就不能满足。同理, 若 $G_{cf}(s)$ 形如(4.10)也会有同样的问题。而且, 从(4.14)和(4.20)可以看出, $G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_{ms}(s)$ 的状态矩阵存在零特征值, 这时定理 4.2 中的假设条件 $\det(j\omega I - A) \neq 0$ ($\forall |\omega| \leq \omega_l$) 也不能得到保证, 因为当 $\omega = 0$ 时, $\det(j\omega I - A) = 0$ 。

4.4 数值仿真

对于奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题, 本文已经给出了设计 H_∞ 次优控制器的具体步骤。考虑到文[13]也研究了类似的问题, 下面将通过简单的例子加以比较。

算例 4.1 考虑模型匹配问题^[13]:

$$G_m(s) = \frac{s+0.5}{(s+2)(\varepsilon s+2)}$$

$$G_p(s) = \frac{(s-1)(\varepsilon s-1)}{(s+1)(\varepsilon s+1)}$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ 。

令 $\omega_l = 0.2$, $\omega_h = 5 \times 10^3$, $T_d = a = 0.05$, $\gamma = 0.1$ 。应用本文的设计方法, 可得如下控制器:

$$G_{c1}(s) = \frac{0.9363s^2 + 0.04707s + 0.055}{0.05s^2 + 1.002s + 0.05} + \frac{0.0001(\varepsilon s)^2 + 0.04704\varepsilon s + 0.9406}{0.05(\varepsilon s)^2 + 1.002\varepsilon s + 0.05} - 18.7293$$

采用文[13]的算法, 得到控制器是:

$$G_{e2}(s) = -\frac{(s+1)(7s-5.5)}{6(s+2)(7s+1)} - \frac{\varepsilon s + 1}{3(\varepsilon s + 2)} + \frac{1}{6}$$

模型匹配误差函数在低频和高频的曲线分别如图 4.1-4.2 所示。

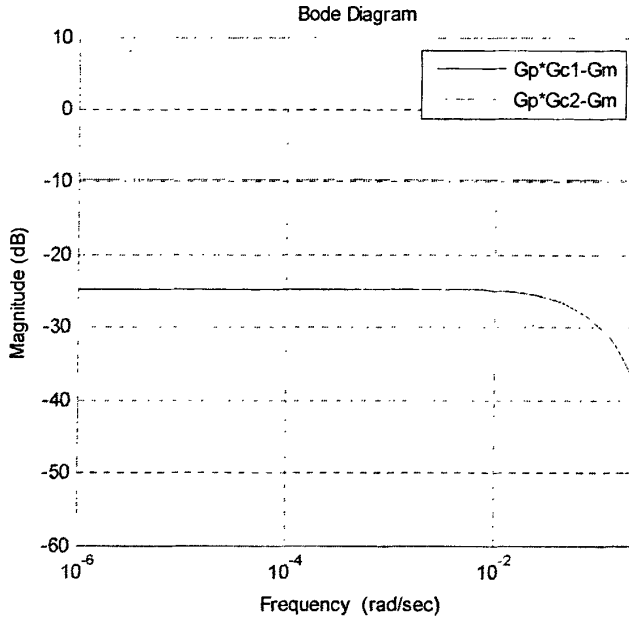


图 4.1 低频段内的误差函数

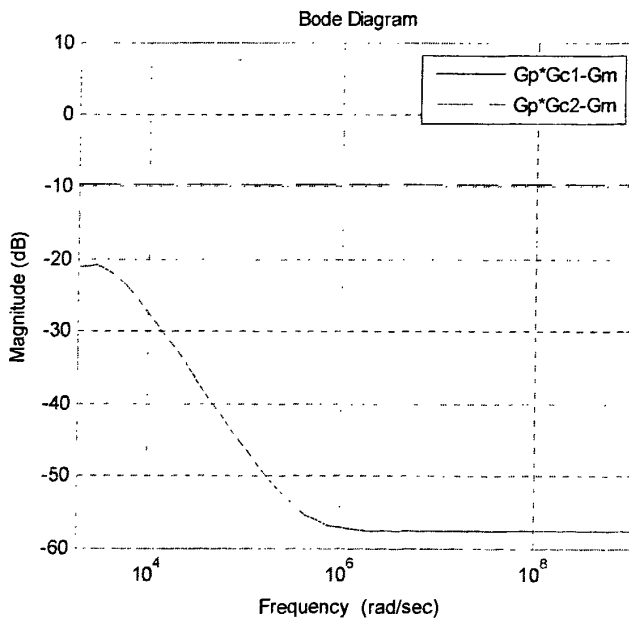


图 4.2 高频段内的误差函数

从图 4.1 和图 4.2 可以看出，应用本文结论得到的控制器 $G_{c1}(s)$ 满足设计指标，也就是

模型匹配误差函数在低频和高频段内均小于 $20 \log \gamma$ ($-20dB$).

算例 4.2 考虑跟踪问题:

$$G_p(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(\varepsilon s+1)}$$

其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$.

令 $\omega_l = 1 \times 10^{-3}$, $T_d = a = 0.05$, $\tilde{k}_p = \tilde{k}_i = \tilde{k}_d = 0$.

接下来, 将分别设计满足不同指标的两个控制器。

$$(1) \gamma = 0.1, G_m(s) = \frac{1}{\gamma} + \gamma - 1.$$

这里, 需要设计控制器满足

$$\|G_{ps}(s)G_{cs}(s) - G_m(s)\|_\infty < \gamma \quad (\forall |\omega| \leq \omega_l), \quad \text{那么} \quad \left\| \frac{1}{1+G_{ps}(s)G_{cs}(s)} \right\|_\infty < \gamma \quad (\forall |\omega| \leq \omega_l).$$

应用本文结论, 可以得到控制器如下:

$$G_c(s) = \frac{11.83s + 0.6825}{0.05s^2 + 1.002s + 0.05}$$

$$(2) \gamma = 0.01, G_m(s) = \frac{1}{\gamma} + \gamma - 1.$$

同理, 可以获得如下控制器:

$$G_c(s) = \frac{147.6s + 7.426}{0.05s^2 + 1.002s + 0.05}$$

图 4.3 给出了在两个不同的控制器作用下, 单位负反馈系统的阶跃响应。

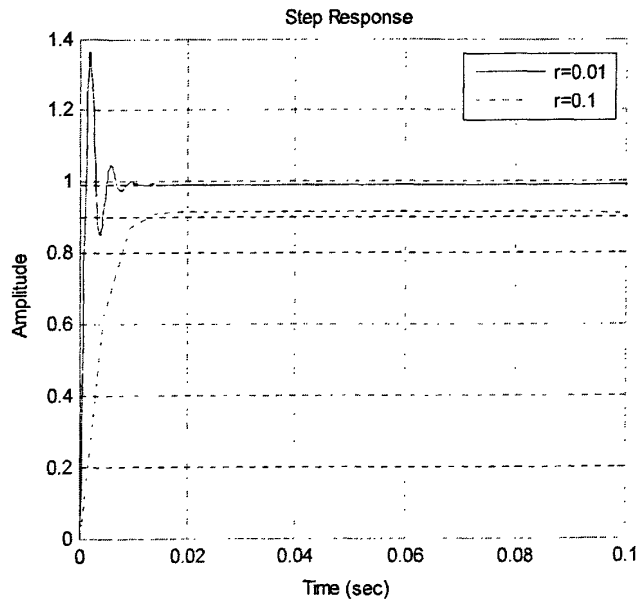


图 4.3 阶跃响应

从图 4.3 可以看出,当 $\gamma=0.1$,稳态误差小于 0.1; 当 $\gamma=0.01$,稳态误差小于 0.01, 这表明两组控制器均符合各自的要求。

4.5 本章小结

本章研究了在有限频域上 SISO 奇异摄动系统的模型匹配问题。基于 GKYP 引理给出了存在 H_∞ 次优控制器的充分必要条件, 并且通过设计控制器的慢快部分, 得到了具有奇异摄动形式的控制器。

第5章 带有极点配置的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制

本章研究了带有极点配置要求的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题。也就是设计状态反馈控制器使得闭环系统的状态矩阵的特征值在要求的位置, 同时在低频和高频段内满足预定的 H_∞ 指标。本文证明了全阶问题可以分解为快慢子问题, 通过分别设计状态反馈控制器去解决快慢子问题, 可以构造合成控制器。

5.1 引言

在过去几十年中, 奇异摄动系统的 H_∞ 控制问题得到了广泛的关注, 参见 [4-6,8-10,12,18,53]。众所周知, 对于奇异摄动系统, 多时间尺度和多频率尺度是其内在特性。众多研究成果都采用了分两步的设计步骤, 也就是所谓的降阶技术。首先针对快子系统和修正后的慢子系统分别设计次优控制器, 然后根据上述控制器可以得到合成控制器。值得注意的是, 在高频和低频内, 全阶系统可以分别由其快子系统和慢子系统近似^[43]。传统的方法忽略了子系统的频率特性, 在某种程度上将会增加设计过程的保守性。

作为研究系统理论的主要工具, Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理^[44,46]在频域不等式(FDI)和线性矩阵不等式(LMI)之间建立了等价关系, 并且在系统分析、控制以及信号处理领域发挥了重大作用。考虑到实际的指标常常在多个频率范围内给出, 而KYP引理只能处理整个频域上的FDIs, 因此KYP引理并不是完全适用于实际的场合。文[19-20]提出了广义KYP (GKYP)引理, 该引理可以对有限频域上的FDIs给出LMI形式的描述, 特别地, 当设计指标以有限频域的FDIs给出时, GKYP引理将会非常适用。

在线性系统理论方面, 特征结构配置是非常重要的问题, 已经得到了许多学者的关注^[24-29]。我们知道, 对于一个系统来说, 其暂态响应很大程度上取决于它的特征值的位置。特征结构配置不只可以配置闭环特征值, 还能提供容许的特征向量。文[26]提出了特征结构配置的完全参数化方法, 该方法给出了所有反馈增益和闭环特征向量的数学表达式, 提供了完备的可行解空间, 全部的自由度也可以用来满足一些附加的系统指标。

本文研究了带有极点配置限制的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题。也就是设计状态反馈控制器使得闭环系统的极点在要求的位置, 同时在低频和高频段内满足预定的 H_∞ 性能指标。基于完全参数化方法^[26], 自由度可以用来实现在有限频域上的预定 H_∞ 性能指标, 而这一指标又可以通过 GKYP 引理^[19]转化为 LMIs。通过分解全阶问题, 本文研究了两个降阶子问题。以 LMIs 的形式给出了子问题有解的充分条件,

并且当条件满足时,进一步给出了适当解,最后在两个子问题的适当解的基础上可以构造合成控制器。

5.2 问题描述

考虑线性连续奇异摄动系统^[4]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + B_2\omega(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_{21}u(t) + B_{22}\omega(t) \\ z(t) &= C_{11}x_1(t) + C_{12}x_2(t) + D_{11}\omega(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中 ε 是小的正参数, $x_1(t) \in R^n$, $x_2(t) \in R^m$ 是状态向量, $u(t) \in R^q$ 是控制向量, $z(t) \in R^m$ 是输出向量, $\omega(t) \in R^r$ 是干扰向量。 A_j, B_j, C_j, D_{11} ($i, j=1, 2$) 都是具有适当维数的实常数矩阵, A_{22} 非奇异。

令

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad C = [C_{11} \quad C_{12}] \quad (5.2)$$

则系统(5.1)是:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1u(t) + B_2\omega(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_{11}\omega(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

考虑如下状态反馈控制律:

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in R^{q \times (n_1+n_2)} \quad (5.4)$$

将(5.4)应用于(5.3)得到如下闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_1K)x(t) + B_2\omega(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_{11}\omega(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

记闭环系统(5.5)的传递函数为 $\bar{G}(s)$, 那么

$$\bar{G}(s) = C[sI - (A + B_1K)]^{-1}B_2 + D_{11} \quad (5.6)$$

在本文中作如下假设:

(A1): $\bar{G}(s)$ 没有不稳定的消隐极点^[51]。

(A2): B_{21} 和 $B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{21}$ 都是列满秩。

(A3): $[A_{22} \ B_{21}]$ 和 $[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \ B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{21}]$ 均可控。

本文将闭环系统(5.5)的预定特征值限制为互异且共轭的。带有极点配置的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题如下:

全阶问题: 考虑系统(5.3), 给定两组互异且共轭的复数 $s_i \in C, i=1,2,\dots,n_1$ 和 $p_j \in C, j=1,2,\dots,n_2$, 正的实数 $\omega_i < \omega_n, \gamma > 0$, 寻求形如(5.4)的实矩阵 K 满足:

(R1) 闭环系统(5.5)的特征值是 $s_i + o(\epsilon)$ 和 $p_j + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}, i=1,2,\dots,n_1, j=1,2,\dots,n_2$.

(R2) $\|\bar{G}(s)\|_\infty < \gamma + o(\epsilon), \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_1^T) \cup \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_2^T)$

其中:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Psi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega_i^2 \end{bmatrix}, \Psi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_n^2 \end{bmatrix}.$$

注5.1 实际上, (R2)中的 $\bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_1^T)$ 和 $\bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_2^T)$ 分别表示低频和高频^[19]。定义 $W = \{\omega | j\omega \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_1^T) \cup \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_2^T)\}$, 有限频域上的 H_∞ 范数指标(R2)可以理解为 $\sup_{\omega \in W} \sigma_{\max}(\bar{G}(j\omega)) < \gamma + o(\epsilon)$ 。

在给出本文主要结论之前, 先给出一个重要的引理。

引理 5.1^[26] 给定满秩矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 和 $B \in R^{n \times r}$, $N(s)$ 和 $D(s)$ 满足右互质分解等式

$$(sI - A)^{-1}B = N(s)D^{-1}(s) \quad (5.7)$$

$\Lambda = \text{diag}[s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$, 其中 $s_i, i=1,2,\dots,n$ 是一组自共轭的复数, 假设矩阵对 $[A \ B]$ 可控, 那么所有满足

$$AV + BKV = V\Lambda \quad (5.8)$$

的矩阵 $K \in R^{r \times n}$ 和 $V \in C^{n \times n}$ 可以由下式给出:

$$K = [D(s_1)f_1 \ D(s_2)f_2 \ \dots \ D(s_n)f_n]V^{-1} \quad (5.9)$$

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n], \quad v_i = N(s_i)f_i \quad (5.10)$$

其中 $f_i \in C^r, i=1,2,\dots,n$ 是一组满足下面条件的参数向量:

C1: 若 $s_i = \bar{s}_j$, 则 $f_i = \bar{f}_j$ 。

$$C2: \det([N(s_1)f_1 \quad N(s_2)f_2 \quad \dots \quad N(s_n)f_n]) \neq 0.$$

5.3 带有极点配置的有限频域 H_∞ 控制

本文中，对于系统(5.3)，采用如下的合成状态反馈控制律^[1]：

$$u = [K_0 + K_2 A_{22}^{-1} A_{21} + K_2 A_{22}^{-1} B_{21} K_0 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

将其应用于系统(5.3)可以得到形如(5.5)式的闭环系统。可以证明，全阶问题可以分解为慢子问题和快子问题，具体的证明将在本节最后给出。下面将讨论快子问题的求解。

5.3.1 高频内带有极点配置的快子系统的 H_∞ 控制

考虑系统(5.1)的快子系统：

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_f &= A_{22} x_f + B_{21} u_f + B_{22} \omega_f \\ z_f &= C_{12} x_f + D_{11} \omega_f \end{aligned} \quad (5.12)$$

考虑如下状态反馈控制律：

$$u_f(t) = K_2 x_f(t), \quad K_2 \in R^{q \times n_2} \quad (5.13)$$

将(5.13)作用于系统(5.12)上得到如下闭环系统：

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_f &= (A_{22} + B_{21} K_2) x_f + B_{22} \omega_f \\ z_f &= C_{12} x_f + D_{11} \omega_f \end{aligned} \quad (5.14)$$

和时域上的处理方式类似，引入新的变量 $p = \varepsilon s$ ，那么闭环系统(5.14)的传递函数是：

$$\bar{G}_f(p) = C_{12} (pI - \bar{A}_{22})^{-1} B_{22} + D_{11} \quad (5.15)$$

其中 $\bar{A}_{22} = A_{22} + B_{21} K_2$ 。

下面给出快子问题的描述：

快子问题：考虑子系统(5.12)，寻求形如(5.13)的实矩阵 K_2 ，满足：

(FR1) 闭环系统(5.14)的特征值是 $p_j \in C, j = 1, 2, \dots, n_2$ 。

(FR2) $\|\bar{G}_f(p)\|_\infty < \gamma \quad \forall p \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_3^T)$

其中 $\Psi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2 \omega_h^2 \end{bmatrix}$.

注 5.2 值得注意的是, 指标(FR1)意味着闭环系统(5.14)的极点是 $p_j \in C, j=1, 2, \dots, n_2$, 因此 \bar{A}_{22} 的特征值将要求在 $\varepsilon p_j \in C, j=1, 2, \dots, n_2$ 。

考虑到引理 5.1 中的右互质分解(5.7), 在进行极点配置之前, 需要寻求矩阵 $N(p)$ 和 $D(p)$ 满足

$$(pI - A_{22})^{-1} B_{21} = N(p)D^{-1}(p) \tag{5.16}$$

对 $[A_{22} - pI \ B_{21}]$ 进行一系列的矩阵初等变换之后, 就可以得到矩阵多项式 $N(p)$ 和 $D(p)$ [26].

下面将给出高频段内有关快子系统的相关结论。

定理 5.1 考虑快子问题, 存在形如(5.13)的控制器的充分条件是存在 $P = P^*, Q = Q^* > 0, V_{21} \in C^{r \times n_2}, V_{22} \in C^{r \times (m+n_2+r)}, f_j \in C^q, j=1, 2, \dots, n_2$, 满足

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & -\bar{\omega}_h^2 Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -V_{11} & 0 \\ -V_{21} & -V_{22} \\ V_{11}\Lambda_f + B_{22}V_{21} & B_{22}V_{22} \\ C_{12}V_{11} + D_{11}V_{21} & D_{11}V_{22} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

其中 $\bar{\omega}_h = \varepsilon \omega_h, \Lambda_f = \text{diag}[\varepsilon p_1 \ \varepsilon p_2 \ \dots \ \varepsilon p_{n_2}]$,

$V_{11} = [N(\varepsilon p_1)f_1 \ N(\varepsilon p_2)f_2 \ \dots \ N(\varepsilon p_{n_2})f_{n_2}]$ 并且若 $p_i = \bar{p}_j$, 则 $f_i = \bar{f}_j$.

如果(5.17)是可行的, 不妨设 V_{11} 可逆, 这时状态反馈控制律可由下式给出:

$$u_f(t) = W V_{11}^{-1} x_f(t) \tag{5.18}$$

其中, $W = [D(\varepsilon p_1)f_1 \ D(\varepsilon p_2)f_2 \ \dots \ D(\varepsilon p_{n_2})f_{n_2}]$.

证明: 假设(5.17)可行, 令 $K_2 = W V_{11}^{-1}$, 根据引理 5.1 可知

$$A_{22}V_{11} + B_{21}K_2V_{11} = V_{11}\Lambda_f.$$

考虑到 V_{11} 非奇异, 因此

$V_{11}^{-1}(A_{22} + B_{21}K_2)V_{11} = \Lambda_f$, 那么 $A_{22} + B_{21}K_2$ 和 Λ_f 有相同的特征值, 分别是 $\varepsilon p_1 \ \varepsilon p_2 \ \dots \ \varepsilon p_{n_2}$,

这时, 指标(FR1)满足。

令 T 是置换矩阵满足

$$[M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4]T = [M_1 \ M_3 \ M_2 \ M_4]$$

其中 M_1, M_2, M_3 和 M_4 是任意列数为 n_2, r, n_2 和 m 的矩阵, 那么(5.17)就是

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi_3 \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \\ A_{22} + B_{21}K_2 & B_{22} \\ C_{12} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

其中

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

令 $M = \begin{bmatrix} A_{22} + B_{21}K_2 & B_{22} \\ C_{12} & D_{11} \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$, 那么(5.19)可以写成如下形式:

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi_3 \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I \\ M \end{bmatrix} V \quad (5.20)$$

根据 Finsler 定理^[39], (5.20)等价于:

$$[M \ I] T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi_3 \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* \begin{bmatrix} M^* \\ I \end{bmatrix} < 0$$

考虑(5.15)和引理 2.1, 可以知道

$\sigma(\bar{G}(p), \Pi) < 0, \forall p \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_3^T)$, 这也意味着

$\|\bar{G}_f(p)\|_\infty < \gamma, \forall p \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_3^T)$, 这时指标(FR2)满足.

证毕.

注 5.3 在定理 5.1 中, 假设 V_{11} 非奇异, 如果假设不满足, 可以选择标量 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $\hat{V}_{11} = V_{11} + \theta \bar{V}_{11}$ 非奇异并且满足(5.17), 其中 \bar{V}_{11} 是任意满足 $A_{22}\bar{V}_{11} + B_{21}\bar{W} = \bar{V}_{11}\Lambda_f$ 的非奇异阵.

注 5.4 当(5.17)中出现复数参数时, 下面的等价关系将会用到, 该关系可以将含有复变量的 LMI 转化为仅含实变量的 LMI^[19]:

$$X + jY = (X + jY)^* > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix}^T > 0$$

其中 X 和 Y 都是实方矩阵.

5.3.2 低频内带有极点配置的修正慢子系统的 H_∞ 控制

考虑系统(5.1)的修正慢子系统:

$$\dot{x}_s = A_0 x_s + B_0 u_s + \bar{B}_0 \omega,$$

$$z_s = C_0 x_s + D_0 u_s + \bar{D}_0 \omega_s \quad (5.21)$$

其中 $A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$, $B_0 = B_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21}$, $C_0 = C_{11} - C_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$, $D_0 = -C_{12} A_{22}^{-1} B_{21}$, $\bar{A}_{12} = A_{12} + B_{11} K_2$,
 $\bar{B}_0 = B_{12} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_{22}$, $\bar{D}_0 = D_{11} - C_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_{22}$.

考虑状态反馈控制律

$$u_s(t) = K_0 x_s(t), \quad K_0 \in R^{q \times n} \quad (5.22)$$

将(5.22)应用于(5.21)得到如下闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= (A_0 + B_0 K_0) x_s + \bar{B}_0 \omega_s, \\ z_s &= (C_0 + D_0 K_0) x_s + \bar{D}_0 \omega_s. \end{aligned} \quad (5.23)$$

记闭环系统(5.23)的传递函数为 $\bar{G}_i(s)$, 那么

$$\bar{G}_i(s) = (C_0 + D_0 K_0)(sI - A_0 - B_0 K_0)^{-1} \bar{B}_0 + \bar{D}_0 \quad (5.24)$$

假设矩阵多项式 $N(s)$ 和 $D(s)$ 满足

$$(sI - A_0)^{-1} B_0 = N(s) D^{-1}(s) \quad (5.25)$$

下面给出慢子问题的描述:

慢子问题: 考虑修正慢子系统(5.21), 寻求形如(5.22)的实矩阵 K_0 , 满足

(SR1) 闭环系统(5.23)的特征值是 $s_i \in C, i=1, 2, \dots, n_1$.

(SR2) $\|\bar{G}_i(s)\|_\infty < \gamma \quad \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi_1^T)$

接下来给出低频段内关于慢子系统的结论。

定理 5.2 考虑慢子问题, 存在形如(5.22)的控制器的充分条件是存在矩阵 $P = P^*$, $Q = Q^* > 0$, $V_{21} \in C^{r \times n_1}$, $V_{22} \in C^{r \times (m+n_1+r)}$, $f_j \in C^q, j=1, 2, \dots, n_1$, 满足

$$\begin{bmatrix} -Q & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & \omega_1^2 Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < \text{He} \begin{bmatrix} -V_{11} & 0 \\ -V_{21} & -V_{22} \\ V_{11} \Lambda_s + \bar{B}_0 V_{21} & \bar{B}_0 V_{22} \\ C_0 V_{11} + D_0 W + \bar{D}_0 V_{21} & \bar{D}_0 V_{22} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

其中 $\Lambda_s = \text{diag}[s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_{n_1}]$,

$V_{11} = [N(s_1) f_1 \quad N(s_2) f_2 \quad \dots \quad N(s_{n_1}) f_{n_1}]$, $W = [D(s_1) f_1 \quad D(s_2) f_2 \quad \dots \quad D(s_{n_1}) f_{n_1}]$

并且若 $s_i = \bar{s}_j$, 则 $f_i = \bar{f}_j$.

如果(5.26)是可行的,不妨设 V_{11} 可逆, 这时状态反馈控制律可由下式给出:

$$u_s(t) = WV_{11}^{-1}x_s(t). \quad (5.27)$$

证明: 假设(5.26)可行, 令 $K_0 = WV_{11}^{-1}$, 根据引理 5.1 可知

$$A_0V_{11} + B_0K_0V_{11} = V_{11}\Lambda_s,$$

考虑到 V_{11} 非奇异, 因此

$V_{11}^{-1}(A_0 + B_0K_0)V_{11} = \Lambda_s$, 那么 $A_0 + B_0K_0$ 和 Λ_s 有相同的特征值, 分别是 $s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n$, 这时, 指标(SR1)满足。

令 T 是置换矩阵满足

$$[M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4]T = [M_1 \ M_3 \ M_2 \ M_4]$$

其中 M_1, M_2, M_3 和 M_4 是任意列数为 n_1, r, n_1 和 m 的矩阵, 注意到 $w = K_0V_{11}$, 那么(5.26)

就是

$$T \begin{bmatrix} \Phi \otimes P + \Psi_1 \otimes Q & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} T^* < \text{He} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \\ A_0 + B_0K_0 & \bar{B}_0 \\ C_0 + D_0K_0 & \bar{D}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

下面的证明与定理 5.1 类似, 这里略去。

证毕。

注 5.5 在定理 5.2 中, 假设 V_{11} 非奇异, 如果假设不满足, 可以选择标量 $\theta \in (0,1)$, 使得 $\hat{V}_{11} = V_{11} + \theta \tilde{V}_{11}$ 非奇异, 并且 \hat{V}_{11} 和 $\hat{w} = w + \theta \tilde{w}$ 满足(5.26), 其中 \tilde{V}_{11} 是非奇异阵, 并且满足 $A_0\tilde{V}_{11} + B_0\tilde{w} = \tilde{V}_{11}\Lambda_s$ 。

基于上述推导和分析, 下面给出求解全阶问题的算法:

全阶问题求解算法

(a) 考虑快子系统(5.12), 设计形如(5.13)的状态反馈控制器 K_2 解决快子问题。

- (b) 考虑修正后慢子系统(5.21), 设计形如(5.22)的状态反馈控制器 K_0 解决慢子问题。
 (c) 形如(5.4)的状态反馈控制律可以由(5.11)给出。

注 5.6 值得指出的是在指标(R2)中, 考虑的是在低频和高频段内的 H_∞ 范数指标, 这里可以看出中频段并未考虑进去。实际上, 根据文[5]的附录可知, 如果给慢子问题增加一个附加的条件(SR3), 那么就能保证全频段内的 H_∞ 范数指标。(SR3)可以由下式给出:

$$(SR3) \quad \|\bar{G}_\varepsilon(s)\|_\infty < \gamma \quad \forall s \in \bar{\Lambda}(\Phi^T, \Psi^T).$$

这时全阶问题中的(R2)将变成(R'2):

$$(R'2) \quad \|\bar{G}(s)\|_\infty < \gamma + o(\varepsilon)$$

在本节的最后将给出将全阶问题可以分解为快慢子问题的证明。将状态反馈控制律(5.11)作用于系统(5.3)得到如下闭环系统:

$$\bar{G}: \begin{cases} \dot{x}_1 = \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_{12} x_2 + B_{12} w \\ \varepsilon \dot{x}_2 = \bar{A}_{21} x_1 + \bar{A}_{22} x_2 + B_{22} w \\ z = C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + D_{11} w \end{cases} \quad (5.28)$$

其中 $\bar{A}_{11} = A_{11} + B_{11}K_0 + B_{11}K_2A_{22}^{-1}(A_{21} + B_{21}K_0)$, $\bar{A}_{12} = A_{12} + B_{11}K_2$,
 $\bar{A}_{21} = A_{21} + B_{21}K_0 + B_{21}K_2A_{22}^{-1}(A_{21} + B_{21}K_0)$, $\bar{A}_{22} = A_{22} + B_{21}K_2$.

观察(5.28), 可以看出它的快子系统就是系统(5.14), 下面给出 $\bar{G}(s)$ 的慢子系统求解过程:

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \\ &= A_{11} + B_{11}K_0 + B_{11}K_2A_{22}^{-1}(A_{21} + B_{21}K_0) - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}(I + B_{21}K_2A_{22}^{-1})A_{21} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}(B_{21} + B_{21}K_2A_{22}^{-1}B_{21})K_0 \\ &\quad - B_{11}K_2\bar{A}_{22}^{-1}(I + B_{21}K_2A_{22}^{-1})A_{21} - B_{11}K_2\bar{A}_{22}^{-1}(B_{21} + B_{21}K_2A_{22}^{-1}B_{21})K_0 \end{aligned}$$

因为 $\bar{A}_{22}^{-1}B_{21}K_2A_{22}^{-1} = \bar{A}_{22}^{-1}(\bar{A}_{22} - A_{22})A_{22}^{-1} = A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= A_{11} + B_{11}K_0 + B_{11}K_2A_{22}^{-1}A_{21} + B_{11}K_2A_{22}^{-1}B_{21}K_0 - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}A_{21} - A_{12}(A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1})A_{21} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{21}K_0 \\ &\quad - A_{12}(A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1})B_{21}K_0 - B_{11}K_2\bar{A}_{22}^{-1}A_{21} - B_{11}K_2(A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1})A_{21} - B_{11}K_2\bar{A}_{22}^{-1}B_{21}K_0 - B_{11}K_2(A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1})B_{21}K_0 \\ &= A_{11} + B_{11}K_0 + B_{11}K_2A_{22}^{-1}A_{21} + B_{11}K_2A_{22}^{-1}B_{21}K_0 - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}A_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{21}K_0 - B_{11}K_2A_{22}^{-1}A_{21} - B_{11}K_2A_{22}^{-1}B_{21}K_0 \\ &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + (B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{21})K_0 \\ &= A_0 + B_0K_0 \end{aligned}$$

$$\hat{B}_0 = B_{12} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{22} = \bar{B}_0$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_0 &= C_{11} - C_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} \\ &= C_{11} - C_{12}\bar{A}_{22}^{-1}(I + B_{21}K_2A_{22}^{-1})A_{21} - C_{12}\bar{A}_{22}^{-1}(B_{21} + B_{21}K_2A_{22}^{-1}B_{21})K_0 \\ &= C_{11} - C_{12}\bar{A}_{22}^{-1}A_{21} - C_{12}(A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1})A_{21} - C_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{21}K_0 - C_{12}(A_{22}^{-1} - \bar{A}_{22}^{-1})B_{21}K_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= C_{11} - C_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - C_{12}A_{22}^{-1}B_{21}K_0 \\ &= C_0 + D_0K_0 \\ \hat{D}_0 &= D_{11} - C_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{22} = \bar{D}_0 \end{aligned}$$

那么， $\bar{G}(s)$ 的慢子系统就是系统(5.23)。因此可以研究快子问题和慢子问题来代替全阶问题。

5.4 数值仿真

算例5.1 考虑形如(5.1)式的连续奇异摄动系统，其中各参数如下：

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= [1 \quad -1], C_{12} = [2 \quad 3], D_{11} = 0, \varepsilon = 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\text{给定 } \gamma = 0.8, \omega_l = 0.2, \omega_h = \frac{20}{\varepsilon},$$

$$p_1 = -\frac{1}{\varepsilon}, p_2 = -\frac{2}{\varepsilon}, s_1 = -3, s_2 = -4.$$

首先，设计状态反馈控制器 K_2 解决快子问题。

通过对 $[A_{22} - pI \quad B_{21}]$ 进行一系列的矩阵初等变换，可以得到 $N(p)$ 和 $D(p)$ ：

$$N(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}, D(p) = \begin{bmatrix} p^2 - p - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这里选择 $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，在本例中(5.17)是可行的，那么由(5.18)可得到 K_2 ：

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其次，设计状态反馈控制器 K_0 解决慢子问题。

同理可以得到 $N(s)$ 和 $D(s)$ 如下：

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s-1 & 0 \end{bmatrix}, D(s) = \begin{bmatrix} s^2 - s - 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

选择 $f_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，这时(5.26)有解，那么由(5.27)可求得 K_0 ：

$$K_0 = \begin{bmatrix} -22 & -8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

最后，根据(5.11)得到合成状态反馈控制器如下：

$$K = \begin{bmatrix} 33 & 5 & -3 & -4 \\ -12 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

为了更好的说明本文的结论, 将求得的 K_0 , K_2 和 K 分别代入闭环系统(5.23), (5.14)和(5.5)。这时, 系统(5.23)的极点是 -3 和 -4 , 系统(5.14)的极点时 $-\frac{1}{\varepsilon}$ 和 $-\frac{2}{\varepsilon}$, 而系统(5.5)的极点则是 $\frac{-2.0036}{\varepsilon}$, $\frac{-0.9932}{\varepsilon}$, -4 和 -3 , 因此闭环系统(5.5)满足设计要求(R1)。

从图5.1可以看出, 形如(5.5)的闭环系统满足设计要求(R2), 而且, 系统(5.23)和(5.14)分别是系统(5.5)在低频和高频的近似。

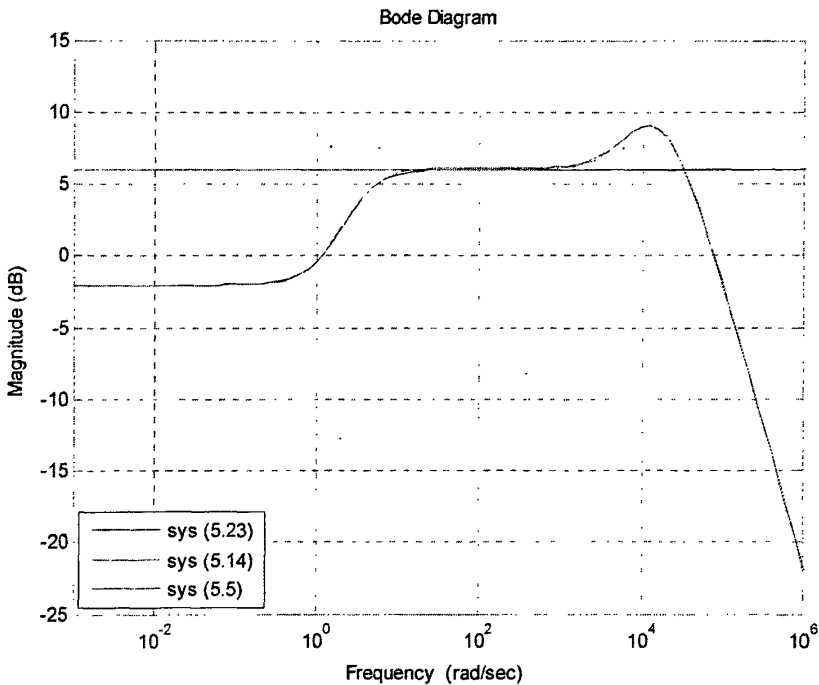


图5.1 不同系统的频域特性

5.4 本章小结

本章研究了带有极点配置的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制。证明了全阶问题可以分解为快慢两个子问题, 通过分别设计状态反馈控制器去解决快慢子问题, 可以构造合成控制器。以 LMIs 的形式给出子问题可行的充分条件, 当条件满足时, 给出了适当解。

第6章 总结与展望

6.1 主要工作

本文主要研究奇异摄动系统的分频控制问题，论文的主要工作如下：

(1) 研究了奇异摄动系统的降阶有限频域 H_∞ 滤波问题，分别针对连续和离散情形，以线性矩阵不等式(LMI)的形式给出了滤波问题有解的充分必要条件，而且，给出了解存在情形下的一组滤波器参数。另外，对于滤波问题给出了与奇异摄动参数 ε 无关的充分条件。

(2) 研究了有限频域上奇异摄动系统的严格正实控制问题。对于一般的线性系统，在 GKYP 引理的基础上，给出了存在状态反馈控制律使其闭环系统稳定并且具有有限频域正实特性的充分必要条件，而且当条件可行时，给出了一组适当解。然后，用一般线性系统的结论去研究奇异摄动系统，给出了使其闭环系统稳定且有限频域正实的合成状态反馈控制律。

(3) 研究了 SISO 奇异摄动系统在有限频域上的模型匹配问题。基于 GKYP 引理，推导出了存在 H_∞ 次优控制器的充分必要条件，而且控制器具有奇异摄动形式。

(4) 研究了带有极点配置要求的奇异摄动系统的有限频域 H_∞ 控制问题。证明了全阶问题可以分解为快慢子问题，通过分别设计状态反馈控制器去解决快慢子问题，进而构造合成控制器。

6.2 主要创新点

(1) 分别针对连续和离散的奇异摄动系统，给出了其降阶有限频域 H_∞ 滤波问题有解的充分必要条件以及与 ε 无关的充分条件。另外，当滤波器阶数为零时给出了存在零阶滤波器的充分必要条件。

(2) 针对一般线性系统，给出了其有限频域正实控制问题有解的充分必要条件，同时给出了奇异摄动系统的有限频域正实控制问题的求解方法。

(3) 给出了奇异摄动系统的低频和高频的定义，为有限频域上的研究提供了频段划分的依据。

(4) 针对奇异摄动系统的有限频域模型匹配问题，改进了 PID 控制器，给出了存在 H_∞ 次优控制器的充分必要条件，而且控制器具有奇异摄动形式。

(5) 完整的证明了在经典状态反馈控制律作用下，全阶问题可以分解为两个子问题。通过极点配置，解决了有限频域上稳定性缺失的问题。

6.3 研究展望

本文主要研究了奇异摄动系统分频控制的一些基本问题,但是对这个方向还有很多有待进一步解决的问题。例如:

- (1) 离散系统有限频域上很多问题的研究还不充分,如离散系统的正实控制、 H_∞ 控制以及稳定性问题等。
- (2) 参数不确定性、非线性以及多参数奇异摄动系统的研究成果还几乎是空白的。
- (3) 当状态不可观测时,应用状态观测器进行反馈控制是非常有意义的课题。
- (4) 现有的结论大都以 LMI 的形式给出,而有限频域问题求解的代数方法未有文献涉及。
- (5) 奇异摄动系统与其子系统的频域关系仍有一些问题需要解决。

致 谢

本文是在导师邹云教授的指导下完成的。几年来邹老师科学研究中创新的思想，严谨的作风都将对我以后的研究工作有很大的帮助，在此我对老师的辛勤工作表示最诚挚的感谢和敬意！

在论文期间，有幸得到蔡晨晓老师、盛安冬老师、马国良老师、胡开杰老师、蔡振宁老师、侯传志老师的帮助与指导，在此表示衷心的感谢！

感谢宗奕佳、高学刚、尹明峰、赵俊杰、李博、侯杰、陈勇等同学的支持与鼓励！

感谢所有关心和帮助过我的老师和同学！

感谢父母一直辛苦的培养，无私的关爱，感谢我的哥哥给予我的关心和鼓励，你们的鼓励和关爱是我不断进取的动力。

参考文献

- [1] 许可康. 控制系统中的奇异摄动[M]. 北京: 科学出版社. 1986.
- [2] Lee J I, Ha I J. Autopilot design for highly maneuvering STT missiles via singular perturbation-like technique[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999, 7(5): 527-541.
- [3] 刘华平, 孙富春, 何克忠. 奇异摄动控制系统: 理论与应用[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 1-7.
- [4] Khalil H K and Chen F C. H_∞ control of two-time-scale systems[J]. Syst. Control Lett., 1992, 19:35-42.
- [5] Luse D W and Ball J A, Frequency-scale decomposition of H_∞ disk problems[J]. SIAM J. Control Optim, 1989, 27:814-835.
- [6] Pan Z and Basar T. H_∞ optimal control for singularly perturbed systems Part I: Perfect state measurements[J]. Automatica, 1993, 29:401-423.
- [7] Assawinchaichote W and Nguang S K. H_∞ filtering control for fuzzy singularly perturbed systems with pole placement constraints: an LMI approach[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2004, 52(6):1659-1667.
- [8] Oloomi H M and Sawan M E. Suboptimal model-matching problem for two frequency scale transfer functions[A]. In Proc. American Control Conf.[C]. Pittsburgh, PA, 1989, 2190-2191.
- [9] Pan Z and Basar T. H_∞ optimal control for singularly perturbed systems Part I I: Perfect state measurements[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, 39:280-300.
- [10] Fridman E. Near-optimal H_∞ control of linear singularly perturbed systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(2): 236-240.
- [11] Fridman E. State-feedback H_∞ control of nonlinear singularly perturbed systems[J]. Internat. J. Robust Nonlinear Control, 2001, 11:1115-1125.
- [12] Tan W, Leung T and Tu Q. H_∞ control for singularly perturbed systems[J]. Automatica, 1998, 34:255-260.
- [13] Oloomi H M and Sawan M E. H_∞ model matching problem for singularly perturbed systems[J]. Automatica, 1996, 32:369-377.
- [14] Lim M and Gajic Z. Reduced-ordered H-infinity optimal filtering for systems with slow and fast mode[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-Fundamental Theory and Applications, 2000, 47:250-254.
- [15] Gajic Z and Lim M, Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems with Applications: High Accuracy Techniques[M]. Marcel Dekker, New York, 2001
- [16] Fridman E. Robust sampled-data H_∞ control of linear singularly perturbed systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3):470-475, 2006.
- [17] W. Assawinchaichote W, Nguang S K and Shi P. H_∞ output feedback control design for uncertain fuzzy singularly perturbed systems: an LMI approach[J]. Automatica, 2004, 40:2147-2152.
- [18] Shi P and Dragan V. Asymptotic H_∞ control of singularly perturbed system with parametric uncertainties[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1999, 44:1738-1742.

- [19]Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2005, 50(1):41-59.
- [20]Iwasaki T, Hara S. Robust control synthesis with general frequency domain specifications: static gain feedback case[A]. In Proc. American Control Conf.[C], 2004.
- [21]Sun W, Khargonekar P P, and Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39:2034-2046.
- [22]Mei P, Cai C X and Zou Y. Finite frequency positive real control of singularly perturbed systems[A]. In Proc. The 2nd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics[C], 2008.
- [23]Iwasaki T and Hara S. Dynamical system design from a control perspective: finite frequency positive-realness approach[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2003, 48(8):1337-1354.
- [24]Sobel K M, Shapiro E Y and Andry A N. Eigenstructure assignment[J]. Int. J. Control, 1994, 59(1):13-17.
- [25]Chen C H. On a numerical method for robust pole assignment by output feedback[J]. J. Comput. Math., China, 1988, 1:59-67.
- [26]Duan G R. Simple algorithm for robust eigenvalue assignment in linear output feedback[J]. IEE Proceeding Part D: Control Theory and Applications, 1993, 139(5):465-469.
- [27]Duan G R. Solutions to matrix equation $AV+BW=VF$ and their application to eigenstructure assignment in linear systems[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1993, 38(2): 276-280.
- [28]Duan G R. Parametric eigenstructure assignment via state feedback: a simple numerically reliable approach[A]. Proceeding of the 4th world congress on intelligent control and automation[C], 2002,165-173.
- [29]Kautsky J, Nichols N K and Dooren P. Robust pole assignment in linear state feedback[J]. Int. J. Control, 1985, 41(5):1129-1155.
- [30]Anderson B D O, Moore J B. Optimal filtering[M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- [31]Hutchinson C E. The Kalman filter applied to aerospace and electronic Systems[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 20(4).
- [32]Siouris G. An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory[M]. New York: Wiley, 1996.
- [33]Brown R G, Hwang P Y C. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering[M]. Wiley, New York, 1992.
- [34]Lim M T and Gajic Z. Reduced-order H_{∞} optimal filtering for systems with slow and fast modes[J]. IEEE Transactions on Circuit and Systems I : Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(2):250-254.
- [35]Grigoriadis K M, Watson J T. Reduced-order H_{∞} and L_2 - L_{∞} filtering via linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(4):1326-1338.
- [36]Bettayeb M and Kavranoğlu D. Reduced order H_{∞} filtering[A]. In Proc. American Control Conf.[C], 1994.

- [37]Shen X and Den L. Decomposition solution of H_∞ filter gain in singularly perturbed systems[J]. Signal Processing, 1996, 55:313-320.
- [38]Iwasaki T and Hara S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma[J]. Int. J. Robust Nonlinear Control, 2007, 17:415-434.
- [39]Skelton R E, Iwasaki T and Grigoriadis K M. A unified algebraic approach to linear control design[M]. Taylor & Francis, 1997.
- [40]Henrion D and Meinsma G. Rank-one LMIs and Lyapunov's inequality[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2001, 46(8):1285-1288.
- [41]Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8):1307-1317.
- [42]Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J and Chilali M. LMI control toolbox[M]. Natick, MA: The MathWorks, Inc.
- [43]Luse D W and Khalil H K, Frequency domain results for systems with slow and fast dynamics[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1985, 30:1171-1179.
- [44]Willems J C. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1971, 16(6):621-634.
- [45]Yakubovich V A. A frequency theorem for the case in which the state and control spaces are Hilbert spaces with an application to some problems of synthesis of optimal controls[J]. Part I, Sibirskii Mat. Zh. 1974, 15:639-668.
- [46]Rantzer A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma[J]. Syst. Control Lett., 1996, 28(1):7-10.
- [47]Iwasaki T, Hara S and Fradkov A L. Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi) finite ranges[J]. Syst. Control Lett., 2005, 54:681-691.
- [48]Hara S and Iwasaki T. Robust PID control using generalized KYP synthesis[J]. IEEE Control systems magazine, 2006, 80-91.
- [49]Mei P, Cai C X and Zou Y. A generalized KYP lemma-based approach for H-infinity control of singularly perturbed systems[J]. Circuits Systems and Signal Process, (Online First)
- [50]Gajic Z, Lim M T and Dekker M. Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications[J]. Automatica, 2003, 39:367-376.
- [51]Khalil H K. Output feedback control of linear two time scale systems[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1987, 32:784-792.
- [52]申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社.1996.
- [53]Vian J Land M.E. Sawan. H_∞ control for singularly perturbed systems[A]. In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control[C], Brighton, England, 1991:1072-1074.
- [54]Kokotovic P V, Khalil H K and Reilly J O'. Singular perturbation methods in control: analysis and design[J]. SIAM, Classics in applied mathematics. 1999, 25.
- [55]Holmes M H. Introduction to Perturbation Methods[M]. Springer-Verlag, NY, 1995
- [56]Kevorkian J and Cole J D, Multiple Scale and Singular Perturbation Methods[M]. Springer-Verlag, NY, 1996

作者攻读硕士期间撰写与发表的论文

1. Yanlong Huang, Chenxiao Cai, Yun Zou. Output feedback finite frequency H_∞ control for SISO singularly perturbed systems. In Proc. Asian Control Conf.[C], 2009.
2. Yanlong Huang, Chenxiao Cai, Yun Zou. Finite frequency positive real control for singularly perturbed systems, International Journal of Control, Automation, and Systems. (修改中)
3. Yanlong Huang, Chenxiao Cai, Yun Zou. Finite frequency H_∞ control for singularly perturbed systems with pole assignment constraints. (已投 International Journal of Innovative Computing, Information Control)
4. Yanlong Huang, Chenxiao Cai, Yun Zou. Reduced-order finite frequency H_∞ filtering for singularly perturbed systems. (拟投)
5. Yanlong Huang, Chenxiao Cai, Yun Zou. Finite frequency H_∞ model matching problem for SISO singularly perturbed systems. (拟投)