

Hamilton-Jacobi 方程的一个数值解法 及其应用

专业 : 计算数学
学位申请人 : 杨胜龙
指导教师 : 朱庆勇教授

摘要

本文在文^{[1][2]}之上, 分析了迎风紧致群速度格式 (upwind compact finite difference scheme with group velocity control 简称 UCGVC 格式)。首先分析了数值解行为特征, 由此提出群速度概念, 从物理的角度分析了它在控制数值格式稳定性中的应用。利用 Hamilton-Jacobi 方程与双曲守恒律方程的关系, 将 UCGVC 格式用于求解 Hamilton-Jacobi 方程, 并推广到多维及方程组情形。最后利用 UCGVC 格式, 对图像的平移、旋转、变形等运动进行了数值模拟和计算。计算结果表明, UCGVC 格式是令人满意的。

关键词:

Hamilton-Jacobi 方程, 双曲守恒律, 迎风紧致方法, UCGVC 格式

An numerical approach to Hamilton-Jacobi equations and it's application

Major : Computational Mathematics
Name : Yang Shenglong
Supervisor : Professor Zhu Qingyong

Abstract

Based on papers^{[1][2]}, we investigated an upwind compact finite difference scheme with group velocity control(UCGVC). Firstly, we discussed the characteristic behaviors of numerical solutions and the application to the numerical stability. Next we employed UCGVC to solve the Hamilton-Jacobi equations. According to the relationship between Hamilton-Jacobi equations and Hyperbolic Conservation Laws, we solved one dimensional Hamilton-Jacobi problems and extended to high dimensional cases. The movement of image was simulated by UCGVC scheme. Numerical results indicate this scheme is satisfactory.

Key words:

Hamilton-Jacobi equations, Hyperbolic Conservation Laws, upwind compact method, UCGVC scheme

第一章：前言

1.1 引言

Hamilton-Jacobi 方程^[3] (简称 H-J 方程), 如一维情形:

$$\begin{cases} \phi_t + H(x, t, \phi, \nabla \phi) = 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \end{cases} \quad x \in R^d \quad d > 0 \quad (1.1.1)$$

它来源与最优控制理论、微分方程、流体力学等学科^{[4][5]}, 目前, Hamilton-Jacobi 方程在光学、计算流体、控制系统、以及网格生成等方面有非常重要的应用, 并产生了像用于计算流体界面的水平集方法^[6]等新理论。

n 维空间下一般形式的 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\begin{cases} \phi_t + H(x_1, x_2, \dots, x_n, t, \phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \dots, \phi_{x_n}) = 0 \\ \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = \phi_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

方程 (1.1.2) 解的性质很复杂, 在满足熵条件下是唯一的。一方面, H-J 方程的弱解存在但不是唯一; 另一方面, 即使初值和 Hamilton 函数充分光滑时, 它的解也可以是不光滑的, 可能会在某一时刻出现间断情况 (类似于双曲守恒律问题中的激波), 导致解曲面 (线) 出现尖点或扭结等现象。Hamilton-Jacobi 方程解的这些性质和双曲型守恒律方程解的性质相似, 实际上, 他们有着紧密的联系。在一维情况下, H-J 方程与双曲守恒律方程是等价的。

对于一维情况下, 由一维 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\begin{cases} \phi_t + f(\phi_x, t) = 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \end{cases} \quad x \in R, t > 0 \quad (1.1.3)$$

令

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi_x(x, t) \\ u_0(x) = \phi_x(x, 0) \end{cases}$$

对 Hamilton-Jacobi 方程两边关于 x 求导, 推出与之等价的双曲型守恒律方程初边值问题:

$$\begin{cases} u_t + f_x(u, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad x \in R, t > 0 \quad (1.1.4)$$

二者关系是: $u = \phi_x$, $\phi(x) = c + \int_0^x u(s) ds$, 这里 $\phi_0(x) \in W^{1,\infty}$, 且

$\phi_x(x, 0) = u_0(x) \in BV(R) \cap L^1(R)$, $BV(R)$ 表示有界变差函数空间, $f(u)$ 为 Lipschitz 连续的 Hamilton 函数。

对于多维问题,虽然没有上述一样的转化,但可以从形式上认为 Hamilton-Jacobi 方程是双曲型守恒律的积分形式,有多维 H-J 方程与弱守恒律方程组等价^{[5][7][8]},求 Hamilton-Jacobi 方程可以等价求解弱守恒律方程组。所以参考双曲守恒律方程组的解法,可以建立相应的多维 Hamilton-Jacobi 方程的数值逼近格式。

通常确定 H-J 方程的某一弱解,需要额外增加一些条件。比较常见的具有物理意义的解是粘性极限解(简称粘性解),是通过粘性消去法得到的。文^[7]从粘性解的角度分析了双曲型守恒律与 Hamilton-Jacobi 方程的关系。由于在一维情况下,H-J 方程与守恒律方程有着等价关系,Osher 和 Shu^[10]借用守恒律方程的数值解方法推导出 H-J 方程的 ENO 格式,而 Corrias,Falcone 和 Natalini^[11]反过来利用 H-J 方程推导出守恒律方程的差分格式。

在计算资源有限的条件下,采用高精度格式是有益的^{[12][13]}。为了求得双曲守恒律方程的高精度数值解以及有较好的分辨率,人们提出了许多很好的数值方法。采用现有的一些格式在计算激波时数值解中将有数值振荡产生。为克服数值振荡,已发展了许多有效的方法,其中包括 TVD,NND,ENO,WENO 等类型的格式。这些格式已经成功地用于求解实际问题。然而现有的一些高分辨率格式多是从数学观点出发而构造的,这些方法没有很好的研究数值解产生振荡的根本原因,也没有针对其原因对格式进行改造。群速度控制方法是近年来出现的求解双曲守恒律方程的一种新方法^{[1][2][14][14][16][17]},它是从物理角度分析非物理振荡产生的原因,并提出改进数值解的方法。该方法构造简便,物理意义清楚,利于实现,分辨率较高,没有非物理数值振荡产生。

H-J 方程的数值方法主要分为:传统的有限差分法,其文献相对较多一些^{[7][10][18]},另外还有有限体积法^[8],李祥贵等人用有限元方法也得到很好的结果^{[3][19][20]},用迎风紧致格式求解 H-J 方程的文献较少^{[1][21]}。而迎风紧致群速度控制法有很多优点,迎风紧致格式有着精度高、网格基架少的优点,利用数值解的群速度特性和迎风紧致格式本身的耗散性基本抑制了数值振荡的产生,使计算易于稳定,可用于求解非定常多尺度的复杂流动问题,研究其细微结构和机理,已经成功地应用于求解双曲守恒律方程。

本文的思想是将迎风紧致群速度格式用于求解 H-J 方程,并借助双曲守恒律方程已有的结果分析格式的性质。根据文^{[1][2]}将 UCGVC 格式应用于求解 Hamilton-Jacobi 方程。对于一维情况等价地利用了双曲守恒律已有的结果对格式的性质进行了分析,将这种新的 UCGVC 格式推广到了多维和方程组得情况。采用本文所述方法,对于一些界面追踪问题进行了数值模拟,取得了较好的效果。

1.2 古典解、弱解、熵条件的概念

1.2.1 古典解

例如考察如下一阶拟线性双曲型方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \quad (1.2.1.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (1.2.1.2)$$

定义 1.2.1.1: ^[22] 在包含 $t=0$ 的上半平面 $t \geq 0$ 中连续, 而在不包含 $t=0$ 的上半平面 $t > 0$ 中满足方程 (1.2.1.1), 且在 $t=0$ 上满足初始条件 (1.2.1.2) 的函数 $u(x, t)$ 成为初值问题 $\{(1.2.1.1), (1.2.1.2)\}$ 的古典解。

1.2.2 弱解

所谓双曲守恒律方程是指具有如下形式的非线性双曲型偏微分方程 (组):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.2.2.1)$$

其中一般假设 $f(u)$ 是函数 u 的二阶连续可微函数。不管是对方程 (1.2.2.1) 进行理论研究还是构造其数值方法, 所遇到的最本质的困难是其解的不连续性。即不管初值函数如何光滑, 在有限的时间内其解有可能发展成为间断。为了解决这个问题 P.Lax 在 1954 年首次提出了弱解的概念, 为双曲守恒律理论的发展奠定了基础。关于双曲守恒律的弱解, 文^[23]中给出如下定义:

定义 1.2.2.1: 如果存在一个有界可测函数 ω , 使得对于所有的 $\varphi \in C_0^\infty(R \times R^+)$, 均有

$$\begin{aligned} \iint_{R \times R^+} (\omega \varphi_t + f(\omega) \varphi_x) dx dt &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \|\omega(x, t) - u_0(t)\|_L &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.2.2)$$

成立, 则 ω 称为方程 (1.2.2.1) 的一个弱解。

1.2.3 熵条件

注意方程 (1.2.2.1) 的弱解不是唯一的。一般物理问题都要求有“物理意义”的, 即要求有唯一解。从弱解中选出所要求的唯一解, 必须在弱解加上条件, 即所谓“熵条件”。

设 u 为守恒律初值问题 (1.2.2.1) 的弱解, 如果在间断线 $x = \xi(t)$ 上满足

$$\frac{f(u_l) - f(\omega)}{u_l - \omega} \geq \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \geq \frac{f(u_r) - f(\omega)}{u_r - \omega}, \quad \forall \omega \in I \quad (1.2.3.1)$$

(1.2.3.1) 称为熵条件式, 它保证了方程 (1.2.2.1) 的弱解是唯一的, 并且是物理解, 也称为广义解或可容许解。

对于标量方程 (1.2.2.1), 解的存在唯一性问题已经完全解决, 物理解是唯一的。关于守恒律方程组的存在唯一性理论目前仍然在发展之中。

求解方程 (1.2.2.1) 的数值方法是伴随双曲守恒律理论研究而发展起来的。在 1954 年 P.Lax 提出弱解概念同时, 他还构造了著名的 Lax-Friedrichs 格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0 \quad (1.2.3.2)$$

这个格式虽然只有一阶精度, 但是却具有良好的单调性。它不仅为研究双曲守恒律方程数值方法打下了基础, 而且常常被用于证明方程解的唯一性。为了提高差分格式的精度, 许多人在这方面进行了研究。其中具有代表性的工作有 Godunov 格式^[24]。1960 年, P.Lax 和 B.Wendroff^[25] 提出了守恒差分格式的概念, 并构造出了二阶精度的三点守恒差分格式——Lax-Wendroff 格式:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [a_{j+\frac{1}{2}}^n (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) - a_{j-\frac{1}{2}}^n (f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))] \end{aligned} \quad (1.2.3.3)$$

$$\text{其中 } a_{j+\frac{1}{2}}^n = a\left(\frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n)\right), \quad a(u) = f'(u)$$

使得双曲守恒律方程数值解法的研究进入了一个新的阶段。所谓守恒型差分格式是指具有下列形式的格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) \quad (1.2.3.4)$$

其中 Δt , Δx 分别为时间和空间步长。而且数值通量 $f_{j+\frac{1}{2}}$ 满足相容性条件:

$$f_{j+\frac{1}{2}} = h(u_{j-k+1}, \dots, u_{j+k}), \quad h(u, \dots, u) = f(u) \quad (1.2.3.5)$$

守恒格式能很好的捕捉激波位置, 而非守恒格式则给出错误的激波位置。

P. Lax 和 B.Wendroff 还证明了如下定理:

定理 1.2.3.1: 如果差分格式 (1.2.3.4) 的解 $\{u_j^n\}$ 当 Δt , Δx 趋于 0 时几乎处处有界, 并收敛到某个函数 $u(x, t)$, 则 $u(x, t)$ 为方程 (1.2.2.1) 的一个弱解。

在此后的近二十年中, Lax-Wendroff 格式及其变形被广泛应用于实际问题的计算当中。然而, 非常不幸的是, 他们同时证明了单调差分格式是至多只有一阶精度。于是, 如何提高格

式的精度并使其满足离散熵条件和总变差稳定性成为人们亟待解决的问题。

1.3 激波的数值模拟

^[26] 对于非线性双曲守恒型方程, 不管初值如何光滑, 它的解都可能存在间断, 对应的物理问题是流场中激波和接触间断的产生。这一特性使得非线性双曲守恒型方程的求解有它特殊的困难, 流场中的数值模拟成为近年来流体力学、计算数学中的研究重点之一。激波的数值模拟方法主要有两类: 激波装配法、激波捕捉法。

(1) 激波装配法 (shock-fitting-type methods)

这种方法的基本思想是将激波作为非连续的边界来处理^[27]。此方法的优点是计算精度高, 而且在间断面处满足“熵条件”, 故可以认为所得到的数值解是唯一的物理解。然而它要求所求的流体运动的流场结构为已知, 这在大多数情况下是不可能的, 因为流场事先是未知的, 向一般情况推广的困难, 极大的限制了该方法的发展和应用。关于该方法在文献^[28]中有详细的论述。

(2) 激波捕捉方法 (shock-capture-type methods)

该方法又叫间断解捕捉方法, 这种方法在当代更为活跃、更为广泛地被采用。其基本思想不是将激波分出来作为边界处理, 而是借助方法所固有的数值耗散效应, 采用合适的计算方法自动捕捉激波, 在激波和光滑区用统一的计算格式。最初人们采用一阶精度格式捕捉激波, 可得到激波的单调解。然而因一阶精度格式具有较大的数值耗散, 使得差分激波的梯度被抹平, 其物理特性失真, 见图 4-2。二阶 (或者更高阶) 精度差分格式所给出的数值解在激波附近将产生非物理的振荡, 见图 4-1, 而且可能出现非物理的弱解。近年来, 在改善激波附近数值解的分辨率方面已经取得了很大进展, 如 TVD 格式、ENO 格式、WENO 格式等。

1.4 高分辨率方法, TVD、ENO、WENO 格式的介绍

Harten 于 1983 年在重要期刊 *J. Computational. Physics* 上发表了题目 “High Resolution schemes for Hyperbolic Conservation Laws” 的著名论文^[29], 第一次提出了 “高分辨率 (High Resolution) 方法”, TVD (Total Variation Diminishing) 概念, 为数值方法特别是差分方法的理论和构造, 开拓了一个崭新的方向, 为双曲守恒律方程的现代数值方法的发展奠定了基础。

如果 $u(x)$ 在整个实轴连续可微, 则在实轴上的总变差定义为:

$$TV[u(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$$

如果函数是离散的 $u_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 则总变差定义为:

$$TV[u(x)] = \sum_k |u_{k+1} - u_k|$$

于是差分格式的解 $\{u_j^n\}$ 的总变差定义为:

$$TV(u^n) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (1.4.1)$$

所谓 TVD 格式是指一个差分格式的解对任意的自然数满足不等式:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (1.4.2)$$

A.Harten 还构造出了一个二阶精度的五点 TVD 格式^[29]。此后,许多人都进行过这方面的研究,构造出了各种各样的高精度 TVD 差分格式,并且被广泛应用于各个相关方面的计算。

Shu (舒其望) 于 1987 年提出总变差有界 TVB (Total Variation Bounded) 格式的概念和思想^[30]。如果存在 $B = B(u_0(x)) > 0$, 使得

$$TV(u^n) \leq B, \quad \forall n, \Delta t, n\Delta t \leq T$$

显然 TVD 格式必须是 TVB 的。这种格式更着眼于整体的变差,使格式的设计和构造,以及理论上的讨论变得更简洁和直接。

所谓高分辨率方法,是指数值解图形的锐利和逼真,表明数值方法的数值耗散微弱而适中。TVD 方法是以高分辨率,或者说得到数值解的锐利 (sharp)、逼真图像为根本目标。但是,事实上, TVD、高分辨率并不能完全的包涵人们对于数值解的要求。所有的 TVD 格式都有一个共同的缺陷,那就是在极值点附近总要退化为一阶精度。以 Harten 为首的科学家工作者,不久就注意和强调无振荡 (Non-oscillatory) 和本质无振荡 (Essentially Non-oscillatory) 问题。1986 年 Harten 提出了无振荡格式的概念和思想^[31], 次年,他和 Engquist, Osher 和 Chakravathy 等人提出了本质无振荡格式的方案和方法^{[32][33][34][35]}。文献^[35]完整而系统的讨论和研究了这种方法的基本结构、步骤和理论。之后,文献^[36]提出了 WENO (Weighted ENO) 格式,得到了更为广泛的应用^{[36][37]}。国内很多学者也提出了很好的计算方法,如 NND 格式^[38]、MmB 格式^[39]、迎风紧致格式^{[40][41][42][43]}、GVC 格式^{[1][2][21]}等,都取得了很好的效果。

1.5 本文的工作

全文共分四章,第一章首先分析了 H-J 方程与双曲型守恒律方程的关系,提出了古典解、双曲守恒律方程、弱解、熵条件等概念,其次介绍了双曲守恒律方程的激波捕捉技术及近年来该领域应用比较广泛的 TVD, NND, ENO, WENO 等格式。

第二章给出了数值解的行为分析。首先提出本文讨论的双曲守恒律模型;第二节介绍了

算子象征的概念；第三节讨论了守恒律半离散方程；第四节介绍了数值解格式的耗散性；第五节介绍了数值解的群速度效应及其物理意义，阐述了用群速度控制法构造数值解格式的物理背景及其在控制数值振荡中作用。

第三章第一节讲述了偏微分方程时间方向的离散格式；第二节给出了本文讨论的迎风紧致算子及其算子象征，基于此在第三节讨论了它的稳定性；第四节分析了在多维情况中的各向异性耗散效应，并用数值解方法求解出迎风紧致格式中耗散因子的最优取值。第五节讲述了迎风紧致群速度格式（UCGVC 格式）求解一维 H-J 方程，等价的将它应用于求解一维双曲守恒律方程（基于^{[1][2]}），并且给出了相容性的证明。然后用 UCGVC 格式求解二维 H-J 方程，等价的过渡到求解二弱维守恒律方程组，最后分别给出了求解高维 H-J 方程组中的 UCGVC 格式，并且利用双曲守恒律方程已有的结果讨论了格式的稳定性、相容性等相关性，给出了简化形式。

第四章利用文中提到的方法，对图像的运动进行数值模拟，数值试验结果表明本文中的方法是令人满意的。

第二章 数值解的行为分析

2.1 模型方程

为便于讨论, 考虑如下标量双曲守恒律方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = cu, \quad c = \text{const} \quad (2.1.1)$$

讨论初值问题:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.1.2)$$

则方程 (2.1.1) 的精确解为:

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) \quad (2.1.3)$$

为了便于讨论, 设方程的解具有周期性, 解的定义域为 $[-\pi, \pi]$, 将这一区间分成 N 等分: $\frac{2\pi}{N}$, 由周期特性表明 $u_1 = u_{N+1}$ 。设在 $t=0$ 时刻的初始分布可通过 Fourier 级数展开法来表示:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\varphi}_k \exp(ikx) \quad (2.1.4)$$

$\hat{\varphi}_k$ 为 Fourier 系数。则方程 (2.1.1) 的解可为如下形式:

$$u(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\varphi}_k \exp[ik(x - ct)] \quad (2.1.5)$$

很显然, 对于线性问题数值解的逼近精度依赖于以每个 Fourier 分量为初始值时数值解的逼近精度。因此可以以单个 Fourier 分量为基本元, 讨论数值解的逼近精度及数值解行为特性。

设以单个 Fourier 分量为初值:

$$u(x, 0) = \exp(ikx) \quad (2.1.6)$$

利用分离变量法, 寻求形式为: $u(x, t) = \hat{u}(t) \exp(ikx)$ 的解。将其带入 (2.1.1), 不难求出满足初始条件 (2.1.6) 的准确解:

$$u(x, t) = \exp[ik(x - ct)] \quad (2.1.7)$$

2.2 算子象征分析

我们知道,微分算子是现代数学中应用最广泛的一类线性算子,其重要性是众所周知的。利用 Fourier 变换可以将微分算子的概念推广,使它能像通常的函数那样进行运算,从而更灵活地处理各种问题。

定义 2.2.1: ^[48] 如果定义在 R^n 上的函数 $\varphi(x)$ 满足如下性质:

- (1) $\varphi(x)$ 为 R^n 中的 C^∞ 函数;
- (2) 对任意的重指标 α, p (这里均指非负整数重指标,下同)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = 0$$

其中 $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ 表示 $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n} \varphi(x)$, 则称 $\varphi(x)$ 为速降函数。记速降函数空间为 $\mathcal{S}(R^n)$ 。

由于任意两个速降函数的线性组合仍是速降函数。故 $\mathcal{S}(R^n)$ 是一个线性空间。

定义 2.2.2: ^[48] 该函数 $a(x, k) \in C^\infty(R_x^n \times R_k^n)$, 且对任意重指标 α, β 。

$$|\partial_k^\alpha \partial_x^\beta a(x, k)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |k|)^{m - |\alpha|}$$

其中 $C_{\alpha, \beta}$ 为常数。则称 $a(x, k)$ 为 S^m 类函数, 记 $a \in S^m$ 。

定义 2.2.3: ^[48] 若函数 $a(x, k) \in S^m$, 则可以定义 $\mathcal{S}(R^n) \rightarrow \mathcal{S}(R^n)$ 的线性连续映射 A 为:

$$Au(x) = \int e^{i(x, k)} a(x, k) \hat{u}(k) dk$$

算子 A 称为拟微分算子, 并记为 $A = a(x, D)$, 而 $a(x, k)$ 则称为 A 的象征, 其中

$$(x, k) = x_1 k_1 + \cdots + x_n k_n。$$

按上述定义的拟微分算子 $a(x, D)$ 是 $\mathcal{S}(R^n) \rightarrow \mathcal{S}(R^n)$ 的线性连续算子。

给定函数 $v(x)$, $x \in R^1$, 一个正参数 $\Delta x > 0$ 。定义平移算子 $E_{\Delta x}$ 为 $(E_{\Delta x} v)(x) = v(x + \Delta x)$, 则 δ_x^+ , δ_x^- , δ_x^0 , δ_x^2 可定义如下:

$$\begin{aligned} \delta_x^+ &:= E_{\Delta x} - I, & \delta_x^- &:= I - E_{\Delta x}^-, \\ \delta_x^0 &:= \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-), & \delta_x^2 &:= \delta_x^+ \cdot \delta_x^- = \delta_x^- \cdot \delta_x^+ \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

其中 I 为恒等算子, 下标 x 表明算子作用在 x 方向上。基于 Fourier 变换, 可得算子 δ_x^+ , δ_x^- , δ_x^0 , δ_x^2 的象征。

例如 $\delta_x^+ = E_{\Delta x} - I$, 有:

$$\begin{aligned}\delta_x^+ u(x) &= (E_{\Delta x} - I)u(x) \\ &= \int e^{i(x+\Delta x, k)} \hat{u}(k) dk - \int e^{i(x, k)} \hat{u}(k) dk \\ &= \int e^{i(x, k)} (e^{i(\Delta x, k)} - 1) \hat{u}(k) dk\end{aligned}$$

所以有:

$$a(x, k) = (e^{i(\Delta x, k)} - 1) = \cos(\Delta x, k) - 1 + i \cdot \sin(\Delta x, k)$$

$$\text{即 } \hat{\delta}_x^+ = \cos(\Delta x, k) - 1 + i \cdot \sin(\Delta x, k)$$

在一维情况中, 有: $\hat{\delta}_x^+ = \cos \alpha - 1 + i \sin \alpha$ ($\alpha = k\Delta x$)

$$\text{同理有: } \hat{\delta}_x^- = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\hat{\delta}_x^0 = \frac{1}{2} (\hat{\delta}_x^+ + \hat{\delta}_x^-) = i \sin \alpha$$

$$\hat{\delta}_x^2 = \hat{\delta}_x^+ \hat{\delta}_x^- = 2 \cos \alpha - 2$$

其中, $-\pi \leq \alpha \leq \pi, i^2 = -1$ 。显然, 向前算子 δ_x^+ 的 Fourier 象征的实部和虚部分别为:

$\hat{\delta}_r = \cos \alpha - 1$, 和 $\hat{\delta}_i = \sin \alpha$ 。同样的, 对向后算子 δ_x^- 有 $\hat{\delta}_r = 1 - \cos \alpha$ 和 $\hat{\delta}_i = \sin \alpha$, 中心算子 δ_x^0 有 $\hat{\delta}_r = 0$ 和 $\hat{\delta}_i = \sin \alpha$, $\hat{\delta}_x^2$ 有 $\hat{\delta}_r = 2 \cos \alpha - 2$ 和 $\hat{\delta}_i = 0$ 。

2.3 半离散方程

对应于式 (2.1.1) 的半离散逼近式 (只对空间导数进行离散) 为:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{\delta_x u_j}{\Delta x} = 0 \quad (2.3.1)$$

$\frac{\delta_x u_j}{\Delta x}$ 为 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j$ 的差分逼近式。

现在讨论差分方程的准确解。在连续函数空间设有函数 $u(x, t) = \hat{u}(t) \exp(ikx)$, 其 x 方向的一阶导数为: $u_x(x, t) = ik\hat{u}(t) \exp(ikx)$ 。可将其改为 $\Delta x u_x = \hat{\delta} \hat{u}(t) \exp(ikx)$, 其中 $\hat{\delta} = \alpha \cdot i$ ($\alpha = k\Delta x$)。

对于离散空间可取初值为:

$$u(x_j, 0) = \exp(ikx_j) \quad (2.3.2)$$

将 $u(x_j, t) = \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$, $\delta_x u_j = \hat{\delta} \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$ 代入式 (2.3.1), 得准确差分解:

$$u(x_j, t) = \exp\left(-ck \frac{\hat{\delta}_r}{\alpha} t\right) \exp\left[\left[ik(x_j - c \frac{\hat{\delta}_i}{\alpha} t) \right]\right] \quad (2.3.3)$$

$\hat{\delta}_r + i\hat{\delta}_i = \hat{\delta}$, $\hat{\delta}_r$ 为 $\hat{\delta}$ 实部, $\hat{\delta}_i$ 为 $\hat{\delta}$ 虚部。

对照式 (2.1.7) 和式 (2.3.3) 可知, 对取定波数 k (或 α), 数值解逼近精确解要求:

$$\frac{\hat{\delta}_r}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \frac{\hat{\delta}_i}{\alpha} \rightarrow 1$$

2.4 数值解的耗散性

文章^[49]指出, 可依据 $\hat{\delta}_r$ 对格式进行分类。

对 $c > 0$ 情况:

- (1) $\hat{\delta}_r < 0$ 时, 格式是反耗散型的, 反耗散型格式是不稳定的。
- (2) $\hat{\delta}_r = 0$ 时, 格式为非耗散型的, 所有中心格式都是非耗散型的。
- (3) $\hat{\delta}_r > 0$ 时, 格式是耗散型的, 耗散型格式是稳定的。

文章^[49]同时指出, 还可以利用修正方程中的余项分析格式的耗散特性, 并由此对不稳定的差分格式修改, 使之成为稳定的差分格式。

例如, 当 $c > 0$ 时, δ_x^- 是耗散格式, 而 δ_x^+ 是反耗散格式, δ_x^0 则是非耗散格式。反之, δ_x^+ 是耗散格式, δ_x^- 是反耗散格式。

2.5 群速度效应及其在微分方程数值解中的应用

群速度是流体力学的概念, 它是指一系列单个波的叠加而形成的波群的传播速度。

2.5.1 数值解的群速度

针对离散方程 (2.3.1) 的解式 (2.3.3) 定义群速度为:

$$D(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}(\hat{\delta}_i(\alpha)) \quad (2.5.1.1)$$

显然, 对应于微分方程 (2.1.1) 的准确解式 (2.1.7) 有 $\hat{\delta}_i = \alpha$, $D(\alpha) = 1$ 。文章^[49], 依据各曲线 $\hat{\delta}_i(\alpha)$ 随 α 的变化率将格式分为如下类型:

(1) 快型格式 (Fast, 简称 FST)

$$D(\alpha) > 1, (0 < \alpha \leq \pi)$$

(2) 慢型格式 (Slow, 简称 SLW)

$$D(\alpha) < 1, (0 < \alpha \leq \pi)$$

(3) 混合型格式 (Mixed, 简称 MXD)

$$D(\alpha) > 1, (0 < \alpha \leq \alpha_0 < \pi)$$

$$D(\alpha) < 1, (\alpha_0 < \alpha \leq \pi)$$

现在来考察一下具体算例中波的传播情况。对方程 2.1.1 考虑如下高频振荡波形的初始条件:

$$u(x, 0) = \begin{cases} e^{-16(x-\frac{1}{2})^2} \sin kx, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \text{ 或 } x > 1 \end{cases}$$

其中 $c=1, k=40\pi, \Delta x = \frac{1}{160}$, 利用跳蛙格式:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

进行计算。

图 2-1 是初始时刻分布。微分方程 (2.1.1) 的准确解 (2.1.3) 以 $c=1$ 的速度向右传播。在 $t=2$ 时刻, 数值波的中心位置应该位于 $x=2.5$ 处。在图 2-2 中是给出跳蛙格式计算的结果。从图中可以看出, 数值解有明显的滞后, $t=2$ 时刻数值波的中心位于 $x=1.97$ 处, 这表明波是以 0.74 的速度进行传播的, 这恰好是在 $\alpha = 0.79$ 时的群速度, 因为 $\hat{\delta}_i = \cos \alpha = 0.74$ 。由此可见讨论群速度是非常有意义的事情。

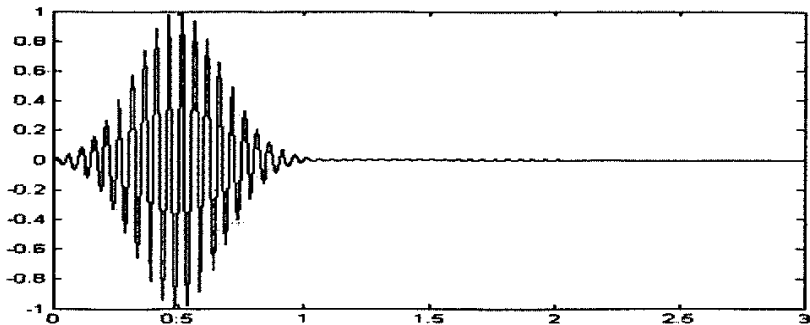


图 2-1

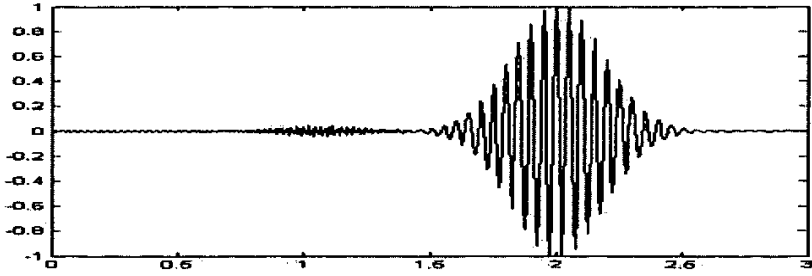


图 2-2

定理 2.5.1 ^[21] 当 $\sigma > 1/6$ 是, 算子 $L = (\delta_x^0 - \sigma \delta_x^0 \delta_x^2 + 0.5\sigma \delta_x^2 \delta_x^2)u_j$ 是混合型算子, 对于低频波段为快算子。

证明: 考虑到 $x_j = j\Delta x$, $x_{j\pm 1} = x_j \pm \Delta x$, 将 $u_j = \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$ 代入则有:

$$L = [i \sin \alpha - i\sigma \sin \alpha (2 \cos \alpha - 2) + 0.5\sigma (2 \cos \alpha - 2)^2] \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$$

所以 $\hat{\delta} = [i \sin \alpha - i\sigma \sin \alpha (2 \cos \alpha - 2) + 0.5\sigma (2 \cos \alpha - 2)^2]$

$$= 2\sigma (\cos \alpha - 1)^2 + i(\sin \alpha + 2\sigma \sin \alpha - 2\sigma \cos \alpha \sin \alpha) \quad |\alpha| \leq \pi$$

$$\hat{\delta}_i = \sin \alpha + 2\sigma \sin \alpha - 2\sigma \cos \alpha \sin \alpha \quad \hat{\delta}_r = 2\sigma (\cos \alpha - 1)^2$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\hat{\delta}_i(\alpha)) = \cos \alpha + 2\sigma \cos \alpha + 2\sigma \sin^2 \alpha - 2\sigma \cos^2 \alpha$$

$$= (1+2\sigma) \cos \alpha + 2\sigma - 4\sigma \cos^2 \alpha$$

$$\geq 1$$

$$\Rightarrow 4\sigma \cos^2 \alpha - (1+2\sigma) \cos \alpha - 2\sigma + 1 \leq 0$$

因为 $4\sigma \cos^2 \alpha - (1+2\sigma) \cos \alpha - 2\sigma + 1 = 0$ 有根 1, $\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} < 1$ 。

因此, 当 $\sigma > \frac{1}{6}$, 存在 $\alpha_0 > 0$, 使得 $1 \geq \cos \alpha \geq \cos \alpha_0 = \frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2}$ 成立; 否则就不存在

$\alpha_0 > 0$, 使得不等式成立。也就是说, 当 $|\alpha| \leq \arccos(\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2})$ 时, $\frac{d}{d\alpha} (\hat{\delta}_i(\alpha)) \geq 1$ 。当 α

落在该区间外时, $\frac{d}{d\alpha} (\hat{\delta}_i(\alpha)) \leq 1$ 。所以 $\sigma > \frac{1}{6}$ 时, 该算子是混合型算子。由于

$\hat{\delta}_r(\alpha) = 2\sigma (\cos \alpha - 1)^2 \geq 0, \forall |\alpha| \leq \pi$, 这里 $\alpha > 0$, 该算子是耗散型的, 它对各种波长的误差都起衰减作用。 $|\alpha|$ 越大, 衰减越快。对于低频波段为快算子。证毕。 □

定理 2.5.2 $L = (\delta_x^0 + \sigma \delta_x^0 \delta_x^2 + 0.5\sigma \delta_x^2 \delta_x^2)u_j, \frac{1}{2} \geq \sigma \geq 0$ 是慢算子。

证明: 类似 Th 2.5.1, 略。

2.5.2 群速度控制法简述

在讨论之前先作一定义, 设波的传播速度 $c > 0$ 。则称激波的左侧为波后, 激波右侧为波前。当 $c < 0$ 时, 则称激波的左侧为波前, 激波的右侧为波后。这里所说的激波指 Navier-Stokes(N-S)方程的激波解, 即在激波附近解的梯度很大, 但解是光滑的。

如果所构造的格式在激波波前呈现慢性格式的特性, 而在激波后呈现快型格式的特性, 则在激波的两侧将都不出现非物理的高频振荡波。即如果波的群速度都指向激波时将不出现非物理的数值振荡。

在实际采用的一些格式中很少有快型格式, 一般的, 混合型格式在低中波段主要呈现快型格式的特点, 而在高频波段呈现慢型格式特点, 但其在高频波段数值解中有更大的耗散特性。因而如果在激波后采用混合型格式, 而波前采用慢型格式, 则基本上可使激波两侧的非物理高频振荡得以控制。

第三章 迎风紧致差分格式

3.1 Runge-Kutta 方法

半离散格式是在空间方向对原方程离散,对时间方向并不离散所得到的常微分方程(组):

$$u_t = L(u) \quad (3.1.1)$$

其中, $L(u)$ 是 $-f_x(u)$ 或者 $-f_x(u) - g_y(u)$ 的逼近。

在本文中,用文章^{[50][51]}中提到的 TVD 型 Runge-Kutta 方法来离散时间方向:

$$u^{(l)} = \sum_{k=0}^{l-1} [\alpha_{lk} u^{(k)} + \Delta t \cdot \beta_{lk} \cdot L(u^{(k)})], \quad (l=1,2,\dots,n) \quad (3.1.2)$$

其中,

$$u^{(0)} = u^n, u^{(m)} = u^{n+1}, \alpha_{lk} \geq 0, \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_{lk} = 1$$

并且要求满足 CFL 条件

$$\Delta t \leq \min_{l,k} \frac{\alpha_{lk}}{\beta_{lk}} \cdot \Delta t_0$$

在计算中,采用的是二阶或三阶形式。

二阶 TVD Runge-Kutta 格式为:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t \cdot L(u^n) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \cdot L(u^{(1)}) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

三阶 TVD Runge-Kutta 格式为:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t \cdot L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \cdot L(u^{(1)}) \\ u^{(n+1)} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \cdot L(u^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

同时,文章^[50]中也提到了四阶、五阶精度的时间离散格式。

3.2 紧致算子象征

我们在这里提出这篇文章中用迎风紧致算子来估计空间微商，它的符号形式为：

$$\delta_x^{c,\varepsilon} := (1 - 2\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2)^{-1} (\delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^2) \quad (3.2.1)$$

由上面讨论，可知它的 Fourier 象征为：

$$\hat{\delta}_x^{c,\varepsilon} = \frac{-4\varepsilon \cos \alpha + 4\varepsilon + i \sin \alpha}{\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} - i2\varepsilon \sin \alpha} \quad (-\pi \leq \alpha \leq \pi) \quad (3.2.2)$$

相应地：

$$\hat{\delta}_r = \frac{\frac{2}{3}(\cos \alpha - 1)^2 \varepsilon}{\frac{1}{9} \cos^2 \alpha + \frac{4}{9} \cos \alpha + \frac{4}{9} + 4\varepsilon^2 \sin^2 \alpha} \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\delta}_i = \frac{8\varepsilon^2 \sin \alpha - 8\varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{3} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{2}{3} \sin \alpha}{\frac{1}{9} \cos^2 \alpha + \frac{4}{9} \cos \alpha + \frac{4}{9} + 4\varepsilon^2 \sin^2 \alpha} \quad (3.2.4)$$

并且 $-\frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{3}$ ，这将在 3.5.1 节分析。

定理 3.2.1: 当 $\varepsilon \neq 0$ 时， $\Delta x^{-1} \cdot (1 - 2\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2)^{-1} \cdot (\delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^2)$ 在空间方向具有 3 阶逼近精度。

证明 由 Taylor 展开，有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \Delta x^{-1} \cdot (1 - 2\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2)^{-1} \cdot (\delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^2) u_j - \frac{1}{6} \varepsilon \Delta x^3 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j + \frac{3}{40} \Delta x^4 \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_j + O(\Delta x^5)$$

故该算子在空间方向具有三阶精度。

可以看出当 $\varepsilon = 0$ 时，算子在空间方向有四阶精度。

由前面讨论，数值解逼近准确解要求有 $\frac{\hat{\delta}_r}{\alpha} \rightarrow 0$ 及 $\frac{\hat{\delta}_i}{\alpha} \rightarrow 1$ ，下面给出几个具体例子：

1: 一阶导数两点向后差分格式: $\hat{\delta}_r = 1 - \cos \alpha$, $\hat{\delta}_i = \sin \alpha$

2: 一阶导数的二阶迎风逼近式 (三点迎风) $\frac{1}{2}(\delta_x^- u_j - \delta_x^- u_{j-1})$:

$$\hat{\delta}_r = [(1 - \cos \alpha) \cdot (3 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha] / 2, \hat{\delta}_i = \sin \alpha \cdot (2 - \cos \alpha)$$

3: 一阶导数的四阶精度中心型逼近式 $\frac{1}{12}(-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2})$:

$$\hat{\delta}_r = 0, \quad \hat{\delta}_i = 1/6 \cdot (8\sin\alpha - \sin 2\alpha)$$

4: 三点迎风紧致格式:

$$\hat{\delta}_r = \frac{\frac{2}{3}(\cos\alpha - 1)^2 \varepsilon}{\frac{1}{9}\cos^2\alpha + \frac{4}{9}\cos\alpha + \frac{4}{9} + 4\varepsilon^2 \sin^2\alpha}$$

$$\hat{\delta}_i = \frac{8\varepsilon^2 \sin\alpha - 8\varepsilon^2 \sin\alpha \cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha \cos\alpha + \frac{2}{3}\sin\alpha}{\frac{1}{9}\cos^2\alpha + \frac{4}{9}\cos\alpha + \frac{4}{9} + 4\varepsilon^2 \sin^2\alpha}$$

5: 一阶导数三阶向后差分格式 $1/6(u_i - 18u_{i-1} + 9u_{i-2} - 2u_{i-3})$:

$$\hat{\delta}_r = \frac{1}{6}(11 - 18\cos\alpha + 9\cos 2\alpha - 2\cos 3\alpha)$$

$$\hat{\delta}_i = \frac{1}{6}(-18\sin\alpha + 9\sin 2\alpha - 2\sin 3\alpha)$$

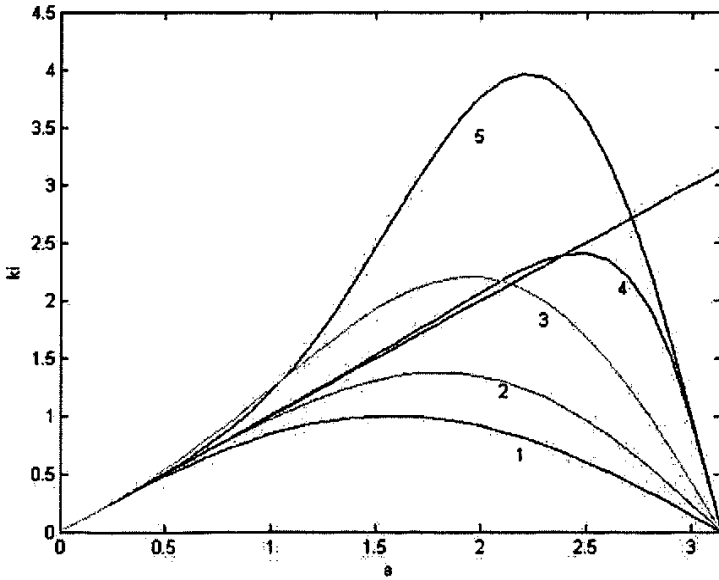


图 3-1

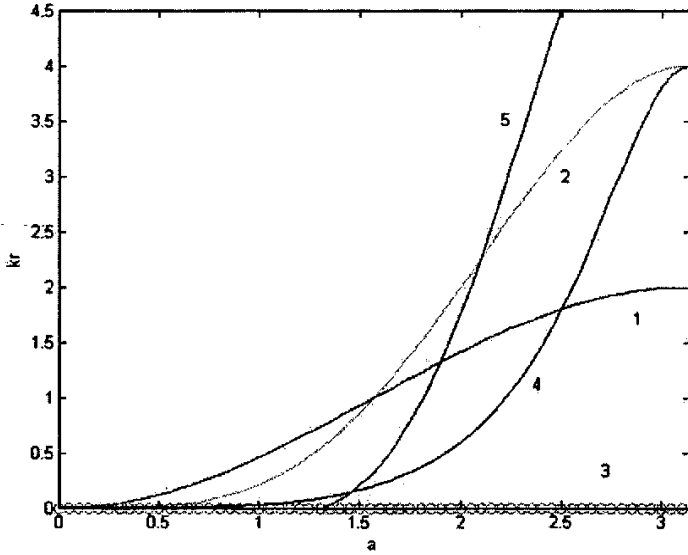


图 3-2

从图 3-1 可看出，与低精度格式相比，高精度格式对中高波分量有较好的模拟能力。对于同阶精度的差分格式逼近式，与传统的差分式相比，紧致型差分式对高波分量有更高的模拟能力。从图 3-2 可以看出，高精度有着更宽的低耗散波段，对同阶格式，紧致格式的低耗散波段更宽。

3.3 数值稳定性

用带有 ε 系数的迎风紧致差分格式算子 $\delta_c^{\varepsilon,6}$ 离散方程 (2.1.1) 空间微商，时间方向采用三阶 Runge-Kutta 方法离散。则有如下式子：

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_h(v) \tag{3.3.1}$$

其中 L_h 是三阶迎风紧致算子。由三阶 Runge-Kutta 方法，从第 n 时间层到 $n+1$ 时间层的公式为：

$$\begin{cases} v^{(1)} = v^n + \Delta t L_h(v^n) \\ v^{(2)} = \frac{3}{4} v^n + \frac{1}{4} [v^{(1)} + \Delta t L_h(v^{(1)})] \\ v^{(n+1)} = \frac{2}{3} v^n + \frac{1}{3} [v^{(2)} + \Delta t L_h(v^{(2)})] \end{cases} \tag{3.3.2}$$

用 Fourier 方法（或称 Von-Neumann 方法），分析它的稳定性。

$$\begin{cases} v^{(1)} = v^n - \lambda \delta_x^{c,\varepsilon}(v^n) \\ v^{(2)} = v^n - \frac{1}{2} \lambda \delta_x^{c,\varepsilon}(v^n) + \frac{1}{4} \lambda^2 (\delta_x^{c,\varepsilon}(v^n))^2 \\ v^{(n+1)} = v^n - \lambda \delta_x^{c,\varepsilon}(v^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 (\delta_x^{c,\varepsilon}(v^n))^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 (\delta_x^{c,\varepsilon}(v^n))^3 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

令 $v_j^n = G^n \exp(ikj\Delta x)$, 代入方程(3.3.3), 得三阶 Runge-Kutta 方法的生长因子 G 可表示为:

$$G = 1 - \lambda k_\varepsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 k_\varepsilon^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 k_\varepsilon^3 \quad (3.3.4)$$

式中 $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$, 称为 Courant (库朗) 数。 $k_\varepsilon = \hat{\delta}_x^{c,\varepsilon} = \frac{-4\varepsilon \cos \alpha + 4\varepsilon + i \sin \alpha}{\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} - 2\varepsilon i \sin \alpha}$ 。稳定性要

求 $|G| \leq 1$, 把 k_ε 带入可以得到 λ_{\max} 和 ε 的关系。如下图:

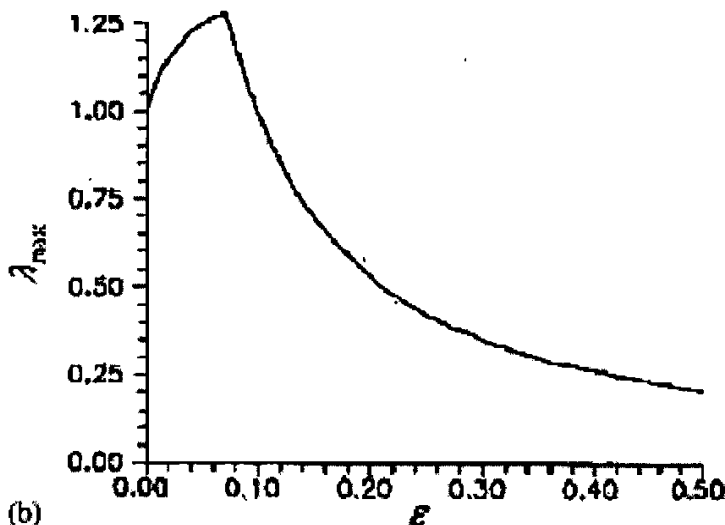


图 3-3

当 $\varepsilon = 1/6$ 时, 取定 λ 值, 可得到 $|G|$ 关于 α 图像, 如下图:

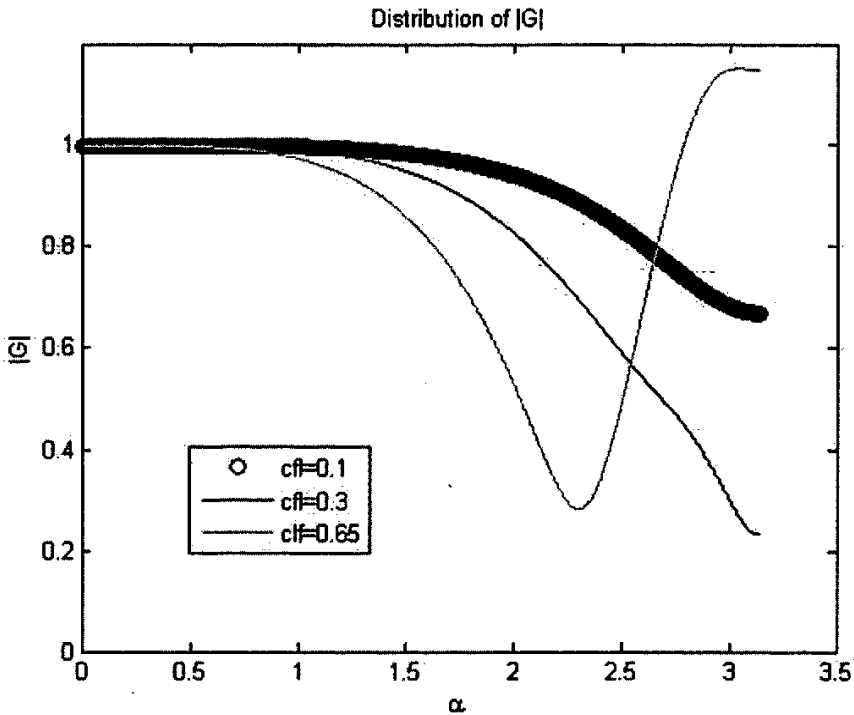


图 3-4

3.4 各向异性效应

在多维情况下, 弥散效应以各向异性形式出现。各项异性是多孔介质流体力学中的概念。如果某种性质与其在介质内部的位置无关, 我们就说介质关于该性质是均质的。反之, 我们则说介质是不均质的。

如果某种性质与其在介质内部的方向无关, 我们就说介质关于这种性质是各项同性的。如果在介质内部一点上介质的某种性质, 例如渗透性或导热性随方向变化, 我们就说在该点介质关于这种性质是各项异性的。

在这里, 我们以二维情况为例, 考虑如下方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad a = \text{const}, b = \text{const} \quad (3.4.1)$$

给定初始条件:

$$u(x, y, 0) = \exp\{i < \vec{k} \cdot \vec{X} >\} \quad (3.4.2)$$

其中 $\vec{k} = [k_1, k_2]^T$, $\vec{X} = [x, y]^T$, k_1, k_2 分别为 x, y 方向上波数。令:

$$\vec{l} = \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \quad (3.4.3)$$

等价可写为 $\vec{l} = [\cos\theta, \sin\theta]^T$, θ 为方位角。(3.4.1) 的准确解可写为:

$$u(x,y,t) = \exp\{i[\vec{k} \cdot \vec{X} - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{k} \cdot \vec{l}t]\} \quad (3.4.4)$$

(3.4.1) 的半离散逼近式可写成:

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{\delta_x u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\delta_y u_{i,j}}{\Delta y} = 0 \quad (3.4.5)$$

及初始条件 $u(x,y,0) = \exp\{i \langle \vec{k} \cdot \vec{X} \rangle\}$ 。其中 $\delta_x u_{i,j}$, $\delta_y u_{i,j}$ 分别为 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的逼近。离散

方程的准确解可写为:

$$u(\vec{X},t) = \exp\{-\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{k} \cdot \vec{l}_r \cdot t\} \cdot \exp\{i \cdot \vec{k} \cdot [\vec{X} - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{l}_i \cdot t]\} \quad (3.4.6)$$

其中, $\vec{l}_r = [\cos\theta \frac{\hat{\delta}_r^{(1)}}{\alpha}, \sin\theta \frac{\hat{\delta}_r^{(2)}}{\beta}]^T$, $\vec{l}_i = [\cos\theta \frac{\hat{\delta}_i^{(1)}}{\alpha}, \sin\theta \frac{\hat{\delta}_i^{(2)}}{\beta}]^T$ 。 $\alpha = k_1 \Delta x, \beta = k_2 \Delta y$ 。

$\hat{\delta}_r^{(1)}, \hat{\delta}_r^{(2)}, \hat{\delta}_i^{(1)}, \hat{\delta}_i^{(2)}, \vec{l}_r, \vec{l}_i$ 分别是 α, β 函数。 $\hat{\delta}_r, \hat{\delta}_i$ 分别为算子象征的实部和虚部。

讨论各项异性耗散, 须讨论式子:

$$\frac{\vec{l} \cdot \vec{l}_i}{\|\vec{l}\|} = \frac{1}{\omega} [\cos\theta \hat{\delta}_i^{(1)}, \sin\theta \hat{\delta}_i^{(2)}], (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (3.4.7)$$

其中 $\hat{\delta}_i^{(1)} = \hat{\delta}_i^{(1)}(\alpha), \hat{\delta}_i^{(2)} = \hat{\delta}_i^{(2)}(\beta)$ 。 $\alpha = \omega \cos\theta, \beta = \omega \sin\theta$ 。用带控制系数 ε 迎风紧致差分算子 δ_c^{ε} 去离散方程 (2.2.1) 中的空间微商。为控制各向异性耗散, 要求获得 ε 的最优值, 须求解如下最小值问题:

$$\min_{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\|\vec{l}\| - \frac{\vec{l} \cdot \vec{l}_i}{\|\vec{l}\|} \right]^2 d\theta d\omega \quad (3.4.8)$$

数值计算可得 $\varepsilon \approx 1/6$ 。如下图:

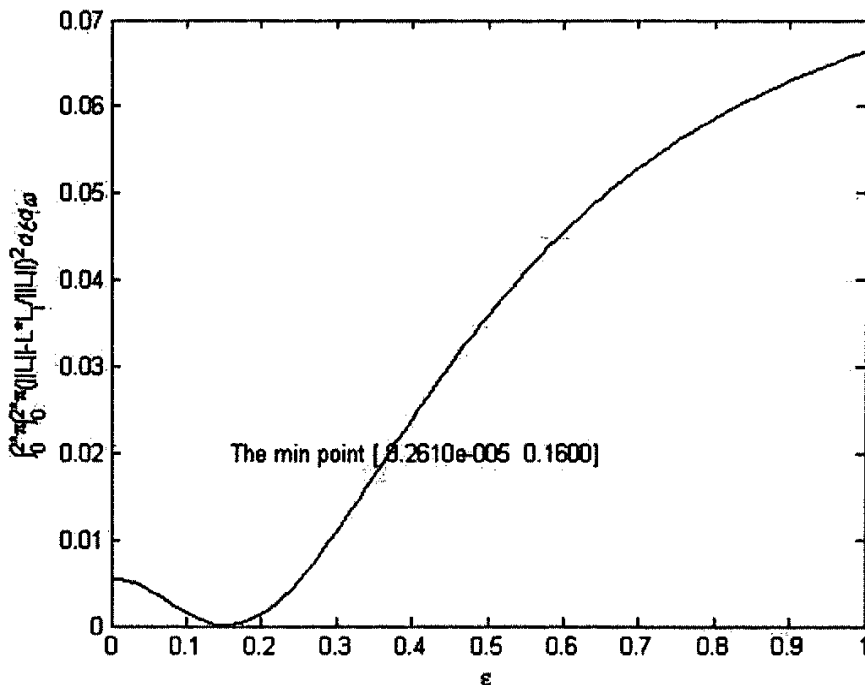


图 3-5

从图中可以看出 ε 约在 $1/6$ 处取最优值。

文^[1]讨论了 ε 等于不同值时格式的情况。考虑如下问题：

$$u_t + (-yu)_x + (xu)_y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

给定周期边界条件：

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} a; & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.5 \\ b; & \sqrt{x^2 + y^2} > 0.5 \end{cases}$$

其中 a, b 为常数。开始条件相当如平面上以 0.5 为半径的圆特征函数。取网格点为 201×201 ，空间方向用 Rung-Kutta 格式离散。下面是 $t=0.8$ 时不同 ε 值图像。

图 3-6 是用中心紧致差分格式 ($\varepsilon=0$) 离散空间微商。在圆的周围很明显有振荡产生，而且有一定程度的各项异性现象出现。

图 3-7 是用三阶迎风紧致格式 ($\varepsilon=0.1$) 离散空间微商。在圆的内部仍然有数值振荡出现。

图 3-8 用的是 $\varepsilon=1/6$ 时三阶迎风紧致格式。从图中可以看出数值振荡非常微弱。

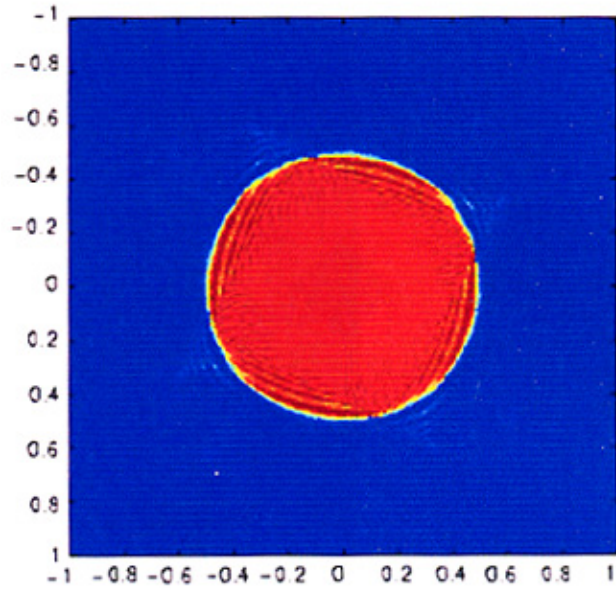


图 3-6

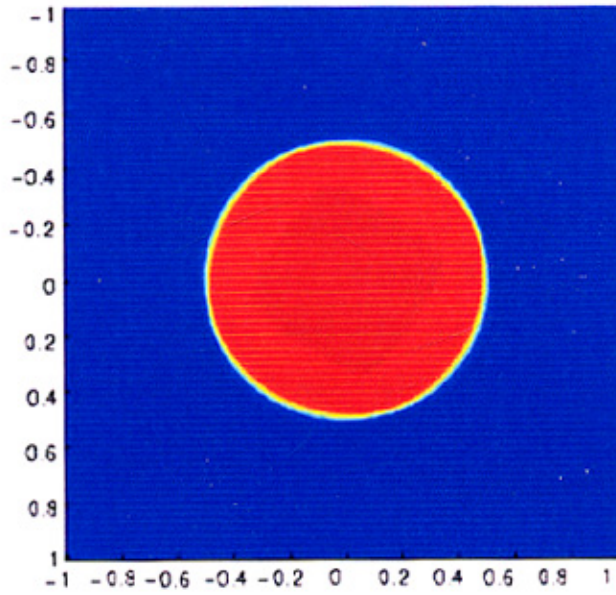


图 3-7

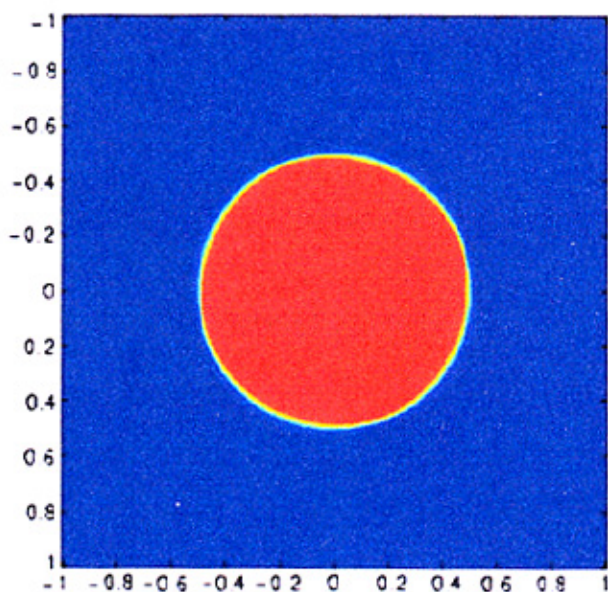


图 3-8

由此可见分析并取得最优的 ε 值在格式计算中，对于控制各项异性和数值振荡是必要的。

3.5 紧致群速度控制格式 (UCGVC 格式)

3.5.1 一维情况

由于在一维情况下，H-J 方程与双曲守恒律是等价的。为方便讨论，我们借助于双曲守恒律已有的结果来分析格式的性质。

由引言知，对于一维 Hamilton-Jacobi 方程：

$$\begin{cases} \phi_t + f(\phi_x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \end{cases}$$

等价的双曲守恒律方程是：

$$\begin{cases} u_t + f_x(u) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.5.1.1)$$

^{[1][2]} 考虑其半离散形式，解该方程的一个紧致差分格式可以表示为：

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= -\frac{\delta_x^{c,\varepsilon} f(u_j)}{\Delta x} \\ \delta_x^{c,\varepsilon} &= \frac{\delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^2}{I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2} \end{aligned} \quad (3.5.1.2)$$

为方便下面讨论，将上式改写成：

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [A^{-1} B f(u)_j] \equiv L(u)_j \quad (3.5.1.3)$$

这里 A, B 均为算子, 其中

$$A = I - 2\varepsilon \delta_x^0 + \frac{1}{6} \delta_x^2, B = \delta_x^0 - 2\varepsilon \delta_x^2, (-\frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{3})$$

由上面的定义, 可得

$$Au_j = (\frac{1}{6} + \varepsilon)u_{j-1} + \frac{2}{3}u_j + (\frac{1}{6} - \varepsilon)u_{j+1} \quad (3.5.1.4)$$

$$Bu_j = -(\frac{1}{2} + 2\varepsilon)u_{j-1} + 4\varepsilon u_j + (\frac{1}{2} - 2\varepsilon)u_{j+1} \quad (3.5.1.5)$$

$$\text{令 } \bar{u}_j = Au_j \quad (3.5.1.6)$$

则格式 (3.5.1.3) 可以表示为:

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\delta_x^0 - 2\varepsilon \delta_x^2) f(u)_j \quad (3.5.1.7)$$

为数值振荡, 同时保持格式的精度, 使用如下开关函数^[52] φ_j ,

$$\varphi_j = \begin{cases} 1 & \frac{|u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}|}{0.5(|u_{j+1} - u_j| + |u_j - u_{j-1}|) + 0.5(|u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1}|)} \geq k \\ 0 & \frac{|u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}|}{0.5(|u_{j+1} - u_j| + |u_j - u_{j-1}|) + 0.5(|u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1}|)} < k \end{cases}$$

这里 k 称为“阈值”, 计算中可取 k=0.95.

在光滑区域 $\varphi_j=0$, 在激波附近 $\varphi_j=1$. 开关函数能够保证在光滑区域具有 $O(\Delta x^3)$ 的精度.

构造如下群速度控制的迎风紧致差分格式 ($\sigma = \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_j}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^0 [f(u)_j - \varphi_j (f(u)_j - f(\bar{u})_j)] + \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_j ss_j a \delta_x^2 \bar{u}_j] \\ & - \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_j a \delta_x^2 \bar{u}_j] + \frac{2\varepsilon}{\Delta x} \delta_x^2 [f(u)_j - \varphi_j (f(u)_j - f(\bar{u})_j)] \end{aligned} \quad (3.5.1.8)$$

$$\text{其中 } \varepsilon f'(u) \geq 0, -\frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{3}, a = \max_u |f'(u)|, ss_j = \text{sgn}(\delta_x^0 \bar{u}_j \cdot \delta_x^2 \bar{u}_j)$$

这里 ss_j 称为激波结构函数, 在激波左侧有: $ss_j \bar{u}_j > 0$, 在激波右侧有: $ss_j \bar{u}_j < 0$.

计算出 \bar{u}_j 后, 还需要从 \bar{u}_j 恢复到 u_j . 由式 (3.5.1.6) 的计算公式为:

$$u_j = A^{-1} \bar{u}_j = (I - 2\varepsilon \delta_x^0 + \frac{1}{6} \delta_x^2)^{-1} \bar{u}_j \quad (3.5.1.9)$$

在计算时, 把 3.5.1.4 式及 3.5.1.5 式代入 3.5.1.3 式, 由 3.5.1.2 式, 可形成一个求解 $\delta_x^{\epsilon} f(u_j)$ 的线性代数方程组, 系数矩阵是三对角的, 当取定行, 从左到右三个元素分别是 $\frac{1}{6} + \epsilon$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6} - \epsilon$ 。当给定边界条件, 可用追赶法求解方程组, 为了保证方程组有唯一解,

要求系数矩阵是严格对角占优的, 即要求 $|\frac{1}{6} - \epsilon| + |\frac{1}{6} + \epsilon| < \frac{2}{3}$ 成立, 可求解出 $-\frac{1}{3} < \epsilon < \frac{1}{3}$ 。

特别的当 $\epsilon = \frac{1}{6}$ 时, 就是三阶迎风紧致差分格式。

特别的, 当 $f(u)=u$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_j}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^0 [u_j - \varphi_j(u_j - \bar{u}_j)] + \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_j ss_j a \delta_x^2 \bar{u}_j] \\ & - \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_j a \delta_x^2 \bar{u}_j] + \frac{2\epsilon}{\Delta x} \delta_x^2 [u_j - \varphi_j(u_j - \bar{u}_j)] \end{aligned} \quad (3.5.1.10)$$

式(3.5.1.8)和式(3.5.1.10)在时间方向均采用前面 3.1 提到的 TVD 型的 Runge-Kutta 方法离散。

式 (3.5.1.8) 中, 在平滑区域由 $\varphi_j=0$, 格式变为:

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\delta_x^0 - 2\epsilon \delta_x^2) f(u_j) \quad (3.5.1.11)$$

为迎风紧致差分格式, 当 $\epsilon \neq 0$ 时, 在空间方向有 3 阶逼近精度。在激波附近, 有 $\varphi_j=1$, 则格式变为:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_j}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^0 [f(\bar{u})_j] + \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 [ss_j a \delta_x^2 \bar{u}_j] - \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 [a \delta_x^2 \bar{u}_j] + \frac{2\epsilon}{\Delta x} \delta_x^2 [f(\bar{u})_j] \\ = & -\frac{1}{\Delta x} \{ \delta_x^0 [f(\bar{u})_j] - \frac{1}{2} \delta_x^0 [ss_j a \delta_x^2 \bar{u}_j] + \frac{1}{4} \delta_x^2 [a \delta_x^2 \bar{u}_j] - 2\epsilon \delta_x^2 [f(\bar{u})_j] \} \end{aligned} \quad (3.5.1.12)$$

在这里, 最后一项 $-\frac{2\epsilon}{\Delta x} \delta_x^2 [f(\bar{u})_j]$ 是耗散项, 它不影响算子的群速度特征, 高阶耗散

项是 $\frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 [a \delta_x^2 \bar{u}_j]$ 。

当 $ss_j > 0$ 时, 前三项变为 $\{ \delta_x^0 - \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 \delta_x^2 + \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 \delta_x^2 \} [f(\bar{u})_j]$, 由定理 2.5.1 知道该算子为混合型算子, 在此, 可以将其视为快算子。

$ss_j < 0$ 时, 前三项变为 $\{ \delta_x^0 + \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 \delta_x^2 + \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 \delta_x^2 \} [f(\bar{u})_j]$, 由定理 2.5.2 知道该算子为慢算子。

这里符合文^[22]及 2.5.2 节中提到的在激波左侧为快算子, 在激波右侧为慢算子, 这一抑制非物理振荡的要求。

引理 3.5.1.1: ^[53]半离散格式

$$\frac{du_j}{dt} = L(u)_j \quad (3.5.1.13)$$

如果可以写为如下形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}} \delta_x^- u_j^n + D_{j+\frac{1}{2}} \delta_x^+ u_j^n \quad (3.5.1.14)$$

其中 $C_{j-\frac{1}{2}}$, $D_{j+\frac{1}{2}}$ 可以是 $\{u_j^n\}$ 的函数。如果满足:

$$\begin{aligned} C_{j-\frac{1}{2}} \geq 0, D_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ 0 \leq C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.5.1.15)$$

那么格式是 TVD 格式。

证明 采用 (3.5.1.14) 式有

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n - C_{j+\frac{1}{2}} \delta_x^- u_{j+1}^n + D_{j+\frac{3}{2}} \delta_x^+ u_{j+2}^n$$

用此式减去 (3.5.1.14) 式有

$$u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} = (u_{j+1}^n - u_j^n)(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}) + C_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) + D_{j+\frac{3}{2}}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n)$$

从而得

$$|u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq |u_{j+1}^n - u_j^n| \cdot |1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}}| + |C_{j-\frac{1}{2}}| \cdot |u_j^n - u_{j-1}^n| + |D_{j+\frac{3}{2}}| \cdot |u_{j+2}^n - u_{j+1}^n|$$

利用定理条件有

$$|u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq |u_{j+1}^n - u_j^n| - C_{j+\frac{1}{2}} |u_{j+1}^n - u_j^n| - D_{j+\frac{1}{2}} |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_{j-\frac{1}{2}} |u_j^n - u_{j-1}^n| + D_{j+\frac{3}{2}} |u_{j+2}^n - u_{j+1}^n|$$

求和得

$$\begin{aligned} \sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| &\leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| + \sum_j C_{j-\frac{1}{2}} |u_j^n - u_{j-1}^n| \\ &\quad - \sum_j C_{j+\frac{1}{2}} |u_{j+1}^n - u_j^n| + \sum_j D_{j+\frac{3}{2}} |u_{j+2}^n - u_{j+1}^n| \\ &\quad - \sum_j D_{j+\frac{1}{2}} |u_{j+1}^n - u_j^n| \end{aligned}$$

显然, 不等号右边的第 2 项和第 3 项消去, 第 4 项和第 5 项消去。这样就有

$$\text{TV}(u^{n+1}) \leq \text{TV}(u^n).$$

证毕. \square

引理 3.5.1.2 在 $\{\bar{u}_j^n\}$ 中, 有 $2 \cdot \delta_x^2 \bar{u}_j \cdot \delta_x^0 \bar{u}_j = (\delta_x^+ \bar{u}_j^n)^2 - (\delta_x^- \bar{u}_j^n)^2$ 。

证明:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \delta_x^2 \bar{u}_j \cdot \delta_x^0 \bar{u}_j &= ((\bar{u}_{j+1} - 2\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}))(\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}) \\ &= \bar{u}_{j+1}^2 - 2\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j + \bar{u}_{j+1}\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j+1}\bar{u}_{j-1} + 2\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}^2 \\ &= (\bar{u}_{j+1}^2 - 2\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j + \bar{u}_j^2) - (\bar{u}_j^2 - 2\bar{u}_{j+1}\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}^2) \\ &= (\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j)^2 - (\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1})^2 \\ &= (\delta_x^+ \bar{u}_j^n)^2 - (\delta_x^- \bar{u}_j^n)^2 \end{aligned}$$

证毕. \square

引理 3.5.1.3 在间断附近, 半离散格式 (3.5.1.8) 可以写成如下形式:

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = -\left[-\frac{1}{\Delta x} C_{j+\frac{1}{2}} \delta_x^+ \bar{u}_j^n + D_{j-\frac{1}{2}} \delta_x^- \bar{u}_j^n \right] \quad (3.5.1.16)$$

其中, $C_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, D_{j-\frac{1}{2}} \geq 0$ 。

证明 在间断点附近, $\varphi_j = 1$, 考虑如下 4 种情况:

(1) $ss_{j+1} = ss_{j-1} = 1$, 这时候半离散格式 (3.2.8) 可以写成:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_j}{dt} &= \frac{1}{2h} \left(a - \frac{f(\bar{u}_{j+1}) - f(\bar{u}_j)}{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j} + 4\varepsilon \frac{f(\bar{u}_{j+1}) - f(\bar{u}_j)}{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j} \right) \delta_x^+ \bar{u}_j \\ &\quad - \frac{1}{2h} \left[\frac{f(\bar{u}_j) - f(\bar{u}_{j-1})}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} + a \left(2 - \frac{\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} \right) + 4\varepsilon \frac{f(\bar{u}_j) - f(\bar{u}_{j-1})}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} \right] \delta_x^- \bar{u}_j \end{aligned} \quad (3.5.1.17)$$

取

$$\begin{aligned} C_{j+\frac{1}{2}}^1 &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{f(\bar{u}_{j+1}) - f(\bar{u}_j)}{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j} \right) \\ C_{j+\frac{1}{2}}^2 &= 2\varepsilon \frac{f(\bar{u}_{j+1}) - f(\bar{u}_j)}{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j} \\ D_{j-\frac{1}{2}}^1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{f(\bar{u}_j) - f(\bar{u}_{j-1})}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} + a \left(2 - \frac{\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} \right) \right] \\ D_{j-\frac{1}{2}}^2 &= 2\varepsilon \frac{f(\bar{u}_j) - f(\bar{u}_{j-1})}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} \end{aligned}$$

由 $a = \max_u |f'(u)|$, $\varepsilon f'(u) \geq 0$, 知 $C_{j+\frac{1}{2}}^1 \geq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^2 \geq 0, D_{j-\frac{1}{2}}^2 \geq 0$,

下面来看 $D_{j-\frac{1}{2}}^1$ 。

如果
$$\frac{\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} \leq 0,$$

那么
$$D_{j-\frac{1}{2}}^1 \geq 0.$$

如果
$$\frac{\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} > 0$$

由引理 3.5.1.2 和条件 $ss_{j-1} = \text{sgn}(\delta_x^0 \bar{u}_{j-1} \cdot \delta_x^2 \bar{u}_{j-1}) = 1$, 可得

$$|\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}| < |\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}|$$

因此

$$\frac{\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} < 1$$

所以
$$D_{j-\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{f(\bar{u}_j) - f(\bar{u}_{j-1})}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} + a \left(2 - \frac{\bar{u}_{j-1} - \bar{u}_{j-2}}{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}} \right) \right] \geq 0$$

总之, 在此情况下

$$C_{j+\frac{1}{2}}^1 = C_{j+\frac{1}{2}}^1 + C_{j+\frac{1}{2}}^2 \geq 0, \quad D_{j+\frac{1}{2}}^1 = D_{j-\frac{1}{2}}^1 + D_{j-\frac{1}{2}}^2 \geq 0$$

(2) 当 $ss_{j+1} = ss_{j-1} = -1$ 、 $ss_{j+1} = 1, ss_{j-1} = -1$ 及 $ss_{j+1} = -1, ss_{j-1} = 1$ 时, 仿照(1)证明过程,

同理可得在这些情况下有:

$$C_{j+\frac{1}{2}}^1 = C_{j+\frac{1}{2}}^1 + C_{j+\frac{1}{2}}^2 \geq 0, \quad D_{j+\frac{1}{2}}^1 = D_{j-\frac{1}{2}}^1 + D_{j-\frac{1}{2}}^2 \geq 0$$

又因为在激波附近, $ss_j = 0$ 的情况几乎不出现, 这里就不考虑了。证毕。□

定理 3.5.1.4 半离散格式 (3.5.1.8) 是 TVD 格式, 即

$$\frac{d}{dt} TV(\bar{u}) \leq 0$$

证明 直接可有引理 3.5.1.1 和引理 3.5.1.3 得到。

引理 3.5.1.5 ^[54] 如果存在两个与 N 无关的数 $0 \leq \delta < 1$, $\alpha > 0$, 使得 $N \times N$ 矩阵

$A = (a_{ij})_{N \times N}$ 满足

$$\max_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{|a_{jj}|} \leq \alpha, \quad \sum_{i=1, i \neq j}^N |a_{ij}| \leq \delta |a_{jj}|$$

即 A 强对角占优矩阵。那么, A^{-1} 的 L_1 范数是有界的。即:

$$\|A^{-1}\|_{L_1} \leq \frac{\alpha}{1-\delta}$$

证明。略。

由式 (3.5.1.4) 可以得出系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

由引理 3.5.1.5, 可得出 $\|A^{-1}\|_{L_1}$ 是有界的。

定理 3.5.1.6 半离散格式 (3.5.1.8) 是 TVB 的。即

$$TV(u^n) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \leq C$$

证明 由定理 3.5.1.4 和引理 3.5.1.5, 有

$$\begin{aligned} TV(u^n) &= \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \\ &= \sum_j |(A^{-1}\bar{u}^n)_{j+1} - (A^{-1}\bar{u}^n)_j| \\ &\leq \|A^{-1}\|_{L_1} \sum_j |\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n| \\ &\leq C \end{aligned}$$

其中 $C = \frac{\alpha}{1-\delta} TV(u^0)$ 证毕。□

定理 3.5.1.7 格式 (3.5.1.8) 符合相容性要求。

证明 上述格式可以写成如下半离散守恒形式:

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}})$$

其中 Δx 是时间方向的步长, 数值通量 $f_{j+\frac{1}{2}}$ 须满足相容性条件

$$h(\omega, \omega, \cdots, \omega) = f(\omega) \quad \omega \in R$$

先考虑式 (3.5.1.8)。

1 当 $\varphi_j = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_j}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x}(\delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^2)f(u)_j \\ &= -\frac{1}{\Delta x}\left\{\left[\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)f(u_{j+1}) + \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right)f(u_j)\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)f(u_j) + \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right)f(u_{j-1})\right]\right\} \end{aligned}$$

故 $f_{j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)f(u_{j+1}) + \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right)f(u_j)$

有

$$h(\bar{u}_j, \bar{u}_j, \bar{u}_j) = f(\bar{u}_j)$$

所以 $\varphi_j = 0$ 时成立。

2 $\varphi_j = 1$ 时, 分四种情况讨论。

1) 当 $ss_{j+1} = 1, ss_{j-1} = 1$ 时:

由式 (3.5.1.17) 有:

$$f_{j-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)f(\bar{u}_j) + \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right)f(\bar{u}_{j-1}) + \frac{a}{4}[-2\bar{u}_j + 4\bar{u}_{j-1} - 2\bar{u}_{j-2}]$$

所以有 $h(\bar{u}_j, \bar{u}_j, \bar{u}_j) = f(\bar{u}_j)$

2) $ss_{j+1} = -1, ss_{j-1} = -1$ 、 $ss_{j+1} = 1, ss_{j-1} = -1$ 、 $ss_{j+1} = -1, ss_{j-1} = 1$ 时, 类似 (1) 的证明。

综合上述, 格式 (3.5.1.8) 满足相容性的要求。□

为了计算的方便, 可以对格式 (3.5.1.8) 进行简化。

定理 3.5.1.8 算子 δ_x^0, δ_x^2 是可以交换的, 即 $\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 = \delta_x^2 \cdot \delta_x^0$ 。

证明 对 $\forall u_j, j \in Z$ $\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 u_j = \delta_x^0 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$

$$= \frac{1}{2}[u_{j+2} - 2u_{j+1} + u_j - (u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2})]$$

$$= \frac{1}{2}(u_{j+2} - 2u_{j+1} + 2u_{j-1} - u_{j-2})$$

$$\delta_x^2 \cdot \delta_x^0 u_j = \delta_x^2 \left[\frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) \right]$$

$$= \frac{1}{2}[u_{j+2} - u_j - 2(u_{j+1} - u_{j-1}) + u_j - u_{j-2}]$$

$$= \frac{1}{2}(u_{j+2} - 2u_{j+1} + 2u_{j-1} - u_{j-2})$$

故 $\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 = \delta_x^2 \cdot \delta_x^0$ 。□

定理 3.5.1.9: 算子 $A = I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2$ 和算子 δ_x^0 是可交换的。即:

$$A \cdot \delta_x^0 = \delta_x^0 \cdot A$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot \delta_x^0 &= (I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2) \cdot \delta_x^0 \\ &= \delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^0 \cdot \delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2 \cdot \delta_x^0 \end{aligned}$$

由定理 3.5.1.8 知道

$$\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 = \delta_x^2 \cdot \delta_x^0$$

故

$$\begin{aligned} &= \delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^0 \cdot \delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 \\ &= \delta_x^0 \cdot (I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2) \\ &= \delta_x^0 \cdot A \end{aligned}$$

证毕. \square

定理 3.5.1.10 $A = I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2$ 和 δ_x^2 是可以交换的。即:

$$A \cdot \delta_x^2 = \delta_x^2 \cdot A$$

证明

$$\begin{aligned} A \cdot \delta_x^2 &= (I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2) \cdot \delta_x^2 \\ &= \delta_x^2 - 2\varepsilon\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 + \frac{1}{6}\delta_x^2 \cdot \delta_x^2 \end{aligned}$$

由定理 3.5.1.9 知道

$$\delta_x^0 \cdot \delta_x^2 = \delta_x^2 \cdot \delta_x^0$$

有

$$\begin{aligned} &= \delta_x^2 - 2\varepsilon\delta_x^2 \cdot \delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2 \cdot \delta_x^2 \\ &= \delta_x^2 \cdot (I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2) \\ &= \delta_x^2 \cdot A \end{aligned}$$

证毕. \square

$$\text{由前面的定义, } \delta_x^{c,\varepsilon} = A^{-1}B = (I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2)^{-1}(\delta_x^0 - 2\varepsilon\delta_x^2) \quad -\frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{3}$$

由上述定理, 可以将格式 (3.5.1.8) 简化为:

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\varepsilon} f(u_j) + \frac{\sigma}{\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_j ss_j a \delta_x^2 u_j] - \frac{\sigma}{2\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_j a \delta_x^2 u_j] \quad (3.5.1.18)$$

其中, $\sigma \geq 0$ 。

具体计算 u_x 时, 我们用下述简便方法。

由 (3.5.1.18) 有

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_j) - \frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u) + \frac{\sigma}{\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_j s s_j a \delta_x^2 u_j] - \frac{\sigma}{2\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_j a \delta_x^2 u_j]$$

其中 $\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = a(u) \frac{\partial u}{\partial x}$, $f^\pm(u) = a^\pm u$, $a^\pm = \frac{a \pm |a|}{2}$.

$\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u)$ 和 $\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u)$ 分别为 $\frac{\partial f(u_j)}{\partial x}$ 的向右, 向左偏斜的差分逼近。分别满足:

$$\frac{2}{3} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_j) + \frac{1}{3} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_{j-1}) = \frac{1}{6} f^+(u_{j+1}) + \frac{4}{6} f^+(u_j) - \frac{5}{6} f^+(u_{j-1})$$

$$\frac{1}{3} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_{j+1}) + \frac{2}{3} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_j) = \frac{1}{6} f^-(u_{j+1}) + \frac{4}{6} f^-(u_j) - \frac{5}{6} f^-(u_{j-1})$$

$j = 1, 2, \dots, N-1$

通过两个方向扫描, 容易求出 $\delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_j)$, $\delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_j)$.

在边界上, 采用二阶偏斜格式:

$$\delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_0) = (-3f^+(u_0) + 4f^+(u_1) - f^+(u_2))/2$$

$$\delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_N) = (3f^-(u_N) - 4f^-(u_{N-1}) + f^-(u_{N-2}))/2$$

3.5.2 多维情况

对于多维, 可以认为双曲型守恒律是 Hamilton-Jacobi 方程的微商形式, 求解 Hamilton-Jacobi 方程同样可以等价求解弱守恒律方程组, 所以参考双曲守恒律方程的解法, 可以建立相应的 Hamilton-Jacobi 方程的数值逼近格式。

下面以二维为例, 讲述多维情况的解法。对二维 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \phi_t + f(\phi_x, \phi_y, t) = 0 \\ \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \end{cases} \quad (3.5.2.1)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} u_1(x, t) = \phi_x(x, y, t) \\ u_2(x, t) = \phi_y(x, y, t) \end{cases} \quad (3.5.2.2)$$

对 (3.5.2.1) 式分别求关于对 x 和 y 的偏导数, 可得下面二维双曲守恒律方程组的形式

$$\begin{cases} U_t + F_x(U) + G_y(U) = 0 \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (3.5.2.3)$$

这里

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} f(U) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(U) \end{pmatrix}$$

这样，二维 Hamilton-Jacobi 方程已经转化为二维双曲守恒律方程组：

$$\begin{cases} U_t + F_x(U) + G_y(U) = 0 \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases}$$

方便讨论，考虑如下简便形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (3.5.2.4)$$

考虑半离散格式，一个紧致差分格式可以表示为：

$$\frac{du_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (A_x^{-1} B_x f(u_{i,j})) - \frac{1}{\Delta y} (A_y^{-1} B_y g(u_{i,j})) \quad (3.5.2.5)$$

这里，

$$A_x = I - 2\varepsilon \delta_x^0 + \frac{1}{6} \delta_x^2$$

$$A_y = I - 2\bar{\varepsilon} \delta_y^0 + \frac{1}{6} \delta_y^2$$

$$B_x = \delta_x^0 - 2\varepsilon \delta_x^2$$

$$B_y = \delta_y^0 - 2\bar{\varepsilon} \delta_y^2$$

其中， $(-\frac{1}{3} < \varepsilon < \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3} < \bar{\varepsilon} < \frac{1}{3})$ 。有前面的定义，有

$$A_x u_{i,j} = \left(\frac{1}{6} + \varepsilon\right) u_{i-1,j} + \frac{2}{3} u_{i,j} + \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) u_{i+1,j} \quad (3.5.2.6)$$

$$A_y u_{i,j} = \left(\frac{1}{6} + \bar{\varepsilon}\right) u_{i,j-1} + \frac{2}{3} u_{i,j} + \left(\frac{1}{6} - \bar{\varepsilon}\right) u_{i,j+1} \quad (3.5.2.7)$$

$$B_x u_{i,j} = -\left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon\right) u_{i-1,j} + 4\varepsilon u_{i,j} + \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) u_{i+1,j} \quad (3.5.2.8)$$

$$B_y u_{i,j} = -\left(\frac{1}{2} + 2\bar{\varepsilon}\right) u_{i,j-1} + 4\bar{\varepsilon} u_{i,j} + \left(\frac{1}{2} - 2\bar{\varepsilon}\right) u_{i,j+1} \quad (3.5.2.9)$$

令

$$\bar{u}_{i,j} = (A_y A_x u)_{i,j} \quad (3.5.2.10)$$

则格式 (3.5.2.5) 可以表示为

$$\frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (A_y B_x f(u))_{i,j} - \frac{1}{\Delta y} (A_x B_y g(u))_{i,j} \quad (3.5.2.11)$$

定义开关函数，仿照一维情况，

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & \frac{|u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}|}{0.5(|u_{i+1,j} - u_{i,j}| + |u_{i,j} - u_{i-1,j}|) + 0.5(|u_{i+1,j} + 2u_{i,j} + u_{i-1,j}|)} \geq k \\ 0 & \frac{|u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}|}{0.5(|u_{i+1,j} - u_{i,j}| + |u_{i,j} - u_{i-1,j}|) + 0.5(|u_{i+1,j} + 2u_{i,j} + u_{i-1,j}|)} < k \end{cases}$$

$$\varphi_j = \begin{cases} 1 & \frac{|u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}|}{0.5(|u_{i,j+1} - u_{i,j}| + |u_{i,j} - u_{i,j-1}|) + 0.5(|u_{i,j+1} + 2u_{i,j} + u_{i,j-1}|)} \geq k \\ 0 & \frac{|u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}|}{0.5(|u_{i,j+1} - u_{i,j}| + |u_{i,j} - u_{i,j-1}|) + 0.5(|u_{i,j+1} + 2u_{i,j} + u_{i,j-1}|)} < k \end{cases}$$

构造如下群速度控制的迎风紧致格式：

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} A_y \{ B_x [f(u_{i,j}) - \varphi_i (f(u_{i,j}) - f(\bar{u}_{i,j}))] + \frac{1}{2} \delta_x^0 [\varphi_i \cdot ss_i \cdot a \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}] - \frac{1}{4} \delta_x^2 [\varphi_i \cdot a \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}] \} \\ & -\frac{1}{\Delta y} A_x \{ B_y [g(u_{i,j}) - \varphi_j (g(u_{i,j}) - g(\bar{u}_{i,j}))] + \frac{1}{2} \delta_y^0 [\varphi_j \cdot ss_j \cdot a \delta_y^2 \bar{u}_{i,j}] - \frac{1}{4} \delta_y^2 [\varphi_j \cdot a \delta_y^2 \bar{u}_{i,j}] \} \end{aligned} \quad (3.5.2.12)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \frac{\partial f(u)}{\partial x} & \geq 0, SS_i = \text{sgn}(\delta_x^0 \bar{u}_{i,j} \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}), a = \max_u |f'(u)|, \\ \bar{\varepsilon} \cdot \frac{\partial g(u)}{\partial y} & \geq 0, SS_j = \text{sgn}(\delta_y^0 \bar{u}_{i,j} \delta_y^2 \bar{u}_{i,j}), \bar{a} = \max_u |g'(u)|. \end{aligned}$$

得出 $\bar{u}_{i,j}$ 后，还须要恢复到 $u_{i,j}$ 。从式 (3.5.2.10) 有恢复公式

$$u_{i,j} = (A_y^{-1} A_x^{-1} \bar{u})_{i,j} \quad (3.5.2.13)$$

引理 3.5.2.1 在 CFL 条件下，格式(3.5.2.11)可以写成如下形式

$$\frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (-C_{i+\frac{1}{2},j} \delta_x^+ \bar{u}_{i,j} + D_{i-\frac{1}{2},j} \delta_x^- \bar{u}_{i,j}) - \frac{1}{\Delta y} (-C_{i,j+\frac{1}{2}} \delta_y^+ \bar{u}_{i,j} + D_{i,j-\frac{1}{2}} \delta_y^- \bar{u}_{i,j}) \quad (3.5.2.14)$$

其中，

$$C_{i+\frac{1}{2},j} \geq 0, D_{i-\frac{1}{2},j} \geq 0, C_{i,j+\frac{1}{2}} \geq 0, D_{i,j-\frac{1}{2}} \geq 0.$$

证明 类似于引理 (3.5.1.3) 的证明，略。

从文献^[55]知道，在二维情况下，此类格式在空间方向不能保证具有 TVD 性质。但是因我们在时间方向采用了 TVD 型的 Runge-Kutta 离散格式，全离散格式仍然满足稳定性要

求。

定理 3.5.2.2 格式 (3.5.2.11) 时间方向采用 TVD Runge-Kutta 型离散格式, 在 CFL 条件

$$\Delta t \leq \min_{l,k} \frac{\alpha_{lk}}{\beta_{lk}} \Delta t_0$$

下, 全离散形式满足

$$\|\bar{u}_{i,j}^{n+1}\| \leq \|\bar{u}_{i,j}^0\|$$

证明 记

$$\begin{aligned} L(\bar{u}) = & -\frac{1}{\Delta x} A_x \{B_x [f(u_{i,j}) - \varphi_i(f(u_{i,j}) - f(\bar{u}_{i,j}))] + \frac{1}{2} \delta_x^0 [\varphi_j SS_i a \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}] - \frac{1}{4} \delta_x^2 [\varphi_j a \delta_x^2 \bar{u}_{i,j}] \\ & - \frac{1}{\Delta y} A_y \{B_y [f(u_{i,j}) - \varphi_i(f(u_{i,j}) - f(\bar{u}_{i,j}))] + \frac{1}{2} \delta_y^0 [\varphi_j SS_i a \delta_y^2 \bar{u}_{i,j}] - \frac{1}{4} \delta_y^2 [\varphi_j a \delta_y^2 \bar{u}_{i,j}] \} \end{aligned}$$

时间方向采用 3.1 节提到的 TVD 型 Runge-Kutt 离散格式, 则全离散形式为:

$$\bar{u}^{(l)} = \sum_{k=0}^{l-1} [\alpha_{lk} \bar{u}^{(k)} + \Delta t \cdot \beta_{lk} \cdot L(\bar{u}^{(k)})], \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (3.5.2.15)$$

其中, $\bar{u}^{(0)} = \bar{u}^{(n)}, \bar{u}^{(m)} = \bar{u}^{(n+1)}, \alpha_{lk} \geq 0, \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_{lk} = 1$

用归纳法证明

$$\text{当 } l=1 \text{ 时, 由 } \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}} \Delta t \leq \Delta t_0, \sum_{k=0}^0 \alpha_{1k} = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{可得} \quad \|\bar{u}^{(1)}\| &= \|\alpha_{10} \bar{u}^{(0)} + \Delta t \cdot \beta_{10} \cdot L(\bar{u}^{(0)})\| \\ &= \alpha_{10} \|(I + \Delta t \cdot \frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}} \cdot L)(\bar{u}^{(0)})\| \\ &\leq \|\bar{u}^{(0)}\| \end{aligned}$$

当 $l=2$ 时,

$$\frac{\alpha_{20}}{\beta_{20}} \Delta t \leq \Delta t_0, \frac{\alpha_{21}}{\beta_{21}} \Delta t \leq \Delta t_0, \alpha_{20} + \alpha_{21} = 1$$

有

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(2)}\| &= \|\alpha_{20} (I + \Delta t \cdot \frac{\beta_{20}}{\alpha_{20}} \cdot L)(\bar{u}^{(0)}) + \alpha_{21} (I + \Delta t \cdot \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \cdot L)(\bar{u}^{(1)})\| \\ &\leq \alpha_{20} \|(I + \Delta t \cdot \frac{\beta_{20}}{\alpha_{20}} \cdot L)\bar{u}^{(0)}\| + \alpha_{21} \|(I + \Delta t \cdot \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \cdot L)\bar{u}^{(1)}\| \\ &\leq \alpha_{20} \|\bar{u}^{(0)}\| + \alpha_{21} \|\bar{u}^{(1)}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha_{20} \|\bar{u}^{(0)}\| + \alpha_{21} \|\bar{u}^{(0)}\| \\ &= \|\bar{u}^{(0)}\| \end{aligned}$$

假设对 $l=1, 2, \dots, m-1$ 时均成立,

则 $l=m$, 有

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(m)}\| &= \left\| \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{mk} \bar{u}^{(k)} + \Delta t \cdot \beta_{mk} \cdot L(\bar{u}^{(k)})] \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{mk} \left\| \left(I + \Delta t \cdot \frac{\beta_{mk}}{\alpha_{mk}} \cdot L \right) \bar{u}^{(k)} \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{mk} \|\bar{u}^{(k)}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{mk} \|\bar{u}^{(0)}\| \\ &= \|\bar{u}^{(0)}\| \end{aligned}$$

证毕. \square

由式 (3.5.2.6) 和式 (3.5.2.7) 可知, 这里的 A_x, A_y 可以表示为:

$$A_x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \varepsilon \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

显然, A_x, A_y 均是强对角占优的, 满足前面引理 (3.5.1.5) 条件, 故 $\|A_x^{-1}\|, \|A_y^{-1}\|$ 均有界。

定理 3.5.2.3 半离散格式 (3.5.2.12) 有如下性质:

$$\max_{i,j} |u_{i,j}^n| \leq C$$

C 是与 N 和 Δt 无关的常数。

证明 由式 (3.5.1.12) 和定理 (3.5.1.5) 及引理 (3.5.2.2), 知道

$$\begin{aligned} \max_{i,j} |u_{i,j}^n| &= \max_{i,j} |(A_x^{-1} A_y^{-1} \bar{u})_{i,j}| \\ &\leq \|A_x^{-1}\|_{l_\infty} \cdot \|A_y^{-1}\|_{l_\infty} \cdot \max_{i,j} |\bar{u}_{i,j}^n| \\ &\leq \left(\frac{\alpha_1}{1-\delta_1}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_1}{1-\delta_1}\right) \max_{i,j} |\bar{u}_{i,j}^0| \\ &\leq C \end{aligned}$$

$$C = \left(\frac{\alpha_1}{1-\delta_1}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_1}{1-\delta_1}\right) \max_{i,j} |\bar{u}_{i,j}^0| \text{ 为常数. } \square$$

定理 3.5.2.4 格式 (3.5.2.12) 满足相容性要求。

证明 类似定理 3.5.1.7 的证明, 略。

类似一维定义如下算子:

$$\delta_x^{c,\varepsilon} := A_x^{-1} B_x \quad \delta_y^{c,\varepsilon} := A_y^{-1} B_y$$

则格式 (3.5.2.12) 可以化为:

$$\begin{aligned} \frac{du_{i,j}}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\varepsilon} f(u) + \frac{\sigma_x}{\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_i \cdot ss_i \cdot a \delta_x^2 u_{i,j}] - \frac{\sigma_x}{2\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_i \cdot a \delta_x^2 u_{i,j}] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{c,\varepsilon} f(u) + \frac{\sigma_y}{\Delta y} \delta_y^0 [\varphi_j \cdot ss_j \cdot a \delta_y^2 u_{i,j}] - \frac{\sigma_y}{2\Delta y} \delta_y^2 [\varphi_j \cdot a \delta_y^2 u_{i,j}] \end{aligned} \quad (3.5.2.16)$$

如同一维情况, 将上式写为:

$$\begin{aligned} \frac{du_{i,j}}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j}) - \frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j}) + \frac{\sigma_x}{\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_i \cdot ss_i \cdot a \delta_x^2 u_{i,j}] - \frac{\sigma_x}{2\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_i \cdot a \delta_x^2 u_{i,j}] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j}) - \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j}) + \frac{\sigma_y}{\Delta y} \delta_y^0 [\varphi_j \cdot ss_j \cdot a \delta_y^2 u_{i,j}] - \frac{\sigma_y}{2\Delta y} \delta_y^2 [\varphi_j \cdot a \delta_y^2 u_{i,j}] \end{aligned}$$

式中 $\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = a(u) \frac{\partial u}{\partial x}$, $f^\pm(u) = a^\pm u$, $a^\pm = \frac{a \pm |a|}{2}$, 同理有

$$\frac{\partial g(u)}{\partial y} = g'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = b(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ 及 } g^\pm(u) = b^\pm u, \text{ , } b^\pm = \frac{b \pm |b|}{2}.$$

$$\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j}), \frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j}), \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j}), \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j}) \text{ 分别为}$$

$\frac{\partial f(u_{i,j})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(u_{i,j})}{\partial y}$ 向左, 向右偏斜的差分逼近, 分别满足:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j}) + \frac{1}{3} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_{i-1,j}) &= \frac{1}{6} f^+(u_{i+1,j}) + \frac{4}{6} f^+(u_{i,j}) - \frac{5}{6} f^+(u_{i-1,j}) \\ \frac{1}{3} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i+1,j}) + \frac{2}{3} \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j}) &= \frac{1}{6} f^-(u_{i+1,j}) + \frac{4}{6} f^-(u_{i,j}) - \frac{5}{6} f^-(u_{i-1,j}) \end{aligned}$$

$i=1,2,\dots,N-1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \delta_y^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j}) + \frac{1}{3} \delta_y^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,j-1}) &= \frac{1}{6} f^+(u_{i,j+1}) + \frac{4}{6} f^+(u_{i,j}) - \frac{5}{6} f^+(u_{i,j-1}) \\ \frac{1}{3} \delta_y^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j+1}) + \frac{2}{3} \delta_y^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,j}) &= \frac{1}{6} f^-(u_{i,j+1}) + \frac{4}{6} f^-(u_{i,j}) - \frac{5}{6} f^-(u_{i,j-1}) \end{aligned}$$

$j=1,2,\dots,M-1$

边界上采用二阶偏斜格式:

$$\begin{aligned} \delta_x^{c,\varepsilon} f^+(u_{0,j}) &= (-3f^+(u_{0,j}) + 4f^+(u_{1,j}) - f^+(u_{2,j}))/2 \\ \delta_x^{c,-\varepsilon} f^-(u_{N,j}) &= (3f^-(u_{N,j}) - 4f^-(u_{N-1,j}) + f^-(u_{N-2,j}))/2 \\ \delta_y^{c,\varepsilon} f^+(u_{i,0}) &= (-3f^+(u_{i,0}) + 4f^+(u_{i,1}) - f^+(u_{i,2}))/2 \\ \delta_y^{c,-\varepsilon} f^-(u_{i,N}) &= (3f^-(u_{i,N}) - 4f^-(u_{i,N-1}) + f^-(u_{i,N-2}))/2 \end{aligned}$$

通过交替追赶方向可求得: $\frac{1}{\Delta x} \delta_x^{c,\pm\varepsilon} f^\pm(u_{i,j}), \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{c,\pm\varepsilon} f^\pm(u_{i,j})$.

3.5.3 UCGVC 格式在向量双曲守恒律方程中的推广

由于常系数 Hamilton-Jacobi 方程组和常系数双曲守恒律方程组可以化成一组标量方程^[22], 而常系数方程组所得到的结果, 又可以直接推广到非线性方程组的情形, 又因为在一维情形下, Hamilton-Jacobi 方程等价于双曲守恒律方程。所以讨论 Hamilton-Jacobi 方程组等价于讨论双曲守恒律方程组。

首先讨论常系数双曲守恒律方程组的情形:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3.5.3.1}$$

式中

$F = A \cdot U$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, A 为 $m \times m$ 阶的常系数矩阵。

由于式 (3.5.3.1) 是双曲型守恒律方程组, 故矩阵 A 有 m 个实特征值, 设它们是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 。则其对角矩阵为:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

矩阵 A 可以写为 $A = T^{-1} \Lambda T$ (3.5.3.2)

式中 T 和 T^{-1} 分别是左, 右特征向量组成的矩阵, 在这里, T^{-1} , Λ , T 都是常系数矩阵。

这样, 由 (3.5.3.2) 式, (3.5.3.1) 式可写为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + T^{-1} \Lambda T \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.5.3.3)$$

用矩阵 T 左乘以上式, 有:

$$\frac{\partial(TU)}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial(TU)}{\partial x} = 0 \quad (3.5.3.4)$$

引入向量 W , 令

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = TU \quad (3.5.3.5)$$

则可得

$$\frac{\partial(W)}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial(W)}{\partial x} = 0$$

写成矩阵形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = 0$$

写成分量形式:

$$\frac{\partial \omega_l}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial \omega_l}{\partial x} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m$$

这样就把常系数双曲守恒律方程组化成一组线性常系数的标量方程。对于单个的线性标量方程, 直接可以应用前面的方法求解。

由 3.5.1 节介绍的方法, 有

$$= -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^0 [F(U_j) - \varphi_j(F(U_j) - F(\bar{U}_j))] + \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_j \cdot ss_j \cdot A \cdot \delta_x^2 \bar{U}_j] \\ - \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_j \cdot A \cdot \delta_x^2 \bar{U}_j] + \frac{2\varepsilon}{\Delta x} \delta_x^2 [F(U_j) - \varphi_j(F(U_j) - F(\bar{U}_j))]$$

其中 $\bar{U}_j = (I - 2\varepsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2)U_j$.

上式给出了关于常系数双曲守恒型方程组的半离散化 UCGVC 格式, 不难看出, 它与关于标量方程的半离散化的 UCGVC 格式在形式上完全一样. 如果将标量方程中的 u 换成 U , f 换成 F , 对 $\varphi_j, ss_j, \delta_x^0, \delta_x^2$ 重新定义后, 即可得到常系数双曲守恒型方程组情况下的 UCGVC 格式.

下面讨论非线性双曲守恒律方程组的情形:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.5.3.6)$$

等价的可以写成如下非线性守恒形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

式中 $A(U) = \frac{\partial F}{\partial x}$

为通量 F 的 Jacobi 矩阵.

现在将有关常系数双曲守恒型方程组得出的结果直接推广到应用非线性双曲守恒律方程组的情形, 给出如下半离散化的 UCGVC 格式:

$$\frac{d\bar{U}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \delta_x^0 [F(U_j) - \varphi_j(F(U_j) - F(\bar{U}_j))] + \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^0 [\varphi_j \cdot ss_j \cdot A \cdot \delta_x^2 \bar{U}_j] \\ - \frac{1}{4\Delta x} \delta_x^2 [\varphi_j \cdot A \cdot \delta_x^2 \bar{U}_j] + \frac{2\varepsilon}{\Delta x} \delta_x^2 [F(U_j) - \varphi_j(F(U_j) - F(\bar{U}_j))]$$

第四章 在图像处理中的一些应用及数值实验

4.1 运动界面的追踪及其数值方法

在现实中存在着大量的移动界面问题 (moving boundary problems) 以及运动界面追踪 (interface tracking) 问题。人们最为关注的是移动边界和界面的位置等特征。因而, 模拟和追踪他们的轨迹和发展, 就成了解决这类问题的关键。最早处理这类问题的方法是格子类 (cell-type) 方法^[56], 在格子类方法中, 最为著名的有 PIC, MAC 和 FLIC 等。这类方法能给出界面的粗糙近似, 但不能给出更加细致的描述, 如界面的斜率、曲率的。而且计算时需要的存储量比较大, 特别是对于三维情形尤为突出。20 世纪 70 年代末, Hirt 和 Nichols 等提出 VOF (Volume of Fluid) 方法。VOF 方法是在整个流场内定义一个函数 C , 称之为 VOF 函数, 他满足如下 VOF 方程:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (4.1.1)$$

VOF 方法就是通过求解 VOF 函数, 来实现对运动界面的追踪。VOF 方法通过巧妙的界面重构, 可以给出自由面 (界面) 的更精确的描述。但是, 流体体积函数是离散量, 要比较准确的求解也是相当困难。另一种理想的做法是利用所谓的 Level Set 函数 $\varphi(\bar{x}, t)$ 代替流体体积函数 C 。让 φ 以适当的速度移动, 其零等值面就是物质界面。在任意时刻, 只要知道了 φ 然后求出其零点等值面, 就知道了此时的活动界面。Level Set 函数 φ 的控制方程为:

$$\varphi_t + F|\nabla\varphi| = 0 \quad (4.1.2)$$

该方程又叫做 Level Set 方程。对于方程 (4.1.2), F 一般是 $\nabla\varphi$ 的函数, 于是方程 (4.1) 变为 Hamilton-Jacobi 方程。即可以写为:

$$\varphi_t + H(\nabla\varphi) = 0 \quad (4.1.3)$$

1988 年, Osher 和 Sethian 给出了一些详细的解法^[47]。在后面的计算中, 使用本文提到的 Hamilton-Jacobi 方程的解法, 也取得了令人满意的效果。Level-Set 方法不需要显式的追踪界面, 克服了一般的波前追踪方法难于处理复杂的物质界面, 及其发生拓扑变形情况的弱点, 而且边界面的一些特征 (如法向、曲率等) 直接隐含在 Level Set 函数中便于精细的描述界面, 还易于向高维推广。已经被用来处理图像处理、集合、流体力学、工艺过程等许多方面的问题。在这方面以 Osher 为首的研究群体, Chen^[57], Fedkiv^[58], Merriman^[59], Sussman^[60], 以及 Sethian^{[61][62]} 和 Strain^{[63][64][65]} 等人作出了很多杰出的工作。

在下面的一节中, 使用运动界面追踪理论得到的一些方程, 用本文提出的算法进行具

体计算，展示 UCGVC 格式的计算效果及其在图像处理（运动界面追踪）方面的效果。

4.2 数值实验及图像处理中的应用

例一 考虑如下双曲守恒律方程及其 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

显然，该问题的精确解是 $u(x, t) = u_0(x - at)$ ，表到的意思是初始值（波）以速度 a 平行移动。该方程常常用来检验数值方法的效果。

在本例中，取 $a=1$ ， $u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ 来检验迎风紧致格式的效果。计算中，我们取

网格点 $N=201$ ， $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.25$ ， $t=0.2$ 。

图 4-1 是用 M-C (Mac Cormack) 格式计算的结果。

图 4-2 是用迎风格式计算的结果。

图 4-3 是用迎风紧致格式计算的结果。

从图可以看出，M-C 格式都在波前出现数值振荡，而迎风格式在激波处出现较大数值耗散，过度平滑了曲线。迎风紧致格式只是在波前出现稍微振荡，基本符合精确解。

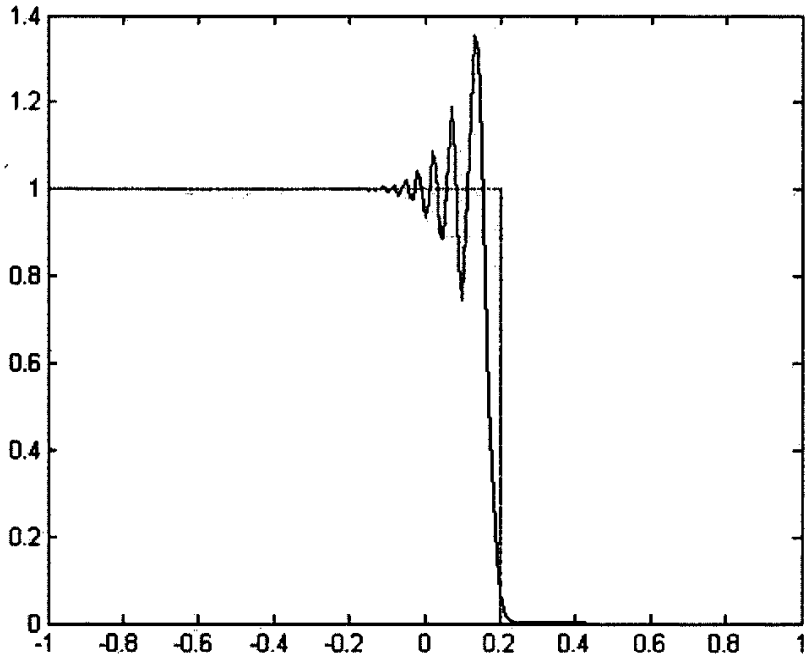


图 4-1

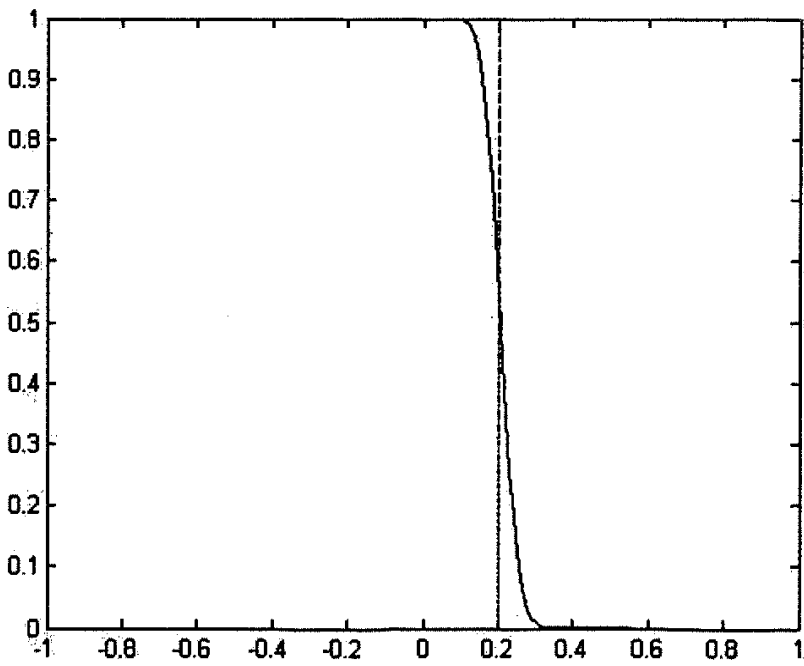


图 4-2

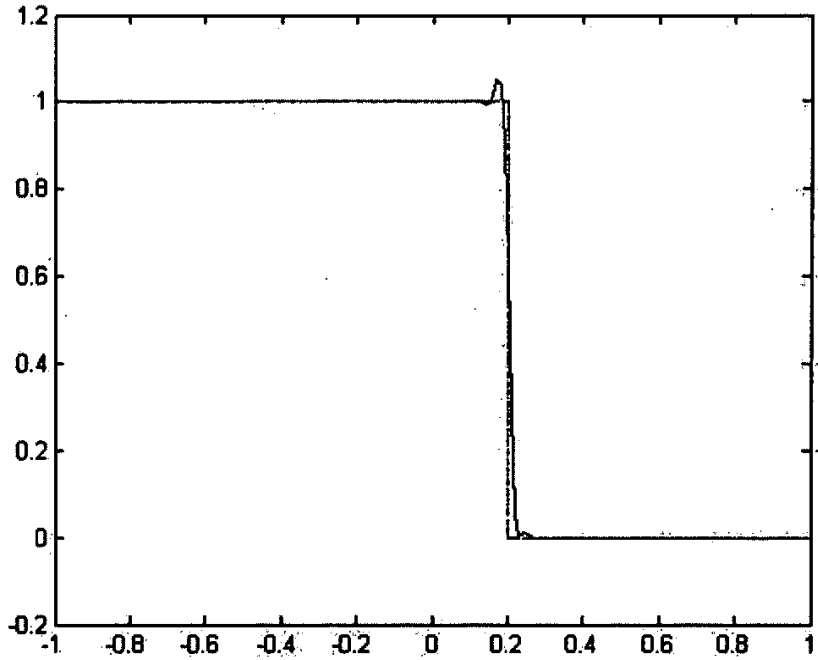


图 4-3

例二：考虑如下 Hamilton-Jacobi 方程及其初值问题

$$\begin{cases} \phi_t - c\sqrt{1+\phi_x^2} = 0 \\ \phi(x,0) = \phi_0(x) \end{cases}$$

及初值

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

该方程表示一幅平面图像（初值）沿法线方向以速度 c 运动计算中，取网格点 $N=201$,

$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{200}$ ，图 14 是 UCGVC 格式在 $t=0.2, 0.4, 0.6$ 时结算的图像。

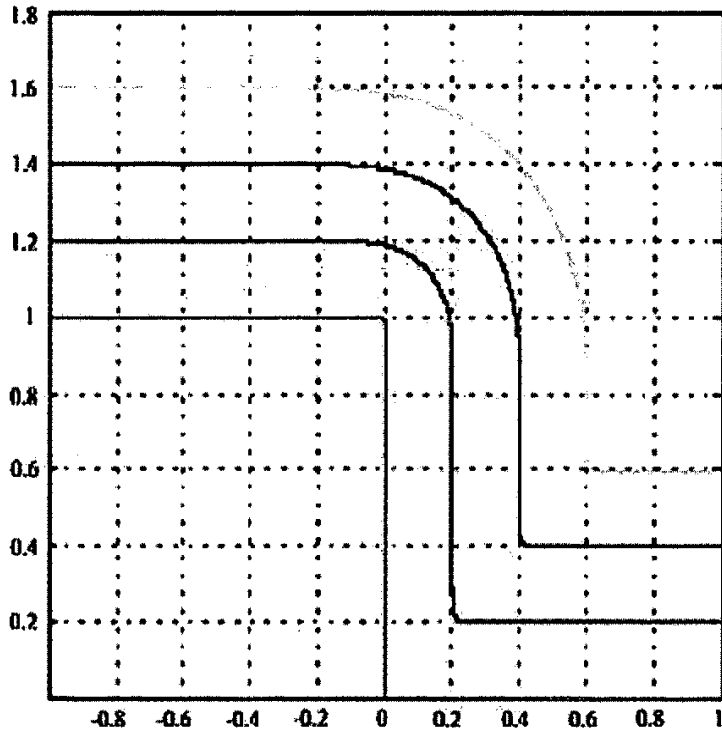


图 4-4

例三 求解如下 Hamilton-Jacobi 方程

$$\phi_t + \frac{(\phi_x + \alpha)^2}{2} = 0$$

给定初值

$$\phi(x, 0) = -\cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad t > 0;$$

$\frac{(\phi_x + \alpha)^2}{2}$ 为凸函数。当 $t \geq 1.5/\pi^2$ 时, H-J 方程的解的导数会出现间断。

计算中取 $\alpha = 1$, $N = 201$, $dt/dx = 1/400$.

图 4-5 为初始时刻图像;

图 4-6 时 $t = 0.5/\pi^2$ 时 UCGVC 图像;

图 4-7 是 $t = 1.5/\pi^2$ 是 UCGVC 图像;

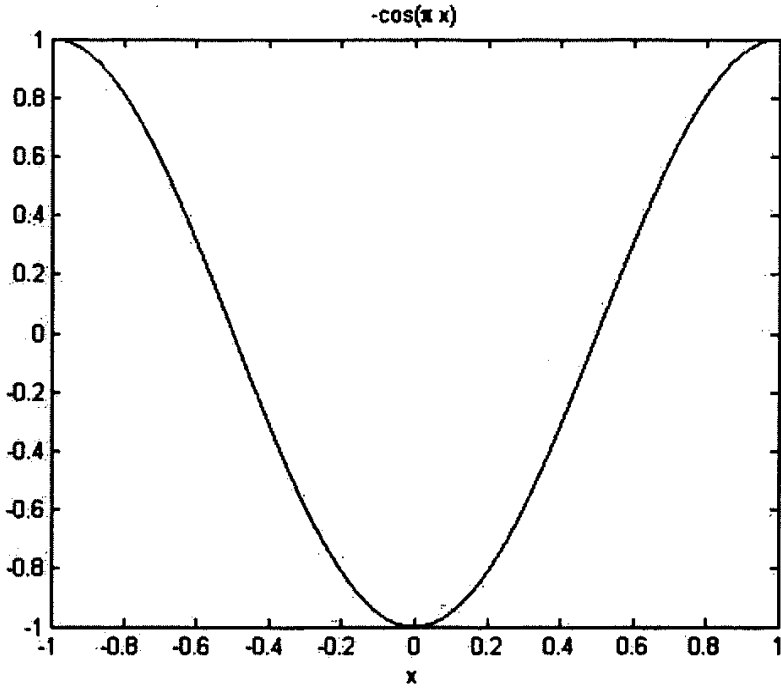


图 4-5

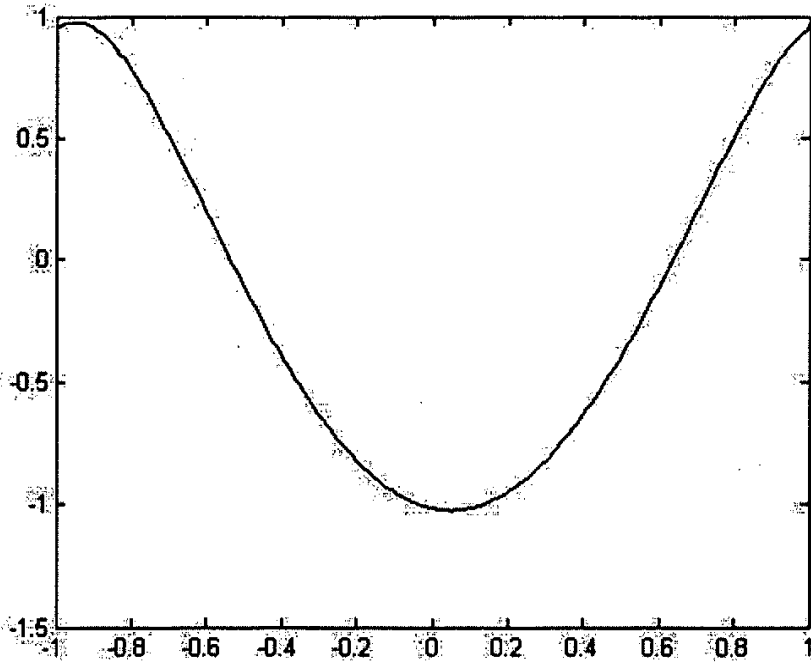


图 4-6

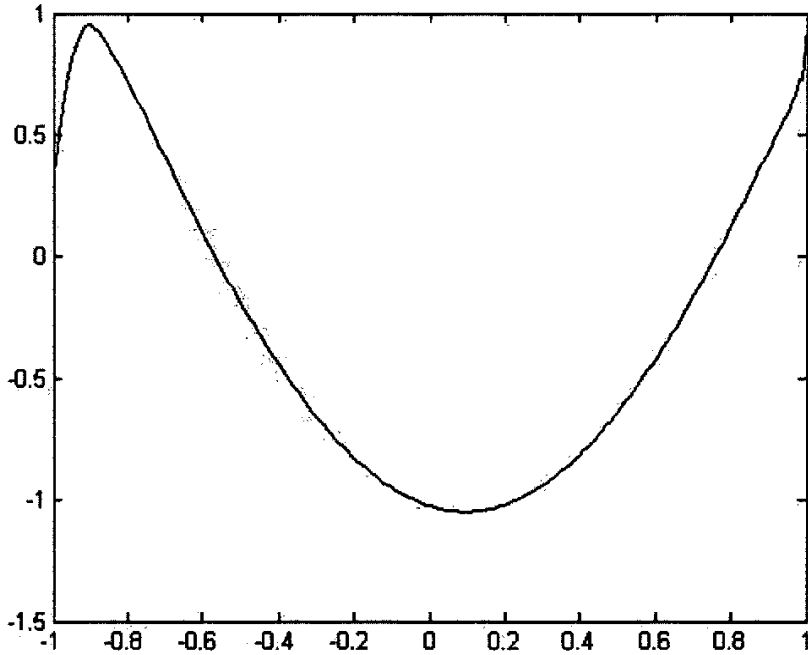


图 4-7

例四 求解如下 Hamilton-Jacobi 方程

$$\phi_t - \cos(\phi_x + 1) = 0$$

给定初值

$$\phi(x, 0) = -\cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad t > 0;$$

$\cos(\phi_x + 1)$ 为凹函数。当 $t \geq 1.5/\pi^2$ 时, H-J 方程的解的导数会出现间断。

计算中取 $\alpha = 1$, $N = 201$, $dt/dx = 1/400$ 。

图 4-8 是 $t=0$ 时刻图像;

图 4-9 是 $t=0.5/\pi^2$ 时 UCGVC 图像;

图 4-10 是 $t=1.5/\pi^2$ 时 UCGVC 图像;

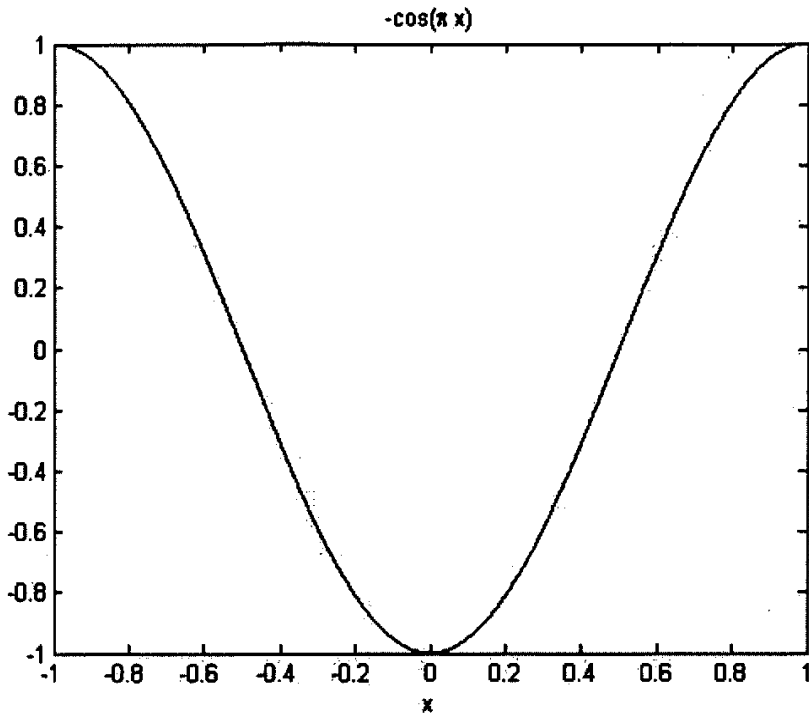


图 4-8

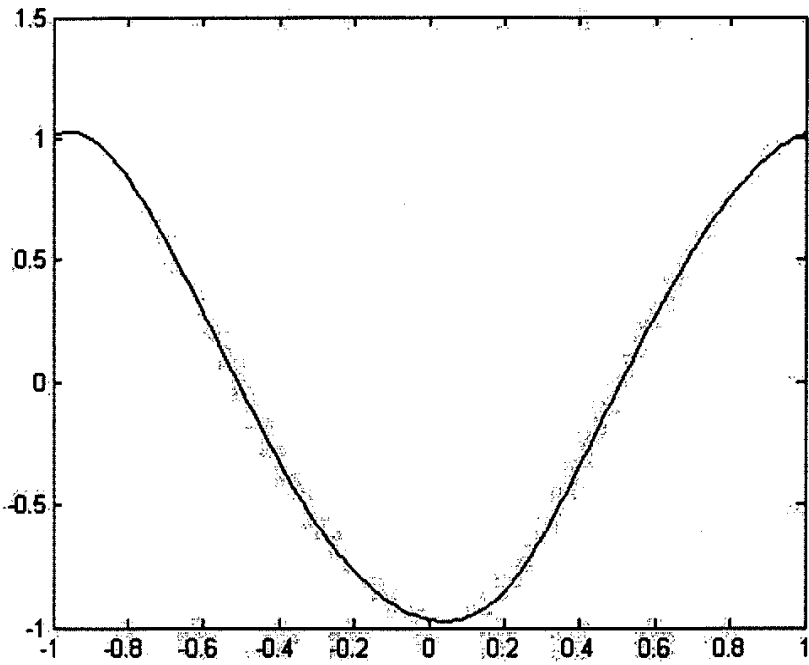


图 4-9

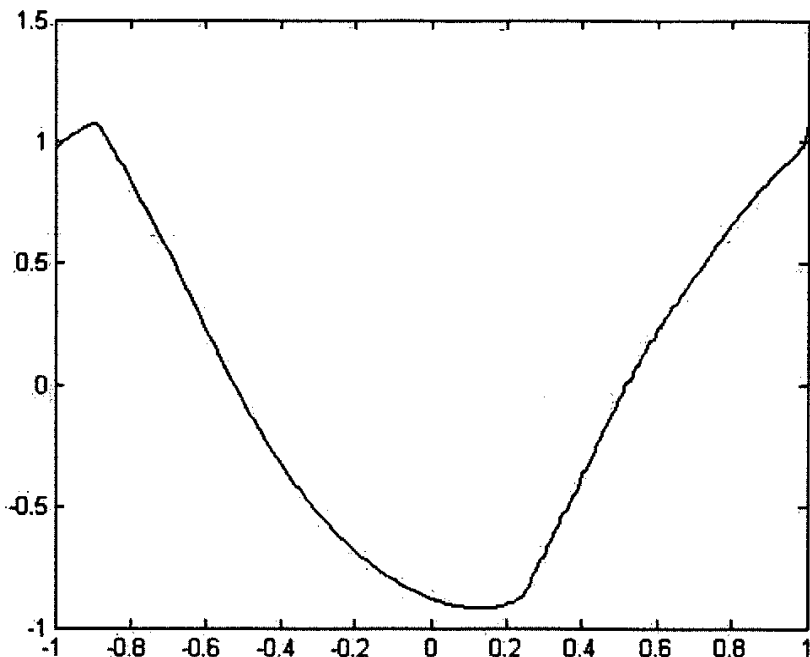


图 4-10

例五：考虑如下双曲守恒律方程及其 Cauchy 问题。

$$\begin{cases} u_t + (-yu)_x + (xu)_y = 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

取

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.5 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

为初始值条件。在这里，初值可以看作一个半径是 0.5 的车轮，那么方程就是一个模拟车轮旋转的问题，角速度为 1rad/s, 逆时针转动。

(1) 先看立体情况，取网格点 200×200 ， $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1/4$ ， $\frac{\Delta t}{\Delta y} = 1/4$ 。

图 4-11 是初始时刻的图像；

图 4-12 是迎风格式在 $t=0.2$ 时刻图像；

图 4-13 是 UCGVC 格式在 $t=0.2$ 时刻图像；

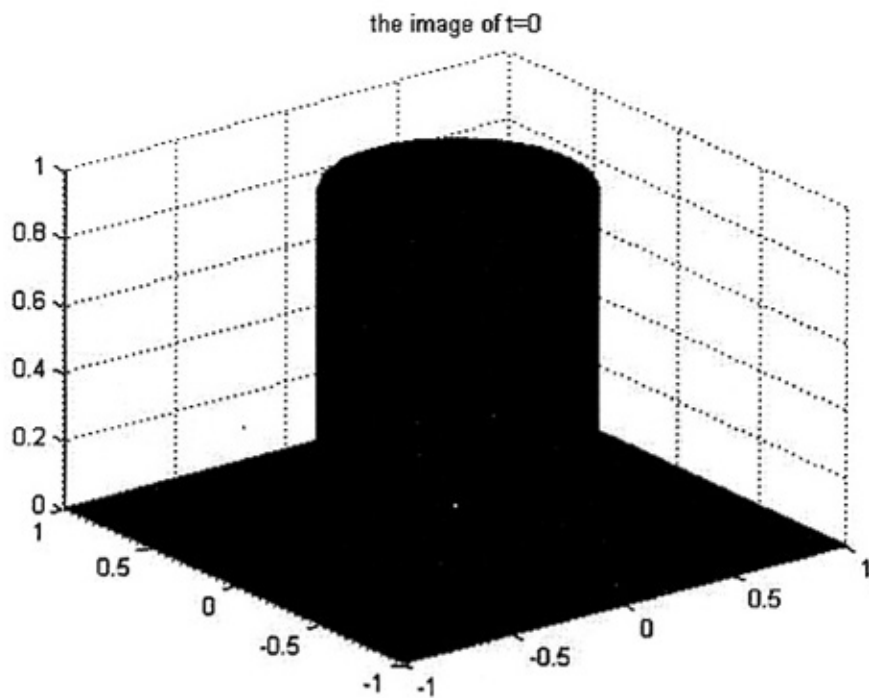
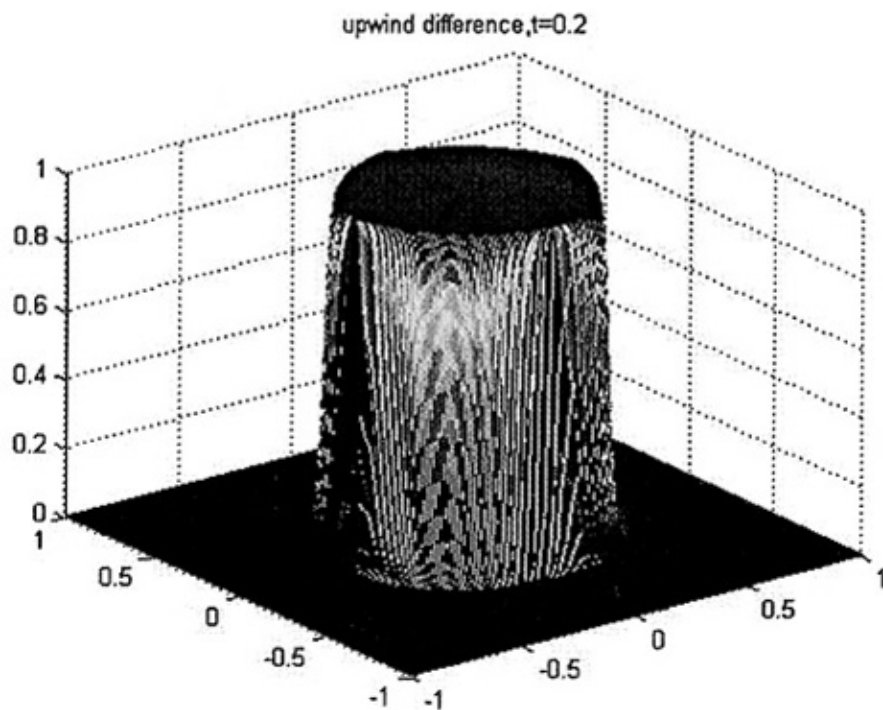


图 4-11



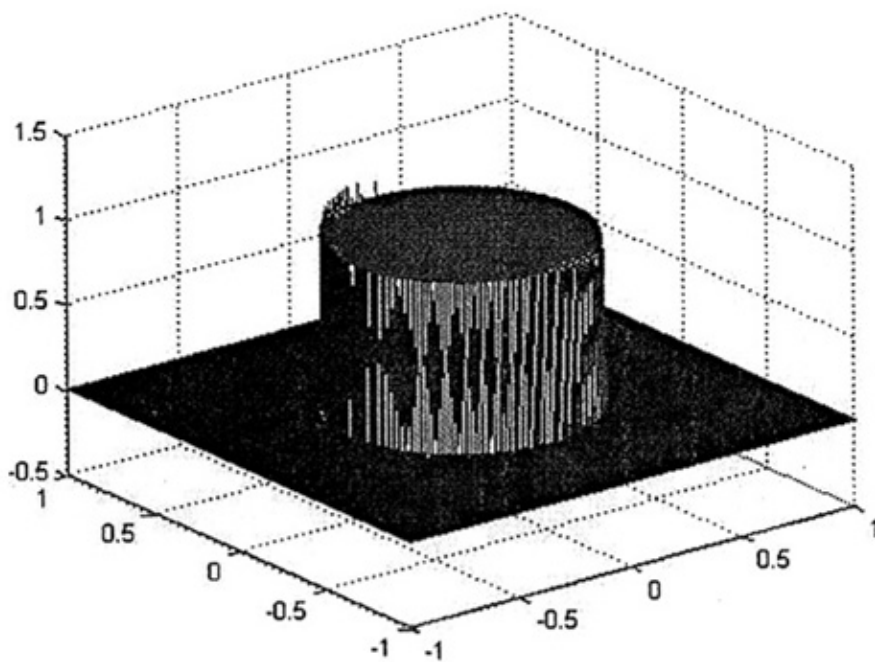


图 4-13

(2) 再来看平面图

图 4-14 位初始时刻图像;

图 4-15 是迎风格式在 $t=0.2$ 时刻图像

图 4-16 是 UCGVC 格式在 $t=0.8$ 时刻图像;

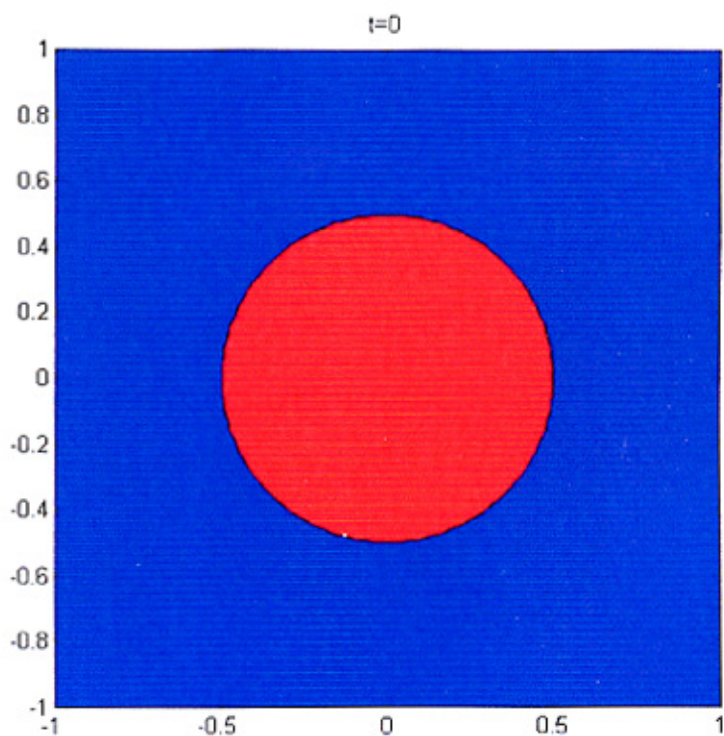
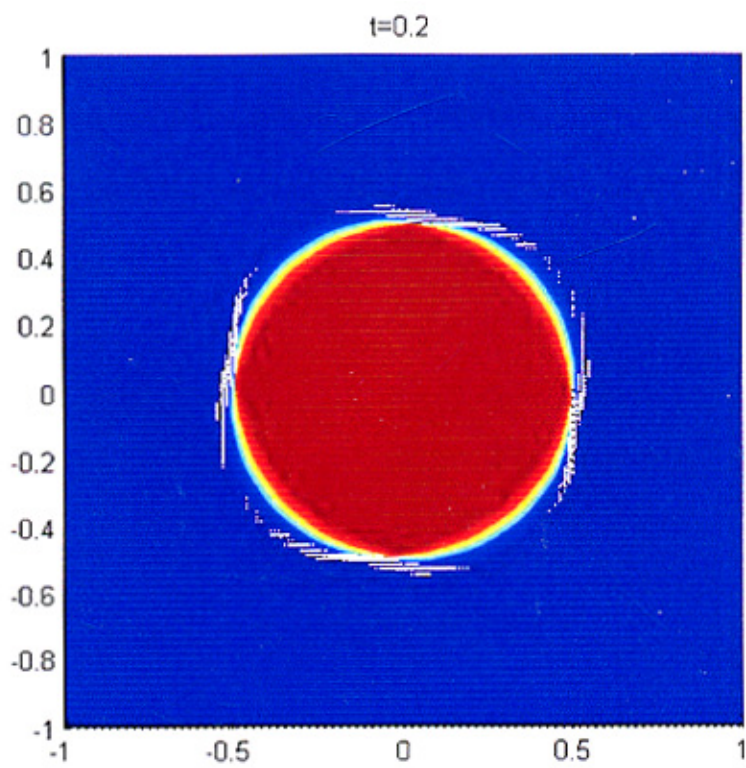


图 4-14



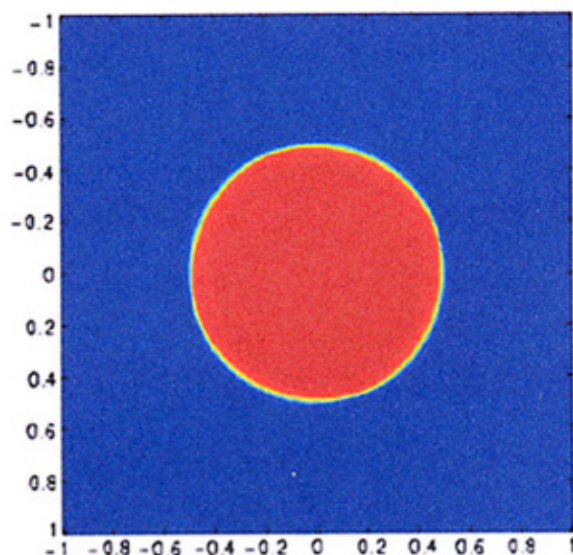


图 4-16

例六 考虑如下 Hamilton-Jacobi 方程及其初值问题。

$$\begin{cases} \phi_t + c\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2} = 0 \\ \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \end{cases}$$

在本例中

$$c = 1, \phi_0(x, y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(|x| + |y| - 1), \text{ 其中 } -1 \leq x, y \leq 1$$

作为初始条件。该方程表示一幅立体图像（初值）沿法向以速度 c 向下运动，取网格点

$$200 \times 200, \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1/4, \frac{\Delta t}{\Delta y} = 1/4。$$

图 4-17 是初始时刻图像；

图 4-18 是 UCGVC 在 $t=0.3$ 时刻图像

图 4-19 是 UCGVC 在 $t=0.6$ 时刻图像

图 4-20 是 UCGVC 在 $t=0, 0.3, 0.6$ 时图像

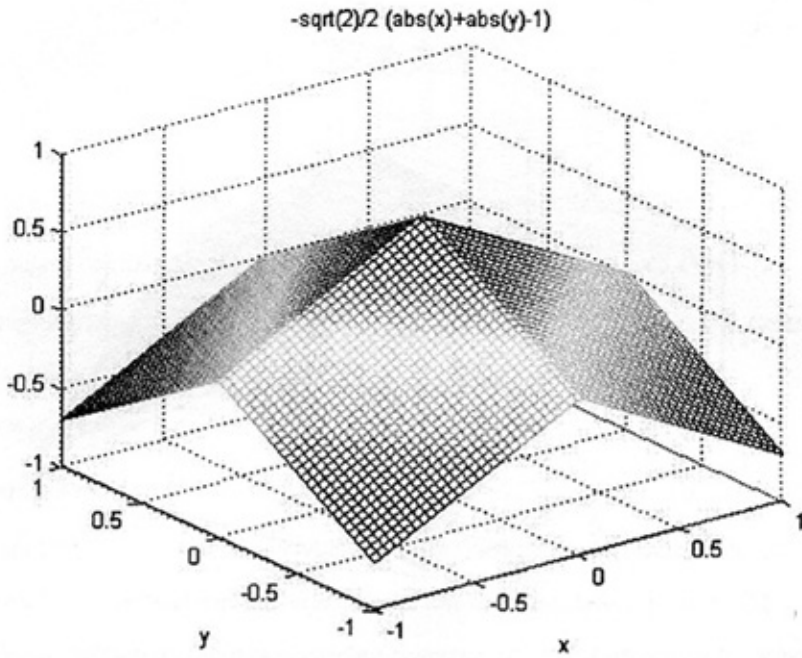


图 4-17

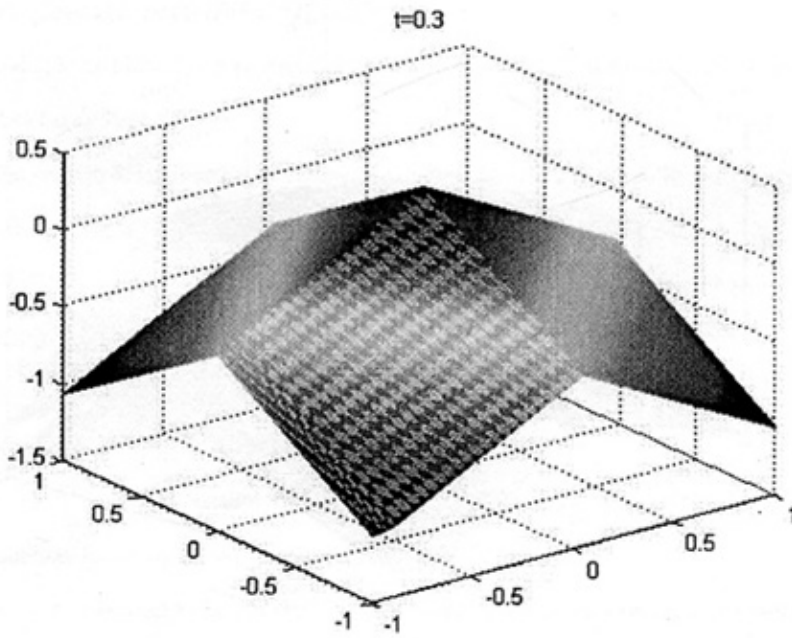


图 4-18

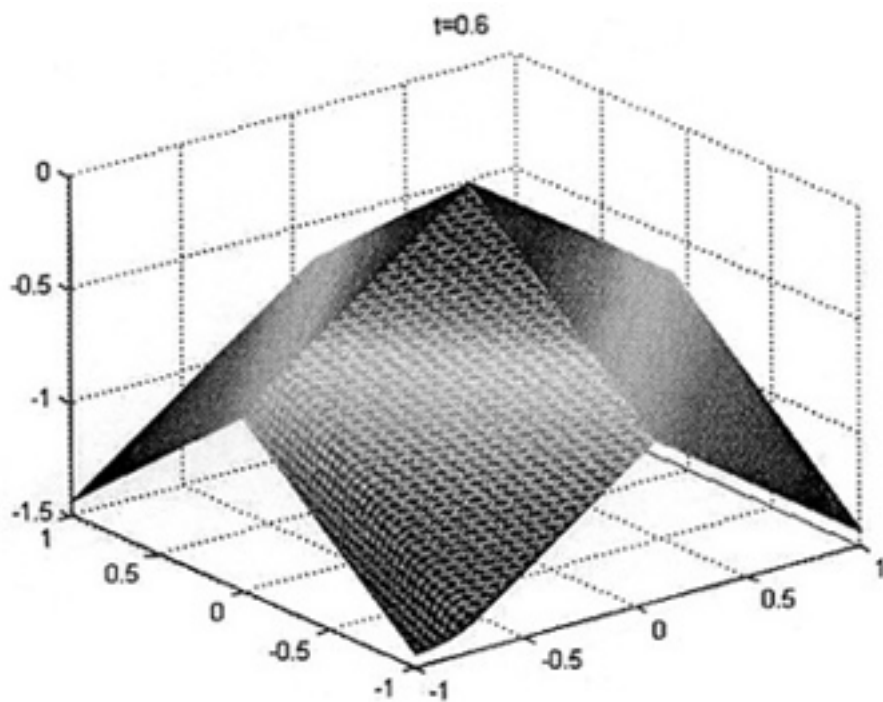


图 4-19

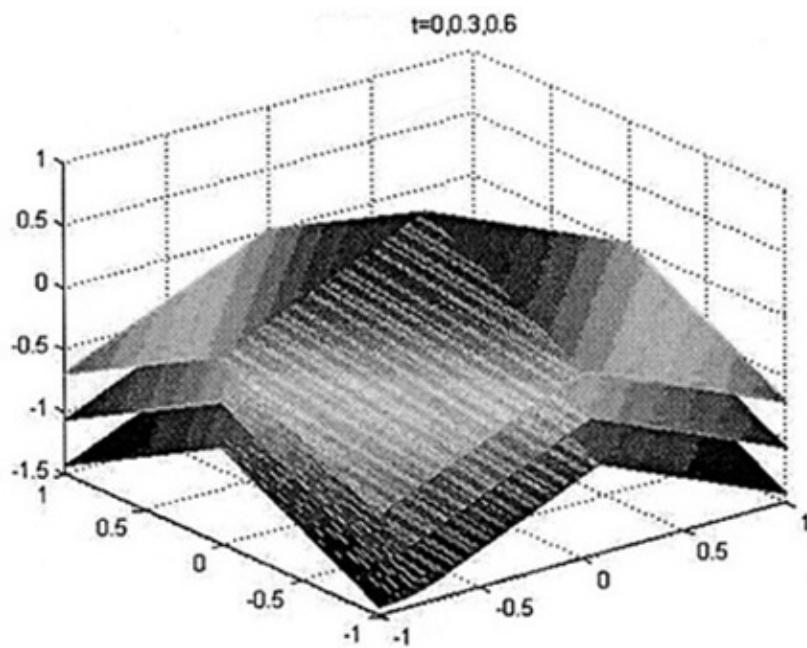


图 4-20

参考文献

- [1] Qingyong Zhu, C.K.Chan. High order Upwind Compact Scheme and Simulation of Turbulent Premixed V-Flame. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*,2005,49:701-720.
- [2] Qingyong Zhu, Yi Li. An Upwind Compact Approach with Group velocity Control For Compressible Flow Fields. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 2004,44:463-482.
- [3] 李祥贵, 陈光南, 蔚喜军, 求解 Hamilton-Jacobi 方程的有限元方法, 应用数学学报, 2002,2:63-271。
- [4] Evans L C, Spruck J. Motion of level Set via Mean Curvature I. *J.Diff. Germ*,1991,33:635-681.
- [5] Lions P L. Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations.London:pitman,1982.
- [6] Sussman M,Fatemi E. An efficient interface-preserving Level Set Redistancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow. *SIAM J.Sci.Comput*,1999,20:1165-1192.
- [7] Crandall M G, Lions P L. Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equation. *Math.Comp*.1984,43:1-19.
- [8] Lafon F,Osher S. High-order Two Dimensional Nonoscillatory Methods for Solving Hamilton-Jacobi Scalar equations. *J.Comput.Phys*,1996,123:235-253.
- [9] Jin S, Xin Z P. Numerical passage from systems of conservation laws to Hamilton-Jacobi equation and relaxation schemes. *SIAM J.Numer.Anal*, 1998,35(6):2385-2404.
- [10] Osher S, Shu C-W. High-order Essentially Non-oscillatory Schemes for Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM J.Numer.Anal*.1991,28:907-922.
- [11] Corrias L,Falcone M,Natalini R. Numerical Schemes for Conservation Laws via Hamilton-Jacobi equations. *Math.Comp*.1995,64:555-580.
- [12] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys*, 1992,13:16-42.
- [13] Rai M M. Moin P. Direct simulation of turbulent flow using finite difference schemes. *J.Comput. Phys*, 1988,96(1):15-53.

- [14] 马延文, 傅德薰, 群速度直接控制四阶迎风紧致格式, 中国科学 (A 辑), 2001,31: 544-561.
- [15] 朱庆勇, 马延文, 求解双曲型守恒律方程的高精度迎风紧致群速度控制法, 计算物理, 1988,15(5):531-536.
- [16] 朱庆勇, 李岳生, 数值求解 Euler 方程的 UCGVC 差分格式的注记, 计算数学, 2000,2:209-218.
- [17] 朱庆勇, 一个求解双曲型守恒律方程的高分辨率 GVC 格式, 高等学校计算数学学报, 2000,2:169-174.
- [18] Lions P L, Souganidis P E. Convergence of MUSCL and Filtered Schemes for Scalar Conservation Laws and Hamilton-Jacobi equations. *Numer. Math*, 1995,69:441-470.
- [19] 李祥贵, 陈光南, 江松, 解 Hamilton-Jacobi 方程的无震荡局部加密方法. 数值计算与计算机应用, 2001,3:218-224.
- [20] 李祥贵, 刘为清, 利用 Hamilton-Jacobi 方程求解双曲守恒律组的有限元法, 石油大学学报 (自然科学版), 2002,1:94-99.
- [21] 田宝林, 傅德薰, 马延文, 李新亮, 迎风紧致格式求解 Hamilton-Jacobi 方程, 计算物理, 2003,2:117-122.
- [22] 张涵信, 沈孟育, 计算流体力学-差分方法的原理和应用, 国防工业出版社, 2003.
- [23] P.D.Lax. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations. *Comm. Pure Appl. Math*, 1954,7:159-193.
- [24] S.K.Godunov. A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations to Fluid Dynamics. *Mat. Sb*, 1959,47:217-290.
- [25] P.D.Lax and B.Wendroff. Systems of Conservation Law. *comm. Pure Appl. Math*, 1960,13:217-237.
- [26] 傅德薰, 流体力学数值拟, 国防工业出版社, 1993.
- [27] Moretti F. Three Dimensional Supersonic Steady Flows With any Number of Imbedded Shocks. *ALAA Paper*, 1974,10:74:90.
- [28] 孝康, 刘儒勋, 蒋伯诚, 计算流体力学, 国防科学技术出版社, 1989.

- [29] Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 1983, 14: 357-393.
- [30] C. W. Shu. TVB Uniformly High-order Schemes for Conservation Laws. *Math. Comp.*, 1987, 49: 105-21.
- [31] Harten A. On high-order accurate interpolation for non-oscillatory shock capturing schemes in oscillation theory. *Computation and Methods of Compensated Compactness*, C. Dafermos et al eds, 1986, 71-105.
- [32] Harten A, Engquist B, Osher S and Chakravathy R. Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. *Applied Numerical Mathematics*, 1986, 2: 347-337.
- [33] Harten A and Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. *SIAM J. Numer. Ana.*, 1987, 24: 279-309.
- [34] Harten A. ENO schemes with subcell resolution. *J. Comput. Phys.*, 1989, 83: 148.
- [35] Harten A, Engquist B, Osher S and Chakravathy R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. *J. Comput. Phys.*, 71, 131: 231-303, 3-47, 1987, 1997.
- [36] Liu X-D, Osher S. Convex ENO High order multi-dimensional schemes without field by field decomposition or staggered grids. *J. Comput. Phys.*, 1998, 142: 304-338.
- [36] Shu C. W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially nonoscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. *NASA/CR-97-206253, ICASE Report*, 65, 1997.
- [37] Shu C. W. *High Order ENO and WENO Schemes*, in *High Order Methods for Computational Physics Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, 1999.
- [38] Zhang Han-Xin, Zhuang Feng-Gan. On non-oscillatory and parameter-free finite difference scheme and its application to numerical solution of Euler and Navier-Stokes equations. *International Symposium on Computational Fluid Dynamics. Nagoya Japan*, 1989.
- [39] Wu Hua-mo, New Accurate High resolution TVD Schemes-Analysis and Applications. *International Symposium on Computational Fluid Dynamics. Nagoya Japan*, 1989.
- [40] Ma Yan-wen and Fu De-xun. Numerical solutions of compressible flow with compact scheme. *AIAA Paper*, pages, 1987-123.
- [41] 朱庆勇, 余怀忠, 马延文, 陶亮, 迎风紧致格式与热流计算, 数值计算与计算机应用,

- 2001, 9 (3): 193-200.
- [42] 朱庆勇, 马延文, 数值求解 Navier-Stokes 方程的迎风紧致差分格式, 计算力学学报, 2000, 17(4):379-384.
- [43] 朱庆勇, 高精度迎风紧致差分格式与热流计算的研究, 计算力学学报, 1999,19(1):78-82.
- [44] Nagao M. Edge preserving smoothing. *CGIP*; 1979,9:394-407.
- [45] Rudin L I. *Image numerical analysis of singularities and shock filter Ph. D dissertation. Caltech, Pasadena, California, 1998.*
- [46] Koenderink J J. The structure of image. *Biol. Cybern*, 1984,50:363-370.
- [47] Osher S, Sthian J A, Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988,79:12-49.
- [48] 陈恕行, 现代偏微分方程导论, 科学出版社, 2005.
- [49] 计算流体力学, 傅德薰, 马延文, 高等教育出版社, 2002.
- [50] Shu .C.W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing scheme. *J. Comput. Phys*, 1988,77:995-1011.
- [51] Shu .C.W. Total-variation-diminishing time discretizations. *SIAM J Sci. Statist. Comput*, 1988,9:1073-1084.
- [52] Swanso R C. On Central-Difference and Upwind Schemes. *J.comp.Phys*, 1992,101:292-306.
- [53] 陆金甫, 关冶, 偏微分方程数值解法 (第二版), 清华大学出版社, 2004.
- [54] Bernardo Cockburn, C. W. SHU. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations. *SIAM J. Numer. ANAL*, 1994,31(3):607-627.
- [55] J. Goodman, R. Leveque. On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws. *Math. Comput*, 1985,45:15-21.
- [56] Harlow F H, Welch J F. Numerical calculations of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluid*, 1965,8:2182-2189.
- [57] Chen S. Merriman B. Osher S and Smereka P. A simple level set method for solving Stefan problems. *J comput. Phys*, 1997,135:8-29.
- [58] Fedkiw R P, Aslam T, merriman B and Osher S. A non-oscillatory eulerian approach to I nterfaces multi-material flows (the ghost fluid method). *J. Comput Phys*, 1999,152:457-492.

- [59] Merriman B, Bence J K and Osher S. Motion of multiple junctions: a level set approach. *J. Comput. Phys*, 1994, 112:334.
- [60] Sussman M, Smereka P and Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *J. Comput. Phys*, 1994, 114:146-159.
- [61] Sethian J A, Strain J. Crystal growth and dendritic solidification. *J. Comput. Phys*, 1992, 98:231.
- [62] Barth T J, Sethian J A. Numerical scheme for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains. *J. Comput. Phys*, 1998, 145:1-40.
- [63] Strain J. Semi-lagrangian methods for level set equations. *J. Comput. Phys*, 1999, 151:498-533.
- [64] Strain J. Tree methods for moving interfaces. *J. Comput. Phys*, 1999, 151:616-648.
- [65] Strain J. Fast tree-based redistancing for level set computations. *J. Comput. Phys*, 1999, 152:664-686.

致谢

在我攻读硕士学位两年的时间里，我有幸遇到朱庆勇教授作为我的导师。无论在生活上，还是在学习上，朱老师都非常关心和鼓舞我，给了我极大的动力；朱老师平易近人，思维敏捷，幽默风趣，犹如我的大哥哥；朱老师严谨求实，一丝不苟的治学风格将是我一生的楷模。在我的论文写作过程中，因为有朱老师倾注了大量心血，无微不至的关心、帮助。我才能完成这么艰巨的任务。在这里，我要衷心的说一声：谢谢您，朱老师！

在我的学习期间，我还得到了陈仲英教授的教育和指导，聆听陈老师的讨论课，让我获益匪浅。同时，我还得到了许跃生教授、杨力华教授、关履泰教授、邹青松副教授的教育和指导。对此，本人也表示深深的感谢！

我的师母李冬梅老师以及朱教授的岳父、岳母在生活上和学习上对我是非常的关心，时常跟我谈心，教导了我很对做人处事的道理，在这里，我非常感谢！

阳文辉师兄、赵昌安师兄、张伟峰师兄、刘飞雷师兄、石玉师姐、李淑龙师姐、张连伟师姐、王雅君师姐以及其他的同学们，在我的学习和生活中给了我极大的帮助，丰富了我读研究生的生活。尤其是阳文辉师兄和张伟峰师兄，在我的论文写作过程中给了很大的帮助。能和他们相识、相知，比获得一纸文凭更弥足珍贵，在此，对他们表示深深的谢意，真诚的祝福他们读博顺利！

在我的读硕期间，我的父母，姐姐，亲人，女朋友都给予了我很大的理解和支持，我非常感谢他们！