



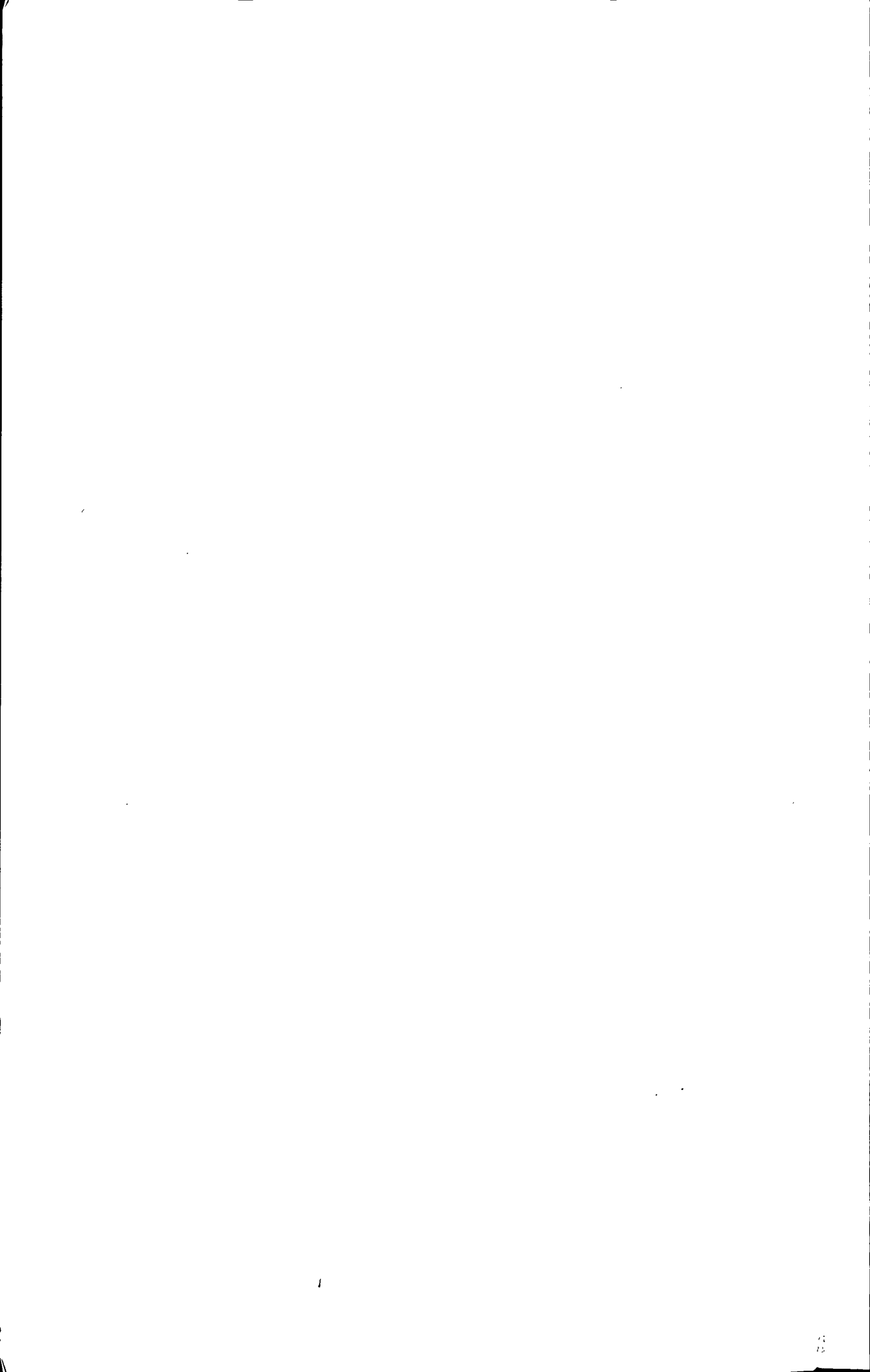
摘要

随着通信技术的不断发展和信息量的不断增加,高速串行总线的应用已经成为高速通信技术的主流。在串行系统中,抖动是影响系统性能的重要因素,因此,对抖动的研究是现代通信技术中的重要课题。

抖动是由多种原因造成的,因而抖动的成分也是多种多样的。对抖动各成分的分析 and 分离,不但能快速估算误码率,考察系统性能,而且能帮助设计师发现抖动源头,进而减少或消除抖动,优化系统。本文是在分析了已有的抖动分离方法的基础上,设计了一套基于 VC 实现的抖动分离算法,该算法能够准确地将时钟和数据中的各抖动成分分离出来。文章重点介绍了时钟的时频域分离模块,包括了该模块算法实现的步骤、原理以及相应的关键技术。

本文所描述的分​​离算法已经通过整体联调阶段,分离效果良好,实现了抖动成分的准确分离。

关键词: 串行系统 抖动分离 VC 时频域



Abstract

With the continuous development of communication technology and the increasing amount of information, the application of high-speed serial bus has become main stream of high-speed communications technology. Jitter plays an important role in affecting the performance of serial system; therefore, the research on jitter is an important issue of modern communication technology.

Jitter is caused by a variety of reasons, and thus the components of jitter are varied. Analysis and decomposition of jitter components can not only quickly estimate the bit error rate and observe the system performance, but help designers finding the sources of jitter, thereby reducing or eliminating jitter, optimizing the system. Basing on the analysis of existing jitter decomposition methods ,this article designed a set of VC-based jitter decomposition algorithms ,which can separate varied jitter components from clock and data precisely. The emphasis is put on the time-frequency domain decomposition module, including the procedure, the principle and the corresponding key technologies of time-frequency domain algorithms.

The jitter decomposition algorithms given in this paper have undergone the stage of overall debug, and realize the precise decomposition of jitter components.

Keyword: Serial System Jitter Decomposition VC Time-frequency Domain



目录

第一章 绪论	1
1.1 课题的背景和意义.....	1
1.2 抖动研究的发展及现状.....	2
1.3 论文的组织结构.....	2
第二章 抖动的定义	3
2.1 抖动定义中的几个概念.....	3
2.1.1 重要时刻.....	3
2.1.2 理想位置.....	4
2.1.3 短期偏差.....	4
2.2 时钟抖动.....	5
2.2.1 相位抖动.....	5
2.2.2 周期抖动.....	6
2.2.3 周期间抖动.....	7
2.2.4 三者之间的关系.....	7
2.3 数据抖动.....	8
第三章 抖动的分类和分析	9
3.1 抖动的分类.....	9
3.1.1 随机抖动 RJ.....	10
3.1.2 确定性抖动 DJ.....	11
3.1.3 周期性抖动 PJ.....	11
3.1.4 数据相关抖动 DDJ.....	13
3.1.5 有界不相关抖动 BUJ.....	16
3.1.6 总抖动 TJ.....	18
3.2 抖动的分析.....	19
3.2.1 抖动统计.....	19
3.2.2 直方图.....	21
3.2.3 眼图.....	22
3.2.4 浴盆曲线.....	23
3.2.5 频谱图.....	25
第四章 抖动的分离	27
4.1 时钟的低频方法.....	27
4.1.1 数据获取方法.....	27

4.1.2 快速傅里叶算法.....	28
4.1.3 窗函数.....	39
4.1.4 提取 PJ,RJ.....	50
4.1.5 验证方法的正确性.....	53
4.2 时钟的高频方法.....	56
4.2.1 数据获取方法.....	56
4.2.2 高频方法的原理.....	58
4.3 数据的抖动分离.....	61
4.3.1 带标记的已知数据.....	61
4.3.2 带位时钟的随机数据.....	63
4.3.3 不带标记的随机数据.....	64
第五章 抖动的减少和消除.....	65
5.1 抖动的成因.....	65
5.2 减少抖动源的影响.....	65
5.2.1 减少电磁干扰的影响.....	65
5.2.2 减少串扰的影响.....	66
5.2.3 减少反射的影响.....	66
第六章 总结与展望.....	69
致谢.....	71
参考文献.....	73
读研期间研究成果.....	75

第一章 绪论

随着信息量的增多和信息交换速度的提升，如今串行总线的应用已成为高速通信技术的主流，而抖动是影响串行互连性能的重要因素，所以对抖动的分析和研究在现代通信中有着非常重要的作用。

1.1 课题的背景和意义

信息获取、信息处理、信息储存和信息发送是现代信息系统的四大部分，其中信息处理部分是核心，其他部分都要与之发生信息交换。随着信息交换量的增多和交换速度的提升，人们提出了总线的概念，即信息处理单元和其他单元都时分共用一条总线，从而简化了工程设计，增加了可扩展性。

总线可分为并行总线和串行总线，并行总线中，所有的数据位都各自有一条传输线；串行总线中，数据在同一条传输线上按位传输。串行总线传输一位数据的时间，并行总线能够传输数位，从原理上看，似乎并行总线优于串行总线。所以一直以来，并行传输是提高数据传输速度的重要手段。

然而随着通信技术的发展和信息量的不断增加，传统的并行总线传输遇到了瓶颈。一方面，由于并行传输方式是用同一个时序发送和接收数据，因此过高的时钟频率将使数据的时序与时钟难以合拍，布线长度上的很小偏差，也会让数据与时钟错位；另一方面，时钟频率过高，很容易引起各信号线之间的串扰，出现传输错误。

在这种情况下，设计师们转而从高速串行总线方向寻求出路。高速串行总线有很多优点：采用自同步时序系统，不提供专门的时钟通道，而是从数据中提取同步时钟，传输速率不再受延迟的束缚；点到点单向拓扑，阻抗匹配更简单，因而减少了反射；传输差分信号，抗干扰能力强；不需要同步时钟，减少了芯片管脚数，节省 PCB 的空间。由于高速串行总线具有这些优势，所以它在通信、计算机、网络和家电等领域得到了广泛的应用，高速串行通信技术正逐渐成为高速接口技术的主流。主要的串行总线有 PCI Express、USB、串行 ATA(SATA)和串接 SCSI(SAS)^[1]等。

相比于并行总线，高速串行总线的数据传输性能确实有很大进步，但是随着数据率的不断提高，任何微小的变化都会影响系统的传输性能。如数据率达到 10Gbps 时，一位数据的宽度只有 100ps，这时数据跳变沿上的微小时序偏差就可能导致码型的误判，造成误码，这种时序偏差就是抖动。

由于抖动与误码率有关，抖动越大，系统的误码就越严重，因此它已经成为影响高速串行总线性能的重要因素，而对抖动的研究，也越来越受到人们的重视。

1.2 抖动研究的发展及现状

在高速串行数据通信中,抖动的研究是一个关键问题。一方面,抖动的量化参数可以作为评估系统性能的重要指标;另一方面,抖动的分解能够帮助人们找到各种抖动成分的根源。基于以上需要,人们对抖动开始了长期和大量的研究。

早期的抖动研究中,人们通常把抖动当作理想信号上的幅度和相位噪声。由于是从噪声的角度出发,所以人们将信号作为载体,研究各种抖动现象,发现了很多抖动特性并提出了很多测量技术。

后来经过大量研究,人们发现总抖动是由各种不同的抖动成分组成。由于成因的多样性,各种抖动成分都各自有不同的特性。因此人们根据这些特性,对不同抖动成分建立了不同的模型系统,将总抖动中满足某些模型系统的成分一一分解,最终就能确定总抖动的不同成分。通过抖动成分的分解,不仅能够快速估算误码率(BER),而且能够考察抖动的成因和源头,帮助设计师们减少或消除抖动,完善系统性能。

目前抖动的分析方法主要有如下几种:抖动的时域分析、抖动的频域分析、抖动的统计直方图分析、眼图分析等。

1.3 论文的组织结构

本课题是在对抖动的深刻理解基础上,根据不同抖动成分的特性,完成了抖动分离软件的设计和开发,该软件与相应的硬件结合,能够测量和分析时钟以及数据中的抖动。本文主要介绍软件中的几种抖动分离方法,重点是对时钟抖动的时频域处理方法的介绍,论文共分以下几个部分:

第一章:绪论,简要介绍了抖动的研究在现代通信系统中的重要性;

第二章:简要介绍了抖动的定义,以及抖动分析中的一些重要概念;

第三章:介绍了抖动的分类以及分析方法,对于理解后面提出的抖动分离方法非常重要;

第四章:详细介绍了通过时频域分离时钟抖动的两种方法,分别介绍了两种方法的步骤、原理以及相应的关键技术,给出了验证结果,简要介绍了数据抖动的分离方法;

第五章:介绍了抖动的成因和消除抖动的方法;

第六章:总结与展望,总结了设计中的一些经验,并展望了抖动研究的发展趋势。

第二章 抖动的定义

对抖动的定义，不同的国际组织各有不同：

INCITS 发布的 MJSQ^[2]文档中，抖动被定义为：“信号到达某一固定幅度的时刻相对于参考时刻的时间偏差”。

ITU-T G.810^[3]标准中，抖动被定义为：“定时信号在关键时刻上相对于其理想时间位置的短期变化（其中‘短期’是指这些变化的频率都大于或等于 10Hz）”。

综上所述，抖动可以定义为：将一个特定的理想信号作为参考信号，待测信号在重要时刻上与参考信号上理想位置的短期时间偏差。如图 2.1 所示：

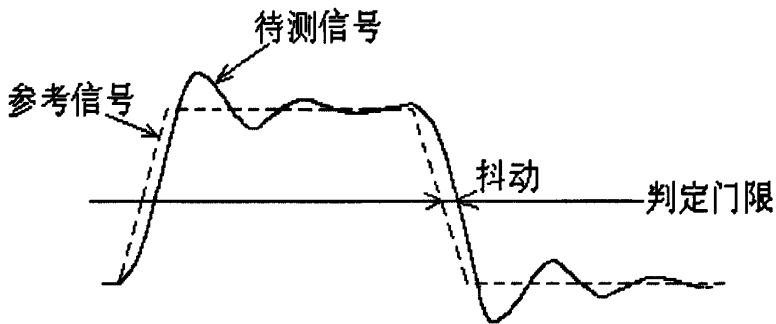


图 2.1 抖动的图示

2.1 抖动定义中的几个概念

在抖动的定义中，有几个概念需要明确：重要时刻、理想位置、短期偏差，它们是理解抖动的关键。

2.1.1 重要时刻

数字信号逻辑状态的判断机理：以 0-1 二值逻辑为例，选定一个电平作为门限，称为参考电平或判定门限（如图 2.1 中所示），用一定频率的采样时钟对信号进行检测，当时钟脉冲到达时，判断当前信号的电平，如果大于门限并保持一定时间，则将逻辑状态判断为 1，反之，如果小于门限，则判断为 0。

由此可以看出，如果数字信号的电平跨越门限的时刻迟于时钟脉冲，那么就可能发生逻辑状态的误判。因此抖动定义中的“重要时刻”是指数字信号的逻辑状态切换的时刻，或者说是数字信号跨过判定门限的时刻。

判定门限的选定直接影响了信号切换的时刻，通常将电压平均值作为判定门限，上升沿和下降沿都以此电平作为门限；有时也对上升沿和下降沿分别使用不同的判定门限。

对于高速信号来说,电平的切换是受切换速度和上升时间制约的模拟事件,所以上文中“数字信号”的说法并不严格。由于信号的速度很快,电平的切换时间非常短,因此任何破坏波形的噪声都将成比例地转化成抖动。

2.1.2 理想位置

理想位置是指无抖动的理想信号各时刻的位置,实际中是以参考时钟作为理想信号,检测实际信号与它的偏差。

如绪论中所述,串行传输方式的其中一个特点就是没有专门的时钟通道,参考时钟要从数据信号中提取出来,这一过程称为时钟恢复(clock recovery)。

因此,时钟恢复过程对理想位置的建立至关重要。

时钟恢复的其中一种方法是以被测时钟为基础,用最小二乘法拟合出参考时钟。具体做法是:将参考时钟定义为 $A \cdot \sin(\omega_c t + \phi_c)$, 其中 ω_c 和 ϕ_c 都是常数。要求这两个常数要使得参考时钟与被测时钟的时间误差的平方和最小。通过拟合的方式,最终确定 ω_c 和 ϕ_c 的值,进而确定参考时钟的表达式。这一方法在分析有限时长的连续数据时很有用,但是如果数据的测量时间过长,那么测量结果中可能会包含漂移成分,这时可以通过使用高通滤波器,把漂移成分去除。

时钟恢复的另一种方法,也是最为常用的方法,就是使用锁相环(phase-locked loop, PLL)。锁相环是一种反馈电路,它通过比较外部信号与本地时钟的相位差别,不断调整晶振,直到本地时钟与外部信号的相位同步。为了实现测量的复现性和一致性,许多测试规范要求使用黄金锁相环(golden PLL)。这里的“黄金”是指对锁相环作了严格的控制,规定了锁相环的最佳带宽,由此就能够客观地比较抖动,并把抖动与系统关联起来。

2.1.3 短期偏差

这是抖动和漂移(wander)的主要区别。抖动是短期的偏差;而漂移是长期的偏差。

ITU-T G810 对漂移的定义为:“数字信号在关键时刻上相对于其理想时间位置的长期变化(其中‘长期’是指这些变化的频率小于 10Hz)”。

结合抖动的定义,可以看出,抖动和漂移都是时间上的偏差,抖动是时间偏差的高频部分,漂移是低频部分,高低频是以 10Hz 作为分界线。

抖动和漂移的成因各有不同,漂移一般是由介质参数或物理环境的缓慢变化造成的,如光纤的热胀冷缩等物理变化引起的时延;抖动一般在设备内部产生,与电路设计有关。

2.2 时钟抖动

在现代电子技术（如计算机系统、通信系统等）中，时钟有着广泛的应用。系统的工作，需要统一的步调，计算机中的时钟就是为计算机系统提供定时或同步；而在通信系统中，时钟通常用来指定逻辑状态的切换时刻，或者用来确定数据发送与接收的时间。因此，时钟在现代电子技术，尤其是现代通信系统中非常重要，而时钟的时序偏差必然会影响到系统的整体性能。

时钟可以看成是以一定周期重复并且具有规律跳变的特殊数据，理想时钟相同跳变沿之间的间隔应该是相等的。时钟抖动是时钟的跳变沿与理想位置的偏差。对时钟抖动的理解在应用中很重要，一方面时钟抖动是系统的时序预算的关键；另一方面，随着系统数据速率的提高，确定系统的时序余量是评估系统性能的重要指标，而时钟抖动可以帮助设计师们确定系统的时序余量，了解系统的性能。

时钟抖动可以有多种方式来表示：相位抖动、周期抖动和周期间抖动。通常，抖动定义为信号边沿相对于理想位置的偏差，这种偏差是时序或相位的偏差，即相位抖动。但是在很多同步系统中，数字电路并不关心时钟的边沿时序，而更关心时钟周期的长短或是相邻周期之间的变化，相应的抖动称为周期抖动和周期间抖动。比如，如果存在周期抖动，会使时钟周期发生变化，数字信号的保持时间（hold time）可能会被破坏，从而造成逻辑状态的误判；另外，由于周期间抖动能捕捉到分频电路产生的时序扰动，因此从它的大小能够看出倍频锁相环性能的好坏。

2.2.1 相位抖动

相位抖动又称为时间间隔误差（time interval error, TIE），是指实际信号的边沿相对于理想边沿的偏差^[4]，因此它不是时钟抖动特有的。相位抖动如图 2.2 所示：

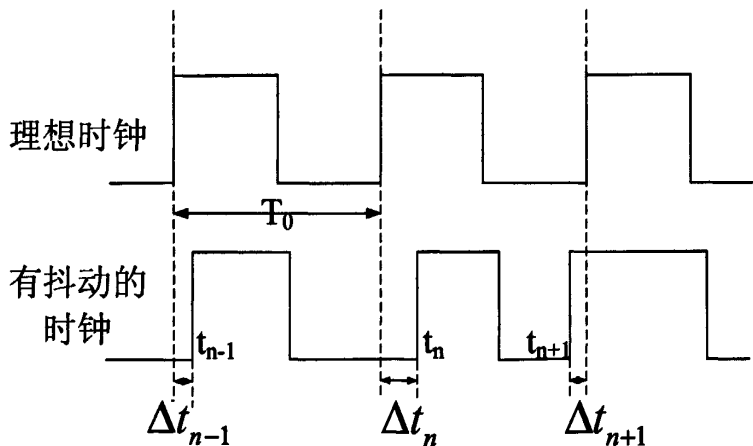


图 2.2 相位抖动图示

图 2.2 中有两个波形, 分别是没有抖动的理想时钟和有抖动的待测时钟。理想时钟状态切换的边沿时刻用 T_n 表示, 待测时钟状态切换的边沿时刻用 t_n 表示, 其中的 n 都表示第 n 个边沿。从图中可以看出, 相位抖动 Δt_n 定义为:

$$\Delta t_n = t_n - T_n \quad \text{式(2-1)}$$

如果 T_0 表示理想时钟的周期宽度, 那么有:

$$T_n - T_{n-1} = T_{n+1} - T_n = T_0 \quad \text{式(2-2)}$$

$$T_n = nT_0 \quad \text{式(2-3)}$$

Δt_n 是以时间的单位来衡量, 表征相位抖动的大小。相位抖动是相位上的偏差, 因此还有一种更常用的表征方式, 用相位的单位 (弧度 rad) 来表征。在时域上, 一个完整周期的相位是 2π rad, 对于本例来说, 也就是周期宽度 T_0 对应 2π 的弧度。那么以弧度表示的相位抖动 ϕ_n 为:

$$\phi_n = \frac{\Delta t_n}{T_0} 2\pi \quad \text{式(2-4)}$$

相位抖动描述了时钟信号的每个边沿在状态切换时刻相对于理想时刻的偏差, 参考量是理想时钟, 是固定不变的, 因此相位抖动的测量值是绝对的, 而且是随时间累积的。

2.2.2 周期抖动

周期抖动 (period jitter) 定义为实际的时钟周期宽度与理想时钟周期宽度之间的偏差。还是以图 2.2 为例, 实际的时钟第 n 个周期宽度为 $(t_{n+1} - t_n)$, 所以第 n 个周期的周期抖动 Δt_{pm} 定义为:

$$\Delta t_{pm} = (t_{n+1} - t_n) - T_0 \quad \text{式(2-5)}$$

根据式 (2-2), $T_0 = T_{n+1} - T_n$, 代入式 (2-5) 得:

$$\Delta t_{pm} = (t_{n+1} - t_n) - (T_{n+1} - T_n) = (t_{n+1} - T_{n+1}) - (t_n - T_n) = \Delta t_{n+1} - \Delta t_n \quad \text{式(2-6)}$$

式 (2-6) 两边同时乘以 $2\pi/T_0$, 结合式 (2-4), 得到周期抖动的相位表示 ϕ_n' :

$$\phi_n' = \phi_{n+1} - \phi_n \quad \text{式(2-7)}$$

其中, $\phi_n' = 2\pi(\Delta t_{pm}/T_0)$ 。

从式 (2-6) 和式 (2-7) 可知, 周期抖动和相位抖动并不是相互独立的两个概念, 它们之间是有联系的, 周期抖动实质上是相邻的两个相位抖动之差, 或者说, 周期抖动体现了相位抖动的变化。因此, 周期抖动和相位抖动, 只要知道其中一

个量, 就可以利用它们的相互关系得到另一个。

2.2.3 周期间抖动

周期间抖动 (cycle-to-cycle jitter) 定义为实际时钟相邻两个周期之间的偏差。仍以图 2.2 为例, 第 n 个时钟周期的宽度为 $(t_{n+1} - t_n)$, 第 $n-1$ 个时钟周期的宽度为 $(t_n - t_{n-1})$, 所以, 周期间抖动 Δt_{cn} 表示为:

$$\Delta t_{cn} = (t_{n+1} - t_n) - (t_n - t_{n-1}) = t_{n+1} + t_{n-1} - 2 \times t_n \quad \text{式(2-8)}$$

由式 (2-5), 两个相邻的周期抖动 Δt_{pn} 和 $\Delta t_{p{n-1}}$ 之间的差为:

$$\Delta t_{pn} - \Delta t_{p{n-1}} = (t_{n+1} - t_n - T_0) - (t_n - t_{n-1} - T_0) = t_{n+1} + t_{n-1} - 2 \times t_n \quad \text{式(2-9)}$$

比较式 (2-9) 和式 (2-8), 得到周期间抖动与周期抖动的关系:

$$\Delta t_{cn} = \Delta t_{pn} - \Delta t_{p{n-1}} \quad \text{式(2-10)}$$

将式 (2-10) 两边同时乘以 $2\pi/T_0$, 得到周期间抖动的相位表示 Φ_n :

$$\Phi_n = \phi'_n - \phi'_{n-1} \quad \text{式(2-11)}$$

其中, $\Phi_n = 2\pi(\Delta t_{cn}/T_0)$ 。从式 (2-10) 和式 (2-11) 看出, 周期间抖动是相邻周期抖动之间的差, 或者说, 周期间抖动体现了周期抖动的变化。

2.2.4 三者之间的关系

由式 (2-6), 相位抖动之差能得到周期抖动; 由式 (2-10), 周期抖动之差能得到周期间抖动, 结合式 (2-6) 和式 (2-10), 得:

$$\Delta t_{cn} = \Delta t_{pn} - \Delta t_{p{n-1}} = (\Delta t_{n+1} - \Delta t_n) - (\Delta t_n - \Delta t_{n-1}) \quad \text{式(2-12)}$$

式 (2-12) 给出了相位抖动、周期抖动和周期间抖动三者之间的关系, 即周期抖动是相位抖动的一阶差分; 周期间抖动是相位抖动的二阶差分, 是周期抖动的一阶差分。

因此, 通过一阶和二阶差分函数, 就能把这三者联系起来。只要知道三者的其中一个, 就可以用差分或积分唯一确定其他两个。如已知周期抖动, 可以通过一阶差分求出周期间抖动, 通过一阶积分求出相位抖动。这里要注意的是, 由于积分会引入一个常数, 所以, 要给定初始条件才能唯一确定积分结果。

从上面的分析可以看出, 这三者的关系就像牛顿力学中的位移、速度和加速度, 理论上, 还可以定义更高阶的差分函数, 如三阶相位抖动差分或周期间差分等, 但在实际对抖动的定义中, 很少使用这些差分函数。

2.3 数据抖动

通信系统传输的是数据信号，而数据的抖动会导致误码，影响通信系统的可靠性，所以对数据抖动的分析非常重要。

数据抖动通常是用上文提到的时间间隔误差 (TIE) 来表征，即实际信号的状态切换时刻相对于理想位置的偏差。在通信系统中，是用时钟来确定数据的发送和接收时间，因此，这里的理想位置，是理想时钟在状态切换时的位置，TIE 是数据与理想时钟之间的相对偏差，而不是指数据本身的时间偏差。

我们将理想时钟作为标准，那么 TIE 其实就是 2.2.1 节提到的相位抖动，唯一不同的一点，仅仅是前者是对数据而言，后者是对时钟而言。时钟信号的波形是有规律的，每一个时钟周期内都有一个上升沿和下降沿，因此，时钟的相位抖动在每个周期内都会有；数据信号与时钟不同，常常会有连 0 或连 1 电平的出现，这样，在某些时钟周期内，并没有数据信号的边沿，也就没有相位抖动。因此，为了区别数据和时钟的相位抖动，在本文中，只把时钟的相位抖动称为相位抖动，而把数据的相位抖动称为 TIE。这里要指出的是，两者都是指相位上的偏差，所以并没有本质上的区别。

一段串行数据都包含若干条上升沿或下降沿，对每一条边沿，都有一个 TIE 抖动与之对应，因此，在分析串行数据抖动时，TIE 是最基本的单位，如图 2.3 所示：

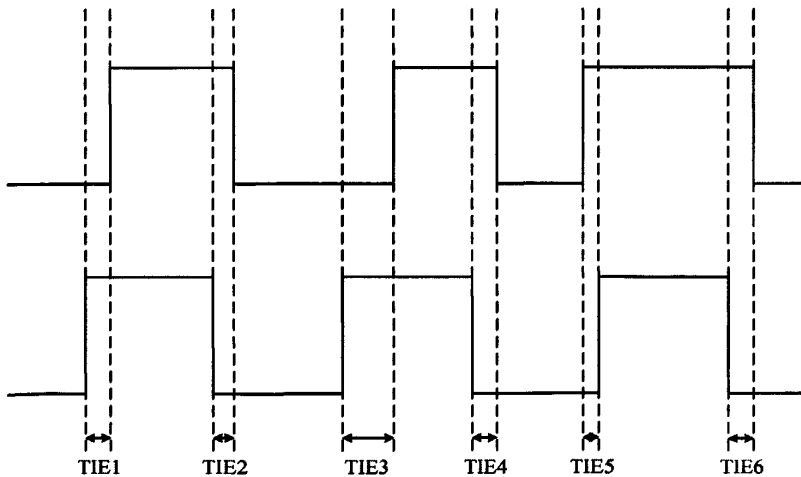


图 2.3 TIE 图示

第三章 抖动的分类和分析

经过长期的科学研究，人们发现在复杂的通信系统中，影响通信系统性能的因素有很多，抖动的成因是多种多样的，不同的成因引起的抖动也具有不同的特性。因此，一个通信系统的总体抖动，是由各种不同的抖动成分组成的。而对各抖动成分的分类，有助于找到抖动源以及更深入地研究抖动的特性。

3.1 抖动的分类

总抖动是由不同类型的抖动成分组成的，而根据抖动分量的不同属性，抖动也有多种分类方法：

(1) 根据抖动是否随机，可以分为：随机抖动 (random jitter) 和确定性抖动 (deterministic jitter)。随机抖动是不能预测的定时噪声，因为它没有可以识别的模式。尽管在理论上随机过程具有任意概率分布，但我们假设随机抖动呈现高斯分布，以建立抖动模型；确定性抖动是可以重复的、可以预测的定时抖动。正因如此，这个抖动的峰到峰值具有上下限。

(2) 根据通信系统中抖动和噪声源的物理性质不同，可以分为：固有抖动和非固有抖动。固有抖动必须从电子设备或半导体材料中电子和空穴的角度出发寻找物理特性；非固有抖动和设计有关，可以避免。

(3) 按是否有界来分，分为有界的 (bounded) 和无界的 (unbounded) 抖动^[5]。有界抖动的幅度是有限制范围的，而无界抖动的幅度是不存在限制的，只要观测时间足够长无界抖动的幅度就能足够大，因此随机抖动属于无界抖动，确定性抖动属于有界抖动。

通常采用第一种分类方法。如图 3.1 所示^[6]：

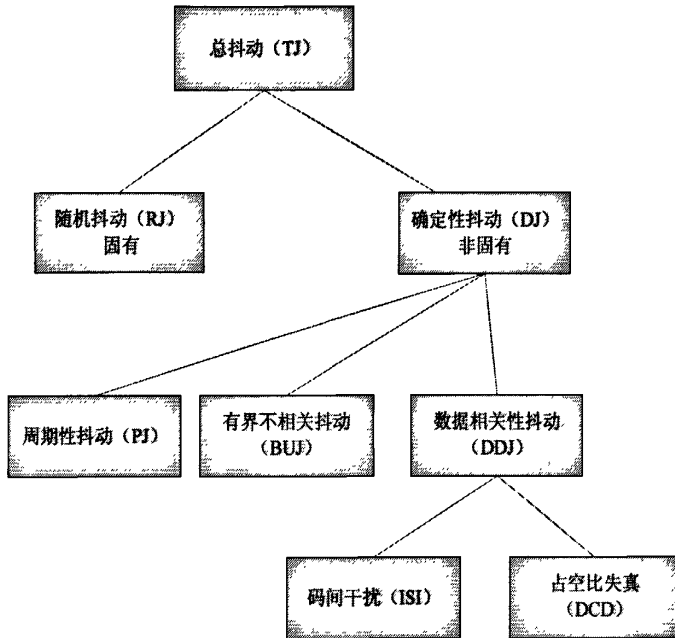


图 3.1 抖动的分类

3.1.1 随机抖动 RJ

随机抖动产生于收发器中，其原因有许多种，一般由器件噪声引起，所以随机抖动是固有抖动，它是由电路、光学设备或半导体材料中电子和空穴的随机性和波动性导致的，它可以减弱，但是无法从设备或系统中完全消除^[7]，典型的固有噪声包括热噪声、散弹噪声和闪烁噪声。

材料中的电荷载流子在温度平衡条件下的随机运动所产生的噪声称为热噪声 (thermal noise)。热噪声的能量与电荷载流子的均方速度成正比，并具有白噪声的功率谱密度；散弹噪声 (shot noise) 是由电荷势垒中的随机的电流波动造成的；闪烁噪声 (flicker noise) 是由于传输媒介表面的不规则性或颗粒状性质而产生的。

随机抖动是由许多噪声组成的，因此它是不能预测的噪声，没有一个确定的分布模式。但是根据中心极限定律，不管每个噪声呈现什么分布，很多不相关的噪声合成的效果接近于高斯分布 (Gaussian distribution)，因此，随机抖动用高斯分布来建模，且被认为是无界的^[8]。高斯分布又称为正态分布或常态分布，它的概率密度函数 (probability distribution function, PDF) 为：

$$p_{RJ}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{式(3-1)}$$

其中， p_{RJ} 是由两个参数决定，均值 μ 和标准差 σ 。均值 μ 反映了所有值的平均水平，它影响 p_{RJ} 在横轴方向的位置；标准差 σ 反映所有值偏离均值的程度，它影响 p_{RJ} 的形状，标准差越小，说明所有值偏离均值的程度越小，也就是分布更集中，

p_R 就越高而窄。如图 3.2, 两高斯分布的均值都为 0, 但标准差不同, 且 $\sigma_2 > \sigma_1$:

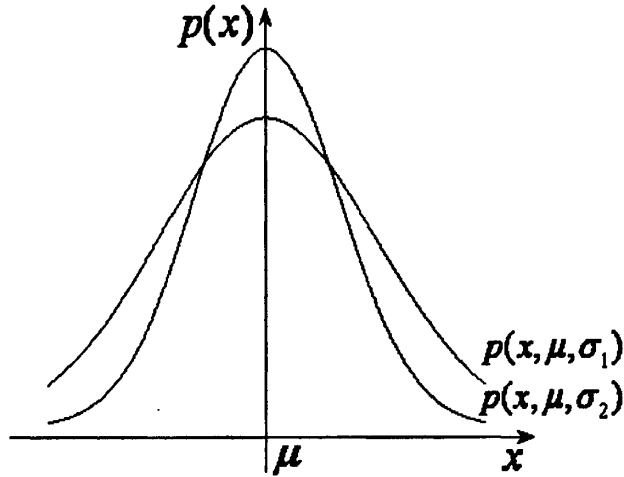


图 3.2 均值相同, 标准差不同的两高斯分布函数

从高斯分布的 PDF 可以看出, 只有当 x 趋向于无穷大时, 相应的概率密度才为 0, 因此 RJ 是无界的, 也就是说, 只要测量的时间足够长, 那么理论上 RJ 的值可以达到无穷大。

虽然高斯分布的大部分样本都聚集在均值附近, 但是仍会有个别样本值与均值相差很大。随着采样点数的增多, 可能得到的峰峰值 (peak—peak value, PP) 会越来越大, 但同时, 均值和标准差却越稳定。所以在分析 RJ 时, 不能用峰峰值, 而要用标准差 σ 对 RJ 进行量化。

3.1.2 确定性抖动 DJ

确定性抖动是可以预测、可以复现的抖动成分, 所以, 它的峰峰值是有上下限的, 属于有界抖动成分。在观察样本有限的情况下, 也能够以很高的置信度得到确定性抖动的峰峰值。根据抖动特性和成因的不同, 确定性抖动又进一步细分为周期性抖动 PJ, 和数据相关性抖动 DDJ。

3.1.3 周期性抖动 PJ

周期性抖动是以某一频率重复出现的周期性的抖动成分。根据傅里叶级数的原理, 任何周期性波形都可以分解成直流分量与一系列正弦谐波分量之和, 谐波分量的频率都是以某一固定频率为倍数, 这个固定频率称为基波频率。因此, 周期性抖动也称为正弦曲线抖动。

周期性抖动一般是由外部的确定性噪声源 (局部射频载波、开关电源噪声等) 耦合到系统中产生的, 它与数据本身的重复模式无关。锁相环的不稳定也可能导致恢复出的时钟有周期性抖动。

由于周期性抖动能分解为正弦谐波之和，这里假设周期性抖动就是正弦波形：

$$J_{PJ}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad \text{式(3-2)}$$

其中， A 为抖动的峰值， ω_0 为抖动的角频率， ϕ_0 为抖动的初相位。

周期性抖动的概率密度函数 p_{PJ} 为：

$$p_{PJ}(J_{PJ}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - J_{PJ}^2}} & A \leq J_{PJ} \leq A \\ 0 & J_{PJ} \text{ 其他值} \end{cases} \quad \text{式(3-3)}$$

概率密度曲线如图 3.3 所示：

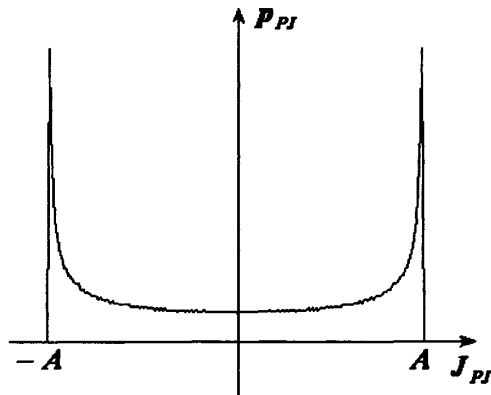


图 3.3 周期性抖动的概率密度函数

可以用双狄拉克 δ 函数（即冲激函数）来近似表示图 3.3 的概率密度函数：

$$p_{PJ}(J_{PJ}) \approx \frac{1}{2} [\delta(J_{PJ} - A) + \delta(J_{PJ} + A)] \quad \text{式(3-4)}$$

这种近似处理简化了周期性抖动的统计分析，也为后续对总抖动的统计分析提供了方便。

对周期性抖动做傅里叶变换，得到其频谱，频谱是复函数，包括幅度和相位的信息，对本例来说，频谱的幅度就是出现在频率为 ω_0 这一点上的冲激函数 $A\delta(\omega - \omega_0)$ ；频谱的相位就是 ϕ_0 ，在整个频率范围内是常数。如图 3.4 所示：

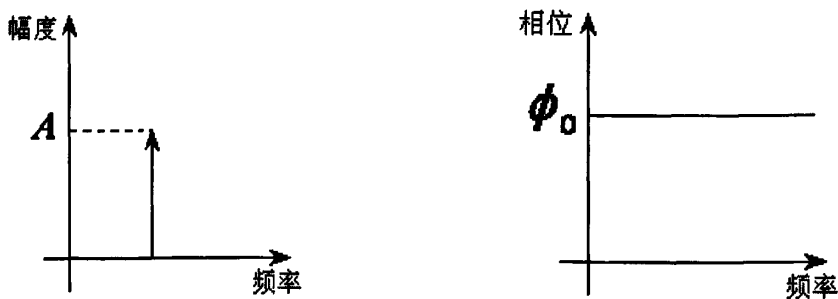


图 3.4 周期性抖动频谱的幅度和相位

3.1.4 数据相关抖动 DDJ

与数据模式有关的抖动称为数据相关性抖动 (data dependent jitter, DDJ), 它是一种有界的确定性抖动, 也是最常见的确定性抖动。在通信信道, 尤其是铜质信道中, 数据相关性抖动是制约系统性能的主要因素。

数据相关性抖动又可以进一步细分为码间干扰 (inter-symbol interference, ISI) 和占空比失真 (duty-cycle distortion, DCD)。其中, 码间干扰是由于数据流中前后比特位之间的干扰形成的, 原因主要是由于介质损耗和反射的存在; 占空比失真是由于数据流中码型“1”和码型“0”的宽度不等造成的, 原因可能是信号上升沿和下降沿的切换速度不同, 也可能是门限电平发生了偏差。

1、码间干扰

码间干扰是由于数据流中不同游程长度的数据模式所产生的脉冲时序扩展造成的, 与数据的不均匀边沿跳变有关 (因为数据流中可能有若干个连 0 或连 1 码型出现, 所以在数据流中, 跳变发生的时刻是不固定的, 不均匀的)。这也就是说, 对于时钟来说, 不存在码间干扰, 因为时钟的边沿跳变都是均匀的, 周期性的。一般来说, 形成码间干扰的原因有:

(1) 频带限制

通常认为, 高速通信信道的频率响应表现出低通滤波器的特性, 信号在信道中传输时, 高频分量的衰减比低频分量的大。信道中的信号中既有高频成分又有低频成分, 并且信号的频率越高, 跳变沿越陡, 高频成分越多。如方波信号, 理想的方波信号的上升时间为 0, 它是由某一频率正弦波以及它的所有奇次谐波叠加组成的, 现实并不存在这样的波形, 而只能对它做近似, 即将正弦波与它的有限个奇次谐波叠加, 叠加的次数越多, 越接近标准方波, 如图 3.5, 分别是叠加到 7 次谐波和叠加到 517 次谐波的结果:

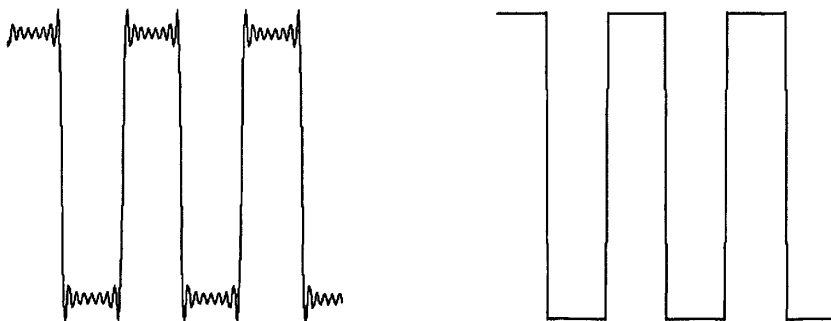


图 3.5 不同次数的谐波叠加结果

从图 3.5 看出, 信号的跳变时间越短, 信号含有的高频成分越多。因此当信号通过高速传输线时, 低通滤波所产生的频带限制将使信号中的高频成分发生较低频成分更大的衰减, 结果就是使信号的跳变时间变长, 对于上升沿来说, 短期内

不能达到稳定的最高电平，对于下降沿来说，短期内不能达到稳定的最低电平。

这样，如果信号的切换速度很快，可能跳变沿还没有达到稳定的终值就又发生了切换，由于此时的电平值低于稳定值，因此在这一位置切换，到达阈值的时间肯定比从稳定值到达阈值的时间短，从而产生了码间干扰。

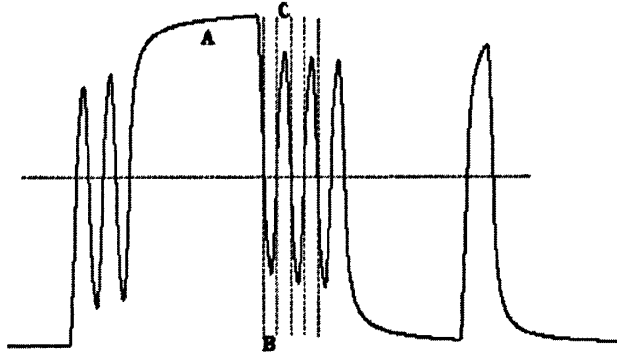


图 3.6 频带限制引起的码间干扰

以图 3.6 为例，数据流在 A 段的码型是连“1”，由于一直没有发生切换，信号的幅度最终达到了稳定值。这个时候，数据码型由“1”切换到“0”，因为这时的信号幅度很高，所以要经过较长的时间才能下降到阈值，B 处信号发生切换的时刻相对滞后一些。信号幅度还没有下降到稳定值时，数据码型又由“0”到“1”切换。由于之前信号下降到阈值用了较长时间，使得信号在越过阈值后到切换发生的时间较短，此时信号的幅度还没有下降到很低的位置，因此信号经过很短的时间就能上升到阈值，C 处信号发生切换的时刻相对提前。

(2) 阻抗不匹配

信号在传输过程中，不断感受到传输线的瞬时阻抗，阻抗不匹配会导致信号在传输过程中发生多次反射，影响信号的质量。由于信号的频率很高，反射信号在传输线中传播的时延相对于信号周期来说较长，所以一个脉冲产生的二次反射及多次反射并不是叠加在其自身，而是在其之后的某个特定比特上表现出来^[9]。当反射信号为正的，叠加后的结果是使原信号幅度增高，反之，叠加后会使得原信号的幅度降低。如果反射信号正好叠加在原信号状态切换处或附近，那么幅度的改变必然导致信号跨过门限的时刻滞后或提前于理想时刻。

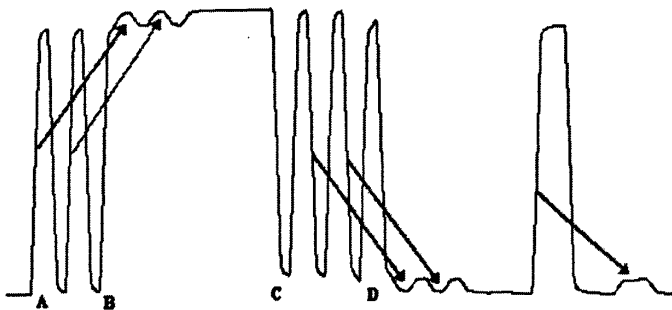


图 3.7 反射引起的码间干扰

以图 3.7 为例,箭头的起始位置是产生反射信号的脉冲,箭头所指向的终点位置是由反射信号与原信号叠加形成的畸变, A 脉冲产生的正向反射信号与 B 处的上升沿叠加在一起,使信号到达门限的时间缩短了, B 处信号切换的时刻提前了; C 脉冲产生的负向反射信号与 D 处的下降沿叠加在一起,也缩短了信号到达门限的时间, D 处信号切换的时刻提前了。

(3) 预加重过大

预加重是指在信号处理中,有意地增强某些频率成分的幅度值,以提高信噪比,更有效地处理信号。

过大的预加重,会导致信号的幅度过大,影响信号跨越门限的时刻,从而造成码间干扰的产生。

2、占空比失真

占空比是指一串脉冲序列中,正脉冲的时间宽度与脉冲周期宽度的比值,一般情况下,认为时钟信号或 0-1 交替的数据信号的占空比都为 50%,即正脉冲与负脉冲的时间宽度相同。当数据流中的“0”码和“1”码的宽度不同,或是时钟信号的正负脉宽不相等时,就出现了占空比失真。

从眼图观察,如果没有占空比失真,即正负脉宽相等,则信号上升沿与下降沿的交点在中心位置;相反,如果有占空比失真,眼图中跳变沿的交点会偏离中心位置。一般来说,造成占空比失真的原因有两个:

(1) 上升沿和下降沿的切换速度不同

判定门限一般都选在 50%幅度点,如果每隔相等的时间,切换脉冲的状态,理想情况下,上升沿和下降沿的切换速度相同,那么正脉冲和负脉冲的宽度是相同的。

但是由于发送器的性能,可能使得信号上升沿和下降沿的切换速度不相同,就导致上升沿迟于或早于下降沿到达判定门限,从眼图上观察的结果,就是跳变沿的交点不在中心位置,而是在中心偏上或偏下,这就产生了占空比失真。对于 0-1 交替的数据信号,如果上升沿的速度比下降沿的速度慢,那么正脉宽比负脉宽窄,占空比将小于 50%;如果上升沿的速度比下降沿的速度快,那么负脉宽比正脉宽窄,占空比将大于 50%。

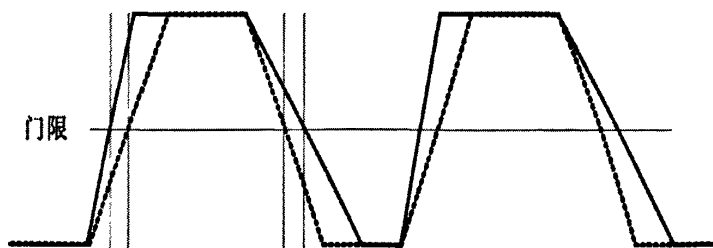


图 3.8 上升沿和下降沿的切换速度不同引起的占空比失真

图 3.8 就是上升沿的速度快于下降沿的例子，图中虚线所示的波形是理想情况，占空比为 50%，实线所示波形是实际情况，正脉冲持续的时间长，占空比大于 50%。

(2) 判定门限高于或低于理想值

如前所述，判定门限一般选在 50%幅度点，理想情况下，眼图两边的交叉点就在 50%幅度处，但是如果判定门限过高或过低，即使输入的信号是理想的，也会产生占空比失真，这时虽然对于眼图没有影响，但是从统计直方图上看，跳变沿的状态切换时刻发生了偏移。

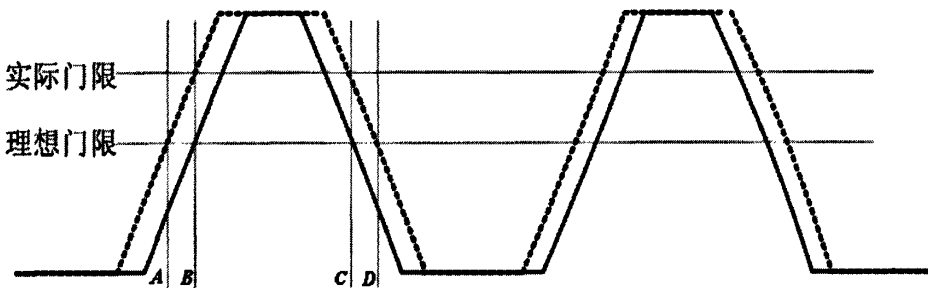


图 3.9 判定门限高于或低于理想值引起的占空比失真

如图 3.9 所示，是判定门限高于理想门限的例子。虚线所示的波形为理想情况，判定门限设在 50%幅度点，正脉冲 AD 的持续时间与负脉冲相同，占空比为 50%；但是由于实际门限高于理想门限，使上升沿到达门限的时间滞后，下降沿到达门限的时间提前，结果是使正脉冲变成了 BC 段，持续时间较 AD 明显变小了，占空比小于 50%。如果还是以理想门限为判定标准，那么这时的信号实际上已经变成图中实线所示。

如果判定门限低于理想门限，会使上升沿到达门限的时间提前，下降沿到达门限的时间滞后，结果是使正脉冲变宽，占空比大于 50%。

3.1.5 有界不相关抖动 BUJ

有界不相关抖动 (bounded uncorrelated jitter, BUJ) 是指在分布特性上具有有界的峰峰值，在时域上与数据模式无关的一类抖动的统称。造成有界不相关抖动的原因有串扰、电源噪声、电磁干扰等，其中串扰是其形成的主要原因，因此这里假设有界不相关抖动是由串扰引起的。

数据相关性抖动和有界不相关抖动在统计分布上都是有界的，但是前者与数据模式相关，而后者与数据模式无关，这也是两者的主要区别。

下面比较周期性抖动与有界不相关抖动的区别。周期性抖动是有界不相关的窄带抖动，因此从统计分布上，两者是相似的，但是，如果从频谱的角度分析，

会发现两者的区别很大。由于周期性抖动是窄带的，在频谱上只在某一固定的频率点上有谱线；有界不相关抖动的频谱则不同，它不是只有单条谱线，频带范围比较宽，其中包括了若干条不相关的谱线。

以上是有界不相关抖动与单个周期性抖动的区别，如果是多个周期性抖动叠加，那么频谱上是由只出现在某些频率点上的多条独立的谱线组成，这样的频谱与有界不相关抖动的频谱就很难区分了。利用这一特性，在实际中，可以对有界不相关抖动建模，把它看作是由多个独立的周期性抖动组成。

由于有界不相关抖动与周期性抖动的这些关系，我们可以把周期性抖动理解为窄带的有界不相关抖动，而这里研究的其实是宽带的有界不相关抖动。

1、BUJ 的 PDF:

如上文所述，由于多个周期性抖动的谱线与有界不相关抖动的谱线很相似，因此可以用多个独立的周期性抖动建模有界不相关抖动。单个周期性抖动的 PDF 是用双狄拉克 δ 函数来近似的，当周期性抖动很多时，它们的总 PDF 在幅度上很接近于高斯分布，并且由于各周期性抖动是独立的，因此总 PDF 是由截断的高斯分布来近似的。截断高斯分布的定义如下式所示：

$$f_{BUJ}(t) = \begin{cases} \frac{p_{BUJ}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{BUJ}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_{BUJ}^2}} & |t| \leq A_{BUJ} \\ 0 & |t| > A_{BUJ} \end{cases} \quad \text{式(3-5)}$$

其中， p_{BUJ} 是归一化的有界不相关抖动 PDF， σ_{BUJ} 为均方差值， A_{BUJ} 为峰值。这里使用归一化的 PDF 是为了保证式 (3-5) 的积分等于 1。

下图为截断高斯分布的示意图：

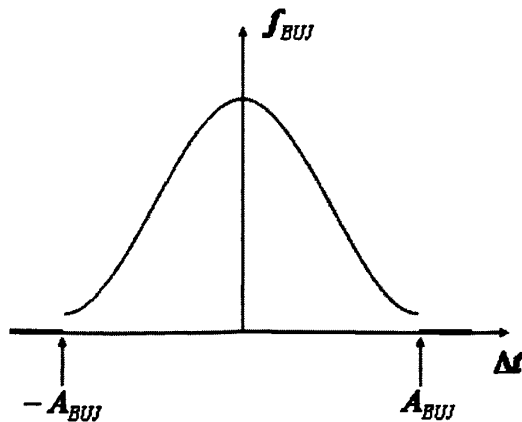


图 3.10 截断高斯分布

截断高斯分布与高斯分布的区别就是在尾部，高斯分布的尾部无限延伸，只

有在抖动趋近于无穷大时,相应的概率才为 0;截断高斯分布的尾部是有界的,只要抖动达到或超过这个界限,概率就为 0。实验证明用截断高斯分布对有界不相关抖动的 PDF 进行描述是正确的。

2、BUJ 的频谱:

造成有界不相关抖动的主要原因是串扰,每一个串扰源产生的抖动都可以看作是在固定频率下的单个周期性抖动。有界不相关抖动的频谱是由多个独立的谱线组成,谱线的数目即是串扰源的数目。随着独立串扰源的增多,频谱中的独立谱线越来越多,谱线之间的间隔也越来越小,这时的频谱看起来更像是白噪声,但是它与白噪声不同的是,它仍然是带限的。有界不相关抖动的频谱图 3.11:

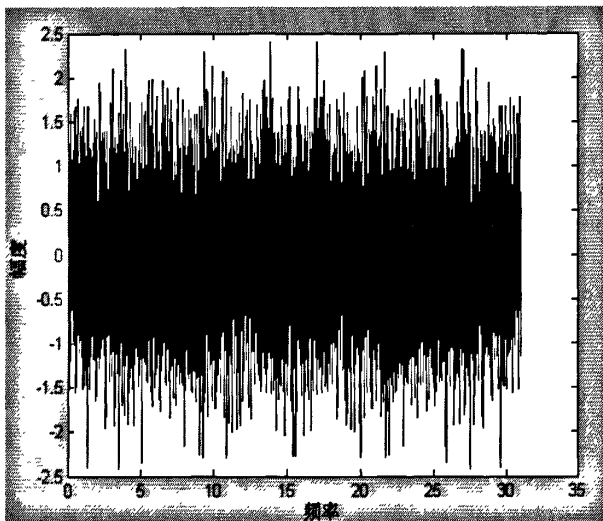


图 3.11 有界不相关抖动的频谱

从图 3.11 可以看出,有界不相关抖动的频谱特点是谱线出现的位置具有随机性,与数据模式无关,且只出现在有限的频段范围之内。

如果要从统计的角度来分析有界不相关抖动,那么当串扰源很少时,得到的统计 PDF 就很难用截断高斯来近似,这时就要选择从频谱入手。选择用频谱还是用 PDF 来分析,要视具体情况而定。

3.1.6 总抖动 TJ

在通信信道中,各种抖动成分都可能存在,它们最终会对传输的信号产生一个综合性的影响,使信号的时序偏离原位置,从而导致误码的产生。

这里,引入一个总抖动 TJ 的概念,它是对信道中所有抖动成分的综合描述,也就是说它反映了信号时序偏移的总体程度。由于时序的偏移导致误码,因此总抖动与误码率有着密切关系。总抖动的表达式:

$$TJ(\beta) = DJ + 2Q(\beta)\sigma, \quad \text{式(3-6)}$$

其中, β 表示误码率, DJ 表示确定性抖动的峰峰值, σ_j 表示随机抖动的均方差, $Q(\beta)$ 是一个因数, 称为 Q 因子, 它的大小由误码率决定。

Q 因子与误码率 β 的关系如下表所示:

表 3.1 Q 因子与误码率的关系

误码率	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}
Q	5.612	5.998	6.361	6.706	7.035	7.349

3.2 抖动的分析

常用的抖动分析手段包括: 抖动统计、抖动频谱、统计直方图、眼图、浴盆曲线等, 下面对它们分别进行简要的介绍。

3.2.1 抖动统计

在介绍抖动的统计分析方法之前, 有三点需要明确:

首先要明确的一点是, 抖动的概念是相对于理想信号而言的, 要有理想信号作为参照, 比如时钟信号, 必须先有一个理想时钟, 确定各理想跳变沿的位置, 才能够将实际时钟与之比较, 得到抖动的值。在一般的示波器或其他测试仪器中, 理想信号的确定通常有两种方法, 一种是硬件方法, 如通过锁相环 (PLL)、时钟数据恢复电路 (CDR) 等恢复出理想信号; 另一种是通过软件方法。

其次, 抖动的成因很复杂, 其中包含许多随机成分, 抖动的测量结果具有随机性, 不能仅仅通过单次或几次测量就确定一个系统的抖动特性, 这样的结果不具有稳定性。因此测量单个边沿的时序抖动没有太大意义, 只有得到抖动的概率统计特性, 才能找到系统的稳定规律。

再次, 要得到抖动的统计特性, 必须通过观察大量的样本数据, 每一个样本数据就是某个抖动值, 采样的样本数据越多, 随机性的影响越小, 因而观察到的规律越稳定, 也越接近于真实的规律。统计特性是将样本数设为无限多个而得到的理论值, 实际中, 样本数据的个数必定是有限的, 所以实测结果和理论结果肯定有差别。

抖动统计中要用到的一些基本统计学概念有:

1、算术平均值 mean value

算术平均值反映了采样数据的平均水平, 采样值都围绕着它上下变动。样本数越多, 算术平均值越稳定并与理论值越接近。例如, 随机抖动的理论平均值为 0, 时钟周期的理论平均值为理想的周期宽度。设 x_i 为第 i 个采样数据, 算术平均值 \bar{x} 表示如下:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{式(3-7)}$$

2、标准差 standard deviation

标准差反映了采样数据偏离算术平均值的程度，标准差越小，各采样值越是集中分布在平均值周围；标准差越大，各采样值的分布越是远离平均值。标准差 σ 表示如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad \text{式(3-8)}$$

3、峰峰值 peak to peak

峰峰值是采样数据最大值与最小值的差。对于符合高斯分布的随机抖动来说，理论上采样数据可能取到任意的值，因此峰峰值的大小没有限制，并且一般随着观察的时间变长，采样数据增多，峰峰值会越大；对于确定性抖动来说，理论上采样数据只能取到某一范围内的值，因此峰峰值的大小是确定的，并且随着样本增多，峰峰值会越来越稳定。所以峰峰值的概念只对确定性抖动而言，表示如下：

$$pk - pk = \max(x_i) - \min(x_i) \quad \text{式(3-9)}$$

4、概率密度函数 probability density function

概率密度函数反映了某个采样值在多次采样中出现的概率。假设采样值 x_i 在 N 次采样中一共出现了 $N(x_i)$ 次，那么采样值 x_i 出现的概率为

$$PDF(x_i) = \frac{1}{N} \times N(x_i) \quad \text{式(3-10)}$$

将 N 次采样中，所有采样值出现的概率都计算出来，就得到了概率密度函数 $p(x)$ ，其中 x 代表某个采样值， $p(x)$ 就是 x 的概率，因此 $p(x) \geq 0$ 。由积分的知识可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad \text{式(3-11)}$$

5、累积分布函数 cumulative distribution function

累积分布函数反映了小于等于某个采样值的所有采样数据出现的概率。它是概率密度函数的积分：

$$P(X) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad \text{式(3-12)}$$

其中， $P(X)$ 为累积分布函数， X 为自变量，表示积分的上限，积分的下限是 $-\infty$ ，表示计算的是所有小于 X 的采样数据的概率之和。

$P(X)$ 的取值范围:

$$0 \leq P(X) \leq 1 \quad \text{式(3-13)}$$

另外, 由式 (3-11), 得到 $P(X)$ 的极限值:

$$P(-\infty) = 0, \quad P(+\infty) = 1 \quad \text{式(3-14)}$$

3.2.2 直方图

直方图 (Histogram) 也称为柱状图, 是由一组宽度相同、高度不同的长方形组成。每一个长方形的宽度表示数据的取值范围, 高度表示落在当前取值范围之内的采样数据的个数。将直方图的纵坐标归一化 (即将纵坐标除以采样总点数), 长方形的高度就成为采样数据落在相应取值范围之内的概率。因此, 直方图反映的是某个测量值与其出现频率的关系^[10]。直方图如图 3.12 所示:

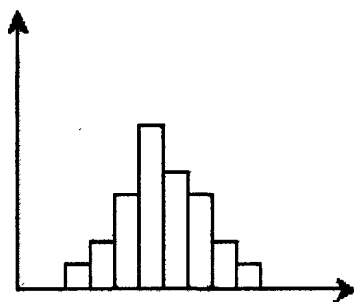


图 3.12 直方图

从图 3.12 看出, 由于数据取值范围较宽, 直方图的柱数比较少, 每个柱的纵坐标都是离散的, 统计规律不明显。如果将取值范围定得足够小, 那么每个柱可以变得很窄, 这时直方图的纵坐标就会变得平滑, 轮廓更接近于连续曲线, 这个连续曲线就是采样数据的概率分布曲线。如图 3.13 所示:

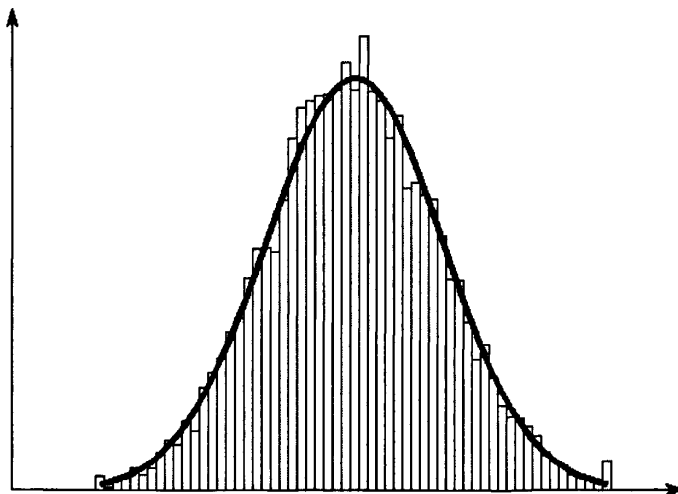


图 3.13 由直方图得到概率密度曲线

统计分析能够很好地去除采样数据中的随机成分，而直方图是统计分析中最常用、最基本的方法。它直观地显示出采样数据的波动情况，描述了采样数据的分布规律。在实际测量中，可以用示波器或其他测量仪器生成测量波形的直方图，根据直方图得到被测信号的一些重要参数。

3.2.3 眼图

眼图 (eye pattern) 是估计数据传输系统性能的一种方式，通过观察眼图，可以看到信号的畸变。具体方法是：将系统的输出端接到示波器上，然后把示波器的水平扫描周期调节到与码元的接收周期同步，就能在示波器屏幕上观察到像人眼的图形，这就是眼图。如图 3.14 所示：

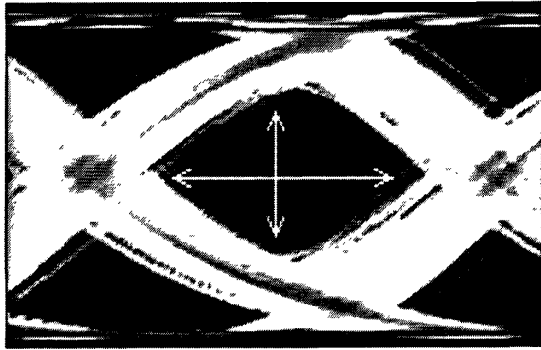


图 3.14 眼图

图 3.14 中，两个双箭头分别表示眼图张开的水平和垂直范围。当系统中的抖动很小时，眼图张开的程度大，反之，当抖动增大时，眼图水平和垂直方向的张开程度都会变小

眼图能反映抖动的影响，因而能评估系统的优劣，同时，以眼图为依据，可以知道如何调整系统参数能够减少系统中的抖动。所以，眼图是能够评估和改善系统的图形。

传统的眼图观察法是触发一次，示波器就捕获到一位的数据波形，然后再与之前的波形叠加。也就是说，每次触发，仅在眼图上增加了一个比特的信号。如图 3.15 所示：

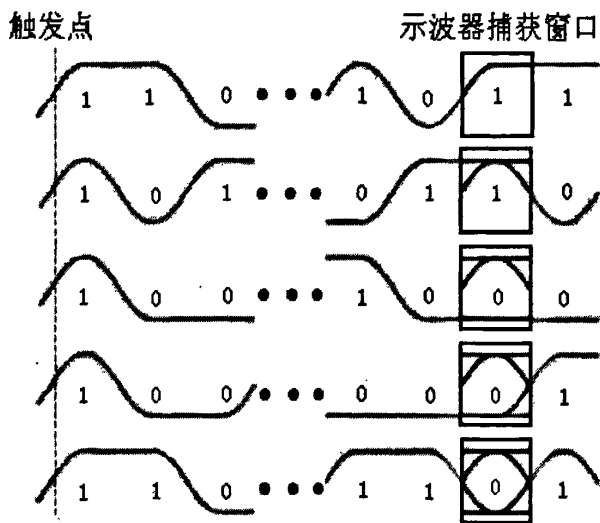


图 3.15 传统的眼图观察法

传统方法存在很多缺点：

第一个缺点是采样时间长，效率低。每次触发只能得到一个比特位，当眼图要叠加的比特位很多时，触发所耗费的时间是相当可观的，同时，多次的触发还会引入触发动抖，影响眼图质量；

第二个缺点是同步触发的问题，为了使数据的每一个比特与触发点同步，通常是将串行数据通过 CDR，将恢复出的内嵌时钟作为触发源，用来与原串行数据同步，但是这样做可能引入 CDR 抖动。另外，CDR 只能对连续的串行数据才能恢复出正确时钟，所以如果数据信号中间有间歇，那么传统方法不能做出正确的眼图。

从以上分析可知，传统方法的缺点，主要都是由时钟恢复造成的。针对传统方法的这些缺点，Lecroy 提出了一种获得眼图的新方法。首先用示波器获得一段连续信号，不使用硬件 PLL 或 CDR，而是用软件 PLL 的方法还原时钟，然后用该时钟切割这段连续信号，将信号分解成一个一个的比特位，最后将分解出的所有比特位叠加，形成了眼图。

新方法的优点：改进了触发方式，效率很高；用软件 PLL 方法还原时钟是一大进步，不通过硬件 PLL 或 CDR 还原时钟，从而避免了触发动抖和 CDR 抖动的产生；增加了诸如眼图失败定位跟踪等高级功能。

3.2.4 浴盆曲线

由上一节的讨论知，眼图的张开程度随抖动的增大而变小。对于随机抖动来说，由于高斯分布的特点，抖动的取值没有界限，并且采样数据越多，越可能取到很大的值。当抖动的值大到超过 50% 的比特位宽度，眼图就会完全闭上。也就

是说,如果抖动中存在有高频成分,会让眼图随着测量时间的延长而慢慢闭合。在这种情况下,眼图就没有参考价值了。

因此,要换一种方式,从置信度的角度来观察眼图。

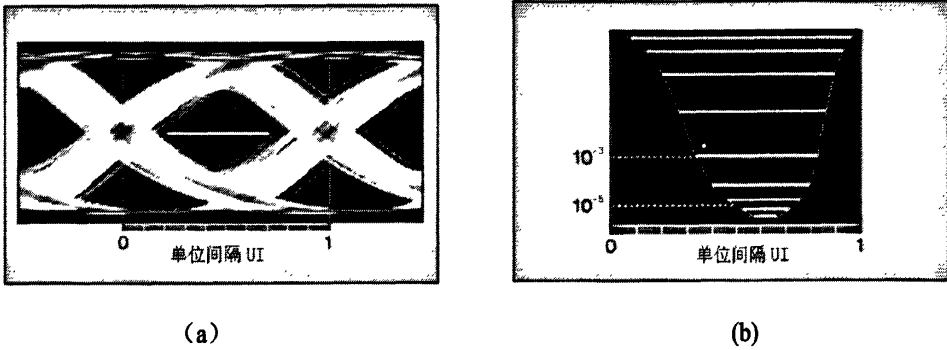


图 3.16 从眼图得到浴盆曲线

如图 3.16 (a) 所示,在眼图的中心位置有一个标尺,规定当眼图上的波形跨过标尺时,就认为这条波形所在的比特位出现了误码。如果眼图上叠加的波形数量较少,那可能还不会出现误码,但是只要信号中有随机抖动存在,随着叠加波形的增多,一定会出现跨过标尺的情况。

这样,只要标尺固定,随着测量时间的延长,跨过标尺的波形会不断增多(也即误码数目不断增多),但是同时,波形的总数也在不断增大,这两者的比值是比较稳定的,可以作为评价信号质量的参考,这个比值就是误码率(BER)。例如眼图上总共叠加了 20,000 个波形,其中出现了 20 个误码,那么误码率为 10^{-3} 。

如果信号不变,只将标尺变短,那么显然眼图中的叠加波形跨过标尺的可能性就变小了。假如同样还是 20,000 个波形,那误码的个数就会小于 20,假设是 2,这时的误码率就为 10^{-4} 。

不断改变标尺的长度,并根据眼图确定当前标尺对应的误码率,把所有的标尺和误码率画在一张图上,最后分别连接所有标尺的左端和右端,就得到了图 3.16 (b) 所示的曲线,该曲线就是浴盆曲线(bathtub curve)。

浴盆曲线反映了标尺与误码率的关系,标尺定得越短,那么眼图中跨过标尺的波形越少,误码率越低。

另一方面,可以将横坐标的标尺看作眼图的宽度,纵坐标的误码率看作眼图中测量的样本个数或是测量时间,浴盆曲线反映了眼图的闭合程度与测量样本的个数(或测量时间)的关系。对于测量了一定时间的眼图来说,假设共测量了 N 个波形,这时的眼图中闭合最严重的位置其实是叠加波形中最差的波形,此时眼图的宽度就是 N 个测量波形抖动的峰峰值。既然是峰峰值,那么能够到达这一位置的,就只有一个波形,就是最差的波形。所以从误码率的角度看,将标尺定为峰峰值,这时的误码率为 $1/N$; 如果从测量样本个数的角度看,当眼图宽度闭合到

峰峰值的程度，总共测量了 N 个样本。

3.2.5 频谱图

以上的分析都是建立在多样本统计的基础上，对于抖动来说，除了可以从统计的角度分析，也可以将抖动从时域转换到频域，进行频谱的分析^[11]。频谱分析要用到的变换包括傅里叶变换（FT）、离散傅里叶变换（DFT）等，频谱是复数，它包含了幅度和相位信息，在抖动分析中，一般只考虑幅度信息。

由 3.1 节的分析，瞬时抖动 $\Delta t(t_n)$ 可以表示为：

$$\Delta t(t_n) = \Delta t_{RJ}(t_n) + \Delta t_{PJ}(t_n) + \Delta t_{DDJ}(t_n) + \Delta t_{BUJ}(t_n) \quad \text{式(3-15)}$$

其中 t_n 表示测量抖动的时刻。

将式（3-15）两边做傅里叶变换，得到瞬时抖动和各抖动分量的频谱：

$$FT[\Delta t(t_n)] = FT[\Delta t_{RJ}(t_n)] + FT[\Delta t_{PJ}(t_n)] + FT[\Delta t_{DDJ}(t_n)] + FT[\Delta t_{BUJ}(t_n)] \quad \text{式(3-16)}$$

从式（3-16）可知，瞬时抖动的频谱是各分量频谱的线性叠加。各抖动分量都有不同的频域特性：随机抖动的频谱表现为有界的背景噪声，分布在整个频带；周期性抖动的频谱只出现在某些频率点上，幅度表现为尖峰；数据相关性抖动也表现为尖峰，它的频率就是数据模式的重复频率，因此它的谱线只出现在数据模式频率的整数倍上；有界不相关抖动的频谱幅度与随机抖动相似，但它是带限的。

显然，BUJ 和 RJ 都属于宽带抖动，两者的不同之处仅在于 BUJ 是带限的，而 RJ 是频带无限的，因此一般很难通过频谱将两者分离，除非事先就已知 RJ 的频谱分布特点，或知道 BUJ 的频带范围和幅度。DDJ 和 PJ 都属于窄带抖动，两者的不同之处在于 PJ 只出现在固定某个频率点上，而 DDJ 则出现在模式频率的整数倍上，这样，如果模式频率的整数倍与 PJ 的频率相等，就无法在频谱上将两者分离出来。

第四章 抖动的分离

本章介绍了时钟和数据抖动的分离方法，目前抖动分离的主要方法有：Tailfit 算法^[12]、时频域算法、TLC 算法^[13]和 EMD 算法^[14]等。本章重点介绍了基于时频域的时钟抖动分离方法。

对于时钟来说，不存在 ISI，但是存在 DCD。DCD 是由于一个周期内正脉宽与负脉宽的不同而产生的，在本文中，处理的采样数据都是时钟的周期宽度，是正脉宽与负脉宽之和，因此并不能从周期宽度中分离出 DCD。所以在时钟分离部分，主要介绍了 PJ 和 RJ 的分离。

4.1 时钟的低频方法

低频方法处理数据的流程如图 4.1 所示：

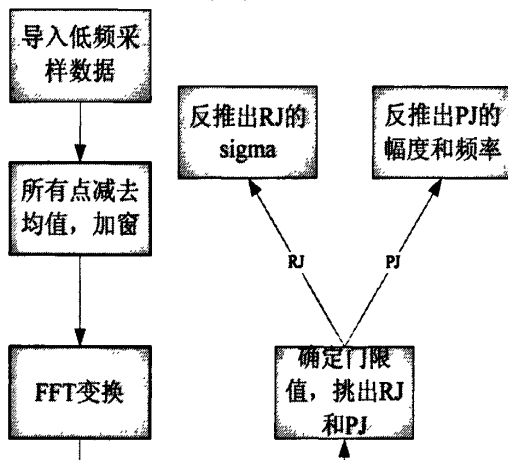


图 4.1 低频方法流程图

4.1.1 数据获取方法

假设一个理想时钟的周期宽度为 T_0 ，在采样的时候，每次采样待测时钟的 N 个周期宽度，采样间隔为 τ_{Dead} ，总共采样 M 次，如图 4.2 所示：

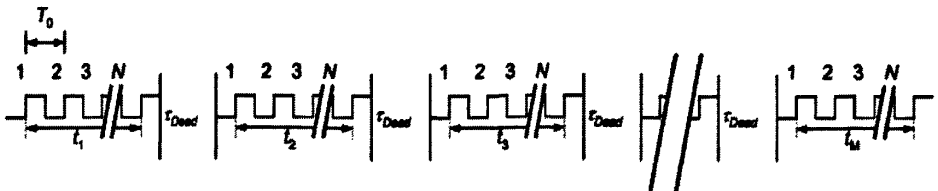


图 4.2 低频方法的采样示意图

采样值 $t(t_1 \sim t_M)$ 是 N 个时钟的总宽度，它们与 N 个理想时钟宽度的差 $\Delta t = t - NT_0$ 体现了抖动随着时间的变化趋势。对这一趋势做 FFT 变换可以得到抖

动频谱。然后由 PJ 和 RJ 在频域的不同特性，将两者分离并还原。

低频方法的优点：不用实时采样，对硬件要求较低；获取采样数据的速度快。

下面分别介绍低频方法中的几个关键问题：

4.1.2 快速傅里叶算法

1、傅里叶变换 (Fourier transform, FT)

假设一个连续时域信号为 $h(t)$ ，它的傅里叶变换定义为

$$H(f) = F(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{式(4-1)}$$

傅里叶变换的实质，是把一个时域信号分解成许多不同频率的正弦信号的无限叠加，并在频域上显示每个正弦信号的幅度和相位。如图 4.3 所示：

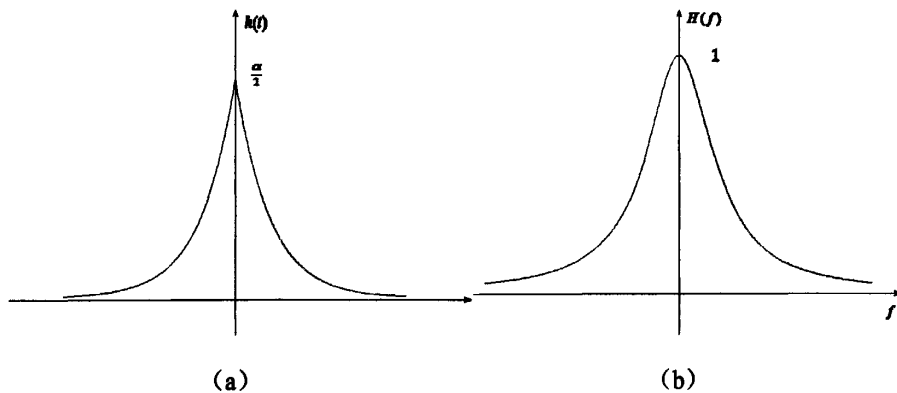


图 4.3 一组时域连续信号的傅里叶变换对

图 4.3 (a) 为时域上的信号 $h(t) = \alpha \times e^{-\alpha|t|} / 2 (\alpha > 0)$ ，(b) 为经过傅里叶变换后的频域函数 $H(f) = \alpha^2 / (\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)$ 。

傅里叶变换研究的是整个时间域和频率域的关系，并且不管是时间域还是频率域信号，都是连续变化的。然而，当运用计算机实现工程上的信号处理时，不可能对无限长且连续的信号进行测量和运算，而是取有限的时间片段，并将信号离散化进行分析。因此有了离散傅里叶变换 (discrete Fourier transform, DFT)。

2、离散傅里叶变换

下面以图 4.3 中的变换对为例，说明傅里叶变换到离散傅里叶变换的演变过程。

第一步：时域抽样

将原时域信号 $h(t)$ 进行抽样，即是将 $h(t)$ 与抽样函数 $\Delta_0(t)$ 相乘，抽样函数以及它相应的傅里叶变换如图 4.4 所示，抽样间隔是 T 。

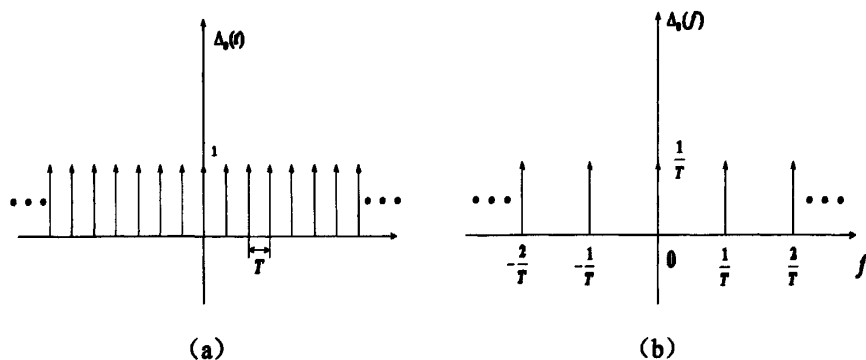


图 4.4 抽样函数的傅里叶变换对

抽样后的时域信号 $\hat{h}(t)$ 表示为:

$$\hat{h}(t) = h(t)\Delta_0(t) = h(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT) \quad \text{式(4-2)}$$

时域的相乘对应于在频域上，是频率函数的卷积。因此信号在时域被抽样后，它的频谱是连续信号频谱的形状以抽样频率为间隔周期地重复而得到^[15]，也称周期延拓。抽样后的函数 $\hat{h}(t)$ 以及它的傅里叶变换如图 4.5 所示:

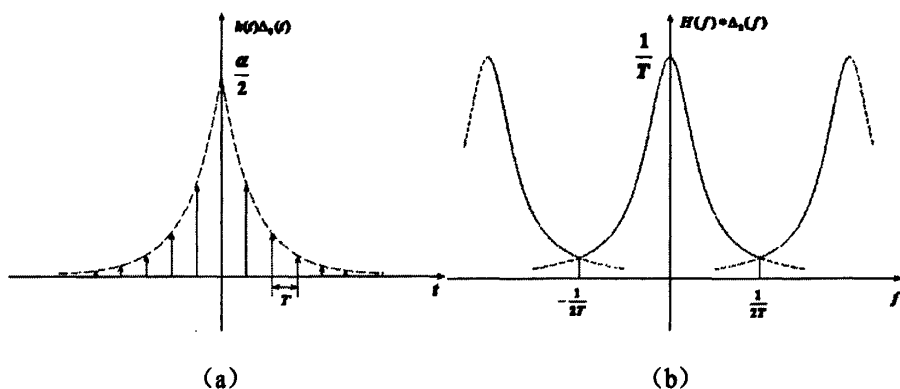


图 4.5 抽样后时域信号的傅里叶变换对

这是离散化的第一步，由图 4.5 看出，经过这一步，时域连续信号变成了一组离散的抽样脉冲，对应的频谱由于周期延拓出现了混叠效应。如果被抽样的信号是频带有限的，即当 $|f| > f_{\max}$ 时， $H(f) = 0$ ，那么只要对波形 $h(t)$ 的抽样频率高于它最高频率的两倍，抽样后的频谱就不会产生混叠，这就是时域抽样定理。但是本例中 $h(t)$ 的频谱范围是无限的，显然不属于上述情况，所以产生了图 4.5 (b) 所示的混叠。在实际应用中，为了减少误差，应该尽量使得抽样密一些，也就是使得抽样时间间隔 T 更小，对应的频谱重复周期更大。

第二步：时域截断

虽然经过了抽样，但是由于时域信号是无始无终的，那么抽样点就有无数个，这样的时域信号的傅里叶变换仍然不适合计算机运算，所以必须要将抽样后的函数截断，只截取有限个样本点。假设截断函数的截断区间为 $(-T_0/2, T_0/2)$ ，它的傅

里叶变换对如图 4.6 所示:

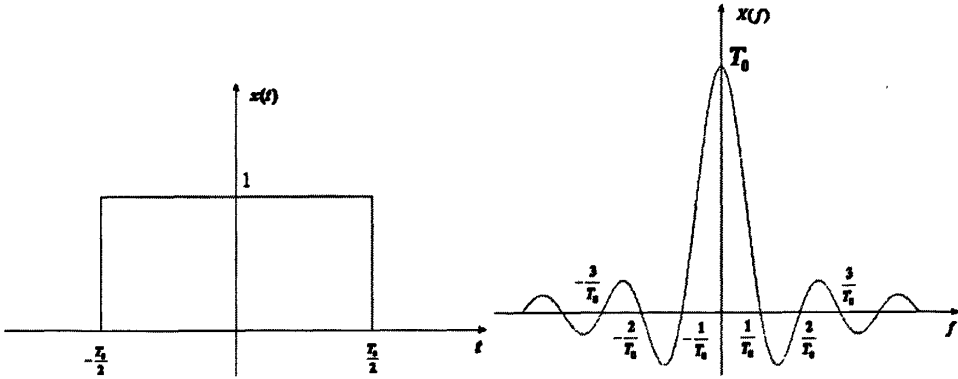


图 4.6 截断函数的傅里叶变换对

将抽样信号 $\hat{h}(t)$ 与截断函数相乘, 产生有限长的时间函数:

$$h(t)\Delta_0(t)x(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT) \right] x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT)\delta(t-nT) \quad \text{式(4-3)}$$

这里假设 $N = T_0/T$, 即在截断区间内, 共有 N 个采样点。

截断后的时域信号与其傅里叶变换如图 4.7 所示:

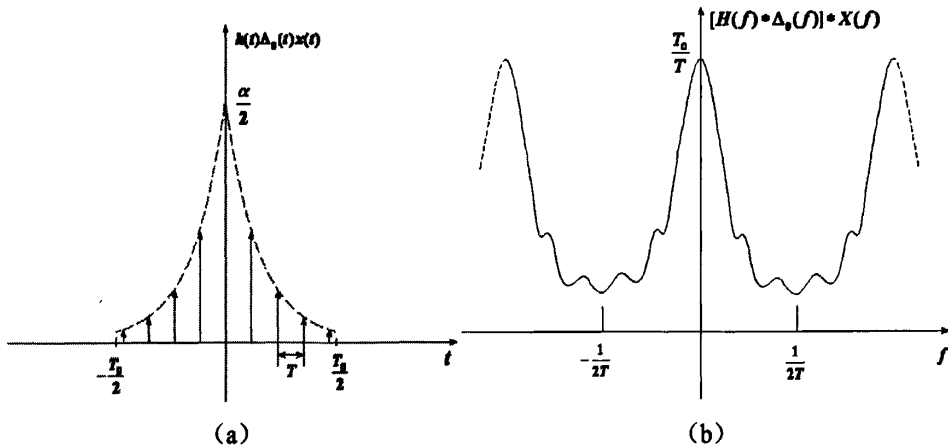


图 4.7 截断后时域信号的傅里叶变换对

上面是对原始傅里叶变换离散化的第二步, 经过这一步, 时域信号只保留了有限个 (本例中是 N 个) 离散抽样脉冲, 对应的频谱是将出现混叠效果的周期性频谱与截断函数的频谱做卷积, 频率函数出现了皱波^[16], 如图 4.7 (b) 所示。

截断函数是高度为 1 宽度为 T_0 的矩形函数, 其傅里叶频谱为 $\sin(T_0\pi f)/\pi f$ 。截断宽度 T_0 越大, $\sin(T_0\pi f)/\pi f$ 越是接近于冲激函数 $T_0\delta(f)$, 那么卷积后造成的皱波误差就越小。所以截取的时候, 应该尽量让截取长度宽些。

第三步: 频域抽样

经过了以上两步, 时域信号已经变成有限个数的离散采样点, 但是此时频谱函数仍然是连续函数, 所以和时域信号的处理方法一样, 在频域上也要对频谱函数进行抽样。下图是频率抽样函数的傅里叶变换对, 频率抽样间隔为 $1/T_0$:

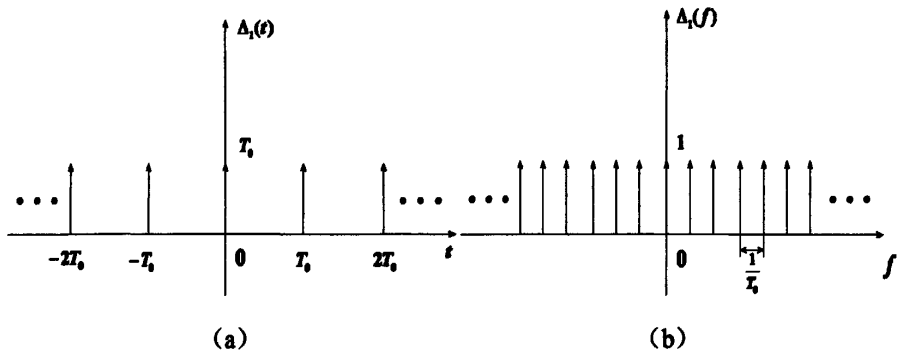


图 4.8 频率抽样函数的傅里叶变换对

时域上的抽样, 使得频率函数出现周期性, 根据傅里叶变换的对称性, 频域上的抽样也会使得时域函数呈现周期性。所以, 频域抽样的结果是使得抽样并截断后的时域信号与图 4.8 (a) 所示的信号 $\Delta_1(t)$ 卷积, $\Delta_1(t)$ 的表达式如下:

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \quad \text{式(4-4)}$$

最终的时域信号:

$$\tilde{h}(t) = h(t)\Delta_0(t)x(t) * \Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=0}^{N-1} h(nT)\delta(t - nT - rT_0)] \quad \text{式(4-5)}$$

$\tilde{h}(t)$ 与其傅里叶变换 $\tilde{H}(f)$ 如图 4.9 所示:

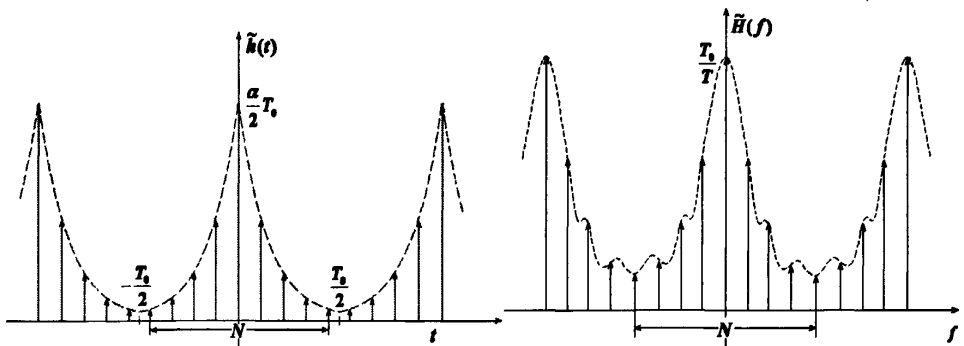


图 4.9 频率抽样后的傅里叶变换对

由式 (4-5) 可知, 经过频率抽样, 时域信号 $\tilde{h}(t)$ 变成了周期为 T_0 的离散序列, 令 $f_0 = 1/T_0$, 由傅里叶级数的知识, $\tilde{h}(t)$ 的傅里叶变换 $\tilde{H}(f)$ 是个等间隔的离散脉冲, 间隔为 f_0 :

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta(f - kf_0) \quad \text{式(4-6)}$$

其中 $\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{h}(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

将式 (4-5) 代入, 得:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \delta(t - nT - rT_0) e^{-j2\pi kt/T_0} dt \quad \text{式(4-7)}$$

因为积分的范围是在一个周期内的, 所以有:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \int_{T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \delta(t - nT) e^{-j2\pi kt/T_0} dt = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \int_{T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi kt/T_0} \delta(t - nT) dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) e^{-j2\pi knT/T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} \delta(t - nT) dt = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) e^{-j2\pi knT/T_0} \end{aligned} \quad \text{式(4-8)}$$

又 $T_0 = NT$, 代入上式

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) e^{-j2\pi kn/N} \delta(f - kf_0) \quad \text{式(4-9)}$$

由式 (4-9) 看出, $\tilde{H}(f)$ 只在 $f = kf_0$ 时才有值, 所以式 (4-9) 可以写成:

$$\tilde{H}(f) = \tilde{H}(kf_0) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{式(4-10)}$$

由于 $\tilde{H}(kf_0) = \tilde{H}((k+N)f_0)$, 所以 $\tilde{H}(kf_0)$ 和 $\tilde{h}(t)$ 一样, 都是以 N 为周期的周期序列。也就是说, 由一个周期内 N 个 $\tilde{h}(t)$ 时域值, 能求出 $\tilde{H}(kf_0)$ 一个周期内的 N 个值。所以分别用 $h(n)$ 和 $H(k)$ 来记这 N 个值:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{式(4-11)}$$

这就是离散傅里叶变换 (DFT) 的表达式, 其中, $W_N = e^{-j2\pi/N}$, N 称为 DFT 变换区间长度^[17]。

综上所述, 离散傅里叶变换是以连续傅里叶变换为基础, 经过抽样、截断, 把时域信号和频域信号都变成了离散的周期序列, 周期为 N , 将 N 个离散时间样本点和 N 个离散频率样本点对应起来。它是经由连续傅里叶变换变化而来, 所以本质上, 离散傅里叶变换是连续傅里叶变换的特殊情况。

假设有一正弦信号, 频率为 f , 峰值为 A , 那么由上述推导过程可知: 经过连续傅里叶变换, 正弦信号的频谱表现为出现在 f 点上的尖峰, 幅度为 $A/2$, 时域的抽样使频谱乘上一个系数 $1/T$, 时域的截断使频谱乘上系数 T_0 , 所以最终 DFT 的结果, 模值就是 $A/2$ 的 T_0/T 倍, 也就是 A 的 $N/2$ 倍。因此, 经过 DFT, 正弦信号在频谱上的峰值幅度变为 $A \times N/2$ 。

DFT 的第一个点是直流分量 (即 0Hz), 它的模值是时域信号直流分量的 N 倍, 而第 N 个点的再下一个点, 即第 $N+1$ 个点 (实际上不存在这个点) 对应的频率, 则是抽样频率 f_s 。相当于 DFT 频谱的频率覆盖范围是从直流 (0Hz) 直到抽样频

率 f_s ，整个频段被 $N-1$ 个点平均分成 N 等份，每一份的频段宽度为 f_s/N 。如第 n 个点所对应的频率为： $f_n = (n-1) \times f_s/N$ 。所以，如果想要拓宽 DFT 频谱的覆盖范围，则需要提高抽样频率 f_s ；如果想要提高频谱的频率分辨率，则需要增加抽样点数 N 。

假设有某个点为第 k 个点 ($0 \leq k \leq (N/2-1)$)，那么与该点关于中间对称的第 $N-k$ 个点的 DFT 为

$$\begin{aligned} DFT[h(N-k)] &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j2\pi n(N-k)/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j2\pi nk/N} \cdot e^{-j2\pi n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j2\pi nk/N} \end{aligned} \quad \text{式(4-12)}$$

从式 (4-12) 看出， $h(N-k)$ 的 DFT 值 $DFT[h(N-k)]$ 与 $h(k)$ 的 DFT 值 $DFT[h(k)]$ 幅度相等，相位相反。所以，仅从频谱幅度上看，DFT 的频谱是关于 $N/2$ 对称的。如图 4.10 所示，是一时域信号与其 DFT 频谱幅度：

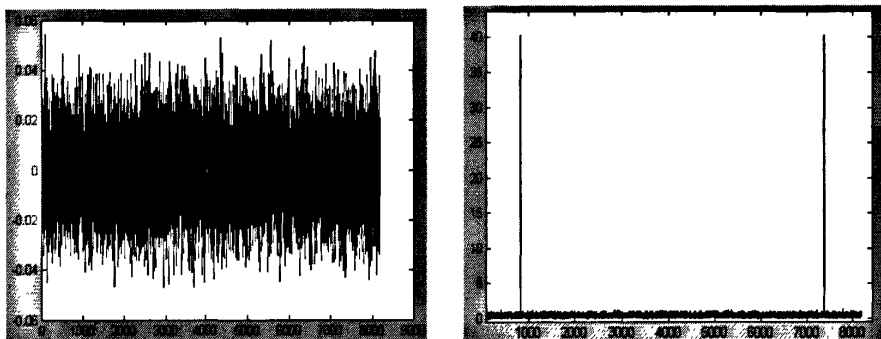


图 4.10 某一时域信号与其频谱幅度

由于 DFT 结果的对称性，通常我们只使用前半部分的结果，即频率小于 $f_s/2$ 的结果。

综上所述，对于低频方法，由于采样时间间隔为 $NT_0 + \tau_{Dead}$ ，总采样点数为 M ，那么频谱分辨率 $\Delta f = 1/[M \times (NT_0 + \tau_{Dead})]$ ；

并由于 DFT 的对称性，那么抖动频谱能反映的最高频率为 $f_N = 1/[2 \times (NT_0 + \tau_{Dead})]$ 。

所以说，低频方法的效果受到采样点数 M 和采样间隔 τ_{Dead} 的影响，采样点数越多，频率分辨率越高；采样间隔越短，频谱能反映的最高频率越高。所以，总体来说，较多的采样点数和较短的采样间隔，能够得到更好的效果。

DFT 是信号分析与处理中的一种重要变换。因直接计算离散序列中某一个值的 DFT，需要 N 次复数乘法和 $N-1$ 次复数加法，那么对整个序列的 N 个值，要全部计算 DFT，总共需要 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次的复数加法。这样当 N 较大时，计算量是非常可观的。因此在快速傅里叶变换算法出现之前，直接用 DFT 进行信

号的实时处理和谱分析是不切实际的, DFT 的应用也受到了局限。

1965 年库利 (J.W.Cooley) 和图基 (J.W.Tukey) 提出了一种 DFT 的快速算法^[18]。在这之后, 相继出现了桑德 (G.Sand) - 图基等快速算法, 又经人们的改进, 很快形成了一套高效算法, 这就是快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT)。这种算法的运算效率较之直接的 DFT 运算提高了 1~2 个数量级, 为信号的实时处理以及各种数字信号处理技术的应用创造了良好的条件, 加速了数字信号处理技术的发展。

本文采用的快速算法是在时域抽取法 (decimation-in-time FFT, 简称 DIT-FFT) 基 2FFT 算法的基础上, 经过改进得到的, 改进后的新算法使得变换点数 N 不再受 2 的 k 次方的限制。

3、时域抽取法基 2FFT

设序列 $x(n)$ 的长度为 N , 且满足

$$N = 2^M, \quad M \text{ 为自然数} \quad \text{式(4-13)}$$

按 n 的奇偶把 $x(n)$ 分解为两个点数都为 $N/2$ 点的子序列

$$x_1(r) = x(2r), \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad \text{式(4-14)}$$

$$x_2(r) = x(2r+1), \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad \text{式(4-15)}$$

则 $x(n)$ 的 DFT 为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=\text{偶数}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=\text{奇数}} x(n)W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{k(2r+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_N^{2kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_N^{2kr} \quad (\text{因为 } W_N^{2kr} = W_{N/2}^{kr}) \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{kr} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{式(4-16)} \end{aligned}$$

其中 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别是奇数序列 $x_1(r)$ 和偶数序列 $x_2(r)$ 的 $N/2$ 点 DFT。所以 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 序列的总点数分别都是等于 $N/2$ 的。对于 $0 \leq k \leq N/2-1$ 的情况, 可以直接用式 (4-14)。对于 k 大于 $N/2-1$ 的情况, 由于 DFT 是以采样点数为周期, 因此 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 都是以 $N/2$ 为周期, 且 $W_N^{k+(N/2)} = -W_N^k$, 可以得到:

$$\begin{aligned} X(k+(N/2)) &= X_1(k+(N/2)) + W_N^{k+(N/2)} X_2(k+(N/2)) \\ &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad \text{式(4-17)} \end{aligned}$$

式 (4-16) (4-17) 的运算可以用下图来表示:

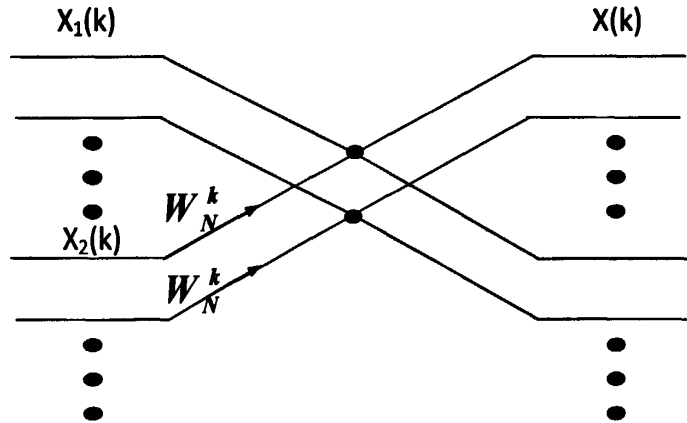


图 4.11 时域抽取法图示

图中有两个交叉，每一个交叉都称为一个蝶形运算符号。每个蝶形运算对应着一对 DFT 的计算，分别是 $X(k)$ 和 $X(k+(N/2))$ ，它们的序号相差 $N/2$ ，这里的 k 是小于 $N/2$ 的。

经过上述分解， N 点的 DFT 变成了两个 $N/2$ 点的 DFT 以及 $N/2$ 个蝶形运算。 $N/2$ 点 DFT 需要 $(N/2)^2$ 次复数乘法和 $N/2(N/2-1)$ 次复数加法。一个蝶形运算是一次复数乘法和两次复数加法。所以经过一次分解， N 点 DFT 总共需要 $2(N/2)^2 + N/2 \approx N^2/2$ 次复数乘法和 $N(N/2-1) + 2N/2 = N^2/2$ 次复数加法，和直接计算 N 点 DFT 相比，运算量减小了近一半。如果 $N/2$ 仍然是偶数，就可以再对 $N/2$ 点 DFT 做分解。方法与上面相同，只是由于区间变为原来的一半，此时 k 的范围是小于 $N/4$ 的，旋转因子也变成了 $W_{N/2}^k$ 。

同样的方法，可以进一步继续分解，直到每组的个数为 2，不能再往下分解为止。所以这种方法要求序列的个数 N 是 2 的整数次方。

4、改进的基 2 算法

基 2 算法的缺点是只能处理点数 N 为 2 的 K 次方的情况，但是在实际处理中，抽样得到的数据点数往往不能正好是 2 的 K 次方。如果是将点数截取一部分，必然使得点数减少，信息量减少，影响 DFT 变换后的频谱分辨率。例如，假设点数 N 为 2000，那么需要截去 976 个点，使点数为 $1024=2^{10}$ ，才能用基 2 快速算法。这么做，就失掉了将近一半的信息量，显然是很不合适的。

本文采用的算法是基于基 2 快速算法的改进方法，不要求点数为 2 的整数次方，只要 N 不是质数，就能实现快速运算。

基 2 算法可以看作是将总点数 N 分解为 K 个 2 相乘之积，也就是说 N 有 K 个分解数，并且每个分解数都是 2。那么如果 N 的分解数不是 2，且各个数也不一定相等，也同样可以用基 2 的原理来简化 DFT 运算。

如 N 有一个分解数为 3，即序列可以分为 3 段 ($3r, 3r+1, 3r+2$)，那么有

$$x_1(r) = x(3r), \quad r = 0, 1, \dots, N/3-1 \quad \text{式(4-18)}$$

$$x_2(r) = x(3r+1), \quad r = 0, 1, \dots, N/3-1 \quad \text{式(4-19)}$$

$$x_3(r) = x(3r+2), \quad r = 0, 1, \dots, N/3-1 \quad \text{式(4-20)}$$

$x(n)$ 的 DFT 为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{N/3-1} x(3r)W_N^{3kr} + \sum_{r=0}^{N/3-1} x(3r+1)W_N^{k(3r+1)} + \sum_{r=0}^{N/3-1} x(3r+2)W_N^{k(3r+2)} \\ &= \sum_{r=0}^{N/3-1} x_1(r)W_N^{3kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/3-1} x_2(r)W_N^{3kr} + W_N^{2k} \sum_{r=0}^{N/3-1} x_3(r)W_N^{3kr} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) + W_N^{2k} X_3(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad \text{式(4-21)}$$

式(4-21)的条件是 $k = 0, 1, \dots, N-1$ ，但是对 $x_1(r)$ 、 $x_2(r)$ 、 $x_3(r)$ 来说，它们序号的取值范围是小于等于 $N/3-1$ 的。由于 DFT 的周期性，当序号大于 $N/3-1$ 时，如序号为 $k+N/3$ 时 ($0 \leq k \leq N/3-1$)：

$$\begin{aligned} X(k+(N/3)) &= X_1(k+(N/3)) + W_N^{k+(N/3)} X_2(k+(N/3)) + W_N^{2[k+(N/3)]} X_3(k+(N/3)) \\ &= X_1(k) + W_N^{k+(N/3)} X_2(k) + W_N^{2[k+(N/3)]} X_3(k) \end{aligned} \quad \text{式(4-22)}$$

当序号为 $k+2N/3$ 时 ($0 \leq k \leq N/3-1$) 也是一样， $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 和 $X_3(k)$ 因为它们的周期性，都能将序号中的 $2N/3$ 去掉：

$$X(k+(2N/3)) = X_1(k) + W_N^{k+(2N/3)} X_2(k) + W_N^{2[k+(2N/3)]} X_3(k) \quad \text{式(4-23)}$$

式(4-21) (4-22) (4-23) 的运算可以用下图来表示：

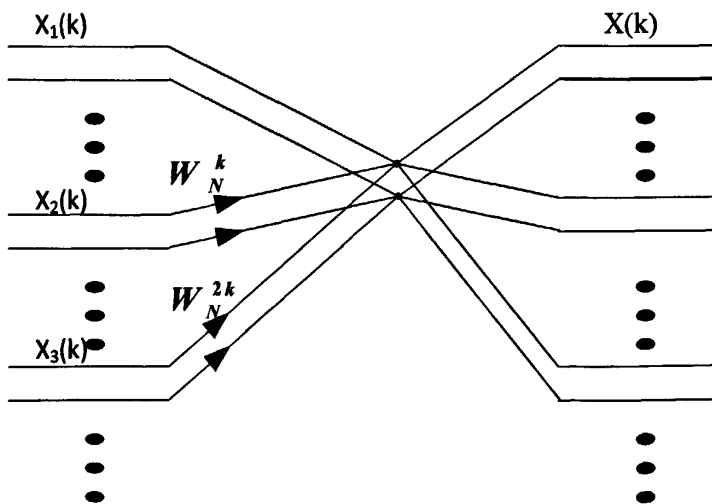


图 4.12 改进的基 2 算法图示

将总点数 N 分为三组，分别计算 $N/3$ 点的 DFT，再从每组分别挑出同一位置上的点（如：都挑三组中的第一个点）组成一个特殊的蝶形运算，如图 4.12 中有两个交叉，每一个交叉都是一个特殊的蝶形运算，它所表示的运算如式 (4-21) 所示。每个蝶形运算对应着一组 DFT 的计算，这一组 DFT 的个数由当前的分解数决定，本例中分解数为 3，所以这里每个蝶形运算对应 3 个 DFT 的计算，分别是 $X(k)$ ， $X(k+(N/3))$ ， $X(k+(2N/3))$ ，这里的 k 是小于 $N/3$ 的。

经过上述分解， N 点的 DFT 变成了三个 $N/3$ 点的 DFT 以及 $N/3$ 个蝶形运算。如果 $N/3$ 仍然不是质数，就可以再对 $N/3$ 点 DFT 继续做分解，方法与上面相同。注意这时的旋转因子变成了 $W_{N/3}^k$ 。

同样的方法，可以一直分解，直到每组的个数为质数，不能再往下分解为止。

改进型基 2FFT 算法的流程如图 4.13 所示：

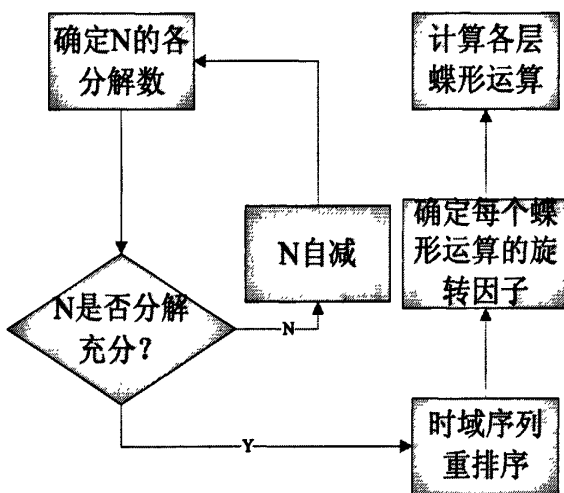


图 4.13 改进的基 2 算法流程图

第一步：确定 N 的各分解数

只要 N 不是质数，它就能被它的因数分解，这是本算法的基础。分解的次数越多，算法的速度越快。为了使分解的次数尽量多， N 的因数都尽量是质数，这样每个因数都不能再分解，才能使 N 的分解最充分。

当时域点数比较少时，用公式直接求 DFT，速度也很快，对程序的总体运行并不影响。例如 $N=300$ 时，直接求 DFT 的时间约是 0.016 秒。所以在本算法中，先用小的因数对点数 N 进行分解，并依次增大分解因数，当 N 的所有分解数都小于某个固定值时（将这个固定值用 roof 来表示），就认为 N 分解充分，此时的快速算法就变成求若干组的直接 DFT 以及很多蝶形运算。如果 N 不满足所有分解数小于 roof ，那么就将 N 减 1，再重新确定分解数。

这个 roof 值的确定是经过综合考虑的，如果定得过大，必然会影响 FFT 的速度，因为分解的最终结果，还是要对最大分解数个点做 DFT 运算；如果定得过小，

可能使得 N 的最大分解数大于该值, 而不得不将 N 减小。本算法中 roof 定的值是 100, 当然, 这个值是可以变动的, 特别是当 N 值比较常规时, 如 1000, 20000 等, 而不是一些较难分解的数如 10009 时, 可以适当把 roof 值降低, 也不会造成 N 的截断, 并且较低的 roof 值可以让 N 的分解更充分。

所以在这一步要做的工作是, 先找到 2 到 100 之间的所有质数, 然后用它们从小到大一个一个去试, 看是不是 N 的分解数, 如果是, 将 N 除以该分解数; 如果不是, 再试下一个。直到 N 被分解到小于 100 为止。如果不能将 N 分解到小于 100, 将 N 减 1, 重复以上步骤。最终确定了 k 个元素的一维数组, 存的是 N 的各分解数。

第二步: 时域序列重新排序

每一次分解, 都是将时域序列当前的每一分组再分成若干份, 那么各点的顺序都会改变, 具体的变化规律是: 假设将 N 点序列分成 k 份, 第 n 点在重新排序后的序号是 $k \times \text{mod}(n/k) + |n/k|$, 式中 mod 表示取余数, $\|$ 表示取整数。

经过若干次分解后, 要确定重新排序后的序号。方法是先得到 N 的所有分解数 x_i , 即 $N = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_k$, 然后从第一个分解数开始, 将最初的时域序号 n 除以分解数, 商再给 n , 余数从左往右依次写下, 直到最后一个分解数。这样余数就组成了一个数字, 这个数字的位数与分解数的个数相同, 每一位的进制就是对应的分解数, 将这个数字转化成十进制数, 就是 n 经过若干次分解后的序号。

第三步: 确定每个蝶形运算的旋转因子

蝶形运算是先算出蝶形左边的各 DFT 值 $X_1(k), X_2(k), \dots$, 再将各值乘以各自的旋转因子, 然后相加, 就得到了蝶形右边的 DFT 值 $X(k)$ 。由式 (4-21), 第一次分解后, 蝶形右边的 DFT $X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) + W_N^{2k} X_3(k) + \dots$, 旋转因子右下角的数为 N 。这是因为当前求的是 N 点的 DFT 值。

经过了一次分解后, 时域序列已被分成了若干组 (组数由第一个分解数决定, 假设是 m), 再做第二次分解时, 其实是对各组分别再进行分解, 这时的蝶形运算求的是 N/m 点的 DFT 值, 所以此时旋转因子右下角的数变成了 N/m 。

在这一步中, 要求出某次分解后旋转因子右下角的数值, 方法是将总点数 N 除以当次和之前所有次分解的因数, 就得到本次分解后, 旋转因子右下角的数值。

第四步: 计算各层蝶形运算

假设最后一个分解数为 x_k , 那么经过完全分解后, N 点序列最终被分成了 N/x_k 组, 每组有 x_k 个点。

每组的 x_k 个点的 DFT 就只能用公式直接求了。多次分解对应着多次的蝶形运算, 将最终分解后的各组 DFT 求出来后, 相当于求出了多个相连蝶形运算最左边的值, 那么相连蝶形运算的其他部分, 在知道了旋转因子后都能够依次求出。

5、改进的基 2FFT 算法的仿真实验

表 4.1 改进的基 2 算法与直接 DFT 的对比表

时域序列的点数 N	直接求 DFT	改进型基 2FFT 算法
5000	5.0 秒	0.11 秒
10000	20.67 秒	0.17 秒
20000	81.93 秒	0.39 秒

上述数据是在多次实验求出的平均值。从上表可以看出，该算法能够显著提高 DFT 的速度，使得主程序能够快速地完成 DFT，将离散时域信号变换到频域。由于这个算法不要求 N 是 2 的 k 次方，同时又保证了 DFT 的精度。

4.1.3 窗函数

1、时域截断的影响：

由上节可知，离散傅里叶变换的实质是将无限长的连续信号转化成有限长的离散信号进行处理，具体方法是从信号中截取一个时间片段，并对这一段的信号进行 N 点抽样和周期延拓，得到虚拟的无限长的信号。这时对应的傅里叶频谱也是周期离散的，只取一个周期内的 N 点，就是离散傅里叶变换的频谱。

周期延拓后的信号与真实信号是不同的，离散傅里叶变换是连续傅里叶变换的近似，它们之间的差异是由于抽样和截断造成的。

如果时域的抽样频率小于 2 倍的信号最高频率，或者信号不是带限的，就会造成频域的混叠，如图 4.5 所示。时域的截断对应频域上信号频谱与窗函数频谱的卷积，会使频谱出现皱波，如图 4.7 所示。

下面以正弦信号为例，说明截断对离散傅里叶变换的影响：

(1) 截取长度等于周期

假设正弦信号 $h(t)$ 的周期为 T_0 ，峰值为 A ，它的时域波形和傅里叶变换如图 4.14 所示：

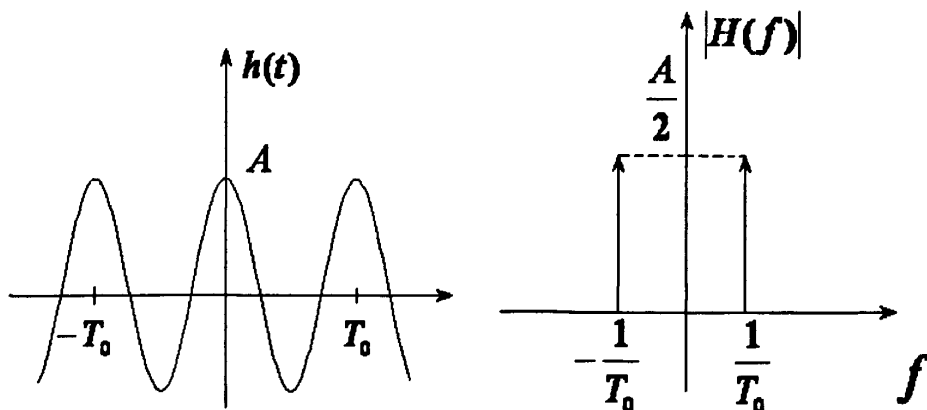


图 4.14 正弦信号和其频谱幅度

对 $h(t)$ 进行抽样，抽样函数如图 4.4 (a) 所示，抽样的时间间隔为 T ，抽样后的结果如图 4.15 所示：

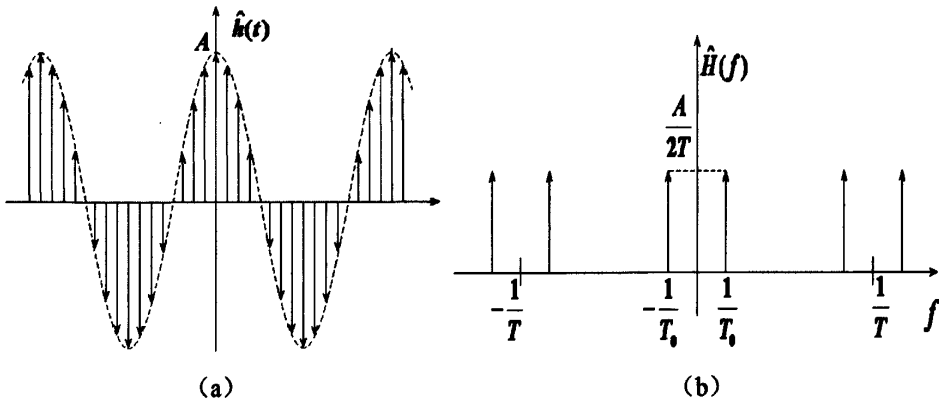


图 4.15 抽样后的正弦信号和其频谱幅度

由于正弦信号是带限的，并且抽样频率大于 2 倍的信号最高频率，因此没有出现频谱的混叠。同时看到，由于时域的抽样，频谱幅度会发生变化，变化的系数为 $1/T$ 。即此时的冲激信号的幅度为 $A/2T$ 。

接下来，用矩形函数对抽样后的信号进行截断，矩形函数如图 4.16 所示：

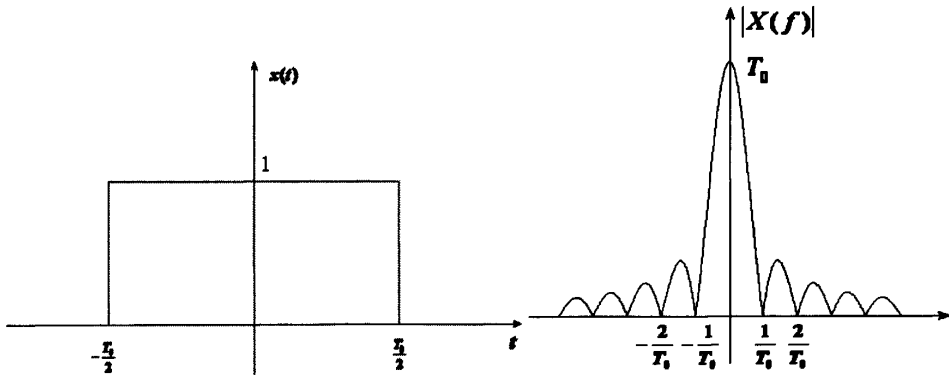


图 4.16 截断函数和其频谱幅度

截断函数的频谱为 sinc 函数，它的特点是，在零点取最大值 T_0 ，除零点外，所有横坐标为 $1/T_0$ 的整数倍上的取值都为 0。

截断函数的长度为 T_0 ，正弦信号的周期也为 T_0 ，所以经过截断后，恰好保留了原信号的一个整周期。经过截断后的频谱，是图 4.14 的频谱与图 4.16 的频谱卷积得到的，如图 4.17：

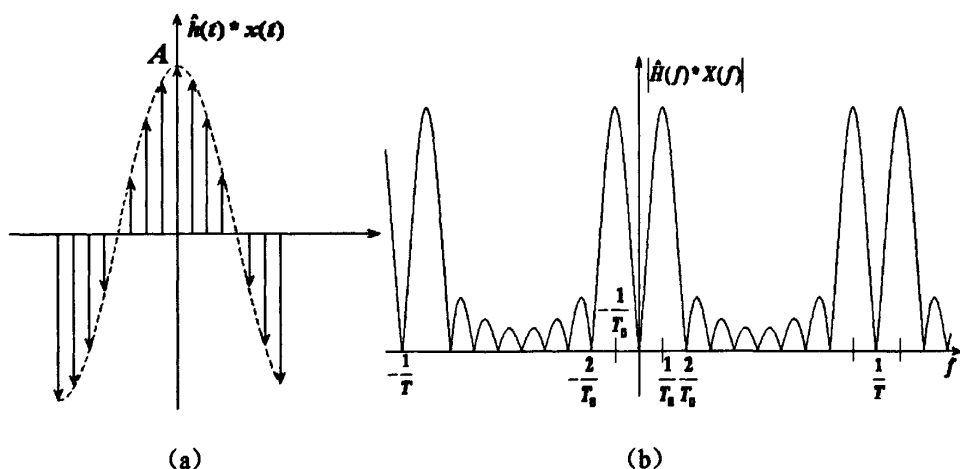


图 4.17 截断后的正弦信号和其频谱幅度

如图 4.17 所示, sinc 函数的频谱由于与冲激函数卷积, 发生了频域的搬移。

最后, 对频谱做间隔为 $1/T_0$ 的抽样, 这样时域信号就产生周期为 T_0 的延拓。因为正弦信号的周期为 T_0 , 截断的宽度也是 T_0 , 所以延拓后的时域曲线与原信号一样, 只不过做了抽样。

对于频谱来说, 由于 sinc 函数频谱的特点, 且 $T_0 = NT$, 频域抽样的结果是只在 $k/T \pm 1/T_0$ (k 为整数) 上出现脉冲, 这与图 4.15 (b) 的频谱是一样的, 所以经过截断, 只是频谱幅度发生变化, 并没有产生其他的频率成分。

以上是截断长度刚好为一个整周期的情况, 当截取长度是周期整数倍时, 情况与上面类似, 频谱没有产生其他的频率成分。

(2) 截取长度不等于周期

假设正弦信号 $h(t)$ 的周期为 T_0' , 峰值为 A 。处理的过程同上, 这样经过抽样后的频谱为:

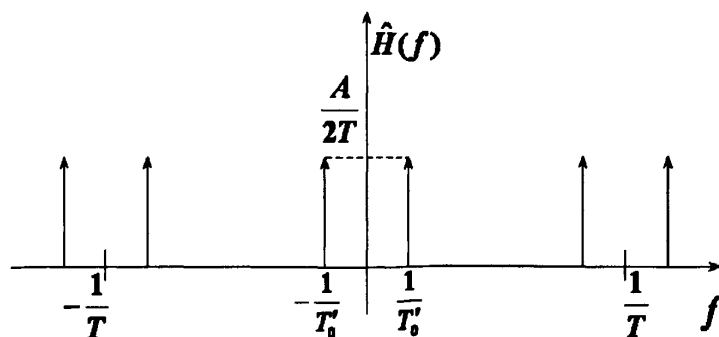


图 4.18 正弦信号抽样后的频谱

仍然用宽度为 T_0 的矩形函数截断, 截断长度 T_0 与正弦信号的周期 T_0' 不同, 结果如图 4.19:

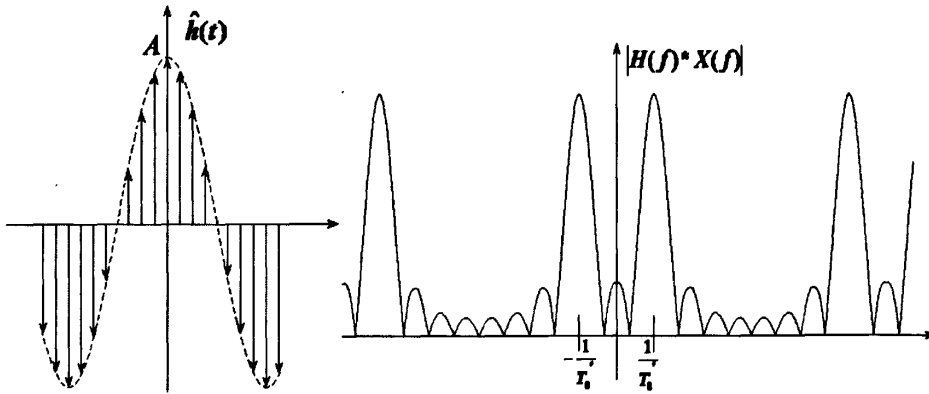


图 4.19 截断后的信号和其频谱

对频谱做间隔为 $1/T_0$ 的抽样，即是对时域信号做周期为 T_0 的周期延拓，结果如图 4.20:

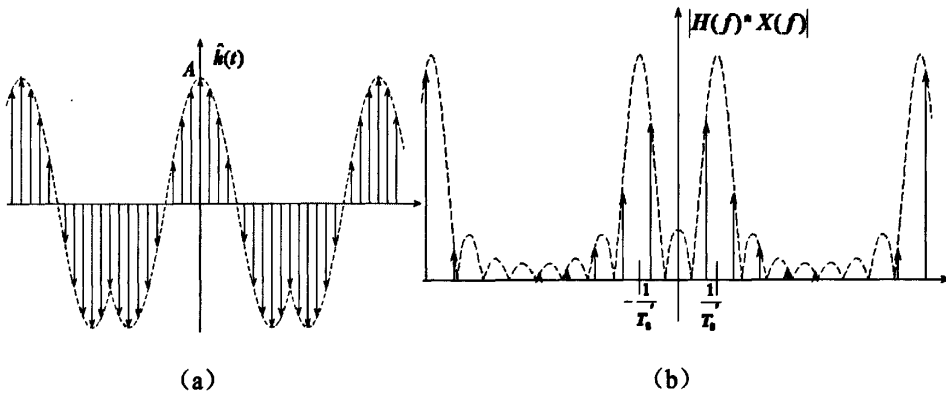


图 4.20 频域抽样后的信号和其频谱

所以，从时域的角度看，对于周期函数来说，如果截断长度不是周期的整数倍，就会使得周期延拓后的时域信号出现突变点，如图 4.20 (a) 所示。时域的这种剧烈变化，必然使频谱产生附加的频率成分。

从频域的角度来看，由于 sinc 函数移位了 $1/T_0'$ 而不是 $1/T_0$ ，这时再做间隔为 $1/T_0$ 的抽样，相当于 $1/T_0$ 的整数倍与 sinc 函数的零点发生了错位，使得抽样点上原本应该是零的地方不再是零，产生了附加的频率成分，这种现象被称为频谱的能量泄露 (leakage)。

由于实际处理数据的需要，在时域的截断是必须的，往往又难于做到恰好是信号频率的整数倍周期截断，所以泄漏效应总是存在^[19]，它使离散傅里叶变换与连续傅里叶变换之间出现显著的差异，所以必须尽可能地减少“泄漏”，以使这种差异最小。一般有两种方法减少能量泄露：增大截断长度和加窗。

增大截断长度，即让矩形窗变宽，则窗函数的频谱 (sinc 函数) 将趋近于脉冲函数 $\delta(f)$ ，这样在中心频率以外的频率成分衰减得更快，因而频域卷积中由于截断而产生的误差将变小。当截断长度趋于无穷大时，即不截断，就不存在能量泄露了。

离散傅里叶变换总要对时域信号进行截断，为了减少频谱能量泄漏，可以用不同的截断函数截取时域信号，这些截断函数被称为窗函数。能量泄漏与窗函数频谱主瓣两边的旁瓣有关，如果旁瓣的高度趋向于零，而主瓣中的能量又相对集中在中心频率，就能够更接近于理想的频谱。在实际应用中，要根据实际需要，选择不同的窗函数对时域信号进行截断。

2、栅栏效应：

对一个连续信号做抽样，只得到信号的某些离散的值，其效果就好像通过栅栏向外看风景，大部分的景物都被栅栏挡住了，只有在缝隙中间的景物才能被观察到，这种现象就是栅栏效应。

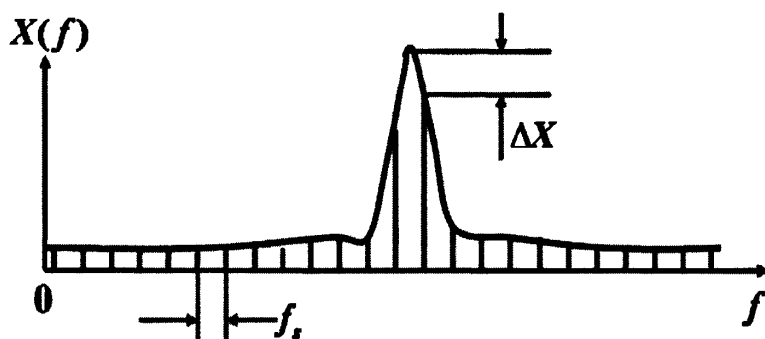


图 4.21 栅栏效应示意图

在 DFT 运算时，要进行时域抽样和频域抽样，都会产生栅栏效应。对于时域抽样，只要抽样频率满足抽样定理，栅栏效应不会对原信号有影响；但是对于频域抽样，栅栏效应可能会丢失很重要的频率信息，产生误差。如图 4.21，由于抽样点不在原频谱的峰值上，抽样后的峰值与原峰值相差了 ΔX 。谱峰越是尖锐，栅栏效应造成的误差越大。例如，正弦信号的频谱为信号频率点上的脉冲，当频域抽样点与信号频率不重合时，抽样后得到的频谱值全为 0，栅栏效应将使频谱信息全部丢失，误差为百分之百。

提高抽样率，即缩小抽样间隔 f_s 能够减小栅栏效应带来的误差。频谱的宽度一定， f_s 缩小，相当于栅栏的“缝隙”增多，因此丢失的频率信息就相对减少，误差变小。

上面分析的栅栏效应使正弦信号频谱信息全部丢失的情况，只是对于连续且无始无终的信号，但是在实际情况中，做 DFT 时，时域信号都是经过截断的，即出现了能量泄露，这样即使抽样点不在脉冲出现点上，也能观察到脉冲峰值的近似频谱值，而不是为 0。

所以说，没有能量泄露，栅栏效应造成的误差可能会很大，从这个角度上看，能量泄露并不是完全有害的。

3、常用窗函数：

实际中常用的窗函数，可分为以下几种类型：

指数窗：指数形式的时间函数，例如高斯窗。

三角函数窗：三角函数的复合形式，即余弦或正弦函数等组合成的函数，例如海明窗、汉宁窗等；

幂窗：时间变量的某种幂次函数，如三角形、矩形或梯形的高次幂；

下面介绍几种常用窗函数：

(1) 矩形窗 (rectangle window)

矩形窗的函数形式为

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad \text{式(4-24)}$$

相应的频谱为

$$W(\omega) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega T} \quad \text{式(4-25)}$$

矩形窗使用得最普遍，因为在时域截断时不加窗就是使信号通过了矩形窗。

矩形窗频谱的主瓣宽度为 $1/T$ ，第一副瓣比主瓣低 13dB。

矩形窗的优点是主瓣宽度小，能量比较集中，缺点是旁瓣较高，能量泄露较大；并产生负旁瓣，出现负谱现象。

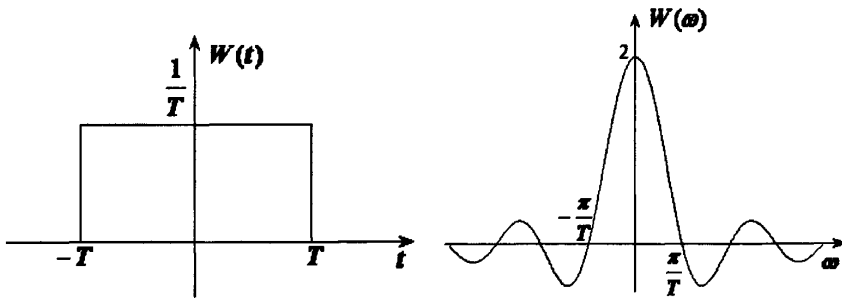


图 4.22 矩形窗和其频谱

(2) 三角窗 (Bartlett window)

三角窗的定义为

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad \text{式(4-26)}$$

相应的频谱为

$$W(\omega) = \left(\frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2}\right)^2 \quad \text{式(4-27)}$$

三角窗与矩形窗比较，主瓣宽度约为矩形窗的两倍，但旁瓣小，且无负旁瓣，如图 4.23 所示。

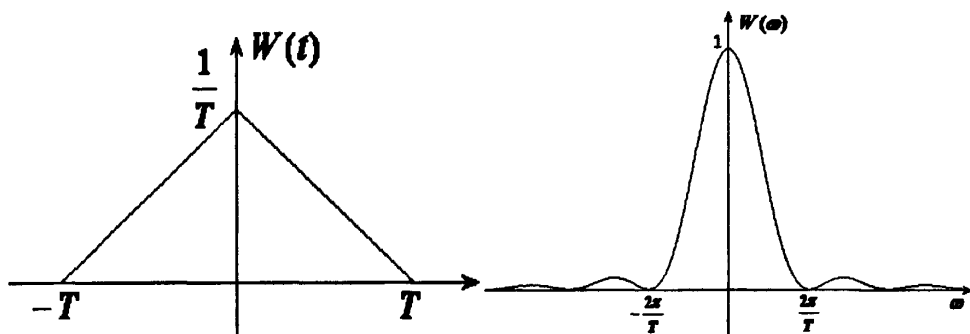


图 4.23 矩形窗和其频谱

(3) 高斯窗 (Gauss window)

高斯窗属于指数窗的一种，其时域表达式为：

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} e^{-at^2} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad \text{式(4-28)}$$

式中的常数 a 决定了高斯窗衰减的快慢。如果选择了合适的 a 值，能够很好地降低时域截断处的函数值，从而减少时域突变，降低截断造成的影响。高斯窗频谱的主瓣较宽，因而频谱分辨率相对较低；第一旁瓣能够衰减到 -55dB，并且没有负的旁瓣。

(4) 汉宁窗 (Hanning window)

汉宁窗又称升余弦窗，其时域表达式为：

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{T} t \right) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad \text{式(4-29)}$$

相应的频谱为

$$W(\omega) = \frac{\sin \omega T}{\omega T} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega T + \pi)}{\omega T + \pi} + \frac{\sin(\omega T - \pi)}{\omega T - \pi} \right] \quad \text{式(4-30)}$$

由式 (4-30) 可以看出，汉宁窗的频谱可以看作是 3 个 sinc 型函数之和，且后两项相对于第一项向左、右各移动了 π/T ，从而使旁瓣互相抵消，消除能量泄漏和干扰。

(5) 海明窗 (Hamming window)

海明窗也是一种升余弦窗，又称为改进的升余弦窗，其时域表达式为：

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} (0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi}{T} t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad \text{式(4-31)}$$

相应的频谱为

$$W(\omega) = 1.08 \frac{\sin \omega T}{\omega T} + 0.46 \left[\frac{\sin(\omega T + \pi)}{\omega T + \pi} + \frac{\sin(\omega T - \pi)}{\omega T - \pi} \right] \quad \text{式(4-32)}$$

从时域表达式可以看出，海明窗与汉宁窗一样，都是余弦窗，只是加权系数不同。海明窗的频谱也是由 3 个 sinc 函数合成，对比式 (4-30) 和式 (4-32)，发现海明窗的频谱加权系数能提高主瓣高度，并同时降低旁瓣，从而更能减小能量泄漏。

除了上述几种常用窗函数外，还有如平顶窗、布莱克曼 (Blackman) 窗、帕仁 (Parzen) 窗、凯塞 (Kaiser) 窗等。

在实际应用中，应根据被分析信号的性质与处理要求选择窗函数。如果要求分析窄带信号，且对幅度要求的精度高，则应该选择旁瓣衰减较大的窗函数，如汉宁窗、海明窗等；如果要求找出精确的主瓣频率，而对幅值精度要求不高，则可以选择主瓣宽度比较窄，频谱分辨率较高的矩形窗。

4、窗函数及补偿

本软件的目的是求出各抖动成分在时域中的大小，对幅值的精度要求较高，因此在这里，选用旁瓣衰减较大的汉宁窗对时域信号进行截断。

图 4.24 是汉宁窗与矩形窗 (不加窗) 的频谱对比，可以看出，窗函数的宽度都为 $2T$ 时，矩形窗频谱的第一个过零点在 π/T ，主瓣宽度为 $2\pi/T$ ，汉宁窗的第一个过零点在 $2\pi/T$ ，主瓣宽度为 $4\pi/T$ ，主瓣幅度降低，旁瓣则显著减小。矩形窗的第一旁瓣衰减 13dB，而汉宁窗的第一旁瓣衰减 32dB。因此，从减小能量泄漏的角度出发，汉宁窗主瓣较宽，栅栏效应造成的幅度误差较小，优于矩形窗。但从频率的角度出发，汉宁窗主瓣的频率分辨率没有变，栅栏效应造成的频率误差并没有改善。

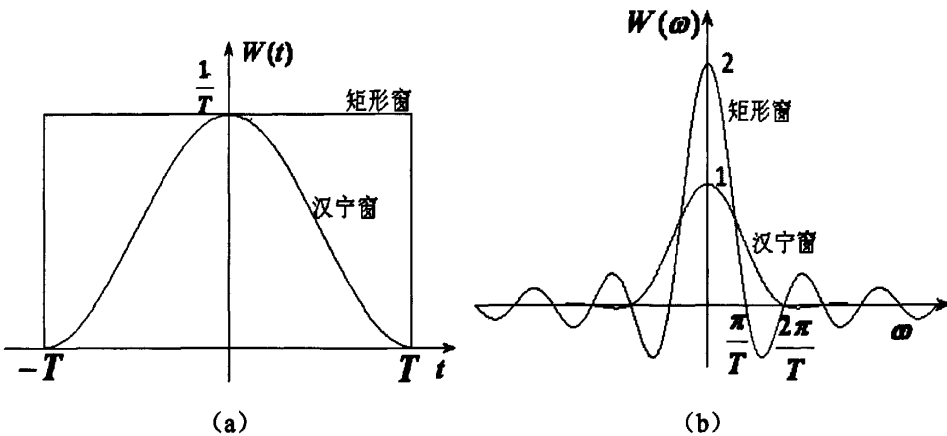


图 4.24 汉宁窗和矩形窗的时域和频域对比

(1) 汉宁窗的幅度补偿

由以上分析可知，用汉宁窗截断，较之不加窗，在幅度上能够明显提高主瓣峰值与旁瓣泄露的比值，减小能量泄露的影响。

但是从图 4.24 (a) 中看出, 汉宁窗的时域幅度比矩形窗小, 因此加了汉宁窗后, 原信号的幅度和能量都降低了。这一点从 4.24 (b) 中也能看出, 汉宁窗频谱的峰值是矩形窗频谱峰值的一半, 与原信号的频谱卷积后必然降低其幅度和能量。因此, 在用汉宁窗对信号截断时, 要使用一定的恢复系数来补偿, 提高信号的频谱, 以消除加窗后对功率谱和幅度谱的影响。

常用的恢复系数的确定方法有两种, 分别是根据无泄露时幅度相等的原则和能量相等的原则来确定:

第一种方法: 由于汉宁窗的频谱峰值是矩形窗的一半, 因此, 当没有能量泄露时, 原信号加汉宁窗后的频谱幅度值为不加窗的一半, 恢复系数 $K_1 = 0.5$, 因此将加汉宁窗后的频谱幅度值乘以 2 得到不加窗的频谱幅度。

但是这个系数是在无泄露的理想状态下才准确, 一旦出现能量泄露, 由于抽样点不在峰值上, 必然使抽样到的峰值小于无泄露时的峰值, 那么用此恢复系数得到的幅度值必然偏小。能量泄露很难避免, 因此这一系数 K_1 的恢复效果并不理想:

第二种方法: 以能量相等的原则, 确定加汉宁窗后能量的恢复系数 K_1' 。

矩形窗的能量:

$$E_1 = \int_{-T}^T \left(\frac{1}{T}\right)^2 dt = \frac{2}{T} \quad \text{式(4-33)}$$

汉宁窗的能量:

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{-T}^T \left[\frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{T} t\right)\right]^2 dt = \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T (1 + \cos \frac{2\pi}{T} t)^2 dt \\ &= \frac{1}{4T^2} \left[2T + \int_{-T}^T 2 \cos \frac{\pi}{T} t dt + \int_{-T}^T \cos^2 \frac{\pi}{T} t dt\right] = \frac{3}{4T} \end{aligned} \quad \text{式(4-34)}$$

所以恢复系数 $K_1' = E_1 / E_2 = 8/3$ [20]。

也就是说, 不加窗 (或是加矩形窗) 时的原信号能量是加汉宁窗信号能量的 8/3 倍。信号加汉宁窗后, 能量绝大部分都集中在主瓣, 因此可以认为主瓣中能量大概就是原信号能量的 3/8。

汉宁窗的主瓣宽度为 $4\pi/T$, 频域抽样的间隔为 π/T , 所以能量泄露时, 主瓣内共有 4 条谱线。将这 4 条谱线的幅度平方加和, 再乘以 8/3, 就是恢复出的能量, 也就是信号不加窗时的能量, 再开方, 就是无泄露不加窗时的频谱幅度, 也就是理想频谱幅度值。

下面是两种恢复系数的补偿效果对比, 所用的信号是离散正弦信号, 幅度为 1, 共 200 点, 每一组的频率都不相同。理论上, 如果没有能量泄露, 频谱的峰值应该是 100:

表 4.2 两种补偿方式的对比

组数	K_i 的补偿结果	K_i 的误差	K'_i 的补偿结果	K'_i 的误差
1	90.4818	9.52%	100.2060	0.21%
2	90.4151	9.58%	100.2064	0.21%
3	97.9061	2.09%	100.2273	0.23%

从表 4.2 的对比可以看出,从能量角度的补偿效果优于幅度角度的补偿,因此,本软件就是用前者。如果是在理想状态下,只有正弦信号时,主瓣内的 4 条谱线很好找,就是幅度最高的 4 条谱线,但是在实际应用中,由于还有其他成分的影响,使得主瓣谱线难以确定,所以在程序中,首先是找到局部的峰值,这条谱线一定是在主瓣内的,然后把这条谱线和它左右两边的 4 条谱线一起来补偿,得到真实的峰值幅度。

(2) 汉宁窗的频率补偿

由上面的分析可知,和矩形窗相比,汉宁窗对频率误差并没有改善,因此,频率的补偿也是必不可少的。

汉宁窗的离散幅度频谱如图 4.25:

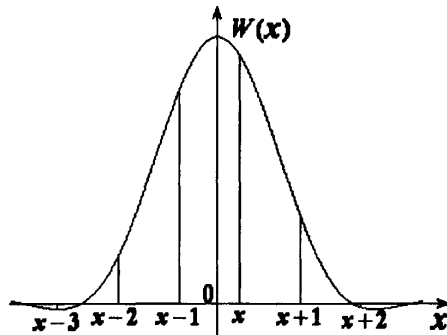


图 4.25 汉宁窗的离散幅度频谱

图 4.25 的离散幅度频谱的横坐标是经过归一化的,将真实的频谱峰值定为原点,将横坐标除以 π/T , 这样每两个离散点之间的间隔就是 1, 而不是 π/T , 横坐标不再是角频率, 而是自然数, 表示当前抽样点距离真实峰值有多少个离散间隔, 除非没有能量泄露, 否则各抽样点的横坐标都不为整数。

发生能量泄露时, 频谱上能找到的离散峰值不是真实峰值, 只能找到图 4.25 的 x 处, 而频率补偿就是要得到离散峰值与真实峰值的距离 x 。

本软件频率补偿用的是能量重心校正法^[21], 它的原理是汉宁窗离散频谱的能量重心无穷逼近坐标原点, 即

$$\sum_{i=-n}^n W^2(x+i) \cdot (x+i) = 0 \quad \text{式(4-35)}$$

实际中 DFT 离散幅度频谱的横坐标都是大于等于 0 的, 如图 4.26 所示:

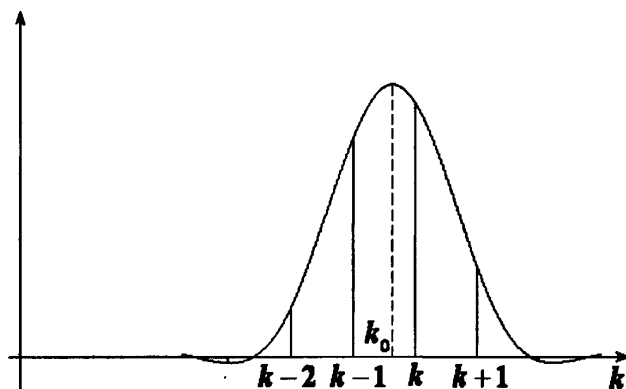


图 4.26 汉宁窗频率校正示意

这里的横坐标 k 表示离散频谱的序号，都是整数，假设总点数为 N ，那么 $0 \leq k \leq N-1$ 。真实峰值的位置定为 k_0 ，由式 (4-35)，将频谱左移 k_0 ，得：

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n}^n W^2(k-k_0+i) \cdot (k-k_0+i) &= \sum_{i=-n}^n W^2(i) \cdot (k-k_0+i) \\ &= \sum_{i=-n}^n W^2(i) \cdot (k+i) - \sum_{i=-n}^n W^2(i) \cdot k_0 = 0 \quad \text{式(4-36)} \end{aligned}$$

所以， k_0 可以表示为：

$$k_0 = \frac{\sum_{i=-n}^n W^2(i) \cdot (k+i)}{\sum_{i=-n}^n W^2(i)} \quad \text{式(4-37)}$$

式 (4-37) 就是能量重心频率校正法的通用公式，从公式中可以看出，该方法是用频谱中所有点的能量重心作为真实峰值，因此能量点取得越多，补偿后的频率位置越准确。但是实际应用中，不可能取到频谱中的所有点，由于汉宁窗的主瓣集中了频谱的绝大部分能量，因此一般是取主瓣内的能量点来近似补偿。

下表是加窗并补偿后得到的频率与加窗后不补偿得到的频率对比，所用的信号是离散正弦信号，频率分别为 24Hz，33Hz 和 67Hz：

表 4.3 频率补偿与不补偿的结果对比

频率	不补偿	不补偿的误差	频率补偿	补偿后的误差
24Hz	25Hz	4.17%	23.996Hz	0.016%
33Hz	35Hz	6.06%	32.998Hz	0.006%
67Hz	65Hz	2.99%	67.002Hz	0.003%

从表 4.3 看出，能量重心频率校正法能明显提高频率的精度。与幅度补偿一样，因为主瓣内谱线难以确定，所以在程序中，是用局部的峰值谱线和它左右两边的 4

条谱线一起来补偿, 得到真实的峰值位置。

4.1.4 提取 PJ,RJ

1、PJ 的频谱特点:

周期性抖动 PJ 在时域上表现为正弦特性, 在频域上, PJ 是在相应的频率点上出现的尖峰, 如图 4.27 所示:

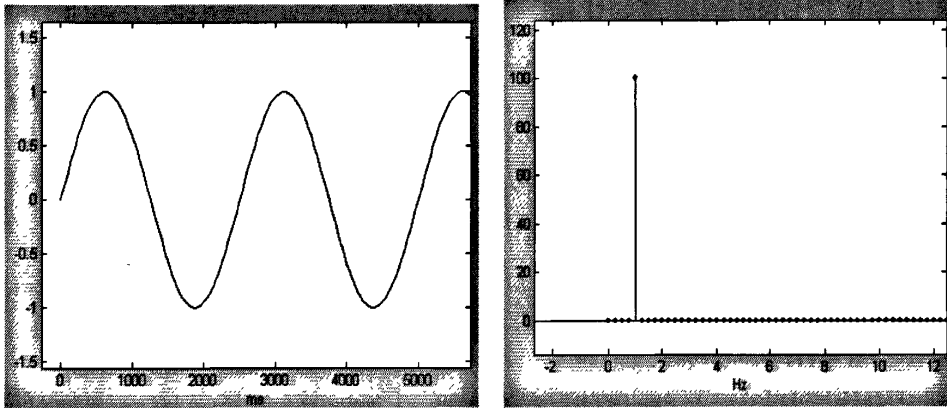


图 4.27 周期性抖动和其离散频谱

由 4.1.2 节的推导知, 想要通过频谱还原 PJ, 只需找到尖峰, 根据其所在位置确定相应的频率; 将其模值除以 $N/2$ 得到 PJ 的峰值。要注意的是, 由于存在能量泄露, 尖峰的模值和位置都要经过补偿。

2、RJ 的频谱特点:

设 $\{x(n) | (n=0,1,2,\dots,N-1)\}$ 是一均值为 0, 方差为 σ^2 的平稳高斯白噪声序列, 由于方差是倍数的平方, 可以将 $x(n)$ 表示成序列 $\{\alpha_n | (n=0,1,2,\dots,N-1)\}$ 。其中 x_0 、 x_1 、 x_2 、...、 x_{N-1} 为独立同分布的实随机变量^[22], 且均服从标准正态分布 $N(0,1)$ 。由离散傅里叶变换的公式:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sigma \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (k=0,1,2,\dots,N-1) \quad \text{式(4-38)}$$

有限个相互独立的正态随机变量, 它们的线性组合仍然是正态随机变量, 所以对 $\forall k \in [0,1,2,\dots,N-1]$, $X(k)$ 是正态随机变量, 其均值和方差分别为^[23]:

$$E[X(k)] = \sigma \sum_{n=0}^{N-1} E[x_n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = 0 \quad \text{式(4-39)}$$

$$\begin{aligned} D[X(k)] &= E[X(k)\overline{X(k)}] = E[\sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{j\frac{2\pi}{N}km}] \\ &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E[x_n x_m] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = N\sigma^2 \end{aligned} \quad \text{式(4-40)}$$

所以对 $\forall k \in [0, 1, 2, \dots, N-1]$, 随机变量 $X(k)$ 的统计特性服从 $N(0, N\sigma^2)$ 的高斯分布。

对 $\forall k_1, k_2 \in [0, 1, 2, \dots, N-1]$, 且 $k_1 \neq k_2$, 计算 $X(k_1)$ 与 $X(k_2)$ 的互相关函数:

$$\begin{aligned} E[X(k_1)\overline{X(k_2)}] &= E\left[\sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}k_1 n} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{j\frac{2\pi}{N}k_2 m}\right] \\ &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E[x_n x_m] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(k_1 n - k_2 m)} \\ &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k_1 - k_2)n} = 0 \end{aligned} \quad \text{式(4-41)}$$

所以 $X(k_1)$ 、 $X(k_2)$ 互不相关。因此, 平稳高斯白噪声序列的离散傅里叶变换 $\{X(k) | (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)\}$ 为平稳高斯白噪声序列。

设 $X(k) = X + jY$, 求 X 、 Y 的分布规律。下面以 X 为例, 说明求解过程:

$$E[X] = \frac{1}{2} E[X(k) + \overline{X(k)}] = 0 \quad \text{式(4-42)}$$

$$\begin{aligned} D[X] &= E[X + \overline{X}] = E\left\{\frac{1}{2}[X(k) + \overline{X(k)}] \cdot \frac{1}{2}[\overline{X(k)} + X(k)]\right\} \\ &= \frac{1}{4} E[X^2(k) + \overline{X(k)}^2 + 2X(k)\overline{X(k)}] = \frac{1}{2} N\sigma^2 \end{aligned} \quad \text{式(4-43)}$$

有限个相互独立正态随机变量的线性组合仍然是正态随机变量, 所以 X 是正态随机变量, 且服从 $N(0, 1/(2N\sigma^2))$ 。

下面证相关性:

$$\begin{aligned} E[X_1 \overline{X_2}] &= E\left\{\frac{1}{2}[X(k_1) + \overline{X(k_1)}] \cdot \frac{1}{2}[\overline{X(k_2)} + X(k_2)]\right\} \\ &= \frac{1}{4} E[X(k_1)\overline{X(k_2)} + X(k_1)X(k_2) + \overline{X(k_1)}\overline{X(k_2)} + \overline{X(k_1)}X(k_2)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{式(4-44)}$$

所以 X_1 、 X_2 互不相关。 X_1 、 X_2 、... 为平稳高斯白噪声序列。

其他的证明过程与 X 相似, 最后得出结论: $X \sim N(0, 1/(2N\sigma^2))$, $Y \sim N(0, 1/(2N\sigma^2))$, 且 X 、 Y 相互独立。

因为 $|X(k)| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, 由概率论知识^[24]可知: $|X(k)|$ 服从参数为 $\sqrt{N\sigma^2}/2$ 的瑞利分布, 它的概率分布密度、均值、方差如下:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{N\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{N\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{式(4-45)}$$

$$E[|X(k)|] = \frac{\sqrt{\pi N \sigma^2}}{2} \quad \text{式(4-46)}$$

$$D[|X(k)|] = (1 - \frac{\pi}{4}) N \sigma^2 \quad \text{式(4-47)}$$

因为对 $\forall k_1, k_2 \in [0, 1, 2, \dots, N-1]$, 且 $k_1 \neq k_2$ 时, $X(k_1)$ 、 $X(k_2)$ 相互独立, 所以 $|X(k_1)|$ 、 $|X(k_2)|$ 相互独立。因此频谱模值 $\{|X(k)| | (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)\}$ 是服从瑞利分布的平稳随机过程。

从上面的公式可以看出, 平稳高斯分布序列经过 DFT 后, 频谱的模值服从瑞利分布, 并且如式 (4-30) 和式 (4-31) 所示, 频谱模值的均值和方差都与时域序列的方差有关系。因此, 可以先计算频谱模值的均值或方差, 再通过式 (4-30) 或式 (4-31) 反推出时域高斯的方差。

3、分离 PJ、RJ

PJ 和 RJ 经过 DFT, 在频谱上表现为不同的特性: PJ 是在某些位置的尖峰; RJ 是比较平稳且幅度不高的背景噪声。如图 4.28 所示:

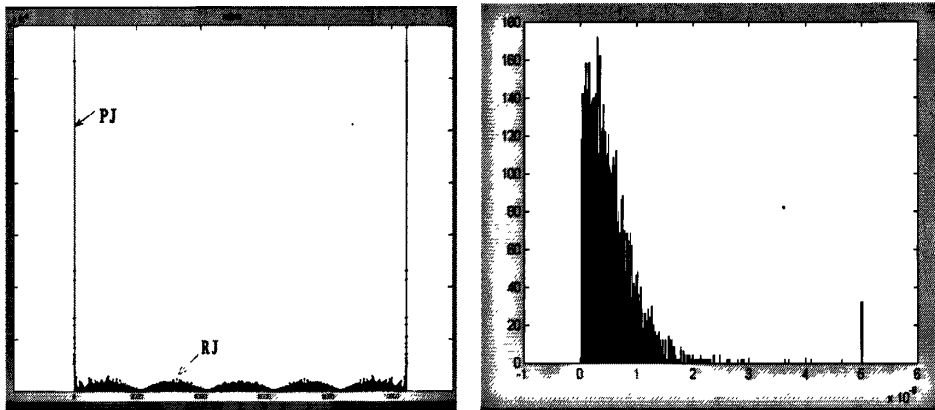


图 4.28 PJ+RJ 的频谱和直方图

从直方图上看, RJ 频谱值较小, 集中在直方图左边, PJ 的频谱则只在直方图右边。由中心极限定理, 如果不考虑 PJ 的存在, 对于 RJ 频谱来说, 1 倍的均方差 σ 以下, 集中了 68.3% 的点, 3 倍的 σ 以下, 集中了 99% 的点。所以只要找到 RJ 频谱的 σ 值, 基本上所有的 RJ 频谱幅值都在 3σ 以下。所以 3σ 可以作为区分 PJ 和 RJ 的门限。

因此, 分离 PJ 和 RJ 的关键是找到 σ 值。在只考虑 RJ 的情况下, 由于 1 倍的均方差下, 集中了 68.3% 的点, 所以只要将所有频谱幅度从小到大排序, 那么序号排在总数的 68.3% 的位置的那个幅度值, 必然接近于 σ 值。本软件就是用这种方法, 只是因为要考虑 PJ 的存在, 相当于实际的点数比只有 RJ 时还要多, 因此, 确定 σ 值时的 68.3% 这个比值也要变小。经过多次试验, 最后确定以总点数的 65.26% (如果不是整数, 则取整) 位置上的幅度作为 σ 值。

4.1.5 验证方法的正确性

低频方法是针对时钟信号，分离其中的 PJ 和 RJ，所以验证用的信号是由信号发生器产生的一定频率的时钟。RJ 是固有抖动，它不可避免地存在于任何系统中，因此不需要再人为地加入 RJ 成分；PJ 不是固有抖动，可以通过频率调制的方法向时钟人为地添加 PJ 成分。

(1) 频率调制对周期宽度的影响

调制是用一个信号（调制波）对另一个信号（载波）进行影响，改变后者的特性的过程。调制分为幅度调制和角度调制，这里应用的频率调制就是角度调制的一种，另一种角度调制是相位调制。

角度调制是指载波信号的角度随调制信号的幅度有规律地变化，假设一角度调制信号的时域表达式为：

$$f_m(t) = A \cos[\omega_c t + \theta(t)] \quad \text{式(4-48)}$$

其中， A 为载波的幅度， ω_c 为载波的角频率，单位为 rad/s， $[\omega_c t + \theta(t)]$ 为角度调制信号的瞬时相位， $\theta(t)$ 为信号相对于原载波信号的瞬时相位偏差，由频率和相位的关系，可知 $d\theta(t)/dt$ 表示角度调制信号与载波信号角频率 ω_c 的瞬时频率偏差， $d[\omega_c t + \theta(t)]/dt$ 为瞬时频率。

频率调制是指信号的瞬时频率偏差随调制信号的幅度有规律地变化，假设调制信号为 $m(t)$ ，则有如下关系：

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = K_{FM} m(t) \quad \text{或} \quad \theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{FM} m(\alpha) d\alpha \quad \text{式(4-49)}$$

其中， K_{FM} 称为频率偏移常数。

将式 (4-47) 代入式 (4-46)，可得频率调制信号的时域表达式：

$$f_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + \int_{-\infty}^{\infty} K_{FM} m(\alpha) d\alpha] \quad \text{式(4-50)}$$

假设调频信号 $m(t)$ 为余弦信号，即：

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t) \quad \text{式(4-51)}$$

其中， A_m 为调频的调制深度，单位与角频率相同，是 rad/s。它表示了调制信号对载波信号影响的大小。因为是调频，即是用调制波影响载波的频率，所以调制深度 A_m 越大，表示调制信号对载波频率的影响越大，使得载波信号的频率变化越大。 ω_m 是调频信号的频率，称为调制频率，单位也是 rad/s。它表示了调制信号对载波信号影响的快慢，即是调制信号使得载波信号频率变化的快慢。调制频率 ω_m 越大，载波信号的频率变化得越快。

将式 (4-49) 代入式 (4-48) 得：

$$\begin{aligned}
 f_{FM}(t) &= A \cos[\omega_c t + K_{FM} \cdot A_m \int_{-\infty}^t \cos(\omega_m \alpha) d\alpha] \\
 &= A \cos[\omega_c t + \frac{K_{FM} \cdot A_m}{\omega_m} \sin \omega_m t] \\
 &= A \cos[\omega_c t + \beta_{FM} \sin \omega_m t]
 \end{aligned}
 \tag{4-52}$$

其中, $\beta_{FM} = K_{FM} \times A_m / \omega_m$ 称为调频系数, $\omega_c t + \beta_{FM} \sin \omega_m t$ 是载波信号经过频率调制后的瞬时相位。对瞬时相位求导是瞬时频率, 即瞬时频率可表示为:

$$d(\omega_c t + \beta_{FM} \sin \omega_m t) / dt = \omega_c + \beta_{FM} \omega_m \cos \omega_m t = \omega_c + K_{FM} A_m \cos \omega_m t \tag{4-53}$$

从式 (4-51) 看出, 载波信号的角频率由原来的 ω_c 变为 $\omega_c + K_{FM} A_m \cos \omega_m t$, 那么载波信号的周期也由 $2\pi / \omega_c$ 变为 $2\pi / (\omega_c + K_{FM} A_m \cos \omega_m t)$ 。经过调频, 被调制载波信号的角频率和周期都随着调制信号做周期性的变化。如图 4.29 所示:

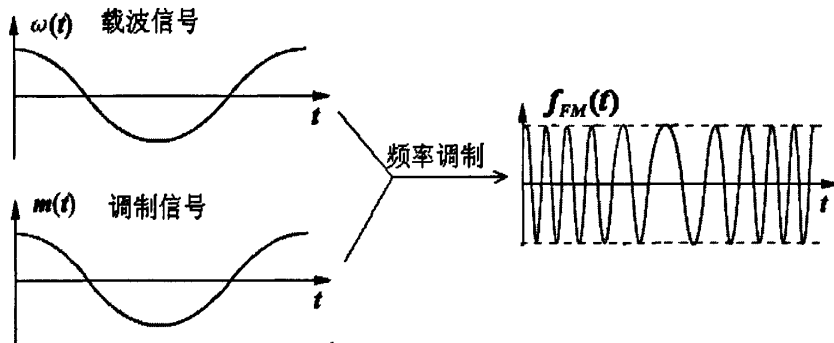


图 4.29 频率调制

例如: 时钟频率为 1MHz, 调频信号的调制深度为 10KHz, 调制频率为 2KHz。频率偏移常数 K_{FM} 为 1, 那么被调制后, 载波信号的频率由原来的 $2\pi \times 10^6$ rad/s, 变为 $2\pi \times 10^6 + 2\pi \times 10^4 \times \cos(2\pi \times 2 \times 10^3 \times t)$ rad/s; 周期也由原来的 10^{-6} s, 变为 $1 / (10^6 + 10^4 \times \cos(2\pi \times 2 \times 10^3 \times t))$, 用 matlab 对此时的周期仿真, 结果如图 4.30:

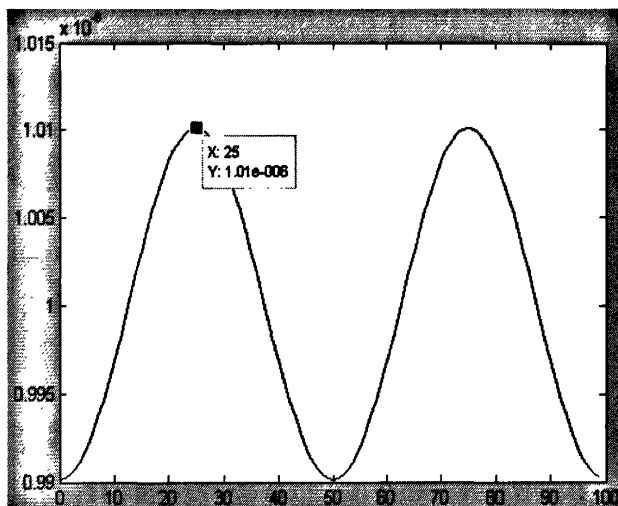


图 4.30 频率调制后的周期曲线

从图 4.30 可以看出, 此时的周期是围绕着 10^{-6} s 上下浮动, 浮动的范围是在 $\pm 10^{-8}$ s 之间, 且呈现正弦性。周期宽度的变化即是 2.2.2 节介绍的周期抖动, 此时的 10^{-8} s 就是周期抖动的峰值。

另外, 频率调制产生的周期抖动值的大小也可以通过理论方法来计算。频率调制就是让载波的频率发生周期性变化, 变化的范围是在 $\pm K_{FM} A_m$ 之间, 所以调制后, 载波频率最大能够到 $\omega_c + K_{FM} A_m$, 最小能够到 $\omega_c - K_{FM} A_m$, 所以周期宽度的最大差值为:

$$\frac{2\pi}{\omega_c - K_{FM} A_m} - \frac{2\pi}{\omega_c + K_{FM} A_m} \quad \text{式(4-54)}$$

这也就是周期抖动的峰峰值。

仍然是上面的例子, 代入式 (4-52) 得周期抖动的峰峰值为 2.0002×10^{-8} s, 这与仿真结果是吻合的。

(2) 频率调制对相位的影响

上面讨论的是频率调制对频率以及周期抖动的影响, 由周期抖动与相位抖动的关系可知, 频率调制也会产生相位抖动。

由式 (4-50), 经过频率调制后, 载波信号的瞬时相位由原来的 $\omega_c t$ 变成了 $\omega_c t + K_{FM} \times A_m \times \sin \omega_m t / \omega_m$, 瞬时相位的变化范围是在 $\pm (K_{FM} \times A_m / \omega_m)$ 之间, 因此相位变化的峰峰值为 $2 \times (K_{FM} \times A_m / \omega_m)$ 。

相位变化是弧度值的变化, 单位是 rad, 而相位抖动是时间的概念, 单位是 s, 因此要将相位变化转换成时间的变化。已知一个周期对应的弧度值为 2π rad, 所以只要知道相位变化在 2π rad 中所占的比重, 就知道了相位抖动在一个周期内所占的比重, 假设时钟周期为 T_c , 则相位抖动的峰峰值可表示为:

$$TIE_{p-p} = \frac{2K_{FM} \cdot A_m \cdot T_c}{\omega_m} \cdot \frac{T_c}{2\pi} = \frac{K_{FM} \cdot A_m \cdot T_c}{\omega_m \cdot \pi} \quad \text{式(4-55)}$$

对比式 (4-37) 和式 (4-38), 可以看出周期抖动只与时钟频率和调制深度有关, 而相位抖动与时钟频率、调制深度和调制频率都有关系。

4.2 时钟的高频方法

低频方法的优点是速度快, 频谱分辨率高, 就是说能分到很细的频率。但是它受到采样时间间隔 τ_{Dead} 的影响, 如果采样时间间隔很长, 必然导致频谱的最高频率很低, 这样的好处是增加了分辨率, 但是坏处是限制了较高频率 PJ 的测量。

下面介绍的高频方法弥补了以上的不足, 它能够将频谱的最高频率提高到时钟频率的一半, 因而有效提高了离散频谱的带宽。

高频方法的流程如图 4.31:

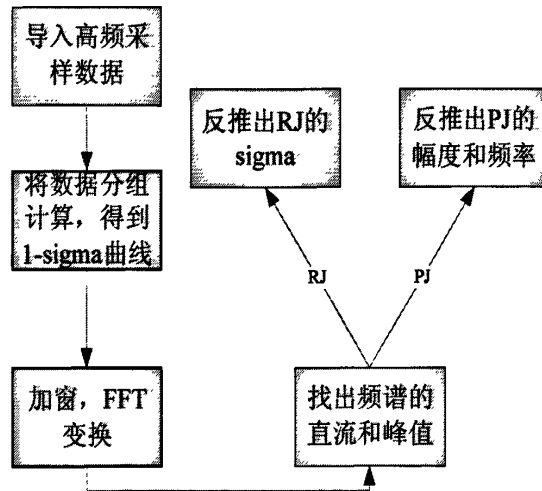


图 4.31 高频方法流程图

4.2.1 数据获取方法

对于被测时钟, 首先取一个周期的宽度, 采样 M 个样本, 这 M 个样本能够求出一个标准差 σ , 记做 σ_1 ; 然后对被测时钟取两个周期的宽度, 也是采样 M 个样本, 求出样本的标准差, 记做 σ_2 ; 以此类推, 继续增加采样的周期个数, 直到测量到 N 个周期的宽度, 得到 σ_N 。如图 4.32 所示:

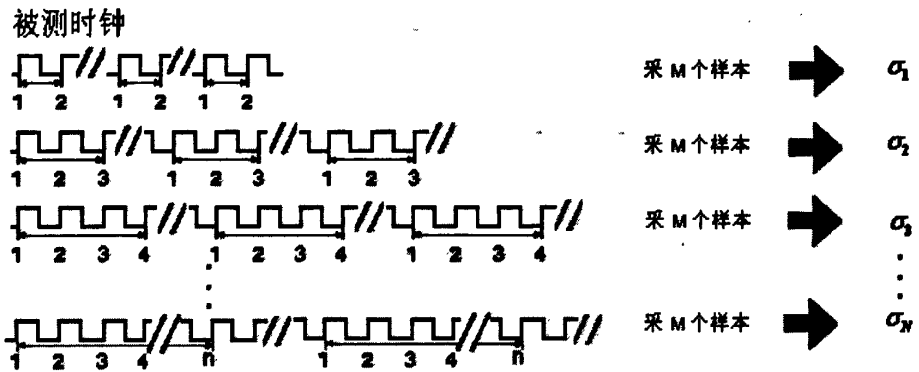


图 4.32 高频方法的采样方式

用上述方法最终得到了一组 σ 值，其中任意一个值 σ_k ($1 \leq k \leq N$) 表示被测时钟 k 个周期宽度的标准差。将这一组数依次画出，就得到了被测时钟的 1-sigma 曲线。如图 4.33 所示：

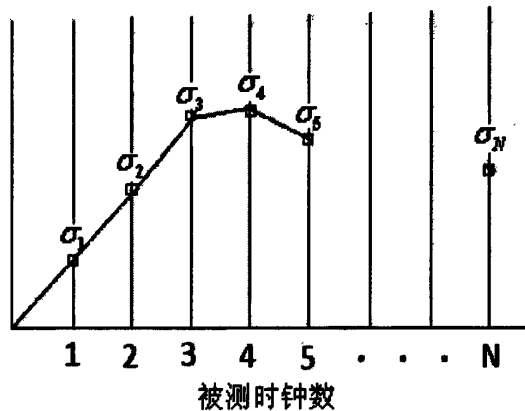


图 4.33 1-sigma 曲线

从上图可以看出，1-sigma 曲线是随着周期数的增多不断变化的，横轴是被测时钟数，其实也是时间长度，相当于 1-sigma 曲线随着时间的推移在不断变化。因此可以说，横轴上每两个点之间的间隔其实是一个时钟周期。

1-sigma 曲线反映了抖动的变化情况。如果存在周期性抖动，1-sigma 曲线会呈现周期性的变化，但是如果该周期性变化的频率较低，那么需要经过较长时间才能观察到一个周期。因此，为了能够更清楚地显示 1-sigma 曲线的周期性变化，应该尽量把 N 值定得大一些。

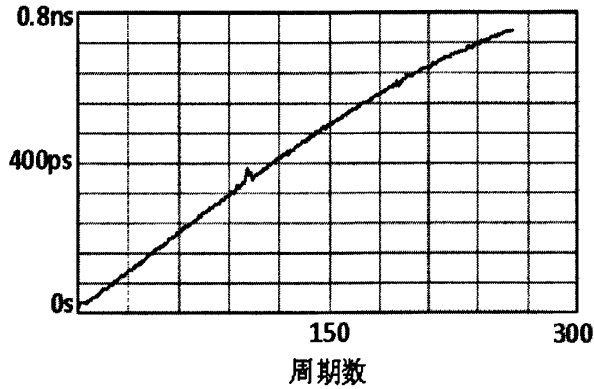


图 4.34 1-sigma 曲线随周期数而增长

如图 4.34 所示，1-sigma 曲线随着周期数的增大而增长，但是由于周期数 N 的限制，不能看出 1-sigma 曲线是否已经到达了最大值，也看不出 1-sigma 曲线是否有周期性。因此，为了更好地分析 1-sigma 曲线，应增大 N 的值，如图 4.35 所示：

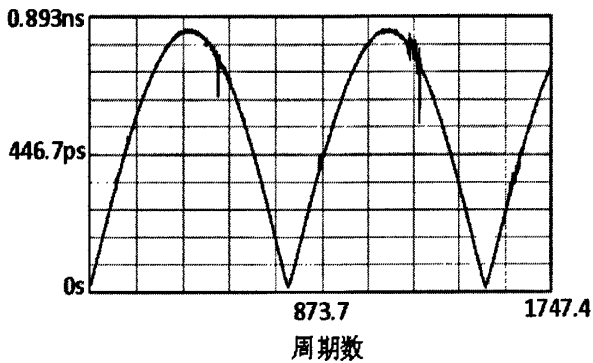


图 4.35 1-sigma 曲线的周期性

增大了 N ，1-sigma 曲线清楚地显示出了周期性。这个时候将 1-sigma 曲线做 FFT 变换，根据 PJ 和 RJ 的不同特性，从频谱中将两者分离出来。

4.2.2 高频方法的原理

1、RJ 的 1-sigma 曲线

随机抖动没有叠加性，所以在求不同周期数的 σ 值时，基本等于随机抖动原本的标准差。所以相应的 1-sigma 曲线是围绕着随机抖动的标准差上下波形的。

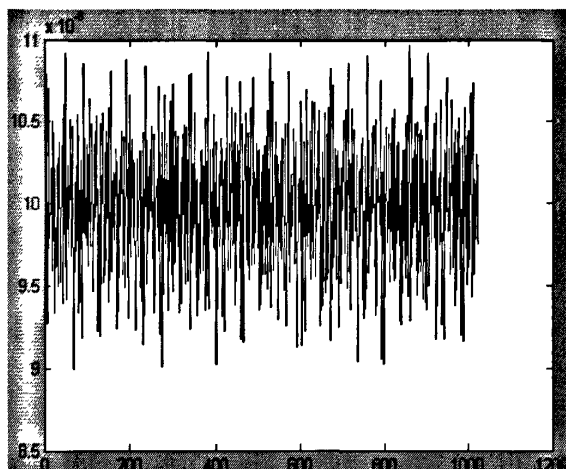


图 4.36 RJ 的 1-sigma 曲线

图 4.36 是用 matlab 得到的仿真波形。时钟只加了 RJ，且 RJ 的 σ 值为 $0.1\mu\text{s}$ ， $N=1024$ ，每组 100 个点。从图上可以看出，1-sigma 曲线是围绕着 $0.1\mu\text{s}$ 上下波动。对应的频谱如图 4.37 所示：

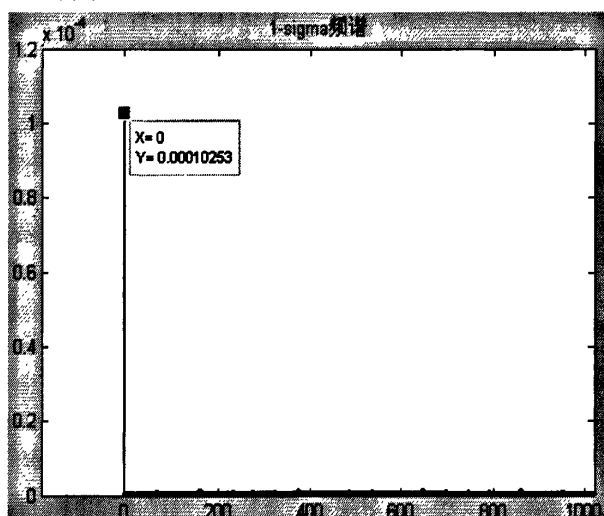


图 4.37 RJ 的 1-sigma 曲线频谱

可见，由于 RJ 的 1-sigma 曲线围绕 $0.1\mu\text{s}$ 波动，相当于直流分量为 $0.1\mu\text{s}$ ，由 4.1.2 节知，经过 FFT 后，频谱的第一个点就是直流分量，它的模值是时域直流分量的 N 倍。

所以高频求解 RJ 的方法，就是将 1-sigma 曲线频谱的第一个点的模值除以 N ，得到的就是 RJ 的 σ 值。

2、PJ 的 1-sigma 曲线

当时钟存在周期性抖动时，对应的 1-sigma 曲线也会呈现周期性变化。假设时钟为 1MHz ，调制深度为 1KHz ，调制频率为 10KHz 。相应的周期抖动的峰峰值是 2ns 。用 matlab 仿真，做出时钟的 1-sigma 曲线和 1-sigma 平方曲线，周期数 $N=1024$ ，如图 4.38 所示：

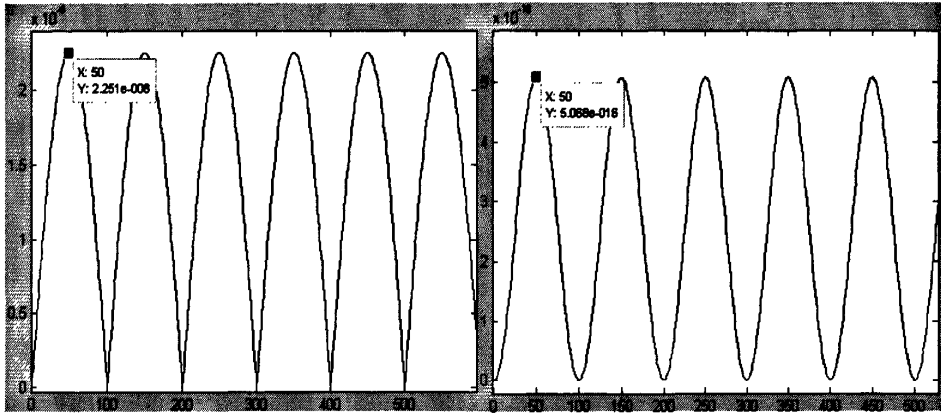


图 4.38 PJ 的 1-sigma 曲线和 1-sigma 平方曲线

从图 4.38 可以看出,对于存在 PJ 的情况,1-sigma 曲线和 1-sigma 平方曲线都是周期性变化,但是后者才呈现完整的正弦特性。假设时钟频率为 f_0 , 调制深度为 Δf , 调制频率为 f_m , 理论上, PJ 的 1-sigma 平方曲线的表达式为 $[\Delta f / (f_0 \times f_m \times \pi)]^2 / 4 - (\Delta f / (f_0 \times f_m \times \pi))^2 \cos(2\pi f_m t) / 4$, 所以 1-sigma 平方曲线仍然是正弦型曲线,只是在纵轴上发生了平移,它的峰峰值为 $[\Delta f / (f_0 \times f_m \times \pi)]^2 / 2$, 频率为 f_m , 平移了 $[\Delta f / (f_0 \times f_m \times \pi)]^2 / 4$ 。

所以对于本节的例子,1-sigma 平方曲线的峰峰值应该是 2.533×10^{-16} 。

图 4.38 中是对例子的仿真结果,可见符合理论值。下面是实测曲线,将实测曲线与理论曲线对比,如图 4.39 所示:

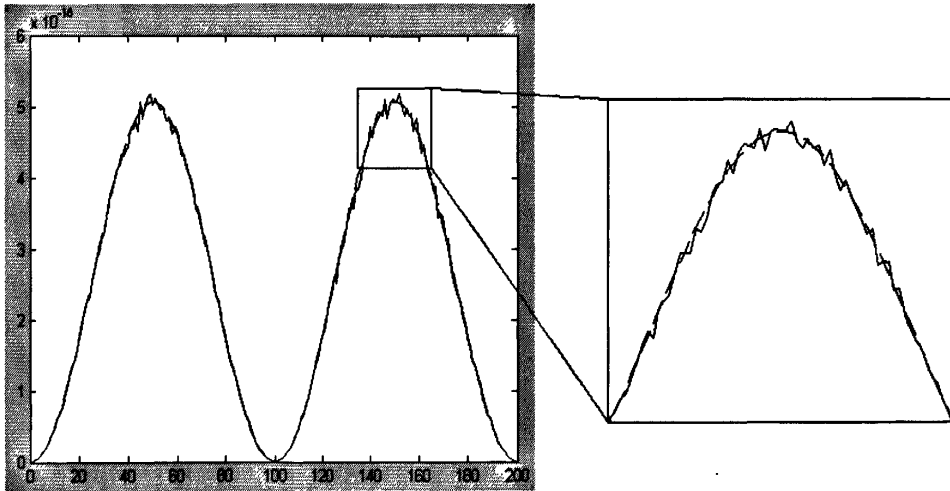


图 4.39 实测和理论的 1-sigma 平方曲线

图 4.39 中,实线是实测信号的 1-sigma 平方曲线,虚线是 1-sigma 平方的理论曲线,可以看出,实测曲线与理论曲线非常吻合。

所以,高频求解 PJ 的方法,就是挑出 1-sigma 平方频谱上除了直流点以外的尖峰,尖峰的频率就是对应的 PJ 的频率 f_m , 尖峰反推出的峰值,就是 $[\Delta f / (f_0 \times f_m \times \pi)]^2 / 4$ 。其中 f_m 已经知道了, $1/f_0$ 可以从一倍周期宽度的采样点求

平均得到, 这样就能得出调制度 Δf 。

由 4.1.2 节知, 1-sigma 曲线 (包括 1-sigma 平方曲线) 每两个点之间的间隔是时钟周期, 所以, 经过 FFT 后, 它的频谱的最大频率范围能够到时钟频率的一半, 因此高频方法能明显提高频域分析的频谱范围, 这也是区分高频方法和低频方法的主要特征, 但是高频方法的缺点是数据采集的时间长, 且由于频谱范围大, 所以频率分辨率比低频方法要差。

4.3 数据的抖动分离

时钟的特点是每两个相同跳变沿 (如两个上升沿) 之间的间隔都是一个周期, 数据则不同, 由于数据中可能出现连 0 或连 1 的情况, 所以数据每两个相同跳变沿之间可能是几个周期。因此可以说, 时钟是一种特殊形式的数据。

处理时钟抖动时, 比较的是周期宽度, 由于数据抖动的特殊性, 处理数据抖动时, 主要是比较跳变沿。

4.3.1 带标记的已知数据

这种处理方法, 对待测数据的要求是:

(1) 已知待测数据的重复模式;

(2) 已知一个模式标记。和待测数据一样, 模式标记也是一种重复性的信号, 它独立于待测数据, 但是与待测数据的每一个模式同步, 即每一个模式的同一位置, 分别对应着一个模式标记。

第一步: 得到理想的单位间隔 (unit interval, UI)

由于数据模式已知, 所以每个模式中 UI 的个数也是已知的, 只要测量多个模式的时间长度, 计算模式的平均长度, 再将平均长度除以每个模式 UI 的个数, 即得到理想的 UI 长度。

第二步: 匹配

理想的 UI 宽度和数据模式已知, 就能得到理想比特序列。用循环移位的方法将理想比特序列与待测序列相比较, 找到最匹配的位置。这时, 理想比特序列与标记的相位关系也确定了。

第三步: 做边沿的直方图

以标记为基准, 将待测序列的每个模式和理想数据模式进行叠加, 以理想数据模式的边沿作为理想边沿, 最终能够得到一个模式下各边沿偏离理想位置的直方图。如图 4.40 所示:

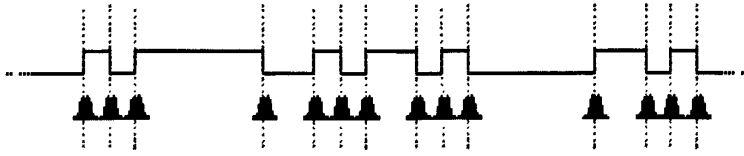


图 4.40 做数据各边沿的直方图

每个边沿的直方图都有最大值、最小值和平均值，它们表征了当前边沿相对于理想位置的偏离情况。以理想数据模式为基准，将这三个值在每个对应边沿上标出，并将平均值相连，得到数据各边沿的抖动视图，如图 4.41 所示：

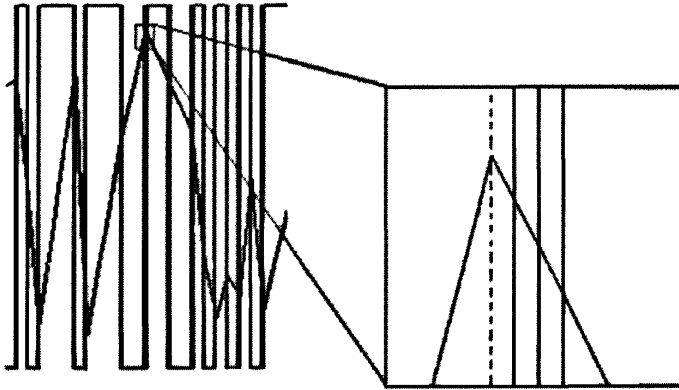


图 4.41 数据各边沿的抖动视图

从放大图中可以看出，虚线部分是理想跳变沿的位置，对于每个跳变沿，都有三个边沿与它对应，它们分别是待测数据在该边沿上直方图的最大值，最小值和平均值。图中折线的横坐标为理想跳变沿位置，即整数倍的 UI，纵坐标是该边沿抖动的平均值。

第四步：分离 DCD+ISI

上一步，求出了待测数据每个边沿偏离理想边沿的最大值、最小值和平均值，现在将上升沿和下降沿的平均值（即上图中折线的纵坐标值）分别做直方图，如图所示：

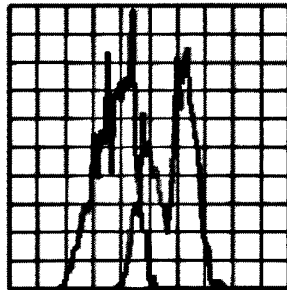


图 4.42 上升沿和下降沿的直方图

左边为上升沿对应的直方图，右边为下降沿对应的直方图，它们的横坐标是 UI，表征偏离理想位置的程度，纵坐标为点数，这两个直方图横坐标的峰峰值，就是 DCD+ISI。

第五步：分离 PJ、RJ

接着，得出不同周期宽度下的均方差 σ ，由此可以画出 1-sigma 曲线。1-sigma 曲线反映了 RJ 和 PJ 的变化情况，得到的 1-sigma 曲线并不是正好每个周期宽度都有对应值。对于没有值的情况，可以用内插的方法填充。

得到了 1-sigma 曲线，就可以用 4.2 节的高频方法，得到 PJ 和 RJ。

4.3.2 带位时钟的随机数据

这种处理方法与示波器的方法类似，它需要：

- (1) 待测数据信号；
- (2) 与待测信号同步的位时钟。

将待测数据和位时钟分别连接到两个通道，把位时钟的某个边沿（如上升沿）作为参考边沿，如图 4.43 所示：

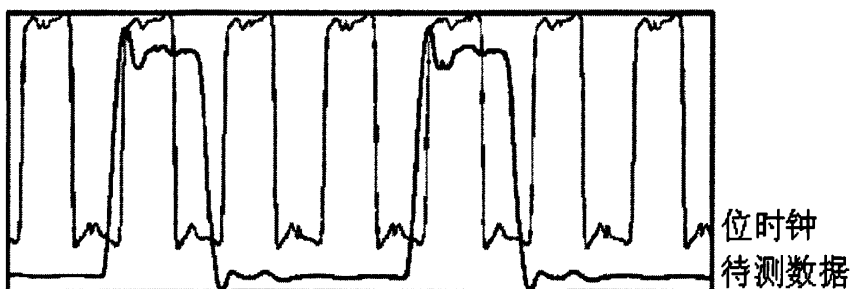


图 4.43 带位时钟的随机数据的处理方法图示

由此可以得出待测数据每个边沿相对于参考边沿的偏移，这样可以画出两个直方图，分别对应待测数据上升沿和下降沿的偏移。如图 4.44 所示：

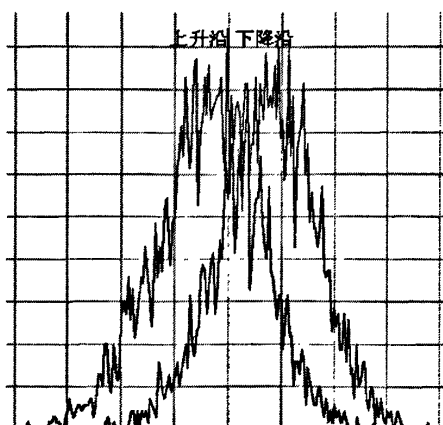


图 4.44 上升沿和下降沿的直方图

由于理想边沿很多，所以待测数据的各个边沿相对于理想边沿有很多不同的偏移，在处理时，对每个数据边沿，只保留绝对值最小的偏移量。

将上升沿和下降沿的直方图分别做尾部拟合，就可以得出抖动的 RJ、DJ、TJ

成分。

4.3.3 不带标记的随机数据

当要处理不带位时钟或者模式标记的数据时，才使用该方法。虽然不知道位时钟或者标记，但是为了分析数据，还是要手动输入一个位时钟作为参考，这个位时钟就作为标准时钟，因此，输入的位时钟要尽量准确。

有了标准时钟，就可以得出待测数据的各个边沿相对于标准时钟的偏移，并画出上升沿和下降沿的直方图（方法同 4.3.2）。这两个直方图的峰峰值（两个峰之间的距离）就是 DCD+ISI。

下面做 1-sigma 曲线。由于时钟是已知的，那么可以在随机数据序列中找到一个周期宽度、两个周期宽度直到 N 个周期宽度的数据长度若干个，由此可以得出不同周期宽度下的标准差 σ 。这样就可以画出相应的 1-sigma 曲线。

由上面的讨论可知，1-sigma 曲线可以得出随机抖动 RJ 和周期性抖动 PJ，但是由于数据的特殊性，不同周期宽度的数据长度里包含了不同类型的位序列，这可能增加了标准差的值，并由此扩大了 PJ 和 RJ 的大小，其中对 PJ 的影响较大。所以并不计算 PJ 的值，只计算 RJ，另外也可以用尾部拟合得到 RJ。

第五章 抖动的减少和消除

5.1 抖动的成因

造成抖动的原因多种多样, 包括:

- 1、电磁干扰 (electromagnetic interference, EMI), 产生确定性抖动
- 2、串扰 (crosstalk), 产生幅度噪声和确定性抖动
- 3、反射 (reflections), 产生确定性抖动 (特别是码间干扰)
- 4、散粒噪声 (shot noise)、闪烁噪声 (flicker noise) 和热噪声 (thermal noise), 产生随机抖动
- 5、信道带宽限制效应 (bandwidth effects), 产生码间干扰
- 6、光电接线器 (connector) 和光电缆 (cables) 中的噪声
- 7、电源噪声 (power supply noise)
- 8、锁相环 (PLL) 中的参考频率信号的噪声
- 9、内部开关噪声 (internal switching noise) 等等

抖动的产生是一个非常复杂的过程, 某一种抖动成分并不是某个单一抖动源作用的结果, 而往往是由于多个源的综合作用而产生的。所以在对抖动源的分析中, 要综合考虑各种因素。

在对系统的分析中, 抖动分离并不是最终目的, 而只是中间阶段。通过分离抖动成分, 可以找到各种抖动源, 进而对系统进行改进, 减少或是消除抖动源的影响, 所以, 减少或消除抖动的影响, 才是系统分析的最终目的。

对于每种不同的抖动源, 都有不同的处理方法。一旦抖动源确定, 就能确定相应的处理方法。以上列举了几种抖动源, 其中前三种抖动源是系统中比较常见的, 下面就以这三种抖动源为例, 介绍减少抖动源影响的方法。

5.2 减少抖动源的影响

5.2.1 减少电磁干扰的影响

电磁干扰是由本地设备或系统产生的有害辐射造成的, 辐射会随着时钟频率的升高而增大。开关电源是产生电磁干扰的重要源头 (主要是电源地分配网络), 它们可以发射很强的高频电磁场, 从而向受害系统注入大量的电噪声。电磁干扰对系统的主要影响是造成确定性抖动 DJ。

由于电源地分配网络是电磁干扰的重要来源, 因此, 减小地弹和轨道塌陷可以降低电磁干扰; 另外, 在传输线外增加屏蔽罩, 减少泄漏出去的辐射量, 也能

有效地降低电磁干扰。

5.2.2 减少串扰的影响

当一条传输线上信号的电磁场与邻近传输线发生耦合时,就会产生串扰。串扰同时引发了幅度噪声和确定性抖动。

传输线上信号速度的计算公式如下^[25]:

$$v = \frac{12}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{\text{in}}{\text{ns}} \quad \text{式(5-1)}$$

ϵ_r 表示信号电力线穿过的绝缘材料的相对介电常数,它与材料的性质有关。对于有的传输线(如微带线),电力线的一部分在绝缘材料中,一部分在空气中,这样信号的速度就由这两种材料共同作用的有效介电常数决定。

当该信号与其他信号产生耦合时,该信号的电场就会与其他电场相互影响,使得原来的电力线在绝缘材料和空气中的分布发生了变化,进而影响了有效介电常数,最终影响了信号的传输速度,产生时间上的延迟或提前,即抖动。

对于如何减少抖动,目前的研究分为两种方法:

(1) 无源法

该方法是从互连线的结构出发,减少互连线间的耦合。具体方法有:加防护布线、减小耦合长度、增大线距、在带状线层布线、使用介电常数较低的叠层、减小信号路径的特性阻抗等。

(2) 有源法

该方法是通过在系统中添加有源电路,对由串扰导致的幅度或相位上的畸变进行补偿和修正。具体方法如:Cattalen等人提出的串扰幅度均衡法^[26]、James和Ali提出的串扰抖动均衡法^[27]。

5.2.3 减少反射的影响

当信号沿传输线传播时,它不断感受到传输线的瞬态阻抗变化,一旦阻抗发生变化,就会在阻抗突变的地方,一部分信号继续传输,另一部分信号被反射,反射信号和原信号叠加,导致了确定性抖动(特别是码间干扰)的产生。



图 5.1 反射示意图

从图 5.1 看出，反射不仅使信号的幅度发生变化，产生了振铃，也使信号的跳变沿变陡了，缩短了跳变的时延，产生抖动。

通常，减少反射的方法有三种：

- (1) 降低信号频率（实质是增大信号的上升或下降时间）；
- (2) 缩短传输线长度；
- (3) 阻抗匹配。

前两种方法的原理是相同的，当上升或下降时间远大于传输线的时延时，多次反射将被掩盖在跳变沿中，因此增大跳变时间与传输线时延的比值，就能减少反射。这两种方法虽然简单，但是却不实际，所以一般采用第三种方法，即阻抗匹配。

阻抗匹配的方式有很多，下面列举了几种：

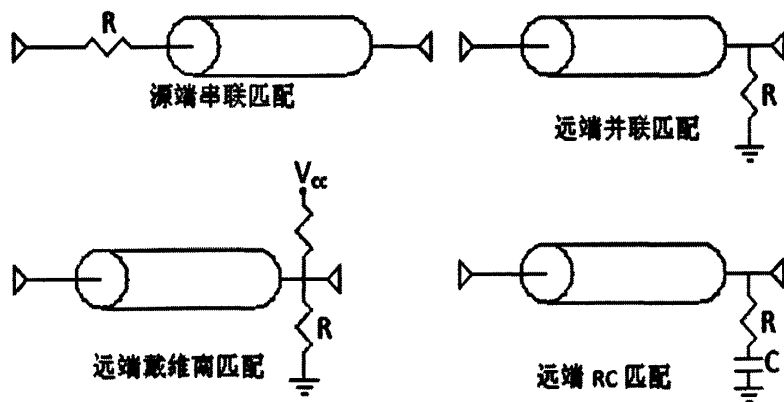


图 5.2 几种阻抗匹配方法

第六章 总结与展望

本课题的主要任务是在深入了解抖动的成因和各种抖动成分的不同特性的基础上,结合硬件电路采样数据的特点,完成抖动分离软件的设计与开发,经实验证明,分离效果良好。

通过本课题的研究和开发,作者学到许多有用的知识,积累了项目开发方面的许多经验,本文完成的主要工作:

(1) 对抖动的相关知识进行较深入的研究,了解不同抖动成分的成因和特性,为整个软件的开发和实现提供理论支持。

(2) 学习并分析离散傅里叶变换和快速傅里叶算法。并且为适应采样数据的要求,在深入了解快速傅里叶算法原理的基础上,开发出改进的基 2 快速算法。

(3) 根据能量守恒原则,提出离散傅里叶频谱的幅度和频率补偿方法,使得对周期性谐波的反推更精确。

(4) 在普通频域分析方法的基础上,提出新的分析方法,即高频方法,避免普通方法中,频谱的带宽受采样频率制约的现象。

在整个软件的开发过程中,尤其是在代码的调试过程中,遇到了很多问题,在处理这些问题的过程中,作者深刻体会到团队合作的重要,同时也提高了自己解决问题的能力。

由于作者的试验时间和经验有限,目前尚有一些功能有待进一步完善,如时频域的抖动分离暂时只有对 PJ 和 RJ 的处理,而实际中还有其它成分,如 DCD、ISI,软件中还没有对于这些成分的时频域分离。在抖动分离的研究中,还有很多功能可以实现,这些功能可以在下一步工作中进行研究。

致谢

时光如梭，转眼间三年的研究生生活即将结束了，在 CAD 所的学习生活，不仅给予我极大的帮助，更是为我今后的工作和学习打好了坚实的基础。

毕业设计的任务和论文能够顺利完成，离不开许多人的关心和帮助。值此论文完成之际，谨向给过我关心、帮助和指导的老师、同学、家人表示由衷的感谢。

首先，非常感谢我的导师李玉山教授。李老师治学严谨认真，工作兢兢业业，在科研和学习中，李老师为我指引方向，并及时纠正我在科研和学习中的问题。同时，李老师孜孜不倦的钻研精神、敏锐把握科技前沿的洞察力以及待人接物等等各个方面都深深感染和激励着我。在此，谨向李老师致以崇高的敬意和真诚的感谢。

感谢白凤莲老师和刘洋老师，在工作和生活上的莫大帮助，让我受益匪浅。

同时，还要感谢我们一个项目组的靳亚东、王林林、樊渊皓、吴文婧、张南、蓝天鸿、唐伟峰同学，在与他们一起合作项目的日子中，我从他们那里得到了很多帮助，也学习到了很多东西。

感谢我的同学李鹏、周勇、寻建晖、昶旭曦、胡波、刘婷婷、杨丽湘、胡庆龙、唐文平，在生活和学习中，他们给予了我极大的帮助和支持。

最后衷心地感谢我的父母，亲人和所有的朋友们，感谢他们给予的关怀和支持，让我能够顺利地完成学业。

参考文献

- [1] William Wong. 高速串行技术推动板级互连. 电子系统设计. http://www.ed-china.com/ART_8800020581_400004_500007_OT_1759cd5c.H TM.
- [2] International Committee for Information Technology Standardization (INCITS) . Fibre Channel - Methodologies for Jitter and Signal Quality Specification- MJSQ. Technical Report REV 12.1. December 7, 2003.
- [3] ITU-T Recommendation G.810. Definitions and terminology for synchronization networks. International Telecommunication Union, August 1996.
- [4] C.Y. Kuo, J.L.Huang. A period tracking based on-chip sinusoidal jitter extraction technique. VLSI Test Symposium, 2006. Proceedings.24th IEEE 30 April-4 May 2006:400-405.
- [5] J.Hancock. Jitter-Understanding it, Measuring it, Eliminating it Part 1: Jitter Fundamentals. High Frequency Electronics. April 2004. 44-50.
- [6] Kyung Ki Kim, Jing Huang, Yong-Bin Kim et al. On the Modeling and Analysis of Jitter in ATE Using Matlab. IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. October 2005:285-293.
- [7] Mike Peng Li 著, 李玉山, 潘健等译. 高速系统设计——抖动、噪声和信号完整性. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [8] Wavecrest Technologies Company. Jitter fundamentals. Application Note for Wavecrest SIA-3000, SMPB-00019 Rev.1.
- [9] 李丽平. 高速串行互连中的抖动分析. 博士论文. 西安电子科技大学. 2009.
- [10] Tektronix LTD. Understanding and Characterizing Timing Jitter. Technologies Application Note 55W-16146-1. September 20, 2002.
- [11] C.-K. Ong, D. Hong, k.-T. Cheng et al. Jitter Spectral Extraction for Multi-gigahertz Signal. In Proc. ASP-DAC, Asia and South Pacific, IEEE. January 2004:298-303.
- [12] M. P. Li et al. A New Method for Jitter Decomposition through its Tail Fitting. IEEE Proceedings of the International Conference on Computer Design. September 1999:788-794.
- [13] Qingqi Dou, Jacob Abraham. Jitter Decomposition by Time Lag Correlation. In Proc.7th International Symposium on Quality Electronic Design, IEEE. March 2006:525-530.

- [14] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, 1998, 454:903-995.
- [15] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [16] E.O.布赖姆著, 柳群译. 快速富里叶变换. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
- [17] 丁玉美, 高西全. 数字信号处理. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2000.
- [18] James W. Cooley, John W. Tukey. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*. April 1965, Vol. 19, No. 90:297-301.
- [19] 毛青春, 徐天亮. 窗函数及其应用. *中国水运*. 2007,7(2):230-232.
- [20] 丁康, 谢明, 王志杰. 离散频谱的幅值、相位和频率的校正方法及误差分析. *动态分析与测试技术*. 1996,1:10-29.
- [21] 丁康, 江利旗. 离散频谱的能量重心校正法. *振动工程学报*. 2001,14(3):354-358.
- [22] 浙江大学数学系高等数学教研组. 概率论与数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [23] 刘庆云, 李志舜. 高斯白噪声序列谱的统计特性及应用研究. *声学与电子工程*. 2003(1):9-11.
- [24] 朱华, 黄辉宁, 李永庆等. 随机信号分析. 北京: 北京理工大学出版社, 1990.
- [25] Eric Bogatin 著, 李玉山, 李丽平等译. 信号完整性分析. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [26] Cattalen Pelard et al. Realization of Multigigabit Channel Equalization and Crosstalk Cancellation Integrated Circuits. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*. 2004,39(10):1659-1669.
- [27] James F. Buckwalter, Ali Hajimiri. Cancellation of Crosstalk-Induced Jitter. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*. 2006, 41(3):621-632.

读研期间研究成果

(1)参与和深圳华为公司的合作项目——“IBIS 模型修正软件”。主要负责仿真和测试波形的导入、分析, IBIS 模型文件和 DML 模型文件的修改, 以及与 Cadence 的软件接口, 实现 VC++程序控制 Cadence。

(2)参与和中电集团 41 研究所的合作项目——“抖动分离软件”。主要负责信号的时频域分析, 从时域或频率域分离抖动成分。

(3)马亮. “基于 VC 的 Cadence 二次开发”, 《电子科技》. 已录用。

