

摘 要

小波分析在图像处理中有非常重要的应用。本文研究方向是在其图像去噪和图像增强中的应用。小波分析是傅立叶分析思想方法的发展与延拓。二维小波分析用于图像去噪和图像增强是小波分析应用的一个重要方面。小波分析用于图像去噪和增强具有明显的优点。基于小波分析的图像去噪方法有很多，比较成功的有小波阈值法，空域相关法，模极大值重构法，投影法等。而基于小波的图像增强方法也比传统图像增强方法更有效。主要工作包括：

本文详细阐述了小波基本理论在图像处理中的应用，介绍了连续小波变换和离散小波变换，给出离散二进小波变换的快速分解与重构算法，最后研究了小波基的函数及其特性，分析了它们对实际应用的影响和作用。

在对目前小波理论、小波图像去噪的相关文献进行研究的基础上，介绍了小波变换在图像去噪领域的应用；其次，对目前常用的几类小波去噪方法进行了分别阐述，着重分析了阈值收缩法并分析了其存在的不足；最后，提出了新的阈值选取方法和阈值函数改进方法。本文采用 Matlab 进行仿真实验，分别对含噪图像使用改进的阈值，改进的阈值函数进行去噪处理，新函数是现有软、硬阈值函数的推广，通过调整参数，克服了硬阈值函数不连续和软阈值函数有偏差的缺点，改善了图像的视觉效果和客观指标，对图像进行仿真实验得到了较好的结果。

研究了基于小波变换的图像增强，先分析了图像增强的基本方法，然后将图像增强放入小波域中去研究，并提出了一种新的小波变换自适应图像增强算法，在 Matlab 环境中验证了该算法的可行性和优越性。

本文主要研究了基于小波的图像去噪与增强技术的理论基础，提出了新的基于小波变换的图像去噪和增强方法，以 Matlab 为平台实现图像去噪和增强算法过程，并对相应的图像处理结果进行了分析和比较，验证了其可行性和高效性。

关键词：小波变换，图像处理，图像去噪，图像增强

Abstract

Wavelet analysis in the image processing applications are very important. In this paper, the direction of its image noise reduction and image enhancement are researched in the application. Wavelet analysis is the development of Fourier analysis of the way of thinking and extension. Two-dimensional images of wavelet analysis for noise reduction and image enhancement application of wavelet analysis is an important aspect. Wavelet analysis for noise reduction and enhance the image has obvious advantages. Based on wavelet analysis of the image means a lot of noise, the more successful a wavelet threshold method, air-related laws, modulus maximum reconstruction, projection and so on. And the wavelet-based image enhancement methods than the traditional image enhancement methods more effective.

The fundamental theories of wavelet analysis are discussed in detail. Continuous wavelet transform, discrete wavelet transform and dyadic wavelet transform are introduced. The fast algorithm of discrete dyadic wavelet transform is given. Finally, an analysis is made on the influence of the wavelet bases on practical applications by studying their mathematical properties.

Based on the profound comprehension and generalization of a lot of existing literature on wavelet de-noising, the applications in the image de-noising are described; second, the wavelet image de-noising methods are classified and introduced, moreover, the shortcomings of threshold de-noising method are specially analyzed; in the end, after analyzing and comparing the classical threshold de-noising methods, a new threshold selecting method and a new threshold function are proposed. Simulation experiments are implemented by Matlab wavelet tool box. And experiment results show that the new methods usually obtain better performance than classical threshold de-noising methods.

Image enhancement based on wavelet transform are studied in the thesis. Firstly, the concept of wavelet transform is described, and the characters after wavelet transform are analyzed; secondly, an adaptive local threshold scheme is proposed namely by threshold of the wavelet transform; At last, the way that wavelet cooperate with image enhancement realize the arithmetic, which balance de-noising

and image enhancement. The Matlab simulation experiment indicates the new adaptive image enhancement is effective and excellent.

This paper elaborated on the wavelet-based image noise reduction and enhancement of the theoretical basis to Matlab as a platform for noise reduction and image enhancement algorithm to achieve process and the corresponding image processing results were analyzed and compared in order to arrive at a comprehensive performance distinctions based on wavelet of the noise reduction and image enhancement algorithm program.

Keywords: wavelet transform, image processing, image noise reduction, image enhancement

独创性声明

本人声明，所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得武汉理工大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名： 曾 斌 日期： 2008.12.12

关于论文使用授权的说明

本人完全了解武汉理工大学有关保留、使用学位论文的规定，即学校有权保留、送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

签名： 曾 斌 导师签名： 李 斌 日期： 2008.12.12

第1章 绪论

1.1 课题研究背景

小波分析是近15年来发展起来的一种新的时频分析方法，时频分析应用非常广泛，涵盖了物理学，工程技术，生物科学，经济学等众多领域，而且在很多情况下单单分析其时域或频域的性质是不够的，比如在电力监测系统中，即要监控稳定信号的成分，又要准确定位故障信号，这就需要引入新的时频分析方法，小波分析正是由于这类需求发展起来的^[1]。

在传统的傅立叶分析中，信号完全是在频域展开的，不包含任何时频的信息，这对于某些应用来说是很恰当的，因为信号的频率的信息对其是非常重要的。但其丢弃的时域信息可能对某些应用同样非常重要，所以人们对傅立叶分析进行了推广，提出了很多能表征时域和频域信息的信号分析方法，如短时傅立叶变换，Gabor变换，时频分析，小波变换等^[2]。小波分析具有多分辨率分析的特点，在时域和频域都有表征信号局部信息的能力，时间窗和频率窗都可以根据信号的具体形态动态调整，在一般情况下，在低频部分（信号较平稳）可以采用较低的时间分辨率，而提高频率的分辨率，在高频情况下（频率变化不大）可以用较低的频率分辨率来换取精确的时间定位。

图像去噪与增强技术作为信号处理和现代通信的重要组成部分，与人们的关系日益密切。近年来，采用小波变换进行图像去噪处理已表现出良好的工程应用前景。小波变换的低熵性、多分辨率、去相关性和选基灵活性等特点，为它成功应用于该领域提供了天然优势。它具有多分辨率的特点，可以方便地从混有强噪声的信号中提取原始信号，被誉为分析信号的显微镜。

而图像增强技术^[3-5]是图像处理中一个非常重要的研究领域，目前已经有许多非常成熟和有效的方法，如直方图均衡、高通滤波、反掩模锐化法等。但是，这些传统的图像增强方法都存在着不足，如噪声放大、有时可能引入新的噪声结构等。如何解决这些问题一直是图像增强领域中的一个难题。而目前，已经有许多关于小波变换在图像增强方面的应用研究，取得了非常不错的效果。不过基于小波变换的图像增强方法也有着不足的地方：没有考虑噪声，只是简单

的增强细节信号，存在着噪声放大的问题，没有充分利用小波分析的能力等。

1.2 小波分析理论

小波变换的思想是建立在可自动调节长度的视窗函数之上的，它起源于20世纪初的 Haar 的工作。在上个世纪的80年代，小波变换的理论（1975年连续小波变换(continuous wavelet transform, CWT)的发现）和公式（1982年 CWT 算法的建立）逐步建立后极大地带动了这一技术的发展。到20世纪90年代，这一种变换方法才变得十分成熟并且得到广泛的应用。

小波理论包括连续小波和二进小波变换，在映射到计算域的时候存在很多问题，因为两者都存在信息冗余，在对信号采样以后，需要计算的信息量还是相当的大，尤其是连续小波变换，因为要对精度内所有的尺度和位移都做计算，所以计算量相当的大。而二进小波变换虽然在离散的尺度上进行伸缩和平移，但是小波之间没有正交性，各个分量的信息掺杂在一起，为我们的分析带来了不便。

真正使小波在应用领域得到比较大发展的是 Meyer 在1986年提出的一组小波，其二进制伸缩和平移构成 $L^2(R)$ 的标准化正交基^[6]。在此结果基础上，1988年 S.Mallat^[7]在构造正交小波时提出了多分辨率分析的概念，从函数分析的角度给出了正交小波的数学解释，在空间的概念上形象的说明了小波的多分辨率特性，给出了通用的构造正交小波的方法，并将之前所有的正交小波构造方法统一起来，并用类似傅立叶分析中的快速傅立叶算法，给出了小波变换的快速算法——Mallat 算法。这样，在计算上变得可行以后，小波变换在各个领域才发挥它独特的优势，解决了各类问题，为人们提供了更多的关于时域分析的信息。

形象一点说，多分辨率分析就是要构造一组函数空间，每组空间的构成都有一个统一的形式，而所有空间的闭包则逼近 $L^2(R)$ 。在每个空间中，所有的函数都构成该空间的标准化正交基，而所有函数空间的闭包中的函数则构成 $L^2(R)$ 的标准化正交基。如果对信号在这类空间上进行分解，就可以得到相互正交的时频特性。而且由于空间数目是无限可数的，可以很方便地分析我们所关心的信号的某些特性。

1.3 图像去噪技术

图像去噪是信号处理中的一个经典的问题。传统的去噪方法多采用平均或线性方法，如 Wiener 滤波，但去噪效果不令人满意。随着小波理论日趋完善，它以其自身良好的时频特性在图像信号去噪领域受到越来越多的关注，开辟了用非线性方法去噪的先河。

小波变换用于图像去噪的理论基础始于 S.Mallat 把数学上的 Lipschitz 系数与小波变换的模极大值联系起来。随后 Donoho^[8]提出了小波 M 值萎缩方法并从渐近意义上证明了其优越性。然而在实际应用中却往往效果不好，存在“过扼杀”系数的缺点。以后人们进一步研究小波相关去噪方法、比例萎缩方法等，并且在进一步提高算法的局部适应性、先验模型的准确性、边缘信息的保留性等方面取得了巨大的进步。具体回顾小波去噪方法可以大致分成以下三个阶段：

第一阶段，最初的去噪方法主要是利用小波变换去相关性。在小波分解后不同层次的细节子带，采用不同的阈值。代表方法有 Visushrink（通用软阈值去噪方法）和 SureShrink（基于 Stein's 的无偏风险估计，可得出接近最优软阈值的估计量）方法等。这期间硬阈值、软阈值和半软阈值等阈值函数也相继提出。

第二阶段，人们开始根据小波系数的统计性质建立各种先验模型，对小波系数的萎缩自适应变化，也就是每个小波系数所采取的阈值都各不相同。小波系数模型主要可分为基于尺度内相关性的层内模型、基于尺度间相关性的层间模型和混合模型。最常用小波系数先验模型是广义高斯分布模型。原图像小波系数的方差估计采用局部邻域估计，代表方法有数据驱动的自适应 BayesShrink 方法，LawmlShrink 方法等。

第三阶段，这一阶段人们主要关注如何利用小波系数层间和层内的相关性，二元或多元的小波萎缩函数被提出。在去噪的同时如何尽可能地保留边缘、纹理等细节、如何使去噪后的图像更光滑、如何将小波变换去噪与其他方法结合等都处于不断地探索和研究中，代表方法有 BivaShrink 方法、小波的马尔可夫方法和复数小波去噪方法等。

1.4 图像增强技术

数字图像增强是指按特定的需要突出一幅图像中的某些信息，同时削弱或去除某些不需要的信息的处理方法，其主要目的是使处理后的图像对某种特定的应用来说，比原始图像更适用。因此，这类处理是为了某种应用目的而去改

善图像质量的。处理的结果使图像更适合于人的视觉特性或机器的识别系统^[15]。

图像的增强技术主要分为两大类：一类是空域类处理法，一类是频域类处理法。空域法是指直接对图像中的像素进行处理，基本上是以灰度映射变换为基础的。频域法的基础是卷积定理，一般情况下采用修改傅立叶变换的方法来实现对图像进行增强处理。但在这里以延伸为其他的变换如 DCT 变换、Walsh 变换和小波变换等。

小波算法的发展极大影响了信号与图像处理领域的研究。在图像处理领域，很多算法被应用到图像去噪方面。相对来讲在图像增强这个领域研究工作做得稍微少了些，但还是出现了一些很重要的方法。图像增强中主要问题是噪声，许多通用、知名方法都存在下列问题：即在增强细节信号的同时，也放大了噪声。在诸如 CCD 这种低对比度、多噪声图像中，尤其需要改进算法，在增强微弱细节信号的同时抑制背景中的高频噪声。

传统图像增强方法，如直方图均衡、高通滤波、反掩模锐化法等。但是，这些传统的图像增强方法都存在着不足，如噪声放大、有时可能引入新的噪声结构等。如何解决这些问题一直是图像增强领域中的一个难题。小波分析是近些年来发展起来的一种新的时频分析工具，特别适合于信号处理领域，如图像处理，基于小波的图像增强方法应运而生，并取得了非常不错的效果。而这种方法也有不足之处，特别是存在着噪声放大问题，于是围绕解决该问题研究了不少新方法，使图像增强技术的研究跨入一个新的领域。

1.5 研究内容及安排

全文共分为五章，其主要内容和结构安排如下：

第 1 章，绪论，简要介绍小波分析理论的历史和研究现状，以及图像去噪技术和图像增强技术，最后给出本文的研究内容和安排。

第 2 章，介绍了小波分析的基本概念，连续小波变换，离散小波变换，多分辨率分析的思想 and Mallat 算法，小波基函数及其性质，以及小波理论在图像处理中的应用。这一章是后续章节的理论基础。

第 3 章主要研究了小波分析在信号处理的去噪问题中的应用，先简要介绍了小波分析在信号去噪算法方面的研究现状，又给出了小波阈值去噪的原理及其实现方法，重点分析了传统的软、硬阈值函数的优、缺点，最后分析了阈值

选取的方法。针对小波阈值去噪算法中阈值及阈值函数的选取问题，提出了一种新的阈值函数和一种新阈值的方法，并通过实验，从不同的角度分析了这种方法的优越性能。

第 4 章主要研究了基于小波理论的图像增强技术，提出了一种基于小波变换的自适应增强算法，并通过了 Matlab 平台，对图像增强传统方法和小波的自适应图像增强算法进行比较，验证了该算法的可行性和优越性。

第 5 章总结全文，并展望了未来工作的一些研究方向。

第 2 章 小波在图像处理中的应用

2.1 从傅立叶变换到小波变换

小波分析属于时频分析的一种，传统的信号分析是建立在傅立叶变换的基础上的，由于傅立叶分析使用的是一种全局的变换，要么完全在时域，要么完全在频域，因此无法表述信号的时频局域性质，而这种性质恰恰是非平稳信号最根本和最关键的性质。为了分析和处理非平稳信号，人们对傅立叶分析进行了推广乃至根本性的革命，提出并发展了一系列新的信号分析理论：短时傅立叶变换、Gabor 变换、时频分析、小波变换、分数阶傅立叶变换、线调频小波变换、循环统计量理论和调幅—调频信号分析等。其中，短时傅立叶变换和小波变换也是应传统的傅立叶变换不能够满足信号处理的要求而产生的。短时傅立叶变换分析的基本思想是：假定非平稳信号在分析窗函数 $g(t)$ 的一个短时间段内是平稳（伪平稳）的，并移动分析窗函数，使 $f(t)g(t-\tau)$ 在不同的有限时间宽度内是平稳信号，从而计算出各个不同时刻的功率谱。但从本质上讲，短时傅立叶变换是一种单一分辨率的信号分析方法，因为它使用一个固定的短时窗函数。因而短时傅立叶变换在信号分析上还是存在着不可逾越的缺陷^[9-14]。

小波变换是一种信号的时间—尺度分析方法，它具有多分辨率分析的特点，而且在时频两域都具有表征信号局部特征的能力，是一种窗口大小固定边但其形状可改变，时间窗和频率窗都可以改变的时频局部化分析方法。即在低频部分具有较高的频率分辨率，在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率，很适合于探测正常信号中夹带的瞬态反常现象并展示其成分，所以被誉为分析信号的显微镜，利用连续小波变换进行动态系统故障检测与诊断具有良好的效果。

2.1.1 傅里叶变换

在信号处理中重要方法之一是傅立叶变换，它架起了时间域和频率域之间的桥梁。

对很多信号来说，傅立叶分析非常有用。因为它能给出信号里包含的各种

频率成分。但是，傅立叶变换有着严重的缺点，变换之后使信号失去了时间信息，它不能告诉人们在某段时间里发生了什么变化。而很多信号都包含有人们感兴趣的非稳态（或者瞬变）特性，如漂移、趋势项、突然变化以及信号的开始或结束，这些特性是信号的最重要部分。因此傅里叶变换不适于分析处理这类信号。

虽然傅立叶变换能够将信号的时域特征和频域特征联系起来，能分别从信号的时域和频域观察，但却不能把二者有机地结合起来。这是因为信号的时域波形中不包含任何频域信息。而其傅立叶谱是信号的统计特性，从其表达式中也可以看出，它是整个时间域内的积分，没有局部化分析信号的功能，完全不具备时域信息，也就是说，对于傅立叶谱中的某一频率，不知道这个频率是在什么时候产生的。这样在信号分析中就面临一对最基本的矛盾：时域和频域的局部化矛盾^[15]。

在实际的信号处理过程中，尤其是对非平稳信号的处理中，信号在任一时刻附近的频域特征都很重要。如柴油机缸盖表面的震动信号就是由撞击或冲击产生的，是一瞬变信号，仅从时域或频域上来分析是不够的。这就促使去寻找一种新方法，能够将时域和频域结合起来描述观察信号的时频联合特征，构成信号的时频谱。这就是所谓的时频分析法，也称为时频局部化方法。

2.1.2 短时傅里叶变换

由于标准傅立叶变换只在频域里有局部分析的能力，而在时域里不存在这种能力，Dennis Gabor 于 1946 年引入了短时傅立叶变换。短时傅立叶变换的基本思想是：把信号划分成许多小的时间间隔，用傅立叶变换分析每一个时间间隔，以便确定该时间间隔存在的频率^[16-17]。其表达式为：

$$S(\omega, \tau) = \int_R f(t) g^*(\omega - \tau) e^{-j\omega t} dt \quad (2-1)$$

其中*表示复共轭， $f(t)$ 是进入分析的信号。在这个变换中， $e^{-j\omega t}$ 起着频限的作用， $g(t)$ 起着时限的作用。随着时间 τ 的变化， $g(t)$ 所确定的“时间窗”在 t 轴上移动，是 $f(t)$ “逐渐”进行分析。因此， $g(t)$ 往往被称之为窗口函数， $S(\omega, \tau)$ 大致反映了 $f(t)$ 在时刻 τ 时、频率为 ω 的“信号成分”的相对含量。这样信号在窗函数上的展开就可以表示为在 $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ 、 $[\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon]$ 这一区域内的状态，并把这一区域称为窗口， δ 和 ε 分别称为窗口的时宽和频宽，表示了

时频分析中的分辨率，窗宽越小则分辨率就越高。很显然，希望 δ 和 ε 都非常小，以便有更好的时频分析效果，但 δ 和 ε 是互相制约的，两者不可能同时都任意（事实上， $\delta\varepsilon \geq 1/2$ ，且仅当 $g(t) = (1/\delta\pi^{1/4})e^{i^2/2\delta^2}$ 为高斯函数时，等号成立）。

由此可见，短时傅立叶变换虽然在一定程度上克服了标准傅立叶不具有局部分析能力的缺陷，但它也存在着自身不可克服的缺陷，即当窗函数 $g(t)$ 确定后，矩形窗口的形状就确定了 τ ， ω 只能改变窗口在相平面上的位置，而不能改变窗口的形状。可以说短时傅立叶变换实质上是具有单一分辨率的分析，若要改变分辨率，则必须重新选择窗函数 $g(t)$ 。因此，短时傅立叶变换用来分析平稳信号尚可，但对非平稳信号，在信号波形变化剧烈的时刻，主频是高频，要求有较高的时间分辨率（即 δ 要小），而波形变化比较平缓的时刻，主频是低频，则要求有较高的频率分辨率（即 ε 要小）。而短时傅立叶变换不能兼顾两者。

2.1.3 小波变换

小波变换提出了变化的时间窗，当需要精确的低频信息时，采用长的时间窗，当需要精确的高频信息时，采用短的时间窗。小波变换用的不是时间—频率域，而是时间—尺度域。尺度越大，采用越大的时间窗，尺度越小，采用越短的时间窗，即尺度与频率成反比。

2.2 连续小波变换

2.2.1 一维连续小波变换

定义：设 $\psi(t) \in L^2(R)$ ，其傅立叶变换为 $\hat{\psi}(\omega)$ ，当 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足允许条件（完全重构条件或恒等分辨率条件）

$$C_\psi = \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2-2)$$

时，我们称 $\psi(t)$ 为一个基本小波或母小波。将母函数 $\psi(t)$ 经伸缩和平移后得：

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in R; a \neq 0 \quad (2-3)$$

称其为一个基本小波序列。其中 a 为伸缩因子， b 为平移因子。对于任意的函

数 $f(t) \in L^2(R)$ 的连续小波变换为:

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_R f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (2-4)$$

其重构公式 (逆变换) 为:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db \quad (2-5)$$

由于基小波 $\psi(t)$ 生成的小波 $\psi_{a,b}(t)$ 在小波变换中对被分析的信号起着观测窗的作用, 所以 $\psi(t)$ 还应该满足一般函数的约束条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < \infty \quad (2-6)$$

故 $\hat{\psi}(\omega)$ 是一个连续函数。这意味着, 为了满足完全重构条件式, $\hat{\psi}(\omega)$ 在原点必须等于 0, 即:

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2-7)$$

为了使信号重构的实现在数值上是稳定的, 处理完全重构条件外, 还要求小波 $\psi(t)$ 的傅立叶变化满足下面的稳定性条件:

$$A \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B \quad (2-8)$$

式中 $0 < A \leq B < \infty$

从稳定性条件 (2-8) 可以引出一个重要的概念^[18]。

定义: 对偶小波若小波 $\psi(t)$ 满足稳定性条件 (2-8) 式, 则定义一个对偶小波 $\hat{\psi}(t)$, 其傅立叶变换 $\hat{\hat{\psi}}(\omega)$ 由下式给出:

$$\hat{\hat{\psi}}(\omega) = \frac{\hat{\psi}^*(\omega)}{\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2} \quad (2-9)$$

注意, 稳定性条件 (2-8) 式实际上是对 (2-9) 式分母的约束条件, 它的作用是保证对偶小波的傅立叶变换存在的稳定性。值得指出的是, 一个小波的对偶小波一般不是唯一的, 然而在实际应用中, 我们又总是希望它们是唯一对应的。因此, 寻找具有唯一对偶小波的合适小波也就成为小波分析中最基本的问题。连续小波变换具有以下重要性质:

(1) 线性性: 一个多分量信号的小波变换等于各个分量的小波变换之和。

(2) 平移不变性: 若 $f(t)$ 的小波变换为 $W_f(a,b)$, 则 $f(t-\tau)$ 的小波变换为 $W_f(a,b-\tau)$ 。

(3) 伸缩共变性: 若 $f(t)$ 的小波变换为 $W_f(a,b)$, 则 $f(ct)$ 的小波变换为 $\frac{1}{\sqrt{c}}W_f(ca,cb), c > 0$ 。

(4) 自相似性: 对应不同尺度参数 a 和不同平移参数 b 的连续小波变换之间是自相似的。

(5) 冗余性: 连续小波变换中存在信息表述的冗余度。

小波变换的冗余性事实上也是自相似性的直接反映, 它主要表现在以下两个方面:

(1) 由连续小波变换恢复原信号的重构分式不是唯一的。也就是说, 信号 $f(t)$ 的小波变换与小波重构不存在一一对应关系, 而傅立叶变换与傅立叶反变换是一一对应的。

(2) 小波变换的核函数即小波函数 $\psi_{a,b}(t)$ 存在许多可能的选择 (例如, 它们可以是非正交小波、正交小波、双正交小波, 甚至允许是彼此线性相关的)。

小波变换在不同的 (a, b) 之间的相关性增加了分析和解释小波变换结果的困难, 因此, 小波变换的冗余度应尽可能减小, 它是小波分析中的主要问题之一。

2.2.2 高维连续小波变换

对 $f(t) \in L^2(R^n)(n > 1)$, 公式为:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db \quad (2-10)$$

存在几种扩展的可能性, 一种可能性是选择小波 $f(t) \in L^2(R^n)$ 使其为球对称, 其傅立叶变换也同样球对称。

$$\hat{\psi}(\bar{\omega}) = \eta(|\bar{\omega}|) \quad (2-11)$$

并且其相容性条件变为:

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty |\eta(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \quad (2-12)$$

对所有的 $f, g \in L^2(g^n)$

$$\int_0^\infty \frac{da}{a^{n+1}} W_f(a,b) \overline{W_g}(a,b) db = C_\psi \langle f \rangle \quad (2-13)$$

这里, $W_f(a,b) = \langle \psi^{a,b} \rangle$, $\psi^{a,b}(t) = a^{-n/2} \psi(t-b/a)$, 其中 $a \in R^+$, $a \neq 0$ 且 $b \in R^n$, 公式 (2-13) 也可以写为:

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^{n+1}} \int_{R^n} W_f(a,b) \psi^{a,b} db \quad (2-14)$$

如果选择的小波 ψ 不是球对称的, 但可以用旋转进行同样的扩展与平移。例如, 在二维时, 可定义:

$$\psi^{a,b,\theta}(t) = a^{-1} \psi(R_\theta^{-1}(\frac{t-b}{a})) \quad (2-15)$$

这里, $a > 0, b \in R^2$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, 相容条件变为:

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} |\hat{\psi}(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2 d\theta < \infty \quad (2-16)$$

该等式对应的重构公式为:

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{R^2} W_f(a,b,\theta) \psi^{a,b,\theta} d\theta \quad (2-17)$$

对于高于二维的情况, 可以给出类似的结论。

2.3 离散小波变换

在实际运用中, 尤其是在计算机上实现时, 连续小波必须加以离散化。因此, 有必要讨论连续小波 $\psi_{a,b}(t)$ 和连续小波变换 $W_f(a,b)$ 的离散化^[19]。需要强调的是, 这一离散化都是针对连续的尺度参数 a 和连续平移参数 b 的, 而不是针对时间变量 t 的。这一点与我们以前习惯的时间离散化不同。在连续小波中, 考虑函数:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi(\frac{t-b}{a})$$

这里 $b \in R$, $a \in R^+$, 且 $a \neq 0$, 为方便起见, 在离散化中, 总限制 a 只取正值, 这样相容性条件就变为:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\bar{\omega})|}{|\bar{\omega}|} d\bar{\omega} < \infty \quad (2-18)$$

通常，把连续小波变换中尺度参数 a 和平移参数 b 的离散公式分别取作 $a = a_0^j, b = ka_0^j b_0$ ，这里 $j \in Z$ ，扩展步长 $a_0 \neq 1$ 是固定值，为方便起见，总是假定 $a_0 > 1$ （由于 m 可取正也可取负，所以这个假定无关紧要）。所以对应的离散小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 即可写作：

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ka_0^j b_0}{a_0^j}\right) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - kb_0) \quad (2-19)$$

而离散化小波变换系数则可表示为：

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (2-20)$$

其重构公式为：

$$f(t) = C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2-21)$$

C 是一个与信号无关的常数。然而，怎样选择 a_0 和 b_0 才能够保证重构信号的精度呢。显然，网格点应尽可能密（即 a_0 和 b_0 尽可能小），因为如果网格点越稀疏，使用的小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 和离散小波系数 $C_{j,k}$ 就越少，信号重构的精确度也就会越低。

实际计算中不可能对全部尺度因子值和位移参数值计算 CWT 值，加之实际的观测信号都是离散的，所以信号处理中都是用离散小波变换（DWT）。大多数情况下是将尺度因子和位移参数按 2 的幂次进行离散。最有效的计算方法是 S.Mallat 于 1988 年发展的快小波算法（又称塔式算法）。对任一信号，离散小波变换第一步运算是将信号分为低频部分（称为近似部分）和离散部分（称为细节部分），近似部分代表了信号的主要特征。第二步对低频部分再进行相似运算。不过这时尺度因子已经改变，依次进行到所需要的尺度。除了连续小波（CWT）、离散小波（DWT），还有小波包（Wavelet Packet）和多维小波。

2.4 多分辨分析和 Mallat 算法

2.4.1 多分辨分析

多分辨分析（Multiresolution Analysis, MRA）是 1989 年由 S.Mallat 引入的，他从空间的概念上形象地说明了小波的多分辨特性，将在此之前所有小波

变换理论统一起来, 并由此给出了小波的构造方法与小波变换快速算法, 即著名的 Mallat 算法。多分辨分析的一个最大特点是只对低频空间进行进一步分解, 从而使频率的分辨率变得越来越高。一般说来, 用来构造正交小波变换的多分辨分析具有下面的理论框架^[20-21]。

设 w_j 是集合 $\{\psi_{jk}(t), k \in Z\}$ (即对每个 W_j , 是尺度相同为 j , 不同位移 k 下的 $\psi_{jk}(t)$ 所构成的集合) 线性张成的在空间 $L^2(R)$ 上的闭包, $L^2(R)$ 中一系列闭子空间 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 称为 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析 (MRA), 如果该序列满足下列条件:

$$(1) \text{ 单调性: } \dots \subseteq V_{j-1} \subseteq V_j \subseteq V_{j+1} \subseteq \dots, \forall j \in Z.$$

$$(2) \text{ 逼近性: } \bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}, \bigcup_{j \in Z} V_j = L^2(R).$$

$$(3) \text{ 伸缩性: } f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \forall k \in Z.$$

$$(4) \text{ 平移不变性: } f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in Z.$$

$$(5) \text{ 相加性: } V_{k+1} = V_k + W_k.$$

可以证明, 存在函数 $\varphi(t) \in V_0$ 使它的整数平移系 $\{M^{j/2}\varphi(M^{-j/2}t-k) | k \in Z\}$ 构成 V_j 的规范正交基, 称 $\varphi(t)$ 为尺度函数, 于是函数 $\varphi_{j,k}(t) = M^{-j/2}\varphi(M^{-j}t-k)$, $j, k \in Z$ 构成标准正交基。

MRA 本质上给出了人类视觉系统对物体认识的数学描述。实际上, 如果把它当作某人在某种尺度 j 下所观察到的该物体信息, 则当尺度增加到 $j+1$ 时, 他所观察到的信息为 V_{j+1} , 此时可以认为是他进一步靠近目标所观察到的信息, 因此 V_{j+1} 所表示的信息该比 V_j 更为丰富, 即 $V_j \in V_{j+1}$ 。总之, 尺度越大, 距离目标越近, 观察到的信息越丰富。反之, 尺度越小, 距离越远, 含有的信息量越少。1989 年, Mallat 在他的著名的论文中对此给出了精辟的阐述^[22]。

设 $\{\{V_m, m \in Z\}, \varphi(t)\}$ 是一个正交 MRA, 如果

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_k \varphi(2t-k) \tag{2-22}$$

那么, 函数 $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^k c_{1-k} \varphi(2t-k)$ 的伸缩, 平移构成 $L^2(R)$ 的正交基。对于任意 $f \in L^2(R)$, f 可以表示为:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{k,j} \psi_{k,j} \tag{2-23}$$

而其中的部分和

$$f_k(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{k,j} \psi_{k,j} \in W_k \quad (2-24)$$

因此 $f_k(x)$ 构成信号 f 在子空间 W_k 上的投影, 也即信号 f 分解到与频率 k 相关的局部信息。综合式 (2-23)、(2-24) 得到信号 f 的另一种等价表示:

$$F_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(x) \quad (2-25)$$

信号 $F_j(x) \in V_j = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k$ 。

2.4.2 Mallat 分解重构算法

1989 年, Mallat 在小波变换多分辨分析理论与图像处理的应用研究中提出了信号的塔式多分辨分解与重构的著名算法, 也称 Mallat 算法。一般认为, Mallat 法在小波分析中的地位类似于 FFT 在经典 Fourier 分析中的地位^[23]。

Mallat 算法的基本思想可以归纳如下: 设 $H_j f$ 为能量有限信号 $f \in L^2 R$ 在分辨率 2^j 下的近似, 则 $H_j f$ 可以进一步分解为 f 在分辨率 2^{j-1} 下的近似 $H_{j-1} f$ (通过低通滤波器得到) 以及位于分辨率 2^{j-1} , 与 2^j 之间的细节 $D_{j-1} f$ (通过高通滤波器得到) 之和。下面讨论具体表达式:

设 φ 与 ψ 分别为尺度与小波函数, 则信号 f 在分辨率 2^{j-1} , 下近似 $H_{j-1} f$ 和细节 $D_{j-1} f$ 分别假设为:

$$H_{j-1} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(x) \quad D_{j-1} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x) \quad (2-26)$$

式 (2-26) 中 $a_{j-1,k}$ 与 $d_{j-1,k}$ 分别为分辨率 2^{j-1} 下粗糙系数与细节系数。而分辨率 2^j 下信号 f 的近似 $H_j f$ 可以直接表示为:

$$H_j f = H_{j-1} f + D_{j-1} f \quad (2-27)$$

其中 $H_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j,k} \varphi_{j,k}(x)$ 从 (2-26) 与 (2-27) 不难看出, 研究信息 $H_j f$ 与 $H_{j-1} f$ 以及 $D_{j-1} f$ 之间的关系可以转化为找出系数与 $a_{j,k}$ 与 $a_{j-1,k}$ 以及 $d_{j-1,k}$ 的

关系。为此，从双尺度方程开始，此时有：

$$\begin{aligned}\varphi_{j-1,n}(x) &= 2^{\frac{j-1}{2}} \varphi(2^{j-1}x-n) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2^j x - 2n - i) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k-2n} 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k-2n} \varphi_{j,k}(x)\end{aligned}\quad (2-28)$$

上式两端用函数 $\varphi_{j-1,m}(x)$ 作内积，并利用其标准正交特性推得：

$$\langle \varphi_{j-1,n}, \varphi_{j,m} \rangle = c_{m-2n} \quad (2-29)$$

另外， $g_k = (-1)^k c_{1-k}$ 利用方程(2-26)又有：

$$\psi_{j-1,n}(x) = 2^{\frac{j-1}{2}} \varphi(2^{j-1}x-n) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2^j x - 2n - i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \varphi_{j,k}(x) \quad (2-30)$$

同样可得：

$$\langle \psi_{j-1,n}, \varphi_{j,m} \rangle = g_{m-2n} \quad (2-31)$$

利用 (2-26) 与 (2-27)，并在 (2-27) 中用函数 $\psi_{j-1,n}(x)$ 作内积并注意到 (2-29) 与 (2-31) 及正交特性，得到：

$$a_{j-1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_{k-2n}} a_{j,k} \quad (2-32)$$

而用函数 $\psi_{j-1,n}(x)$ 对 (2-26) 作内积时则得到：

$$d_{j-1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2n}} a_{j,k} \quad (2-33)$$

(2-30) 与 (2-31) 被称之为信号的分解，构成 Mallat 著名的塔式分解算法。

另一方面，在 (2-26) 中用函数 $\varphi_{j,n}(x)$ 作内积，产生

$$a_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n-2k} a_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} d_{j-1,k}$$

式 (2-32) 称之为信号的重构，构成 Mallat 著名的塔式重构算法。

二维 Mallat 算法采用了可分离的滤波器设计，实质上相当于分别对图像数据的行和列做一维离散小波变换。此时二维尺度函数 $\varphi(x,y) \in L^2(R^2)$ 可表示为两个一维尺度函数的乘积：

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

令 $\psi(x)$, $\psi(y)$ 分别为与 $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ 相对应的一维小波, 则在分辨率 j 层, 二维的二进小波可表示为以下 3 个可分离的正交基函数:

$$\psi^1(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad \psi^2(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

2.5 小波基函数及其性质

不同的小波基具有不同的特性, 用不同的小波基分析同一个问题会产生不同的结果, 故小波分析在应用中便存在一个小波基的选取问题要根据小波函数的特征和应用的需要来选择合适的的小波基。

2.5.1 小波基具有的性质

为了在小波分析的应用中能正确的选择针对实际问题的小波基, 首先要充分了解各种小波基的性质。小波基的性质大致包括五个方面: 正交性、对称性、消失矩、正则性和紧支性。

(1) 正交性

正交性是小波基的一个非常优良的性质, 早期研究的小波大多是正交小波, 它在理论上是近乎完美的。

设 $\varphi(x)$ 为尺度函数, 则函数系 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成规范正交系的充要条件是:

$$\langle \varphi(x), \varphi(x-k) \rangle = \delta_{0,k}$$

正交小波对应的低通滤波器和高通滤波器系数之间有着直观的联系, 即:

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}$$

这对正交小波的构造和实际应用都带来很大的方便, 用正交小波基进行多尺度分解得到的各子带数据分别落在相互正交的的子空间中, 使各子带数据的相关性减小, 这有利于数值计算和数据压缩。但是除 Haar 小波外, 正交小波不具有线性相位, 能准确重建的、正交、具有线性相位的有限冲激响应滤波器组是不存在的, 这是被理论证明的结论, 为了解决线性相位问题, 一般放宽正交性条件为双正交, 双正交条件则放弃了对偶滤波器的正交条件, 只保留前两个

交叉正交条件，实际中双正交小波常具有非常好的性能。

(2) 消失矩特性

为了提高小波的衰减速度，要求所使用的基函数具有一定的消失矩，消失矩阶数描述了小波函数相对于尺度函数的振荡性质，阶数越高，小波函数振荡越剧烈，并可通过小波变换将该振荡性质传递到小波域内。而且小波函数的消失矩越高，使得图像小波分解的高频细节分量中就有越多的系数为 0 或接近于 0，也就是存在很多可以被忽略的奇异点，从而能量集中特性越好，这对图像的边缘检测和压缩编码很重要。

一般来讲，如果一个小波的消失矩 R ，则它对应的滤波器长度不能小于 $2R$ ，Daubechies 小波基的消失矩为 N ，双正交小波基 BiorNr.Nd 的消失矩 $Nr-1$ ，Coiflets 小波基的消失矩为 $2N$ ，Symlets 小波基系列的消失矩为 N 。

在信号检测的应用中，为了能够有效的检测奇异点，小波基的消失矩也必须具有足够的阶数，它与 Lipschitz 奇异性指数密切相关，另外从计算量的角度考虑，消失矩的阶数与紧支撑区间长度相关，过高的阶数将增加计算量。

(3) 紧支性

若函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 外恒为零，则称该函数在这个区间上紧支，具有该性质的小波称为紧支撑小波。如果尺度函数的低通滤波器 $h_0(n)$ 是 FIR 滤波器，那么尺度函数和小波函数只在有限区间内非零，称为紧支撑小波滤波器。紧支性是小波的重要性质，支集越小的波，局部化能力越强，不需要作截断，也就无截断误差，所以精度比较高，在信号的突变和图像的边缘检测中，紧支小波基是首要选择，但紧支性于正则性是一对矛盾，常常需要作适当的权衡。

(4) 对称性

在图像信号处理中，对称或反对称的尺度函数和小波函数是非常重要的，对称性能避免信号在分解与重构中的失真，基于人类的视觉系统对边缘附近对称的量化误差较非对称误差更不敏感，对称和反对称小波在检测信号的奇异性时的表现是不同的，对于阶跃型边缘，反对称小波变换在该处为最大值，而对称小波变换则呈现过零值。可以证明，除了 Haar 基外，所有具有紧支集的实正交小波基是不对称的，双正交小波可以具有对称性。

2.5.2 常用小波基

1. Haar 小波

Haar 函数是一组互相正交归一的函数集, Haar 小波正是由它衍生而得的。它是支撑域在 $t \in [0,1]$ 范围内的单个矩形。其时域和频域的表达式如下:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi(w) = j \frac{4}{w} \sin^2\left(\frac{w}{4}\right) e^{-j\frac{w}{2}}$$

由于 $\int \psi(t) dt = 0$, 但 $\int t\psi(t) dt \neq 0$, 因此 $\psi(t)$ 在 $w=0$ 处有一阶零点。

Haar 小波在时域上是不连续的, 只有一阶消失矩。但它的主要优点是:

- (1) 计算简单, 其高通和低通滤波器长度均只有 2。
- (2) 不但与 $\psi(2^j t)[j \in \mathbb{Z}]$ 正交, 而且也与自己的整数位移正交, 因此在 $a = 2^j$ 的多分辨率系统构成一组最简单的正交归一的小波族。

2. 样条小波 (Spline Wavelet)

样条函数在曲线拟合中是用来使拟合出的曲线不但本身平滑, 而且导数也平滑的函数。因此它必定是低通函数, 不是带通函数, 不能用作小波。但是由样条函数却能导出一组具有带通性质的小波函数。

3. Daubechies (dbN) 小波

法国学者 Daubechies 提出一类具有以下特点的小波, 称为 Daubechies 小波。我们一般写成 dbN, N 是小波的阶数。小波 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\psi(w)$ 中的支撑区为 $2N-1$, $\psi(w)$ 的消失矩为 N。Daubechies 小波具有的以下的特点:

- (1) 时域上是有限支撑的, 即 $\psi(t)$ 长度有限。而且其高阶原点矩 $\int t^p \psi(t) dt = 0$, $p=0-N$, N 值越大, $\psi(t)$ 的长度越长。
- (2) 在频域上 $\psi(w)$ 在 $w=0$ 处有 N 阶零点。
- (3) $\psi(t)$ 和它的整数位移正交归一, 即 $\int \psi(t)\psi(t-k) dt = \delta_k$ 。
- (4) 小波函数 $\psi(t)$ 可以由所谓“尺度函数” $\phi(t)$ 求出来。尺度函数 $\phi(t)$ 为低通函数, 长度有限, 支撑域在 $t = [0, 2N-1]$ 范围内。

Daubechies 小波是具有紧支撑性和正交性的小波基, 记为 dbN, dbN 小波是连续的, 随 N 的增加, 小波变得更加光滑, dbN 小波具有 N 阶的消失矩。但其不具有对称性, 这在信号和图像处理中往往会引起信号的失真。

4. SymletsA (symN) 小波

Symlets 函数系是由 Daubechies 提出的近似对称的小波函数, 它是对 db 函数的一种改进。Symlets 函数系通常表示为 $\text{sym}N(N = 2, 3, \dots, 8)$ 。

5. Coiflet 小波

Coiflet 函数也是由 Daubechies 构造的一个小波函数, 它具有 $\text{coif}N(N = 1, 2, 3, 4, 5)$ 这一系列。Coiflet 具有比 $\text{db}N$ 更好的对称性。从支撑长度的角度看, $\text{coif}N$ 具有和 $\text{db}3N$ 和 $\text{sym}3N$ 相同的支撑长度; 从消失矩的数目来看, $\text{coif}N$ 具有和 $\text{db}2N$ 及 $\text{sym}2N$ 相同的消失矩数目。

2.6 小波在图像处理中的应用

小波分析是一种频域分析工具, 和 Fourier 分析一样, 主要用于信号处理。当把图像看成二维信号时, 小波分析即可用于图像处理^[24]。本文主要研究基于小波理论在图像去噪和图像增强处理中的应用:

(1) 图像去噪

小波图像去噪就是利用具体问题的先验知识, 根据信号和噪声的小波系数在不同尺度上具有不同性质的机理, 构造相应规则, 在小波域采用其他数学方法对含噪信号的小波系数进行处理。实际中, 有用信号通常表现为低频信号或较平稳信号, 噪声信号则表现为高频信号, 其消噪过程为: 首先对实际信号进行小波分解, 选择合适小波基并确定分解层次, 其次对小波分解的高频系数进行处理, 再对处理后的小波系数进行重构即为去噪后的真实信号。

(2) 图像增强

基于小波变换的图像增强是根据信号和噪声在不同尺度上小波系数的不同性态, 对不同尺度的小波系数构造相应的规则进行处理。处理的实质在于减少甚至消除噪声产生的系数, 并能最大限度地保留有效信号的系数, 同时对感兴趣的细节加以一定的增强, 使边缘、细节更清晰, 最后再由增强后的系数重构图像。因此, 增强算法的主要内容在于对原始信号的小波系数进行处理, 以达到减少噪声和突出细节的目的, 从而改善图像的视觉效果。所以可以采用不同的阈值算法来减少噪声并增强不同尺度的图像细节分量。在实际应用中, 可以首先利用噪声在小波分解系数中的分布特点去噪, 然后根据噪声水平和感兴趣的细节所处的尺度来选用不同的增强函数, 这种增强方法非常符合人眼的视觉特性。

2.7 本章小结

本章在上章对小波去噪基本理论介绍的基础上，对小波在图像处理中的分析理论做了详细的介绍，阐述了本论文最基本的理论基础，首先在 2.1 节中，介绍了小波理论产生的背景，由傅立叶变换，短时傅立叶变换发展而来，然后在 2.2, 2.3 节中详实的阐述了小波变换理论，并在此基础上介绍了连续小波变换，离散小波变换。在 2.4 节中详细介绍了小波理论的一重要特性：多分辨率特性，这也是小波去噪的一重要理论根据，为去噪原理的介绍打下了坚实的基础。然后系统地讨论了小波基的数学特性，这些性质之间的相互关联和制约关系，给出了每一性质对实际应用所产生的影响，并从信号处理的角度出发，给出选择小波基时应偏重的一些特性，并且介绍了几种常用的小波基函数，最后介绍了小波在图像处理中的应用。本章的内容是研究基于小波变换的图像去噪和增强的必要基础。

第3章 小波图像去噪技术

3.1 小波图像去噪

目前,小波图像去噪方法已成为去噪的一个重要分支和主要研究方向,在过去的十多年,小波方法在信号和图像去噪方面的应用引起学者广泛的关注。具有“数字显微镜”之称的小波变换在时频域具有多分辨率的特性,可同时进行时频域的局部分分析和灵活地对信号局部奇异特征进行提取以及时变滤波。利用小波对含噪信号进行处理时,可有效地达到滤除噪声和保留信号高频信息,得到对原信号的最佳恢复。

小波去噪是小波变换较为成功的一类应用,其去噪的基本思路可用框图 3-1 来概括,即带噪信号经过预处理,然后利用小波变换把信号分解到各尺度中,在每一尺度下把属于噪声的小波系数去掉,保留并增强属于信号的小波系数,最后再经过小波逆变换恢复检测信号^[25]。

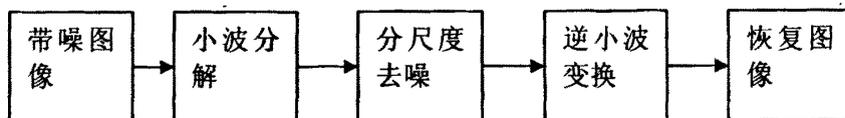


图 3-1 小波去噪框图

因此,利用小波变换在去除噪声时,可提取并保存对视觉起主要作用的边缘信息。而传统的傅立叶变换去噪方法在去除噪声和边沿保持上存在着矛盾,原因是傅立叶变换方法在时域不能局部化,难以检测到局域突变信号,在去除噪声的同时,也损失了图像边沿信息。由此可见,与傅立叶变换去噪方法相比,小波变换去噪方法具有明显的优越性。

目前,小波去噪的技术发展极为迅速,小波去噪方法大体可以分为小波萎缩法、投影方法和相关方法三类。

一、小波萎缩法

小波萎缩法是目前研究和运用得最为广泛的方法,小波萎缩法又分成如下

两类：一类是阈值萎缩，这里只是扩展到二维的情况。由于阈值萎缩主要是基于在小波分解高频子空间中，比较大的小波系数一般都是以实际信号为主，而比较小的系数则很大程度上都是由噪声产生，因此可以通过设定合适的阈值，首先将小于阈值的系数置零，而保留大于阈值的小波系数，再通过一个阈值函数映射得到估计系数，最后对估计系数进行逆变换，就可以实现去噪后的信号重建。但当噪声水平比较高时，容易将原图像的高频部分模糊掉。另一类萎缩方法则有所不同，它通过判断系数被噪声污染的程度，并为这种程度引入各种度量方法（如概率和隶属度等），进而确定萎缩的比例，所以这种萎缩方法又被称为比例萎缩。

二、投影方法

投影方法的原理就在于将含噪信号以一种迭代的方式，投影到逐步缩小的空间，由于最后的空间能更好地体现原信号的特点，所以投影法也能够有效地区分噪声和信号。

投影方法有 MP (Matching Pursuits) 法和 MCD (Multiple Compact Domain) 或 POCS (Projection Onto Convex Set) 法两类。其中，MP 法是通过指定一族小波或波函数，并将含噪信号向此函数族进行投影，接着又对残差投影，重复此过程直到残差达到一定的条件。MCD 和 POCS 法同 Matching Pursuits 法很相似，也是基于投影原理，只不过信号的投影空间有所不同，用小波函数库成投影空间时，Matching Pursuits 法用 Gabor 函数库，而 MCD 和 POCS 法一般用 Besov 空间的凸集。

三、相关方法

相关方法主要是基于信号在各层相应位置上的小波系数之间往往具有很强的相关性，而噪声的小波系数则具有弱相关或不相关的特点来进行去噪。而小波去噪方法中最早被提出的是小波阈值去噪方法，它是一种实现简单而效果较好的去噪方法。最早的阈值去噪方法为 Donoho 提出的 Visushrink 方法，目前，小波阈值去噪方法是研究最广泛的方法。这种非线性滤波方法之所以特别有效，就是由于小波变换具有一种“集中”的能力，它可以使一个信号的能量在小波变换域集中在少数系数上，因此这些系数的幅值必然大于在小波变换域内能量分散于大量小波系数上的信号或噪声的幅值。这就意味着对小波系数进行阈值处理可以在小波变换域中去除低幅值的噪声和不期望的信号，然后运用小波逆变换，得到去噪后的重建图像。

3.2 小波阈值去噪的基本方法

3.2.1 阈值去噪原理

Donoho^[26]提出的小波阈值去噪方法的基本思想是当 $w_{j,k}$ 小于某个临界阈值时, 认为这时的小波系数主要是由噪声引起的, 予以舍弃。当 $w_{j,k}$ 大于这个临界阈值时, 认为这时的小波系数主要是由信号引起, 那么就把这一部分的 $w_{j,k}$ 直接保留下来(硬阈值方法), 或者按某一个固定量向零收缩(软阈值方法), 然后用新的小波系数进行小波重构得到去噪后的信号。此方法可通过以下三个步骤实现:

(1) 先对含噪声信号 $f(t)$ 做小波变换, 得到一组小波分解系数 $w_{j,k}$ 。

(2) 通过对分解得到的小波系数 $w_{j,k}$ 进行阈值处理, 得出估计小波系数 $\bar{w}_{j,k}$, 使得 $w_{j,k} - u_{j,k}$ 尽可能的小($u_{j,k}$ 为不含噪声信号的小波变换系数)。

(3) 利用估计小波系数 $\bar{w}_{j,k}$ 进行小波重构, 得到估计信号 $\bar{f}(t)$, 即为去噪之后的信号。

需要说明的是, 在小波阈值去噪法中, 最重要的是阈值函数和阈值的选取, 下面分别讨论这两个方面。

3.2.2 阈值函数的选取

阈值函数关系着重构信号的连续性和精度, 对小波去噪的效果有很大影响。目前, 阈值的选择主要分硬阈值和软阈值两种处理方式。其中, 软阈值处理是将信号的绝对值与阈值进行比较, 当数据的绝对值小于或等于阈值时, 令其为零; 大于阈值的数据点则向零收缩, 变为该点值与阈值之差。而硬阈值处理是将信号的绝对值与阈值进行比较, 小于或等于阈值的点变为零, 大于阈值的点不变。但硬阈值函数的不连续性使消噪后的信号仍然含有明显的噪声; 采用软阈值方法虽然连续性好, 但估计小波系数与含噪信号的小波系数之间存在恒定的偏差, 当噪声信号很不规则时显得过于光滑^[27]。两种阈值函数的表达式分别如下:

硬阈值函数为:

$$\bar{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| > \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| \leq \lambda \end{cases} \quad (3-1)$$

而软阈值函数为：

$$\bar{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| > \lambda \\ 0 & , |w_{j,k}| \leq \lambda \end{cases} \quad (3-2)$$

式 (3-2) 中 $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数，即：

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, n > 0 \\ -1, n < 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

因此，硬阈值方法可以很好的保留图像边缘等局部特征，但图像会出现振铃、伪Gibbs效应等视觉失真，而软阈值处理虽相对平滑，但可能会造成边缘模糊等失真现象，这都是我们在工程去噪中所不希望看到的。

3.2.3 软硬阈值函数存在的不足

软阈值法虽然在实际中得到了广泛的应用，也取得了较好的效果，但它们本身存在着较多的缺点：

(1) 软阈值法：虽然该阈值函数在小波域内是连续的，不存在间断点问题，但它的导数是不连续的，因而在求高阶导数时存在困难。并且软阈值对大于阈值的小波系数采取恒定值压缩，这与噪声分量是随着小波系数增大而逐渐减少的趋势不相符。

(2) 硬阈值法：该阈值函数在整个小波域内是不连续的，在 λ 和 $-\lambda$ 存在间断点，这与实际应用中常常要对阈值函数进行求导运算存在矛盾，具有一定的局限性；同时，它只对小于阈值的小波系数进行处理，对大于阈值的小波系数不加处理，这与实际情况下大于阈值的小波系数中也存在噪声信号的干扰不相符。

3.2.4 常用阈值选取方法

在小波阈值去噪中，阈值的选取很关键。阈值较小，去噪后的图像信号与输入比较接近，但是残留了较多噪声。若阈值较大，则得到较多为零的小波系数，对于软阈值策略重建图像变得模糊，硬阈值策略下的重建图像包含较多的伪边缘。在小波域阈值去噪中，阈值的选取直接影响滤波效果。目前有大量的文献提出了各种各样确定阈值的方法。

目前使用的阈值可以分成全局阈值和局部适应阈值两类。其中，全局阈值

对各层所有的小波系数或同一层内的小波系数都是统一的；而局部适应阈值是根据当前系数周围的局部情况来确定阈值的，更具有灵活性。

目前提出的阈值主要有以下几种：

(1) 全局阈值，即 Donoho 和 Johnstone^[28]统一阈值（简称 DJ 阈值）

$$\lambda = \sigma\sqrt{2\ln N} \quad (3-4)$$

其中， σ 为噪声标准方差， N 为信号的尺寸或长度。这是在正态高斯噪声模型下，针对多维独立正态变量联合分布，在维数趋向无穷时的研究得出的结论，即大于该阈值的系数含有噪声信号的概率趋于零。这个阈值由于同信号的尺寸对数的平方根成正比，所以当 N 较大时，阈值趋向于将所有小波系数置零，此时小波滤噪器退化为低通滤波器。

(2) 最大最小化阈值 (Minimax)

Donoho 和 Johnstone 提出的 Minimax 阈值是统一阈值的改进，此阈值采用固定门限获得理想过程的极小极大特性。极小极大原理是在统计学中为设计估计量而采用的，由于去噪信号可以假设为未知回归函数的估计量，则极小极大估计量是实现在最坏条件下最大均方误差最小的任选量。它对应于采样点较少的分解层，阈值设为零即不进行阈值处理，其按公式 (3-5) 计算阈值：

$$\lambda = \begin{cases} 0 & n \leq 32 \\ \sigma(0.3936 + 0.1829 \log_2 n) & n > 32 \end{cases} \quad (3-5)$$

(3) 理想阈值

理想阈值是在均方差准则下的最优阈值，目前使用比较多的主要有两种方法：一是 SUREShrink 阈值，它是在 SURE(Stein Unbiased Risk Estimation)准则下得到的阈值，是均方差准则的无偏估计，并且 SURE 阈值趋近于理想阈值；另一个是 GCV(Generalized cross validation) 阈值，广义交叉确认函数阈值虽然是有偏的，但由于用这种准则得到的最优阈值也趋近于理想阈值，而且不需要对噪声方差进行估计，所以许多文献都使用这种准则来确定合适的小波萎缩阈值。

(1) SURE 阈值

$$\lambda = \arg \min_{0 \leq t \leq 1} \left| \sigma^2 N + \sum_{j=0}^{N-1} \max \{w_j, t^2\} - 2\sigma^2 \#\{w_j \leq t\} \right| \quad (3-6)$$

式中 $\#\{\}$ 代表取集合中元素的个数， σ^2 为噪声方差， w_j 为第 j 个小波系数。

(2) GCV 阈值

$$\lambda_{GCV} = \min \left(\frac{1}{N} \sum \frac{(w - w_\delta)^2}{\left(\frac{N_0}{N}\right)^2} \right) \quad (3-7)$$

式中, N 是某一层系数中小波系数的个数, N_0 代表信号在阈值萎缩中被置 0 的系数个数, w 和 w_δ 分别代表带噪小波系数和阈值萎缩后的系数。

(4) BayesShrink 阈值和 MapShrink 阈值

在小波系数服从广义高斯分布的假设下, 根据贝叶斯估计准则得出了阈值门限的计算公式:

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\sigma_x} \quad (3-8)$$

式中, σ 为噪声标准方差, σ_x 公式为广义高斯分布的标准方差值。

在小波系数服从 Laplace 分布的假设下, Moulin 等人给出了基于做 MAP 方法的阈值门限计算公式:

$$\lambda_{map} = \tau \quad (3-9)$$

式中, τ 为 Laplace 分布的参数。

(5) 基于零均值正态分布的置信区间阈值 $\lambda = 3\sigma$

这个阈值是考虑零均值的正态分布变量落在 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 之外的概率非常小, 所以绝对值大于 3σ 的系数一般都认为主要由信号系数构成。

另外, 对于正态高斯白噪声, 存在有三个重要的数据:

$$P\{u - \sigma < X \leq u + \sigma\} = \phi(1) - \phi(-1) = 2\phi(1) - 1 = 0.6826 \quad (3-10)$$

$$P\{u - 2\sigma < X \leq u + 2\sigma\} = \phi(2) - \phi(-2) = 2\phi(2) - 1 = 0.9544 \quad (3-11)$$

$$P\{u - 3\sigma < X \leq u + 3\sigma\} = \phi(3) - \phi(-3) = 2\phi(3) - 1 = 0.9974 \quad (3-12)$$

其中 u 为随机变量的数学期望, σ 为方差。对于正态随机变量来说, 第三个数据的值落在区间压 $[u - 3\sigma, u + 3\sigma]$ 内的概率为 99.74%, 这就是 3σ 规则。由于高斯白噪声大部分的值落在 3σ 以内, 因此可选取如下的阈值:

$$\lambda = c\sigma \quad (3-13)$$

式中, c 在 3.0~4.0 之间取值, 可滤去大部分的噪声。

(6) 局部阈值

与全局阈值不同，局部阈值主要是通过考查在某一点或某一局部的特点，再根据灵活的判定原则来判定系数是“主噪”，还是“主信”，实现“去噪”和“保留信号”之间的平衡，而且这些判定原则有时并不一定是从系数的绝对值来考虑的，而是从别的方面，例如从概率和模糊隶属度方面来考虑。Vidakovic 等人利用主信系数和主噪系数在跨尺度中分布的不同特征，在 BayesShrink 框架下，结合假设检验，给出一个阈值公式，并以此来对小波系数进行硬阈值处理；而 Chang 则结合区间估计理论和假设检验的方法给出了另外一种局部阈值收缩方法；Chang 等人也给出了另一种局部阈值收缩方法。实验结果表明，局部阈值确实比全局阈值对信号的适应能力好，但是需要较为繁琐的计算。

时至今日，对阈值选择方法的研究仍在进行当中，仍有新的阈值公式不断提出，但通常阈值是根据实际应用的需要，通过确定合适的准则，并通过可能的阈值进行寻优来选择的。

3.3 小波阈值去噪的改进方法

3.3.1 小波阈值函数的改进

前面提到的两种函数，即软阈值和硬阈值函数虽然在实际中得到了广泛的应用，但是本身存在着缺点。硬阈值函数在阈值点处是不连续的，对软阈值函数来说，原系数和分解得到的小波系数总存在着恒定的偏差，这将影响重构的精度。同时这两种函数不能表达出分解后系数的能量分布，所以在具体的应用中不便于进行预算处理，从而限制了它的进一步应用。因此，寻找一种新的阈值函数，使它既能实现阈值函数的功能，又具有高阶导数，同时可以体现出分解后系数的能量分布，将是我们的目标。

崔华^[29]等人构造了不同的阈值函数用来对信号进行去噪处理，新阈值函数如下所示：

$$\bar{W}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} - a\lambda + \frac{2a\lambda}{1 + \exp(x)}, & |w_{j,k}| \geq \lambda (0 \leq a \leq 1) \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (3-14)$$

该方法思路很简单，也很通俗，去噪效果很好。由于软阈值方法估计出来

的小波系数 $\bar{w}_{j,k}$ 的绝对值总比 $w_{j,k}$ 要小 λ ，而影响了重构精度，所以要设法减小此偏差，但这种偏差减小为零(硬阈值方法情况)也未必是最好的，因为 $w_{j,k}$ 本身就是由 $u_{j,k}$ 和 $v_{j,k}$ 组成的。而我们的目的是使 $|\bar{w}_{j,k} - u_{j,k}|$ 最小，因此使 $\bar{w}_{j,k}$ 的取值介于 $w_{j,k} - \lambda$ 之间可能会使估计出来的小波系数 $w_{j,k}$ 更加接近于 $u_{j,k}$ ，基于这一思想构造了该阈值函数。

通过对式的分析，并且利用指数函数高阶可导的特点，我们提出一种新的阈值函数如下：

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \left(|x| - \frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))} \right), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases} \quad (3-15)$$

式中 $m \geq 0$ ， λ 为阈值。该函数不仅在小波域内具有与软阈值函数相同的连续性，而且在 $|x| > \lambda$ 时有高阶导函数。当 $m=0$ 时，该式可以看作是软阈值函数，当 $m \rightarrow \infty$ 时可以看作硬阈值函数。所以，该函数是现有软、硬阈值函数的一种推广，通过调整参数，可以克服硬阈值函数不连续和软阈值函数有偏差的缺点，同时具有能量自适应性。

该函数不仅在小波域内是连续的，而且在 $|x| \geq \lambda$ 时有高阶导函数，考察函数：

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \left(|x| - \frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))} \right)$$

当 $x > 0$ 时，
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x - \frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))}}{x} = 1 - \frac{\lambda}{x(1 + \exp(m(x - \lambda)))}$$
，此时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1。$$

当 $x < 0$ 时，
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + \frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))}}{x} = 1 + \frac{\lambda}{x(1 + \exp(m(x - \lambda)))}$$
，此时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1。$$

$$\text{同时, } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\text{sgn}(x) \left(\frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))} \right)) = 0$$

当 x 增大时, $f(x)$ 不断逼近 x , 即是说 $f(x)$ 是以 $y=x$ 为渐近线的, 这就克服了软阈值函数中小波系数估计和原系数之间的具有固定偏差的缺点。同时, 当阈值很小时, 新阈值函数的效果和硬阈值函数相当, 但更加灵活。

考察正数 m 的取值对阈值函数的影响:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (\text{sgn}(x) \left(|x| - \frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))} \right)) = x$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(x) = \lim_{m \rightarrow 0} (\text{sgn}(x) \left(|x| - \frac{\lambda}{1 + \exp(m(|x| - \lambda))} \right)) = \text{sgn}(x) (|x| - \lambda)$$

以上两式说明, 当 m 取值很小时, 新阈值函数趋同于软阈值函数; 当 m 取值很大时, 新阈值函数趋近于硬阈值函数。通过调节 m 取值可以改变新阈值函数的趋向, 也体现了新阈值函数的灵活性。

3.3.2 小波阈值的改进

小波阈值去噪方法除了阈值函数的选取, 另一个重要环节是对阈值 λ 的具体估计。阈值主要由噪声方差的估计值和子带系数的能量分布共同确定, 大部分情况下, 需要从观测数据中估计噪声方差。如果阈值 λ 选取过小, 去噪后的信号仍然有噪声的存在, 造成去噪不完全; 相反如果阈值 λ 选取过大, 部分有用信号将被误认为噪声而被滤掉, 引起偏差。由于噪声的小波变换系数随着尺度的增大而减小, 对信号进行去噪时, 不同的分解层阈值的选取应该有所不同并且随着分解尺度的增加阈值应该有所减小。本文对阈值的选取作出了一定的改进。

我们利用图像小波系数的方均根 RMS (Root Mean Square), 来表征图像的奇异性, 我们利用图像小波系数的均方根来衡量可变系数 c 。相应的我们定义称可变系数 c 为图像的奇异因子, 它与图像的奇异特性有关, 也就是与图像小波系数均方根有关。一般来说图像的小波系数均方根越大, 说明图像的奇异性越大, 纹理和边缘信息越丰富。

设理想无噪声图像 $f(x, y)$, 其小波系数为 $f_w(x, y)$, 则 RMS 定义如下:

$$RMSf(x,y) = \sqrt{\sum_{x,y} [f_w(x,y)]^2 / (N_{x,y})} \quad (3-16)$$

设一幅 $N \times N$ 含噪声的图像 $\bar{f}(x,y)$:

$$\bar{f}(x,y) = f(x,y) + n(x,y) \quad (3-17)$$

其中 $0 \leq x, y < N$, $x, y \in Z$ 表示图像像素的位置, $f(x,y)$ 为理想无噪声图像, $n(x,y)$ 为标准高斯白噪声, 即均值为零, 方差为 σ^2 。理想无噪图像的 RMS 预先是没法知道的, 但由于白噪声和理想无噪图像之间是不相关的, 并且小波变换是一种线性变换, 因此我们可以得到理想无噪图像的 RMS、噪声图像的 RMS 和噪声的 RMS 三者之间的关系:

$$RMS(\bar{f}_w)^2 = RMS(f_w)^2 + RMS(n_w)^2 \quad (3-18)$$

由于高斯白噪声的方差为 σ^2 , 由此得到:

$$RMS(\bar{f}_w)^2 = RMS(f_w)^2 + \sigma^2 \quad (3-19)$$

因此, 我们可以从上等式中计算出理想无噪图像的 RMS 为:

$$RMSf_w(x,y) = \sqrt{RMS(\bar{f}_w)^2 - \sigma^2} \quad (3-20)$$

根据我们定义的 RMS 和 c 的关系, 经过大量的实验统计, 我们得了一个小波估计模型:

$$c = \exp(-RMS(\bar{f}_w)/n) \quad (3-21)$$

其中, $n \in (20, 30)$ 的数, 它的选取与理想无噪图像的 RMS 有关, 当理想无噪图像的 RMS 增大时可适当地减小 n 的值。

我们可以得到新的小波阈值:

$$\lambda = \exp(-\sqrt{RMS(f_w)^2 - \sigma^2} / n) \times \sigma \times \sqrt{2 \ln(N) (1 + \frac{1}{j})} \quad (3-22)$$

其中 N 为信号长度, j 为分解尺度。

噪声方差无法预先知道的, 这里我们用鲁棒中值估计法来估计噪声图像中噪声的方差大小:

$$\sigma^2 = \text{median}(|f_i|) / 0.6745 \quad (3-23)$$

其中 f_i 是最低尺度的频带。

3.3.3 小波基选择

对应于特定的含噪图像，不同的小波基会产生不同的消噪效果，这是小波方法进行图像消噪中的一个关键问题。

在进行小波分解和重构时，小波基的选择对运算复杂度和图像去噪效果都有很大的影响。对于小波基的选择通常考虑如下三个因素：正交性、支撑宽度和正则性。正交性是从变换后的小波系数的相关性来考虑的，如果是正交小波，变换后的小波系数是不相关的，这样滤波效果会更好。但是，对于除 Haar 小波之外的正交小波来说，线性相位和紧支撑等性质间是矛盾的，因此一般情况下选择双正交小波，其次双正交小波也易于实现。支撑宽度是从时间复杂度来考虑的，小波变换实质是一个卷积过程，如果卷积核太长会严重影响运算时间。正则性是从小波基的光滑程度来考虑的，如果小波基正则性太差，滤波的效果将有可能极度恶化，而正则性太好，则有可能滤掉了图像的很多细节。鉴于对以上因素的综合考虑，本文选取 db4 小波基。

3.3.4 图像质量的评价方法

目前常用的图像质量评价方法主要有两种，即主观质量评价和客观质量评价。

主观评价方法就是让观察者对同一幅图像按视觉效果的好坏进行打分，并对其进行加权平均。该方法劳动强度太大，且不能应用于图像实时传输的场合。

客观评价方法是用恢复图像偏离原始图像的误差，来衡量图像恢复的质量，最常用的有均方误差 (MSE)、信噪比 (SNR)、峰值均方误差 (PMSE) 和峰值信噪比 (PSNR)。客观评价方法只能从总体上反映原始图像和恢复图像的灰度差别。

均方根误差 (MSE) 是原始信号与去噪后的估计信号之间的均方误差。定义为：

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (\hat{X}(m, n) - X(m, n))^2 \quad (3-24)$$

其中， $X(m, n)$ 为原始信号， $\hat{X}(m, n)$ 是小波去噪后的估计信号， M 、 N 分别为图像行列维数。去噪后的均方误差越小，说明去噪图像与原始图像的近似

度越高，去噪的效果越好。

信噪比 (SNR) 是测量信号中的噪声量的传统方法评价的指标。信噪比的单位是分贝 (db)，其定义为：

$$SNR = 10 \times \log_{10}(power_{signal} / power_{noise}) \quad (3-25)$$

$$power_{signal} = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N X^2(m, n)$$

$$power_{noise} = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (\hat{X}(m, n) - X(m, n))^2 \quad (3-26)$$

其中， $power_{signal}$ 为真实信号的功率， $power_{noise}$ 为噪声的功率， $X(m, n)$ 为原始信号， $\hat{X}(m, n)$ 是小波去噪后的估计信号， M ， N 分别为图像行列维数。去噪后信噪比越大，去噪的效果越好。

峰值均方误差 (PMSE) 是一种常用的离散图像的逼真程度量度，定义为：

$$PMSE = \frac{MSE}{255^2} \quad (3-27)$$

峰值均方误差越小，可以获得更高的信噪比。

峰值的均方误差通常被表示成等效的信噪比，即峰值信噪比 PSNR：

$$PSNR = -10 \lg\left(\frac{MSE}{255^2}\right) \quad (3-28)$$

由于人眼视觉特性的准确性没法通过定量的方式来描述，因此主观评价法不能做定量描述，它受人为因素的影响较大，但却能反映人眼的视觉特性。而峰值信噪比 PSNR 能够对图像去噪质量进行定量的描述，但它却不能反映人眼的真实感觉。

3.3.5 实验结果及分析

实验 1：使用 Matlab 小波工具函数，实现了上一章新阈值函数比较。图 3-2 是大小为 512*512 标准灰度图像 Lena，对它分别加入方差为 10~25 的高斯白噪声，采用小波基是 db4，分解层数为 3， $m=0.5$ 去噪。阈值的选择采用的是 Donoho 的统一阈值： $\lambda = \sigma\sqrt{2\ln N}$ 。表 3-1 是新阈值函数与原软、硬阈值函数，文献[29] 阈值函数去噪方法结果的 MSE 比较，表 3-2 是新阈值函数与原软、硬阈值函数，文献[29] 阈值函数去噪方法结果的 PSNR 比较。



图 3-2 原 Lena 图像



图 3-3 加噪图像



图 3-4 硬阈值函数去噪图像



图 3-5 软阈值函数去噪图像



图 3-6 文献[29]提出的阈值函数去噪图像



图 3-7 本文提出新阈值函数去噪图像

表 3-1 新旧阈值函数图像的 MSR 比较

图像 Lena	$\sigma = 10$	$\sigma = 15$	$\sigma = 20$	$\sigma = 25$
	MSE	MSE	MSE	MSE
加噪图像	184.96	268.58	397.26	650.26
硬阈值函数	77.63	106.92	136.17	177.04
软阈值函数	94.86	110.53	142.57	198.83
文献[29]提出的阈值函数	45.09	47.24	56.23	73.23
本文提出的新阈值函数	36.90	42.89	48.12	53.57

表 3-2 新旧阈值函数图像的 PSNR 比较 (单位: db)

图像 Lena	$\sigma = 10$	$\sigma = 15$	$\sigma = 20$	$\sigma = 25$
	PSNR	PSNR	PSNR	PSNR
加噪图像	25.46	23.84	22.14	20.38
硬阈值函数	29.23	27.84	26.79	25.65
软阈值函数	28.36	27.61	26.63	23.62
文献[29]提出的阈值函数	31.59	31.02	30.38	29.79
本文提出的新阈值函数	32.46	32.12	31.67	30.17

对图 3-4 到图 3-7 研究表明, 硬阈值方法处理后的图像仍保留了明显的噪声信号, 软阈值方法处理后的图像画面柔合, 但边缘模糊, 特别是在噪声方差较大时已很不清晰, 而本文新阈值函数的方法达到了较好的视觉效果, 提高了图像的清晰度, 图像的细节得到了很好的保留, 噪声去除比较明显, 图像更加平滑, 并且与文献[29]的方法比较, 图像显现的更加清晰。

同时对表 3-1, 3-2 研究表明, 本文新阈值函数的去噪效果比硬阈值和软阈值具有明显的优势。用本文的新阈值函数的图像去噪方法, 相比其他图像去噪

方法的均方根误差 (MSR) 有明显下降。在相同的噪声方差下, 可以看到新阈值函数求得的 PSNR 值要大于硬函数和软函数的值, 说明使用了新阈值函数, 得到的噪声越小, 达到我们通过改进阈值函数去噪的目的, 与文献[29]的方法 PSNR 比较, 本文新阈值函数 PSNR 要比他的提高很多。而随着噪声方差的降低, 新阈值函数的 PSNR 值明显变大, 改进的效果越明显。

实验 2: 我们利用大小为 512*512 的标准灰度图像 Lena 进行测试, 分别对图像加入方差 10 和 20 的高斯白噪声。表 3-3 是实验中利用得到新的阈值对图像进行硬阈值和软阈值去噪, 并与原有的阈值方法进行了 PSNR 的比较。图 3-8 至图 3-15 是对 Lena 图像加入峰值信噪比为 20dB 的噪声后, 分别利用统一阈值, Bayes 阈值, GCV 阈值, 新阈值 (公式 3-22) 去噪所得的去噪图像。



图 3-8 硬阈值函数统一阈值去噪图像



图 3-9 硬阈值函数新阈值去噪图像



图 3-10 硬阈值函数 Bayes 阈值去噪图像



图 3-11 硬阈值函数 GCV 阈值去噪图像



图 3-12 软阈值函数统一阈值去噪图像



图 3-13 软阈值函数新阈值去噪图像



图 3-14 软阈值函数 Bayes 阈值去噪图像



图 3-15 软阈值函数 GCV 阈值去噪图像

表 3-3 新旧阈值图像的 PSNR 比较 (单位: db)

图像 Lena	阈值的选取	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$
硬阈值函数	统一阈值	29.23	25.79
	Bayes 阈值	31.56	29.10
	GCV 阈值	32.17	30.42
	新阈值	33.84	31.25
软阈值函数	统一阈值	28.36	24.63
	Bayes 阈值	30.75	28.87
	GCV 阈值	31.23	29.02
	新阈值	32.72	30.92

表 3-3 研究表明, 相同阈值去噪法情况下, 统一阈值的效果较差, Bayes 阈值法和 GCV 阈值去噪效果较好的, 新阈值去噪方法的结果不仅 PSNR 最高, 视觉效果也是最好。这主要是由于统一阈值“过扼杀”小波系数, 导致图像大量细节信息的丢失。新阈值无论在硬阈值去噪还是软阈值去噪方面, PSNR 都有明显提高。在相同的噪声方差和阈值函数, 新阈值比原阈值的 PSNR 提高了大约 2%。这是因为新阈值的选取不仅考虑到噪声的方差, 还与图像自身的奇异性有关, 得到的去噪图像保留了更多的细节信息, 在一定程度上缓解了软阈值去噪造成的边缘模糊现象, 对硬阈值的伪吉布斯现象也有改善。所以新阈值去噪方法选取方法是一种有效的方法, 优于传统阈值方法, 可以用于现实去噪领域。

实验 3: 选用 512*512 的标准灰度图像 Woman 作为原始图像进行实验, 分别加入不同的随机噪声, 采用本文提出的改进后的阈值和改进后的阈值函数同时对其进行去噪, 得到结果见图 3-19。



图 3-16 原图 woman



图 3-17 加噪图像



图 3-18 统一阈值和硬阈值函数去噪图像



图 3-19 新阈值和新阈值函数去噪图像

表 3-4 新旧方法的 PSNR 比较 (单位: db)

图像 Woman	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$
	PSNR	PSNR
统一阈值和硬阈值去噪图像	29.16	27.35
新阈值和新阈值函数去噪图像	32.23	31.18

研究表明, 与传统的小波阈值去噪方法相比, 本文方法明显具有良好的去

噪性能,采用新的方法提高了图像的清晰度,图像的细节得到了很好的保留,噪声去除比较明显,图像更加平滑,对于带有高斯白噪声的图像可以较为清晰地恢复出原始图像,比较完好地恢复图像边缘信息,而传统的方法则较大地受到噪声的影响,从而最终的检测结果带有明显的 Gibbs 效应。综上所述,本文提出的图像去噪方法不仅在指标上优于其他方法,而且在视觉效果上也好于其他方法,充分说明新方法的有效性和优越性。

3.4 本章小结

本章首先介绍了小波去噪的基本思路,然后介绍了小波去噪的三方法:小波萎缩法、投影方法和相关方法三类。其中着重介绍了小波萎缩法里面的阈值去噪方法,详细的讨论了小波阈值去噪的原理,阈值函数选取里的硬阈值和软阈值去噪表达式,以及这 2 种方法的优缺点,最后说明了阈值的选取方法,包括全局阈值和局部阈值,然后在此基础上提出了一种新阈值函数和新阈值。该新阈值函数是现有软、硬阈值函数的推广,通过调整参数,可以克服硬阈值函数不连续和软阈值函数有偏差的缺点,同时还可以表达出分解后的小波系数的能量分布。经实验验证,本章提出的阈值函数不仅可以有效的去除噪声,还可以保留图像的细节信息。而本文的提出的新阈值比传统阈值更接近最佳阈值,这些说明了本章算法在去除噪声方面具有一定的有效性和更好的去噪效果。

第4章 小波图像增强技术

4.1 图像增强的定义

图像增强问题的基本目标是对图像进行一定的处理，使其结果比原图更适用于特定的应用领域，这里“特定”这个词非常重要，因为几乎所有的图像增强问题都是与问题背景密切相关的，脱离了问题本身的知识，图像的处理结果可能并不一定适用，比如某种方法可能非常适用于处理 X 射线图像，但同样的方法可能不一定也适用于火星探测图像。

在图像处理领域，图像增强问题主要通过时域（沿用信号处理的说法，空域可能对图像更适合）和频域处理两种方法来解决。时域方法通过直接在图像点上作用算子或掩码来解决，频域方法通过修改傅立叶变换系数来解决。这两种方法的优劣很明显，时域方法方便快捷但会丢失很多点之间的相关信息，频域方法可以很详细地分离出点之间的相关，但需要做两次数量级为 $n \log n$ 的傅立叶变换和逆变换的操作，计算量大得多。

4.2 图像增强的基本方法

基于空间域的增强方法是直接对每一像元的灰度值进行处理。这种方法中效果比较好的是直方图均衡化。但由于直方图是近似的概率密度函数，用离散灰度级作变换时很少能得到完全平坦的结果^[30-33]。所以直方图均衡化还存在以下缺点：

- (1) 变换后图像的灰度级减少，某些细节消失。
- (2) 某些图像，如直方图有高峰，经处理后对比度不自然的过分增强。

基于频域增强方法有：低通滤波、高通滤波、带通和带阻滤波以及同态滤波等等。同态滤波解决的是光照不均匀或光动态范围过大引起不清晰的图像。高通滤波，是利用高通滤波器忽略图像中过渡比较平缓的部分，突出那些能代表细节、跳变等的高频部分，使得增强后的图像边缘细节部分清晰，但在某种程度上是图像清晰度的降低，处理后的图像视觉效果不好。

小波分析是以上两种方法的权衡结果，建立在如下的认识基础上，傅立叶分析的在所有点的分辨率都是原始图像的尺度，但对于问题本身的要求，我们

可能不需要这么大的分辨率，而单纯的时域分析又显得太粗糙，小波分析的多尺度分析特性为用户提供了更灵活的处理方法。可以选择任意的分解层数，用尽可能少的计算量得到我们满意的结果。

传统的图像增强方法在增强图像的同时，往往会带来了一些比较严重的负效应。比如，平滑滤波能去掉一些颗粒状噪声，但同时模糊了图像中原有的边缘及细节。而小波分析因它能多尺度多角度提取信号特征，并在不同尺度上让噪声和信号明显地区分开来，所以它在图像去噪和增强方面有很大优势。从两者比较来看，基于小波变换的图像增强的优点可以归纳为以下两点：

(1) 不难发现，小波分解后，多级尺度多个高频通道可得到增强。通过小波分解，得到低频分量和多个尺度上的高频分量 HH、HL、LH。人们可以根据个人兴趣随意增强某个尺度上的高频部分，也可以随意衰减某个尺度上的高频。

(2) 由于通过提取小波分解后的低频信息实现了低通滤波功能，在去噪方面有独特的优势，因而将去噪方法融合进来，达到增强和去噪相结合的目的。

小波变换将一幅图像分解为大小、位置和方向都不同的分量。在做逆变换之前可以改变小波变换域中某些系数的大小，这样就能够有选择地放大所感兴趣的分量而减小不需要的分量。

4.2.1 空间域的图像增强方法

空域图像增强方法主要包括：灰度级变换（比例变换），直方图法（包括直方图均衡化和直方图规定化），模板运算法，图像间的算术运算和逻辑运算法，几何变换法等^[34]。下面着重介绍一下最有效果的空域图像增强方法：直方图均衡化。

直方图均衡化图像对比度增强的方法可以分成两类：一类是直接对比度增强方法；另一类是间接对比度增强方法。直方图均衡化是一种最常见的间接对比度增强方法，该方法通过使用累积函数对灰度值进行“调整”以实现对比度的增强。

直方图均衡化处理的“中心思想”是把原始图像的灰度直方图从比较集中的某个灰度区间变成在全部灰度范围内的均匀分布。直方图均衡化就是对图像进行非线性拉伸，重新分配图像像元值，是一定灰度范围内的像元数量大致相同。直方图均衡化就是把给定图像的直方图分布改变成“均匀”分布直方图分

布。直方图均衡化的缺点是：

(1) 变换后图像的灰度级减少，某些细节消失。

(2) 某些图像，如直方图有高峰，经处理后对比度不自然的过分增强。

总的来说，空域图像增强方法的增强效果没有以基于小波的频域图像增强方法好，产生的负面效应也高于频域图像增强方法。

4.2.2 频率域的图像增强方法

常用的传统频域增强方法有：低通滤波、高通滤波、带通和带阻滤波以及同态滤波等等。同态滤波解决的是光照不均匀或光动态范围过大引起不清晰的图像。高通滤波是利用高通滤波器忽略图像中过渡比较平缓的部分，突出那些能代表细节、跳变等的高频部分，使得增强后的图像边缘细节部分清晰，但在某种程度上是图像清晰度的降低，处理后的图像视觉效果不好。

传统频域增强方法的缺陷在于：在实现图像增强的同时，会带来一些比较严重的负面效应，例如会产生大量噪声，或者会在实现主观图像增强的同时使图像原有的边缘和细节变得模糊起来。这些缺陷都是由于传统频域增强方法无法像小波图像增强那样将图像信号放在多个尺度进行处理，从而导致噪声和图像信息无法分离开来，边缘和图像轮廓也无法分开处理，所以就产生了这些严重的负面效应。

4.3 基于小波的图像增强方法

基于小波的图像增强算法归纳起来分为以下四种：

(1) 小波变换高频增强法。这是一种补偿图像轮廓的处理方法，因为图像的轮廓是灰度陡然变化的部分，包含着丰富的空间高频分量。把高频分量相对突出，显然可使图像轮廓加强，看起来比较清晰。采用这种方法后，由于相对增强了高频成分或削弱了低频成分，因而所得图像往往偏亮或偏暗，对比度差。所以常常要在反变换后再进行对比度增强处理，这样才能得到更好的增强效果 [35-38]。

(2) 小波变换的反锐化掩模法。相对增强高频成分的方法，在空间域有一种称之为反锐化掩模的技术，它在摄影技术中广为采用，以增强图像的轮廓。光学上的操作方法是聚焦的正像和散焦的负像在底板上叠加。散焦的负像就

好比“模糊”掩模，它与“锐化”正好相反，因此被命名为反锐化掩模法。它和传统的方法相比有着明显的优越性。首先，小波变换使原图中不同分辨率的细节特征随尺度的不同而分离开来，避免了不断调整滤波器窗口大小来选择增强效果的繁琐工作；其次，由于是对不同尺度下的小波分量分别进行了增强，原图像中不论较粗还是较细的轮廓都能够同时得到加强。

(3) 小波变换的自适应滤波。这是一种图像平滑算法，它是利用小波分解后相邻尺度间小波系数的相关性来区分边缘和噪声，在滤除噪声的同时可以很好地保护图像边缘，并且几乎不产生“粘连”“振铃”等负效应。

(4) 方向性滤波。由于小波分解后产生的小波分量具有明显的方向性，利用传统的的中值滤波思想，可获得新的去噪算法。这种方法不仅克服了普通中值滤波存在的不足，而且能够有效地抑制噪声，同时还能够保留绝大部分边缘信息，特别适宜以平滑线条为主要结构的图像。

4.3.1 小波变换的自适应图像增强算法

基于小波变换增强的一般思想是通过合理地构造线性或非线性的变换函数，有选择地改变小波系数以提高图像某些区域的对比度，从而改善图像的视觉效果。如果原图像含有噪声，那么许多小波系数，特别是在较高分辨率尺度上的小波系数是由噪声引起的，则当进行任何小波反变换对这些小波系数的放大都会反映到对噪声的增强上。要想在增强小波系数的同时抑制噪声，就必需有一种方法能先确定哪些系数是由噪声产生。因此小波系数存在另一个特性可以用来确定噪声，这就是相邻尺度上同一位置上小波系数间的相关系数。在小波域中由噪声产生的小波高频系数通常与相邻小波层上的小波高频系数相关系数很小，而由细节产生的小波高频系数通常与相邻小波层上的小波高频系数之间的相关系数大。因此小波层之间的相关性可以用来确定哪些系数是由图像中的噪声产生，哪些是由图像中的细节特征产生。

由Healy^[39]等人提出了一种检测噪声和信号的方法。设图像经多尺度分解后得到的相邻两尺度的小波高频系数 W_j^d 和 W_{j+1}^d ，定义它们之间的相关性系数为 $C_j^d = W_j^d * W_{j+1}^d$ ，事实上随着尺度的增加，小波高频系数值会减小。为了保持图像能量级不变，小波相关系数必须进行正规化，正则性描述了函数的光滑程度，正则程度高的小波在频域局部特性较好，所以部分小波系数正则化是很有必要的。对 C_j^d 作正规化有：

$$\bar{C}_j^d = C_j^d * \sqrt{P_{w_j^d} / P_{c_j^d}} \quad (4-1)$$

其中, $P_{w_j^d}$ 和 $P_{c_j^d}$ 分别为第 j 层相关系数的总功率和小波系数的总功率^[41-45]。

如果图像上一点的正规化小波算子的绝对值大于该点小波系数的绝对值, 就可以认为该点小波系数是由信号产生。反之, 如果该点的正规化小波算子的绝对值小于或等于该点的小波系数的绝对值, 认为该点小波系数由噪声产生^[46-47]。

如果小波系数是由噪声产生的, 本文采用软硬阈值折中法:

$$\bar{W}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - a\lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0 & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (4-2)$$

式中, λ 是阈值, 通过Donoho提出一个公式 $\lambda = \sigma\sqrt{2\ln N}$ (其中, σ 为噪声标准方差, N 为信号的尺寸或长度) 用这个公式确定这个阈值。 a 为任意实数, $0 < a \leq 1$, 可以根据去噪效果来决定 a 的取值。

如果小波系数是由信号点产生的, 可采用非线性变换函数对小波系数进行变换。由Laine^[40]提出的单阈值增强算法, 该算法采用非线性变换函数, 公式(4-3)所示:

$$W_{out} = \begin{cases} W_{in} + \lambda(G-1) & W_{in} > \lambda \\ W_{in} - \lambda(G-1) & W_{in} < -\lambda \\ G * W_{in} & W_{in} < \lambda \end{cases} \quad (4-3)$$

其中, λ 为阈值门限, G 为增益因子, W_{in} 和 W_{out} 为变换前后的小波系数。在实验中, λ 和 G 的值采用人机交互的方式进行选取。该算法的缺点是对所有的小波系数进行了放大, 在增强图像细节的同时, 对噪声进行了放大。

而本文采用自适应增强算法对小波系数进行变换, 增强图像的细节高频信息, 同时抑制噪声的放大, 公式(4-4)所示:

$$W_{out} = \begin{cases} W_{in} & , W_{in} > \lambda_2 \\ G^*(W_{in} - \lambda_1) + \lambda_2 & , \lambda_2 \geq W_{in} > \lambda_1 \\ G^*W_{in} & , \lambda_1 \geq W_{in} \geq -\lambda_1 \\ G^*(W_{in} + \lambda_1) - \lambda_2 & , -\lambda_1 > W_{in} \geq -\lambda_2 \\ W_{in} & , W_{in} < -\lambda_2 \end{cases} \quad (4-4)$$

λ_1 和 λ_2 分别是小波尺度分解后低频部分的低阈值和高阈值，其中 $\lambda_1 = \sigma\sqrt{2\log n}/\sqrt{n}$ (n 为图像大小， σ 为噪声方差)， $\lambda_2 = \alpha W_{max_j}$ ($0 < \alpha < 1$, W_{max_j} 是分解后图像低频部分的最大小波系数)， G 为增益因子， G 与噪声显著性指数 g 有关系，当噪声较小时，对小波系数的增益增大；当噪声较大时，对小波系数的增益较小，达到自适应的增强的目的。

基于小波变换自适应的增强算法设计如下：

(1) 对含噪声图像进行小波尺度分解，得到第一级的高频子带图像和低频子带图像。

(2) 对小波变换后的第一级高频子带图像进行小波阈值去噪以后对其进行增强。小波变换后的低频子带图像进行2尺度变换得到第二级的高频和低频子带图像，对第二级的低频子带图像进行小波阈值去噪并增强，对第二级的高频子带图像进行小波自适应增强，得到增强后的高频子带图像。

(3) 重构第二级图像

(4) 对进行了图像增强和噪声抑制后的小波系数重构，即可得到对原始图像既增强又去噪的图像。

4.3.2 实验结果及分析

评价增强图像的质量，是图像增强的一个重要步骤，但目前还缺乏一种对增强效果进行系统、全面的评价方法。目前主要有主观评价法和客观评价法。主观评价法具有简单、直观的优点，对明显的图像信息可以进行快捷、方便的评价，但他不全面，带有一定片面性。客观评价法主要通过信噪比、信息熵等参数来评价增强效果。

客观评价用信息熵作判据，将本文的方法与传统的图像增强方法进行比较。图像的信息熵定义如下：

$$H = -\sum_{i=0}^M f(i) \log_2 f(i) \quad (4-5)$$

式中, $f(i)(i=0,1,\dots,M)$ 为 $M+1$ 级灰度出现的频数($M=255$)。

对于抗噪性能采用信噪比SNR进行比较, 如果用 x_{ij} 表示未加噪声的原图像, \hat{x}_{ij} 表示采用增强算法对其进行处理得到的图像; y_{ij} 表示加入噪声的原图像, \hat{y}_{ij} 表示采用增强算法对其进行处理得到的图像, 信噪比定义如下:

$$SNR = 10 \lg \left[\frac{\sum_{i,j} \hat{x}_{ij}^2}{\sum_{i,j} (\hat{y}_{ij} - \hat{x}_{ij})^2} \right] \quad (4-6)$$

其中, i, j 表示图像中各点的位置。

实验选取带噪声 lena 图像为原始图像进行实验分析, 来比较小波传统方法和小波自适应图像增强法的抗噪性能和增强效果。



图 4-1 带噪 lena 图像



图 4-2 小波单阈值增强图像



图 4-3 直方均衡法增强图像



图 4-4 小波自适应增强图像

表 4-1 不同算法信息熵和信噪比对比

增强方法	信息熵	信噪比
带噪图	2.3821	15.45
直方均衡	3.8329	16.12
单阈值增强	4.3421	24.45
自适应增强	5.6332	29.67

表 4-2 不同算法增强效果对比

增强方法	均值	均方差	对比度改善指数
带噪图	98.24	23.84	1.23
直方均衡	105.83	40.29	1.37
单阈值增强	120.32	52.01	1.56
自适应增强	132.83	68.23	1.72

对图4-2, 4-3, 4-4研究表明, 直方图均衡化方法只是简单地对图像灰度进行线性变换, 其目标着重于改变像素灰度的全局统计分布, 图像对比度明显增强, 但因为同时也增强了噪声, 图像整体质量严重下降, 给图像的后续分析和处理带来了困难。而本文自适应增强法比单阈值增强效果好, 图清晰, 且帽沿的轮廓保持得较好, 图像的对比度增强了, 得到了更多的细节, 达到了较好增强去噪效果。由于对不同尺度下的小波分量分别进行增强, 原始图像无论较粗

还是教细的边缘都同时得到了增强。设置的增益因子可以有效地补充图像的弱信息，或减少图像过度曝光的影响，以便图像的处理。利用基于小波的自适应变换法，对噪音的估计合理、有效。从而使其对图像的去噪和增强处理都显得比较有效。

表 4-1 研究表明，用本文方法自适应增强后图像的信息熵明显大于用传统方法处理后图像的信息熵，这说明用本文方法增强后的图像包含有更多的信息。基于小波自适应变换的图像增强的信噪比高于其他算法，这是第一级采用了小波阈值去噪，第二级采用自适应去噪，使噪声得到抑制。在增强图像信息的同时对噪声的控制比其它两种方法好。

表4-2研究表明，基于小波变换的自适应增强对应的均方差和对比度的改善系数最大，说明该算法对图像的增强效果最显著，单阈值的对比度改善系数和均方差比前者稍低，直方均衡的改善效果最差。本方法对光照不足或不均匀的图像具有较好的处理效果。

实验结果表明，本文的方法明显优于传统的直方图均衡和单阈值法，明显的改善了图像的视觉效果。

4.4 本章小结

本章介绍了图像增强技术在空间域和频率域的多种方法，并对传统的增强方法与小波增强方法进行比较。然后研究了基于小波变换的图像增强技术，并对图像进行处理，提出了一种综合性能优的算法。

由于图像的轮廓主要体现在低频部分，而细节部分则体现在高频部分，因此，采用基于小波变换的图像增强技术可以通过对低频分解系数进行增强处理，对高频分解系数进行衰减处理达到图像增强的作用。小波分析具有多尺度多角度提取信号特征，利用图像局部信息克服了对每个像素采用同样处理带来的缺点。实验结果表明小波方法能在不同尺度上让噪声和信号区分开来，在图像增强方面有很大优势。

而基于小波的自适应变换法集图像去噪和增强为一体的优秀处理方法，在进行图像增强处理的同时，该方法考虑到了噪声对于图像增强的影响，并在算法中着重处理了噪声细节，使得处理后的图像在效果上既达到了增强的目的，又消除了被噪声所造成的模糊的影响，不失为图像增强处理的一种好的方法。

第 5 章 结论与展望

5.1 全文总结

本文系统的介绍了小波理论，对小波图像去噪，小波图像增强有了较为深刻的研究。通过查阅资料，仿真试验以及编写论文。本文工作主要在以下几个方面：

(1) 对小波分析理论进行了系统的研究，查阅了大量相关书籍和文献，并对其进行了整理和总结。

(2) 阈值函数如何构造是一个很重要很关键的问题，Donoho 的硬阈值函数在 λ 和 $-\lambda$ 处是不连续的，这种不连续性导致去噪后的信号出现 Gibbs 现象和许多不期望的震荡，失去原始信号的光滑性；而软阈值函数虽然整体连续性好，但估计值与实际值之间总存在恒定的偏差，采用不同的阈值函数，所获得的信号去噪效果是有很大差别的，可以说阈值函数选取是否合适直接决定了信号去噪效果的好坏。针对这些不足本文提出了一种新的阈值函数，经仿真实验验证，该方法可适用于不同的应用场合，表达式简单，连续性好且高阶可导，便于进行各种处理，同时从理论上克服 Donoho 的硬阈值函数和软阈值函数的缺点。同时针对传统阈值方法的缺点，本文提出了一种新的阈值选取方法，通过实验验证了该算法的有效性和优越性，优于传统阈值方法。

(3) 采用基于小波变换的图像增强技术可以通过对低频分解系数进行增强处理，对高频分解系数进行衰减处理达到图像增强的作用。本文提出了一种基于小波变换自适应图像增强算法，它是集图像去噪和增强为一体的优秀处理方法，该算法优于其他增强技术。

5.2 工作展望

最后图像去噪问题一直以来都是一个较难解决的问题，很难既去除噪声又较好地保留原图的信息，许多新的算法又被陆续的提出来。还存在许多需要进一步探讨和研究的问题，如何根据实际信号的特性来选取已有的小波函数或者

构造一个新的小波基函数来对信号做去噪处理是一个很值得我们仔细去研究的问题。还有如何自适应选取最优小波的问题一直是小波理论与应用研究领域的重要问题之一，也一直是小波研究领域悬而未解的问题；另外，大量实验表明，最佳小波分解层数对去噪效果影响很大，不同信号、不同信噪比下都存在一个去噪效果最好或接近最好的分解层数，寻找一种分解层数的自适应确定方法，具有十分重要的实际意义。

参考文献

- [1] 李弼强, 罗建书.小波分析及其应用.电子工业出版社, 2003
- [2] 林堪贤, 宋国乡, 薛文.图像的几种小波去噪方法的比较与改进.西安电子科技大学学报(自然科学版), 2004.8: 626~629
- [3] Keita Alpha, 彭嘉雄.基于小波门限化的图像去噪方法.华中科技大学学报, 2001.29(6): 13~15
- [4] 韦凤梅, 李翠华.基于自适应模糊阈值小波的图像去噪.厦门大学学报, 2005.44(2): 185~188
- [5] 查字飞, 毕笃彦.基于小波变换的自适应多阈值图像去噪.中国图像图形学报, 2005.10(5): 567~570
- [6] S.Mallat. A wavelet Tour of signal processing.China Machine press, 2002.9(1)
- [7] S.Mallat.A theory for multi-resolution signal decomposition: The wavelet representation. [J]IEEE Trans. Pattern. Anal. Machine Intell, 1989.21(7): 674~633
- [8] Donoho D L, Johnstone J M.Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J].Biometrika, 1994.81: 425~455
- [9] Mallat S G.A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Trans on PAMI, 1989.11(7): 674~693
- [10] 陈贺新.非线性滤波器与数字图像处理.北京: 国防工业出版社, 2005
- [11] Cohen A.Wavelets and multiscale signal processing.Chapman and Hall, 1995
- [12] Chui,C.K.An introduction to wavelets.Academic Press, 2002
- [13] Daubechies I.Ten lectures on wavelets. SLAM, 2002
- [14] Antoniadis, Pham DT[J].Wavelets regression for random or irregular design.Comp.Stat.and Data Analysis, 2004
- [15] 毕为民, 唐炬, 姚陈果.基于熵阈值的小波包变换抑制局部放电窄带干扰的研究.中国电机工程学报, 2003.23(5): 128~131
- [16] Unser M.Texture classification and segmentation using wavelet frames.IEEE Trans. on IP, 1995.4(11): 1549~1560
- [17] 王玲.多小波理论及其在图像处理中的应用研究.西安: 西安电子科技大学, 2000

- [18] 孔祥茜, 吴继伟, 岳继光.地震信号小波变换的去噪方法.计算机辅助工程, 2005
14(3): 52~56
- [19] 郭艳芬, 张红梅, 曲智林, 马晓剑.一种基于小波的并行算法及其在大型数值计算中的
应用.东北林业大学学报, 2005.33(4): 15~116
- [20] 何坤等.非平稳环境下基于小波变换的图像去噪.中国图像图形学报, 2005.10(10):
567~570
- [21] 张宗平, 刘贵忠, 董恩清.基于二进小波变换的信号去噪.电子与信息学报, 2001.23(11):
1083~1090
- [22] 任震, 何建军, 黄雯莹.基于小波包算法的电机故障信号的压缩和重构.中国电机工程
学报, 2001.21(1): 25~29
- [23] 李杏梅, 陈亮.小波阈值去噪在图像去噪中的应用.现代计算机, 2006.10
- [24] 骆正虎, 杨敬安, 吴刚.基于小波变换的图像的多分辨率分解与重构的实现.计算机科
学, 2001.28(10): 69~71
- [25] C. S. Lu, P. C. Chung, C. R. Chen.Unsupervised texture segmentation via wavelet
transform, *Pattern Recognition*, vol. 30, no. 5, pp. 729~742
- [26] Donoho D.L.De-noising by soft thresholding.*IEEE Trans.on IT.*, 1995.41(3): 613~627
- [27] Wang Z, Guerriero A, Sario M De. Comparison of several approaches for the segmentation
of texture images.*Pattern Recognition Letters*, 1996.17: 509~521
- [28] Chang T, Kuo C C J.Texture analysis and classification with tree-structure wavelet
transform.*IEEE Trans. on IP*, 1993.2(4): 429~441
- [29] 崔华, 宋国乡.基于小波阈值去噪方法的一种改进方案.现代电子技术, 2005.1: 8~9
- [30] Kenneth R, Castleman.数字图像处理.朱志刚, 林学闯, 石定机译.北京: 电子工业出版
社, 1988
- [31] 郭敏, 马远良, 朱霆.基于小波变换的医学超声图像去噪及增强方法.中国医学影像技
术, 2006.22(9): 1435~1437
- [32] 包振华.基于 Matlab 的灰度级线性变换图像增强.工程技术, 2006.5(3): 54~56
- [33] 张光年.多尺度小波梯度图像增强方法.首都师范大学学报(自然科学版), 2006.7(2):
16~19
- [34] 周旋, 周树道, 黄峰, 周小滔.基于小波变换的图像新增强算法.计算机应用, 2005.25(3):
606~608
- [35] Gopinath R A, Lang M, Guo H, et al. Enhancement of decompressed images at low bit
rates.*SPIE Math Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing*.San Diego,
1994.15(2): 366~377

- [36] Laine A, Fan J, Yang W. Wavelets for contrast enhancement of digital mammography .IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine, 1995.14(5): 536~550
- [37] 徐皓, 范铁生.一种采用分段线性函数的图像增强方法.辽宁大学学报(自然科学版), 2006. 65(4): 362~364
- [38] 陈会羽.图像对比度增强的小波变换法.计算机工程与应用, 2006. 5(25): 66~68
- [39] Xu Y, Weaver J B, Healy D M, et al. Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique. IEEE Transactions on Image Processing, 1994.3 (6): 747~758
- [40] Zong X, Laine A. F, Geiser E. A. et al. De-noising and contrast enhancement via wavelet shrinkage and non-linear adaptive gain[C].WaveletApplications3: Proceeding of SPIE, Orlando, 1996: 566~574
- [41] 吴颖谦, 施鹏飞.基于小波变换的低对比度图像增强.红外与激光工程, 2003.32(1): 4~7
- [42] Donoho D L. Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data[A]. Proc Symposia Applied Math [C].Rhode Island: American Mathematical Society, 1993: 173~205
- [43] YAN Jingwen, QIAN shen-en. The theory model analysis and evolution for non-Gaussian noise[A]. Zhang Jia-jie. Proceedings of Wational Symposium on Developments of Microwave Compatibility, 1996: 38~44
- [44] 粘永键.基于三维小波变换的视频图像消噪研究.第四届全国虚拟现实与可视化学术论文集.大连: 大连海事大学出版社, 2004: 424~429
- [45] Jawerth B D, Hiron M L, Huntsberger T L.Local enhancement of compressed images.Mathematical Imaging and Vision, 1993.3 (1): 39~49
- [46] 杜世培, 沈敏.分割式图像频域增强及其改进方法.贵州工业大学学报(自然科学版), 2000.29 (5): 95~97
- [47] Conzalez R C, Woods R E.Digital image processing.2nd ed.[S. l.]: Publishing House of Electronics Industry, 2003

致 谢

首先衷心感谢我的指导老师黄朝兵老师,我有幸得到黄老师的精心培养和指导。导师渊博的科学知识、严谨求实的工作作风和勤奋敬业的工作精神以及诲人不倦、平易近人的态度始终激励着我。在以后的工作学习中,我也将以黄老师为榜样来追求一名科技工作者应具备的素质和品质。

另外,感谢我的同学、室友、朋友和家人。他们在学习和生活上给了我许多的帮助和关心,如果没有他们的宽容理解、技术指导和强有力的支持,也许不会这么快就完成论文的写作。

在此,谨以此文向关心和帮助过我的所有领导、老师、同学、朋友和家人表示我最衷心的感谢!

附录 1 攻读硕士期间发表的论文

[1] 曾诚, 黄朝兵. 基于小波变换的图像去噪方法. 中国科技在线, 2008 年 10 月

[2] 曾诚, 黄朝兵. 基于小波变换的图像去噪方法. 世界科技研究与发展, 已录用