

## 摘要

长江三角洲分布有巨厚、松散的第四纪沉积层，地下含水系统是一复合含水层系统，深基坑降水一般采用非完整井，且由于深基坑周围连续挡水墙难以深入含水层底板，所以其地下水渗流场变化及其复杂，具有明显的三维渗流特征，以往的解析解及二维数值模型已难以满足深基坑降水模拟预测的需要。

本文针对复杂巨厚第四纪松散沉积层的深基坑降水，探讨了深基坑降水三维数值模拟计算的理论，采用有限单元法进行了较为深入的研究。对于已知水头边界，采用“去行去列法”和“置大数法”进行处理；对于自由面穿过的单元，在固定网格节点虚流量法的基础上，引入连续的区域识别函数；对于非稳定渗流中自由面边界积分项，采用高斯公式将求自由面的面积分转化为求体积分与其他面积分之差，避免了求自由面的具体位置，同时在计算体积分和面积分时采用连续的区域识别函数；在解法上，采用直接解法和 PCG 法。在此基础上开发了三维饱和非稳定承压一无压渗流分析程序。

最后将成果分别应用于两个工程实例中：(1) 上海环球金融中心塔楼基坑降水，模拟了在多层含水层复合存在、含水层最深底板埋深达 149m、基坑周围挡水连续墙埋深达 34m、抽水井埋深达 55m、抽水井过滤器埋深为 34 至 55m，基坑内地下水位降至埋深达 26m 的情况下的地下水复杂流动状态，得出了 8 口抽水井优化降水方案；(2) 上海地铁 4 号线董家渡隧道修复基坑降水，模拟了在多层含水层复合存在、含水层最深底板埋深达 144.45m、基坑周围挡水连续墙埋深达 65m、抽水井埋深达 60m、抽水井过滤器埋深为 45 至 60m，基坑内地下水位降至埋深达 42.45m 的情况下的地下水复杂流动状态，确定出了最优降水方案。经后续工程验证正确、可靠。

研究表明，在结点虚流量法及计算体积分和面积分时引入连续的区域识别函数增强了解的收敛性和稳定性；处理已知水头边界的“置大数”法在时间上要比“去行去列”法短一些，定水头边界节点越多，其优越性表现越明显；PCG 法比直接解法快很多；三维有限元数值模拟理论用于模拟预测此类地区的深基坑降水具有较高的可信度。

关键词：复合含水层，深基坑降水，三维非稳定渗流，自由面，有限单元法，数值模拟，自由面边界积分项

## Abstract

Thick and incompact quaternary sediments in Yangtzi River delta create a complex aquifer system. Because the horizontal flow barrier around the deep foundation pit is difficult to penetrate into the bottom of the aquifer, deep foundation pit dewatering usually uses partially penetrating wells and this results in very complex changes in groundwater seepage with obvious characteristic of three-dimensional flow. Analysis method and two-dimensional model have not contented simulation and prediction demond of deep foundation pit any more.

Aiming at deep foundation pit dewatering in complicated quaternary loose sediments with great thickness, three-dimensional numerical simulation theories of deep foundation pit dewatering has been discussed and a deep research has been done by using finite element method. 'Remove row and column' and 'put a big number' have been used for the first boundary; a continuous Regional Identification Function is used on the basis of non-variant nodal virtual flux method for the free surface boundary; Gauss formula is used to make the curved surface integral of the free surface boundary transformed as the difference between volumn integral and other curved surface integral to calculate the integral item on boundaries, which avoiding finding the position of free surface, while the continuous Regional Identification Function is applied to calculate volumn integral and surface integral; Crout and PCG method is used for solusion. Then three-dimensional transient confined and unconfined seepage analysis procedure is developed.

The procedure is applied in two projects: (1) Shanghai Huanqiu finance center tower foundation pit dewatering, the complicated flow state of groundwater is simulated under these conditions which the aquifers deposite layer by layer, the bottom of the aquifers goes deep to 149m, the horizontal flow barrier goes deep to 34m, the extraction wells are penetrated to 55m, the filters of the extraction wells are located between 34m to 55m, and the water level in the deep foundation pit is decreased to 26m under land surface, the result of 8 pumping wells optimization project is designed. (2) The forth subway of Dong Jia-du tunnel repair foundation pit dewatering in Shanghai, the complicated flow state of groundwater is simulated under these conditions which the aquifers deposite layer by layer, the bottom of the aquifers goes deep to 144.45m, the horizontal flow barrier goes deep to 65m, the extraction wells are penetrated to 60m, the filters of the extraction wells are located between 45m to 60m, and the water level in the deep foundation pit is decreased to

42.45m under land surface, then an optimization project is designed. Both of them are proved to be correct and reliable.

Research results indicate that continuous Regional Identification Function is used in nodal virtual flux method, volumn integral and surface integral enhances the convergence and stabilization; using 'put a big number' to deal with the first boundary is faster than 'Remove row and column', the more the first boundary nodes are the more obvious advantage will display; PCG method is quite faster than Crout method to solve equations; it is reliable to use three-dimensional finite element simulation theories to simulate and predict deep foundation pit dewatering in such areas.

**Key words:** composite aquifer, deep foundation pit dewatering, three-dimensional transient flow, free surface, finite element method, numerical simulation, interval item on free surface boundary

学位论文独创性声明：

本人所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同事对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。如不实，本人负全部责任。

论文作者（签名）：武永霞 2006年6月15日

学位论文使用授权说明

河海大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社有权保留本人所送交学位论文的复印件或电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅。论文全部或部分内容的公布（包括刊登）授权河海大学研究生院办理。

论文作者（签名）：武永霞 2006年6月15日

# 第一章 绪论

## 1.1 引言

渗流分析和渗流控制是水工建筑物以及其它蓄水、排水工程设计的重要组成部分。目前,水利工程中与渗流有关的主要问题有:土石坝与堤防的管涌、流土现象,岩体裂隙渗流、坝肩的绕坝渗流,闸基渗流、地下厂房的围岩渗流问题,基坑降水,土石坝的土体与岩基或混凝土的接触面间的接触冲刷现象等。随着城市建设的发展,土地使用的日趋紧张,地下空间的有效利用,高层建筑、地铁工程、地下娱乐城、地下商业街、地下停车场等的兴建,促使城市基坑工程建设正向广、深方向发展。我国近年来在北京、上海、天津、广州、深圳、杭州等地兴建了大量的高层建筑,并由此出现了大量的深基坑工程,如上海金茂大厦、深圳地王大厦、广州中天广场等。据估计(1999年),我国已开发利用的地下空间约5000万 $\text{m}^3$ 。

长江三角洲分布有巨厚的第四纪松散沉积层,其间发育有多层厚度较大的孔隙承压含水层,各含水层之间又以弱含水的粘性土层相分隔,并发生强烈的水力联系。由于含水层厚度大、底板埋藏深,所以疏干井均为非完整井,且基坑周围连续挡水墙难以深入含水层底板,降水引起的地下水流程变化极其复杂,具有明显的三维流特征,给深基坑降水模拟预测带来了较大难度。以往的解析解及二维数值模型已难以满足深基坑降水模拟预测的需要。

深基坑开挖过程中,对地下水的处理一般采用降水方法,在基坑开挖与排水过程中,边坡的地下水产生较大水力坡度,地下水向坑内渗流产生管涌,并导致坑底流沙和隆起<sup>[2-3]</sup>;另外,抽取地下水可能导致含水层中或邻近含水层的可压缩夹层的压缩,结果导致地面发生沉降<sup>[4-5]</sup>。因此采用科学有效的手段对深基坑降水引起的地下水渗流场变化进行超前模拟预测,是深基坑降水进行优化设计的前提。

工程实践表明,所设计的工程是否安全可靠和经济合理,在很大程度上取决于能否正确地进行渗流分析和选择合理的渗流控制措施。采用数值方法如何真实准确地模拟实际渗流问题,是一个需要不断完善的过程。

针对基坑降水工程中的渗流问题,本文利用非稳定饱和渗流理论展开研究工作。

## 1.2 渗流分析方法概述

渗流力学是一门边缘科学。1856年,法国工程师达西(H. Darcy)通过实

验提出了线性渗透理论，为渗透理论的发展奠定了基础。1889年，H. E. 茹可夫斯基首先推导了渗流的微分方程。此后，许多数学家和地下水动力学科学工作者对渗流数学及其解析解法进行了广泛和深入的研究，并取得了一系列的研究成果。

1922年，H. H. 巴甫洛夫斯基正式提出了求解渗流场的电拟法，为解决比较复杂的渗流问题提供了一个有效的工具。为了解决更复杂的渗流问题，逐步发展和研究了电网络法。

随着电子计算机的迅速发展，数值解法在渗流分析中得到了越来越广泛的应用。1956年，斯图尔曼(R. W. Stallman)开始将数值法应用于水文地质计算，60年代华尔顿(W. C. Walton)首次将电子计算机引入水文地质数值模拟，解决了数值法中繁杂的数据计算问题。80年代以来数值法已被广泛应用于计算模拟各类与地下水运动有关的问题。数值法在模拟地下水离散模型、连续性模型、混合模型和耦合模型方面具有无法替代的优越性。

综上所述，渗流分析方法主要有：解析解法<sup>[6]</sup>、电模拟法<sup>[7-8]</sup>和数值解法<sup>[9-11]</sup>等。

### 1.2.1 解析解法

解析解法是用数学上的积分法或积分变换等方法直接求数学模型的解，其解称为解析解，是数学模型的精确解。它包括流体力学法和水力学法。

流体力学法是一种严格的解析解法，它是根据流体力学的基本原理及渗流的边界条件直接解渗流问题的一种方法，计算结果比较精确，可以计算渗流场中任意一点的渗流要素(如渗透水头、渗透比降、渗透流速和通过任意截面的渗流量)，但是这种方法计算比较复杂，目前只能对几种比较简单的渗流边界有解答，对于几何形状复杂的计算域及渗流场呈现非均质、各向异性等特征时很少有严格的解析解。

水力学法本质上是一种近似的解析解法，它是建立在对渗流条件作某些简化和假定(假定任一铅直过水断面内各点的渗透比降相等)的基础上的一种方法，将基本方程和边界条件简化为能够处理的问题，再应用流体力学解析解的成果而获得问题的解答，计算比较简单，但过多的简化和假设会导致计算结果存在一定的误差，因此仅限于条件较为简单、精度要求不高的情况。

### 1.2.2 电模拟法

电模拟法是根据地下水在渗流场中运动的基本规律与电在电流场中运动的基本规律具有相似性质而建立的。按照空间介质是否连续，它可分为连续型电模拟和离散型电模拟两类。前者无法模拟非均质各向异性渗透介质，也不适合复杂

的地质和边界条件,且只能模拟稳定流,用起来有一定的局限性;后者又称为电网络模型方法,是以两个离散场的差分模型相似为依据,对于介质的非均质性和各向异性处理起来比较简单,既可模拟稳定渗流问题也可模拟非稳定渗流问题。在过去数值解法、电子计算机不发达时,电模拟法使用广泛,现在已逐渐被数值解法取代。

### 1.2.3 数值解法

数值解法的基本思想是:将原来连续的求解区域划分成网格或单元子区域,在其中设置有限个离散点,将求解区域中的连续函数离散为这些节点上的函数值,通过某种数学原理,将作为控制方程的偏微分方程转化为代数方程,求解代数方程以获得求解函数的节点值。数值方法中,应用比较广泛的是有限差分法(FDM)<sup>[12-14]</sup>、有限单元法(FEM)<sup>[15-20]</sup>、边界元法(BEM)<sup>[21-22]</sup>、有限分析法(FAM)<sup>[23-24]</sup>和有限体积法(FVM)<sup>[25-26]</sup>,现简述如下。

有限差分法是在1910年由L.F.Richardson首先提出的。经过长时期的研究和广泛的应用,目前该法已具有较完善的理论基础和实践经验。在渗流分析中,其实质是把描述地下水运动的偏微分方程近似地用差商代替,即将定解问题的求解转化为一组代数方程组的求解问题。有限差分法原理简单,理论基础成熟,但往往局限于规则的差分网格,对模拟曲线边界和渗透介质的各向异性存在着较大的困难。

有限单元法的基本思想是在1943年由R.Courant<sup>[27]</sup>提出的,Melosh<sup>[28]</sup>、Jnoes<sup>[29]</sup>、Besseling<sup>[30]</sup>等人证明了有限单元法是基于里兹法的另一种形式,1965年,Zienkiewicz<sup>[31]</sup>等最早将有限单元法引入到了流体力学领域。其基本思想是:将连续的求解域离散成有限个单元的组合体,利用在每个单元内假设的近似函数来表示全域待求的未知场函数,单元内的近似函数通常由未知场函数在各个单元节点上的数值及插值函数表示,从而将求解未知场函数转化为求解有限个节点值,使一个连续的无限自由度问题变为一个离散的有限自由度问题,求解节点未知量,再利用插值函数确定单元组合体上的场函数。它是古典变分法与分块多项式插值结合的产物,既吸收了有限差分法中离散处理的内核,又继承了变分计算中选择试探函数和对区域进行积分的合理做法,充分考虑了单元对节点参数的贡献。有限单元法的主要优点是对于求解区域的单元剖分没有特别的限制,可以很容易地适应于复杂几何形状的边界、各向异性渗透性以及简单或复杂的分层问题的处理。在渗流分析中得到了极为广泛的应用。本文的非稳定饱和渗流场数值计算就是建立在有限单元法基础之上。

边界元法是在经典积分方程和有限元法基础上发展起来的求解微分方程的一种数值方法,其基本思想是:通过把求解域边界剖分为若干个单元,化边界积

分方程为线性代数方程组来求其数值解。即以边界积分方程作为求解的出发点，求出边界上的未知量；在所导出的边界积分方程基础上利用有限元的离散化思想，把边界离散化，建立边界元代数方程组，求解后可获得边界上全部节点的函数值和法向导数值；将全部边界值代入积分方程中，即可获得内点函数值的计算表达式，它可以表示成边界节点值的线性组合。边界元法较适用于求解线性的均质域。与有限单元法相比，它便于处理无限或半无限渗透介质、渗流奇异（如排水井点）和自由面等问题。而且由于它只对边界域的边界进行剖分，其数据信息量显著减少。一般来说其计算精度也高于有限单元法。但由于边界元方程组的系数矩阵是不对称的满阵，即使节点减少，也将占据相当大的内存，因此，该方法目前只适用于线性问题，同时，它对三维非均质渗透介质问题的应用尚存在相当大的困难。

有限分析法是 C. J. Chen<sup>[32]</sup>于 80 年代初提出的一种新的数值计算方法，其基本思想是：先把总体区域划分成许多子区域，在这些子区域上求得满足某种近似边界条件下的局部解析解，然后从局部解析解建立起离散节点上函数间的代数关系式。这种方法实质上是解析方法和数值解方法的结合，该计算方法与有限单元法、有限差分法相比具有较高的精度，其缺点是对复杂形状的求解区域适应性较差。

有限体积法又称为控制体积法，其基本思想是：将所计算的区域划分成一系列控制容积，每个控制容积都有一个节点作代表，通过将守恒型的控制方程对控制容积作积分来导出离散方程。其优点是变步长网格的离散形式比较简单，导出过程的物理概念清晰，能保证离散方程具有守恒性；主要缺点是不易于对离散方程进行数学特性的分析。

除以上五种用的比较广泛的方法外，数值解法还包括：无单元法（NEM）<sup>[33-36]</sup>、无限单元法（UEM）<sup>[37]</sup>、离散元法（DEM）<sup>[38-39]</sup>、快速 Lagrangian 分析法（FLAC）<sup>[40]</sup>、非连续可变形块体分析法（DDA）<sup>[41-42]</sup>、数值流形法（NMM）<sup>[43-44]</sup>等多种方法。这些方法的基本原理都是利用离散化和代数化，主要区别是求解区域的离散方式和控制方程的离散方式不同。

### 1.3 渗流场边界数值模拟方法研究现状

在各种水工建筑物及岩土工程渗流分析中，常会遇到带自由面的渗流计算。由于自由面的位置是未知的，即渗流计算区域是未知的，因而这类渗流分析具有复杂的非线性。自由面的求解问题本质上是非线性自由边值问题。

在有自由面渗流问题的求解中最早使用的是变网格法<sup>[45]</sup>，该法首先根据经验人为事先假定一自由面<sup>[46]</sup>，在迭代过程中修改自由面的位置，使网格发生相应的变形，直到前后两次计算值的最大差值大小达到指定的精度为止。由于变网格法

存在一些明显的缺陷,如自由面变动过大导致网格畸形,从而要重新剖分网格,不能应用于渗流场—应力场耦合分析等,现已逐渐被淘汰。

自 1973 年 Neuman<sup>[47]</sup>首次提出用不变网格法求解有自由面的渗流场以来,基于固定网格法的自由面数值模拟方法研究及其应用发展迅速。Desai<sup>[48]</sup> (1976 年)提出了剩余流量法,其基本思想是在每次迭代中求出自由面的位置,然后求出自由面上的法向剩余流速,并由此求出剩余流量,从而计算水头增量,进而计算本次迭代水头,直到满足精度为止。Bathe<sup>[49]</sup>等 (1979 年)提出了单元渗透矩阵调整法,该法以自由面为分界线,自由面以下区域的渗透系数不变,自由面以上区域的渗透系数取实际值的 1/1000, Bathe 法不需要在每一步迭代中计算自由面的位置,但对被自由面穿越的单元(复合单元)处理得比较粗糙<sup>[50]</sup>,李春华针对这个不足,于 1986 年提出了改进单元传导矩阵调整法<sup>[51]</sup>,在每一次迭代中确定自由面的位置,计算复合单元水上、水下部分的体积,再据此调整单元传导矩阵。改进单元传导矩阵调整法需确定自由面与单元格的切割情况,这对三维渗流问题而言计算效率较低,故朱军等<sup>[52]</sup> (2001 年)提出对于自由面穿过的单元,根据高斯点压力水头  $h$  来调整渗透系数,对于  $h \geq 0$  的高斯点,渗透系数取原值,对于  $h < 0$  的高斯点,渗透系数取原值的千分之一。Huang 等<sup>[53]</sup> (1985 年)提出了求解自由面问题的变分不等式法;余颖禾等<sup>[54]</sup> (1996 年)、孙鹰等<sup>[55]</sup> (1999 年)分别对稳态、非稳态渗流的自由边界问题建立相应的变分不等式模式。张有天等<sup>[56]</sup> (1988 年)提出了初流量法,其基本思想是通过调整初流量值的调整,将非线性分析转换成一系列的线性分析,但其收敛稳定差;针对这一问题,王媛<sup>[57]</sup> (1998 年)提出了改进初流量法,通过引用连续的区域识别函数,解决了稳定性差这一问题。速宝玉等<sup>[58]</sup> (1991 年)提出了节点虚流量法,其关键是在迭代过程中从全域中扣除节点虚流量项,从而计算水头。此外,速宝玉等<sup>[59]</sup> (1996 年)提出了截止负压法,张乾飞等<sup>[60]</sup> (2005 年)提出了改进截止负压法,吴梦喜等<sup>[61]</sup> (1994 年)提出了虚单元法,梁业国等<sup>[62]</sup> (1997 年)提出了子单元法,王贤能等<sup>[63]</sup> (1997 年)提出了高斯点法,陈洪凯等<sup>[64]</sup> (1999 年)提出了复合单元全域迭代法,黄蔚等<sup>[65]</sup> (2001 年)提出了丢单元法,凌道盛等<sup>[66]</sup> (2002 年)提出了虚节点法,李广信<sup>[67]</sup> (2002 年)等提出了无单元法,王均星等<sup>[68]</sup> (2003 年)提出了流形单元法,陈建余<sup>[69]</sup>提出了虚域迭代法等等。

总之,固定网格法相对于变网格法有着很大的优势,目前已应用得比较广泛,是求解有自由面渗流问题方法的发展趋势。

综合国内外现有有关研究工作发现,对有自由面渗流问题的研究目前主要针对坝体及边坡等的稳定渗流问题,而对于基坑工程中有自由面渗流问题的非稳定渗流分析研究却很少,这正是本文研究的重点。

## 1.4 本文主要研究内容、研究方法及技术路线

### 1.4.1 主要研究内容

本文针对长江三角洲第四纪松散沉积层厚度大、地下水位高、地下水量丰富,深基坑周围连续挡水墙难以深入含水层底板,地下水流动状态复杂等特点,根据渗流基本理论和有限单元法的基本原理,对饱和和无压渗流问题进行了系统地研究,基于渗流有限单元分析法,探讨了模型的解法以及各种边界条件的处理。具体内容包括:

(1) 简要介绍了目前非稳定渗流研究现状,搜集整理了渗流有限元已有成果,论述了多孔介质的渗流特性。

(2) 以八节点等参元为例,推导了三维饱和非稳定渗流有限元格式,探讨了有限元求解的稳定性并系统论述了现有的求解无压渗流自由面的几种常用方法。

(3) 编制了三维饱和非稳定无压渗流分析程序,讨论了非稳定渗流有限元分析中的几个问题的处理方法(定水头边界、井点、连续墙、自由面边界等),特别对非稳定渗流中自由面边界积分项的计算方法进行了详细的研究,避免了求自由面的具体位置,并通过算例对其进行了验证。

(4) 将程序应用于上海环球金融中心塔楼基坑降水及上海地铁4号线董家渡隧道修复基坑降水工程上,结合实际情况建立了与水文地质模型相对应的数学模型。利用抽水试验观测资料,通过拟合计算,对其水文地质参数进行了识别、验证,在此基础上,进行了降水优化设计。

### 1.4.2 主要研究方法

(1) 文献阅读。通过大量阅读国内外有关地下工程渗流特性及技术方法等方面的文献,掌握本文主要研究内容涉及到的现有研究水平,为开展本文的研究工作打好基础 and 把握方向。

(2) 理论分析。理论分析是本文重要的研究方法,本文主要应用现有渗流数学模型、渗流特性规律、有限元理论等对本文的研究内容开展研究工作。

(3) 现场实测。现场实测既可以提供理论分析及数值模拟所需要的数据,又可以对相应的研究成果进行验证,在实测理论和技术有效的前提下,现场实测是最可靠的研究方法,本文在上海环球金融中心塔楼基坑降水及上海地铁4号线董家渡隧道修复基坑降水问题上对其水文地质参数进行有限元模型识别、验证过程中主要依据的就是现场抽水试验及实测数据。

(4) 数值模拟。应用有限元数值模拟的方法,本文对上海环球金融中心塔楼基坑降水及上海地铁4号线董家渡隧道修复基坑降水进行了三维渗流场数值

模拟。

### 1.4.3 研究的技术路线

首先查阅大量有关有自由面渗流问题的资料,编制了三维饱和非稳定无压渗流分析程序,在此基础上,将程序应用于上海环球金融中心塔楼基坑降水及上海地铁4号线董家渡隧道修复基坑降水工程中,以野外实际的地质、水文地质条件为依据,建立了与水文地质模型相对应的数学模型,然后根据现场抽水试验资料及实测数据反演研究区渗透系数、储水率和给水度,最后确定出了基坑降水的优化方案。

## 第二章 非稳定饱和渗流基本理论

### 2.1 渗流基本概念及基本定律

#### 2.1.1 多孔介质概念及其性质

##### (1) 多孔介质的概念

在地下水动力学中,把具有孔隙的岩石称为多孔介质<sup>[70]</sup>。在多孔介质中,固、液、气三相都可能存在,其中至少有一相是气相或液相,固相部分称为固体骨架,气相的空气主要存在于非饱和带中,液相的地下水可能以吸着水、薄膜水、毛管水和重力水等多种形式存在。广义地说,可以把孔隙介质、裂隙介质和某些岩溶不十分发育的由石灰岩和白云岩组成的介质都称为多孔介质。

##### (2) 多孔介质的性质

###### ① 孔隙性

多孔介质的孔隙性是指孔隙体积和多孔介质总体积之比。从地下水运动角度来看,只有相互连通的孔隙才有意义。不连通的孔隙称为死端孔隙,其中地下水是相对停滞的;相互连通的、不为结合水所占据的那部分孔隙称为有效孔隙。

孔隙体积的多少用孔隙度来表示,孔隙度是指某一体积岩石中孔隙体积所占的比例,即:

$$n = \frac{V_n}{V} \quad (2-1-1)$$

式中:  $n$  为岩石的孔隙度;  $V$  为包括孔隙在内的岩石体积,  $L^3$ ;  $V_n$  为岩石中孔隙体积,  $L^3$ 。

研究地下水运动通常采用有效孔隙度,它是有效孔隙体积与多孔介质总体积的比例,即:

$$n_e = \frac{(V_n)_e}{V} \quad (2-1-2)$$

式中:  $n_e$  为岩石的有效孔隙度,  $V$  为包括孔隙在内的岩石体积,  $L^3$ ,  $(V_n)_e$  为有效孔隙体积,  $L^3$ 。

###### ② 压缩性

在天然条件下,一定深度处的多孔介质要受到上覆荷重的压力,设作用在该介质表面的压强为  $p$ ,如果压强  $p$  增加,要引起多孔介质的压缩,这种性质称为

多孔介质的压缩性。多孔介质的压缩系数 $\alpha$ 可表示为:

$$\alpha = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (2-1-3)$$

其中:  $V = V_s + V_n$ , 将其及式 (2-1-1) 代入式 (2-1-3) 有:

$$\alpha = -\frac{1}{V} \frac{dV_s}{dp} - \frac{1}{V} \frac{dV_n}{dp} = -\frac{1-n}{V_s} \frac{dV_s}{dp} - \frac{n}{V_n} \frac{dV_n}{dp} \quad (2-1-4)$$

令  $\alpha_s = -\frac{1}{V_s} \frac{dV_s}{dp}$ ,  $\alpha_p = -\frac{1}{V_n} \frac{dV_n}{dp}$ , 则:

$$\alpha = (1-n)\alpha_s + n\alpha_p \quad (2-1-5)$$

式中:  $\alpha$  为多孔介质压缩系数,  $M^{-1}LT^2$ ;  $V$  为多孔介质总体积;  $V_n$  为多孔介质孔隙体积;  $V_s$  为多孔介质固体骨架体积;  $p$  为作用在介质表面压强,  $ML^{-1}T^{-2}$ ;  $\alpha_s$  为多孔介质固体颗粒压缩系数,  $M^{-1}LT^2$ ;  $\alpha_p$  为孔隙压缩系数,  $M^{-1}LT^2$ 。

固体骨架本身的压缩性要比孔隙的压缩性小的多, 故式 (2-1-5) 可写为:

$$\alpha \approx n\alpha_p \quad (2-1-6)$$

## 2.1.2 含水层的贮水率与贮水系数

太沙基 (Terzaghi, 1925) 提出的有效应力原理<sup>[71]</sup>可表示为:

$$\sigma = \sigma' + u \quad (2-1-7)$$

式中:  $\sigma$  为上覆荷重引起的总应力,  $ML^{-1}T^{-2}$ ;  $\sigma'$  为有效应力,  $ML^{-1}T^{-2}$ ;  $u$  为孔隙水压力,  $ML^{-1}T^{-2}$ 。

在含水层压缩过程中, 固体颗粒体积的压缩很小, 可以忽略不计, 即  $(1-n)V$  为常数, 所以有:

$$d[(1-n)V] = dV - ndV - Vdn = 0 \quad (2-1-8)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dn}{1-n} \quad (2-1-9)$$

含水层的介质骨架压缩主要在垂直方向,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  视为常数, 故有:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} \quad (2-1-10)$$

将 (2-1-3) 式代入, 由 Newton 第三定律知, 有效应力的变化与孔隙水压力

的变化大小相等，方向相反，故有：

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{dn}{1-n} = -\alpha d\sigma' = \alpha du \quad (2-1-11)$$

得：

$$d(\Delta z) = \Delta z \alpha du \quad (2-1-12)$$

$$dn = (1-n) \alpha du \quad (2-1-13)$$

体积为 1 立方米的含水层，当水头下降 1m 时，水体积膨胀和介质骨架压缩所释放的水量分别为：

$$|dV_w| = \beta n V du \quad (2-1-14)$$

$$|dV| = \alpha V du \quad (2-1-15)$$

式中： $V_w$  为水体积， $\beta$  为水的压缩系数， $M^{-1}LT^2$ ； $du = \gamma \Delta h = \rho g \times 1 = \rho g$ ， $\gamma$  为容重， $ML^{-2}T^{-2}$ ； $\rho$  为密度， $ML^{-3}$ ， $g$  为重力加速度， $LT^{-2}$ 。

贮水率是描述地下水三维非稳定渗流或剖面二维非稳定渗流的水文地质参数，是衡量不同岩性含水层在相同水头降深下的弹性释水情况的，定义为当含水层下降一个单位时，从单位体积含水层中，因水体积膨胀（或压缩）以及介质骨架的压缩（或伸长）而释放（或贮存）的弹性水量，用  $\mu_s$  表示，量纲是  $L^{-1}$ ，即：

$$\mu_s = |dV| + |dV_w| = \rho g (\alpha + n\beta) \quad (2-1-16)$$

贮水系数是贮水率与含水层厚度  $M$  的乘积，它表示在面积为一个单位、厚度为含水层全厚度  $M$  的含水层柱体中，当水头改变一个单位时弹性释放或贮存的水量，用  $\mu^*$  表示，无量纲，即：

$$\mu^* = \mu_s M \quad (2-1-17)$$

### 2.1.3 达西 (Darcy) 定律

1856 年法国水利学家达西 (H. Darcy) <sup>[72]</sup> 在装满砂的圆筒中进行试验，最后得到关系式：

$$Q = kA \frac{h_1 - h_2}{l} = kAI \quad (2-1-18)$$

式中： $Q$  为渗流量， $L^3T^{-1}$ ； $k$  为渗透系数， $LT^{-1}$ ； $h_1$ 、 $h_2$  分别为砂柱上、下端处

水头,  $L$ ;  $l$  为经过砂柱长度,  $L$ ;  $I$  为水力坡度;  $A$  为过水断面面积 (砂柱横截面积),  $L^2$ 。

若用渗流速度形式表示, 则为:

$$v = -kI = -k \frac{dh}{dl} \quad (2-1-19)$$

式 (2-1-18) 和 (2-1-19) 所表示的关系就是达西定律, 并非所有的层流都适用, 当渗流速度或者是水力坡度增大时, 惯性力也随之增大, 达西定律就不适用了, 它只适用于雷诺数  $R_e$  不超过  $1 \sim 10$  的地下水运动。雷诺数  $R_e$  可表示为:

$$R_e = \frac{vd}{\gamma} \quad (2-1-20)$$

式中:  $v$  为渗流速度,  $LT^{-1}$ ,  $\gamma$  为地下水的运动粘滞系数,  $L^2T^{-1}$ ,  $d$  为含水层颗粒的平均粒径,  $L$ 。

将式 (2-1-19) 推广到三维运动, 则有:

$$\begin{cases} v_x = -kI_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y = -kI_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z = -kI_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (2-1-21)$$

式中:  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  为渗流速度在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的分量;  $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$  为水力坡度在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的分量;  $h$  为渗流区域中各点的水头,  $L$ 。

在各向异性介质中, 渗流速度相应地表示为:

$$\begin{cases} v_x = -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_y = -k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial h}{\partial z} \\ v_z = -k_{zx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (2-1-22)$$

## 2.2 饱和渗流基本方程

### 2.2.1 连续性方程

在渗流场中, 各点渗流速度大小、方向都可能不同, 为了反映质量守恒定律

在地下水运动中的具体表现,就要在三维空间建立渗流连续性方程。在渗流场中,任取以  $p(x, y, z)$  点为中心的六面体微元,各边长度分别为  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , 且与坐标轴平行,如图 2-2-1 所示。

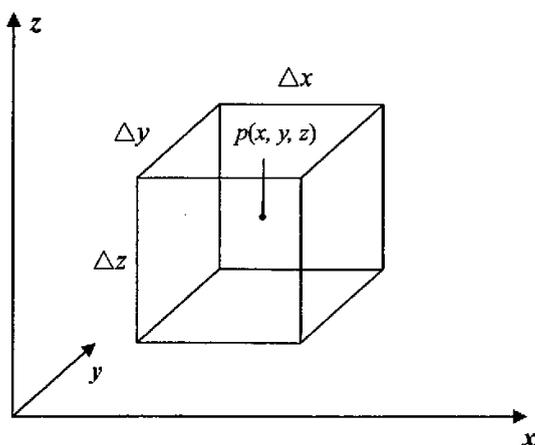


图 2-2-1 渗流区中的单元体

设  $v_x, v_y, v_z$  分别是点  $p$  在  $x, y, z$  方向上的渗流速度,  $\rho$  为水的密度,则单位时间通过垂直坐标轴方向水平面积的水流质量分别为  $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$ 。在  $\Delta t$  时间内由单元体左侧面流入单元体的质量为  $\left[ \rho v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z \Delta t$ , 从单元体右侧面流出的质量为  $\left[ \rho v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z \Delta t$ , 则沿  $x$  轴流入流出单元体的质量差为  $-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ , 同理可得沿  $y$  轴和  $z$  轴流入流出单元体的质量差分别为  $-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$  和  $-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ 。因此单位时间内单元体内总的进水质量

$$-\left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2-2-1)$$

根据质量守恒定律,它应该等于单位时间内单元体内液体质量 ( $\rho n \Delta x \Delta y \Delta z$ ) 的变化量,即:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial t}(\rho n \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (2-2-2)$$

式(2-2-2)就是渗流的连续性方程,假设含水层的骨架不可压缩,则有:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-2-3)$$

式(2-2-3)为不可压缩流体在刚体介质中流动的连续性方程,它表明任一体积含水层流入流出的水体积相等。

## 2.2.2 渗流控制方程

设 $V_w$ 为液体体积, $u$ 为水所承受的压强,则在等温条件下,水的压缩系数 $\beta$ 为:

$$\beta = -\frac{1}{V_w} \frac{dV_w}{du} \quad (2-2-4)$$

因为密度 $\rho$ 和液体体积 $V_w$ 的乘积是常数,所以有:

$$d(\rho V_w) = \rho dV_w + V_w d\rho = 0 \quad (2-2-5)$$

将式(2-2-4)代入式(2-2-5)可得:

$$d\rho = -\rho \frac{dV_w}{V} = \rho \beta du \quad (2-2-6)$$

将式(2-2-2)所示的连续性方程展开,且将式(2-2-6)、(2-1-12)、(2-1-13)代入右端得:

$$\text{左端} = -\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z - \left( v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{右端} = [\rho n \beta + (1-n)\rho \alpha + n \alpha \rho] \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho(\alpha + n\beta) \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

因为水头 $h = z + \frac{u}{\gamma}$ ,  $\gamma = \rho g$  故有:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2-2-7)$$

将式(2-2-6)代入上式得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\rho g}{1 - \beta u} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2-2-8)$$

由于水的压缩性很小,  $1 - \beta u \approx 1$ , 所以有:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2-2-9)$$

将式(2-2-9)代入连续性方程的展开式, 从展开式中发现, 其左端第二项比第一项小的多, 可忽略不计, 故连续性方程可写为:

$$-\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \rho^2 g (\alpha + n\beta) \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2-2-10)$$

将式(2-1-21)及式(2-1-16)代入, 由于单元体体积  $\Delta x \Delta y \Delta z$  为无限小, 可从等式两端约去, 就可得到表征渗流空间任一点任一时刻渗流规律的地下水运动三维非稳定流微分方程, 即:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2-2-11)$$

若将源汇项  $W$  (表示单位时间从单位体积含水层流入或流出的水量, 量纲为  $T^{-1}$ ) 加入, 且考虑各项异性, 取坐标轴方向与各向异性介质主方向一致, 则有:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2-2-12)$$

## 2.3 渗流基本方程的定解条件

前面根据达西定律和连续性方程推倒出了渗流的基本方程, 为了确定其唯一解, 就必须附加一定的条件, 即定解条件, 定解条件包括初始条件和边界条件。

### 2.3.1 初始条件

初始条件是指在初始时刻 ( $t=0$ ), 地下水水头在整个渗流场的分布情况。对于非稳定渗流, 初始条件是至关重要的, 它决定着迭代求解方程的时间。初始条件越接近真实值, 迭代收敛所用时间越短; 反之, 初始条件与实际水头值偏离越远, 迭代收敛所用时间越长。对于三维流, 渗流场中任一点  $(x, y, z)$  的初始条件可表示为:

$$h(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = h_0(x, y, z, t_0) \quad (2-3-1)$$

式中： $h(x, y, z, t)$  为渗流场水头， $L$ ； $h_0(x, y, z, t_0)$  为初始水头值， $L$ 。

### 2.3.2 边界条件

边界条件是未知函数在渗流区边界上的变化规律，对于三维流来说，它包括研究区平面周边及垂直方向的边界。边界条件可分为三类：

#### (1) 第一类边界条件

第一类边界又称为已知水头边界，若边界 $\Gamma_1$ 上已知各点水头随时间的变化规律，则第一类边界条件可表示为：

$$h(x, y, z, t)|_{\Gamma_1} = h_1(x, y, z, t) \cdots \cdots (x, y, z) \in \Gamma_1 \quad (2-3-2)$$

式中： $h_1$  为边界 $\Gamma_1$ 上各点的已知水头值， $L$ 。

#### (2) 第二类边界条件

第二类边界又称为流量边界，当已知边界 $\Gamma_2$ 上的单宽流量（对于三维流为通过单位面积的流量）时，第二类边界条件可表示为：

$$k \frac{\partial h}{\partial n} |_{\Gamma_2} = q(x, y, z, t) \cdots \cdots (x, y, z) \in \Gamma_2 \quad (2-3-3)$$

式中： $n$  为边界外法线向量； $q(x, y, z, t)$  为已知流量。

当渗透系数方向与坐标轴方向一致时，上式可写为：

$$k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \cos(n, x) + k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \cos(n, y) + k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \cos(n, z) = q(x, y, z, t) \quad (2-3-4)$$

式中： $\cos(n, x)$ 、 $\cos(n, y)$ 、 $\cos(n, z)$  分别为流量边界外法线方向与坐标轴方向夹角的余弦。

#### (3) 第三类边界条件

第三类边界又称为混合边界，若边界 $\Gamma_3$ 上的水头及其导数的线性组合已知，则第三类边界条件可表示为：

$$\frac{\partial h}{\partial n} + ah |_{\Gamma_3} = b(x, y, z, t) \cdots \cdots (x, y, z) \in \Gamma_3 \quad (2-3-5)$$

式中： $a$ 、 $b$  为已知函数。

## 2.4 本章小结

本章从基本的概念出发,推导了非稳定饱和渗流的微分方程式,其内容包括:

(1) 根据连续性方程和达西定律,推导了各向异性多孔介质的非稳定渗流基本微分方程。

(2) 论述了非稳定渗流问题的定解条件。

## 第三章 三维非稳定饱和渗流有限单元法

### 3.1 有限单元法概述

有限单元法<sup>[73]</sup>是利用高速电子计算机求解数学物理中或工程实际中的微分方程问题，主要是偏微分方程问题的一种系统化的数值计算方法，它从极值原理出发，把微分方程求解的问题转化为一个求极值的问题。

渗流分析有限单元法的基本思想是把一个连续的含水层剖分为一系列小的有限单元体（如二维问题的三角形、四边形单元体，三维问题的四面体、六面体单元体等），把实际地下水面近似地用通过由各有限单元节点的平面所代替，将求解区域内各点水头问题，转化为求解有限元节点水头问题。

渗流分析中有限单元法<sup>[74-76]</sup>可分为变分有限元法（也称里兹法）、伽辽金有限元法和均衡有限元法等。其中里兹（Ritz）有限元法是从变分原理出发，把微分方程定解问题转化为对应的泛函方程，再求泛函极值；伽辽金（Galerkin）有限元法是从剩余加权法出发离散微分方程，让微分方程的近似解和精确解之间差的总剩余量最小，即总剩余量取得极值；均衡有限元法是从小均衡角度出发，将渗流区划分为很多小的子区域，对每个子区域建立水量平衡关系，从数学角度来说，其实质是对局部区域使用格林公式，建立有限元计算公式。

利用有限单元法求解渗流问题的步骤大致如下：

- ① 渗流区域的离散化（将研究区剖分成一系列单元体，单元与单元之间通过单元顶点一节点相联系）；
- ② 选择某种插值函数表示单元内的水头分布；
- ③ 推导有限元方程并建立单元传导矩阵；
- ④ 由单元传导矩阵组装形成整体传导矩阵；
- ⑤ 把给定的边界条件归并到总矩阵中；
- ⑥ 解线性代数方程组，得各节点的未知水头。

### 3.2 三维非稳定渗流的等参数有限单元法

#### 3.2.1 形函数及等参变换

##### (1) 形函数

形函数是定义于单元内部的、坐标的连续函数，在有限元法中，其作用十分重要。它满足下列条件：

① 在节点  $i$ :  $N_i = 1$

在其它节点:  $N_i = 0$

② 在单元内任一点上的形函数之和等于 1

(2) 等参变换

在实际工程问题中, 渗流场的边界条件很复杂, 剖分网格不一定规则, 总会出现一些不规则的单元。对于不规则的单元, 要直接在上面建立形函数和插值函数是很困难的, 因此就引入了等参数有限单元法。等参数有限单元法的基本思想是借助坐标变换, 先在形状简单、规则的标准单元上建立形函数, 再建立标准单元和原来实际单元之间的坐标变换。

对于空间问题, 就是使  $(\varepsilon, \eta, \xi)$  坐标系中形状简单、规则的标准单元, 在  $(x, y, z)$  坐标系中变换为具有曲线(面)边界的形状复杂的单元。 $(\varepsilon, \eta, \xi)$  坐标系称为局部坐标系,  $(x, y, z)$  坐标系称为整体坐标系; 变换前的单元称为母单元, 变换后的单元称为子单元, 如图 3-2-1。

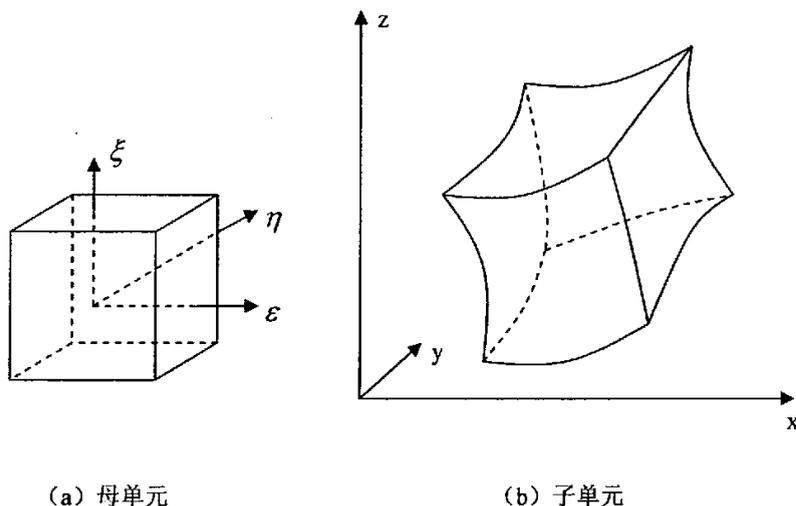


图 3-2-1 空间坐标转化

空间坐标变换公式可表示为:

$$\begin{cases} x = \sum N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots \\ y = \sum N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + \dots \\ z = \sum N_i z_i = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + \dots \end{cases} \quad (3-2-1)$$

式中:  $N_i$  为形函数;  $x_i, y_i, z_i$  为节点  $i$  的整体坐标。

### 3.2.2 渗流分析方程的变分原理

所谓渗流问题的变分原理,就是把描述渗流场的偏微分方程的边值问题的求解转化为求某个泛函的极值问题。

根据连续性原理和达西定律,取多孔介质各向异性主渗透方向和坐标轴方向一致,则多孔介质三维非稳定渗流的边值问题可描述为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (x, y, z) \in \Omega \\ h(x, y, z, t) \Big|_{t=t_0} = h_0(x, y, z, t_0) \dots\dots\dots (x, y, z) \in \Omega \\ h(x, y, z, t) \Big|_{\Gamma_1} = h_1(x, y, z, t) \dots\dots\dots (x, y, z) \in \Gamma_1 \\ \left. \begin{array}{l} k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \cos(n, x) + k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \cos(n, y) + k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \cos(n, z) \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y, z, t) \\ \dots\dots\dots (x, y, z) \in \Gamma_2 \end{array} \right\} \quad (3-2-2) \\ h(x, y, z, t) = z(x, y, t) \dots\dots\dots (x, y, z) \in \Gamma_3 \\ k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = -\mu \frac{\partial h}{\partial t} \cos \theta \end{array} \right.$$

式中:  $W$  为源汇项;  $\mu$  为饱和差(自由面上升)或给水度(自由面下降), 它表示在自由面改变单位高度下, 从含水层单位截面积上吸收或排出的水量;  $\theta$  为自由面外法线方向与垂线的交角;  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_3$  分别为第一类边界、第二类边界和自由面边界;  $\Omega$  为所研究渗流区, 其它符号同前。

根据变分原理, 上述边值问题等价于泛函  $I(h)$  的极值问题, 可表达如下:

$$\begin{aligned} I(h) = & \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ k_{xx} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_{yy} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + k_{zz} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + 2\mu_s h \frac{\partial h}{\partial t} - 2Wh \right] dx dy dz \\ & - \iint_{\Gamma_2} q h d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \mu \frac{\partial h}{\partial t} \cos \theta h d\Gamma \end{aligned} \quad (3-2-3)$$

总体泛函可表示为单元泛函之和, 单元泛函可表示为:

$$\begin{aligned} I^e(h) = & \iiint_{\Omega^e} \frac{1}{2} \left[ k_{xx}^e \left( \frac{\partial h^e}{\partial x} \right)^2 + k_{yy}^e \left( \frac{\partial h^e}{\partial y} \right)^2 + k_{zz}^e \left( \frac{\partial h^e}{\partial z} \right)^2 - 2W^e h^e \right] dx dy dz \\ & + \iint_{\Omega^e} \mu_s^e h^e \frac{\partial h^e}{\partial t} dx dy dz - \iint_{\Gamma_2^e} q^e h^e d\Gamma + \int_{\Gamma_3^e} \mu \frac{\partial h^e}{\partial t} \cos \theta h^e d\Gamma \end{aligned} \quad (3-2-4)$$

总体泛函求极值, 也就是要求泛函偏导数为零, 即:

$$\frac{\partial I(h)}{\partial h} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial I^e(h)}{\partial h} = 0 \quad (3-2-5)$$

式中： $M$  为单元总数。

以八节点等参单元为例，将渗流域  $\Omega$  划分为有限个六面体单元，则单元格内任一点的水头可表示为：

$$h(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta, \xi) h_i^e \quad (3-2-6)$$

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i^e N_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 y_i^e N_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 z_i^e N_i \quad (3-2-7)$$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \varepsilon_i \varepsilon)(1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \quad (3-2-8)$$

式中： $N_i(\varepsilon, \eta, \xi)$  为六面体单元的形函数； $h_i$  为节点水头； $x_i, y_i, z_i$  为节点  $i$  的整体坐标。

将式 (3-2-6) 代入式 (3-2-4) 得：

$$\begin{aligned} I^e(h) &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ k_{xx}^e \left( \sum_{i=1}^8 h_i^e \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + k_{yy}^e \left( \sum_{i=1}^8 h_i^e \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 + k_{zz}^e \left( \sum_{i=1}^8 h_i^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \right)^2 - 2W^e \sum_{i=1}^8 h_i^e N_i \right] \\ &\quad dx dy dz + \iiint_{\Omega} \left( \mu_s^e \sum_{i=1}^8 h_i^e N_i \frac{\partial h^e}{\partial t} \right) dx dy dz - \iint_{\Gamma_2} q^e h_i^e dx dy + \iint_{\Gamma_3} \mu \frac{\partial h^e}{\partial t} \cos \theta h_i^e d\Gamma \\ &= I_1^e(h) + I_2^e(h) - I_3^e(h) + I_4^e(h) \end{aligned} \quad (3-2-9)$$

下面分别对  $I_1^e(h)$ 、 $I_2^e(h)$ 、 $I_3^e(h)$ 、 $I_4^e(h)$  求偏导数和极小值。

对  $I_1^e(h)$  求偏导：

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e(h)}{\partial h_j^e} &= \sum_{i=1}^8 h_i^e \iiint_{\Omega} \left( k_{xx}^e \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy}^e \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_{zz}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &\quad - \iiint_{\Omega} W^e N_j dx dy dz \\ &= [K]^e \{h\}^e - \{E\}^e \quad j=1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (3-2-10)$$

$$\text{令 } k_{ij} = \iiint_{\Omega} \left( k_{xx}^e \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy}^e \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_{zz}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3-2-11)$$

$$E_j = \iiint_{\Omega} W^e N_j dx dy dz \quad (3-2-12)$$

则有：

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1^e(h)}{\partial h_1^e} \\ \frac{\partial I_1^e(h)}{\partial h_2^e} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_1^e(h)}{\partial h_8^e} \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{28} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{81} & k_{82} & \cdots & k_{88} \end{bmatrix} \begin{cases} h_1^e \\ h_2^e \\ \vdots \\ h_8^e \end{cases} \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_8 \end{cases} \quad (3-2-13)$$

参数坐标系与原坐标系体积元素之间有如下关系:

$$dxdydz = |J| d\epsilon d\eta d\xi \quad (3-2-14)$$

其中:  $|J|$  表示雅克比行列式的绝对值, 雅克比行列式可表示为:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} & \frac{\partial y}{\partial \epsilon} & \frac{\partial z}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \end{bmatrix} \quad (3-2-15)$$

将式 (3-2-14) 分别代入式 (3-2-11)、式 (3-2-12), 得:

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( k_{xx}^e \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy}^e \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_{zz}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) |J| d\epsilon d\eta d\xi \quad (3-2-16)$$

$$E_j^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W^e N_j |J| d\epsilon d\eta d\xi \quad (3-2-17)$$

对  $I_2^e(h)$  求偏导:

$$\frac{\partial I_2^e(h)}{\partial h_j^e} = \frac{\partial}{\partial h_j^e} \iiint_e \left( \mu_s^e \sum_{i=1}^8 h_i^e N_i \frac{\partial h^e}{\partial t} \right) dxdydz = \iiint_e \mu_s N_i N_j \frac{\partial h^e}{\partial t} dxdydz = [S]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (3-2-18)$$

令  $s_{ij}^e = \iiint_e \mu_s N_i N_j dxdydz$ , 且将式 (3-2-14) 代入则有:

$$s_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mu_s N_i N_j |J| d\epsilon d\eta d\xi \quad (3-2-19)$$

对  $I_3^e(h)$  求偏导:

$I_3^e(h)$  针对于有流量边界的渗流问题, 若为不透水边界, 则无此项。如果曲

面  $\Gamma_2$  包含单元  $e$  的一个面, 如 1234 面, 则曲面 1234 的参数方程为:

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i^e N_{S_i}(\varepsilon, \eta), \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i^e N_{S_i}(\varepsilon, \eta), \quad z = \sum_{i=1}^4 z_i^e N_{S_i}(\varepsilon, \eta)$$

式中:  $S$  表示曲面 1234。

$h$  在曲面  $S$  上的插值公式为:

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^4 h_i^e N_{S_i}(\varepsilon, \eta) \quad (3-2-20)$$

于是:

$$\frac{\partial I_3^e(h)}{\partial h_j^e} = \frac{\partial}{\partial h_j^e} \iint_{\Gamma_2} q^e \sum_{i=1}^4 h_i^e N_{S_i} dx dy = \iint_{\Gamma_2} q^e N_{S_i} A d\varepsilon d\eta = \{Q\}^e \quad (3-2-21)$$

式中:  $A$  为曲面  $S$  的面积, 它可用下式计算,

$$A = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-2-22)$$

对  $I_4^e(h)$  求偏导:

$I_4^e(h)$  针对于可变动的自由面边界, 如果是有压渗流场, 则无此项。

$$\frac{\partial I_4^e(h)}{\partial h_j^e} = \frac{\partial}{\partial h_j^e} \iint_{\Gamma_3} \mu N_i \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e N_j h_j^e \cos \theta d\Gamma = \iint_{\Gamma_3} \mu N_i N_j \cos \theta d\Gamma \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e = [G]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e \quad (3-2-23)$$

矩阵  $[G]^e$  的元素可表示为  $g_{ij} = \iint_{\Gamma_3} \mu N_i N_j \cos \theta d\Gamma$ 。

将式 (3-2-10)、(3-2-18)、(3-2-21)、(3-2-23) 求和, 可知对任意单元, 有:

$$[K]^e \{h\}^e - \{E\}^e + [S]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e - \{Q\}^e + [G]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e = 0 \quad (3-2-24)$$

整理上式, 且令  $\{F\}^e = \{E\}^e + \{Q\}^e$ , 则单元支配方程可写为:

$$[K]^e \{h\}^e + [S]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e + [G]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e = \{F\}^e \quad (3-2-25)$$

将上述单元支配方程进行集成, 可得整体有限元支配方程:

$$[K] \{h\} + [S] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + [G] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} = \{F\} \quad (3-2-26)$$

式中:  $[K]$  为总体渗透矩阵, 由单元渗透矩阵  $[K]^e$  集合而成;  $[S]$  为储水矩阵, 由各单元储水矩阵  $[S]^e$  迭加而得;  $[G]$  为流量补给矩阵, 由自由面穿过的各单元流量补给矩阵  $[G]^e$  迭加而得;  $\{F\}$  为水量矩阵 (节点流量矩阵), 由各单元水量矩阵  $\{F\}^e$  迭加而得;  $\{h\}$  为待求节点水头向量。

这里需注意的是: 如果是内部单元, 只有前面两项; 对于非稳定渗流, 自由面边界单元才有第三项。对于内源  $W=0$ , 第二类边界条件为不透水边界, 即  $q=0$  的情况, 节点流量列阵  $\{F\}$  为零。

若不计时间项, 得稳定渗流有限元计算公式:

$$[K]\{h\} = \{F\} \quad (3-2-27)$$

### 3.2.3 有限元求解的时间差分格式及其稳定性

对式 (3-2-26) 的时间采用差分形式<sup>[77]</sup>, 则有:

$$\left\{ \alpha[K] + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \right\} \{h\}_{t+\Delta t} = \{F\} - (1-\alpha)[K]\{h\}_t + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G])\{h\}_t \quad (3-2-28)$$

式中:  $\Delta t$  为时间步长。

选取不同的  $\alpha$  值, 可得到不同表达形式的有限元方程。

(1) 当  $\alpha=0$  时, 可得显式差分格式

$$\frac{1}{\Delta t} ([S] + [G])\{h\}_{t+\Delta t} = \{F\} - \left\{ [K] - \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \right\} \{h\}_t \quad (3-2-29)$$

(2) 当  $\alpha=1$  时, 可得隐式差分格式

$$\left\{ [K] + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \right\} \{h\}_{t+\Delta t} = \{F\} + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G])\{h\}_t \quad (3-2-30)$$

(3) 当  $\alpha=\frac{1}{2}$  时, 可得中心式差分格式

$$\left\{ \frac{[K]}{2} + \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \right\} \{h\}_{t+\Delta t} = \{F\} - \left\{ \frac{[K]}{2} - \frac{1}{\Delta t} ([S] + [G]) \right\} \{h\}_t \quad (3-2-31)$$

对于以上三种不同形式的时间差分方程稳定求解来说, 显式差分格式的稳定性最差, 它的稳定条件是  $\Delta t \leq \sum_{e=1}^M s_{ij}^e \cdot \left( \sum_{e=1}^M k_{ij}^e \right)^{-1}$  ( $M$  为离散单元总数), 中心差分

格式的稳定性条件是  $\Delta t \leq 2 \sum_{e=1}^M S_{ij}^e \cdot \left( \sum_{e=1}^M k_{ij}^e \right)^{-1}$  (M为离散单元总数), 隐式差分格式是

无条件稳定的, 本文依据隐式差分格式编制了相应的有限元计算程序。

由前面所述的时间差分形式可知, 已知前一时刻  $t$  的节点水头分布, 即可求出下一时刻  $t + \Delta t$  的水头分布。因此, 只要知道初始条件下的渗流场水头分布, 即可计算任意时刻渗流场水头分布。

### 3.3 有自由面渗流分析的解法概述

在自然界中, 存在许多有自由面的无压渗流问题, 如岩土边坡、土坝、地下洞室及地下水运动等渗流问题。迄今, 用有限单元法、边界元法及离散元法等数值计算方法求解无压渗流时, 最困难、最复杂的问题之一便是渗流自由面的确定。由于渗流自由面的位置是预先未知的, 属于混合边界问题, 必须同时满足Dirichlet边界条件(第一类边界条件)和Neumann边界条件(第二类边界条件), 需要进行迭代求解。求解该类问题的有限元法, 通常有变网格法和固定网格法两种。

#### 3.3.1 变网格法

存在自由面渗流问题的求解中最早是用变网格迭代法, 该法主要根据经验人为事先假定一自由面, 然后在每次迭代中重新确定自由面的位置, 重新调整有限元网格, 直到前后两次计算值的最大差值的绝对值达到指定的精度为止。变网格法本身存在一些明显缺陷<sup>[78]</sup>:

(1) 当初始渗流自由面和最终稳定渗流自由面位置相差较大时, 会使计算单元发生畸变, 乃至与相邻单元发生交替重叠, 以至于在计算过程中常需对渗流域进行重新剖分计算;

(2) 当自由面附近渗流介质不均一, 尤其有水平介质层时网格变动会破坏介质分区, 程序处理十分困难;

(3) 当渗流域内有结构物时, 网格变动常会改变结构的边界条件, 计算精度受到影响;

(4) 在网格变动过程中, 每一次迭代计算网格均要随自由面的变动而变动, 总体渗透矩阵需要重新形成, 故需大量机时;

(5) 由于渗流场计算网格不停变动使得在进行渗流场—应力场耦合分析时增加了困难。

由于存在以上缺点, 在有自由面的渗流问题中, 变网格法已经逐步被淘汰。

#### 3.3.2 固定网格法

自1973年Neuman首次提出用不变网格求解有自由面的渗流场以来, 基于固

定网格的自由面数值模拟方法研究及其应用发展迅速<sup>[79]</sup>。迄今较为适用的网格不变法包括剩余流量法、单元渗透矩阵调整法、初流量法、节点虚流量法、虚单元法、高斯点法及截止负压法等。现将各种方法的分析过程简述如下：

### 一、剩余流量法

Desai (1976年) 提出了剩余流量法, 其基本思想是通过不断求解流过自由面的法向流量(称为剩余流量)建立求解水头增量的线性代数方程组, 达到修正全场水头和调整新的自由面位置的目的。计算步骤如下:

- (1) 对所研究的渗流域进行全域离散, 并求出各节点水头;
- (2) 根据  $h = z$ , 确定初始自由面位置;
- (3) 若初始渗流自由面上法向流量为零(不考虑地下水的地表入渗和蒸发), 则该自由面为最终自由面, 对稳定渗流而言, 其为稳定自由面, 否则按如下调整;
- (4) 求自由面上的法向剩余流速  $v'_n$ , 进而求剩余流量列阵  $\{q\}$ :

$$v'_n = l_x v_x + l_y v_y + l_z v_z \quad (3-3-1)$$

$$\{q^{r+1}\} = \iint_{\Gamma_3} [N]^T \{v'_n\} ds \quad (3-3-2)$$

式中:  $r$  为迭代次数;  $\Gamma_3$  为自由面边界;  $l_x, l_y, l_z$  为自由面法向余弦;  $v_x, v_y, v_z$  为自由面流速分量;  $[N]$  为单元形函数。

- (5) 计算水头增量:

$$\{\Delta h^{r+1}\} = [M]^{-1} \{q^{r+1}\} \quad (3-3-3)$$

式中:  $[M]$  为总传导矩阵。

- (6) 计算第  $r+1$  步的水头:

$$\{h^{r+1}\} = \{h^r\} + \{\Delta h^{r+1}\} \quad (3-3-4)$$

当  $\Delta h$  满足精度要求时停止计算, 否则转至(4)。

该法在迭代过程中只需一次形成总体渗透矩阵, 但由于计算中全部调整均依赖于第一次有限元计算结果, 因此计算精度较低。

### 二、单元渗透矩阵调整法

Bathe等(1979年)提出了单元渗透系数矩阵调整法。该法利用对渗流场有限元计算的结果, 根据单元节点水头与节点位势之间的关系, 把渗流场进行分区, 各区的渗透系数给不同的值, 通过不断调整单元传导矩阵, 模拟渗流不饱和区的作用, 来确定出真实的饱和区渗流场。该算法实际上是把边界不确定的非线性问

题转化成了材料非线性问题来考虑自由面。其计算步骤如下：

(1) 对所研究的渗流域进行全域离散，并求出各节点水头；

(2) 根据节点水头与节点位势之间的关系确定渗透系数，当节点水头大于等于节点位势时，采用实际的渗透系数，反之，当节点水头小于节点位势时，采用实际渗透系数的千分之一，重新建立总体渗透矩阵，求出各节点水头值；

(3) 重复(2)直到前后两次计算的水头差满足精度要求。

李春华在Bathe法的基础上对有自由面渗流的二维问题作了进一步研究。在求得水头后，找出节点连线上自由面的位置，将自由面穿过的单元看作复合材料单元，即自由面以下采用实际渗透系数，自由面以上的采用实际渗透系数的千分之一求单元传导矩阵。

这两种方法都需要在每次迭代计算中确定自由面的位置，显见，要确定穿越自由面单元的水上、水下部分的体积，需先确定自由面与单元的切割情况，判断切割两部分的几何形状，这对三维而言其计算效率是很低的。因此，朱军等提出了改进的单元渗透系数矩阵调整法，在进行  $r$  次迭代计算后，对所有节点压力水头均小于零的单元，在下次计算中丢去；所有节点压力水头大于或等于零的单元其单元渗透矩阵不用调整；对于自由面穿过的单元，通过单元节点水头可求出其高点压力水头  $h$ ，对于  $h$  大于等于零的高斯点，渗透系数取原值  $k$ ，对  $h$  小于零的高斯点，渗透系数取原值的千分之一，这样达到调整的目的，避免了求解穿越自由面单元的水上、水下部分的体积。

### 三、初流量法

初流量法是张有天等在Gell工作的基础上加以改进而提出的方法。其基本原理类似于非线性应力分析中的初应力法，在达西定律中增加一初流量项  $q_i^0$ ，通过对初流量值的调整，使得自由面满足法向流速等于零这个边界条件，从而将非线性问题化为线性问题。

以全域为研究对象，可将达西定律改写为：

$$v_i = -k_{ij}h_j + q_i^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3-3-5)$$

式中是张量记法， $k_{ij}$  为介质渗透张量； $q_i^0$  为初流量值。

由于非饱和区无渗流，因此实际  $v_i$  为：

$$v_i = -k_{ij}^0 h_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3-3-6)$$

其中  $k_{ij}^0 = \begin{cases} k_{ij} & (\text{饱和区}) \\ 0 & (\text{非饱和区}) \end{cases}$

将式 (3-3-6) 带入式 (3-3-5)，可得初流量值：

$$q_i^0 = (-k_{ij}^0 + k_{ij})h_j \quad (i, j=1,2,3) \quad (3-3-7)$$

对全域离散, 可得有限元方程:

$$[M]\{h\} = \{q_0\} + \{q\} \quad (3-3-8)$$

式中:  $[M]$  为总体传导矩阵;  $\{q\}$  为等效节点流量列阵;  $\{q_0\}$  为增加的由初流量引起的节点流量列阵, 其表达式为:

$$q_0 = \sum_e \iiint_{\Omega} [B]^T ([k]^e - [k^0]^e) [B] \{h\}^e d\Omega \quad (3-3-9)$$

令

$$A(h-z) = \begin{cases} 0 & h < z \\ 1 & h \geq z \end{cases}, \text{ 称为区域识别函数。}$$

则式 (3-3-9) 可写为:

$$q_0 = \sum_e \iiint_{\Omega} [B]^T [k]^e (1 - A(h-z)) [B] \{h\}^e d\Omega \quad (3-3-10)$$

$$\text{式中: } [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} \end{bmatrix}; [k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

依次对  $h < z$  的所有高斯点求得各节点的累计节点初流量, 并以其为右端项计算节点的水头增量:

$$[K]\{\Delta h^r\} = \{q_0^r\} \quad (3-3-11)$$

计算第  $r+1$  步的水头为:

$$\{h^{r+1}\} = \{h^r\} + \{\Delta h^r\} \quad (3-3-12)$$

重复求出新的自由面, 直到对渗流区域各高斯点求得的初流量  $\{q_0\}$  的绝对值小于某一允许值, 迭代过程结束。

初流量法只需要一次结集和分解总体传导矩阵, 并且不需要在每一次迭代步中确定自由面的近似位置, 是不变网格法中求解有自由面渗流问题的一种较为有效的方法。但初流量法的收敛性不尽人意, 解的稳定性也不好。

#### 四、虚单元法

虚单元法是以上一次有限元计算求得的节点水头为基础, 求得自由面与单元的交点, 移动跨自由面单元的某些节点, 使节点落于交点处, 自由面之上的为虚

单元区,该区在下一计算时不参与形成渗透矩阵,自由面之下的为渗流计算区域。随着渗流计算区域逐步逼近实际渗流区域,求得的结果也逐步逼近问题的真实解。其计算步骤如下:

(1) 对所研究的渗流域进行全域离散,并求出各节点水头;

(2) 求出自由面位置,令处于自由面之上的节点的分值  $FQZ(i) = 0$  ( $i$  为单元节点编号),处于自由面之下的节点分值  $FQZ(i) = 1$ ;

(3) 累计单元节点分值,  $SUM = \sum_{i=1}^n FQZ(i)$ ,若  $SUM = 0$ ,表明单元处于

自由面之上,若  $SUM = n$ ,表明单元处于自由面之下,若  $0 < SUM < n$ ,表明自由面穿过该单元,需对这些单元做一定的处理;

(4) 重复(2)、(3)直到前后两次计算的水头差小于指定的精度要求为止。

该法在每次迭代都要通过移动单元的某些节点形成自由面,尤其在迭代过程中自由面若出现上下反复震荡,调整局部单元网格时容易使单元发生畸变,对三维问题不适用。

## 五、截止负压法

截止负压法的基本原理是:以渗压场  $p(x)$  为未知函数,利用罚函数  $H_\epsilon(p)$  将  $p(x)$  延拓至整个几何区域,使待定边界化为固定边界,并通过迭代求得渗压场  $p(x)$ 。计算过程中允许在非饱和区内出现一定的大于截止负压的小负压值,由于饱和区的压力值为正,所以可在正负压力(饱和和非饱和)之间通过插值确定零压力面,即渗流自由面(压力等于大气压)。

## 3.4 有自由面渗流分析的有限元求解

### 3.4.1 有自由面渗流分析的节点虚流量法

通过变分原理解由相应微分方程和定解条件组成的数学模型,可建立整个渗流区域上有限元方程,式(3-2-27)给出了稳定渗流有限元计算公式。

速宝玉等在“不变网格确定渗流自由面的节点虚流量法”中提出了节点虚流量法,其迭代计算的基本思想为:在前一步近似解的基础上,对式(3-2-27)左边扣除节点虚流量贡献  $\{\Delta q\}$ ,为避免整体渗透矩阵  $[K]$  的组装与分解,把  $\{\Delta q\}$  迭加到式(3-2-27)右端的等效节点流量  $\{F\}$  上去,使实区各节点的流量连续性条

件逐步在没有得到虚区的虚流量贡献的情况下得到满足，最终实区和虚区之间不存在流量交换，求得的解也就是原问题的真解。

在式 (3-2-27) 的左边扣除虚流量贡献  $\{\Delta q\}$ ，等于在式 (3-2-27) 的右边加上虚流量贡献  $\{\Delta q\}$ ，得新的求解方程组为：

$$[K]\{h\} = \{F\} + \{\Delta q\} \quad (3-4-1)$$

节点虚流量贡献  $\{\Delta q\}$  可表示为：

$$\Delta q = \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T [k(1 - A_\varepsilon(h-z))] [B] d\Omega \cdot h^e \quad (3-4-2)$$

$$A_\varepsilon(h-z) = \begin{cases} 0 & h-z < \varepsilon_1 \\ \frac{h-z-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1} & \varepsilon_1 \leq h-z \leq \varepsilon_2 \\ 1 & h-z > \varepsilon_2 \end{cases}$$

称为区域识别函数 (图3-4-2 (b))。

其中： $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  为罚参数， $\varepsilon_1$  是一负值，其大小是当自由面正好穿过单元节点 III 时，第 3 个高斯积分点到自由面的距离在垂直方向上投影的最大值； $\varepsilon_2$  表示当自由面正好穿过单元节点 I 时，第 1 个高斯积分点到自由面的距离在垂直方向上投影的最大值 (图 3-4-1)，其它符号同前。

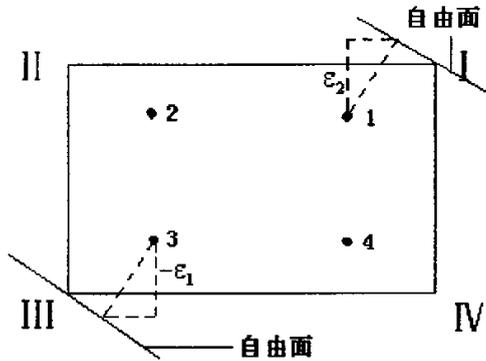


图3-4-1 罚参数示意图

由于区域识别函数是连续的，根据上次迭代计算出的单元高斯点水头  $h$ ，代入式 (3-4-2) 修正渗透系数时，可以解决如下问题：(1) 如果某单元所有高斯点的  $h$  值皆大于  $z$  值，若按初流量法中的区域识别函数  $A(h-z)$  (图3-4-2 (a)) 计算，则该单元的节点虚流量贡献为 0，但该单元可能仍有部分处于非饱和区 ( $h < z$ )，如图3-4-3所示，这样该单元这部分的节点虚流量贡献就被忽略了；(2)

同样，若某单元所有高斯点的  $h$  值皆小于  $z$  值，但该单元仍有可能有部分处于饱和区 ( $h > z$ )，如图3-4-4所示，那么该单元这部分的节点虚流量贡献就多计入了；

(3) 若采用  $A(h-z)$ ，则由于  $A(h-z)$  是不连续函数，自由面在积分点附近上、下的微小变动，会引起积分值较大的变化，从而导致解的来回摆动，会降低该法的收敛性，如图3-4-5所示，采用  $A_\epsilon(h-z)$  可以提高收敛性。

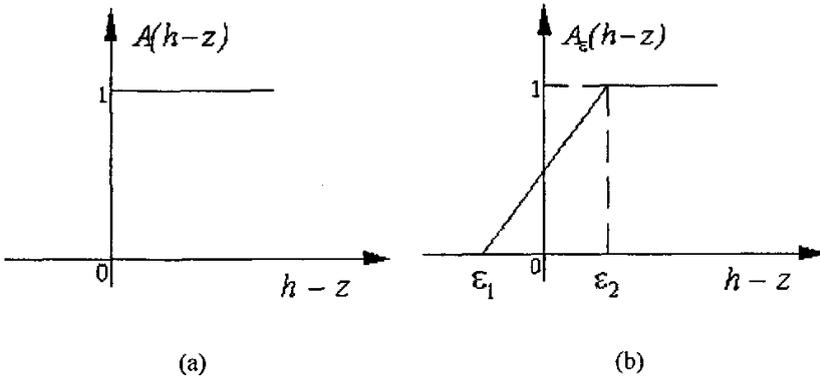


图3-4-2 区域识别函数

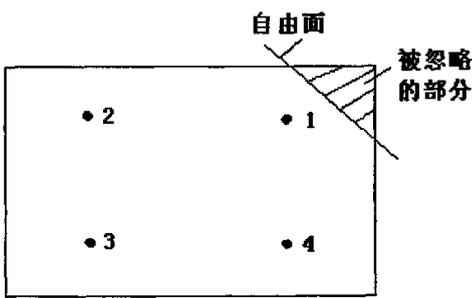


图3-4-3 自由面在积分点之上示意图

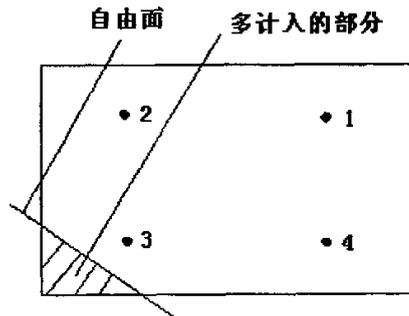


图3-4-4 自由面在积分点之下示意图

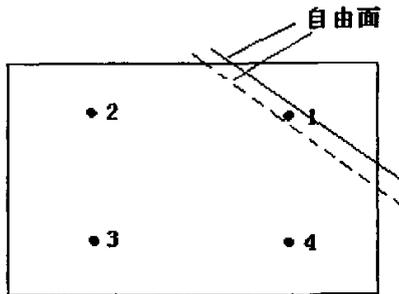


图3-4-5 自由面在积分点附近微动示意图

### 3.4.2 有限元算法

非稳定渗流的计算由多个时间步长组成,而在每个时间步长中又需要进行多次迭代,在迭代中含水层的性质由于水头的变化而发生变化,即由承压态变成非承压态,或由非承压态变为承压态。当含水层由承压态变为非承压态时,单元格性质发上了变化,部分实单元(单元内所有节点的水头都大于其 $z$ 坐标)变为虚单元(单元内所有节点的水头都小于其 $z$ 坐标)或过渡单元(部分节点水头大于其 $z$ 坐标且部分节点水头小于 $z$ 坐标),反之亦然。对于自由面穿过的单元,要根据高斯点水头值与高斯点 $z$ 坐标之间的关系修正渗透矩阵 $[K]$ 、储水矩阵 $[S]$ ,并计算流量补给矩阵 $[G]$ ,详述如下。

#### (1) 渗透矩阵 $[K]$ 、储水矩阵 $[S]$ 的修正

由式(3-2-16)、(3-2-19)可得单元 $[K]^e$ 、 $[S]^e$ 矩阵的元素的高斯积分形式为:

$$k_{ij}^e = \sum_{l=1}^{ng} \left( k_{xx}^e \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy}^e \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_{zz}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) |J| H_l \quad (3-4-3)$$

$$s_{ij}^e = \sum_{l=1}^{ng} \mu_s N_i N_j |J| H_l \quad (3-4-4)$$

式中:  $ng$  为高斯积分点总数,  $H_l$  为权系数。

根据上次迭代计算出的单元高斯点水头 $h$ ,渗透矩阵 $[K]$ 可按节点虚流量法进行修正,对于单元储水系数矩阵可由下式修正:

$$\mu_s = \begin{cases} 10^{-4} \mu_s & h - z < \varepsilon_1 \\ \frac{h - z - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \mu_s & \varepsilon_1 \leq h - z \leq \varepsilon_2 \\ \mu_s & h - z > \varepsilon_2 \end{cases} \quad (3-4-5)$$

#### (2) 计算流量补给矩阵 $[G]$

对于非稳定渗流,当存在自由面边界时需要计算流量补给矩阵 $[G]$ 。矩阵 $[G]^e$ 中元素可表示为:

$$g_{ij}^e = \iint_{\Gamma_3^e} \mu N_i N_j \cos \theta d\Gamma \quad i, j = 1, 2 \dots 8 \quad (3-4-6)$$

式中： $\Gamma_3^e$ 表示自由面在该单元内的曲面面积，其他符号同前。

对于8节点空间等参单元而言，渗流自由面在单元内的一般曲面方程可表示为：

$$\sum_{i=1}^8 N_i p_i = 0 \quad (3-4-7)$$

即：

$$\sum_{i=1}^8 (1 + \varepsilon_i \varepsilon) (1 + \eta_i \eta) (1 + \xi_i \xi) p_i = 0 \quad (3-4-8)$$

式中： $p_i$ 为节点压力水头。

将上式写为 $\xi$ 关于 $\varepsilon$ 、 $\eta$ 的函数，有

$$\xi = - \frac{\sum_{i=1}^8 (1 + \varepsilon_i \varepsilon) (1 + \eta_i \eta) p_i}{\sum_{i=1}^8 \xi_i (1 + \varepsilon_i \varepsilon) (1 + \eta_i \eta) p_i} \quad (3-4-9)$$

简记为：

$$\xi = f(\varepsilon, \eta) \quad (3-4-10)$$

上式即为等参单元局部坐标表示的自由面 $\Gamma_3^e$ 的曲面方程。

可以看出积分区域和被积函数都比较复杂，难以进行解析计算。文献[80]采用虚拟面法对自由面进行了近似处理，其基本思想是用形函数插值得到虚拟面上各高斯点在六面体单元中的局部坐标，从而实现虚拟面的数值积分，其缺点是只考虑了自由面与单元相交为四边形的情况，未考虑相交为三角形、五边形和六边形的情况。文献[81]从积分的原始概念出发，给出了非稳定渗流分析中，计算自由面边界积分项的近似算法，其基本思路是把积分区域分解成若干个子区域，以各个子区域面积与其形心点处函数值的乘积作为该子区域内的积分值，然后叠加得到整个积分区域上的积分值 $g_{ij}^e$ 。在子区域足够小的情况下，子区域内函数值变化不剧烈，以该类乘积代替积分可以满足工程需要，但实际计算中将子区域划分得足够小不太现实，也难以确定一个量化的标准来保证子区域内被积函数变化平稳。因此，此算法获得的自由面边界积分误差往往较大；特别是，该算法假定单元内自由面是一个平面，这个假定对自由面变化不剧烈的部位来讲是可以接

受的,但当单元内自由面变化剧烈时,该假定必然会带来较大的计算误差。后来文献[82]在其基础上提出了一种可以实现自由面边界积分项的高精度数值积分算法,其基本算法是利用变步长 Simpson 方法<sup>[83]</sup>实现二重积分,由于自由面与单元格相交的多边形可能是三角形、四边形、五边形或六边形,因此计算边界积分项时首先要确定自由面与单元格相交的形状,然后将其分解成若干个三角形子区域,再用变步长 Simpson 方法进行积分。

文献[81]和文献[82]中提到的两种算法都要先确定自由面与单元格的交截面,然后在交截面上求积分,这对三维问题而言其计算效率比较低。而文献[80]中提到的算法只考虑了一种交截情况,误差较大。文献[84]提出了利用高斯公式<sup>[85]</sup>将式(3-4-6)转化为单元体积分与各表面积分之差,其算法如下:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^e &= \iint_{\Gamma_3^e} \mu N_i N_j \cos \theta d\Gamma = - \iint_{\Gamma_3^e} \mu N_i N_j n_z d\Gamma \\
 &= - \left[ \iiint_{V^e} A(h-z) \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} N_j + \frac{\partial N_j}{\partial z} N_i \right) dV - \sum_{l=1}^m \iint_{\Gamma_l^e} A(h-z) \mu N_i N_j n_z d\Gamma \right]
 \end{aligned}
 \tag{3-4-11}$$

其中:  $A(h-z) = \begin{cases} 0 & h < z \\ 1 & h \geq z \end{cases}$

式中:  $A(h-z)$  为示性函数;  $m$  为单元表面个数,  $\Gamma_l$  为单元的第  $l$  个表面,  $n_z$  为自由面外法线方向向量  $n = \{n_x, n_y, n_z\}$  的第三个分量。

若使用  $A(h-z)$  会出现一些问题: 如果某单元所有高斯点的  $h$  值皆大于  $z$  值,若按式(3-4-11)计算,则不论是计算体积分还是面积分,都会多计入部分值(如图 3-4-6 所示); 同理,若某单元所有高斯点的  $h$  值皆小于  $z$  值,若按式(3-4-11)计算,则不论是计算体积分还是面积分,都会忽略部分值(如图 3-4-7 所示),

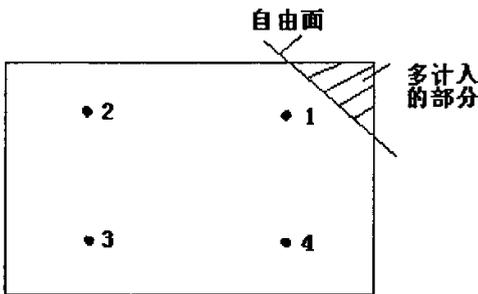


图3-4-6 自由面在积分点之上示意图

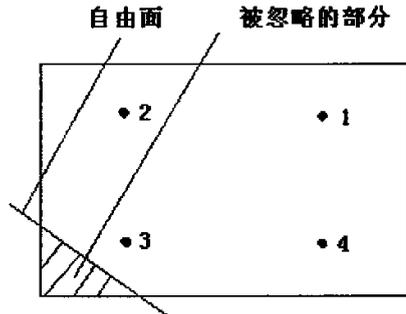


图3-4-7 自由面在积分点之下示意图

使得计算结果出现一定误差。为了解决这一问题，本文计算  $g_{ij}^e$  时采用的示性函数是上一节中计算节点虚流量时所用的连续的区域识别函数  $A_\varepsilon(h-z)$ 。这样在不用确定单元与自由面交截面的情况下，可以方便地计算出  $g_{ij}^e$ 。

### (3) 方程组的求解

解线性方程组，一般有直接法和迭代法两种。针对大型稀疏线性代数方程组，在网格数据不是很多时，Crout 直接解法是一种有效的算法，但是当网格数据量大时，直接解法就显得慢了些，这时最好选用迭代法求解。PCG<sup>[86-87]</sup>（预处理共轭梯度）法是一种较好的迭代法，其基本思路是：把对称正定方程组的系数矩阵进行预处理，以减少等价问题的条件数，然后再用共轭梯度法(CG)去求解，以提高收敛速度，克服数值不稳定性。

设  $A$  为对称正定矩阵，对于线性方程组：

$$Ax = b \quad (3-4-12)$$

假设第一步迭代为：

$$p^0 = r^0 = b - Ax^0 \quad (3-4-13)$$

式中： $r^0$  是第一次迭代值  $x^0$  的余差，那么第  $k$  次迭代为：

$$\left\{ \begin{array}{l} u^k = Ap^k \\ \alpha^k = \frac{(r^k)^T d^k}{(p^k)^T u^k} \\ x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k \\ r^{k+1} = r^k - \alpha^k u^k \\ d^{k+1} = M^{-1} r^{k+1} \\ \beta^k = \frac{(r^{k+1})^T d^{k+1}}{(r^k)^T d^k} \\ p^{k+1} = d^{k+1} + \beta^k p^k \end{array} \right. \quad (3-4-14)$$

式中： $M$  称为预优矩阵，这里  $M$  取矩阵  $A$  的主对角元素。

## 3.5 本章小结

(1) 详细分析了非稳定饱和渗流数学模型的里兹 (Ritz) 变分原理求解过程，推倒出了相应的有限元迭代格式，并初步探讨了有限元求解的稳定性。

(2) 系统论述了求解无压渗流自由面的几种方法。

(3) 在有自由面渗流分析的节点虚流量法的基础上, 将连续的区域识别函数应用于自由面通过的单元。

(4) 探讨了饱和非稳定渗流中自由面边界积分项的计算方法, 采用高斯公式将求自由面的面积分转化为求体积分与其他面积分之差, 避免了求自由面的具体位置, 同时在计算体积分和面积分时采用连续的区域识别函数。

(5) 采用直接解法和 PCG 法求解线性方程组。

## 第四章 非稳定饱和渗流有限元程序的开发

### 4.1 程序设计中若干实施技术

#### 4.1.1 第一类边界条件的处理

第一类边界即已知水头边界，在迭代过程中与其相关节点水头始终保持不变，在编制程序过程中，分别采用“去行去列法”和“置大数法”进行处理。式

(3-2-30) 表示的是有限元求解的隐式差分格式，令  $[A] = [K] + \frac{1}{\Delta t}([S] + [G])$ ,

$\{B\} = \{F\} + \frac{1}{\Delta t}([S] + [G])\{h\}$ ，则式 (3-2-30) 可写为：

$$[A]\{h\}_{t+\Delta t} = \{B\} \quad (4-1-1)$$

式中： $[A]$ 称为总刚度矩阵； $\{B\}$ 称为常数项。

##### (1) 去行去列法

若第  $r$  个节点的水头为已知水头  $\bar{h}_r$ ，则将列向量  $\{B\}$  中第  $r$  行元素  $B_r$  去掉，其它各元素  $B_1, \dots, B_{r-1}, B_{r+1}, \dots, B_n$  分别减去  $(\bar{h}_r \times A_{k,r})$ ， $A_{k,r}$  为  $[A]$  矩阵中第  $r$  列上各元素， $k = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$  ( $n$  为结点总数)，则修正后的列向量  $\{B\}^*$  可表示为：

$$\{B\}^* = \begin{Bmatrix} B_1 - \bar{h}_r \times A_{1,r} \\ \vdots \\ B_{r-1} - \bar{h}_r \times A_{r-1,r} \\ B_{r+1} - \bar{h}_r \times A_{r+1,r} \\ \vdots \\ B_n - \bar{h}_r \times A_{n,r} \end{Bmatrix} \quad (4-1-2)$$

同时，总刚度矩阵  $[A]$  也需修正，即将  $[A]$  矩阵中第  $r$  行、第  $r$  列上的元素都去掉，修正后的  $[A]^*$  矩阵可表示为：

$$[A]^* = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,r-1} & A_{1,r+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r-1,1} & \cdots & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r+1} & \cdots & A_{r-1,n} \\ A_{r+1,1} & \cdots & A_{r+1,r-1} & A_{r+1,r+1} & \cdots & A_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,r-1} & A_{n,r+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad (4-1-3)$$

经过去行去列修正后，原方程组变为：

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,r-1} & A_{1,r+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r-1,1} & \cdots & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r+1} & \cdots & A_{r-1,n} \\ A_{r+1,1} & \cdots & A_{r+1,r-1} & A_{r+1,r+1} & \cdots & A_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,r-1} & A_{n,r+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{r-1} \\ h_{r+1} \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 - \bar{h}_r \times A_{1,r} \\ \vdots \\ B_{r-1} - \bar{h}_r \times A_{r-1,r} \\ B_{r+1} - \bar{h}_r \times A_{r+1,r} \\ \vdots \\ B_n - \bar{h}_r \times A_{n,r} \end{Bmatrix} \quad (4-1-4)$$

从上式可以看去，经过去行去列后，原方程组的个数减少了，若边界上有  $m$  个节点水头是已知的，那么需要修正  $m$  次。虽然经修正后，方程组个数减少了，解方程所用时间减少了，但是如果单元数多且边界上已知节点数多时，修正  $[A]$ 、 $\{B\}$  会用较长时间，这样去行去列法无法显示其优势。因此，只有当单元数较少时，使用去行去列法后再用直接解法解方程，会获得比较精确的解。和置大数法相比，程序设计繁杂一些。

## (2) 置大数法

将与已知水头同行的总刚度矩阵中的主对角元数置一个“大数”，然后把方程组右端相对应的元素用那个“大数”与之相乘，称为置大数法。假定第  $r$  个节点的水头为已知水头  $\bar{h}_r$ ，则原方程组变为：

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,r} & \cdots & A_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r,1} & \cdots & A_{r,r} + 10^{15} & \cdots & A_{r,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,r} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \bar{h}_r \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \times 10^{15} \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} \quad (4-1-5)$$

根据上式计算时，已知水头  $\bar{h}_r$  的值始终保持不变，程序设计也比较容易。

若单元格数较多且已知水头边界较多时，通常用置大数法后再用迭代法（如 PCG 法）求解方程。

### 4.1.2 饱和溢出面边界的处理

对于饱和溢出面上的节点,即溢出点,首先将其全部当作已知节点水头处理,每次迭代求解后需要检查边界集包含的节点的流量值,根据饱和和溢出面上节点不能为负的原则,重新生长边界集<sup>[88]</sup>

### 4.1.3 抽水井的处理

对于抽水井的处理,主要采用以下两种方式:

#### (1) 点井法

点井法是指将井的抽水量直接分配到节点上,该法忽略了井径大小的影响。若采用点井法,则需加密网格,即越靠近井点,网格越密集。

#### (2) 网格法

网格法是指将井的抽水量分配到空间网格内,即将井扩大到整个网格单元,再用行函数将水量分配到 8 个节点上。为了提高精度,应使刻画井的单元尽量小。

### 4.1.4 连续墙的处理

基坑连续墙在基坑降水时起到了防水作用,因此在渗流分析中,根据实际情况,赋予连续墙单元与土体单元不同的渗透系数。这种方法可以真实的模拟连续墙的宽度、渗透系数。

### 4.1.5 渗流量的计算

利用有限单元法求得渗流场中各个节点的水头后,可以计算通过任一断面的渗流量,目前,计算渗流量的方法主要有:流网法、侧断面法、侧断面平均法、中断面法、多次均值中断面法和体积分法<sup>[89-90]</sup>。这里采用中断面法和体积分法。

#### (1) 中断面法

对于三维问题,中断面法是取通过单元棱线中点的面作为过水断面,如图 4-1-1 所示,对任意八节点六面体等参数单元,选取中断面 abcd,则通过该断面的渗流量  $q$  的计算式可表示为:

$$q_i = - \iint_{S_i} \left[ k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \cos(n, x) + k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \cos(n, y) + k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \cos(n, z) \right] ds \quad (4-1-6)$$

式中:  $S_i$  为过流断面;  $\cos(n, x)$ 、 $\cos(n, y)$ 、 $\cos(n, z)$  分别表示过流断面外法线方向与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴夹角的余弦。

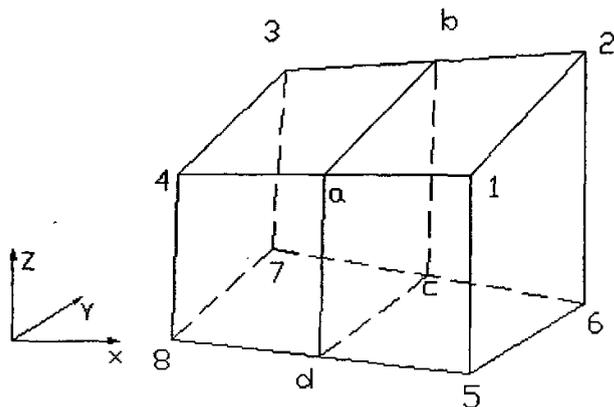


图 4-1-1 计算断面流量简图

将式 (4-1-6) 写为矩阵形式且经坐标转化后, 得:

$$q_i = - \iint_{S_i} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_8 \end{Bmatrix} [J^{-1}]^T \begin{Bmatrix} k_{xx} J_1 \\ k_{yy} J_2 \\ k_{zz} J_3 \end{Bmatrix} ds \quad (4-1-7)$$

$$\text{式中: } J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{vmatrix}$$

用高斯积分对式 (4-1-7) 进行积分就可得到通过面  $S_i$  的流量。若过水断面是由  $m$  个中截面组成, 则通过该过水断面的流量为:

$$q = \sum_{i=1}^m q_i \quad (4-1-8)$$

## (2) 体积分法

任一时刻, 渗流场处于相对稳定状态, 其微分方程为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-1-9)$$

采用等参单元, 且利用格林公式, 分部积分得:

$$\sum_{e=1}^m \iiint_{\Omega^e} k_{ij} \cdot \nabla h \cdot \nabla N d\Omega = \sum_{e=1}^m \iint_{\Gamma^e} k_{ij} \cdot \nabla h \cdot \nabla N d\Gamma \quad (4-1-10)$$

式中： $m$  表示与断面相关的单元总数。

显然，上式右端的边界积分表示通过单元边界上的外法向流量，左端是单元内部的体积积分，它表示通过单元的等效节点流量，其值等于边界流量。因此，只要将各单元的等效节点流量求出后，把与断面相关的各单元的边或面上的节点流量叠加起来，便可得到所求断面的流量。单元等效节点流量可由下式计算得到：

$$q^e = \iiint_{\Omega^e} k_{ij} \cdot \nabla h \cdot \nabla N d\Omega = \iint_{\Gamma^e} k_{ij} \cdot \nabla N \cdot h \cdot \nabla N d\Omega \quad (4-1-11)$$

## 4.2 程序流程图

根据上述有限元计算公式、有限元迭代求解格式及边界面处理方式，结合节点虚流量法，用 Visual Fortran90<sup>[91]</sup>编制了三维非稳定饱和渗流场计算分析程序 3DF，其流程图如图 4-2-1 所示。

## 4.3 程序说明

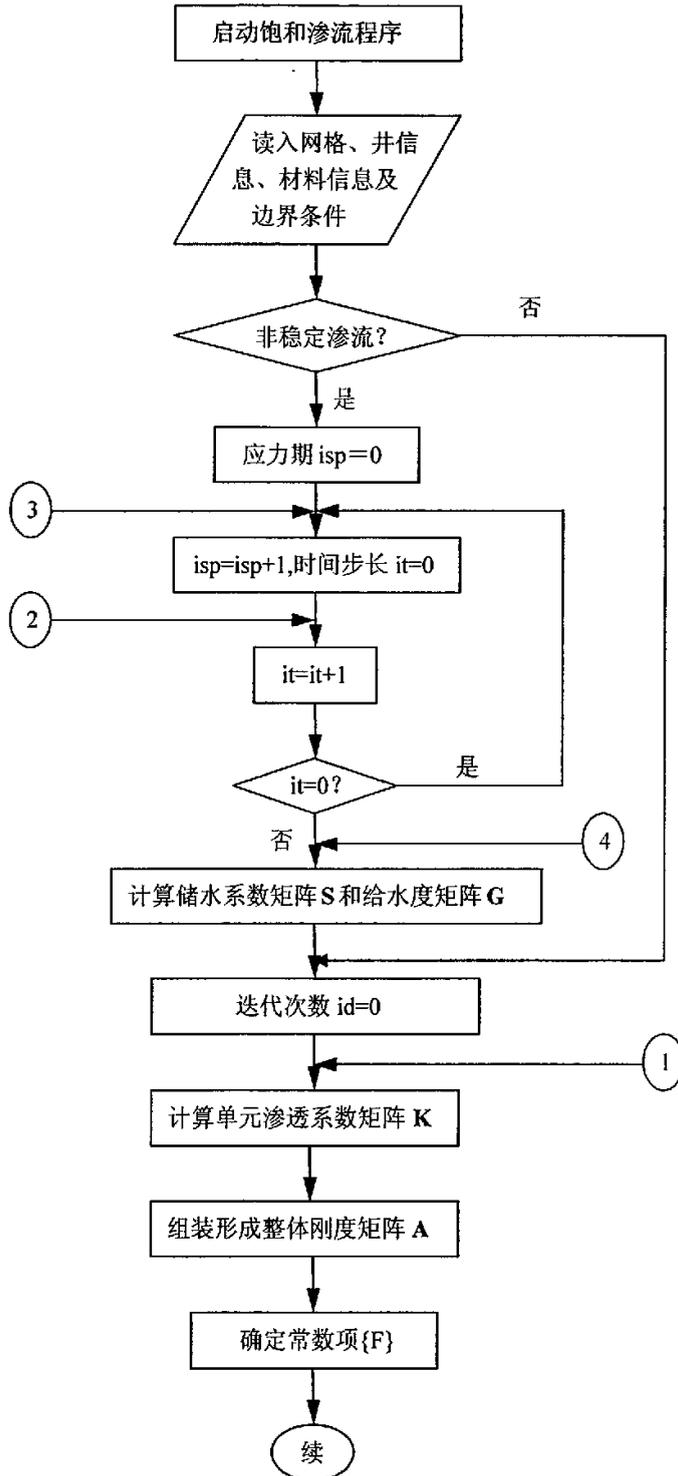
图 4-2-1 中，nisp 表示应力期总数，nit 表示时间步长总数， $p_0$  为迭代收敛因子。在程序中，将所模拟的时间分为若干个应力期，每个应力期又分为若干个时间步长。如此划分时段可以使输入的边界信息简洁、明了，例如，在不同的时段可能有不同的抽水量、或不同的边界条件，这样只需将相同的抽水量或边界条件划分到一个应力期即可。

程序的编制采用模块化结构，以便于以后对程序进行修改和扩充。另外，本程序不具备自动剖分网格的前处理功能，单元、节点信息采用 ANSYS<sup>[92-93]</sup>单元网格自动剖分生成。后处理使用自行开发的 Figure 折面等直线图来实现，输入网格数据及水位数据后，它可以绘制任意剖面水位等直线图。

## 4.4 算例分析

### 4.4.1 算例 1

为验证程序 3DF 计算稳定流时的正确性及可靠性，考察一各向同性且均匀介质的河间地块，长 100m，高 80m，宽 2m，无源汇，无垂向补给，地块饱和渗透系数  $k=5.076\text{m}\cdot\text{d}^{-1}$ ，上游河流稳定水位为 60m，下游水位为 20m。文献[94]中指出无入渗补给时河渠间地下水的潜水流方程为：



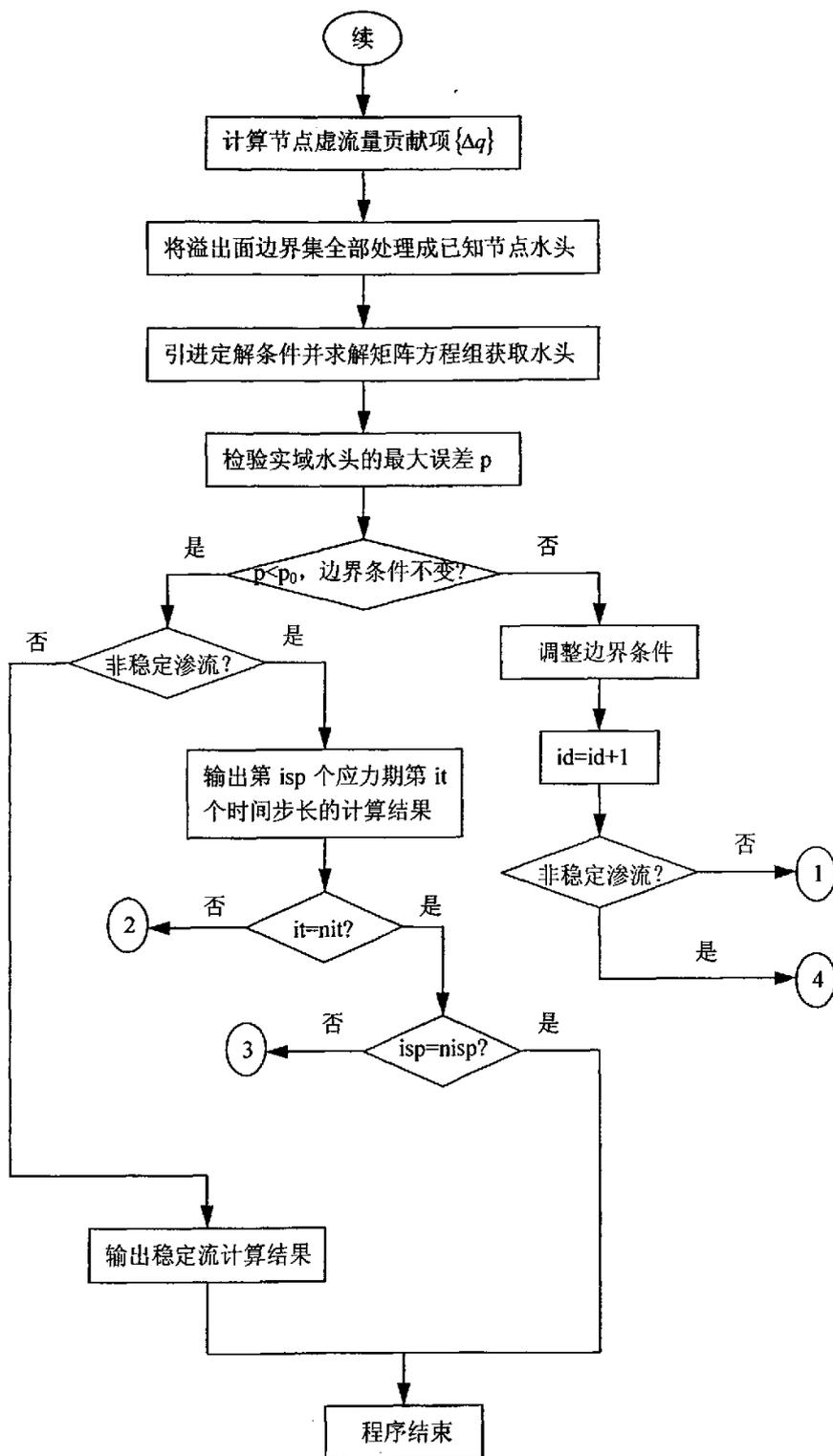


图 4-2-1 3DF 计算程序流程图

$$h^2 = h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_2^2}{l}x \quad (4-4-1)$$

式中： $h$ 为离左端起始断面 $x$ 处的潜水流厚度， $h_1$ 、 $h_2$ 分别为左右两侧河渠边潜水流厚度， $l$ 为两河渠间距离。

本算例中 $h_1 = 60m$ ， $h_2 = 20m$ ， $l = 100m$ ，代入上述方程可得该问题的自由面表达式为： $h^2 = 3600 - 32x$

将全域剖分为六面体单元，共714个节点，320个单元，网格剖分图如图4-4-1所示，采用上述理论和方法进行分析，控制误差 $p_0=0.05m$ ，经过8次迭代，计算得到自由面位置如图4-4-2所示，水头等值线见图4-4-3。

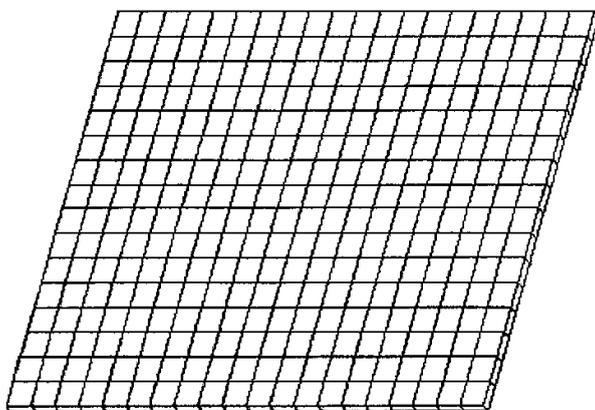


图 4-4-1 网格剖分图

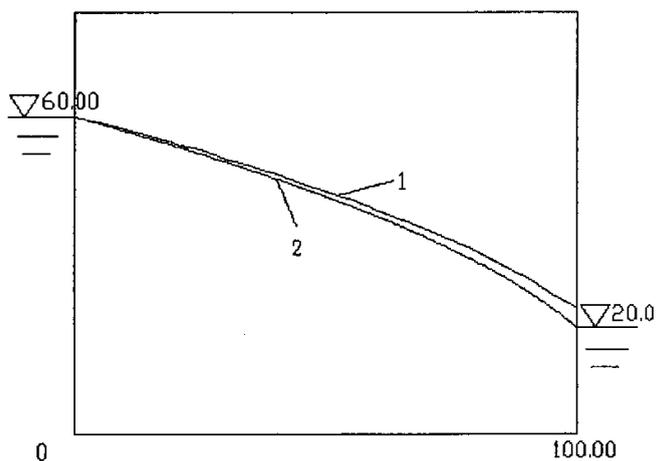


图 4-4-2 自由面位置图 (单位: m)

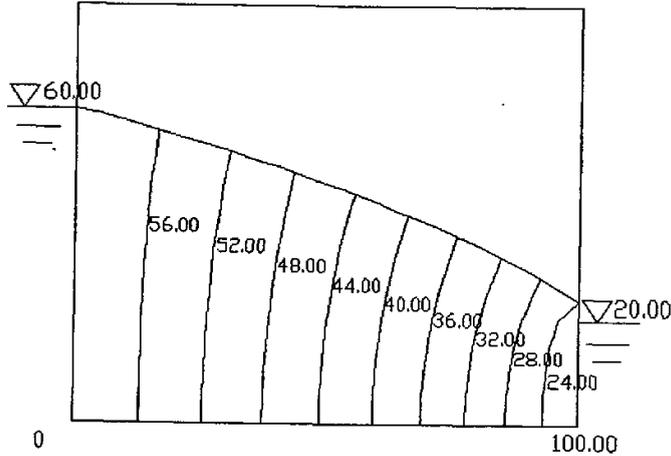


图 4-4-3 水位等直线图 (单位: m)

图 4-4-2 中, 1 为数值解, 2 为解析解, 从图中可以看出, 用程序 3DF 算出来的自由面的位置要比解析法计算出的偏高, 其原因主要是解析法所用公式是在 Dupuit 假设的基础上推倒出来的, 它忽略了渗流垂向分速度, 故解析法计算出的自由面曲线较实际自由面曲线偏低。虽然数值解与解析解有一定误差, 但总体效果是令人满意的。

#### 4.4.2 算例 2

为验证程序 3DF 计算非稳定流时的正确性及可靠性, 现以文献[95]介绍的赤井浩一等人做的砂槽试验进行比较。试验模型长 315cm, 宽 23cm, 高 33cm, 模型材料为平均粒径为 15mm 的均匀砂。饱和渗透系数  $k=0.33\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ , 贮水系数为 0, 孔隙率  $n=0.44$ 。初始条件采用上下游水位均为 10cm 的平衡态, 在时间 0s, 上游水位骤升至 30cm。

将计算域剖分为 360 个矩形单元, 806 个节点, 网格剖分图见图 4-4-4, 计算成果与实验结果如图 4-4-5 所示, 图 4-4-5 中自由面变化的时间点从下到上依次为 30s, 60s, 120s, 600s 和 4800s。从图中可以看出计算结果与试验成果比较吻合, 说明该程序是可行的, 对一般的工程问题具有足够高的精度。

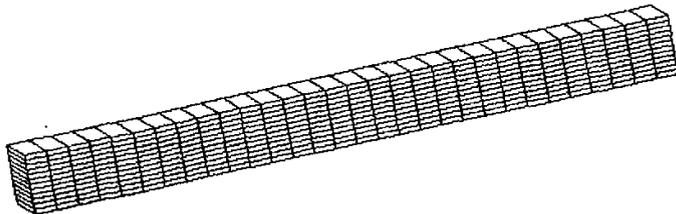


图 4-4-4 网格剖分图

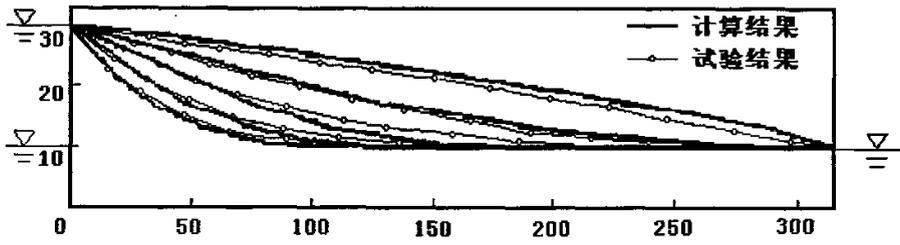


图 4-4-5 自由面数值解与砂槽模型试验结果比较图 (单位: cm)

## 4.5 本章小结

- (1) 讨论了非稳定渗流有限元分析中的几个问题的处理方法 (定水头边界、溢出面边界、井点、连续墙等)。
- (2) 编制了三维饱和非稳定无压渗流分析程序。
- (3) 通过两个算例对程序进行了验证, 计算结果表明所编程序是正确的。

## 第五章 工程应用

### 5.1 上海环球金融中心塔楼基坑降水三维渗流场数值模拟

#### 5.1.1 工程概况

上海环球金融中心位于陆家嘴金融贸易区，建筑总面积 335,420 平方米，塔楼地上 101 层，地面以上高度为 492m，地下 3 层，将成为目前世界上最高、最先进的智能型综合大楼之一。北侧为世纪大道，西侧为东泰路，东侧和南侧为规划绿化带，其外侧为银城东路和银城南路。

塔楼区为直径为 100m 的圆形基坑，面积约 7855m<sup>2</sup>，基坑围护采用厚 1m 的地下连续墙，墙顶标高为+1.65m，墙底标高为-30.00m，连续墙深度为 34.0m（场地绝对标高约为+4.00m）。

基坑大部分底标高约为-14.35m，开挖深度为 18.35m；电梯井、集水坑基坑最深处底标高为-21.89m，开挖深度约为 25.89m。

本基坑开挖面积大，深度深，浅部第③层灰色淤泥质粉质粘土夹砂质粉土，第④层淤泥质粘土局部夹少量薄层粉砂，该两层土结构较松软，砂性土夹层透水性较强，在动水条件下易产生流砂等不良地质现象；基坑开挖层以下埋藏有高水头的承压含水层，在场地自第⑥层以下由于缺失第⑧层和第⑩层，正处于上海市第 I、II、III 承压含水层（相当于第⑦、⑨、⑪层）的连通区，承压含水层厚度达 117m 左右，它对基坑底板的稳定性产生不利影响。为确保基坑开挖施工顺利进行，须采用深层井点降水。计算区土层主要分布情况<sup>[96]</sup>见表 5-1-1。

#### 5.1.2 研究区水文地质概念模型

##### 5.1.2.1 计算范围及边界条件的确定

基坑开挖往往是在一个小范围区域进行的，基坑降水过程中，地下水位降落漏斗随时间不断向外扩展，最终趋于稳定。为便于计算，最好使边界处于隔水边界或第一类边界。在本次研究中将研究区各个方向向外延伸至坑外 450m，将其按第一类边界条件处理。模型的上界取至近地表的弱透水粘土层；下界约为第 III 承压含水层底板，为隔水边界。

##### 5.1.2.2 目的层的确定及结构的概化

根据含水层的形成年代、埋藏深度、动态特征，结合地方划分习惯，研究区域至上而下可分为四个含水层（组），即：(1)浅部潜水含水层，主要补给来源为

表 5-1-1 场地区地质结构分布表

土层编号	土层名称	层厚(m)	层底标高(m)
① <sub>1</sub>	填土	0.7~2.00	3.20~1.70
① <sub>2</sub>	滨填土	0.8~2.20	2.30~0.60
②	粘土夹粉质粘土	0.6~2.20	1.37~0.05
③	淤泥质粉质粘土	3.1~5.20	-1.9~-4.1
④	淤泥质粘土	9.5~11.2	-12.6~-13.9
⑤	粉质粘土	5.7~9.40	-19.1~-23.1
⑥	粉质粘土	2.30~5.4	-23.9~-25.4
⑦ <sub>1</sub>	砂质粉土夹粉细砂	10.5~14.70	-34.95~-38.82
⑦ <sub>2</sub>	粉细砂	15.5~26.00	-52.53~-61.80
⑦ <sub>3</sub>	砂质粉土	4.50~14.00	-65.19~-67.27
⑨ <sub>1</sub>	粉砂夹粉质粘土	4.40~7.00	-70.56~-73.80
⑨ <sub>2</sub>	含砾中粗砂	11.8~17.10	-85.13~-88.77
⑩	粉细砂	51.6~56.30	-138.8~-145.07
⑫	粉质粘土	18.70	-163.77

大气降水,其地下水位埋深为 0.5~1.2m; (2)上更新统承压含水层,具有微承压一承压性,且被粘性土分隔为上下两层(上海地区称上层为第 I 承压含水层,下层为第 II 承压含水层); (3)中更新统承压含水层(上海地区称为第 III 承压含水层); (4)下更新统承压含水层(上海地区称上层为第 IV、下层为第 V 承压含水层)。其中第 I (相当于第⑦层)、第 II (相当于第⑨层)、第 III (相当于第⑩层)承压含水层分布在埋深约 150 米以上,承压含水层层顶标高为-23.88~-25.37m,厚度约为 117m。

在本次研究中,水文地质概念模型主要包括浅部弱含水层(标高<-24m)和第 I、第 II、第 III 承压含水层,各含水层概化为非均质各向异性。这三个承压含水层为上海市分布稳定、厚度大、水量丰富的含水层。第⑥层以下由于缺失第⑧层和第⑩层,使基坑开挖层以下高水头的承压含水层所在的第 I、第 II、第 III 承压含水层为相互补给的连通区(含水层仅有颗粒粗细的变化和局部含粘较多之别),可看作一个巨厚含水层。

### 5.1.2.3 基坑降水的渗流特征

由于基坑将采用非完整井坑外降水且连续墙埋深 30m 而深入承压含水层,因此其处地下水渗流情况很复杂。各承压含水层之间相互连通有直接的水力联系而成为巨厚的含水层,使深基坑的连续墙难以到达含水层底板。降水时,上部地下

水在连续墙附近将沿垂向产生绕流,下部含水层由于连续墙未到达含水层底板而连续相通,其流动不受影响。坑内外水位落差不均衡,坑内水位下降较快,坑外水位下降较慢,离基坑较远处水位落差较大,远离基坑的区域水位降落不明显。因此将出现一个以基坑为中心的水位降落漏斗。综合来看,基坑研究区域内地下水呈现明显的非稳定三维流态。

### 5.1.3 基坑降水数学模型的建立

#### 5.1.3.1 数学模型

根据渗流的连续性方程和著名的达西定律,对研究区域建立了与地下水水文地质概念模型相对应的三维非稳定流数学模型<sup>[97-98]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots(x, y, z) \in \Omega \\ h(x, y, z, t) \Big|_{\Gamma_1} = h_1(x, y, z, t) \dots\dots\dots(x, y, z) \in \Gamma_1 \\ h(x, y, z, t) = z(x, y, t) \dots\dots\dots(x, y, z) \in \Gamma_3 \\ k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} n_z \\ h(x, y, z, t) \Big|_{t=t_0} = h_0(x, y, z, t_0) \dots\dots\dots(x, y, z) \in \Omega \end{cases} \quad (5-1-1)$$

式中:  $k_{xx}, k_{yy}, k_{zz}$  分别为沿  $x, y, z$  坐标轴方向的渗透系数,  $m \cdot d^{-1}$ ;  $h$  为点  $(x, y, z)$  在  $t$  时刻的水头值,  $m$ ;  $h_1(x, y, z, t)$  为点  $(x, y, z)$  在  $t$  时刻的边界已知水位,  $m$ ;  $\mu_s$  为点  $(x, y, z)$  处的储水率,  $m^{-1}$ ;  $\mu$  为点  $(x, y, z)$  处的重力给水度;  $n_z$  为自由面外法线方向向量  $n = \{n_x, n_y, n_z\}$  的第三个分量;  $W$  为源汇项,  $d^{-1}$ ;  $t$  为时间,  $d$ ;  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_3$  分别为的第一类边界和自由面边界;  $h_0(x, y, z, t_0)$  为点  $(x, y, z)$  处的初始水位,  $m$ ;  $\Omega$  为计算域。

#### 5.1.3.2 空间离散

取基坑中心海平面为坐标原点,根据研究区水文地质特性、基坑维护连续墙埋藏深度及抽水井滤水管设置的位置,垂向上将整个第四纪松散沉积层从上到下分为 11 层(见图 5-1-1),水平方向剖分由基坑中心向外逐渐变疏,有限元网格共剖分了 10764 个节点,9548 个单元,三维网格剖分图见图 5-1-3,基坑及其周围局部放大网格图见图 5-1-4。

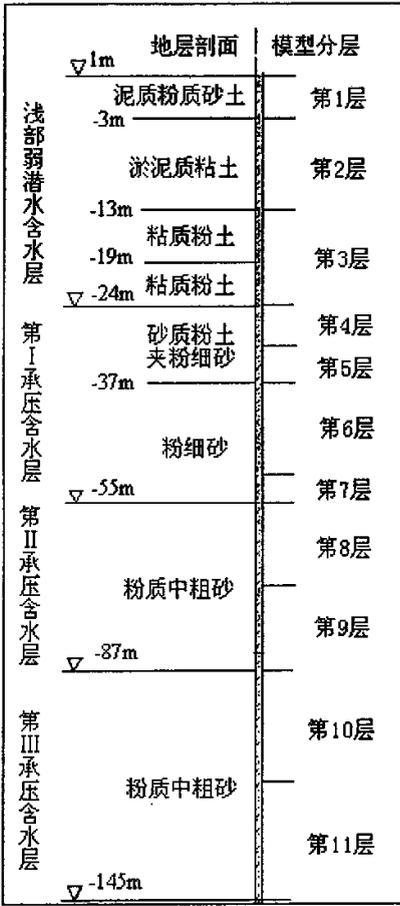


图 5-1-1 基坑地层剖面与模型垂向分层关系图

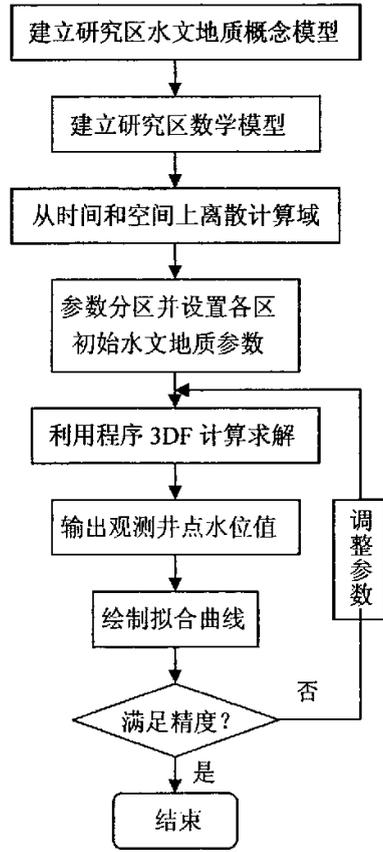


图 5-1-2 调参过程流程图

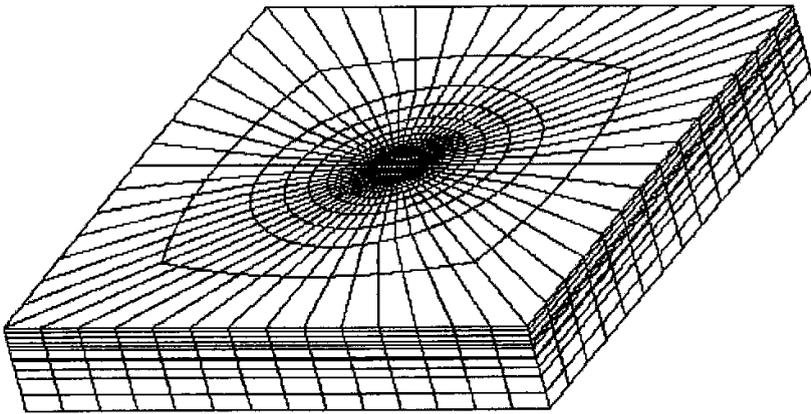


图 5-1-3 计算模型有限单元网格图

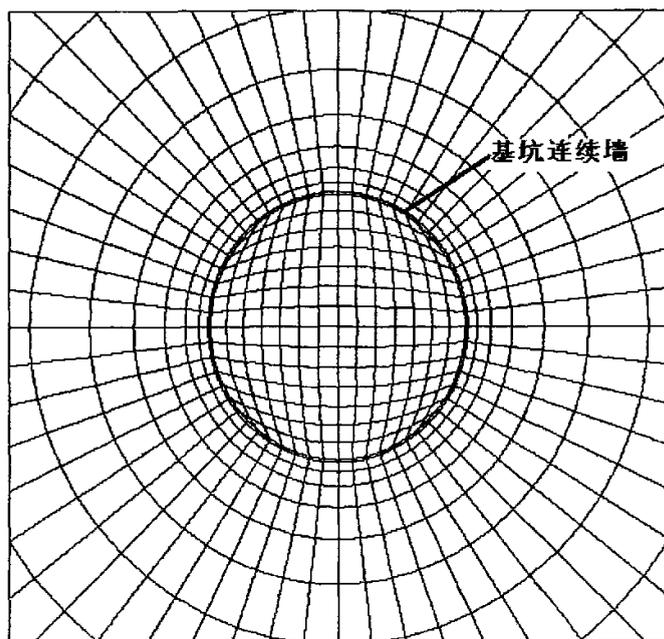


图 5-1-4 基坑及其周围局部放大网格图

#### 5.1.4 模型的识别与验证

在 2004 年 6 月 30 日到 2004 年 7 月 30 日为期一个月的抽水试验观测数据的基础上,对上海环球金融中心塔楼深基坑降水过程中的水文地质参数进行反演分析。水位观测资料来自六口观测井,观 1、观 2、降 15 和降 16 观测井布置在坑内;观 3、观 4 观测井布置在坑外,见图 5-1-5。根据各时段开启的抽水井不同及抽水量不同,将整个过程分为 10 个应力期,每个应力期又分为不同的时间步长。

先根据所提供的地质、水文地质综合资料对各层进行初步的参数分区,并选用野外试验所得参数值作为初值代入模型中,计算出各观测孔在各时段的水头,并将该计算水头与实测水头进行比较,其评价函数<sup>[99]</sup>的表达式为:

$$E = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N W_j (h_{ij}^c - h_{ij}^o)^2 \quad (5-1-2)$$

式中:  $M$ 、 $N$  分别表示拟合的时段总数和观测孔总数;  $h_{ij}^c$ 、 $h_{ij}^o$  分别表示  $i$  时刻末  $j$  号观测孔的计算水头与实测水头;  $W_j$  为各观测孔的权函数。

通过对观 1、观 2、观 3、观 4、降 15、降 16 观测孔进行水位拟合,获得了各含水层的水文地质参数(表 5-1-2),其中第 4 层和第 5 层具有相同的参数分

区（见图 5-1-6），第 8 层和第 9 层共用一个参数分区，第 10 层和第 11 层共用一个参数分区，其它层每一层为一个参数分区，地下水拟合曲线见图 5-1-7。从拟合结果来看，计算值和观测值的总体变化趋势一致，其参数可用于模型预报。整个调参过程见图 5-1-2。

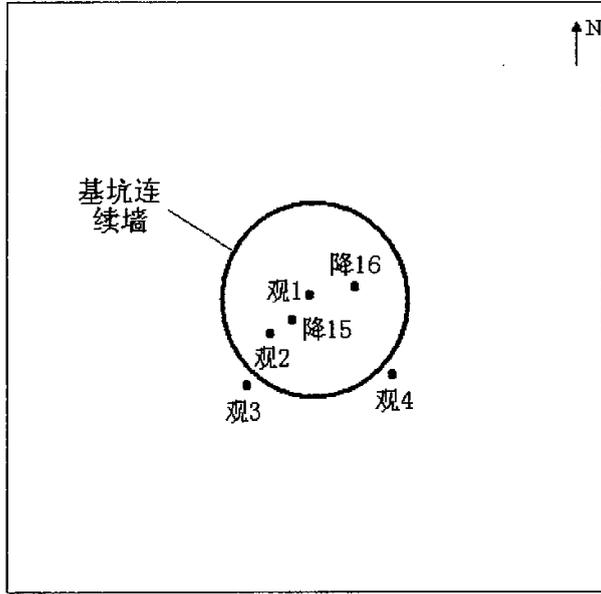


图 5-1-5 观测井点分布示意图

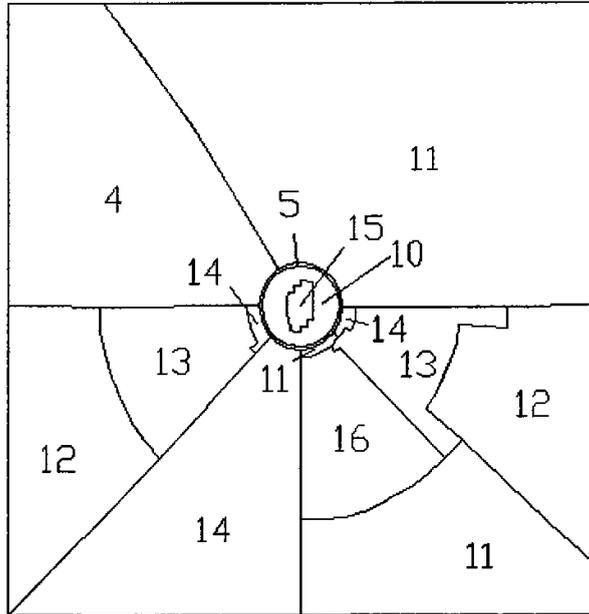


图 5-1-6 水文地质参数分区图（第 4、5 层）

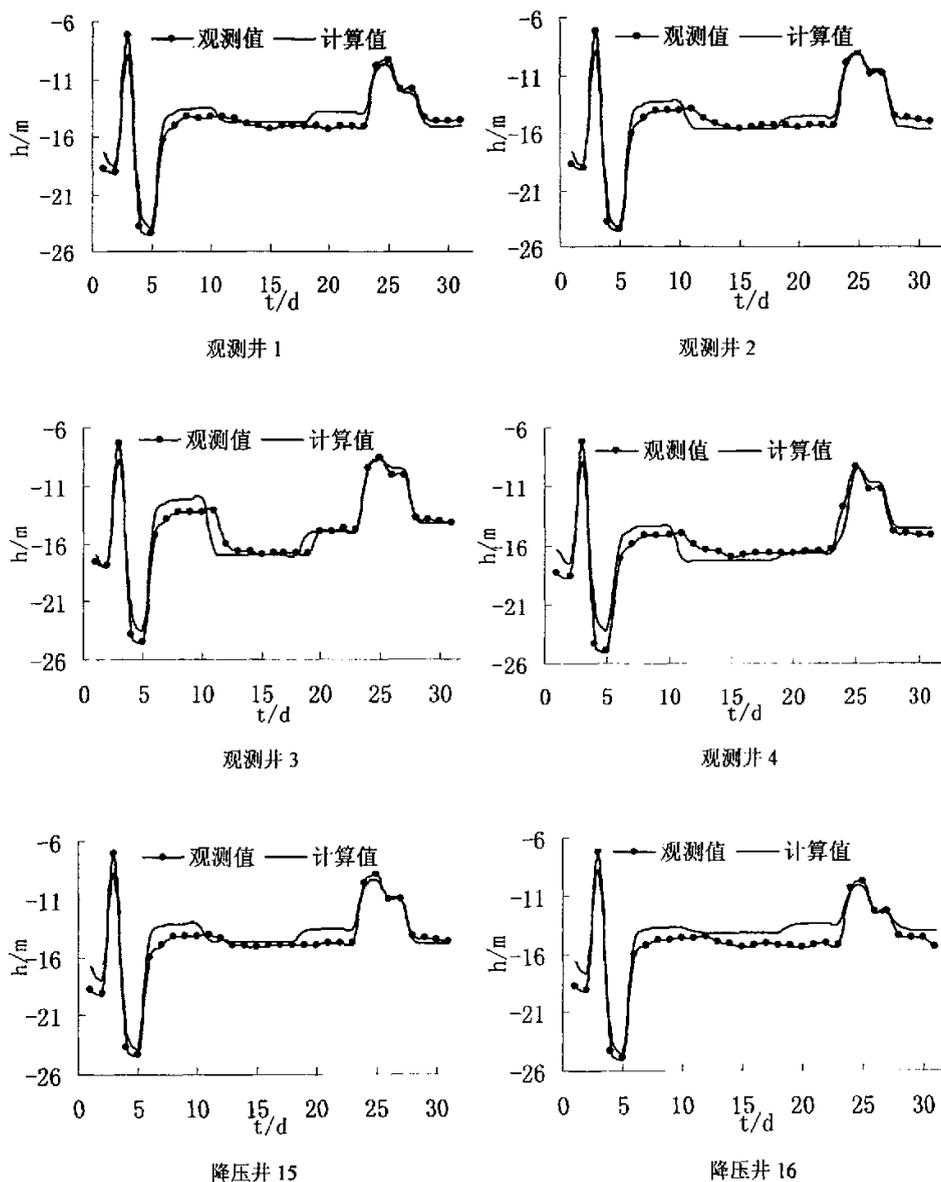


图 5-1-7 水位观测点水位拟合图

表 5-1-2 各层水文地质参数分区表

分区	$k_{xx}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$k_{yy}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$k_{zz}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$\mu_s$ (m <sup>-1</sup> )	$\mu$
1 (第 1 层)	0.001	0.001	0.0001	1.00E-10	5.00E-06
2 (第 2 层)	0.001	0.001	0.0001	1.00E-10	5.00E-06
3 (第 3 层)	0.002	0.002	0.0002	2.00E-10	1.00E-05

续

表 5-1-2 各层水文地质参数分区表

分区	$k_{xx}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$k_{yy}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$k_{zz}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$\mu_s$ (m <sup>-1</sup> )	$\mu$
4 (位于第 4、5 层)	3.8	3.8	0.38	0.00006	0.15
5 (连续墙)	1.00E-08	1.00E-08	1.00E-09	1.00E-20	1.00E-16
6 (第 6 层)	4.3	4.3	0.41	0.00006	0.16
7 (第 7 层)	4.3	4.3	0.41	0.00006	0.16
8 (第 8、9 层)	7.8	7.8	0.42	0.00004	0.2
9 (第 10、11 层)	7.8	7.8	0.42	0.00004	0.2
10 (位于第 4、5 层)	2.3	2.3	0.23	0.00006	0.15
11 (位于第 4、5 层)	3.9	3.9	0.39	0.00006	0.15
12 (位于第 4、5 层)	3.5	3.5	0.35	0.00006	0.15
13 (位于第 4、5 层)	1.5	1.5	0.15	0.00006	0.15
14 (位于第 4、5 层)	3.1	3.1	0.31	0.00006	0.15
15 (位于第 4、5 层)	1.5	1.5	0.15	0.00006	0.15
16 (位于第 4、5 层)	2.2	2.2	0.22	0.00006	0.15

### 5.1.5 模型预测及优化设计

利用上述模型校正结果, 根据施工要求降水 30 天后满足承压水水位降至埋深 26m (标高-22m), 且上海地区对单井抽水量不高于 1500m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup> 的限制、基坑水位降深大及考虑到降水工程的经济性, 做到以尽量少的工程费用实现降水的目的等原则下, 进行了降水优化设计, 设计过程中, 选取 10 个设计方案并利用已识别验证过的地下水渗流计算机数值模型 (井位沿基坑周围均匀分布) 预测基坑的水头, 通过模型抽水井反演调整, 各方案所需单井抽水量如下: 5 口井方案单井抽水量为 2200 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、6 口井方案单井抽水量为 1900 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、7 口井方案单井抽水量为 1640 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、8 口井方案单井抽水量为 1420 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、9 口井方案单井抽水量为 1240 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、10 口井方案单井抽水量为 1140 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、11 口井方案单井抽水量为 1030 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、12 口井方案单井抽水量为 960 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、13 口井方案单井抽水量为 870 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>、14 口井方案单井抽水量为 790 m<sup>3</sup>·d<sup>-1</sup>。表 5-1-3 是各方案的相关设计参数及坑内水位标高的最低值。通过表 5-1-3 比较后, 发现采用 8 口井降水最为合适, 基坑中心点地下水水位降至-22.6m, 井点分布图见图 5-1-8, 图 5-1-9 给出了 8 口井方案下, 降水 30 天后剖面水位等值线图。图 5-1-10 分别给出了 8 口井方案下, 降水 30 天后第 4 层 (第一承压含水层上部)、第 6 层 (降水井点工作段) 的平面水位等值线图。

表 5-1-3 各方案的相关设计参数及坑内水位标高的最低值

方案	井个数	单井抽水量 ( $\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ )	预测水位标高最低值 (m)	一天总抽水量 ( $\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ )
5 口井	5	2200	-22.1	11000
6 口井	6	1900	-22.7	11400
7 口井	7	1640	-22.6	11480
8 口井	8	1420	-22.6	11360
9 口井	9	1240	-22.2	11160
10 口井	10	1140	-22.5	11400
11 口井	11	1030	-22.4	11330
12 口井	12	960	-22.6	11520
13 口井	13	870	-22.3	11310
14 口井	14	790	-22.1	11060

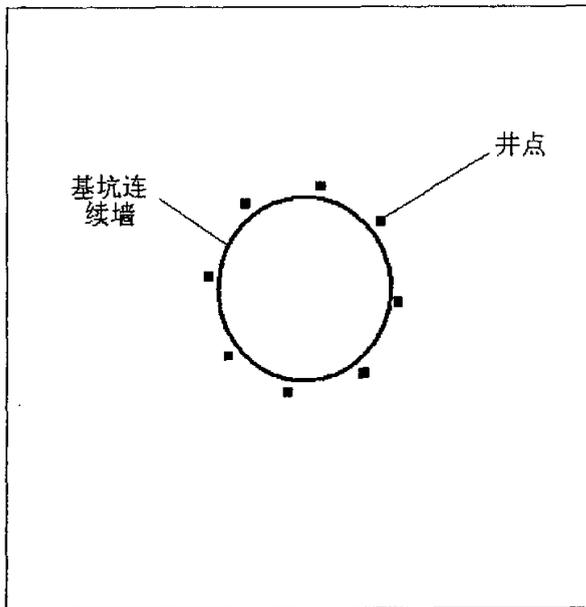


图 5-1-8 优化方案井点分布示意图

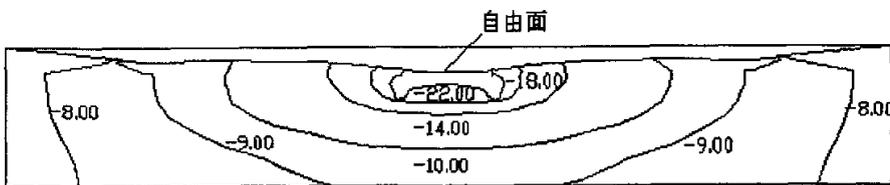
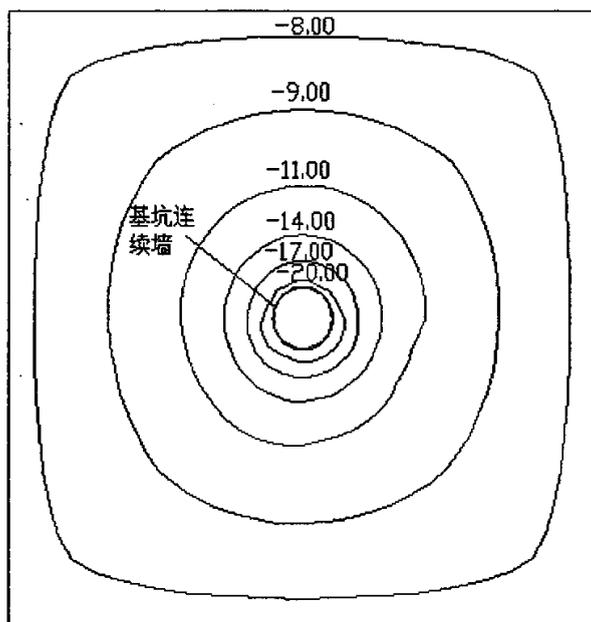
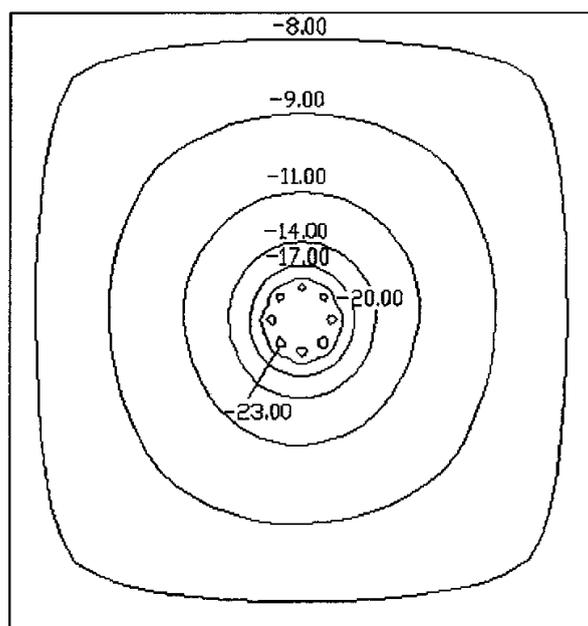


图 5-1-9 降水 30d 后基坑中心剖面水位等值线图 ( $y=0$ , 单位: m)



第4层



第6层

图 5-1-10 降水 30 天后平面水位等值线图 (单位: m)

## 5.2 上海地铁4号线董家渡隧道修复基坑降水三维渗流场数值模拟

### 5.2.1 工程概况

本基坑为上海轨道交通四号线董家渡段隧道修复基坑，位于上海市浦西中山南路以东，董家渡以南。修复工程东侧为黄浦江，南侧为22层临江花苑大厦。长双隧道被破坏处用地下连续墙围护，开挖深度约39.8m，连续墙深65m，厚度1.2m，基坑宽19-23m，计2290.7平方米，分三个基坑开挖，如图5-2-1。

本基坑开挖深度深，基坑开挖层以下埋藏有高水头的承压含水层，在场地自第⑥层以下由于缺失第⑧层和第⑩层，正处于上海市第I、第II、第III承压含水层（相当于第⑦、⑨、⑪层）的连通区，含水层顶标高为-28.45m，底板标高为-144.45m，承压含水层厚度达116m左右，静水位标高约为-5m，对基坑底板的稳定性极为不利。为确保基坑开挖施工顺利进行，须采用深层井点降水。

场地地层自上而下情况如下<sup>[100-101]</sup>：

0.00~6.20m（标高3.35~-2.85m）厚6.20m，第①层杂填土。

6.20~19.30m（标高-2.85~-15.95m）厚13.10m，第②层粘质粉土（江滩土）。

19.30~27.10m（标高-15.95~-23.75m）厚7.80m，第⑤层粘土。

27.10~31.80m（标高-23.75~-28.45m）厚4.70m，第⑥层粉质粘土。

31.80~41.50m（标高-28.45~-38.15m）厚9.70m，第⑦<sub>1</sub>层砂质粉土。

41.50~64.20m（标高-38.15~-60.85m）厚22.70m，第⑦<sub>2</sub>层粉细砂。

64.20~未钻穿（标高-60.85m以下）厚度超过12.70m，第⑨层粉细砂。

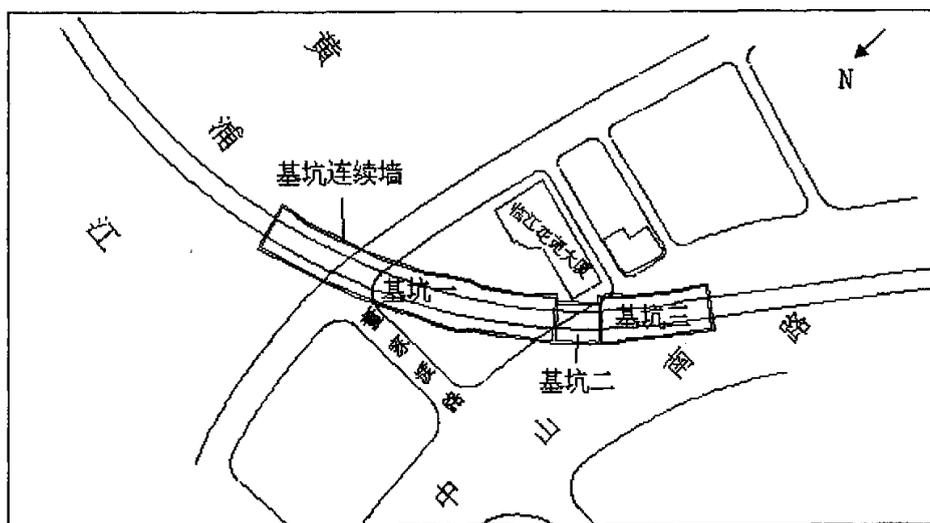


图 5-2-1 基坑平面分布图

## 5.2.2 研究区水文地质概念模型

本次降水的目的层为上更新统第 I、第 II 承压含水层、中更新统第 III 承压含水层。考虑到降水过程中,上覆弱潜水含水层将与下伏承压含水层发生水力联系,因此,将上覆弱潜水含水层和下伏承压含水层一起并入模型参与计算,并将其概化为三维空间上的非均质各向异性。为了克服由于边界的不确定性给计算结果带来的随意性,本着定水头边界应远离源、汇项的原则,通过试算,本次计算以整个基坑的东、西、南、北最远边界点为起点,各向外扩展约 400m,即实际计算平面尺寸为  $1060 \times 870 \text{m}^2$ ,四周均按定水头边界处理。地下水在疏降过程中,坑内地下水水位大幅度下降,坑内外巨大的水头差使基坑外的地下水沿着基坑周围的围护连续墙绕流进入基坑,地下水流态为三维非稳定流。基坑内地下水的疏干降压并是唯一的源、汇项。

## 5.2.3 基坑降水数学模型的建立

### 5.2.3.1 数学模型

根据渗流的连续性方程和著名的达西定律,对研究区域建立了与地下水水文地质概念模型相对应的三维非稳定流数学模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} & (x, y, z) \in \Omega \\ h(x, y, z, t) \Big|_{\Gamma_1} = h_1(x, y, z, t) & (x, y, z) \in \Gamma_1 \\ h(x, y, z, t) = z(x, y, t) & (x, y, z) \in \Gamma_3 \\ k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} n_z \\ h(x, y, z, t) \Big|_{t=t_0} = h_0(x, y, z, t_0) & (x, y, z) \in \Omega \end{cases} \quad (5-2-1)$$

式中:  $k_{xx}, k_{yy}, k_{zz}$  分别为沿  $x, y, z$  坐标轴方向的渗透系数,  $\text{m} \cdot \text{d}^{-1}$ ;  $h$  为点  $(x, y, z)$  在  $t$  时刻的水头值,  $\text{m}$ ;  $h_1(x, y, z, t)$  为点  $(x, y, z)$  在  $t$  时刻的边界已知水位,  $\text{m}$ ;  $\mu_s$  为点  $(x, y, z)$  处的储水率,  $\text{m}^{-1}$ ;  $\mu$  为点  $(x, y, z)$  处的重力给水度;  $n_z$  为自由面外法线方向向量  $n = \{n_x, n_y, n_z\}$  的第三个分量;  $W$  为源汇项,  $\text{d}^{-1}$ ;  $t$  为时间,  $\text{d}$ ;  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_3$  分别为的第一类边界和自由面边界;  $h_0(x, y, z, t_0)$  为点  $(x, y, z)$  处的初始水位,  $\text{m}$ ;  $\Omega$  为计算域。

### 5.2.3.2 空间离散

取基坑中心海平面为坐标原点, 根据研究区水文地质特性、基坑维护连续墙埋藏深度及抽水井滤水管设置的位置, 垂向上将整个第四纪松散沉积层从上到下分为 10 层, 由于抽水井滤水管长 14m, 故将其分为两层, 模型中为第 5、第 6 层, 详见图 5-2-4。水平方向剖分由基坑中心向外逐渐变疏, 将连续墙剖分成若干个单元格, 赋予小渗透系数来处理。有限元网格共剖分了 16280 个节点, 13980 个单元, 三维网格剖分图见图 5-2-2, 基坑及其周围局部放大网格图见图 5-2-3。

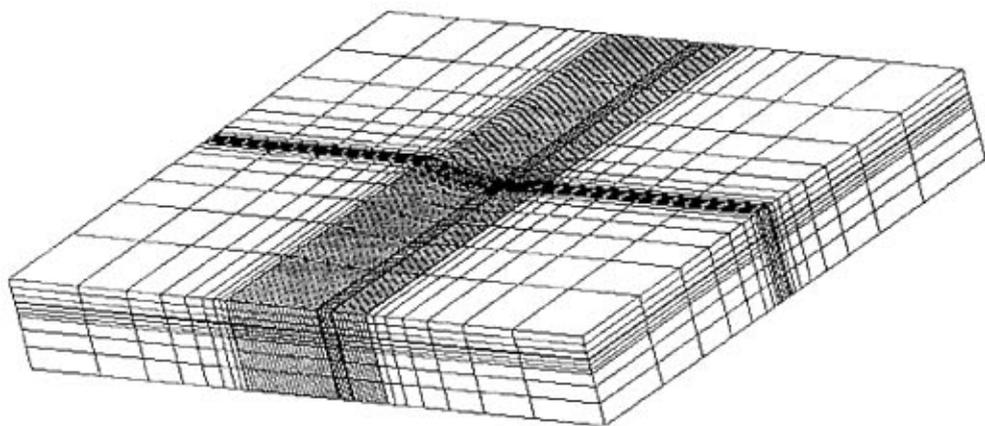


图 5-2-2 计算模型有限单元网格图

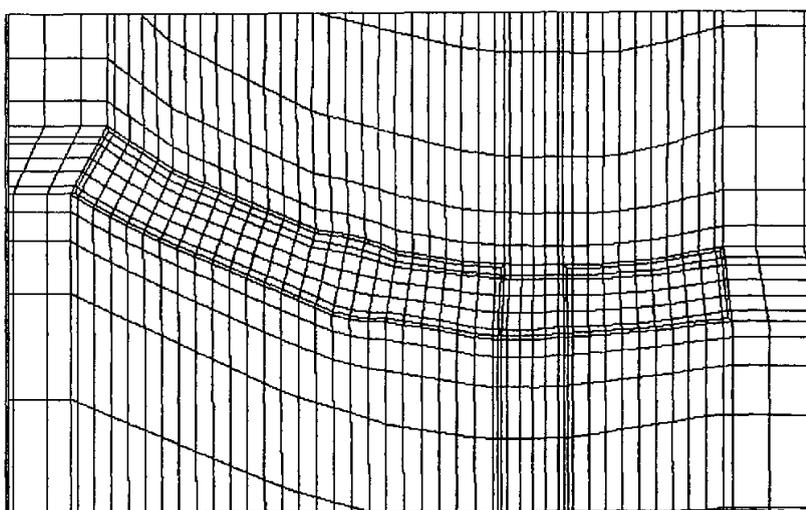


图 5-2-3 基坑及其周围局部放大网格图

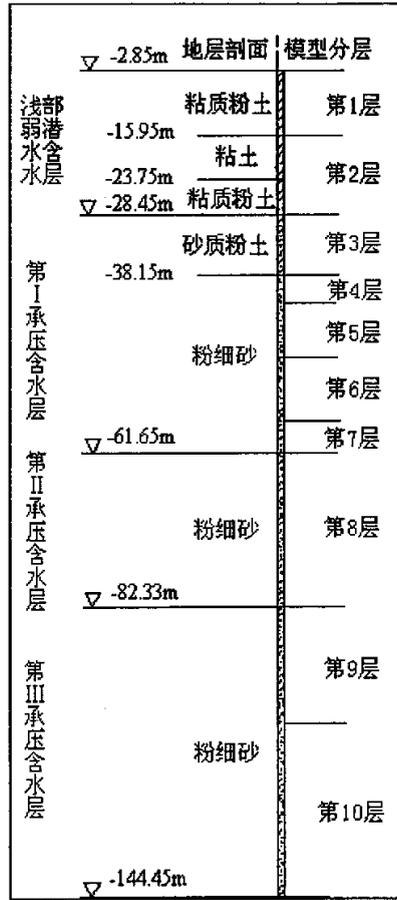


图 5-2-4 基坑地层剖面与模型垂向分层关系图

#### 5.2.4 模型的识别、验证

上述描述地下水系统基坑降水数学模型必须经识别、验证后才能用于模型预测，识别的参数包括渗透系数 $k_x, k_y, k_z$ 、储水率 $\mu_s$ 和给水度 $\mu$ 。选取 2006 年 1 月 24 日 21:15 至 2006 年 1 月 29 日 19:38 W23、W24、W25、W26、W27、W28 六个抽水井的抽水水位下降期作为模型识别的时段，选取 2006 年 1 月 29 日 19:38 至 2006 年 2 月 1 日 14:06 抽水停止时的水位恢复期作为模型验证的时段，整个过程分为 5 个应力期，每个应力期又分为若干个时间步长。除模型第 1、2、10 层，其他层均有水位观测井用来进行水位拟合，水位观测孔 Q11、Q9、Q7、Q5、Q3、Q1 过滤器分别位于模型第 3、4、5(6)、7、8、9 层，基坑内水位观测孔 W17、W19、W20、W22、B5、B6 过滤器位于模型第 5(6)层（平面示意图见图 5-2-5）。在模型识别过程中，水位观测井基本控制降水目的层，因此，水位观测孔可作为

模型识别的依据。

通过对上游 12 个观测孔进行水位拟合, 获得了各含水层的水文地质参数(表 5-2-1), 其中抽水井滤管所在位置(第 5 层、第 6 层)具有相同的参数分区, 分为 7 个参数分区, 第 4 层、第 8 层各分为两个参数分区, 第 7 层分为四个参数分区(详见图 5-2-6 至图 5-2-9, 仅在第 7 层标出了基坑连续墙参数分区号), 其它层每一层为一个参数分区。地下水水位拟合曲线见图 5-2-10。从拟合结果来看, 计算值和观测值的总体变化趋势一致, 其参数可用于模型预报。

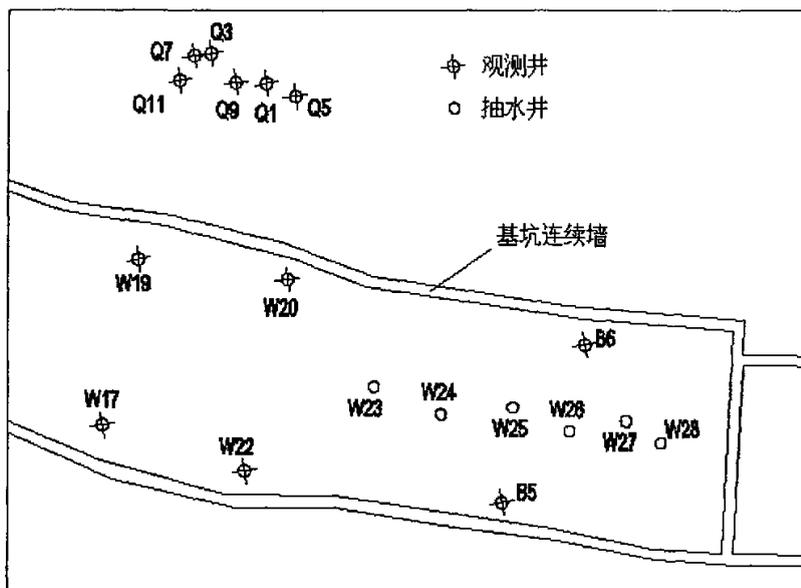


图 5-2-5 调参模型井点分布示意图

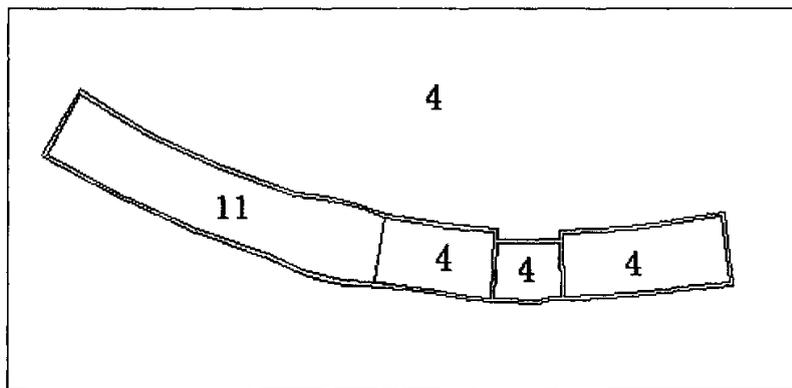


图 5-2-6 模型第 4 层水文地质参数分区图

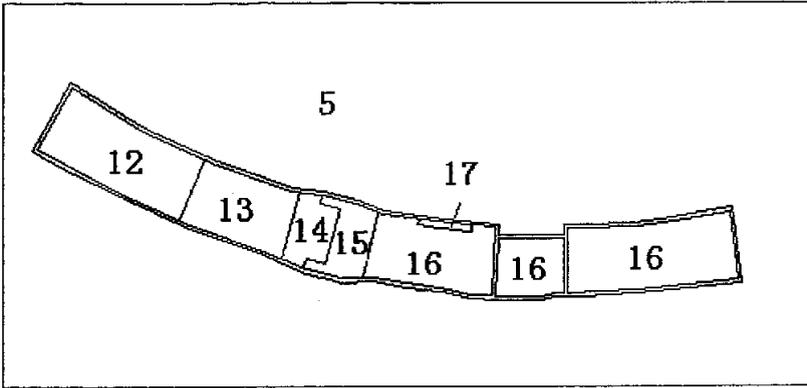


图 5-2-7 模型第 5 (6) 层水文地质参数分区图

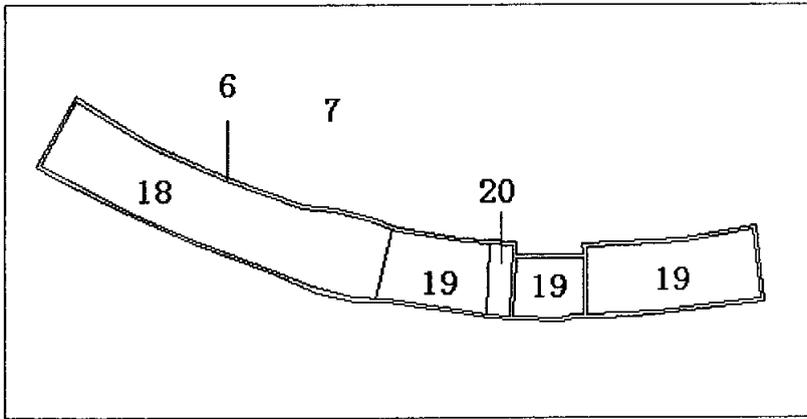


图 5-2-8 模型第 7 层水文地质参数分区图

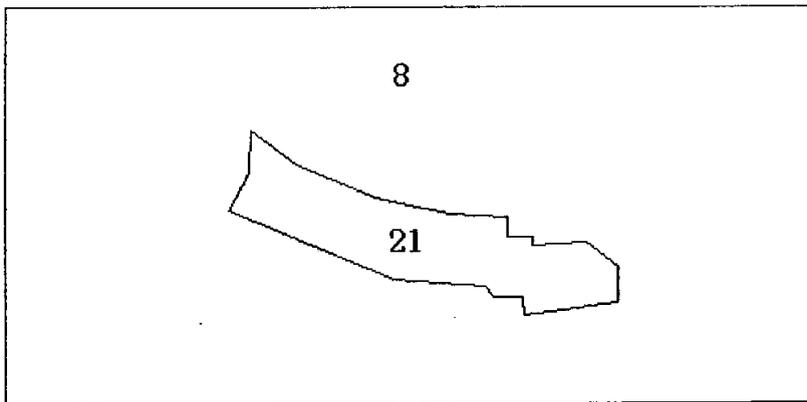
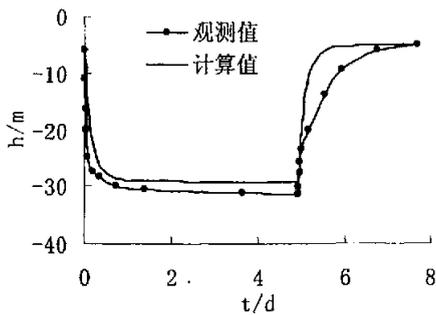


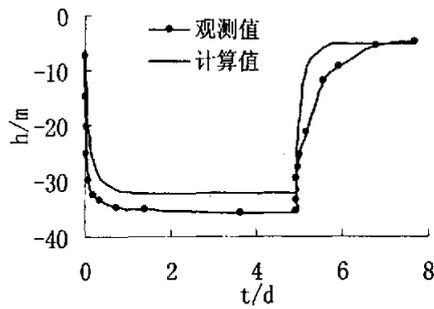
图 5-2-9 模型第 8 层水文地质参数分区图

表 5-2-1 模型各层水文地质参数分区表

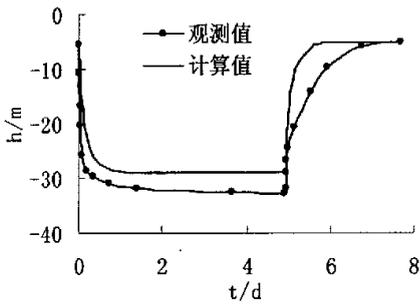
层号	分区号	$k_{xx}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$k_{yy}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$k_{zz}$ (m·d <sup>-1</sup> )	$\mu_s$ (m <sup>-1</sup> )	$\mu$
1	1	1.00E-05	1.00E-05	1.00E-06	1.00E-09	0.0005
2	2	1.00E-05	1.00E-05	1.00E-06	1.00E-09	0.0005
3	3	6	6	0.6	3.00E-06	0.15
4	4	8	8	0.8	5.00E-06	0.15
	11	7	7	0.7	8.00E-05	0.15
5 (6)	5	9	9	0.9	3.00E-04	0.15
	12	3	3	0.3	7.00E-05	0.15
	13	1	1	0.06	9.00E-05	0.15
	14	1.5	1.5	0.08	1.00E-04	0.15
	15	2	2	0.07	1.50E-04	0.15
	16	11	11	1.1	1.00E-04	0.15
	17	20	20	2	7.00E-04	0.15
7	7	7	7	0.7	5.00E-06	0.15
	18	1	1	0.06	1.00E-04	0.15
	19	9	9	0.9	2.00E-04	0.15
	20	15	15	1.5	2.00E-04	0.15
8	8	9	9	0.9	8.00E-05	0.15
	21	6	6	0.6	8.00E-05	0.15
9	9	7	7	2	5.00E-06	0.15
10	10	10	10	0.8	8.00E-06	0.15
基坑连续墙 (1-7)	6	1.00E-10	1.00E-10	1.00E-11	1.00E-15	1.00E-11



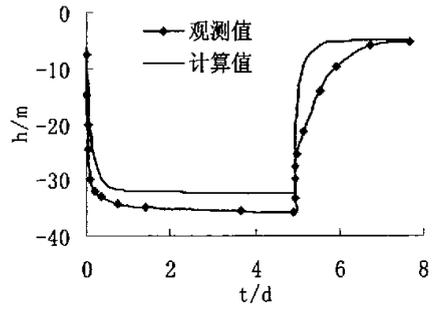
观测井 W17



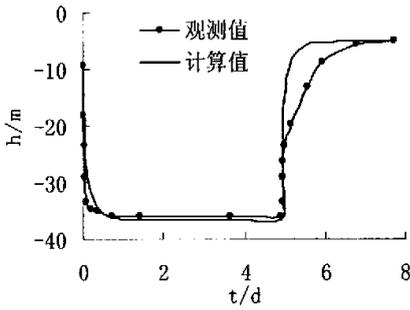
观测井 W22



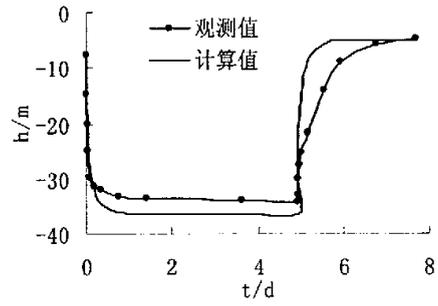
观测井 W19



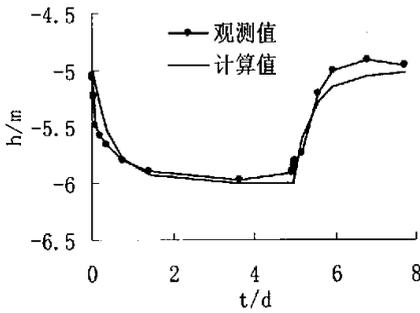
观测井 W20



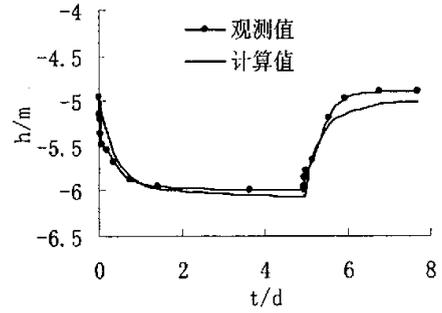
观测井 B5



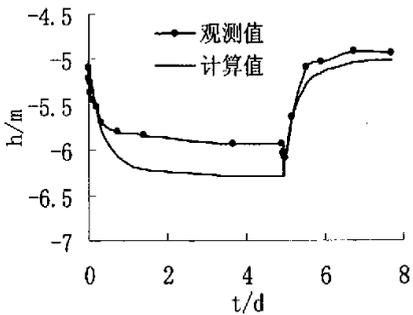
观测井 B6



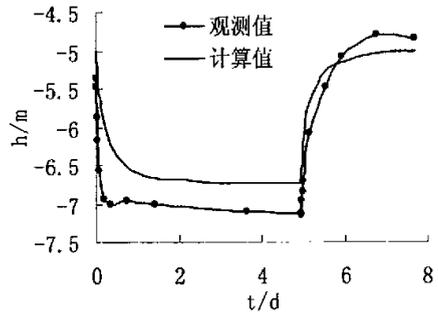
观测井 Q11



观测井 Q9



观测井 Q7



观测井 Q5

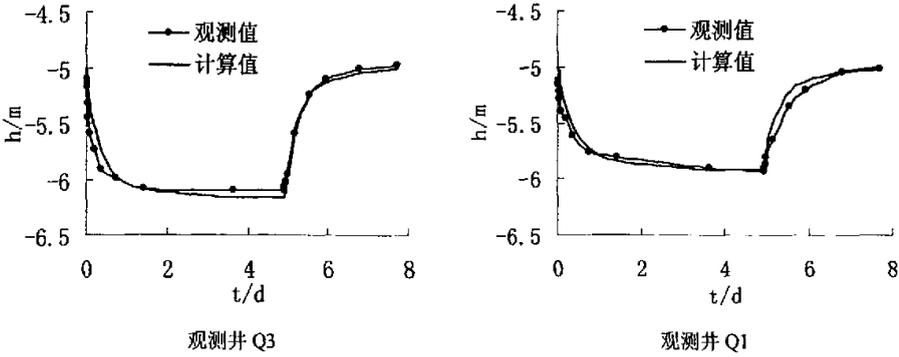


图 5-2-10 水位观测点水位拟合图

### 5.2.5 模型预测及优化设计

本次降水历时 30 天, 由于降水深度深(埋深 40m 以下), 连续墙埋深为 65m, 若采用坑外降水, 过滤器需设在第 9 层, 抽水量很大, 对环境影响较大, 因此采用坑内降水, 将过滤器设在埋深 45~60m 之间, 离连续墙底部有 5m 厚相对弱的透水层作为底, 四周有连续墙挡水, 可以用较小的水量达到将基坑水位降到要求的深度的目的, 而坑外承压水水位下降较小, 相应对环境影响也降到最小的程度。利用上述模型校正结果, 对上海地铁四号线基坑降水进行了优化设计。经模型运行发现, 共需 25 口井, 其中基坑一布置 13 口井, 总抽水量为  $2755 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ ; 基坑二布置 3 口井, 总抽水量为  $900 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ ; 基坑三布置 9 口井, 总抽水量为  $2700 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ , 各井单井抽水量见表 5-2-2, 降水优化方案下井点分布图见图 5-2-11。降水 30 天后基坑中水位降至 -38.8m (埋深 42.45m) 以下, 满足降水要求。图 5-2-12 给出了降水 30 天后埋深为 40m 的平面水位等值线图。图 5-2-13 分别给出了降水 30 天后基坑一、基坑二、基坑三中任意剖面水位等值线图。

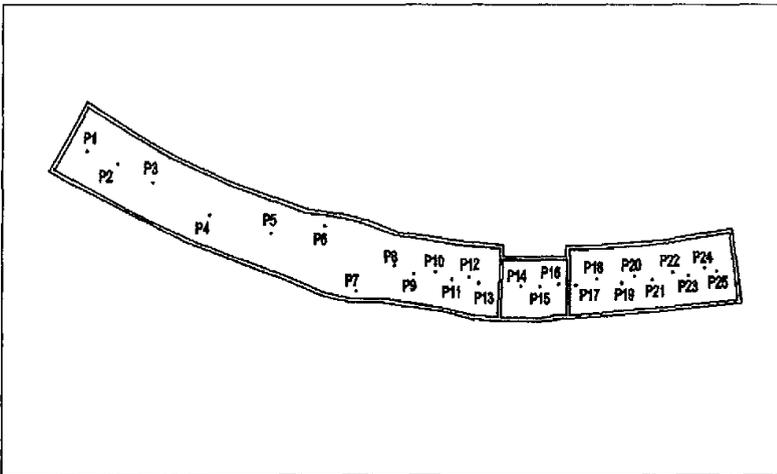
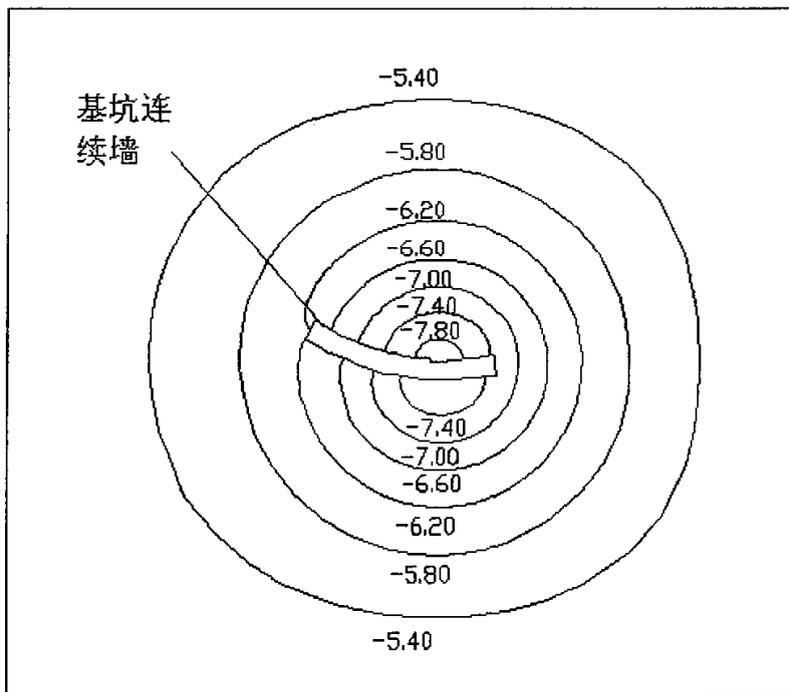


图 5-2-11 降水优化方案下井点分布图

表 5-2-2 降水优化方案下各井抽水量

抽水井点号	单井抽水量 ( $\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ )	抽水井点号	单井抽水量 ( $\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ )
P1	-150	P14	-300
P2	-150	P15	-300
P3	-150	P16	-300
P4	-100	P17	-300
P5	-90	P18	-300
P6	-90	P19	-300
P7	-105	P20	-300
P8	-320	P21	-300
P9	-320	P22	-300
P10	-310	P23	-300
P11	-330	P24	-300
P12	-310	P25	-300
P13	-330		



第 3 层

图 5-2-12 降水 30 天后平面水位等值线图 (单位: m)

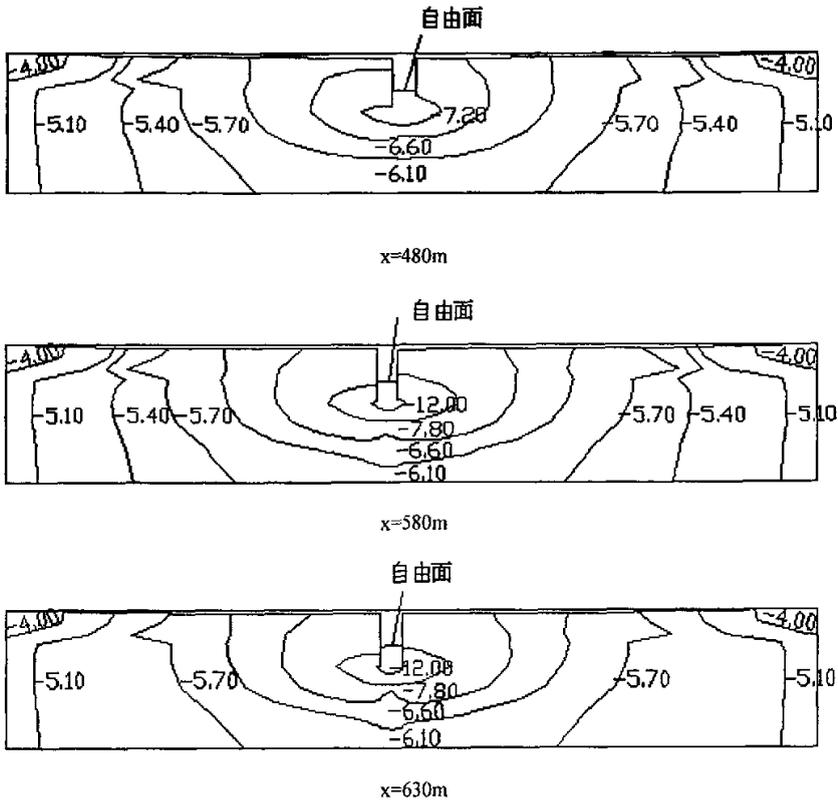


图 5-2-13 降水 30d 后基坑剖面水位等值线图(单位: m)

### 5.3 本章小结

本章以上述理论为基础, 将程序 3DF 分别应用于两个工程实例中。

(1) 上海环球金融中心塔楼基坑降水, 模拟了在多层含水层复合存在、含水层最深底板埋深达 149m、基坑周围挡水连续墙埋深达 34m、抽水井埋深达 55m、抽水井过滤器埋深为 34 至 55m, 基坑内地下水位降至埋深达 26m 的情况下的地下水复杂流动状态, 得出了 8 口抽水井优化降水方案。

(2) 上海地铁 4 号线董家渡隧道修复基坑降水, 模拟了在多层含水层复合存在、含水层最深底板埋深达 144.45m、基坑周围挡水连续墙埋深达 65m、抽水井埋深达 59m、抽水井过滤器埋深为 44 至 59m, 基坑内地下水位降至埋深达 42.45m 的情况下的地下水复杂流动状态, 确定出了最优降水方案。

## 第六章 结论与展望

### 6.1 结论

本文在查阅大量国内外有关文献,总结和分析前人研究成果的基础上,针对复杂巨厚第四纪松散沉积层中的深基坑降水,对非稳定无压渗流问题进行了比较深入的研究,取得了一些有益的成果。

(1) 在有自由面渗流分析的节点虚流量法的基础上,将连续的区域识别函数应用于自由面通过的单元,使得解的稳定性更好。

(2) 对于饱和非稳定渗流中自由面边界积分项的计算方法进行了详细的研究,采用数学方法(高斯公式)将求自由面的面积分转化为体积分与其他面积分之差即可,避免了求自由面的具体位置,在计算体积分和面积分时采用连续的区域识别函数,增强了解的稳定性和收敛性。

(3) 将编制的三维非稳定饱和渗流程序 3DF 应用于上海环球金融中心塔楼基坑降水工程中,经过识别、验证水文地质参数后,得出了 8 口井降水优化方案,总抽水量为  $11360 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ ,基坑内地下水位降到了埋深 26.6m。

(4) 将编制的三维非稳定饱和渗流程序 3DF 应用于上海地铁 4 号线董家渡隧道修复基坑降水工程中,经过识别、验证水文地质参数后,得出了 25 口井降水优化方案,总抽水量为  $6355 \text{ m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$ ,基坑内地下水位降到了埋深 42.45m 以下。

(5) 处理已知水头边界的“置大数”法在时间上要比“去行去列”法短一些,定水位边界节点越多,其优越性表现越明显。

(6) PCG 法与直接解法相比,速度较快,且网格节点越多,二者解方程组时相差时间越长。

(7) 三维有限元数值模型具有极强的刻画三维地质体的能力,能良好地模拟预测第四纪巨厚松散沉积层中深基坑降水引起的地下水流场的变化,为深基坑降水的优化设计提供了强有力的依据。

### 6.2 展望

尽管通过本阶段的研究工作,取得了一些成果,但由于时间有限及其它条件的限制,还存在诸多不足。因此对于渗流场分析有待进一步研究,主要在下述几个方面作出改进和发展:

(1) 本文在前处理方面采用的是专业软件 ANSYS 剖分网格的,而直接从 ANSYS 中导出的网格节点、单元信息数据在组装形成整体劲度矩阵时,会产生

较大的带宽，使得程序耗用内存大，计算速度慢，因此最好进行节点编号优化。

(2) 本文的渗流计算主要考虑饱和渗流区域地下水运动，实际上地下水的运动一般是饱和-非饱和问题，因此在以后的研究工作中进行饱和-非饱和渗流分析显得更具有工程意义。

(3) 对于某些重大深基坑工程，周围存在其他建筑物且开挖深度深，降水时，势必会危及周边建筑物的安全，因此基坑降水和地基沉降之间的三维耦合模型有待进一步研究。

## 参考文献

- [1] 唐业清, 李启民, 崔江元. 基坑工程事故分析与处理[M]. 中国建筑工业出版社, 1999.04
- [2] 何世秀, 胡其志, 庄心善. 渗流对基坑周边沉降的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2003.22(9): p1551-1554
- [3] 成大庆. 基础工程事故的主要原因剖析[J]. 岩土工程界, 2004.7 (4): p11-13
- [4] T. R. Shearer. *A numerical model to calculate land subsidence, applied at Han gu in China* [J]. *Engineering Geology*, 1998.49(2): p85-93.
- [5] Miao. B. Su, C. L. Su, C. J. Chang. *A numerical model of ground deformation induced by single well pumping*[J]. *Computer and Geotechnics*, 1998.02: p39-60
- [6] 薛禹群. 地下水水动力学(第二版)[M]. 北京: 地质出版社, 1997
- [7] 王增银. 供水水文地质学[M]. 地质出版社, 1988
- [8] 杜延龄, 许国安. 渗流分析的有限元法和电网络法[M]. 北京: 水利电力出版社, 1992.03
- [9] 罗焕炎, 陈雨孙. 地下水运动的数值模拟[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1988
- [10] 金为芝. 水文地质工程地质数值法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1992.12
- [11] 薛禹群, 谢春红. 水文地质学的数值法[M]. 煤炭工业出版社, 1979
- [12] Taflove A. *Review of the Formulation and Applications of the Finite-different Time-domain Method for Numerical Modeling of Electromagnetic Wave Interactions with Arbitrary Structures*[J]. *Wave Motion*, 1998.10: p547-582
- [13] 骆祖江, 付延玲. 模型技术在地下水系统动态预测中的应用[J]. 工程勘察, 1997.05: p29-33
- [14] 骆祖江, 刘昌军, 瞿成松等. 深基坑降水疏干过程中三维渗流场数值模拟研究[J]. 水文地质工程地质, 2005.32 (205): p48-53
- [15] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用(第二版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998
- [16] 卞锦宇, 薛禹群, 程 诚等. 上海市浦西地区地下水三维数值模拟[J]. 中国岩溶, 2002. 20 (3): p182-187
- [17] Borja R. I. . *Free Boundary Fluid Flow and Seepage Force in Excavation*[J]. *J. Geo-technical Eng.*, 1992.1(118): p125-146
- [18] Chang-Yu Ou, Dar-chang, T. S. Wu. *Three-dimensional finite element analysis of deep excavations*[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996.122(5): p337-345
- [19] N. H. Sharif, N. E. Wiberg, M. Levenstam. *Free surface through rock-fill dams analyzed by FEM with level set approach*[J]. *Computational Mechanics*, 2001.27: p233-243
- [20] Kang-Kun Lee, Darrell I. Leap. *Simulation of a free-surface using boundary-fitted coordinate system method*[J]. *Journal of Hydrology*, 1997.196: p297-309
- [21] 张有天, 张武功. 半无限域渗流问题的边界元法[J]. 水利学报, 1981.04: p8-17

- [22] C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineer*[M]. London: Pentech Press, 1978
- [23] 周玉新, 周志芳. 有限分析法在排土场渗流分析中的应用[J]. 金属矿山, 2001.10: p18-21
- [24] 周志芳, 李艳. 复杂岩体地下水运动问题的有限分析法[J]. 水科学进展, 1997.8 (3): p240-246
- [25] 谭维炎. 计算浅水动力学—有限体积法的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998
- [26] 杨海英, 陈刚, 柴军瑞等. 金沙峡电站闸坝区渗流场有限体积法数值模拟[J]. 岩土力学, 2005.26 (3): p461-464
- [27] R. Courant. *Variational Method for the Solution of Equilibrium and Vibrations*[J]. Bull. Am. Math. Soc, Vol.49,1943
- [28] R. J. Melosh. *Basis for the Derivation of Matrix for the Direct Stiffness Method*[J]. AIAAJ., Vol.1,1963
- [29] R. E. Jones. *A Generalization of the Direct Stiffness Method of Structural Analysis*[J]. AIAAJ., Vol.2,1964
- [30] J. F. Besseling. *The Complete Analogy Between the Matrix Equations and the Continuous Field Equations of Structural Analysis*[C]. International Symposium on Analogue and Digital Techniques Applied to Aeronautics, Liege, Belgium,1963
- [31] Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.. *Finite Element in Solution of Field Problems*[J]. The Engineering, 1965,220(5710)
- [32] Chen C. J., Chen H. C.. *Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations*[J]. Journal of Computational Physis.1984.53: p209-226
- [33] 寇晓东, 周微垣. 无单元法追踪结构开裂[C]. 岩土力学新计算方法讲义, 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1999.10: p45-72
- [34] Nayroles B., Touzot G., Villon P.. *Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements*[J]. Computational Mechanics,1992.10(5): p307-318
- [35] Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L.. *Element-free Galerkin methods*[J]. Int J Num Meth Eng, 1994.37: p229-256.
- [36] 周维垣, 黄岩松, 林鹏. 三维无单元伽辽金法及其在拱坝分析中的应用[J]. 水利学报, 2005.36 (6): p644—649
- [37] Pokharel G., Honjo Y., *Mapped Infinite Elements in Multi-layered Seepage Analysis*[C], Computer Methods and Advances in Geo-mechanics, Balkma, Rotterdam, 1994. p1243-1248
- [38] Cundall P. A.. *Formulation of Three-dimensional Distinct Element Model, Part I, A Scheme to Detect and Represent Contact in System Composed of Many Polyhedral Blocks*[J]. Int.J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 1988.25(3): p107-116
- [39] Hart R., Cundall P. A., Lemos J.. *Formulation of Three-dimensional Distinct Element Model, Part II, Mechanical Calculation of a System Composed of Many Polyhedral*

- Blocks*[J]. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 1988.25(3): p117-125
- [40] ITASCA Consulting Group, Inc. In: *FLAC 3.3 User's Manual*[R]. 1996
- [41] Shi G. H., Goodman R. E.. *Two Dimensional Discontinuous Analysis*[J]. *Int.J.Num.Anal. Methods Geomech.*, 1985,Vol.9: p541-556
- [42] Shi G. H., Goodman R. E.. *Generalization of Two Dimensional Discontinuous Analysis for Forward Modeling*[J]. *Int.J.Num.Anal. Methods Geomech.*, 1985,Vol.13: p359-380
- [43] 王水林. 数值流形方法及其应用[C]. 岩土力学新计算方法讲义, 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1999.10: p178-207
- [44] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法及其研究进展[J]. *力学进展*, 2003.33 (2): p261-266
- [45] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京: 水利电力出版社, 1990
- [46] P. Knupp, *A moving mesh algorithm for 3-D regional groundwater flow with table and seepage face*[J]. *Advances in Water Resources*,1996,02: p83-95
- [47] Neuman S. P.. *Saturated-unsaturated Seepage by Finite Elements*[J]. *Hydraulic Div., ASCE*, 1973. 99(12)
- [48] Desai, C. S., *Finite Element Residual Schemes for Unconfined Flow*[J], *Int. J. num. Method Engineer*, 1976.10: p1415-1418
- [49] Bathe K. T., Khoshgoftaar M. R.. *Finite Free Surface Seepage Analysis Without Mesh Iteration*[J]. *Int.J. Numer. Methods, Engrg*, 1979.4(1): p13-22
- [50] 杜延龄, 许国安. 复杂岩基三维渗流有限元分析研究[J]. *水利学报*, 1991, (7): p21-28
- [51] 李春华. 稳定渗流有限元计算时采用固定网格法的初步研究. 第三届全国渗流力学学术讨论会论文汇编(3), 长江科学院, 1986
- [52] 朱军, 刘光廷. 改进的单元渗透矩阵调整法求解无压渗流场[J]. *水利学报*, 2001.08: p49-52
- [53] Huang S., Zhou C.. *Numerical Solution of Non-steady State Porous Flow Boundary Problems*[J].*J. of Computational Math.*,1985.3(1): p72-89
- [54] 余颖禾, 孙鹰, 郭小明. 具有自由边界的二维渗流问题[J]. *应用数学和力学*, 1996.17 (6): p523--527
- [55] 孙鹰, 郭小明, 余颖禾. 非稳态渗流的自由边界问题[J]. *应用数学和力学*, 1999.20 (7): p756--760
- [56] 张有天, 陈平, 王雷. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. *水利学报*, 1988.08: p18-26
- [57] 王媛. 求解有自由面渗流问题的初流量法的改进[J]. *水利学报*, 1998.03: p68-73
- [58] 速宝玉, 朱岳明. 不变网格法确定渗流自由面的节点虚流量法[J]. *河海大学学报*, 1991.19 (5): p113~117
- [59] 速宝玉, 沈振中, 赵坚. 用变分不等式理论求解渗流问题的截止负压法[J]. *水利学报*, 1996.03: p22-29

- [60] 张乾飞, 吴中如. 有自由面非稳定渗流分析的改进截止负压法[J]. 岩土工程学报, 2005.27 (1): p48-54
- [61] 吴梦喜, 张学勤. 有自由面渗流数值分析的虚单元法[J]. 水利学报, 1994.08: p67-70
- [62] 梁业国, 熊文林, 周创兵. 有自由面渗流分析的子单元法[J]. 水利学报, 1997.08: p34-38
- [63] 王贤能, 黄润秋. 有自由面渗流分析的高斯点法[J]. 水文地质工程地质, 1997.06: p1-4
- [64] 陈洪凯, 唐红梅, 肖盛燮. 求解渗流自由面的复合单元全域迭代法[J]. 应用数学和力学, 1999.20(10): p1045-1050
- [65] 黄蔚, 刘迎曦, 周承芳. 三维无压渗流场的有限元算法研究[J]. 水利学报, 2001.06: p33-36
- [66] 凌道盛. 有自由面渗流分析的虚节点法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2002.36(3): p243-246
- [67] 李广信, 葛锦宏, 介玉新. 有自由面渗流的无单元法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2002.42 (11): p1552-1555
- [68] 王均星, 吴雅峰, 白呈富. 有自由面渗流分析的流形单元法[J]. 水电能源科学, 2003.12: p23-25
- [69] 陈建余. 三维复杂无压渗流场求解方法研究[J]. 水力发电学报, 2004.23 (5): p83-87
- [70] 贝尔. J. 多孔介质流体动力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983
- [71] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算(第二版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996
- [72] 钱孝星. 水文地质计算[M]. 北京: 水利电力出版社, 1995
- [73] Zienkiewicz O. C. , Taylor R. . *The finite element method* (5<sup>th</sup> edition) [M]. Oxford: B.-H., 2000
- [74] 顾蔚慈. 渗流计算原理及应用[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2000.06
- [75] 李俊亭. 地下水流数值模拟[M]. 北京: 地质出版社, 1989.09
- [76] 王君连. 工程地下水计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2004
- [77] 张蔚榛. 地下水非稳定计算与地下水资源评价[M]. 北京: 科学出版社, 1983
- [78] 陈洪凯, 唐红梅, 张录坤. 渗流自由面求解的基本方法、修正及应用[J]. 重庆交通大学学报, 1997.09: p5-10
- [79] Jean-Pierre Bardet, Tetsuo Tobita. *A practical method for solving free-surface seepage problems*[J]. Computers and Geotechnics, 2002.29: p451-475
- [80] 付成华. 非均质土石坝稳定—非稳定渗流有限元分析[D]. 武汉大学硕士学位论文, 2004
- [81] 郭洪兴. 三维非稳定渗流计算中有限元截止负压法的研究及应用[D]. 河海大学硕士学位论文, 1997.03
- [82] 刘杰. 裂隙岩体渗流场及其与应力场耦合的参数反问题研究[D]. 河海大学博士学位论文, 2002.07
- [83] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集(第二版)[M], 北京, 清华大学出版社, 1996
- [84] 朱军, 刘光廷, 蓝青松等. 饱和模型非定常渗流的数值求解方法[J]. 岩土力学, 2002.23

- (3): p355-357
- [85] 曲小钢. 流体的体胀速度、散度及高斯公式的物理意义[J]. 高等数学研究, 2003.6 (1): p11-14
- [86] 范啸涛, 季光明. 预优矩阵及其构造技术[J]. 成都理工大学学报(自然科学版), 2003.30 (4): p432-435
- [87] I. M. Smith, D. V. Griffiths. 有限元方法编程(第三版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.9
- [88] 朱岳明, 陈建余, 龚道勇等. 拱坝坝基渗流场的有限单元法精细求解[J]. 岩土工程学报, 2003.25 (3): p326-330
- [89] 张乾飞. 复杂渗流场演变规律及转异特征研究[D]. 河海大学博士学位论文, 2002.09
- [90] Huyakorn P S, Springer E P. *A three-dimensional finite-element model for simulation water flow in variably saturated porous media*[J]. Water Resour Res, 1986.22(13): p1790-1808
- [91] 马瑞民, 衣治安. FORTRAN90 程序设计[M]. 哈尔滨工程大学出版社, 1998
- [92] 邢静忠, 王永岗. 有限元基础与 ANSYS 入门[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005
- [93] 陈精一, 蔡国忠. ANSYS 使用指南[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2001
- [94] 李同斌, 邹立芝. 地下水动力学[M]. 吉林大学出版社, 1995
- [95] 吴梦喜, 高莲士. 饱和一非饱和土体非稳定渗流数值分析[J]. 水利学报, 1999. 12: p38-42
- [96] 罗建军. 上海环球金融中心塔露基坑降水工程抽水试验报告. 上海岩土工程勘察设计研究院有限公司, 2004.2
- [97] 骆祖江, 李朗, 曹惠宾等. 复合含水层地区深基坑降水三维渗流场数值模拟—以上海环球金融中心为例[J]. 工程地质学报, 2006.14 (1): p72-77
- [98] 骆祖江, 武永霞. 第四纪松散沉积层深基坑降水三维非稳定流数值模拟[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2006.22 (2): p181-185
- [99] 祝晓彬. 长江三角洲(长江以南)地区深层地下水资源评价及管理模型研究[D]. 南京大学博士学位论文, 2005.08
- [100] 顾国荣. 上海轨道交通四号线修复工程岩土工程勘察报告. 上海岩土工程勘察设计研究院有限公司, 2004.05
- [101] 瞿成松. 上海市轨道交通四号线东南路—南浦大桥区间隧道修复降水方案. 上海岩土工程勘察设计研究院有限公司, 2004.04

## 攻硕期间发表的学术论文

- (1) 骆祖江, 武永霞. 盐城市地下水资源规划评价三维数值模拟[J]. 水资源保护, 2005. 21 (5)
- (2) 骆祖江, 武永霞. 第四纪松散沉积层深基坑降水三维非稳定流数值模拟[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2006. 22 (2)

## 攻硕期间参与的主要科研项目

- (1) 盐城地下水资源评价;
- (2) 上海地铁四号线董家渡隧道修复基坑降水与地面沉降数值模拟计算分析;
- (3) 上海环球金融中心塔楼基坑降水与地面沉降数值模拟计算分析;
- (4) 上海科委重大科研项目: 深层承压水降水与土体变形控制研究;
- (5) 江苏省沿江开发地下水资源评价及地面沉降研究。

## 致谢

本论文是在导师骆祖江教授的悉心指导下完成的。导师渊博深厚的理论知识、严谨的治学态度、丰富的工程经验、一丝不苟的工作作风以及乐观向上的人生态度深深地影响了我，是对学生莫大的教诲，学生将终生受益匪浅。在读硕士的三年期间，导师不论在学习上还是生活上都给予了无微不至的关怀，不仅传授了大量的科学理论知识，而且还教了许多做人的道理，在论文完成之际，谨向导师及师母付延玲老师表示诚挚的谢意和深深的敬意。

特别感谢上海隧道设计研究院的刘建航院士在上海地铁四号线董家渡隧道修复基坑降水方案中提供的宝贵建议。

衷心感谢上海岩土工程勘察设计研究院有限公司的副总工程师姚天强、缪俊发教授，上海长凯岩土工程公司曹惠宾经理、张国强总工及其他有关技术人员在开展项目期间给予的支持和协作。

感谢王锦国博士、何俊博士、祝晓彬博士、王玉英博士、刘昌军硕士、李朗硕士、刘金宝硕士、张月萍硕士、郑飞硕士、曾峰硕士、王月庆硕士、张艳芳硕士、李丽平硕士、严红萍硕士、王春美硕士、郭高轩硕士等同学、好友和师兄弟姐妹在学习、工作和生活中给予的帮助和支持！

感谢我的父母及我的亲戚朋友！他们多年来无微不至的照顾、关怀和教诲是我生活、学习上的坚强后盾和动力，伴我战胜困难，勇往直前！多年的求学生涯，是他们的全力支持和帮助，才使我得以顺利完成学业，在此祝愿他们身体健康，平安一生！

感谢所有关心和帮助我的人！真诚地祝你们永远幸福！

最后，对审阅本文和参加论文评审及答辩的专家表示诚挚的感谢，是你们的辛勤劳动，才使得论文划上了圆满的句号！

作者：武永霞

2006年6月于南京