摘 要

本学位论文对几类非线性二元神经网络微分方程模型的动力学性态进行了定性分析，讨论了这些神经网络模型的渐近性、全局指数稳定性及周期解的存在性，并且对其相应的离散化模型也进行了分析．全文由五章组成．

第一章对神经网络的发展历史作了简要回顾，并概述了本文涉及的某些领域的研究现状，提出本文所要讨论的一些问题及所得结果的意义．

第二章讨论了两类具 McCulloch-Pitts 型非线性二元神经网络微分方程模型在阈值绝对值较大时解的渐近性及稳定性．我们证明了在大阈值情形，系统有唯一平衡点且是全局指数渐近稳定的；在临界阈值情形，我们着重考虑具变号型初值的解，证明了初值不同的解可以收敛于不同的平衡点，并给出了趋于不同平衡点的充要条件，且还举例说明所得结论包含了相关文献中的结果．

第三章在小阈值情形，针对变号型初值，讨论了周期解的存在性，获得了孤立周期解存在的充分条件．

第四章讨论了具正负反馈的二元离散神经网络模型．我们证明了在大阈值情形，系统有唯一平衡点且是全局指数渐近稳定的；在临界阈值情形，我们着重考虑具变号型初值的解，证明了初值不同的解可以收敛于不同的平衡点，并给出了趋于不同平衡点的充要条件．

第五章讨论了双阈值二元神经网络微分方程模型．我们同样获得了具大阈值情形解的全局指数稳定性及具临界阈值情形解的渐近性质．特别在临界情形，对具变号型初值的解给出了趋于不同平衡点的充要条件．这一章的结果是在双阈值情形下，进一步地推广了第二章所得结果．

关键词：神经网络，阈值，离散化，渐近性，全局指数稳定性，周期解．

Abstract

In this thesis, we describe some important dynamic properties of several class of neural network models of two neurons, which includes asymptotic behavior, the global exponential asymptotic stability,the existence of periodic solution,and also describe the dynamic behaviors of the corresponding discrete models.It is composed of five chapters.

In Chapter 1, the background and history of neural networks are briefly reviewed, and the current situations in the field are generalized, furthermore, we raise some problems which will be investigated.

In Chapter 2, two types with McCulloch-Pitts nonlinear neural network models of two neurons are discussed. We study asymptotic behavior and stability of the solution if the absolute values of threshold values are large and obtain that the two systems have unique equilibrium respectively which is global exponential asymptotic stable. In particular, we obtain necessary and sufficient conditions which guarantee the solutions of the models tend to one of those equilibria respectively in the critical case. In addition, we illustrate by an example that the conclusions contain the results of the corresponding literatures.

In Chapter 3, we investigate the existence of periodic solution of a class of the nonlinear neural network of two neurons, by using the analytical technique to find return mapping, we obtain the sufficient conditions for the existence of the isolated periodic solution.

In Chapter 4, we study the asymptotic behaviors and the global exponential asymptotic stability of two types of discrete-time neural network models of two neurons with positive and negative feedback. The results we get are discrete analogue of the results of the chapter 2.

Finally, in Chapter 5, two types of nonlinear neural network models of two neurons of two threshold values are considered. Similarly, we prove that the systems has unique equilibrium respectively and it is global exponential asymptotic stable if the absolute values of threshold values are large, furthermore, necessary and sufficient conditions are obtained for the solutions of the system tending to one of the different equilibria respectively in the critical case.

KeyWords: Neural Network, Threshold value, Asymptotic behavior, Discrete analogue, Global exponential asymptotic stability , Periodic solution.

湖 南 大 学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：刘开宇　　　　　　　　日期：2004 年 5 月 17 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湖南大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在____年解密后适用本授权书。

2、不保密☑。

（请在以上相应方框内打"√"）

作者签名：刘开宇　　　　　　　　日期：2004 年 5 月 17 日

导师签名：钱祥征　　　　　　　　日期：2004 年 5 月 17 日

第 1 章　绪　论

1.1　神经网络发展概述及研究背景

人们对神经网络的研究从 20 世纪 40 年代就开始了. 1943 年美国心理学家 Warren McCulloch 和数学家 Walter H Pitts 合作在文 [1] 中总结生物神经元的基本特征并首先提出形式神经元的数学模型 (简称为 M-P 模型), 从此开创了神经科学理论研究的时代. 作为人工智能的网络系统的研究则是 50 年代末 60 年代初开始的, 1957 年由 F. Rosenblatt 提出并设计制作的感知器 (Perceptron), 第一次将理论研究转入工程实现阶段, 掀起了研究人工神经网络的高潮. 感知器是一种多层的神经网络, 它是由阈值性神经元组成, 试图模拟动物和人脑的感知和学习能力, 实质上是一个连续可调的 M-P 神经网络. 1962 年 Widrow 提出了自适应线性元件, 由于其实现途径的特殊性, 引起了研究人员的兴趣, 同时也引起了很大的争议. 人工智能的创始人之一 M. Minsky 和 S. Papert 于 1969 年发表了对神经元网络研究产生重要影响的《感知机》 (Perceptron) 一书, 书中提出了感知机网络的局限性, 使人工神经元网络的研究在 70 年代一度处于低潮. 难能可贵的是, 在此期间, 仍有为数不少的学者在极端艰难的条件下仍致力于神经元网络的研究. 1969 年, Grossberg 与 Carpenter 提出了自适应共振理论 (ART) 模型; 1972 年, 芬兰的 Kohonen 提出了自组织映射 (SOM) 理论网络; 1980 年, Fukushima 提出了神经认知机网络理论; Amari 则致力于神经网络有关数学理论的研究; Anderson 提出了 BSB 模型; Werbos 提出了 BP 理论, 从而为神经网络研究的发展奠定了基础.

美国生物物理学家 Hopfield 教授于 1982 年和 1984 年在美国科学院院刊上发表了两篇具有突破性的学术论文 [2,3], 标志着神经网络研究进入兴盛时期. 他提出了一种新的仿人脑神经元网络模型, 并指出可以用微电子器件来实现它, 即著名的 Hopfield 模型. 在其网络模型中, 定义了神经元网络的 "能量函数", 并给出了网络稳定性的判据, 使所提出的网络具有联想记忆和对优化问题求解的能力. Hopfield 神经元网络的出现为神经计算机 (Neuro-computer) 的研制奠定了基础, 并开创了神经元网络用于联想记忆和优化计算新途径. 值得一提的是在这一时期还涌现了大量而深入的开拓性工作, 如 Feldmann 和 Ballard 的连接网络模型指出了传统的人工智能 "计算" 与生物 "计算" 的不同点; Hinton 和 Sejnowski 提出了 Boltzman 机模型; Kosko 提出了双向联想记忆网络; 1988 年美国加洲大学的蔡少堂等提出了细胞神经元网络模型. 所有这些工作大大发展了人工神经网络的理论, 使得人们对模仿大脑来进行信息处理充满了希望.

近年来，神经网络理论引起了美国、日本、中国及西欧一些国家的科学家、研究机构和企业界的普遍关注. 并且各个学科的研究人员都想利用人工神经元网络的特殊功能来解决本学科的难题，很多的工程项目都采用和正准备采用人工神经元网络的解决方案，其中大量工作致力于神经网络模型的建立与分析. 随着人们对人脑结构认识的深入及计算机科学和工程学在诸多方面的进展，神经网络理论的重要应用已渗透到各个领域，诸如推理学习、联想记忆、图象加工、图形识别等 (见 [7,11,12,15-19,39,45])，而且在最优化及自然界语言方面也有不少应用 (见 [8,14,28-30,33,35,37,38,47,57])，甚至还建立了涉及复杂社会现象的如浑沌、社会演变等复杂系统的统一模型. 可以予言， 21 世纪人工神经元网络理论将会有更大发展，它的应用将推动科学技术的大步前进.

在神经网络模型中，非常大的一部分是微分、差分方程模型，如著名的 Hopfield 模型、Grossberg 模型、CNN 模型等. 最初的 Hopfield 模型是基于神经元之间能对信息作出即时反应的假设等建立的常微系统. 然而，考虑到生物神经元在进行信号传输过程中存在诸如细胞时滞，传输时滞及突轴时滞等原因 (见 [26,41]),Marcus 和 Westervelt 在文 [34] 及 Wu 在文 [46] 中对 Hopfield 模型加入了时滞，这种模型为时滞系统

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\mu_i u_i(t) + \sum_{j\neq i} T_{ji} f_j(u_j(t-\tau_{ji})), \qquad 1 \le i \le n, \tag{1.2.1}$$

其中 u_i 为状态变量，当 $1 \le i \le n$ 与 $1 \le j \le n$ 时， $\mu_i > 0$ 与 $\tau_{ji} \in R$ 为给定常数，$f_j : R \to R$ 为通常的 sigmoid 函数. 已有许多文献对系统 (1.2.1) 的动力学行为作了较为深入的研究 (见 [7-10,15,22,23,24,25,27,31,32,33,36,43,44,45,54,55,56,59,86,87]). 为了作更细致的动力学分析， Babcock 和 Westervelt 在文 [6] 中提出了首先考虑某些简单网络的动力学性质. 其中最简单的形式之一是

$$\begin{cases} u_1'(t) = -u_1(t) + a_1 \tanh[u_2(t-\tau_2)], \\ u_2'(t) = -u_2(t) + a_2 \tanh[u_1(t-\tau_1)], \end{cases} \tag{1.2.2}$$

这里 a_1, a_2, τ_1, τ_2 都是已知常数. 关于模型 (1.2.2) 的动力学性质，亦有不少文献进行了研究 (见 [44,70-72]). 特别对 $\tau_1 = \tau_2$ 的情形， Gopalsamy 和 Leung 在文 [70] 中研究了系统 (1.2.2) 的动力学性质，证明了若不带时滞，系统的平衡解是全局渐近稳定的；而当时滞 τ 充分大时，系统 (1.2.2) 会产生一个瞬间的周期环，从而出现 Hopf 分支. 1997 年， Gopalsamy 和 Leung 进一步研究了具时滞阈值的神经网络模型 (见文 [73])

$$x'(t) = -x(t) + a \tanh[x(t) - bx(t-\tau)]. \tag{1.2.3}$$

获得了模型 (1.2.3) 唯一平衡点是渐近稳定的充要条件. 在此还要提到的是 Babcock 和 Westervelt[4,5,6], Olien 和 Bélair[36], Ruan 和 Wei[40], Shayer 和 Campbell[42], Wei

和 Ruan[44], Chen 和 Wu[74-77] 等都对由 2-3 个神经元构成的神经网络的线性稳定性做了有创造性的工作, 为进一步了解神经网络大系统打下了良好的基础.

作为 Hopfield 模型的特殊情形, 最近, Huang 和 Wu 在文 [49] 和文 [50] 中分别考虑了下面两个二元神经网络模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y - f(x(t-\tau)) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

与

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y + f(x(t-\tau)). \end{cases} \tag{1.2.5}$$

模型 (1.2.4) 和 (1.2.5) 可分别由下面具两个时滞的一般系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + f(y(t-\tau_1)), \\ \dot{y} = -\mu y - f(x(t-\tau_2)) \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + f(y(t-\tau_1)), \\ \dot{y} = -\mu y + f(x(t-\tau_2)), \end{cases}$$

经适当变量代换获得. 该两文中, 与此前不少文献只考虑了具分段线性信号函数或光滑反双曲函数的情形 (见文 [62,63,74,78-81]) 不同. 作者以阈值为参数讨论了在模型 (1.2.4) 和 (1.2.5) 中具有 McCulloch-Pitts 型不连续信号传输函数:

$$f(\xi) = \begin{cases} -1, & 若\ \xi > \sigma, \\ 1, & 若\ \xi \le \sigma, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

时系统的动力学性质, 证明了对所有的初始值 $\Phi = (\varphi, \psi) \in X_\sigma$, 模型 (1.2.4) 和 (1.2.5) 解的性质当 t 充分大时, 完全由 $(\varphi(0), \psi(0))$ 和阈值 σ 的大小决定. 获得了系统的解收敛于平衡点及存在周期解的一系列结果. 其中 $X = C([-\tau, 0]; R^2)$ 是具上确界范数的 Banach 空间, $X_\sigma = X_\sigma^{+,+} \cup X_\sigma^{+,-} \cup X_\sigma^{-,+} \cup X_\sigma^{-,-}$, 这里

$$X_\sigma^{\pm,\pm} = \{\Phi \in X;\ \Phi = (\varphi, \psi),\ \ \varphi \in C_\sigma^{\pm}\ \ 且\ \ \psi \in C_\sigma^{\pm}\}.$$

而

$$C_\sigma^{+} = \left\{ \varphi;\ \begin{array}{c} \varphi : [-\tau, 0] \to [\sigma, \infty)\ 为连续映射且\ \varphi(t) - \sigma \\ 在\ [-\tau, 0]\ 上最多有有限个零点, \end{array} \right\}$$

与

$$C_\sigma^- = \left\{ \varphi; \begin{array}{l} \varphi : [-\tau, 0] \to (-\infty, \sigma] \text{ 为连续映射且 } \varphi(t) - \sigma \\ \text{在 } [-\tau, 0] \text{ 上最多有有限个零点.} \end{array} \right\}.$$

继 Huang 之后又出现了不少新的结果，它们虽考察了不同形式的信号函数，但都是考虑具有非振动型的初值 $\Phi = (\varphi, \psi) \in X_\sigma$, X_σ 的含义如上所述.

鉴于人工神经网络系统中信号传输过程的复杂性,很自然地提出这样的问题:若初值 Φ 出现变号情况时，上述系统的动力学性质将发生怎样的改变. 本文在第二章中考虑了 $\varphi(t)-\sigma$ 与 $\psi(t)-\sigma$ 出现有限次符号改变时，系统 (1.2.4) 和 (1.2.5) 解的渐近行为，得到了一些新的结果. 证明了在大阈值情形 (即 $|\sigma| > 1$), 系统 (1.2.4) 和 (1.2.5) 分别有唯一的平衡点，且是全局指数渐近稳定的；而对临界阈值情形 (即 $|\sigma| = 1$), 证明了初值不同的解可以收敛到不同的平衡点；并对 τ 及 Φ 给出了系统趋于不同平衡点的充要条件. 另外还举例说明我们的结果包含了文 [49] 与文 [50] 的相应结果.

本文的第三章，我们研究模型 (1.2.4) 在小阈值 (即 $|\sigma| < 1$) 下周期解的存在性. 当 $\varphi(t)-\sigma$ 与 $\psi(t)-\sigma$ 出现有限次符号改变时，获得了系统存在孤立周期解的充分条件，这一结果是全新的. 并进一步举例说明了对某些阈值的周期解的不稳定性.

相对于连续系统 (1.2.4) 与 (1.2.5) 来说，在神经网络模型动力学性质的离散化研究方面见到的工作较少 (见文 [58,68,69,88]). 在文 [51] 中， Zhou 等考虑了模型 (1.2.5) 的离散形式

$$\begin{cases} 2x(n) = x(n-1) + f(y(n-K)), \\ 2y(n) = y(n-1) + f(x(n-K)), \end{cases} \quad n \in N, \tag{1.2.7}$$

得到了系统的收敛性及存在周期解的结果. 同时， Zhou 和 Wu 在文 [52] 中还讨论了下列离散系统

$$\begin{cases} x(n) = \beta x(n-1) + f(y(n-K)), \\ y(n) = \beta y(n-1) + f(x(n-K)), \end{cases} \quad n \in N \tag{1.2.8}$$

的收敛性及 2K 周期解的存在性，其中 $\beta \in (0,1)$,f 由 (1.2.6) 定义. 我们发现这些工作仍是将初值设定在一非振动型的函数空间展开的，即初始函数 $\varphi-\sigma$ 与 $\psi-\sigma$ 在范围 $N(-K,-1)$ 中没有符号变化. 本文第四章中我们考虑系统 (1.2.8) 与离散系统

$$\begin{cases} x(n+1) = \beta x(n) + f(y(n-K)), \\ y(n+1) = \beta y(n) - f(x(n-K)), \end{cases} \quad n \in N, \tag{1.2.9}$$

在较为广泛的假设

$$f(x)=\begin{cases}-\rho, & 若\ x>\sigma,\\ \rho, & 若\ x\le\sigma,\end{cases}\tag{1.2.10}$$

(式中 $\rho>0$) 下，当初值振动时解的渐近行为. 即 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma=\widetilde{X}_\sigma^{+,+}\cup\widetilde{X}_\sigma^{+,-}\cup\widetilde{X}_\sigma^{-,+}\cup\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$, 其中

$$\widetilde{X}_\sigma^{\pm,\pm}=\{\Phi\in X;\ \Phi=(\varphi,\psi),\varphi\in\widetilde{R}_\sigma^{\pm}\ \ 及\ \ \psi\in\widetilde{R}_\sigma^{\pm}\}.$$

其中

$$\widetilde{R}_\sigma^{+}=\{\varphi:N(-K,0)\to R;\ \varphi(0)-\sigma>0,\ 且\ \varphi(i)-\sigma\le 0\ 至少对某个\ i\in N(-K,-1)\}$$

及

$$\widetilde{R}_\sigma^{-}=\{\varphi:N(-K,0)\to R;\ \varphi(0)-\sigma\le 0,\ 且\ \varphi(i)-\sigma>0\ 至少对某个\ i\in N(-K,-1)\}.$$

我们得到了较好的结果：当 $|\sigma|>\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，模型 (1.2.8) 和 (1.2.9) 分别有唯一的平衡点，且是全局指数渐近稳定的；而对临界情形 (即 $|\sigma|=\frac{\rho}{1-\beta}$) 及振动型初值，模型 (1.2.8) 和 (1.2.9) 各有 2 个和 3 个平衡点，且获得了系统趋于不同平衡点的充要条件. 可以看出，本章结果是我们在第二章所得结果的离散化.

文献中对双阈值二元神经网络模型

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+f(y(t-\tau)),\\ \dot{y}=-y-g(x(t-\tau)),\end{cases}\tag{1.2.11}$$

及

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+f(y(t-\tau)),\\ \dot{y}=-y+g(x(t-\tau)),\end{cases}\tag{1.2.12}$$

的研究也不多见，其中

$$f(\xi)=\begin{cases}-1, & 若\ \xi>\sigma_1,\\ 1, & 若\ \xi\le\sigma_1;\end{cases}\qquad g(\xi)=\begin{cases}-1, & 若\ \xi>\sigma_2,\\ 1, & 若\ \xi\le\sigma_2,\end{cases}$$

式中 σ_1 和 σ_2 为常数. 仅见的也是对如文 [49,50] 中的非振动初值展开的 (见 [83-85]). 本文的第五章进一步将第二章结果推广，同样得到了系统 (1.2.11) 与 (1.2.12) 具大阈值情形的全局指数渐近稳定性及具临界阈值情形的渐近性. 所得结果推广并改进了有关文献的相应结论.

第 2 章 两类非线性二元神经网络模型的渐近行为与全局指数稳定

2.1 引 言

本章考虑两类二元神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y - f(x(t-\tau)) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

与

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y + f(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中时滞 $\tau > 0$. 关于这两类模型的动力学性质 (诸如渐近性, 周期性等) , 近几年来已取得了一些丰富的成果. 其中绝大部分集中于 $f: R \to R$ 要么是光滑的 Sigmoid 函数, 要么是连续分段线性信号函数. 对于 f 为下列 McCulloch-Pitts 型不连续函数

$$f(\xi) = \begin{cases} -1, & 若\ \xi > \sigma, \\ 1, & 若\ \xi \le \sigma, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

式中 $\sigma \in R$. 最近, Huang 和 Wu 在文 [49,50] 中以阈值 σ 为参数对这两类模型的渐近性, 周期性等进行了深入细致的研究. 这些工作是在非振动型初始函数空间内展开, 即 $\varphi - \sigma$ 与 $\psi - \sigma$ ((φ, ψ) 为初值) 在其讨论的初始范围内不变号且最多只出现有限个零点. 鉴于人工神经网络系统的高度非线性性及复杂性, 因而我们有必要对其他情形作更深入的探讨. 本章, 针对系统 (2.1.1) 和 (2.1.3);(2.1.2) 和 (2.1.3), 我们着重考虑 $\varphi - \sigma$ 与 $\psi - \sigma$ 在 $[-\tau, 0]$ 上, 若出现有限次变号时, 其解的渐近行为及稳定性. 研究结果表明: 若 $|\sigma| > 1$, 则两系统都存在唯一平衡点, 且是全局指数渐近稳定的; 若 $|\sigma| = 1$, 且 $\varphi - \sigma$ 与 $\psi - \sigma$ 出现有限次变号时, 则系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 存在两个平衡点, 系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 存在三个平衡点, 进一步我们对 τ 及 (φ, ψ) 分别给出了保证两系统趋于不同平衡点之一的充要条件.

设 $X = C([-\tau, 0], R^2)$ 为一相空间, 记 $\Phi = (\varphi, \psi) \in X$. 方程组 (2.1.1) 或 (2.1.2) 具有初值 Φ 的一个解是指的这样一个映射 $(x^\Phi, y^\Phi): [-\tau, \infty) \to R^2$, 使得当 $t \in [-\tau, 0]$ 时, 有

$$x^\Phi(t) = \varphi(t), \quad y^\Phi(t) = \psi(t),$$

且 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t))$ 当 $t \ge 0$ 时连续, $t > 0$ 时几乎处处可微, 且满足 (2.1.1) 或 (2.1.2). 由叠代法易知, 方程组满足初始条件的解唯一. 我们的目标是研究 $\varphi - \sigma$ 及 $\psi - \sigma$

在 $[-\tau,0]$ 上出现有限次符号改变时，系统解的大时间行为. 考虑这些初值： $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma = \widetilde{X}_\sigma^{+,+} \cup \widetilde{X}_\sigma^{+,-} \cup \widetilde{X}_\sigma^{-,+} \cup \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$. 其中

$$\widetilde{X}_\sigma^{\pm,\pm} = \{\Phi \in X: \ \Phi = (\varphi,\psi), \ \ \varphi \in \widetilde{C}_\sigma^{\pm} \quad 且 \ \psi \in \widetilde{C}_\sigma^{\pm}\},$$

上式中

$$\widetilde{C}_\sigma^{+} = \{\varphi: [-\tau,0] \to R; \ \varphi(0) - \sigma > 0, \ \ 且 \ \varphi(t) - \sigma \le 0 \ \ 对某个 \ \ t \in [-\tau,0)\},$$

$$\widetilde{C}_\sigma^{-} = \{\varphi: [-\tau,0] \to R; \ \varphi(0) - \sigma \le 0, \ \ 且 \ \varphi(t) - \sigma > 0 \ \ 对某个 \ \ t \in [-\tau,0)\}.$$

2.2 两类模型的渐近行为

本节，我们首先给出一些本文用到的记号，然后建立一个引理. 这些引理对我们研究情形 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma$ 下 (2.1.1) ~ (2.1.3) 的渐近行为起了重要作用.

设 $\tau > 0$ 为给定常数，让 S 表示定义在 $(-\infty,0]$ 上的点序列 $\{t_j\}_{j=0}^n$ 的集合，满足 $1 \le n < \infty, t_0 = 0, t_n = -\tau$ 及 $t_j > t_{j+1}$ $(j = 0,1,2,\cdots,n)$.

对给定集合 $s = \{t_j\}_{j=0}^n \in S$, 让

$$I_s^+ = \bigcup_{k=0}^{n^+-1} (t_{2k+1}, t_{2k}],$$

$$I_s^- = (-\tau,0] \backslash I_s^+ = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{n^-} (t_{2k}, t_{2k-1}], & 若 \ \ n \ne 1, \\ \emptyset, \quad 若 \ \ n = 1, \end{cases}$$

其中

$$n^\pm = (n \pm 1)/2, \quad 若 \, n \ 为奇数; \quad n^\pm = n/2, \quad 若 \, n \ 为偶数.$$

设 $\tilde{C}_\sigma = \tilde{C}_\sigma^+ \cup \tilde{C}_\sigma^-$. 则对任意 $\varphi \in \tilde{C}_\sigma$, 必存在 $s(\varphi) = \{t_j(\varphi)\}_{j=0}^{n(\varphi)} \in S$, 使得要么

$$\varphi(t) > \sigma \ 对几乎所有 \ t \in I_{s(\varphi)}^+, \ 且 \ \varphi(t) \le \sigma \ 对所有 \ t \in I_{s(\varphi)}^- (\ 若 \ \varphi \in \tilde{C}_\sigma^+),$$

要么

$$\varphi(t) \le \sigma \ 对所有 \ t \in I_{s(\varphi)}^+, \ 且 \ \varphi(t) > \sigma \ 对几乎所有 \ t \in I_{s(\varphi)}^- (\ 若 \ \varphi \in \tilde{C}_\sigma^-).$$

再定义如下一个 R 上的点序列 $\{J_i(\varphi)\}_{i=0}^{n(\varphi)+1}$:

$$J_i(\varphi) = \begin{cases} (-1)^{n(\varphi)-1} e^{-\tau} + 2 \sum\limits_{j=i}^{n(\varphi)-1} (-1)^{j-1} e^{t_j(\varphi)}, & 若 \ \ i = 0,1,\cdots,n(\varphi)-1. \\ (-1)^{i-1} e^{-\tau}, \quad 若 \ \ i = n(\varphi), n(\varphi)+1. \end{cases}$$

显然，对每一个 $\varphi\in\widetilde{C}_\sigma$，必存在 $J_i(\varphi), i=0,1,\cdots,n(\varphi)+1$，满足

$$J_{j+1}(\varphi)=J_j(\varphi)-2(-1)^{j-1}e^{t_j(\varphi)},\qquad j=0,1,\cdots,n(\varphi).$$

而且，不难看出：当 $k=1,\cdots,n^-(\varphi)$ 时，

$$J_{2k-1}(\varphi)>J_{2k+1}(\varphi),$$

当 $k=0,1,\cdots,n^+(\varphi)-1$ 时，

$$J_{2k}(\varphi)<J_{2k+2}(\varphi).$$

其中 $n^\pm(\varphi)=(n(\varphi))^\pm$.

为方便起见，将 $J_1(\varphi)$ 记作 $J(\varphi)$，即有

$$J(\varphi)=\begin{cases}(-1)^{n(\varphi)-1}e^{-\tau}+2\sum\limits_{j=1}^{n(\varphi)-1}(-1)^{j-1}e^{t_j(\varphi)}, & 若\ n(\varphi)\neq 1,\\ (-1)^{n(\varphi)-1}e^{-\tau}, & 若\ n(\varphi)=1.\end{cases}$$

[注 2.2.1] 注意到存在唯一 $s_0(\varphi)\in S$，此时 $n(\varphi)=1$, $n^-(\varphi)=0$，定义 $I_s^-=\emptyset$. 易看出 $X_\sigma\subset\widetilde{X}_\sigma$, $C_\sigma\subset\widetilde{C}_\sigma$. 当 $\varphi\in C_\sigma$ 时，有 $J(\varphi)=e^{-\tau}$, X_σ 及 C_σ 的定义见第一章绪论.

下面的引理给出了：当 $\sigma\geq 1$ 时，系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 及系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 的解，对于 $\sigma\leq -1$ 的情形，可同理得到，在此省略.

引 理 2.2.1. 设 $(x(t),y(t))$ 为具初值 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma$ 的系统 (2.1.1) 和 (2.1.3)(或 (2.1.2) 和 (2.1.3)) 的解. 则

(i) 当 $\varphi\in\widetilde{C}_\sigma^+$ 时，有

$$\begin{cases}y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\mp J_j(\varphi)]\mp(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ \ t_j(\varphi)<t-\tau\leq t_{j-1}(\varphi), j=1,2,\cdots,n(\varphi),\\ y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\mp J(\varphi)\pm 1\mp\int_0^{t-\tau}e^sf(x(s))ds], \quad 若\ \ t>\tau;\end{cases}\tag{2.2.1}$$

(ii) 当 $\varphi\in\widetilde{C}_\sigma^-$，且 $\sigma\geq 1$ 时，有

$$\begin{cases}y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\pm J_j(\varphi)]\pm(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ \ t_j(\varphi)<t-\tau\leq t_{j-1}(\varphi), j=1,2,\cdots,n(\varphi),\\ y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\pm J(\varphi)]\mp 1, \quad 若\ \ t>\tau;\end{cases}\tag{2.2.2}$$

(iii) 当 $\psi\in\widetilde{C}_\sigma^+$ 时，有

$$\begin{cases}x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}+J_j(\psi)]+(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ \ t_j(\psi)<t-\tau\leq t_{j-1}(\psi), j=1,2,\cdots,n(\psi),\\ x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-1+\int_0^{t-\tau}e^sf(y(s))ds], \quad 若\ \ t>\tau;\end{cases}\tag{2.2.3}$$

(iv) 当 $\psi\in\widetilde{C}_\sigma^-$, 且 $\sigma\ge 1$ 时，有

$$\begin{cases} x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}-J_j(\psi)]-(-1)^j, \\ \qquad\qquad\qquad 若\ t_j(\psi)<t-\tau\le t_{j-1}(\psi), j=1,2,\cdots,n(\psi), \\ x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}-J(\psi)]+1,\ 若\ t>\tau. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

[注 2.2.2] 引理 2.2.1 中出现"±"或"∓"之处，上面的符号对应系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 的情形，下面的符号则对应系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 的情形.

证 明: 仅考虑系统 (2.1.1) 和 (2.1.3)(对 (2.1.2) 和 (2.1.3) 可作类似处理). 只证情形 (i) 与 (ii). 情形 (iii) 与 (iv) 同理可证. 首先，在情形 (i) 下，有 $\varphi\in\widetilde{C}_\sigma^+$, 即 $\varphi\in\widetilde{C}_{\sigma,s(\varphi)}^+$ $(s(\varphi)=\{t_j\}_{j=0}^{n(\varphi)}\in S)$. 则

$$\begin{cases} \varphi(t)>\sigma,\ 对几乎所有\ t\in I_{s(\varphi)}^+=\bigcup\limits_{k=0}^{n^+(\varphi)-1}(t_{2k+1}(\varphi),t_{2k}(\varphi)], \\ \varphi(t)\le\sigma,\ 对所有\ t\in I_{s(\varphi)}^-=\bigcup\limits_{k=1}^{n^-(\varphi)}(t_{2k}(\varphi),t_{2k-1}(\varphi)], \end{cases} \tag{2.2.5}$$

式中

$$0=t_0(\varphi)>t_1(\varphi)>\cdots>t_{n(\varphi)-1}(\varphi)>t_{n(\varphi)}(\varphi)=-\tau.$$

当

$$t_j(\varphi)+\tau<t\le t_{j-1}(\varphi)+\tau,\quad j=1,2,\cdots,n(\varphi)$$

时，有 $-\tau<t-\tau\le 0$ 与 $x(t-\tau)=\varphi(t-\tau)$. 由 (2.1.1), (2.1.3) 与 (2.2.5) 可推知

$$\begin{cases} \dot y=-y+1,\ 对几乎所有\ t\in(t_{2k+1}(\varphi)+\tau,t_{2k}(\varphi)+\tau],\quad k=0,1\cdots,n^+(\varphi)-1, \\ \dot y=-y-1,\ 对所有\ t\in(t_{2k}(\varphi)+\tau,t_{2k-1}(\varphi)+\tau],\quad k=1,2\cdots,n^-(\varphi). \end{cases}$$

因此，由常数变易公式及解的连续性可导出

$$y(t)=[y(t_{2k+1}(\varphi)+\tau)-1]e^{-(t-t_{2k+1}(\varphi)-\tau)}+1,\ 若\ t_{2k+1}(\varphi)+\tau<t\le t_{2k}(\varphi)+\tau, \\ k=0,1,\cdots,n^+(\varphi)-1,$$

$$y(t)=[y(t_{2k}(\varphi)+\tau)+1]e^{-(t-t_{2k}(\varphi)-\tau)}-1,\ 若\ t_{2k}(\varphi)+\tau<t\le t_{2k-1}(\varphi)+\tau, \\ k=1,2,\cdots,n^-(\varphi),$$

也就是说，当 $t_j(\varphi)+\tau<t\le t_{j-1}(\varphi)+\tau, j=1,2,\cdots,n(\varphi)$ 时，有

$$y(t)=[y(t_j(\varphi)+\tau)+(-1)^j]e^{-(t-t_j(\varphi)-\tau)}-(-1)^j. \tag{2.2.6}$$

特别地，对 $j=1,2,\cdots,n(\varphi)$ ，我们有

$$y(t_{j-1}(\varphi)+\tau)=[y(t_j(\varphi)+\tau)+(-1)^j]e^{-(t_{j-1}(\varphi)-t_j(\varphi))}-(-1)^j,$$

上式又可重写为

$$[y(t_{j-1}(\varphi)+\tau)+(-1)^{j-1}]e^{t_{j-1}(\varphi)}=[y(t_j(\varphi)+\tau)+(-1)^j]e^{t_j(\varphi)}+2(-1)^{j-1}e^{t_{j-1}(\varphi)}.$$

不妨设

$$[y(t_j(\varphi)+\tau)+(-1)^j]e^{t_j(\varphi)}=y_j, \tag{2.2.7}$$

则

$$y_{j-1}=y_j+2(-1)^{j-1}e^{t_{j-1}(\varphi)}, \qquad j=1,2,\cdots,n(\varphi).$$

显然

$$y_{n(\varphi)}=[y(0)+(-1)^{n(\varphi)}]e^{-\tau}=\psi(0)e^{-\tau}-J_{n(\varphi)}(\varphi),$$

由此可得

$$y_{n(\varphi)-1}=\psi(0)e^{-\tau}-J_{n(\varphi)}(\varphi)+2(-1)^{n(\varphi)-1}e^{t_{n(\varphi)-1}(\varphi)}=\psi(0)e^{-\tau}-J_{n(\varphi)-1}(\varphi).$$

一般的，易得下面递推公式

$$y_j=\psi(0)e^{-\tau}-J_j(\varphi), \quad j=1,2,\cdots,n(\varphi). \tag{2.2.8}$$

将式 (2.2.7) 与 (2.2.8) 代入式 (2.2.6), 当 $t_j(\varphi)<t-\tau\le t_{j-1}(\varphi)$ 时，有

$$y(t)=[\psi(0)e^{-\tau}-J_j(\varphi)]e^{-(t-\tau)}-(-1)^j, \quad j=1,2,\cdots,n(\varphi).$$

让 $t=\tau$，则 $j=1$, 且

$$y(\tau)=\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)+1, \tag{2.2.9}$$

当 $t>\tau$ 时，从 τ 到 t 对 (2.1.1) 中第二式积分，可得

$$y(t)=e^{-t}[y(\tau)e^{\tau}-\int_\tau^t e^s f(x(s-\tau))ds]=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)+1-\int_0^{t-\tau}e^s f(x(s))ds].$$

其次证明情形 (ii). 利用与上面类似的证明，易推得

$$y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}+J_j(\varphi)]+(-1)^j, \text{ 当 } t_j(\varphi)<t-\tau\le t_{j-1}(\varphi), \quad j=1,2,\cdots,n(\varphi)$$

与

$$y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1-\int_0^{t-\tau}e^s f(x(s))ds], \text{ 当 } t>\tau. \tag{2.2.10}$$

注意到 $\varphi\in\widetilde{C}_\sigma^-$，有 $\varphi(0)\le\sigma$, 又 $\sigma\ge1$, 于是对 $t>0$ 有

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}[\varphi(0)+\int_0^t e^s f(y(s-\tau))ds] \\ &\le e^{-t}(\sigma+e^t-1) \\ &\le \sigma. \end{aligned}$$

因此，由 (2.2.10) 式，当 $t > \tau$ 时

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - e^{t-\tau}] \\ &= e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1. \end{aligned}$$

证毕.

引 理 2.2.2 如果 $\sigma = 1, \Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, $(x(t), y(t))$ 是系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 具初值 Φ 的解，则下述命题成立:

(i) 若 $\psi(0) \neq 1$, 则

$$y(t) > 1, \quad 当\ 0 < t < T_1, \tag{2.2.11}$$

其中

$$T_1 = \ln\{\frac{1}{2}[\psi(0) + e^\tau J_{2k_1+1}(\varphi)]\}, \tag{2.2.12}$$

上式中

$$k_1 = \min\{k \in N; 0 \leq k \leq n^+(\varphi) - 1, \ 且 \ -J_{2k+2}(\varphi) < \psi(0)e^{-\tau}\}; \tag{2.2.13}$$

(ii) 若 $\varphi(0) \neq 1$, 则

$$x(t) > 1, \quad 当\ 0 < t < T_2, \tag{2.2.14}$$

式中

$$T_2 = \ln\{\frac{1}{2}[\varphi(0) + e^\tau J_{2k_2+1}(\psi)]\}, \tag{2.2.15}$$

其中

$$k_2 = \min\{k \in N; 0 \leq k \leq n^+(\psi) - 1, \ 且 \ -J_{2k+2}(\psi) < \varphi(0)e^{-\tau}\}; \tag{2.2.16}$$

(iii) 若 $\psi(0) \neq 1$, 且

$$\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) \leq 2,$$

或

$$\varphi(0) \neq 1 \ 及\ \psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) \leq \varphi(0) + e^\tau J_{2k_2+1}(\psi), \tag{2.2.17}$$

则

$$y(t) \leq 1, \quad 当\ t > T_1,$$

此处 T_1 的意义见 (2.2.12)-(2.2.13);

(iv) 如果 $\varphi(0) \neq 1$, 且

$$\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) \leq 2,$$

或

$$\psi(0) \neq 1 \ 及\ \varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) \leq \psi(0) + e^\tau J_{2k_1+1}(\varphi),$$

则

$$x(t) \le 1, \quad 当\ t > T_2.$$

这里 T_2 的意义见 (2.2.15)-(2.2.16).

证 明 : 考虑命题 (i). 对这种情形，首先注意到

$$2n^+(\varphi) = n(\varphi) + 1,\ 若\ n(\varphi)\ 是奇数;\ 2n^+(\varphi) = n(\varphi),\ 若\ n(\varphi)\ 是偶数,$$

可发现

$$-J_{2n^+(\varphi)}(\varphi) = -(-1)^{2n^+(\varphi)-1}e^{-\tau} = e^{-\tau} < \psi(0)e^{-\tau},$$

这意味着 k_1 存在，且 $0 \le k_1 \le n^+(\varphi) - 1$. 再者，注意到 $J_{2k+1}(\varphi)$ 关于 k 是单调递减的，及

$$2n^-(\varphi) + 1 = n(\varphi),\ 若\ n(\varphi)\ 是奇数;\ 2n^-(\varphi) + 1 = n(\varphi) + 1,\ 若\ n(\varphi)\ 是偶数,$$

从而有

$$\psi(0) + e^{\tau}J_{2k_1+1}(\varphi) > 1 + e^{\tau}J_{2n^-(\varphi)+1}(\varphi) = 2,$$

因而 $0 < T_1 < \infty$. 下面分两种情形证明 (2.2.11).

情形 (a). $\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) \le 2$

显然, $\psi(0)e^{-\tau} \le 2 - J(\varphi) = -J_0(\varphi)$. 由 (2.2.13) 可导出

$$-J_{2k}(\varphi) \ge \psi(0)e^{-\tau}, \quad (k = 0, 1, \cdots, k_1),$$

且

$$-J_{2k_1+2}(\varphi) < \psi(0)e^{-\tau} \le -J_{2k_1}(\varphi), \tag{2.2.18}$$

由 (2.2.1) 和 (2.2.18), 可得

$$\begin{aligned} y(\tau + t_{2k_1}(\varphi)) &= e^{-t_{2k_1}(\varphi)}[\psi(0)e^{-\tau} + J_{2k_1+1}(\varphi)] + (-1)^{2k_1+1} \\ &\le e^{-t_{2k_1}(\varphi)}[-J_{2k_1}(\varphi) + J_{2k_1+1}(\varphi)] - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

由此并利用 $y(0) = \psi(0) > 1$ 及 $\tau + t_{2k_1}(\varphi) > 0$, 则必存在唯一的点 $t^* \in (0, \tau + t_{2k_1}(\varphi)]$, 使得

$$y(t) > 1,\ 对\ 0 < t < t^*,\ 且\ y(t^*) = 1. \tag{2.2.19}$$

注意到 $-\tau < t^* - \tau \le t_{2k_1}(\varphi)$. 设 j^* 是满足 $t_{j^*}(\varphi) < t^* - \tau \le t_{j^*-1}(\varphi)$ 的唯一正整数，那么 $2k_1 + 1 \le j^* \le n(\varphi)$. 由 (2.2.1) 和 (2.2.19), 当 $t_{j^*}(\varphi) < t - \tau < t^* - \tau$ 有

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J_{j^*}(\varphi)] + (-1)^{j^*} > 1,$$

又

$$y(t^*) = e^{-(t^*-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J_{j^*}(\varphi)] + (-1)^{j^*} = 1,$$

从而 j^* 必为奇数. 不妨取 $j^* = 2k^* + 1$, 则 $k_1 \le k^* \le n^+(\varphi) - 1$, 且

$$t_{2k^*+1}(\varphi) < t^* - \tau \le t_{2k^*}(\varphi)$$

及

$$e^{t^*-\tau} = \frac{1}{2}\left[\psi(0)e^{-\tau} + J_{2k^*+1}(\varphi)\right]. \tag{2.2.20}$$

因此, 有

$$e^{t_{2k^*+1}(\varphi)} < \frac{1}{2}\left[\psi(0)e^{-\tau} + J_{2k^*+1}(\varphi)\right] \le e^{t_{2k^*}(\varphi)},$$

即

$$-J_{2k^*+2}(\varphi) < \psi(0)e^{-\tau} \le -J_{2k^*}(\varphi). \tag{2.2.21}$$

注意到 $J_{2k}(\varphi)$ 关于 k 是单调递增的, 并比较 (2.2.18) 与 (2.2.21) 有 $k^* = k_1$. 于是由 (2.2.20) 有

$$t^* = \ln\left\{\frac{1}{2}[\psi(0) + e^{\tau}J_{2k_1+1}(\varphi)]\right\},$$

再结合 (2.2.12) 有 $t^* = T_1$, 将此代入 (2.2.19) 即得 (2.2.11).

情形 (b). $\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) > 2$

由此得 $-J_2(\varphi) < -J_0(\varphi) = 2 - J(\varphi) < \psi(0)e^{-\tau}$, 于是 $k_1 = 0$, 且

$$T_1 = \ln\left\{\frac{1}{2}\left[\psi(0) + e^{\tau}J(\varphi)\right]\right\} > \tau, \quad 对\ \tau < t < T_1, \tag{2.2.22}$$

由 (2.2.1) 与 (2.2.22) 有

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds\right] \\ &\ge e^{-(t-\tau)}\left(2e^{T_1-\tau} - 1 - \int_0^{t-\tau} e^s ds\right) \\ &> 1. \end{aligned}$$

进一步, 对一个给定的 $t \in (0, T_1)$, 选取充分小的正数 ε, 使得 $t < T_1 - \varepsilon$ 及 $\tau < T_1 - \varepsilon < T_1$, 则 $y(T_1 - \varepsilon) > 1$, 于是从 t 到 $T_1 - \varepsilon$ 积分 (2.1.2) 式得

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\left[y(T_1 - \varepsilon)e^{T_1-\varepsilon} - \int_t^{T_1-\varepsilon} e^s f(x(s-\tau))ds\right] \\ &> e^{-t}\left(e^{T_1-\varepsilon} - \int_t^{T_1-\varepsilon} e^s ds\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

即 (2.2.11) 成立. 结合情形 (a) 与 (b) 得命题 (i) 成立. 由 (2.1.2) 的对称性即可证明命题 (ii) 也成立.

现在我们来看命题 (iii). 显然, k_1 及 T_1 均存在, 且 $T_1 > 0$. 由 (2.2.17) 可看出, 须考虑以下两种情形:

情形 1. $\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) \le 2$

由命题 (i) 中情形 (a) 的证明, 知道 $T_1 = t^*$、而 t^* 是 $y(t) - 1$ 在 $(0, \infty)$ 上的第一个零点 (见 (2.2.19)), 因此 $y(T_1) = y(t^*) = 1$, 于是当 $t > T_1$, 有

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\left[y(T_1)e^{T_1} + \int_{T_1}^{t} e^s f(x(s-\tau))ds\right] \\ &> e^{-t}\left(e^{T_1} + \int_{T_1}^{t} e^s ds\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

情形 2. $\varphi(0) \neq 1$, 且 $2 < \psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) \le \varphi(0) + e^{\tau}J_{2k_2+1}(\psi)$

显然 k_2 存在, $k_1 = 0$ 且 (2.2.22) 成立. 从而

$$\begin{aligned} 0 < T_1 - \tau &= \ln\left\{\frac{1}{2}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)]\right\} \\ &\le \ln\left\{\frac{1}{2}[\varphi(0) + e^{\tau}J_{2k_2+1}(\psi)]\right\} \\ &= T_2. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

故 $t > T_1$ 时, 由 (2.2.1), (2.2.14) 与 (2.2.23) 有

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds\right] \\ &\le e^{-(t-\tau)}(2e^{T_1-\tau} - 1 + \int_0^{T_1-\tau} -e^s ds + \int_{T_1-\tau}^{t-\tau} e^s ds \\ &= 1. \end{aligned}$$

综合情形 1 与情形 2 有命题 (iii) 成立. 同理可证明命题 (iv). 引理证毕.

引 理 2.2.3. 如果 $\sigma = -1$,$(x(t), y(t))$ 是系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 具初值 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \tilde{X}_\sigma$ 的解, 则下述命题成立:

(I) 当 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \tilde{X}_\sigma^{+,+}$ 时,

(a) 若 $\varphi(0) \neq 1$, 或 $n(\psi)$ 是偶数, 则

$$x(t) > -1, \quad 对 \quad t > 0;$$

(b) 若 $\varphi(0) = -1$, 且 $n(\psi)$ 是奇数, 则

$$x(t) = -1, \quad 对 \quad 0 < t < t_{n(\psi)-1}(\psi) + \tau;$$

(c) 若 $n(\psi) \neq 1$, 或 $\psi(0) = -1$ 及 $n(\varphi)$ 是奇数, 则

$$x(t) > -1, \quad 对 \quad t > t_{n(\psi)-1}(\psi) + \tau;$$

(d) 若 $\psi(0) \neq -1$, 或 $n(\varphi)$ 是偶数，则

$$y(t) > -1, \quad 对\ t > 0;$$

(e) 若 $\psi(0) = -1$, 且 $n(\varphi)$ 是奇数，则

$$y(t) = -1, \quad 对\ 0 < t < t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau;$$

(f) 若 $n(\varphi) \neq 1$, 或 $\varphi(0) = -1$ 且 $n(\psi)$ 是奇数，则

$$y(t) > -1, \quad 对\ t > t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau.$$

(II) 当 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_{\sigma}^{+,-}$ 时，则

$$要么\ \varphi(0) \neq -1, \quad 要么\ n(\psi)\ 是奇数$$

可保证 $x(t) > -1 (t > 0)$, 又有

$$\varphi(0) = -1, \quad n(\psi)\ 是偶数$$

可保证 $x(t) = -1(0 < t < t_{n(\psi)-1}(\psi) + \tau)$ 与 $x(t) > -1(t > t_{n(\psi)-1}(\psi) + \tau)$.
(III) 当 $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma}^{-,+}$, 则

$$要么\ \psi(0) \neq -1, \ 要么\ \ n(\varphi)\ 是奇数$$

可保证 $y(t) > -1(t > 0)$, 又有

$$\psi(0) = -1, \quad n(\psi)\ 是偶数$$

可保证 $y(t) = -1(0 < t < t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau)$ 与 $y(t) > -1(t > t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau)$.
(IV) 当 $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma}^{-,-}$, 让

$$T_1 = \ln\left\{\frac{1}{2}[|\psi(0)| + e^{\tau} J_{2k_1+1}(\varphi)]\right\}, \quad T_2 = \ln\left\{\frac{1}{2}[|\varphi(0)| + e^{\tau} J_{2k_2+1}(\psi)]\right\},$$

其中

$$k_1 = \min\left\{k \in N; 0 \leq k \leq n^+(\varphi) - 1, \ 及 \ \ -J_{2k+2}(\varphi) \leq |\psi(0)|e^{-\tau}\right\},$$

$$k_2 = \min\left\{k \in N; 0 \leq k \leq n^+(\psi) - 1, \ 及 \ \ -J_{2k+2}(\psi) \leq |\varphi(0)|e^{-\tau}\right\},$$

则

(i) $y(t) \leq -1$(对 $0 \leq t \leq T_1$), $x(t) \leq -1$(对 $0 \leq t \leq T_2$);
(ii) 若 $|\psi(0)|e^{-\tau} + J(\varphi) < |\varphi(0)| + e^{\tau} J_{2k_2+1}(\psi)$, 有 $y(t) > -1$(当 $t > T_1$);
(iii) 若 $|\varphi(0)|e^{-\tau} + J(\psi) < |\psi(0)| + e^{\tau} J_{2k_1+1}(\varphi)$, 有 $x(t) > -1$(当 $t > T_2$).

证 明: 略.

最后，我们给出本节的几个主要定理及证明.

定 理 2.2.1 设 $\sigma > 1$ 及 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma$. 当 $t \to \infty$ 时，系统 (2.1.1) 和 (2.1.3)(或 (2.1.2) 和 (2.1.3)) 的解 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1,-1)$(或 $(1,1)$) .

证 明: 对系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 只须考察下面四种情形即可. (系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 的情形类似可证，从略.) (a) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$; (b) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$; (c) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,+}$; (d) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$. 只讨论情形 (a), 其他情形类似. 若 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 设 $C_1 = \varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1$, $C_2 = \psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1$. 由 (2.2.1) 与 (2.2.3), 当 $t > \tau$ 时，有

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}\left[C_1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right], \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}\left[C_2 - \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds\right], \end{cases} \quad \text{当 } t > \tau. \tag{2.2.24}$$

由上两式可推出

$$\begin{cases} x(t) \le (C_1 - 1)e^{-(t-\tau)} + 1, \\ y(t) \le (C_2 - 1)e^{-(t-\tau)} + 1, \end{cases} \quad \text{当 } t > \tau.$$

因为 $\sigma > 1$, 则必存在充分大的 $T > 0$, 当 $t > T$ 时，使得

$$x(t) < \sigma, \quad y(t) < \sigma,$$

因此，由 (2.2.24), 当 $t > T + \tau$ 时，有

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}\left[C_1 + \int_0^T e^s f(y(s))ds - e^T\right] + 1, \\ \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}\left[C_2 - \int_0^T e^s f(x(s))ds + e^T\right] - 1. \end{cases}$$

从而 $t \to \infty$ 时， $(x(t), y(t)) \to (1,-1)$.

定 理 2.2.1' 若 $\sigma < -1$, $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma$. 则 $t \to \infty$ 时，系统 (2.1.1) 和 (2.1.3)(或 (2.1.2) 和 (2.1.3)) 的解 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (-1,1)$(或 $(-1,-1)$) .

证 明: 略.

[**注** 2.2.3] 上面的定理说明：当 $|\sigma| > 1$ 时，两模型都有唯一平衡点.

定 理 2.2.2 若 $\sigma = 1$, $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_\sigma$, $(x^\Phi(t), y^\Phi(t))$ 是系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 的解. 则 $t \to \infty$ 时， $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1,-1)$ 或 $(1,1)$. 且 $t \to \infty$ 时， $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1,-1)$ 的充要条件是下列之一满足

(a) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,\pm}$;

(b) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$ 且 $\varphi(0)e^{-\tau} \le J(\psi)$;

(c) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 且 $\psi(0)e^{-\tau} > J(\varphi)$;

(d) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 且 $\psi(0)e^{-\tau} \le J(\varphi)$ 及

$$\varphi(0)e^{-\tau} + e^\tau J_{2K}(\varphi) \le \psi(0) - J(\psi),$$

其中 K 为满足下式的唯一正整数

$$\psi(0)e^{-\tau} \le J_{2K-1}(\varphi) \text{ 及 } 1 \le K \le n^+(\varphi).$$

另一方面, $t\to\infty$ 时, $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1,1)$ 的充要条件是下列之一满足

(e) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$ 且 $\varphi(0)e^{-\tau} > J(\psi)$;

(f) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 且 $\psi(0)e^{-\tau} \le J(\varphi)$ 及

$$\varphi(0)e^{-\tau} + e^\tau J_{2K}(\varphi) > \psi(0) - J(\psi),$$

这里 K 的含义如 (d) 中所述.

证 明: 我们分几种可能情形来证明定理.

情 形 (i). $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$

从引理 2.2.1 可看出, 若 $t>\tau$, 则

$$\begin{cases} x(t) = [\varphi(0)e^{-\tau} - J(\psi)]\, e^{-(t-\tau)} + 1, \\ y(t) = [\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)]\, e^{-(t-\tau)} - 1, \end{cases}$$

显然 $(x(t), y(t)) \to (1,-1) (t\to\infty)$.

情 形 (ii). $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,+}$

由 (2.2.2) 及 (2.2.3), 若 $t>\tau$ 得到

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right], \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1. \end{cases}$$

取 $T>0$ 充分大, 使得

$$y(t) < 1, \text{ 当 } t > T.$$

那么, 当 $t > T+\tau$, 注意到 (2.1.3) 及假设 $\sigma = 1$, 可发现

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^T e^t f(y(t)dt + \int_T^{t-\tau} e^s f(y(s)ds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^T e^t f(y(t))dt - e^T\right] + 1. \end{aligned}$$

因此 $(x(t), y(t)) \to (1,-1)$ ($t\to\infty$).

情 形 (iii). $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$

由 (2.2.1) 与 (2.2.3), 若 $t>\tau$ 有

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} - J(\psi)] + 1, \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds\right]. \end{cases}$$

考虑下面两种情况:

(I) $\varphi(0)e^{-\tau} \le J(\psi)$;

(II) $\varphi(0)e^{-\tau} > J(\psi)$.

对情形 (I), 有 $x(t) \le 1\ (t > \tau)$. 因此若 $t > 2\tau$ 有

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{\tau} e^s f(x(s))ds + e^{\tau}\right] - 1.$$

从而 $(x(t), y(t)) \to (1, -1)(\ t \to \infty)$. 对情形 (II), 类似可得 $(x(t), y(t)) \to (1, 1)$ $(t \to \infty)$.

情 形 (iv). $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma}^{+,+}$ 且 $\psi(0)e^{-\tau} > J(\varphi)$

首先我们称必存在 $T > 0$, 使得

$$x(t) \le 1, \quad 若\ t > T. \tag{2.2.25}$$

若不然, 设 t_n 为一数列, 有 $t_n \to \infty, t_n > 0$ 且 $x(t_n) > 1$ ($n = 1, 2, \cdots$). 对给定的 $t \in (0, \infty)$, 对某个正整数 N 取 $0 < t < t_N$. 积分 (2.1.1) 从 t 到 t_N, 可得

$$x(t) = e^{-t}\left[x(t_N)e^{t_N} - \int_t^{t_N} e^s f(y(s-\tau))ds\right] > 1. \tag{2.2.26}$$

由 (2.2.1), 当 $t > \tau$ 时, 有

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1 > 1,$$

因此, 若 $t > 2\tau$, 从 (2.2.3) 得

$$x(t) = e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{\tau} e^t f(y(t))dt + e^{\tau}\right] - 1.$$

此与 (2.2.26) 矛盾, 从而 (2.2.25) 成立. 于是, 当 $t > T + \tau$ 时,

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right], \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{T} e^t f(x(t))dt + e^{T}\right] - 1, \end{cases} \tag{2.2.27}$$

利用与情形 (ii) 类似推导, 易证 $(x(t), y(t)) \to (1, -1)(t \to \infty)$.

情 形 (v). $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma}^{+,+}$ 且 $\psi(0)e^{-\tau} \le J(\varphi)$

显然有 $y(0) \ge 1$. 又由 (2.2.9) 知 $y(\tau) \le 1$. 设 t^* 是 $y(t) - 1$ 在 $[0, \infty)$ 上的第一个零点, 那么 $0 \le t^* \le \tau$, 且有

$$y(t) = e^{-t}\left[y(t^*)e^{t^*} - \int_{t^*}^{t} e^s f(x(s-\tau))ds\right] \le 1, \quad 若\quad t > t^*$$

与

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t^*} e^t f(y(t)dt + \int_{t^*}^{t-\tau} e^s f(y(s)ds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 2e^{t^*}\right] + 1, \quad 若\ t > t^* + \tau. \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

取 K 如定理条件 (d) 所述. 由于 $\psi(0)e^{-\tau} \le J_1(\varphi) = J(\varphi)$, 可知满足 $1 \le K \le n^+(\varphi)$ 的 K 存在. 讨论两种情形:

(A) $K \ne n^+(\varphi)$, 即 $1 \le K \le n^+(\varphi) - 1$ 且

$$J_{2K+1}(\varphi) < \psi(0)e^{-\tau} \le J_{2K-1}(\varphi). \tag{2.2.29}$$

并注意到: 当 $K = 1, 2, \cdots, n^-(\varphi)$ 时, $J_{2K+1}(\varphi)$ 是单调递减的. 又 $n(\varphi)$ 为奇数时, $2n^+(\varphi) - 1 = n(\varphi)$; $n(\varphi)$ 为偶数时, $2n^+(\varphi) - 1 = n(\varphi) - 1$. 当 $t_{n(\varphi)}(\varphi) + \tau \le t \le t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau$ 时, 由 (2.2.1) 及 $y(t)$ 的连续性, 有

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J_{n(\varphi)}(\varphi)] - (-1)^{n(\varphi)} \\ &> e^{-t_{n(\varphi)-1}(\varphi)}[J_{2n^+(\varphi)-1}(\varphi) - J_{n(\varphi)}(\varphi)] - (-1)^{n(\varphi)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

因为 $t_{n(\varphi)}(\varphi) = -\tau$ 及 $t_0(\varphi) = 0$, 可得 $t^* > t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau$ 与 $t_{n(\varphi)-1}(\varphi) < t^* - \tau \le t_0(\varphi)$. 从而, 必存在正整数 j^* 满足 $t_{j^*}(\varphi) < t^* - \tau \le t_{j^*-1}(\varphi)$ 及 $1 \le j^* \le n(\varphi) - 1$, 因此

$$y(t^*) = e^{-(t^*-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J_{j^*}(\varphi)] - (-1)^{j^*} = 1,$$

且对 $t_{j^*}(\varphi) + \tau < t < t^*$, 有

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J_{j^*}(\varphi)] - (-1)^{j^*} > 1,$$

于是 j^* 必为偶数. 不妨设 $j^* = 2K^*$. 则 $t_{2K^*}(\varphi) < t^* - \tau \le t_{2K^*-1}(\varphi)$, $1 \le K^* \le n^+(\varphi) - 1$ 及

$$\psi(0)e^{-\tau} - J_{2K^*}(\varphi) = 2e^{t^*-\tau}. \tag{2.2.30}$$

由此推得

$$2e^{t_{2K^*}(\varphi)} < \psi(0)e^{-\tau} - J_{2K^*}(\varphi) \le 2e^{t_{2K^*-1}(\varphi)},$$

亦即

$$J_{2K^*+1}(\varphi) < \psi(0)e^{-\tau} \le J_{2K^*-1}(\varphi),$$

再结合 (2.2.29), 得 $K^* = K$, 由此及 (2.2.30), 有

$$e^{t^*} = \frac{1}{2}[\psi(0) - e^{\tau} J_{2K}(\varphi)]. \tag{2.2.31}$$

(B) $K = n^+(\varphi)$, 此即 $\psi(0)e^{-\tau} \le J_{2n^+(\varphi)-1}(\varphi)$. 由 (2.2.1) 有下式

$$y(t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau) \le e^{-t_{n(\varphi)-1}(\varphi)}[J_{2n^+(\varphi)-1}(\varphi) - J_{n(\varphi)}(\varphi)] - (-1)^{n(\varphi)} = 1,$$

从而 $0 \le t^* \le t_{n(\varphi)-1}(\varphi) + \tau$, 即 $t_{n(\varphi)}(\varphi) \le t^* - \tau \le t_{n(\varphi)-1}(\varphi)$, 所以

$$y(t^*) = e^{-(t^*-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J_{n(\varphi)}(\varphi)] - (-1)^{n(\varphi)} = 1.$$

若 $n(\varphi)$ 是奇数, 则 $2K=n(\varphi)+1$, 且 $\psi(0)e^{-\tau}=J_{n(\varphi)}(\varphi)=e^{-\tau}$. 因而 $J_{2K}(\varphi)=-e^{-\tau}$, $\psi(0)=1$ 及 $t^*=0$, 从而 (2.2.31) 成立. 若 $n(\varphi)$ 是偶数, 则 $2K=n(\varphi)$, (2.2.31) 也成立. 由 (2.2.1),(2.2.28) 及 (2.2.31), 当 $t>t^*+\tau$ 时有

$$\begin{cases} x(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-\psi(0)+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)\right]+1, \\ y(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)+1-\int_0^{t-\tau}e^{s}f(x(s))ds\right], \end{cases} \tag{2.2.32}$$

利用与情形 (iii) 类似推导, 易知: 由 $\varphi(0)e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)\le\psi(0)-J(\psi)$ 可得 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ $(t\to\infty)$; 由 $\varphi(0)e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)>\psi(0)-J(\psi)$ 可得 $(x(t),y(t))\to(1,1)$ $(t\to\infty)$. 基于以上讨论, 易得余下部分证明. 证毕.

定 理 2.2.2' 若 $\sigma=-1$, $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma$, $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))$ 是系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 的解. 则当 $t\to\infty$ 时, $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(-1,-1)$ 或 $(-1,1)$. 进一步 $t\to\infty$ 时, 有

(i) 若 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 则 $(x(t),y(t))\to(-1,-1)$ 当且仅当

$$\varphi(0)=-1,\quad n(\psi)=1,$$

且

$$\psi(0)\ne-1 \text{ 或 } n(\varphi) \text{ 是奇数}.$$

又有 $(x(t),y(t))\to(-1,1)$ 当且仅当

$$\varphi(0)\ne-1 \text{ 或 } n(\psi)\ne1 \text{ 或 } \psi(0)\ne-1 \text{ 且 } n(\varphi) \text{ 是偶数}.$$

(ii) 若 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$, 则 $(x(t),y(t))\to(-1,1)$.

(iii) 若 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$, 则 $(x(t),y(t))\to(-1,-1)$ 当且仅当下列之一成立:

(a) $\psi(0)\ne-1$, $J(\psi)\le|\varphi(0)|e^{-\tau}$;

(b) $n(\varphi)$ 是偶数, $J(\psi)\le|\varphi(0)|e^{-\tau}$;

(c) $n(\varphi)\ne1$ 且为奇数, $J(\psi)\le|\varphi(0)|e^{-\tau}-2e^{\tau+t_{n(\varphi)-1}(\varphi)}+2$.

另有 $(x(t),y(t))\to(-1,1)$ 当且仅当下列之一成立:

(d) $J(\psi)>|\varphi(0)|e^{-\tau}$;

(e) $\psi(0)=-1$, $n(\varphi)=1$;

(f) $\psi(0)=-1$, $n(\varphi)$ 是奇数, $J(\psi)>|\varphi(0)|e^{-\tau}-2e^{\tau+t_{n(\varphi)-1}(\varphi)}+2$.

(iv) 若 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$, 则 $(x(t),y(t))\to(-1,-1)$ 当且仅当

$$J(\varphi)>|\psi(0)|e^{-\tau} \text{ 及 } |\varphi(0)|e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)\ge|\psi(0)|-J(\psi),$$

其中 K 是满足 $1\le K\le n^-(\varphi)$ 及

$$J_{2K+1}(\varphi)\le|\psi(0)|e^{-\tau}<J_{2K-1}(\varphi)$$

的唯一正整数. 另有 $(x(t),y(t))\to(-1,1)$ 当且仅当

$$J(\varphi)\le|\psi(0)|e^{-\tau}$$

或

$$J(\varphi)>|\psi(0)|e^{-\tau};\quad |\varphi(0)|e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)<|\psi(0)|-J(\psi),$$

其中 K 如 (iv) 中所述.

证 明 : 略.

定 理 2.2.3 若 $\sigma=1$, 且 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma$, $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))$ 是系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 的解. 则当 $t\to\infty$ 有

(i) $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(1,1)$ 当且仅当下列条件之一满足

(A) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$;

(B) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$, 且 $\varphi(0)e^{-\tau}\le J(\psi)$;

(C) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$, 且 $\psi(0)e^{-\tau}\le J(\varphi)$;

(D) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 且 $\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)\le\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)$ 及 $\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)\le\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)$, 其中

$$k_1^*=\begin{cases}k_1, & 若\ \psi(0)\ne1,\\ n^-(\varphi), & 若\ \psi(0)=1.\end{cases}\tag{2.2.33}$$

上式中 k_1 的定义见 (2.2.13), 以及

$$k_2^*=\begin{cases}k_2, & 若\ \varphi(0)\ne1,\\ n^-(\psi), & 若\ \varphi(0)=1.\end{cases}\tag{2.2.34}$$

上式中 k_2 的定义见 (2.2.16).

(ii) $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(1,-1)$ 当且仅当下列条件之一成立

(E) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$, 及 $\varphi(0)e^{-\tau}>J(\psi)$.

(F) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 及 $\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)>\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)$, k_1^* 的定义见 (2.2.33).

(iii) $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(-1,1)$ 当且仅当下列条件之一成立

(G) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$, 且 $\psi(0)e^{-\tau}>J(\varphi)$,

(H) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 且 $\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)>\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)$, k_2^* 的定义见 (2.2.34).

证 明 : 分几种情形来证明定理

(I). $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$

由 (2.2.2) 及 (2.2.4), 有

$$\begin{cases}x(t)=[\varphi(0)e^{-\tau}-J(\psi)]\,e^{-(t-\tau)}+1,\\ y(t)=[\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)]\,e^{-(t-\tau)}+1,\end{cases}\quad 若\ t>\tau,$$

由此易知 $(x(t),y(t))\to(1,1)$ ($t\to\infty$).

(II). $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$

由 (2.2.1) 与 (2.2.4), 即得

$$\begin{cases} x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}-J(\psi)]+1, \\ y(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1+\int_0^{t-\tau}e^sf(x(s))ds\right], \end{cases} \quad 若 \quad t>\tau.$$

如果 $\varphi(0)e^{-\tau}\le J(\psi)$, 则 $x(t)\le 1=\sigma$(当 $t>\tau$), 于是当 $t>2\tau$ 时

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1+\int_0^{\tau}e^tf(x(t))dt+\int_\tau^{t-\tau}e^sds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1+\int_0^{\tau}e^tf(x(t))dt-e^\tau\right]+1. \end{aligned}$$

因此, $(x(t),y(t))\to(1,1)$ $(t\to\infty)$.

如果 $\varphi(t)e^{-\tau}>J(\psi)$, 则 $x(t)>1=\sigma$(当 $t>\tau$), 从而当 $t>2\tau$ 时

$$y(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1+\int_0^{\tau}e^tf(x(t))dt+e^\tau\right]-1,$$

所以有 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ $(t\to\infty)$.

(III). $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$

利用与情形 (II) 类似推导, 易证 $t\to\infty$ 时, 若 $\psi(0)e^{-\tau}\le J(\varphi)$, 则 $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(1,1)$; 若 $\psi(0)e^{-\tau}>J(\varphi)$, 则 $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(-1,1)$.

(IV). $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$

由 (2.2.1) 和 (2.2.3) 得

$$\begin{cases} x(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-1+\int_0^{t-\tau}e^sf(y(s))ds\right], \\ y(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1+\int_0^{t-\tau}e^sf(x(s))ds\right], \end{cases} \quad 若 \quad t>\tau. \tag{2.2.35}$$

取 k_1^* 与 k_2^* 如 (2.2.33) 及 (2.2.34) 所述, 则有 $0\le k_1^*\le n^-(\varphi)$, $0\le k_2^*\le n^-(\psi)$, $J_{2k_1^*+1}(\varphi)$ 与 $J_{2k_2^*+1}(\psi)$ 均存在, 且

$$e^{-\tau}\le J_{2k_1^*+1}(\varphi)\le J(\varphi),\quad e^{-\tau}\le J_{2k_2^*+1}(\psi)\le J(\psi). \tag{2.2.36}$$

设

$$T_1^*=\ln\left\{\frac{1}{2}[\psi(0)+e^\tau J_{2k_1^*+1}(\varphi)]\right\} \tag{2.2.37}$$

及

$$T_2^*=\ln\left\{\frac{1}{2}[\varphi(0)+e^\tau J_{2k_2^*+1}(\psi)]\right\}.$$

容易看出 $0\le T_i^*<\infty, i=1,2$.

又从 (2.2.36), 可得

$$\frac{\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J(\varphi)}\le\frac{\varphi(0)+e^{\tau}J(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)}.$$

以下我们考虑三种情形:

情形 1.

$$e^{-\tau}\le\frac{\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J(\varphi)}\le\frac{\varphi(0)+e^{\tau}J(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)}\le e^{\tau}. \tag{2.2.38}$$

首先证明: 当 $t>T_1^*+\tau$ 时, 由 (2.2.38) 的第一不等式可推得下式

$$x(t)=2e^{-(t-T_1^*)}\left[\frac{\varphi(0)+e^{\tau}J(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)}-e^{\tau}\right]+1. \tag{2.2.39}$$

为此我们考虑两种可能情形:

(a). $\psi(0)\neq 1$. 由 (2.2.11), (2.2.33) 及 (2.2.37), 有 $k_1^*=k_1$, 且 $T_1^*=T_1>0$. 从引理 2.2.2 中的 (i), 可看出

$$y(t)>1=\sigma, \quad 若\ 0<t<T_1=T_1^*, \tag{2.2.40}$$

另一方面, 由 (2.2.34) 及 (2.2.38) 的第一个不等式,

如果 $\varphi(0)=1$, 则 $k_2^*=n^-(\psi)$. 且

$$\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)\le\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)=2.$$

若 $\varphi(0)\neq 1$, 则 $k_2^*=k_2$, 而且

$$\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)\le\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2+1}(\psi).$$

即有 (2.2.17) 成立. 因此

$$y(t)\le 1=\sigma, \quad 若\ t>T_1=T_1^*, \tag{2.2.41}$$

对 $t>T_1^*+\tau$, 由 (2.2.35), (2.2.40) 及 (2.2.41) 得

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-1+\int_0^{T_1^*}-e^{s}ds+\int_{T_1^*}^{t-\tau}e^{s}ds\right]\\&=e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-2e^{T_1^*}\right]+1.\end{aligned}$$

于是再结合 (2.2.37), 即证得 (2.2.39).

(b). $\psi(0)=1$. 即 $k_1^*=n^-(\varphi)$, 则当 $t>0$ 时, 有

$$\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)=2 \ 与\ T_1^*=0. \tag{2.2.42}$$

从 0 到 t 积分 (2.1.2) 中第二式，我们看到

$$y(t)=e^{-t}\left[\psi(0)+\int_0^{t-\tau}e^sf(x(s-\tau))ds\right]\le 1.$$

当 $t>\tau=T_1^*+\tau$，由 (2.2.4) 可得

$$x(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-2\right]+1.$$

由此，并注意到 (2.2.42)，即得 (2.2.39).

结合情形 (a) 与 (b)，我们证明了：当 $t>T_1^*+\tau$ 时，由 (2.2.38) 必可推得 (2.2.39) 成立．再由 (2.1.2) 的对称性，易证由 (2.2.38) 还可导出

$$y(t)=2e^{-(t-T_2^*)}\left[\frac{\psi(0)+e^{\tau}J(\varphi)}{\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)}-e^{\tau}\right]+1,\quad 若\quad t>T_2^*+\tau,$$

所以，$(x(t),y(t))\to(1,1)$ ($t\to\infty$).

情形 2.

$$\frac{\varphi(0)+e^{\tau}J(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)}>e^{\tau}.\tag{2.2.43}$$

对此由 (2.2.36) 有

$$\frac{\psi(0)+e^{\tau}J(\varphi)}{\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)}<\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-1+e^{\tau}J(\varphi)}{\varphi(0)+1}.\tag{2.2.44}$$

另一方面，对任意 $\varphi\in\tilde{C}_\sigma$，又有

$$0=t_0(\varphi)>t_1(\varphi)>\cdots>t_{n(\varphi)}(\varphi)=-\tau$$

与

$$J(\varphi)=\begin{cases}-e^{-\tau}+2\sum\limits_{j=1}^{n(\varphi)}(-1)^{j-1}e^{t_j(\varphi)}, & 若\ n(\varphi)\ 是奇数,\\ -e^{-\tau}+2\sum\limits_{j=1}^{n(\varphi)-1}(-1)^{j-1}e^{t_j(\varphi)}, & 若\ n(\varphi)\ 是偶数.\end{cases}$$

因而，对任意 $\varphi\in\tilde{C}_\sigma$，有

$$\begin{aligned}J(\varphi)&=-e^{-\tau}+2\sum_{j=1}^{2n^+(\varphi)-1}(-1)^{j-1}e^{t_j(\varphi)}\\&=-e^{-\tau}+2-2\left[1-e^{t_1(\varphi)}\right]-2\left[e^{t_2(\varphi)}-e^{t_3(\varphi)}\right]-\cdots\\&\quad-2\left[e^{t_{2n^+(\varphi)-2}(\varphi)}-e^{t_{2n^+(\varphi)-1}(\varphi)}\right]\\&<2-e^{-\tau},\end{aligned}$$

将上式代入 (2.2.44). 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\psi(0)+e^{\tau}J(\varphi)}{\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)} &< \frac{\varphi(0)e^{\tau}-\varphi(0)(e^{\tau}-e^{-\tau})+2-e^{-\tau}-1+2e^{\tau}-1}{\varphi(0)+1} \\
&= \frac{\varphi(0)e^{\tau}+e^{\tau}-[\varphi(0)-1](e^{\tau}-e^{-\tau})}{\varphi(0)+1} \\
&\le e^{\tau},
\end{aligned}
$$

即有 (2.2.38) 的第一个不等式成立. 于是 (2.2.39) 成立, 所以

$$
\begin{cases}
x(t)=2e^{-(t-T_1^*)}\left[\dfrac{\varphi(0)+e^{\tau}J(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J_{2k_1^*+1}(\varphi)}-e^{\tau}\right]+1, & \\
 & \text{若} \quad t>T_1^*+\tau, \\
y(t)=e^{-(t-\tau)}\left[\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)-1+\int_0^{t-\tau}e^{s}f(x(s))ds\right], &
\end{cases}
$$

利用与情形 (II) 的类似推导, 易证: 由 (2.2.43), 必有 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ ($t\to\infty$).

情形 3. $\dfrac{\varphi(0)+e^{\tau}J_{2k_2^*+1}(\psi)}{\psi(0)+e^{\tau}J(\varphi)}<e^{-\tau}$.

与情形 2 类似, 可得 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ ($t\to\infty$). 综上所述, 得到定理结论. 证毕.

定 理 2.2.3'. 若 $\sigma=-1$. 且 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\tilde{X}_{\sigma},(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))$ 是系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 的解. 则当 $t\to\infty$, 有

(i) 若 $\Phi\in\tilde{X}_{\sigma}^{+,+}$, 则 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(-1,-1)$ 当且仅当

$$\varphi(0)\neq-1 \text{ 或 } n(\psi)\neq1 \text{ 或 } \psi(0)=-1 \text{ 及 } n(\varphi) \text{ 是奇数}$$

且

$$\psi(0)\neq-1 \text{ 或 } n(\varphi)\neq1 \text{ 或 } \varphi(0)=-1 \text{ 及 } n(\psi) \text{ 是奇数.}$$

还有 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(-1,1)$ 当且仅当

$$\varphi(0)=-1,n(\psi)=1 \text{ 及 } \psi(0)\neq-1 \text{ 或 } n(\varphi) \text{ 是偶数.}$$

再有 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(1,-1)$ 当且仅当

$$\psi(0)=-1,n(\varphi)=1 \text{ 及 } \varphi(0)\neq-1 \text{ 或 } n(\psi) \text{ 是偶数.}$$

(ii) 若 $\Phi\in\tilde{X}_{\sigma}^{+,-}$, 则 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(1,-1)$ 当且仅当下列之一成立:

(a) $\varphi(0)\neq-1$ 或 $n(\psi)$ 是奇数, 且 $J(\varphi)\le|\psi(0)|e^{-\tau}$;

(b) $J(\varphi)\le|\psi(0)|e^{-\tau}-2e^{\tau+t_{n(\psi)-1}(\psi)}+2$.

另有 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(-1,-1)$ 当且仅当下列之一成立:

(c) $\varphi(0) = -1$, $n(\psi)$ 是偶数，且

$$J(\varphi) > |\psi(0)|e^{-\tau} - 2e^{\tau+t_{n(\psi)-1}(\psi)} + 2;$$

(d) $J(\varphi) > |\psi(0)|e^{-\tau}$.

(iii) 若 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,+}$, 则 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (-1, 1)$ 当且仅当下列之一成立：

(e) $\psi(0) \neq -1$ 或 $n(\varphi)$ 是奇数，且 $J(\psi) \leq |\varphi(0)|e^{-\tau}$;

(f) $J(\psi) \leq |\varphi(0)|e^{-\tau} - 2e^{\tau+t_{n(\varphi)-1}(\varphi)} + 2$.

另一方面，$(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (-1, -1)$ 当且仅当下列之一成立：

(g) $\psi(0) = -1$,$n(\varphi)$ 是偶数且

$$J(\psi) > |\varphi(0)|e^{-\tau} - 2e^{\tau+t_{n(\varphi)-1}(\varphi)} + 2;$$

(h) $J(\psi) > |\varphi(0)|e^{-\tau}$.

(iv) 若 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$, 则 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (-1, -1)$ 当且仅当

$$|\varphi(0)|e^{-\tau} + J(\psi) < |\psi(0)| + e^\tau J_{2k_1+1}(\varphi)$$

且

$$|\psi(0)|e^{-\tau} + J(\varphi) < |\varphi(0)| + e^\tau J_{2k_2+1}(\psi).$$

另一方面，$(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (-1, 1)$ 当且仅当

$$|\varphi(0)|e^{-\tau} + J(\psi) \geq |\psi(0)| + e^\tau J_{2k_1+1}(\varphi),$$

再者，$(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1, -1)$ 当且仅当

$$|\psi(0)|e^{-\tau} + J(\varphi) \geq |\varphi(0)| + e^\tau J_{2k_2+1}(\psi),$$

其中 k_1,k_2 满足

$$k_1 = \min\left\{k \in N; 0 \leq k \leq n^+(\varphi) - 1, \ \text{且} \ -J_{2k+2}(\varphi) \leq |\psi(0)|e^{-\tau}\right\}$$

与

$$k_2 = \min\left\{k \in N; 0 \leq k \leq n^+(\psi) - 1, \ \text{且} \ -J_{2k+2}(\psi) \leq |\varphi(0)|e^{-\tau}\right\}.$$

证 明：略.

[**注** 2.2.4] 定理 2.2.1 ~2.2.3' 中不再有限制 $\Phi \in X_\sigma$, 只要 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma$. 从而分别改进了文 [50] 中的相应定理.

下面通过一个例子来验证定理 2.2.2 的条件.

例 2.2.1. 考察方程组 (2.1.1) 和 (2.1.3). 取 $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = 1$, 设 $\varphi(t) = 1+4\lambda(\frac{1}{2}+sint)$ 及 $\psi(t) = 1 + 4\mu(\frac{1}{2} + sin\frac{t}{2})$ $(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0)$, 其中 λ 和 μ 是实数，令 $\Phi = (\varphi, \psi)$. 则

若 $(\lambda,\mu)\in E$,$(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(1,1)$,若 $(\lambda,\mu)\overline{\in}E$ 有 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(1,-1)$. 因此, $E=E_1\cup E_2\cup E_3$, 其中 $E_1=\{(\lambda,\mu)\in R^2:\lambda>\mu e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{6}},\ 0<\mu\le e^{\frac{\pi}{3}}-1\}$;$E_2=\{(\lambda,\mu)\in R^2:\lambda>0,\ \mu=0\}$; $E_3=\{(\lambda,\mu)\in R^2:\lambda>\frac{\pi}{6}-1,\ \mu<0\}$. 见图 2.1

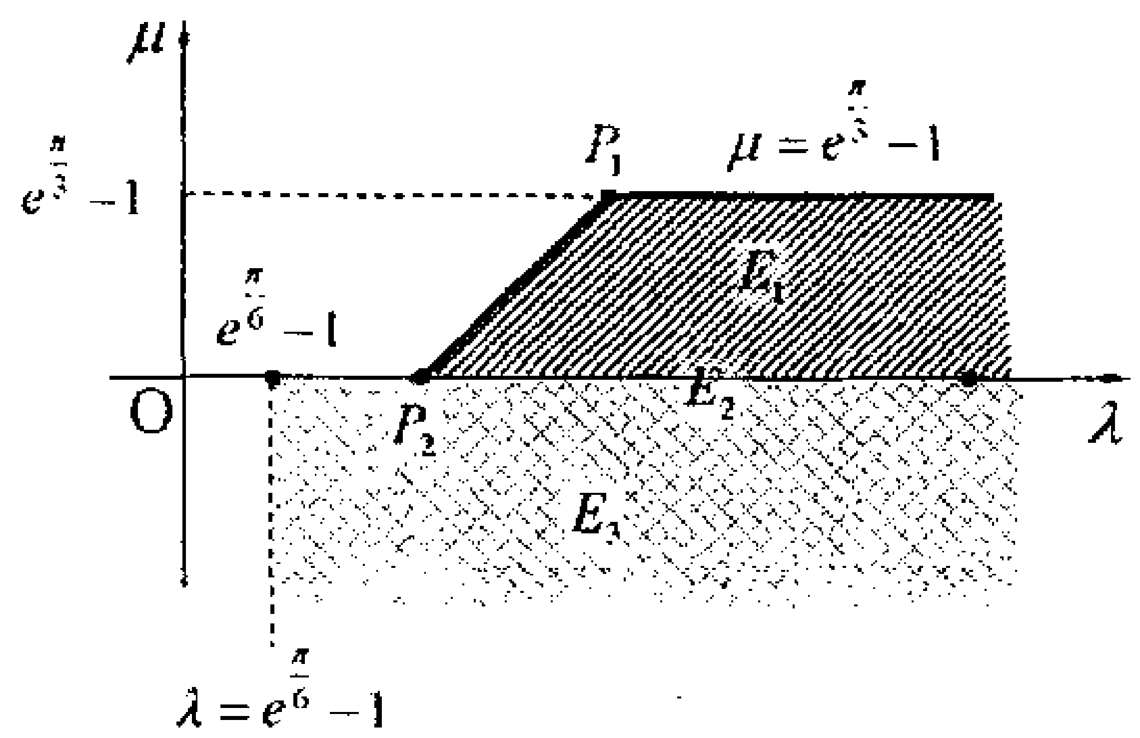

图 2.1: $P_1(e^{\frac{5\pi}{6}}-e^{\frac{\pi}{6}},e^{\frac{\pi}{3}}-1)$, $P_2(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{6}},0)$.

分几种情形验证此例.

情 形 1. $\lambda>0$ 且 $\mu>0$

显然, 若 $-\frac{\pi}{6}<t<0$, 则 $\varphi(t)>1$, 若 $-\frac{\pi}{2}<t<-\frac{\pi}{6}$, 则 $\varphi(t)<1$. 即 $t_0(\varphi)=0$,$t_1(\varphi)=-\frac{\pi}{6}$,$t_2(\varphi)=-\frac{\pi}{2}=-\tau$, 以及 $n(\varphi)=2$ 满足 $\varphi\in\widetilde{C}^{+}_{\sigma,s(\varphi)}$ 这里 $s(\varphi)=\{t_j(\varphi)\}_{j=0}^{n(\varphi)}\in S$. 于是, $\varphi\in\widetilde{C}^{+}_{\sigma}$,$J(\varphi)=J_1(\varphi)=-e^{-\frac{\pi}{2}}+2e^{-\frac{\pi}{6}}$, 且 $J_i(\varphi)=-(-1)^ie^{-\frac{\pi}{2}}(i=2,3.)$ 类似有, 若 $-\frac{\pi}{3}<t<0$, 则 $\psi(t)>1$, 若 $-\frac{\pi}{2}<t<-\frac{\pi}{3}$, 则 $\psi(t)<1$, $\psi\in\widetilde{C}^{+}_{\sigma}$, $n(\psi)=2$ 且 $J(\psi)=J_1(\psi)=-e^{-\frac{\pi}{2}}+2e^{-\frac{\pi}{3}}$. 因此, 有 $\Phi\in\widetilde{X}^{+,+}_{\sigma}$. 考虑两种情况. 首先, 若 $\mu>e^{\frac{\pi}{3}}-1$. 则 $\psi(0)e^{-\tau}=(1+2\mu)e^{-\frac{\pi}{2}}>(2e^{\frac{\pi}{3}}-1)e^{-\frac{\pi}{2}}=J(\varphi)$, 即定理 2.2.2 中条件 (c) 满足, 于是 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ $(t\to\infty)$. 其次, 若 $\mu\le e^{\frac{\pi}{3}}-1$, 则 $J_3(\varphi)=e^{-\frac{\pi}{2}}<\psi(0)e^{-\tau}\le J_1(\varphi)=J(\varphi)$. 设 K 如定理 2.2.2 中条件 (d) 所述. 则 $K=1$, $\varphi(0)e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)=(1+2\lambda)e^{-\frac{\pi}{2}}-1$, 且 $\psi(0)-J(\psi)=1+2\mu+e^{-\frac{\pi}{2}}-2e^{-\frac{\pi}{3}}$. 若 $\lambda\le(1+\mu)e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{6}}$, 则 $\varphi(0)e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)\le[1+2(1+\mu)e^{\frac{\pi}{2}}-2e^{\frac{\pi}{6}}]e^{-\frac{\pi}{2}}-1=\psi(0)-J(\psi)$. 因此, 条件 (d) 满足, 从而 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ ($t\to\infty$). 若 $\lambda>(1+\mu)e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{6}}$ 即 $(\lambda,\mu)\in E_1$, 参看图 2.1. 则有 $\varphi(0)e^{-\tau}+e^{\tau}J_{2K}(\varphi)>\psi(0)-J(\psi)$, 于是条件 (f) 满足, 从而 $(x(t),y(t))\to(1,1)$ $(t\to\infty)$.

情 形 2. $\lambda>0$ 且 $\mu=0$ (即 $(\lambda,\mu)\in E_2$)

易证 $\Phi\in\widetilde{X}^{+,-}_{\sigma}$ 而 $\psi\in\widetilde{C}^{-}_{\sigma}$, $J(\psi)=e^{-\frac{\pi}{2}}$, 且 $\varphi(0)e^{-\tau}=(1+2\lambda)e^{-\frac{\pi}{2}}>J(\psi)$. 从而条件 (e) 成立, 因此 $(x(t),y(t))\to(1,1)$ ($t\to\infty$).

情 形 3. $\lambda>0$ 且 $\mu<0$

则有 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma}^{+,-}$ 与 $J(\psi)=-e^{-\frac{\pi}{2}}+2e^{-\frac{\pi}{3}}$. 若 $\lambda<e^{\frac{\pi}{6}}-1$, 则 $\varphi(0)e^{-\tau}\le[1+2(e^{\frac{\pi}{6}}-1)]e^{-\frac{\pi}{2}}=J(\psi)$, 条件 (b) 成立, 于是 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ $(t\to\infty)$. 若 $\lambda>e^{\frac{\pi}{6}}-1$(即 $(\lambda,\mu)\in E_3$, 参看图 2.1), 则有 $\varphi(0)e^{-\tau}>J(\psi)$. 于是 $(x(t),y(t))\to(1,1)$ $(t\to\infty)$.

情 形 4. $\lambda\le 0$

则 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma}^{-,+}$ 以及 $\mu>0$ 和 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma}^{-,-}$ 且 $\mu\le 0$. 由此, 条件 (a) 满足, 即有 $(x(t),y(t))\to(1,-1)$ $(t\to\infty)$. 综上述, 此例得证.

特别需要指明的是例 2.2.1 中, 若 $(\lambda,\mu)=(0,0)$ 则 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma}^{-,-}$,$(x(t),y(t))\to(1,-1)$ $(t\to\infty)$, 即变成文 [50] 中相应定理的情形. 但是, 若 $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, 则 $\varphi-1$ 和 $\psi-1$ 在初始区间振动, 所得结果不能由文 [50] 得到.

2.3 两类模型的全局指数渐近稳定

由上一节的讨论可知: 当 $|\sigma|>1$ 时, 系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 有唯一平衡点 (x_0,y_0),

$$(x_0,y_0)=\begin{cases}(1,-1), & \text{若 } \sigma>1,\\ (-1,1) & \text{若 } \sigma<-1,\end{cases} \tag{2.3.1}$$

作变换

$$\begin{cases}u(t)=x(t)-x_0,\\ v(t)=y(t)-y_0,\end{cases}$$

将 (2.1.1) 变成

$$\begin{cases}\dot{u}=-u-g(v(t-\tau)),\\ \dot{v}=-v+h(u(t-\tau)),\end{cases} \tag{2.3.2}$$

其中, 函数 g 与 h 分别为

$$g(\xi)=x_0-f(y_0+\xi)=\begin{cases}x_0-1, & \text{若 } \xi\le\sigma-y_0,\\ x_0+1, & \text{若 } \xi>\sigma-y_0,\end{cases}$$

以及

$$h(\xi)=-y_0-f(x_0+\xi)=\begin{cases}-y_0-1, & \text{若 } \xi\le\sigma-x_0,\\ -y_0+1, & \text{若 } \xi>\sigma-x_0,\end{cases}$$

显然, (2.1.1) 的平衡点 (x_0,y_0) 转化为 (2.3.2) 的平衡点 $(0,0)$.

设 $t_0\in R$. 令 X^{t_0} 表示 $[t_0-\tau,t_0]$ 上定义的连续二维向量函数 $(\varphi(t),\psi(t))$ 的集合, 其上定义上确界范数 $\|\cdot\|$. 则 X^{t_0} 成为一 Banach 空间. 对 $\Phi^{t_0}\in X^{t_0}$, 让

$(x^{\Phi^{t_0}}, y^{\Phi^{t_0}})$ 表示 (2.1.1) 的具有初值 $\Phi^{t_0} = (\varphi^{t_0}, \psi^{t_0})$ 的解. 令 $\Psi^{t_0} = (\varphi^{t_0} - x_0, \psi^{t_0} - y_0)$, 则 $\Psi^{t_0} \in X^{t_0}$, 且 (2.3.2) 的具有初值 Ψ^{t_0} 的解为

$$(u^{\Psi^{t_0}}, v^{\Psi^{t_0}}) = (x^{\Phi^{t_0}} - x_0, y^{\Phi^{t_0}} - y_0). \tag{2.3.3}$$

对 $H > 0$, 定义:

$$B_H^{t_0} = \{\Phi^{t_0} \in X^{t_0} : \|\Phi^{t_0}\| = \sup_{t_0 - \tau \le t \le t_0} \|\Phi^{t_0}(t)\|_{R^2} \le H\},$$

其中 Euclid 空间 R^2 中的范数取为 $\|(x, y)\|_{R^2} = |x| + |y|$, $(x, y) \in R^2$.

定 义 2.3.1. 如果存在 $\alpha > 0$, 使对任给 $\beta > 0$, 存在 $K(\beta) > 0$, 使当 $\Psi^{t_0} \in B_\beta^{t_0}$ 时, 对一切 $t \ge t_0$ 都有

$$|u^{\Psi^{t_0}}(t)| + |v^{\Psi^{t_0}}(t)| \le K\|\Psi^{t_0}\|e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

则称 (2.3.2) 的零解为全局指数渐近稳定的.

显见, 变换 (2.3.3) 将 (2.1.1) 的平衡解 (x_0, y_0) 的全局指数渐近稳定性转化为 (2.3.2) 的零解的全局指数渐近稳定性.

下面的定理表明, 当 $|\sigma| > 1$ 时, 模型 (2.1.1) 的平衡解是全局指数渐近稳定的.

定 理 2.3.1 设 $|\sigma| > 1$, 则 (2.3.2) 的零解为全局指数渐近稳定的.

证 明: 只证 $\sigma > 1$ 情形 ($\sigma < -1$ 情形类似). 这时 (2.3.2) 中的 g, h 分别为

$$g(\xi) = \begin{cases} 0, & 若\ \xi \le \sigma + 1, \\ 2, & 若\ \xi > \sigma + 1 \end{cases}$$

以及

$$h(\xi) = \begin{cases} 0, & 若\ \xi \le \sigma - 1, \\ 2, & 若\ \xi > \sigma - 1, \end{cases}$$

对 $t_0 \in R, \Psi^{t_0} \in X^{t_0}$, 简记 $(u^{\Psi^{t_0}}, v^{\Psi^{t_0}}) = (u, v)$. 将 (2.3.2) 从 t_0 到 t 积分, 得

$$\begin{cases} u(t) = u(t_0)e^{-(t-t_0)} - \int_0^{t-t_0} e^{-s} g(v(t-\tau-s))ds, \\ v(t) = v(t_0)e^{-(t-t_0)} + \int_0^{t-t_0} e^{-s} h(u(t-\tau-s))ds, \end{cases}$$

因此, 对 $t \ge t_0$, 有

$$\begin{cases} u(t) \le u(t_0)e^{-(t-t_0)}, \\ v(t) \le v(t_0)e^{-(t-t_0)} + 2[1 - e^{-(t-t_0)}] \end{cases} \tag{2.3.4}$$

以及

$$\begin{cases} |u(t)| \le |u(t_0)|e^{-(t-t_0)} + 2[1 - e^{-(t-t_0)}], \\ |v(t)| \le |v(t_0)|e^{-(t-t_0)} + 2[1 - e^{-(t-t_0)}]. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

注意到 $(u(t_0),v(t_0))=\Psi^{t_0}(t_0)$, 有 $|u(t_0)|+|v(t)|=\|\Psi^{t_0}(t_0)\|_{R^2}\le\|\Psi^{t_0}\|$. 所以，由 (2.3.4) 可得

$$\begin{cases} u(t)\le\|\Psi^{t_0}\|e^{-(t-t_0)}, \\ v(t)\le\|\Psi^{t_0}\|e^{-(t-t_0)}+2. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

而 (2.3.5) 给出

$$|u(t)|+|v(t)|\le[\|\Psi^{t_0}\|+4(e^{t-t_0}-1)]e^{-(t-t_0)}. \tag{2.3.7}$$

现令

$$t^*=\begin{cases} t_0, & 当\ \|\Psi^{t_0}\|\le\sigma-1, \\ t_0+\ln\frac{\|\Psi^{t_0}\|}{\sigma-1}, & 当\ \|\Psi^{t_0}\|\ge\sigma-1. \end{cases}$$

则由 $\sigma>1$, 知 $t_0\le t^*<\infty$, 且 $\|\Psi^{t_0}\|e^{-(t^*-t_0)}\le\sigma-1$, 于是，对 $t\ge t^*$, 由 (2.3.6), 有

$$\begin{cases} u(t)\le\sigma-1, \\ v(t)\le\sigma+1. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

设 $\beta>0$, $\Psi^{t_0}\in B_\beta^{t_0}$, 以下分两种情形来讨论.

情形 I $\beta\le\sigma-1$. 这时 $\|\Psi^{t_0}\|\le\beta\le\sigma-1$, 故 $t^*=t_0$, 从而 (2.3.8) 对 $t\ge t_0$ 成立. 再注意到：当 $t_0-\tau\le t\le t_0$ 时，$|u(t)|+|v(t)|=\|\Psi^{t_0}(t)\|_{R^2}\le\|\Psi^{t_0}\|\le\sigma-1$. 因此 (2.3.8) 对一切 $t\ge t_0-\tau$ 成立. 所以，当 $t\ge t_0$ 时，有

$$\begin{cases} u(t)=u(t_0)e^{-(t-t_0)}, \\ v(t)=v(t_0)e^{-(t-t_0)}. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

这样就容易证明

$$|u(t)|+|v(t)|\le\|\Psi^{t_0}\|e^{-(t-t_0)},\qquad t\ge t_0. \tag{2.3.10}$$

情形 II $\beta>\sigma-1$. 取 $K=1+\frac{4e^\tau}{\sigma-1}-\frac{4}{\beta}$, 显见 $K>1$. 为完成定理证明，我们须证

$$|u(t)|+|v(t)|\le K\|\Psi^{t_0}\|e^{-(t-t_0)},\quad t\ge t_0. \tag{2.3.11}$$

事实上，若 $\|\Psi^{t_0}\|\le\sigma-1$, 则由情形 I 的证明，可知 (2.3.9) 及 (2.3.10) 成立，故此时 (2.3.11) 成立.

下设 $\|\Psi^{t_0}\|>\sigma-1$. 令 $t^*=t_0+\ln\frac{\|\Psi^{t_0}\|}{\sigma-1}$. 则 $t_0\le t\le t^*+\tau$ 时，由 (2.3.7), 有

$$\begin{aligned} |u(t)|+|v(t)| &\le [\|\Psi^{t_0}\|+4(e^{t^*+\tau-t_0}-1)]e^{-(t-t_0)} \\ &= (\|\Psi^{t_0}\|+\frac{4e^\tau}{\sigma-1}\|\Psi^{t_0}\|-4)e^{-(t-t_0)} \\ &= [\|\Psi^{t_0}\|+\frac{4e^\tau}{\sigma-1}\|\Psi^{t_0}\|-\frac{4}{\beta}\|\Psi^{t_0}\|-4(1-\frac{\|\Psi^{t_0}\|}{\beta})]e^{-(t-t_0)}. \end{aligned}$$

注意到 $\Psi^{t_0} \in B_\beta^{t_0} \Rightarrow \|\Psi^{t_0}\| \le \beta$, 得 $t_0 \le t \le t^* + \tau$ 时

$$\begin{aligned} |u(t)| + |v(t)| &\le \|\Psi^{t_0}\| \cdot (1 + \frac{4e^\tau}{\sigma - 1} - \frac{4}{\beta}) \cdot e^{-(t-t_0)} \\ &= K\|\Psi^{t_0}\| e^{-(t-t_0)}, \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

现设 $t > t^* + \tau$, 由于 (2.3.8) 对 $t \ge t^*$ 成立，因此

$$\begin{cases} u(t) = u(t^* + \tau)e^{-(t-t^*-\tau)}, \\ v(t) = v(t^* + \tau)e^{-(t-t^*-\tau)}. \end{cases}$$

又由 (2.3.12), 有

$$|u(t^* + \tau)| + |v(t^* + \tau)| \le K\|\Psi^{t_0}\| e^{-(t^*+\tau-t_0)},$$

从而，当 $t > t^* + \tau$ 时

$$\begin{aligned} |u(t)| + |v(t)| &= [|u(t^* + \tau)| + |v(t^* + \tau)|] e^{-(t^*+\tau-t_0)} \\ &\le K\|\Psi^{t_0}\| e^{-(t-t^*-\tau)}. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

结合 (2.3.12)(2.3.13) 两式，定理得证.

类似讨论模型 (2.1.2), 可得

定 理 2.3.2. 设 $|\sigma| > 1$, 则模型 (2.1.2) 的平衡解 (1,1)(或 $(-1, -1)$) 为全局指数渐近稳定的.

第 3 章　一类非线性二元神经网络模型的周期解

3.1 引　言

本章，我们考虑下列非线性二元神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y - f(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中时滞 $\tau > 0$ ， $f: R \to R$ 为下列不连续函数

$$f(\xi) = \begin{cases} -1, & 若\ \xi > \sigma, \\ 1, & 若\ \xi \le \sigma, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

继第一章之后，我们进一步考察当初值 $\Phi = (\varphi, \psi)$ 定义在一振动型初始函数空间，即 $\varphi - \sigma$ 与 $\psi - \sigma$ 若出现有限次振动时，周期解的存在性．这种情形的周期行为是已有文献中不曾研究的，其结果是全新的．当 $0 \le \sigma < 1$ 时，我们获得了系统 (3.1.1) 有一孤立周期解的充分条件，其周期 $T \in (\tau, 2\tau)$．至于情形 $-1 < \sigma < 0$ ，可作类似讨论，限于篇幅，在此省略．

3.2 引理与记号

引 理 3.2.1　设

$$0 \le \sigma < 1, \qquad 0 < \tau < \infty, \tag{3.2.1}$$

则方程组

$$\begin{cases} u = \frac{(1+\sigma)}{(1-\sigma)e^{\tau}} \cdot \frac{2e^{\tau}v + (1-\sigma)u - 2}{2e^{\tau}u - (1-\sigma)v}, \\ v = \frac{4e^{\tau} - 4e^{\tau}u + (1-\sigma^2)v}{(1-\sigma)e^{\tau}[2e^{\tau}u - (1-\sigma)v]} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

有唯一实解 $(u, v) = (u^*, v^*) \in R^2$，且

$$\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}} < u^* < 1, \tag{3.2.3}$$

而

$$v^* = \frac{2(1-\sigma)e^{2\tau}(u^*)^2 - (1-\sigma^2)u^* + 2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2 e^{\tau} u^* + 2(1+\sigma)e^{\tau}}. \tag{3.2.4}$$

证 明：由 (3.2.2) 的第一式得

$$v = \frac{2(1-\sigma)e^{2\tau}(u)^2 - (1-\sigma^2)u + 2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2 e^{\tau} u + 2(1+\sigma)e^{\tau}}, \tag{3.2.4$'$}$$

将上式代入 (3.2.2) 的第二式得方程 $F(u)=0$. 其中 $F(u)$ 为下面三次多项式

$$F(u)=(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau}u^3+2\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau}u^2$$
$$+(1+\sigma)[(1-\sigma^2)(1-\sigma)+(2+12\sigma-6\sigma^2)e^{2\tau}]u-2(1+\sigma)^2[2e^{2\tau}+(1-\sigma)]. \quad (3.2.5)$$

下证 $F(u)$ 有唯一实零点 u^*, 且

$$\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}}<u^*<1.$$

先证存在性. 由 (3.2.5) 知

$$F[\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}}]$$
$$=(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau}\frac{8}{[1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}]^3}$$
$$+2\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau}\frac{4}{[1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}]^2}-2(1+\sigma)^2(2e^{2\tau}+1-\sigma)$$
$$+(1+\sigma)[(1-\sigma^2)(1+\sigma)+2(1+6\sigma-3\sigma^2)e^{2\tau}]\frac{2}{[1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}]}$$
$$=\frac{2(1+\sigma)e^{\tau}(e^{\tau}-1)}{[1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}]^3}F_1(\sigma,\tau), \quad (3.2.6)$$

其中

$$F_1(\sigma,\tau)=(1+\sigma)^2(1-\sigma)^3-(1-\sigma)^2(1+\sigma)(1-4\sigma-\sigma^2)e^{\tau}$$
$$+2(1-\sigma)(1-\sigma-9\sigma^2+\sigma^3)e^{2\tau}-2(1+\sigma)^4e^{3\tau}$$
$$=(1-e^{\tau}+e^{2\tau}-2e^{3\tau})+(-1+5e^{\tau}-20e^{2\tau}-8e^{3\tau})\sigma+(-2-2e^{\tau}+16e^{2\tau}-12e^{3\tau})\sigma^2$$
$$+(2-6e^{\tau}+4e^{2\tau}-8e^{3\tau})\sigma^3+(1+3e^{\tau}-2e^{2\tau}-2e^{3\tau})\sigma^4+(-1+e^{\tau})\sigma^5.$$

令

$$\varphi(\sigma)=(1-e^{\tau}+e^{2\tau}-2e^{3\tau})+(-1+5e^{\tau}-20e^{2\tau}-8e^{3\tau})\sigma+(-2-2e^{\tau}+16e^{2\tau}-12e^{3\tau})\sigma^2$$
$$+(2-6e^{\tau}+4e^{2\tau}-8e^{3\tau})\sigma^3+(1+3e^{\tau}-2e^{2\tau}-2e^{3\tau})\sigma^4+(-1+e^{\tau})\sigma^5.$$

上式中, 前三项的和记为 $h_1(\sigma)$, 后两项的和记为 $h_2(\sigma)$, 易知 $h_1(\sigma)<0$, 又

$$h_2(\sigma)=-(2e^{3\tau}+2e^{2\tau}-3e^{\tau}-1)\sigma^4+(e^{\tau}-1)\sigma^5$$
$$=-(e^{\tau}-1)[(2e^{2\tau}+4e^{\tau}+1)\sigma^4-\sigma^5]<0.$$

所以 $\varphi(\sigma)<0$. 因 $0\le\sigma<1, \tau>0$. 故 $F_1(\sigma,\tau)<0$. 由 (3.2.6), 立即可得

$$F[\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}}]<0.$$

另一方面，由 (3.2.5) 知

$$F(1)=(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau}+2\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau}$$

$$+(1+\sigma)[(1-\sigma^2)(1-\sigma)+(2+12\sigma-6\sigma^2)e^{2\tau}]-2(1+\sigma)^2[2e^{2\tau}+(1-\sigma)]$$

$$=(1-\sigma^2)[2(1-\sigma)(e^{4\tau}-e^{2\tau})+(1+\sigma)^2(e^{2\tau}-1)]>0.$$

因此， $F(u)$ 在 $(\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}},1)$ 内存在零点.

下证唯一性. 将 (3.2.5) 求导得

$$F'(u)=3(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau}u^2+4\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau}u$$

$$+(1+\sigma)[(1-\sigma)^2(1+\sigma)+(2+12\sigma-6\sigma^2)e^{2\tau}]$$

$$>6(1-\sigma)^2(1+\sigma)e^{4\tau}u^2-4(1-\sigma)^3e^{2\tau}|u|+(1+\sigma)^2(1-\sigma)^2$$

$$>(1-\sigma)^3(6e^{4\tau}|u|^2-4e^{2\tau}|u|+1)>0.$$

对一切 $-\infty<u<\infty$ 成立，故 $F(u)$ 有唯一实零点 $u^*\in(\frac{2}{1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}},1)$. 注意到 (3.2.4) 与 (3.2.4)′, 从而

$$v^*=\frac{2(1-\sigma)e^{2\tau}(u^*)^2-(1-\sigma^2)u^*+2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2e^{\tau}u^*+2(1+\sigma)e^{\tau}}.$$

证毕.

引 理 3.2.2 设 (3.2.1) 成立， v^* 及 $F(u)$ 分别如 (3.2.4) 与 (3.2.5) 所示，

$$g_1(u)=2(1-\sigma)e^{3\tau}u^2-[(1-\sigma)^2+(1-\sigma^2)e^{\tau}+4e^{2\tau}]u$$

$$+2[(1-\sigma)+(1+\sigma)e^{\tau}], \tag{3.2.7}$$

如果 $F(u)$ 与 $g_1(u)$ 的结式

$$R(F,g_1)=\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} & b_{10} & & \\ & b_{12} & b_{11} & b_{10} & \\ & & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}>0,$$

其中

$$\begin{cases} a_3=(1-\sigma)^2[(1-\sigma)^2+2(1+\sigma)e^{2\tau}]e^{2\tau}, \\ a_2=2\sigma(1-\sigma)^3e^{2\tau}, \\ a_1=(1+\sigma)[(1-\sigma)^2(1+\sigma)+(2+12\sigma-6\sigma^2)e^{2\tau}], \\ a_0=-2(1+\sigma)^2(1-\sigma+2e^{2\tau}). \end{cases} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{cases} b_{12} = 2(1-\sigma)e^{3\tau}, \\ b_{11} = -[(1-\sigma)^2 + (1-\sigma^2)e^{\tau} + 4e^{2\tau}], \\ b_{10} = 2[1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}]. \end{cases}$$

则

$$v^* > \frac{2e^{\tau}}{(1-\sigma)+(1+\sigma)e^{\tau}} u^*.$$

证 明: 由引理 (3.2.1), 一元三次方程 $F(u)=0$ 除唯一实根 u^* 外, 另有一对共轭复根 $\alpha \pm \beta j$ $(\alpha, \beta \in R, \beta > 0)$, 于是

$$\begin{aligned} R(F,g_1) &= b_{12} g_1(\alpha+\beta j) g_1(\alpha-\beta j) g_1(u^*) \\ &= b_{12} |g_1(\alpha+\beta j)|^2 g_1(u^*). \end{aligned}$$

这样就有

$$g_1(u^*) = 2(1-\sigma)e^{3\tau}u^{*2} - [(1-\sigma)^2 + (1-\sigma^2)e^{\tau} + 4e^{2\tau}]u^* + 2[(1-\sigma)+(1+\sigma)e^{\tau}] > 0,$$

于是

$$\begin{aligned} & v^* - \frac{2e^{\tau}}{(1-\sigma)+(1+\sigma)e^{\tau}} u^* \\ = & \frac{1+\sigma}{[(1-\sigma)^2 e^{\tau} u^* + 2(1+\sigma)e^{\tau}][1-\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}]} \cdot g_1(u^*) > 0. \end{aligned}$$

证毕.

类似引理 3.2.2, 有

引 理 3.2.3 设 (3.2.1) 成立, $F(u)$ 如 (3.2.5) 所示,

$$\begin{aligned} g_2(u) = & [4(1+\sigma)e^{2\tau} + (1-\sigma)^3 e^{\tau} + (1-\sigma^2)(1-\sigma)]u^2 \\ & + [4\sigma(1-\sigma)e^{\tau} - 2(1-\sigma^2)]u - 4(1+\sigma)e^{\tau}, \end{aligned}$$

如果 $F(u)$ 与 $g_2(u)$ 的结式

$$R(F,g_2) = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{21} & b_{20} & & \\ & b_{22} & b_{21} & b_{20} & \\ & & b_{22} & b_{21} & b_{20} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} < 0,$$

其中 $a_k (k=0,1,2,3)$ 如 (3.2.8) 所示, 以及

$$\begin{cases} b_{22} = 4(1+\sigma)e^{2\tau} + (1-\sigma)^3 e^{\tau} + (1-\sigma)^2(1+\sigma), \\ b_{21} = 2(1-\sigma)(1+\sigma+2\sigma e^{\tau}), \\ b_{20} = 4(1+\sigma)e^{\tau}, \end{cases}$$

则

$$v^* < \frac{(1-\sigma)e^\tau + (1+\sigma)}{2(1+\sigma)e^\tau}[2-(1-\sigma)u^*] < 1.$$

证 明: 略.

3.3 定理及证明

下面定理证明过程中所涉及的有关记号含义与第二章相同，不再重复.

定 理 3.3.1 若 (3.2.1) 成立，且有 $R(F,g_1) > 0$, $R(F,g_2) < 0, F, g_1, g_2$ 的含义如引理 3.2.2 及引理 3.2.3 所述，则模型 (3.1.1) 存在一孤立周期解.

证 明: 设 u^*, v^* 如引理 3.2.1 所述，则由引理 3.2.1-3.2.3, 易知

$$e^{-\tau} < u^* < v^* < 1 \quad 及 \quad -\tau < lnu^* < lnv^* < 0. \tag{3.3.1}$$

取 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \tilde{X}_\sigma$, 使 $n(\varphi) = n(\psi) = 2$,

$$S_\varphi = \{-\tau, t_\varphi, 0\},\ t_\varphi \approx lnv^*;\quad S_\psi = \{-\tau, t_\psi, 0\},\ t_\psi \approx lnu^*,$$

以及

$$\varphi(0) \approx 1-(1-\sigma)v^*,\quad \psi(0) \approx 1-(1-\sigma)u^*. \tag{3.3.2}$$

显然 $\Phi \in \tilde{X}_\sigma^{+,+}$.

当 $0 \le t \le t_\psi + \tau$ 时，有

$$\begin{cases} x(t) = 1 + (\varphi(0)-1)e^{-t}, \\ y(t) = -1 + (\psi(0)+1)e^{-t}. \end{cases}$$

特别,

$$\begin{cases} x(t_\psi+\tau) = 1 + (\varphi(0)-1)e^{-(t_\psi+\tau)}, \\ y(t_\psi+\tau) = -1 + (\psi(0)+1)e^{-(t_\psi+\tau)}. \end{cases}$$

进一步，由 (3.3.2) 可得

$$\begin{cases} x(t_\psi+\tau) \approx \frac{e^\tau u^* - (1-\sigma)v^*}{e^\tau u^*}, \\ y(t_\psi+\tau) \approx \frac{-e^\tau u^* + 2 - (1-\sigma)u^*}{e^\tau u^*}. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

因为 $y(0) = \psi(0)$. 有 $y(0) > \sigma$, 又由 (3.3.3) 及引理 3.2.1, 得

$$y(t_\psi+\tau) \approx \frac{2-[(1+\sigma)e^\tau + (1-\sigma)]u^* + \sigma e^\tau u^*}{e^\tau u^*} < \frac{\sigma e^\tau u^*}{e^\tau u^*} = \sigma,$$

所以存在 $t_1 \in (0, t_\psi + \tau)$, 使 $y(t_1) = \sigma$, 即 $-1 + (\psi(0)+1)e^{-t_1} = \sigma$, 于是解得

$$t_1 = ln\frac{\psi(0)+1}{\sigma+1} \approx ln\frac{2-(1-\sigma)u^*}{1+\sigma}.$$

此外，当 $0 \le t \le t_\psi + \tau$ 时，还有 $x(t) > \sigma$.

当 $t_\psi + \tau \le t \le t_\varphi + \tau$ 时，得

$$\begin{cases} x(t) = -1 + (\varphi(0) - 1 + 2e^{t_\psi+\tau})e^{-t}, \\ y(t) = -1 + (\varphi(0) + 1)e^{-t}. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

特别，

$$\begin{cases} x(t_\varphi + \tau) = -1 + [\varphi(0) - 1 + 2e^{t_\psi+\tau}]e^{-(t_\varphi+\tau)}, \\ y(t_\varphi + \tau) = -1 + [\psi(0) + 1]e^{-(t_\varphi+\tau)}. \end{cases}$$

进一步，有

$$\begin{cases} x(t_\varphi + \tau) \approx -1 + \frac{2u^*}{v^*} - (1-\sigma)e^{-\tau}, \\ y(t_\varphi + \tau) \approx -1 + \frac{2}{e^\tau v^*} - \frac{(1-\sigma)u^*}{e^\tau v^*}. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

由 (3.3.1) 及 (3.3.3) 易知 $x(t_\psi + \tau) > \sigma$. 另一方面，由引理 3.2.2 有 $x(t_\varphi + \tau) < \sigma$, 从而存在 $t_2 \in (t_\psi + \tau, t_\varphi + \tau)$, 使 $x(t_2) = \sigma$, 即 $-1 + (\varphi(0) - 1 + 2e^{t_\psi+\tau})e^{-t_2} = \sigma$, 解得

$$\begin{aligned} t_2 &= ln\frac{\varphi(0) - 1 + 2e^{t_\psi+\tau}}{1+\sigma} \\ &\approx ln\frac{2e^\tau u^* - (1-\sigma)v^*}{(1+\sigma)}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

且有

$$\begin{cases} x(t) = -1 + (1+\sigma)e^{-(t-t_2)}, \\ y(t) = -1 + (1+\sigma)e^{-(t-t_1)}. \end{cases}$$

另外，由 $y(t_\varphi + \tau) = -1 + (1+\sigma)e^{t_1 - t_\varphi - \tau}$, 得 $y(t_\varphi + \tau) < \sigma$. 因此 $(x_{t_\varphi+\tau}, y_{t_\varphi+\tau}) \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$, $S_{x_{t_\varphi+\tau}} = \{-\tau, t_2 - t_\varphi - \tau, 0\}$, $S_{y_{t_\varphi+\tau}} = \{-\tau, t_1 - t_\varphi - \tau, 0\}$, $n(x_{t_\varphi+\tau}) = n(y_{t_\varphi+\tau}) = 2$.

当 $t_\varphi + \tau \le t \le t_1 + \tau$ 时，有

$$\begin{cases} x(t) = -1 + [x(t_\varphi + \tau) + 1]e^{-(t-t_\varphi-\tau)}, \\ y(t) = 1 + [y(t_\varphi + \tau) - 1]e^{-(t-t_\varphi-\tau)}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x(t) = -1 + (\varphi(0) - 1 + 2e^{t_\psi+\tau})e^{-t}, \\ y(t) = -1 + (\psi(0) + 1 - 2e^{t_\varphi+\tau})e^{-t}. \end{cases}$$

特别有

$$\begin{cases} x(t_1 + \tau) = -1 + (\varphi(0) - 1 + 2e^{t_\psi+\tau})e^{-(t_1+\tau)}, \\ y(t_1 + \tau) = 1 + (\psi(0) + 1 - 2e^{t_\varphi+\tau})e^{-(t_1+\tau)}, \end{cases}$$

进一步

$$\begin{cases} x(t_1 + \tau) \approx \frac{(3+\sigma)e^\tau u^* - (1-\sigma^2)v^* - 2e^\tau}{2e^\tau - (1-\sigma)e^\tau u^*}, \\ y(t_1 + \tau) \approx \frac{2e^\tau + 2(1+\sigma) - (1-\sigma)[e^\tau + (1+\sigma)]u^* - 2(1+\sigma)e^\tau v^*}{2e^\tau - (1-\sigma)e^\tau u^*}. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

由引理 3.3.3 有 $y(t_1+\tau)>\sigma$. 又 $y(t_\varphi+\tau)<\sigma$, 故存在 $t_3\in(t_\varphi+\tau,t_1+\tau)$, 使 $y(t_3)=\sigma$, 即 $-1+(\varphi(0)+1-2e^{t_\varphi+\tau})e^{-t}=\sigma$, 解得

$$\begin{aligned} t_3 &= ln\frac{\psi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}}{1-\sigma} \\ &\approx ln\frac{2e^\tau v^*-(1-\sigma)u^*-2}{(1-\sigma)}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

且有

$$\begin{cases} x(t)=-1+(1+\sigma)e^{-(t-t_2)}, \\ y(t)=1-(1-\sigma)e^{-(t-t_3)}. \end{cases}$$

当 $t_1+\tau\le t\le t_2+\tau$ 时，有

$$\begin{cases} x(t)=1+[x(t_1+\tau)-1]e^{-(t-t_1-\tau)}, \\ y(t)=1+[y(t_1+\tau)-1]e^{-(t-t_1-\tau)}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x(t)=1+[\varphi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}-2^{\frac{1+\psi(0)}{1+\sigma}}e^\tau]e^{-t}, \\ y(t)=1+[\psi(0)+1-2e^{t_\varphi+\tau}]e^{-t}. \end{cases}$$

特别有

$$\begin{cases} x(t_2+\tau)=1+[\varphi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}-2^{\frac{1+\psi(0)}{1+\sigma}}e^\tau]e^{-t_2-\tau}, \\ y(t_2+\tau)=1+[\psi(0)+1-2e^{t_\varphi+\tau}]e^{-t_2-\tau}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} x(t_2+\tau)\approx 1+\frac{4u^*-4-(1-\sigma^2)e^{-\tau}v^*}{2e^\tau u^*-(1-\sigma)v^*}=1-(1-\sigma)v^*, \\ y(t_2+\tau)\approx 1+\frac{2(1+\sigma)e^{-\tau}-(1-\sigma^2)e^{-\tau}u^*-2(1+\sigma)v^*}{2e^\tau u^*-(1-\sigma)v^*}=1-(1-\sigma)u^*, \end{cases}$$

于是有 $x(t_2+\tau)>\sigma$. 又 $x(t_\varphi+\tau)<\sigma$ 及 $x(t)=-1+[x(t_\varphi+\tau)+1]e^{-(t-t_\varphi-\tau)}$ 得 $x(t_1+\tau)<\sigma$ ，故存在 $t_4\in(t_1+\tau,t_2+\tau)$, 使 $x(t_4)=\sigma$ ，即 $1+[\varphi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}-2e^{t_1+\tau}]e^{-t_4}=\sigma$, 解得

$$\begin{aligned} t_4 &= ln\frac{2^{\frac{1+\psi(0)}{1+\sigma}}e^\tau-2e^{t_\varphi+\tau}-\varphi(0)+1}{1-\sigma} \\ &\approx ln\frac{4e^\tau-4e^\tau u^*+(1-\sigma^2)v^*}{(1-\sigma^2)}. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

另外有

$$\begin{cases} x(t)=1-(1-\sigma)e^{(t-t_4)}, \\ y(t)=1-(1-\sigma)e^{(t-t_3)}, \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} x(t_2+\tau)=1-(1-\sigma)e^{t_4-t_2-\tau}, \\ y(t_2+\tau)=1-(1-\sigma)e^{t_3-t_2-\tau}. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

由 (3.3.6),(3.3.8) 及 (3.3.9), 得

$$\begin{aligned}
e^{t_3-t_2-\tau} &= \frac{2e^{t_\varphi+\tau}-\psi(0)-1}{(1-\sigma)e^{\tau}}\cdot\frac{1+\sigma}{\varphi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}}\\
&\approx \frac{2e^{\tau}v^*-2+(1-\sigma)u^*}{(1-\sigma)e^{\tau}}\cdot\frac{1+\sigma}{-(1-\sigma)v^*+2e^{\tau}u^*}\\
&= u^*,\\
e^{t_4-t_3-\tau} &= \frac{2\frac{1+\varphi(0)}{1+\sigma}e^{\tau}-2e^{t_\varphi+\tau}-\varphi(0)+1}{(1-\sigma)e^{\tau}}\cdot\frac{1+\sigma}{\varphi(0)-1+2e^{t_\varphi+\tau}}\\
&\approx \frac{4e^{\tau}-4e^{\tau}u^*+(1-\sigma^2)v^*}{(1-\sigma^2)e^{\tau}}\cdot\frac{1+\sigma}{-(1-\sigma)v^*+2e^{\tau}u^*}\\
&= v^*.
\end{aligned}$$

现令

$$u=e^{t_3-t_2-\tau},\ v=e^{t_4-t_2-\tau},$$

则有 $u\approx u^*, v\approx v^*$. 于是 (3.3.10) 变成

$$\begin{cases} x(t_2+\tau)=1-(1-\sigma)v,\\ y(t_2+\tau)=1-(1-\sigma)u.\end{cases}$$

因为 $u<v<1$, 从而 $(x_{t_2+\tau},y_{t_2+\tau})\in\tilde{X}_\sigma^{+,+}$, 且 $S_{x_{t_2+\tau}}=\{-\tau,t_4-t_2-\tau,0\}$, $S_{y_{t_2+\tau}}=\{-\tau,t_3-t_2-\tau,0\}$.

于是，重复前面过程，当 $t_2+\tau\le t\le t_3+\tau$ 时，

$$\begin{cases} x(t)=1+[x(t_2+\tau)-1]e^{-(t-t_2-\tau)},\\ y(t)=-1+[y(t_2+\tau)+1]e^{-(t-t_2-\tau)}.\end{cases}$$

特别，

$$\begin{cases} x(t_3+\tau)=1+[x(t_2+\tau)-1]e^{-(t_3-t_2-\tau)}=1-\frac{(1-\sigma)v}{e^{\tau}u},\\ y(t_3+\tau)=-1+[y(t_2+\tau)+1]e^{-(t_3-t_2-\tau)}=-1+\frac{2-(1-\sigma)u}{e^{\tau}u}.\end{cases}$$

类似前面的证明易知 $y(t_2+\tau)>\sigma, y(t_3+\tau)<\sigma$. 于是存在 $t_5\in(t_2+\tau,t_3+\tau)$, 使 $y(t_5)=\sigma$, 有

$$\begin{aligned} t_5 &= t_2+\tau+ln\frac{1+y(t_2+\tau)}{1+\sigma}\\ &\approx t_2+\tau+ln\frac{2-(1-\sigma)u}{1+\sigma}.\end{aligned}$$

当 $t_3+\tau\le t\le t_4+\tau$ 时，有

$$\begin{cases} x(t)=-1+[x(t_2+\tau)-1+2e^{t_3-t_2}]e^{-(t-t_2-\tau)},\\ y(t)=-1+[y(t_2+\tau)+1]e^{-(t-t_2-\tau)}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x(t) = -1 + [-(1-\sigma)v + 2e^{\tau}u]e^{-(t-t_2-\tau)}, \\ y(t) = -1 + [2-(1-\sigma)u]e^{-(t-t_2-\tau)}. \end{cases}$$

特别

$$\begin{cases} x(t_4+\tau) = -1 - (1-\sigma)e^{-\tau} + \frac{2u}{v}, \\ y(t_4+\tau) = -1 + 2e^{\tau}v - \frac{(1-\sigma)u}{e^{\tau}v}. \end{cases}$$

类似前面的证明可得 $x(t_3+\tau) > \sigma, x(t_4+\tau) < \sigma$. 于是存在 $t_6 \in (t_3+\tau, t_4+\tau)$, 使 $x(t_6) = \sigma$, 有

$$t_6 = t_2 + \tau + ln\frac{2e^{\tau}u - (1-\sigma)v}{1+\sigma}.$$

此外，可证 $y(t_4+\tau) < \sigma$. 因此 $(x_{t_4+\tau}, y_{t_4+\tau}) \in \tilde{X}_{\sigma}^{-,-}$, $S_{x_{t_4+\tau}} = \{-\tau, t_6 - t_4 - \tau, 0\}$, $S_{y_{t_4+\tau}} = \{-\tau, t_5 - t_4 - \tau, 0\}$. 于是

当 $t_4 + \tau \le t \le t_5 + \tau$ 时，

$$\begin{cases} x(t) = -1 + [x(t_2+\tau) - 1 + 2e^{t_3-t_2}]e^{-(t-t_2-\tau)}, \\ y(t) = 1 + [y(t_2+\tau) + 1 - 2e^{t_4-t_2}]e^{-(t-t_2-\tau)}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x(t) = -1 + [-(1-\sigma)v + 2e^{\tau}u]e^{-(t-t_2-\tau)}, \\ y(t) = 1 + [2-(1-\sigma)u - 2e^{\tau}v]e^{-(t-t_2-\tau)}. \end{cases}$$

特别

$$\begin{cases} x(t_5+\tau) = -1 + [1-\sigma]e^{t_6-t_5-\tau} = \frac{(3+\sigma)u-(1-\sigma^2)e^{-\tau}v-2}{2-(1-\sigma)u}, \\ y(t_5+\tau) = 1 + [1-\sigma]e^{t_7-t_5-\tau} = \frac{2+2(1+\sigma)e^{-\tau}-(1-\sigma)[1+(1+\sigma)e^{-\tau}]u-2(1+\sigma)v}{2-(1-\sigma)u}. \end{cases}$$

类似前面可证 $y(t_4+\tau) < \sigma, y(t_5+\tau) > \sigma$. 于是存在 $t_7 \in (t_4+\tau, t_5+\tau)$, 使 $y(t_7) = \sigma$, 易得

$$t_7 = t_2 + \tau + ln\frac{-2 + (1-\sigma)u + 2e^{\tau}v}{1-\sigma}.$$

当 $t_5 + \tau \le t \le t_6 + \tau$ 时，类似有

$$\begin{cases} x(t) = 1 + [x(t_2+\tau) - 1 + 2e^{t_3-t_2} - 2e^{t_5-t_2}]e^{-(t-t_2-\tau)}, \\ y(t) = 1 + [y(t_2+\tau) + 1 - 2e^{t_4-t_2}]e^{-(t-t_2-\tau)}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x(t) = 1 + [-\frac{4e^{\tau}}{1+\sigma} + \frac{4e^{\tau}u}{1+\sigma} - (1-\sigma)v]e^{-(t-t_2-\tau)}, \\ y(t) = 1 + [2-(1-\sigma)u - 2e^{\tau}v]e^{-(t-t_2-\tau)}. \end{cases}$$

特别

$$\begin{cases} x(t_6+\tau) = 1 - [1-\sigma]e^{t_8-t_6-\tau} = 1 + \frac{-4e^{\tau}+4e^{\tau}u-(1-\sigma^2)v}{2e^{2\tau}u-(1-\sigma)e^{\tau}v}; \\ y(t_6+\tau) = 1 - [1-\sigma]e^{t_7-t_6-\tau} = 1 + \frac{(1+\sigma)[2-(1-\sigma)u-2e^{\tau}v]}{2e^{2\tau}u-(1-\sigma)e^{\tau}v}. \end{cases}$$

因 $x(t_5+\tau)<\sigma, x(t_6+\tau)>\sigma$. 于是存在 $t_8\in(t_5+\tau, t_6+\tau)$, 使 $x(t_8)=\sigma$, 解得

$$t_8 = t_2+\tau+ln\frac{4e^\tau-4e^\tau u+(1-\sigma^2)v}{1-\sigma^2}.$$

易证 $(x_{t_6+\tau}), y_{t_6+\tau})\in\tilde{X}_\sigma^{+,+}$. 令

$$\begin{cases} U = e^{t_7-t_6-\tau}, \\ V = e^{t_8-t_6-\tau}. \end{cases}$$

得 $R^2\to R^2$ 的映射 $\phi:(u,v)\longmapsto(U,V)$

$$\begin{cases} U = \frac{(1+\sigma)e^{-\tau}}{1-\sigma}\cdot\frac{2e^\tau v+(1-\sigma)u-2}{2e^\tau u-(1-\sigma)v}, \\ V = \frac{e^{-\tau}}{1-\sigma}\cdot\frac{4e^\tau-4e^\tau u+(1-\sigma^2)v}{2e^\tau u-(1-\sigma)v}. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

由引理 3.2.1, ϕ 存在唯一不动点 $(u,v)=(u^*,v^*)\in R^2$, 即 $\phi(u^*,v^*)=(u^*,v^*)$. 显然, 当 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\tilde{X}_\sigma^{+,+}, S_\varphi=\{-\tau,t_\varphi,0\}, S_\psi=\{-\tau,t_\psi,0\}, t_\varphi=lnu^*$, $t_\psi=lnv^*$, $\varphi(0)=x^*=1-(1-\sigma)v^*$, $\psi(0)=y^*=1-(1-\sigma)u^*$, 系统初值为 Φ 的解 (x^Φ,y^Φ) 为周期解.

例: $\sigma=0$. 代入 (3.2.1),(3.2.4) 及 (3.2.5) 得

$$\begin{cases} F(u) = (1+2e^{2\tau})(e^{2\tau}u^3+u-2), \\ g_1(u) = 2e^{3\tau}u^2-(1+e^\tau+4e^{2\tau})u+2(1+e^\tau), \\ g_2(u) = (4e^{2\tau}+e^\tau+1)u^2-2u-4e^\tau. \end{cases}$$

系数

$$\begin{cases} a_3 = (1+2e^{2\tau})e^{2\tau}, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = (1+2e^{2\tau}), \\ a_0 = -2(1+2e^{2\tau}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{12} = 2e^{3\tau}, \\ b_{11} = -(1+e^\tau+4e^{2\tau}), \\ b_{10} = 2(1+e^\tau). \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{22} = 4e^{2\tau}+e^\tau+1, \\ b_{21} = -2, \\ b_{20} = -4e^\tau. \end{cases}$$

则有

$$R(F,g_1)=\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11} & b_{10} & & \\ & b_{12} & b_{11} & b_{10} & \\ & & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$
$$=16e^{4\tau}(1+2e^{2\tau})^3(e^{\tau}-1)^2>0.$$

以及

$$R(F,g_2)=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{21} & b_{20} & & \\ & b_{22} & b_{21} & b_{20} & \\ & & b_{22} & b_{21} & b_{20} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$
$$=-32e^{3\tau}(1+2e^{2\tau})^3(e^{\tau}-1)^2<0.$$

由定理 (3.3.1), 可知非线性系统 (3.1.1) 存在孤立周期解. 且周期为 $T=\tau+ln\frac{2e^{\tau}u^*-v^*}{1+\sigma}$ $\in(\tau,2\tau)$, 其中 u^* 是方程 $F(u)=0$, 即 $e^{2\tau}u^3+u-2=0$ 的唯一实根，由 (3.2.4) 有 $v^*=e^{\tau}(u^*)^2$.

进一步，由 (3.3.11) 得 $\phi:R^2\to R^2$

$$\begin{cases} U=e^{-\tau}\cdot\frac{2e^{\tau}v+u-2}{2e^{\tau}u-v}, \\ V=e^{-\tau}\cdot\frac{4e^{\tau}-4e^{\tau}u+v}{2e^{\tau}u-v}. \end{cases}$$

ϕ 的 Jacobi 阵

$$D\phi(u,v)=\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

其中

$$\frac{\partial U}{\partial u}=\frac{-(1+4e^{2\tau})v+4e^{\tau}}{(2e^{\tau}u-v)^2}\cdot e^{-\tau};$$
$$\frac{\partial U}{\partial v}=\frac{(1+4e^{2\tau})u-2}{(2e^{\tau}u-v)^2}\cdot e^{-\tau};$$
$$\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{-8e^{2\tau}+2e^{\tau}v}{(2e^{\tau}u-v)^2}\cdot e^{-\tau};$$
$$\frac{\partial V}{\partial v}=\frac{4e^{\tau}-2e^{\tau}u}{(2e^{\tau}u-v)^2}\cdot e^{-\tau}.$$

设 Jacobi 阵 $D\phi(u^*,v^*)$ 的特征方程为

$$\lambda^2+b\lambda+c=0 \tag{3.3.12}$$

其中

$$b=\frac{(1+4e^{2\tau})v^*+2e^{\tau}u^*-8e^{\tau}}{(2e^{\tau}u^*-v^*)^2e^{\tau}},$$

$$c=\frac{16e^{\tau}}{(2e^{\tau}u^*-v^*)^3}.$$

又由 $F(u^*)=0$ 知 $e^{2\tau}(u^*)^3=2-u^*, v^*=e^{\tau}(u^*)^2$. 于是

$$b=1-\frac{2(u^*)^2}{(2-u^*)^2},$$

$$c=\frac{16}{(2-u^*)^4},$$

因 $0<u^*<1$, 显然有 $-1<b<1, c>1$. 从而特征方程 (3.3.12) 的 $\Delta=b^2-4c<0$, 其根为一对共轭复根, $\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4c-b^2}}{2}$ 满足 $|\lambda_j|^2=\frac{b^2+4c-b^2}{4}>1(j=1,2)$. 故系统 (3.3.1) 的孤立周期解是不稳定的.

第 4 章　两类二元离散神经网络模型的渐近性质与全局指数稳定

4.1 引　言

考虑下列具负反馈二元离散神经网络模型

$$\begin{cases} x(n+1)=\beta x(n)+f(y(n-K)), \\ y(n+1)=\beta y(n)-f(x(n-K)), \end{cases} \tag{4.1.1}$$

与具正反馈二元离散神经网络模型

$$\begin{cases} x(n)=\beta x(n-1)+f(y(n-K)), \\ y(n)=\beta y(n-1)+f(x(n-K)), \end{cases} \tag{4.1.2}$$

其中 $\beta\in(0,1)$是衰变常数, $K\in N$ 且 $f:R\to R$ 是不连续函数

$$f(\xi)=\begin{cases} -\rho, & 若\ \xi>\sigma, \\ \rho, & 若\ \xi\le\sigma, \end{cases} \tag{4.1.3}$$

式中 $\rho>0$, 且阈值 $\sigma\in R$.

事实上，系统 (4.1.1) 和系统 (4.1.2) 可以看作是下列系统的离散化

$$\begin{cases} \dot{x}=-\mu x(t)+f(y(t-\tau)), \\ \dot{y}=-\mu y(t)-f(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{4.1.4}$$

或

$$\begin{cases} \dot{x}=-\mu x(t)+f(y(t-\tau)), \\ \dot{y}=-\mu y(t)+f(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{4.1.5}$$

其中 μ 表示衰减系数. $f:R\to R$ 满足 (4.1.3).

相对于连续系统 (4.1.4) 与 (4.1.5) 而言，对于离散系统 (4.1.1) 与 (4.1.2) 的研究，结果比较有限. 从一些较新的研究结果来看，还是考虑非振动型初值的系统的动力学行为. 本章，我们考察具变号型初值的解的渐近行为与稳定性.

设 Z 表示所有整数集合. 对于任意 $a,b\in Z$ 且 $a\le b$, 定义 $N(a,b)=\{a,a+1,\cdots,b\}$. 及 $N(a)=\{a,a+1,\cdots\}$. 方程 (4.1.1) 或 (4.1.2) 的解，我们指的是对一切的 $n\in N(-K)$ ， R^2 上对所有 $n\in N$ 满足 (4.1.1) 或 (4.1.2) 的点集 $\{x(n),y(n)\}$. 设 $X:N(-K,0)\to R^2$. 显然，对任意初值 $\Phi=(\varphi,\psi)\in X$. 方程 (4.1.1) 或 (4.1.2) 有唯一解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))$ 满足初始条件

$$x^\Phi(i)=\varphi(i),\quad y^\Phi(i)=\psi(i),\quad 对一切\ i\in N(-K,0).$$

我们着重考虑：若 $\varphi-\sigma$ 和 $\psi-\sigma$ 在 $N(-K,0)$ 内有有限次符号改变时，模型解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))$ 的渐近行为与稳定性质．即考虑这些初值 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma=\widetilde{X}_\sigma^{+,+}\cup\widetilde{X}_\sigma^{+,-}\cup\widetilde{X}_\sigma^{-,+}\cup\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$，其中

$$\widetilde{X}_\sigma^{\pm,\pm}=\{\Phi\in X;\ \Phi=(\varphi,\psi),\varphi\in\widetilde{R}_\sigma^{\pm}\ \text{ 和 }\ \psi\in\widetilde{R}_\sigma^{\pm}\},$$

上式中

$$\widetilde{R}_\sigma^{+}=\{\varphi:N(-K,0)\to R;\ \varphi(0)-\sigma>0,\ \text{且}\ \varphi(i)-\sigma\le 0\ \text{至少对某个}\ i\in N(-K,-1)\}$$

及

$$\widetilde{R}_\sigma^{-}=\{\varphi:N(-K,0)\to R;\ \varphi(0)-\sigma\le 0,\ \text{且}\ \varphi(i)-\sigma>0\ \text{至少对某个}\ i\in N(-K,-1)\}.$$

结果表明：当 $\sigma\ge\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，模型 (4.1.1) 与 (4.1.2) 的解 $(x^\Phi(n),\ y^\Phi(n))$ 分别趋于唯一平衡点，确切地说：当 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，模型 (4.1.1)(或 (4.1.2)) 的每一个解都趋于 $\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$ (或 $\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$)；当 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma$ 且 $\sigma=\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，模型 (4.1.1)(或 (4.1.2)) 的每一个解要么趋于 $\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$，要么趋于 $\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$(或三平衡点 $\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, $\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$ 和 $\left(-\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$ 之一)．特别的，我们对 K,β 和 Φ 获得了：在临界情形 $\sigma=\frac{\rho}{1-\beta}$ 下，当 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma$ 时，保证模型解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))$ 趋于两平衡点之一 (或三平衡点之一) 的充要条件．至于情形 $\sigma\le-\frac{\rho}{1-\beta}$ 可进行类似讨论，限于篇幅，在此只给出结论，不进行证明．

4.2 具负反馈二元离散神经网络模型的渐近性与全局指数稳定性

这一节，我们首先引入如下一些记号．

对给定的 $K\in N(1)$，让 S_K 为一非正整数集合 $\{n_j\}_{j\in N(0,\ l)}$ 满足 $1\le l\le K+1, n_0=0, n_l=-K-1$，且对所有的 $j\in N(1,l)$ 有 $n_j<n_{j-1}$．又对给定的 $s\in S_K$，让 $s=\{n_j(s)\}_{j\in N(0,\ l(s))}$，且设

$$N_s^+=\bigcup_{k=0}^{l^+(s)-1}N(n_{2k+1}(s)+1,n_{2k}(s))\ \text{ 及 }\ N_s^-=\bigcup_{k=1}^{l^-(s)}N(n_{2k}(s)+1,n_{2k-1}(s)),$$

这里，当 $l(s)$ 为奇数，$l^\pm(s)=\frac{l(s)\pm1}{2}$；当 $l(s)$ 为偶数，$l^\pm(s)=\frac{l(s)}{2}$．结合 s 再定义一个数列 $\{J_i(s)\}_{i\in N(1,\ l(s)+1)}$ 如下：

$$J_i(s)=\begin{cases}-(-1)^{l(s)}\dfrac{\rho}{1-\beta}\beta^{K+1}-\dfrac{2\rho}{1-\beta}\displaystyle\sum_{j=i}^{l(s)-1}(-1)^j\beta^{-n_j(s)}, & \text{若 } i=1,2,\cdots,l(s)-1,\\ -(-1)^i\dfrac{\rho}{1-\beta}\beta^{K+1}, & \text{若 } i=l(s),l(s)+1.\end{cases}$$

显然，对任意一个 $s \in S_K$, 在 $i \in N(1, l(s)+1)$ 上存在 $J_i(s)$，满足

$$J_{j+1}(s) = J_j(s) + (-1)^j \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n_j(s)}, \quad \text{对所有} \quad j \in N(1, l(s))$$

及

$$J_{2k+1}(s) < J_{2k-1}(s), \quad \text{对一切} \quad k \in N(1, l^-(s)).$$

为简便起见，将 $J_1(s)$ 记作 $J(s)$, 即

$$J(s) = -(-1)^{l(s)} \frac{\rho}{1-\beta}\beta^{K+1} - \frac{2\rho}{1-\beta} \sum_{j=1}^{l(s)-1} (-1)^j \beta^{-n_j(s)}.$$

对给定的 $\sigma \in R$ 与 $s \in S_K$, 让

$$\widetilde{R}_{\sigma,s} = \widetilde{R}^+_{\sigma,s} \bigcup \widetilde{R}^-_{\sigma,s},$$

式中

$$\widetilde{R}^+_{\sigma,s} = \left\{ \varphi; \begin{array}{l} \varphi : N(-K, 0) \to R, \ \varphi(i) > \sigma \ \ \text{对一切} \ \ i \in N^+_s, \\ \\ \text{又} \ \ \varphi(i) \le \sigma \ \ \text{对一切} \ \ i \in N^-_s. \end{array} \right\}$$

及

$$\widetilde{R}^-_{\sigma,s} = \left\{ \varphi; \begin{array}{l} \varphi : N(-K, 0) \to R, \ \varphi(i) \le \sigma \ \ \text{对一切} \ \ i \in N^+_s, \\ \\ \text{又} \ \ \varphi(i) > \sigma \ \ \text{对一切} \ \ i \in N^-_s. \end{array} \right\}$$

容易看出 $\bigcup\limits_{s \in S_K} \widetilde{R}^{\pm}_{\sigma,s} = \widetilde{R}^{\pm}_{\sigma}$，其中 $\widetilde{R}^+_\sigma$ 与 $\widetilde{R}^-_\sigma$ 的含义见 § 4.1.

设 $\widetilde{R}_\sigma = \widetilde{R}^+_\sigma \bigcup \widetilde{R}^-_\sigma$, 则 $\widetilde{R}_\sigma = \bigcup\limits_{s \in S_K} \widetilde{R}_{\sigma,s}$. 对给定的 $\varphi \in \widetilde{R}_\sigma$, 必存在一个 $s \in S_K$，使得 $\varphi \in \widetilde{R}_{\sigma,s}$. 这个 s 是唯一的，记为 $s(\varphi)$.

为方便起见，对 $\varphi \in \widetilde{R}_\sigma$, 给出如下定义:

$$l(\varphi) = l(s(\varphi)), l^{\pm}(\varphi) = l^{\pm}(s(\varphi)), n_j(\varphi) = n_j(s(\varphi)), j = 0, 1, \cdots, l(\varphi),$$

$$J_i(\varphi) = J_i(s(\varphi)), i = 1, 2, \cdots, l(\varphi)+1, \ \text{及} \ \ J(\varphi) = J(s(\varphi)).$$

接下来，我们给出一个引理，该引理对主要定理的证明起了非常重要的作用.

引 理 4.2.1 设 $(x(n), y(n))$ 为模型 (4.1.1) 和 (4.1.3) 具有初值 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_\sigma$ 的解. 则

(i) 当 $\varphi \in \widetilde{R}^+_\sigma$ 时，有

$$y(n) = \begin{cases} \beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1} - J_j(\varphi)) - (-1)^j \frac{\rho}{1-\beta}, \\ \qquad \text{若} \ n-K-1 \in N(n_j(\varphi), n_{j-1}(\varphi)), j \in N(1, l(\varphi)), \\ \beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1} - J(\varphi) + \frac{\rho}{1-\beta} - \sum\limits_{j=1}^{n-K-1} \beta^{-j} f(x(j))), \quad \text{若} \ n \in N(K+2), \end{cases} \tag{4.2.1}$$

当 $\varphi\in\tilde{R}_\sigma^-$ 及 $\sigma\geq\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，有

$$y(n)=\begin{cases}\beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}+J_j(\varphi))+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta},\\ \qquad\qquad 若\ n-K-1\in N(n_j(\varphi),n_{j-1}(\varphi)),j\in N(1,l(\varphi)),\\ \beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}+J(\varphi))-\frac{\rho}{1-\beta},\ 若\ n\in N(K+2).\end{cases}\tag{4.2.2}$$

(ii) 当 $\psi\in\tilde{R}_\sigma^+$ 时，有

$$x(n)=\begin{cases}\beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}+J_j(\psi))+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta},\\ \qquad\qquad 若\ n-K-1\in N(n_j(\psi),n_{j-1}(\psi)),j\in N(1,l(\psi)),\\ \beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}f(y(j))),\ 若\ n\in N(K+2),\end{cases}\tag{4.2.3}$$

当 $\psi\in\tilde{R}_\sigma^-$ 及 $\sigma\geq\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，有

$$x(n)=\begin{cases}\beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}-J_j(\psi))-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta},\\ \qquad\qquad 若\ n-K-1\in N(n_j(\psi),n_{j-1}(\psi)),j\in N(1,l(\psi)),\\ \beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}-J(\psi))+\frac{\rho}{1-\beta},\ 若\ n\in N(K+2).\end{cases}\tag{4.2.4}$$

证 明： 只证情形 (i), 情形 (ii) 类似可证. 设 $\varphi\in\tilde{R}_\sigma^+$, 即 $\varphi\in\tilde{R}^+_{\sigma,s(\varphi)}$ 且 $s(\varphi)=\{n_j(\varphi)\}_{j\in N(0,\,l(\varphi))}$. 则有

$$\begin{cases}\varphi(i)>\sigma,\quad 对所有\ \ i\in N^+_{s(\varphi)}=\bigcup\limits_{k=0}^{l^+(\varphi)-1}N(n_{2k+1}(\varphi)+1,n_{2k}(\varphi)),\\ \varphi(i)\leq\sigma,\quad 对所有\ \ i\in N^-_{s(\varphi)}=\bigcup\limits_{k=1}^{l^-(\varphi)}N(n_{2k}(\varphi)+1,n_{2k-1}(\varphi)),\end{cases}\tag{4.2.5}$$

其中

$$0=n_0(\varphi)>n_1(\varphi)>\cdots>n_{l(\varphi)-1}(\varphi)>n_{l(\varphi)}=-K-1.$$

由 (4.1.1), (4.1.2) 和 (4.2.5) 可知, 当 $n-K\in N(n_{2k+1}(\varphi)+1,n_{2k}(\varphi)),k\in N(0,l^+(\varphi)-1)$ 时

$$y(n+1)=\beta y(n)+\rho;$$

当 $n-K\in N(n_{2k}(\varphi)+1,n_{2k-1}(\varphi)),k\in N(1,l^-(\varphi))$ 时

$$y(n+1)=\beta y(n)-\rho.$$

因此，当 $n-K-1\in N(n_{2k+1}(\varphi),n_{2k}(\varphi)),k\in N(0,l^+(\varphi)-1)$ 时

$$y(n)=\left(y(n_{2k+1}(\varphi)+K+1)-\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n-n_{2k+1}(\varphi)-K-1}+\frac{\rho}{1-\beta};$$

当 $n-K-1\in N(n_{2k}(\varphi),n_{2k-1}(\varphi)),k\in N(1,l^-(\varphi))$ 时

$$y(n)=\left(y(n_{2k}(\varphi)+K+1)+\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n-n_{2k}(\varphi)-K-1}-\frac{\rho}{1-\beta}.$$

从而，当 $n-K-1\in N(n_j(\varphi),n_{j-1}(\varphi)),j\in N(1,l(\varphi))$ 时

$$y(n)=\left(y(n_j(\varphi)+K+1)+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n-n_j(\varphi)-K-1}-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}. \tag{4.2.6}$$

让 $n-K-1=n_{j-1}(\varphi)$，则有

$$y(n_{j-1}(\varphi)+K+1)=\left(y(n_j(\varphi)+K+1)+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n_{j-1}(\varphi)-n_j(\varphi)}-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta},$$

上式又可重写为

$$\begin{aligned}&(y(n_{j-1}(\varphi)+K+1)+(-1)^{j-1}\frac{\rho}{1-\beta})\beta^{-n_{j-1}(\varphi)}\\=&\left(y(n_j(\varphi)+K+1)+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{-n_j(\varphi)}+2(-1)^{j-1}\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{j-1}(\varphi)}.\end{aligned}$$

设

$$\left(y(n_j(\varphi)+K+1)+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{-n_j(\varphi)}=y_j, \tag{4.2.7}$$

则有

$$y_{j-1}=y_j+2(-1)^{j-1}\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{j-1}}(\varphi).$$

显然

$$\begin{aligned}y_{l(\varphi)}&=\left(y(n_{l(\varphi)}(\varphi)+K+1)+(-1)^{l(\varphi)}\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{-n_{l(\varphi)}(\varphi)}\\&=\left(y(0)+(-1)^{l(\varphi)}\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{K+1}\\&=\psi(0)\beta^{K+1}-J_{l(\varphi)}(\varphi).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}y_{l(\varphi)-1}&=\psi(0)\beta^{K+1}-J_{l(\varphi)}(\varphi)+2(-1)^{l(\varphi)-1}\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{l(\varphi)-1}(\varphi)}\\&=\psi(0)\beta^{K+1}-J_{l(\varphi)-1}(\varphi).\end{aligned}$$

一般说来，易得下面的递推关系

$$y_j=\psi(0)\beta^{K+1}-J_j(\varphi) \tag{4.2.8}$$

对所有的 $j\in N(1,l(\varphi))$ 都成立. 将 (4.2.7) 与 (4.2.8) 代入 (4.2.6) 中，得到当 $n-K-1\in N(n_j(\varphi),n_{j-1}(\varphi)),j\in N(1,l(\varphi))$ 时,

$$y(n)=(\psi(0)\beta^{K+1}-J_j(\varphi))\beta^{n-K-1}-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}. \tag{4.2.9}$$

特别的，有

$$y(K+1)=\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)+\frac{\rho}{1-\beta}. \tag{4.2.10}$$

让 $n\in N(K+2)$, 对 (4.1.1) 从 $K+1$ 到 $n-1$ 求和，即得

$$\begin{aligned} y(n) &= \beta^n\left(y(K+1)\beta^{-K-1}-\sum_{j=K+1}^{n-1}\beta^{-j-1}f(x(j-K))\right)\\ &= \beta^{n-K-1}\left(y(K+1)-\sum_{j=K+1}^{n-1}\beta^{-(j-K)}f(x(j-K))\right)\\ &= \beta^{n-K-1}\left(\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)+\frac{\rho}{1-\beta}-\sum_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}f(x(j))\right), \end{aligned} \qquad (4.2.11)$$

于是 (4.2.1) 得证. 下面来证明式 (4.2.2). 利用与前面一个类似的推导，易证当 $n-K-1\in N(n_j(\varphi),n_{j-1}(\varphi)), j\in N(1,l(\varphi))$ 时,

$$y(n)=\beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}+J_j(\varphi))+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}.$$

另一方面注意到由 $\varphi\in\widetilde{R}_\sigma^-$ 有 $\varphi(0)\le\sigma$. 还注意到 $\sigma\ge\frac{\rho}{1-\beta}$, 对式 (4.1.1) 从 0 到 $n-K-1$ 求和，当 $n\in N(K+1)$ 时，可得

$$\begin{aligned} x(n-K) &= \beta^{n-K}(\varphi(0)+\sum_{j=0}^{n-K-1}\beta^{-j-1}f(y(j-K)))\\ &\le \beta^{n-K}(\sigma+\rho\sum_{j=0}^{n-K-1}\beta^{-j-1})\\ &= \beta^{n-K}\left(\sigma+\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-(n-K)}-\frac{\rho}{1-\beta}\right)\\ &\le \sigma, \end{aligned}$$

因而

$$y(n+1)=\beta y(n)-\rho.$$

于是，对 $n\in N(K+2)$ 有

$$y(n)=\left(y(K+1)+\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n-K-1}-\frac{\rho}{1-\beta}=\beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}+J(\varphi))-\frac{\rho}{1-\beta}.$$

证毕.

本节最后我们给出主要定理及证明.

定 理 4.2.1 若 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$ 且 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma$. 则当 $n\to\infty$ 时，模型 (4.1.1) 和 (4.1.3) 的解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

证 明. 考虑以下四种可能情形：(a) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$; (b) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$; (c) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$; (d) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$. 只须对情形 (a) 加以验证. 其他情形类似讨论. 设 $\Phi=(\varphi,\psi)$, 及

$C_1=\varphi(0)\beta^{K+1}+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}$, 和 $C_2=\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)+\frac{\rho}{1-\beta}$. 则由引理 (4.2.1), 当 $n\in N(K+2)$ 时，可看出若 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 有

$$\begin{cases} x(n)=\beta^{n-K-1}(C_1+\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}f(y(j))), \\ y(n)=\beta^{n-K-1}(C_2-\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}f(x(j))). \end{cases} \tag{4.2.12}$$

可得

$$\begin{cases} x(n)\le\beta^{n-K-1}(C_1+\rho\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j})=\beta^{n-K-1}(C_1-\frac{\rho}{1-\beta})+\frac{\rho}{1-\beta}, \\ y(n)\le\beta^{n-K-1}(C_2+\rho\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j})=\beta^{n-K-1}(C_2-\frac{\rho}{1-\beta})+\frac{\rho}{1-\beta}. \end{cases}$$

因为 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$, 则存在一个充分大的正整数 $m>0$, 使得

$$\begin{cases} x(n)\le\sigma, \\ y(n)\le\sigma, \end{cases} \quad 当\ n\in N(m), \tag{4.2.13}$$

因而，当 $n\in N(m+K+1)$ 时，由 (4.1.2), (4.2.12) 和 (4.2.13) 有

$$\begin{aligned} x(n) &= \beta^{n-K-1}(C_1+\sum_{j=1}^{m-1}\beta^{-j}f(y(j))+\rho\sum_{j=m}^{n-K-1}\beta^{-j}) \\ &= \beta^{n-K-1}(C_1+\sum_{j=1}^{m-1}\beta^{-j}f(y(j))-\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m+1})+\frac{\rho}{1-\beta} \end{aligned}$$

与

$$y(n)=\beta^{n-K-1}(C_2-\sum_{j=1}^{m-1}\beta^{-j}f(x(j))+\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m+1})-\frac{\rho}{1-\beta}.$$

从而有 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

定 理 4.2.2 设 $\sigma=\frac{\rho}{1-\beta}$ 及 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma$. 则当 $n\to\infty$ 时，模型 (4.1.1) 和 (4.1.3) 的解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 或 $\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 进一步有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$ 的充要条件是下列情形之一成立:

(A) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,\pm}$;

(B) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$ 及 $\varphi(0)\beta^{K+1}\le J(\psi)$;

(C) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 及 $\psi(0)\beta^{K+1}>J(\varphi)$;

(D) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 及 $\psi(0)\beta^{K+1}\le J(\varphi)$, 且

$$\varphi(0)\beta^{K+1}+J(\psi)\le\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n^*}, \tag{4.2.14}$$

其中 $n^*\in N(0,n_1(\varphi)+K)$ 且满足

$$\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[(\psi(0)-\beta^{-K-1}J_{2k^*}(\varphi)]}-1\le n^*<\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[\psi(0)-\beta^{-K-1}J_{2k^*}(\varphi)]},$$

这里 $k^* \in N(1, l^-(\varphi))$ 是使得下式

$$J_{2k^*+1}(\varphi) < \psi(0)\beta^{K+1} \leq J_{2k^*-1}(\varphi) \tag{4.2.15}$$

成立的唯一正整数；另一方面，$(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$ 的充要条件是下列情形之一成立：

(E) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$ 及 $\varphi(0)\beta^{K+1} > J(\psi)$;

(F) $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 及 $\psi(0)\beta^{K+1} \leq J(\varphi)$, 且

$$\varphi(0)\beta^{K+1} + J(\psi) > \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n^*}, \tag{4.2.16}$$

其中 n^* 与 k^* 的意义如 (D) 所述.

证 明： 下面，我们分几种可能情形来证明定理.

情形 (i). $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$

由 (4.2.2) 与 (4.2.4) 可看出，若 $n \in N(K+2)$, 则有

$$\begin{cases} x(n) = \beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1} - J(\psi)) + \frac{\rho}{1-\beta}, \\ y(n) = \beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1} + J(\varphi)) - \frac{\rho}{1-\beta}. \end{cases}$$

不难推出：当 $n \to \infty$ 时，$(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

情形 (ii). $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,+}$

设 $C_1 = \varphi(0)\beta^{K+1} + J(\psi) - \frac{\rho}{1-\beta}$ 及 $C_2 = \psi(0)\beta^{K+1} + J(\varphi)$. 则若 $n \in N(K+2)$, 由 (4.2.2) 与 (4.2.3) 可看出

$$\begin{cases} x(n) = \beta^{n-K-1}(C_1 + \sum\limits_{j=1}^{n-K-1} \beta^{-j} f(y(j))), \\ y(n) = C_2\beta^{n-K-1} - \frac{\rho}{1-\beta}. \end{cases}$$

设 $m > 0$ 为一充分大的整数，使得

$$y(n) < \sigma, \quad 对\ n \in N(m).$$

则当 $n \in N(m+K+2)$ 时，得到

$$\begin{aligned} x(n) &= \beta^{n-K-1}(C_1 + \sum_{j=1}^{m-1} \beta^{-j} f(y(j)) + \rho \sum_{j=m}^{n-K-1} \beta^{-j}) \\ &= \beta^{n-K-1}(C_1 + \sum_{j=1}^{m-1} \beta^{-j} f(y(j)) - \frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m+1}) + \frac{\rho}{1-\beta}, \end{aligned}$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，$(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

情形 (iii). $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$

设 $C=\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)+\frac{\rho}{1-\beta}$. 则由 (4.2.1) 及 (4.2.4), 当 $n\in N(K+2)$ 时，有

$$\begin{cases} x(n)=\beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}-J(\psi))+\frac{\rho}{1-\beta}, \\ y(n)=\beta^{n-K-1}(C-\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}f(x(j))). \end{cases}$$

若 $\varphi(0)\beta^{K+1}\le J(\varphi)$, 有

$$x(n)\le\frac{\rho}{1-\beta}=\sigma,\quad 当\ n\in N(K+2).$$

因此，对 $n\in N(2K+3)$ 有

$$\begin{aligned} y(n) &= \beta^{n-K-1}(C-\sum_{j=1}^{K+1}\beta^{-j}f(x(j))-\rho\sum_{j=K+2}^{n-K-1}\beta^{-j}) \\ &= \beta^{n-K-1}(C-\sum_{j=1}^{K+1}\beta^{-j}f(x(j))+\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-K-1})-\frac{\rho}{1-\beta}. \end{aligned}$$

于是，当 $n\to\infty$ 时，$(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

若 $\varphi(0)\beta^{K+1}>J(\psi)$, 则由与前面类似的推导，易证当 $n\to\infty$, $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

情形 (iv). $\Phi\in\tilde{X}_\sigma^{+,+}$ 且 $\psi(0)\beta^{K+1}>J(\varphi)$

首先，我们证明在这种情形下，必存在一个正整数 $m>0$, 使得

$$x(n)\le\sigma,\quad 对\ n\in N(m). \tag{4.2.17}$$

不然, 取一正整数序列 $\{m_j\}_{j\in N}$ 满足：$m_j\to\infty$, 对一切 $j\in N$, $m_j>0$ 及 $x(m_j)>\sigma$. 对给定的 $n\in N$, 取 $n\in N(0,m_i-1)$ 对某个 $i\in N$. 对式 (4.1.1) 从 n 到 m_i-1 求和，得

$$\begin{aligned} x(n) &= \beta^{n}(x(m_i)\beta^{-m_i}-\sum_{j=n}^{m_i-1}\beta^{-j-1}f(y(j-K))) \\ &> \beta^{n}(\sigma\beta^{-m_i}-\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m_i})+\frac{\rho}{1-\beta} \\ &= \sigma. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

由 (4.2.1), 当 $n\in N(K+2)$ 时

$$\begin{aligned} y(n) &\ge \beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)+\frac{\rho}{1-\beta}-\rho\sum_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}) \\ &= \beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi))+\frac{\rho}{1-\beta} \\ &> \frac{\rho}{1-\beta}=\sigma. \end{aligned}$$

因而，当 $n\in N(2K+3)$ 时，

$$x(n)=\beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=1}^{K+1}\beta^{-j}f(y(j))+\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-K-1})-\frac{\rho}{1-\beta}.$$

由此推知 $n\to\infty$ 时，有 $x(n)\to-\frac{\rho}{1-\beta}$, 此与 (4.2.18) 矛盾. 由此证明 (4.2.17) 成立. 于是，对 $n\in N(m+K+2)$, 可导出

$$\begin{cases} x(n)=\beta^{n-K-1}(\varphi(0)\beta^{K+1}+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum\limits_{j=1}^{n-K-1}\beta^{-j}f(y(j))),\\ y(n)=\beta^{n-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)+\frac{\rho}{1-\beta}-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\beta^{-j}f(x(j)))+\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m+1})-\frac{\rho}{1-\beta}. \end{cases}$$

利用与情形 (ii) 类似的推导，容易证明：当 $n\to\infty$ 时，有 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

情形 (v). $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$ 且 $\psi(0)\beta^{K+1}\le J(\varphi)$

显然，易看出 $y(0)=\psi(0)>\frac{\rho}{1-\beta}$. 另外，由 (4.2.1) 容易知道

$$y(K)=\beta^{-1}[\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)]+\frac{\rho}{1-\beta}\le\frac{\rho}{1-\beta},$$

$$y(n_1(\varphi)+K+1)=\beta^{n_1(\varphi)}[\psi(0)\beta^{K+1}-J(\varphi)]+\frac{\rho}{1-\beta}\le\frac{\rho}{1-\beta}.$$

让 $m\in N(1,n_1(\varphi)+K+1)$, 使得

$$y(m)\le\frac{\rho}{1-\beta},\qquad \text{且}$$

$$y(n)>\frac{\rho}{1-\beta},\quad \text{对一切}\quad n\in N(0,m-1).\tag{4.2.19}$$

则

$$\begin{aligned} y(n) &= \beta^n(y(m)\beta^{-m}-\sum_{j=m}^{n-1}\beta^{-j}f(x(j-K)))\\ &\le \beta^n(\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m}+\rho\sum_{j=m}^{n-1}\beta^{-j})\\ &= \frac{\rho}{1-\beta}.\qquad \text{若}\ \ n\in N(m+1) \end{aligned}\tag{4.2.20}$$

显然，$m-K-1\in N(-K,n_1(\varphi))$, 于是必存在唯一的 $j^*\in N(2,l(\varphi))$ 使得 $m-K-1\in N(n_{j^*}(\varphi),n_{j^*-1}(\varphi))$. 由 (4.2.1) 可得

$$y(m)=\beta^{m-K-1}(\psi(0)\beta^{K+1}-J_{j^*}(\varphi))-(-1)^{j^*}\frac{\rho}{1-\beta}\le\frac{\rho}{1-\beta},\tag{4.2.21}$$

$$y(m-1)=\beta^{m-K-2}(\psi(0)\beta^{K+1}-J_{j^*}(\varphi))-(-1)^{j^*}\frac{\rho}{1-\beta}>\frac{\rho}{1-\beta}.$$

从而， j^* 必为偶数，不妨设 $j^*=2k$. 则 $k\in N(1,l^-(\varphi))$, 且

$$\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{m-K-2}<\psi(0)\beta^{K+1}-J_{2k}(\varphi)\le\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{m-K-1}. \tag{4.2.22}$$

注意到 $n_{2k}(\varphi)=n_{j^*}(\varphi)\le m-K-2<m-K-1\le n_{j^*-1}(\varphi)=n_{2k-1}(\varphi)$, 可得

$$\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_{2k}(\varphi)}<\psi(0)\beta^{K+1}-J_{2k}(\varphi)\le\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_{2k-1}(\varphi)}.$$

或写成等价式

$$J_{2k+1}(\varphi)<\psi(0)\beta^{K+1}\le J_{2k-1}(\varphi).$$

由于，对 $k\in N(1,l^-(\varphi))$,$J_{2k+1}(\varphi)$ 是单调减少的. 因而 $k=k^*$, 且 k^* 满足 (4.2.15). 于是，由 (4.2.21) 有

$$\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{(1-\beta)(\psi(0)-\beta^{-K-1}J_{2k^*}(\varphi))}{2\rho}-1\le m-1<\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{(1-\beta)(\psi(0)-\beta^{-K-1}J_{2k^*}(\varphi))}{2\rho}.$$

令 $m-1=n^*$, 则 $n^*\in N(0,n_1(\varphi)+K)$ ，因此， (4.2.19) 与 (4.2.20) 变为

$$y(n)>\frac{\rho}{1-\beta},\quad 若\ n\in N(0,n^*),$$

$$y(n)\le\frac{\rho}{1-\beta},\quad 若\ n\in N(n^*+1).$$

从而，当 $n\in N(n^*+K+2)$ 时得到

$$x(n)=\beta^{n-k-1}\left(\varphi(0)\beta^{k+1}+J(\psi)-\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n^*}\right)+\frac{\rho}{1-\beta}.$$

利用与情形 (iii) 一个类似的推导，易证明当 $n\to\infty$ 时，由 (4.2.14) 可推知 $(x(n),y(n))\to\left(,-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 由 (4.2.16) 可得 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 基于上述讨论，不难得到余下部分的证明，因而省去.

定 理 4.2.2' 设 $\sigma=-\frac{\rho}{1-\beta}$ 及 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma$. 则当 $n\to\infty$ 时，模型 (4.1.1) 和 (4.1.3) 的解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(-\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 或 $\left(-\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 进一步有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(-\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$ 的充要条件是下列情形之一成立:

(A)' $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,\pm}$;

(B)' $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$ 及 $|\varphi(0)|\beta^{K+1}<J(\psi)$;

(C)' $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$ 及 $|\psi(0)|\beta^{K+1}\ge J(\varphi)$;

(D)' $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$ 及 $|\psi(0)|\beta^{K+1}<J(\varphi)$, 且

$$|\varphi(0)|\beta^{K+1}+J(\psi)<\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n^*},$$

其中 $n^*\in N[0,n_1(\varphi)+K)$ 且满足

$$\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[(|\psi(0)|-\beta^{-K-1}J_{2k^*}(\varphi)]}-1\le n^*<\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[|\psi(0)|-\beta^{-K-1}J_{2k^*}(\varphi)]},$$

这里 $k^* \in N(1, l^-(\varphi))$ 是使得下式

$$J_{2k^*+1}(\varphi) < |\psi(0)|\beta^{K+1} \le J_{2k^*-1}(\varphi)$$

成立的唯一正整数；另一方面，$(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$ 的充要条件是下列情形之一成立：

(E)' $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,+}$ 及 $|\varphi(0)|\beta^{K+1} \ge J(\psi)$;

(F)' $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$ 及 $|\psi(0)|\beta^{K+1} < J(\varphi)$, 且

$$|\varphi(0)|\beta^{K+1} + J(\psi) \ge \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n^*},$$

其中 n^* 与 k^* 的意义如 (D') 所述.

证 明: 略.

下面我们考察解的全局指数稳定性. 由上面的讨论可知

当 $|\sigma| > \frac{\rho}{1-\beta}$ 时，(4.1.1) 有唯一平衡点 (x^*, y^*),

$$(x^*, y^*) = \begin{cases} (\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}), & \text{若 } \xi > \sigma, \\ (\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}), & \text{若 } \xi \le \sigma, \end{cases}$$

作变换

$$\begin{cases} u(n) = x(n) - x^*, \\ v(n) = y(n) - y^*, \end{cases} \tag{4.2.23}$$

将 (4.1.1) 变成

$$\begin{cases} u(n+1) = \beta u(n) - g(v(n-K)), \\ v(n+1) = \beta v(n) + h(u(n-K)), \end{cases} \tag{4.2.24}$$

其中，函数 g 与 h 分别为

$$g(\xi) = (1-\beta)x^* - f(y^*+\xi) = \begin{cases} (1-\beta)x^* - \rho, & \text{若 } \xi \le \sigma - y^*, \\ (1-\beta)x^* + \rho, & \text{若 } \xi > \sigma - y^*, \end{cases}$$

以及

$$h(\xi) = -(1-\beta)y^* - f(x^*+\xi) = \begin{cases} -(1-\beta)y^* - \rho, & \text{若 } \xi \le \sigma - x^*, \\ -(1-\beta)y^* + \rho, & \text{若 } \xi > \sigma - x^*, \end{cases}$$

显然，(4.1.1) 的平衡点 (x^*, y^*) 转化为 (4.2.23) 的平衡点 $(0, 0)$.

设 $n_0 \in Z$. 令 X^{n_0} 表示 $N(n_0 - K, n_0]$ 上定义的二维向量函数 $(\varphi(n), \psi(n))$ 的集合，其上定义上确界范数 $\|\cdot\|$. 则 X^{n_0} 成为线性空间. 对 $\Phi^{n_0} \in X^{n_0}$, 让 $(x^{\Phi^{n_0}}, y^{\Phi^{n_0}})$

表示 (4.1.1) 的具有初值 $\Phi^{n_0}=(\varphi^{n_0},\psi^{n_0})$ 的解. 令 $\Psi^{n_0}=(\varphi^{n_0}-x^*,\psi^{n_0}-y^*)$ 则且 (4.2.24) 的具有初值的解为

$$(u^{\Psi^{n_0}},v^{\Psi^{n_0}})=(x^{\Phi^{n_0}}-x^*,y^{\Phi^{t_0}}-y^*) \tag{4.2.25}$$

对 $H>0$, 定义:

$$B_H^{n_0}=\Phi^{n_0}\in X^{n_0}:\|\Phi^{n_0}\|=\sup_{n_0-K\le n\le n_0}\|\Phi^{n_0}(n)\|_{R^2}\le H,$$

其中 Euclid 空间 R^2 中的范数取为 $\|(x,y)\|_{R^2}=|x|+|y|$, $(x,y)\in R^2$.

定 义 4.2.1. 如果存在 $\alpha^*>0$, 使对任给 $\beta^*>0$, 存在 $K^*(\beta^*)>0$, 使当 $\Psi^{n_0}\in B_\beta^{n_0}$ 时, 对一切 $n\ge n_0$ 都有

$$|u^{\Psi^{n_0}}(n)|+|v^{\Psi^{n_0}}(n)|\le K^*\|\Psi^{n_0}\|\beta^{\alpha(n-n_0)}.$$

则称 (4.2.24) 的零解为全局指数渐近稳定.

显见, 变换 (4.2.23) 将 (4.1.1) 和 (4.1.3) 的平衡解 (x^*,y^*) 的全局指数稳定性转化为 (4.2.24) 的零解的全局指数稳定性.

下面的定理表明, 当 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$ 时, (4.1.1) 的平衡解是全局指数渐近稳定的.

定 理 4.2.3. 设 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$, 对 $\forall\beta^*>0$. 让

$$K^*=\begin{cases}1, & \text{当}\quad \beta^*\le\sigma-\frac{\rho}{1-\beta},\\ 1+\frac{4\rho}{\beta^K(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}}-\frac{4\rho}{\beta^*(1-\beta)}, & \text{当}\quad \beta^*>\sigma-\frac{\rho}{1-\beta},\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}|u(n)|+|v(n)| &= [|u(n^*+K)|+|v(n^*+K)|]\beta^{n^*+K-n_0}\\ &\le K^*\|\Psi^{n_0}\|\beta^{n-n_0}.\end{aligned}$$

对一切 $n\in N(n_0)$ 都成立.

证 明: 当 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$ 时, (4.2.24) 中的 g,h 分别为

$$g(\xi)=\begin{cases}0, & \text{若}\quad \xi\le\sigma+\frac{\rho}{1-\beta},\\ 2\rho, & \text{若}\quad \xi>\sigma+\frac{\rho}{1-\beta},\end{cases}$$

以及

$$h(\xi)=\begin{cases}0, & \text{若}\quad \xi\le\sigma-\frac{\rho}{1-\beta},\\ 2\rho, & \text{若}\quad \xi>\sigma-\frac{\rho}{1-\beta},\end{cases}$$

对 $n_0\in R$, $\Psi^{n_0}\in X^{n_0}$, 简记 $(u^{\Psi^{n_0}},v^{\Psi^{n_0}})=(u,v)$. 将 (4.2.24) 从 n_0 到 $n-1$ 积分, 得

$$\begin{cases}u(n)=\beta^n[u(n_0)\beta^{-n_0}-\sum_{j=0}^{n-n_0-1}\beta^{-j-n_0-1}g(v(n-K-j))],\\ v(n)=\beta^n[v(n_0)\beta^{-n_0}+\sum_{j=0}^{n-n_0-1}\beta^{-j-n_0-1}h(u(n-K-j))],\end{cases}$$

因此，对 $n \geq n_0$，有

$$\begin{cases} u(n) \leq u(n_0)\beta^{n-n_0}, \\ v(n) \leq v(n_0)\beta^{n-n_0} + \frac{2\rho}{1-\beta}(1-\beta^{n-n_0}) \end{cases} \tag{4.2.26}$$

以及

$$\begin{cases} |u(n)| \leq |u(n_0)|\beta^{n-n_0} + \frac{2\rho}{1-\beta}(1-\beta^{n-n_0}), \\ |v(n)| \leq |v(n_0)|e^{-(n-n_0)} + \frac{2\rho}{1-\beta}(1-\beta^{n-n_0}). \end{cases} \tag{4.2.27}$$

注意到 $u(n_0), v(n_0) = \Psi^{n_0}(n_0)$，有 $|u(n_0)| + |v(n_0)| = \|\Psi^{n_0}(n_0)\|_{R^2} \leq \|\Psi^{n_0}\|$. 所以，由 (4.2.26) 可得

$$\begin{cases} u(n) \leq \|\Psi^{n_0}\|\beta^{n-n_0}, \\ v(n) \leq \|\Psi^{n_0}\|\beta^{n-n_0} + \frac{2\rho}{1-\beta}. \end{cases} \tag{4.2.28}$$

而 (4.2.27) 给出

$$|u(n)| + |v(n)| \leq \|\Psi^{n_0}\| + \frac{4\rho}{1-\beta}[(\frac{1}{\beta})^{n-n_0} - 1]\beta^{n-n_0}. \tag{4.2.29}$$

现令

$$n^* = \begin{cases} n_0, & \text{当 } \|\Psi^{n_0}\| \leq \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}, \\ n_0 + \log_{\frac{1}{\beta}} \frac{\|\Psi^{n_0}\|}{\sigma - \frac{\rho}{1-\beta}}, & \text{当 } \|\Psi^{n_0}\| > \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}, \end{cases}$$

则由 $\sigma > \frac{\rho}{1-\beta}$ 知 $n_0 \leq n^* < \infty$，且 $\|\Psi^{n_0}\|\beta^{n^*-n_0} \leq \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}$. 于是对 $n \geq n^*$，由 (4.2.28) 得

$$\begin{cases} u(n) \leq \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}, \\ v(n) \leq \sigma + \frac{\rho}{1-\beta}. \end{cases} \tag{4.2.30}$$

设 $\beta^* > 0$, $\Psi^{n_0} \in B_{\beta^*}^{n_0}$. 以下分两种情形来讨论.

情形 I. 设 $\beta^* \leq \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}$.

这时 $\|\Psi^{n_0}\| \leq \beta^* \leq \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}$，故 $n^* = n_0$，从而 (4.2.30) 对 $n \geq n_0$ 成立. 再注意到当 $n_0 - \tau \leq n \leq n_0$ 时，$|u(n)| + |v(n)| = \|\Psi^{n_0}(n)\|_{R^2} \leq \|\Psi^{n_0}\| \leq \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}$. 因此 (4.2.30) 对一切 $n \geq n_0 - K$ 成立. 所以，当 $n \geq n_0$ 时，有

$$\begin{cases} u(n) = u(n_0)\beta^{n-n_0}, \\ v(n) = v(n_0)\beta^{n-n_0}, \end{cases} \tag{4.2.31}$$

这样就容易证明

$$|u(n)| + |v(n)| \leq \|\Psi^{n_0}\|\beta^{n-n_0}, \quad n \geq n_0. \tag{4.2.32}$$

情形 II. 设 $\beta^* > \sigma - \frac{\rho}{1-\beta}$.

取 $K^*=1+\frac{4\rho}{\beta^K(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}}-\frac{4\rho}{\beta^*(1-\beta)}$. 显见 $K^*>1$. 为完成定理证明，我们须证

$$|u(n)|+|v(n)|\le K^*\|\Psi^{n_0}\|\beta^{n-n_0},\quad n\ge n_0. \tag{4.2.33}$$

事实上，若 $\|\Psi^{n_0}\|\le\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}$, 则由情形 I 的证明可知 (4.2.31) 及 (4.2.32) 成立. 故此时 (4.2.33) 成立.

下设 $\|\Psi^{n_0}\|>\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}$. 令 $n^*=n_0+\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{\|\Psi^{n_0}\|}{\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}}$. 则 $n_0\le n\le n^*+K$ 时，由 (4.2.29), 我们有

$$\begin{aligned}|u(n)|+|v(n)| &\le [\|\Psi^{n_0}\|+\frac{4\rho}{1-\beta}(\beta^{-(n^*+K-n_0)}-1)]\beta^{n-n_0}\\ &= (\|\Psi^{n_0}\|+\frac{4\rho}{\beta^K(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}}\|\Psi^{n_0}\|-\frac{4\rho}{1-\beta})\beta^{n-n_0}\\ &= (\|\Psi^{n_0}\|+\frac{4\rho}{\beta^K(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}}\|\Psi^{n_0}\|)\beta^{n-n_0}\\ &\quad -[\frac{4\rho}{\beta^*(1-\beta)}\|\Psi^{n_0}\|+4(\frac{\rho}{1-\beta}-\frac{\rho\|\Psi^{n_0}\|}{(1-\beta)\beta^*})]\beta^{n-n_0}.\end{aligned}$$

注意到 $\Psi^{n_0}\in B_\beta^{n_0}\Rightarrow\|\Psi^{n_0}\|\le\beta^*$, 得

$$\begin{aligned}|u(n)|+|v(n)| &\le \|\Psi^{n_0}\|\cdot 1+\frac{4\rho}{\beta^K(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sigma-\frac{\rho}{1-\beta}}-\frac{4\rho}{\beta^*(1-\beta)}\cdot\beta^{n-n_0}\\ &= K^*\|\Psi^{t_0}\|\beta^{n-n_0},\qquad \text{当}\ n_0\le n\le n^*+K.\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

现设 $n>n^*+K$. 由于 (4.2.30) 对 $n\ge n^*$ 成立，因此，

$$\begin{cases}u(n)=u(n^*+K)\beta^{n-n^*-K},\\ v(n)=v(n^*+K)\beta^{n-n^*-K}.\end{cases}$$

又由 (4.2.34), 有

$$|u(n^*+K)|+|v(n^*+K)|\le K^*\|\Psi^{n_0}\|\beta^{n^*+K-n_0}.$$

从而，当 $n>n^*+K$ 时，

$$\begin{aligned}|u(n)|+|v(n)| &= [|u(n^*+K)|+|v(n^*+K)|]\beta^{n^*+K-n_0}\\ &\le K^*\|\Psi^{n_0}\|\beta^{n-n_0},\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

结合 (4.2.34)(4.2.35) 两式，完成了定理的证明.

[注 4.2.1] 由定理 4.2.3 易知 (4.1.1) 和 (4.1.3) 的平衡解为全局指数渐近稳定的.

[注 4.2.2] 对情形 $(\sigma<-\frac{\rho}{1-\beta})$ 类似可证 (4.1.1) 和 (4.1.3) 的平衡解亦为全局指数渐近稳定的.

4.3 具正反馈二元离散神经网络模型的渐近性

本节，我们研究模型 (4.1.2). 先给出下面一些记号：

对已知的 $K \in N(2)$, 让 S_K 表示一个非正整数序列 $\{n_j\}_{j=0}^{l}$, 满足 $l \in N(2,K)$, $n_0 = 0, n_l = -K$, 且对 $j \in N(1,l)$ 有 $n_j < n_{j-1}$. 又对给定的 $s = \{n_j(s)\}_{j=0}^{l} \in S_K$, 设

$$N_s^+ = \bigcup_{k=0}^{l^+-1} N(n_{2k+1}, n_{2k}-1), \quad N_s^- = \bigcup_{k=1}^{l^-} N(n_{2k}, n_{2k-1}-1),$$

其中，当 l 为奇数 $l^{\pm} = (l \pm 1)/2$; 当 l 为偶数 $l^{\pm} = l/2$. 令 $\widetilde{R}_\sigma = \widetilde{R}_\sigma^+ \cup \widetilde{R}_\sigma^-$ ($\widetilde{R}_\sigma, \widetilde{R}_\sigma^+, \widetilde{R}_\sigma^-$ 的含义同 §4.2). 对任意 $\varphi \in \widetilde{R}_\sigma$, 必存在唯一的 $s(\varphi) \in S_K$ 使得

$$\varphi(i) > \sigma \quad 若 \quad i \in N_{s(\varphi)}^+, \qquad \varphi(i) \le \sigma \quad 若 \quad i \in N_{s(\varphi)}^-, \qquad 若 \quad \varphi \in \widetilde{R}_\sigma^+,$$

$$\varphi(i) \le \sigma \quad 若 \quad i \in N_{s(\varphi)}^+, \qquad \varphi(i) > \sigma \quad 若 \quad i \in N_{s(\varphi)}^-, \qquad 若 \quad \varphi \in \widetilde{R}_\sigma^-.$$

设 $s(\varphi) = \{n_j(\varphi)\}_{j=0}^{l(\varphi)}$, 并定义一个关于 φ 的数列 $\{J_j(\varphi)\}_{j=0}^{l(\varphi)+1}$ 如下：

$$J_j(\varphi) = \begin{cases} -(-1)^{l(\varphi)} \dfrac{\rho}{1-\beta}\beta^K - \dfrac{2\rho}{1-\beta} \displaystyle\sum_{k=j}^{l(\varphi)-1} (-1)^k \beta^{-n_k(\varphi)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 若 \ j = 0, 1, 2, \cdots, l(\varphi)-1, \\ -(-1)^j \dfrac{\rho}{1-\beta}\beta^K, \qquad\qquad 若 \ j = l(\varphi), l(\varphi)+1. \end{cases}$$

显然，对每一个 $\varphi \in \widetilde{R}_\sigma$, 在 $j \in N(0, l(\varphi)+1)$ 上 $J_j(\varphi)$ 存在，当 $j \in N(0, l(\varphi))$, 满足

$$J_{j+1}(\varphi) = J_j(\varphi) + (-1)^j \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n_j(\varphi)},$$

且当 $k \in N(0, l(\varphi))$ 时，

$$J_{2k}(\varphi) < J_{2k+2}(\varphi).$$

为方便起见，将 $J_1(\varphi)$ 记作 $J(\varphi)$, 即有

$$J(\varphi) = -(-1)^{l(\varphi)} \frac{\rho}{1-\beta}\beta^K - \frac{2\rho}{1-\beta} \sum_{j=1}^{l(\varphi)-1} (-1)^j \beta^{-n_j(\varphi)}.$$

引 理 4.3.1　设 $\sigma \ge \frac{\rho}{1-\beta}$; 若 $(x(n), y(n))$ 是模型 (4.1.2) 和 (4.1.3) 具有初值 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_\sigma$ 的解．则下述命题成立：

(i)　若 $\varphi \in \widetilde{R}_\sigma^+$ 则当 $n - K \in N(n_j(\varphi)-1, n_{j-1}-1)$, $j \in N(1, l(\varphi))$ 时，有

$$y(n) = \beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K + J_j(\varphi)\right] + (-1)^j \frac{\rho}{1-\beta},$$

当 $n \in N(K)$ 时，有

$$y(n)=\beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^{K}+J(\varphi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(x(j))\right];$$

(ii) 若 $\varphi\in\widetilde{R}_{\sigma}^{-}$ 则对 $n-K\in N(n_j(\varphi)-1,n_{j-1}(\varphi)-1),j\in N(1,l(\varphi))$ 有

$$y(n)=\beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^{K}-J_j(\varphi)\right]-(-1)^{j}\frac{\rho}{1-\beta}.$$

当 $n\in N(K)$ 时，有

$$y(n)=\beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^{K}-J(\varphi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta};$$

(iii) 若 $\psi\in\widetilde{R}_{\sigma}^{+}$，则当 $n-K\in N(n_j(\psi)-1,n_{j-1}(\psi)-1),j\in N(1,l(\psi))$ 时，有

$$x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^{K}+J_j(\psi)\right]+(-1)^{j}\frac{\rho}{1-\beta},$$

且对 $n\in N(K)$ 有

$$x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^{K}+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(y(j))\right];$$

(iv) 若 $\psi\in\widetilde{R}_{\sigma}^{-}$，则对 $n-K\in N(n_j(\psi)-1,n_{j-1}(\psi)-1),j\in N(1,l(\psi))$ 有

$$x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^{K}-J_j(\psi)\right]-(-1)^{j}\frac{\rho}{1-\beta},$$

且对 $n\in N(K)$，有

$$x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^{K}-J(\psi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta}.$$

证 明： 我们只证 (i) 和 (ii). (iii) 与 (iv) 的证明类似. 设 $\varphi\in\widetilde{R}_{\sigma}^{+}$，即

$$\begin{aligned}&\varphi(i)>\sigma,\quad 若\quad i\in N_{s(\varphi)}^{+}=\bigcup_{k=0}^{l^{+}(\varphi)-1}N(n_{2k+1}(\varphi),n_{2k}(\varphi)-1),\\&\varphi(i)\le\sigma,\quad 若\quad i\in N_{s(\varphi)}^{-}=\bigcup_{k=1}^{l^{-}(\varphi)}N(n_{2k}(\varphi),n_{2k-1}(\varphi)-1),\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

这里 $s(\varphi)=\{n_j(\varphi)\}_{j=0}^{l(\varphi)}$ 满足

$$0=n_0(\varphi)>n_1(\varphi)>\cdots>n_{l(\varphi)-1}(\varphi)>n_{l(\varphi)}(\varphi)=-K.$$

由 (4.1.2), (4.1.3) 及 (4.3.1), 知当 $n-K\in N(n_{2k+1}(\varphi),n_{2k}(\varphi)-1),k\in N(0,l^{+}(\varphi)-1)$ 时，有

$$y(n)=\beta y(n-1)-\rho$$

及当 $n-K\in N(n_{2k}(\varphi),n_{2k-1}(\varphi)-1),k\in N(1,l^-(\varphi))$ 时，又有

$$y(n)=\beta y(n-1)+\rho.$$

因而，当 $n-K\in N(n_{2k+1}(\varphi)-1,n_{2k}(\varphi)-1),k\in N(0,l^+(\varphi)-1)$ 时，得

$$y(n)=\left[y(n_{2k+1}(\varphi)+K-1)+\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{n-n_{2k+1}(\varphi)-K+1}-\frac{\rho}{1-\beta},$$

当 $n-K\in N(n_{2k}(\varphi)-1,n_{2k-1}(\varphi)-1)$ 时，也得

$$y(n)=\left[y(n_{2k}(\varphi)+K-1)-\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{n-n_{2k}(\varphi)-K+1}+\frac{\rho}{1-\beta}.$$

即当 $n-K\in N(n_j(\varphi)-1,n_{j-1}(\varphi)-1),j\in N(1,l(\varphi))$ 时，有

$$y(n)=\left[y(n_j(\varphi)+K-1)-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{n-n_j(\varphi)-K+1}+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}. \tag{4.3.2}$$

特别有

$$y(n_{j-1}(\varphi)+K-1)=\left[y(n_j(\varphi)+K-1)-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{n_{j-1}(\varphi)-n_j(\varphi)}+(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}.$$

也可重写为

$$\begin{aligned}&\left[y(n_{j-1}(\varphi)+K-1)-(-1)^{j-1}\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{-n_{j-1}(\varphi)}\\&=\left[y(n_j(\varphi)+K-1)-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{-n_j(\varphi)}-(-1)^{j-1}\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{j-1}(\varphi)}.\end{aligned}$$

设

$$\left[y(n_j(\varphi)+K-1)-(-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{-n_j(\varphi)}=y_j, \tag{4.3.3}$$

则

$$y_{j-1}=y_j-(-1)^{j-1}\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{j-1}(\varphi)},$$

因此

$$y_j=J_j(\varphi)+c,$$

其中 c 为常数. 显然

$$\begin{aligned}c&=y_{l(\varphi)}-J_{l(\varphi)}(\varphi)\\&=\left[y(n_{l(\varphi)}(\varphi)+K-1)-(-1)^{l(\varphi)}\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{-n_{l(\varphi)}(\varphi)}+(-1)^{l(\varphi)}\frac{\rho}{1-\beta}\beta^K\\&=\left[y(-1)-(-1)^{l(\varphi)}\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^K+(-1)^{l(\varphi)}\frac{\rho}{1-\beta}\beta^K\\&=\psi(-1)\beta^K,\end{aligned}$$

所以

$$y_j = \psi(-1)\beta^K + J_j(\varphi). \tag{4.3.4}$$

将 (4.3.3) 及 (4.3.4) 代入 (4.3.2), 得若 $n-K \in N(n_j(\varphi)-1, n_{j-1}(\varphi)-1), j \in N(1, l(\varphi))$, 有

$$y(n) = \beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K + J_j(\varphi)\right] + (-1)^j\frac{\rho}{1-\beta}. \tag{4.3.5}$$

上式中若 $n = K-1$, 则 $j=1$, 且若 $n \in N(K)$, 有

$$y(K-1) = \psi(-1)\beta^K + J(\varphi) - \frac{\rho}{1-\beta}.$$

对 (4.1.2) 从 K 到 n 求和得

$$\begin{aligned} y(n) &= \beta^n\left[y(K-1)\beta^{-K+1} + \sum_{j=K}^{n}\beta^{-j}f(x(j-K))\right] \\ &= \beta^{n-K+1}\left[y(K-1) + \sum_{j=K}^{n}\beta^{-(j-K)-1}f(x(j-K))\right] \\ &= \beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K + J(\varphi) - \frac{\rho}{1-\beta} + \sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(x(j))\right]. \end{aligned}$$

于是命题 (i) 证毕. 下证命题 (ii). 若 $\varphi \in \tilde{R}_\sigma^-$, 利用与命题 (i) 类似论证, 当 $n-K \in N(n_j(\varphi)-1, n_{j-1}(\varphi)-1), j \in N(1, l(\varphi))$ 时, 我们能够证明

$$y(n) = \beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K - J_j(\varphi)\right] - (-1)^j\frac{\rho}{1-\beta},$$

特别有

$$y(K-1) = \psi(-1)\beta^K - J(\varphi) + \frac{\rho}{1-\beta}.$$

注意到 $\varphi \in \tilde{R}_\sigma^-$, 即有 $\varphi(-1) \le \sigma$, 又 $\sigma \ge \frac{\rho}{1-\beta}$. 于是当 $n \in N(K)$ 时, 有

$$\begin{aligned} x(n-K) &= \beta^{n-K}\left[\varphi(-1) + \sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j}f(y(j-K))\right] \\ &\le \beta^{n-K}\left(\sigma + \rho\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}\right) \\ &= \beta^{n-K}\left(\sigma - \frac{\rho}{1-\beta} + \frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-n+K}\right) \\ &\le \sigma. \end{aligned}$$

因此

$$y(n) = \beta y(n-1) + \rho, \quad 若\ n \in N(K),$$

从而，对 $n\in N(K)$ 有

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[y(K-1)-\frac{\rho}{1-\beta}\right]\beta^{n-K+1}+\frac{\rho}{1-\beta} \\ &= \beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K-J(\varphi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta}. \end{aligned}$$

命题 (ii) 证毕.

下面我们给出本节主要结果与证明.

定 理 4.3.1 若 $\sigma>\frac{\rho}{1-\beta}$, 且 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma$. 则当 $n\to\infty$ 时，模型 (4.1.2) 和 (4.1.3) 的解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

证 明 . 我们考虑四种可能情形：(a) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$; (b) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$; (c) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$; (d) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$. 只证情形 (a). 其他情形类似. 设 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 再设 $C_1=\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}$, $C_2=\psi(-1)\beta^K+J(\varphi)-\frac{\rho}{1-\beta}$. 则当 $n\in N(K)$ 时，结合引理 4.3.1 的 (i) 和 (iii) 我们有,

$$\begin{cases} x(n)=\beta^{n-K+1}\left[C_1+\sum\limits_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(y(j))\right], \\ \\ y(n)=\beta^{n-K+1}\left[C_2+\sum\limits_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(x(j))\right]. \end{cases}$$

由此可推出

$$x(n)\le\beta^{n-K+1}\left(C_1+\rho\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}\right)=\left(C_1-\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n-K+1}+\frac{\rho}{1-\beta},$$

$$y(n)\le\beta^{n-K+1}\left(C_2+\rho\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}\right)=\left(C_2-\frac{\rho}{1-\beta}\right)\beta^{n-K+1}+\frac{\rho}{1-\beta}.$$

并注意到 $0<\beta<1$ 与 $\frac{\rho}{1-\beta}<\sigma$. 设 m 为一充分大的正整数，使得

$$x(n)<\sigma,\quad y(n)<\sigma,\quad 若\ n\in N(m),$$

则当 $n\in N(m+K)$ 时，有

$$x(n)=\beta^{n-K+1}\left[C_1+\sum_{j=0}^{m-1}\beta^{-j-1}f(y(j))-\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m}\right]+\frac{\rho}{1-\beta},$$

$$y(n)=\beta^{n-K+1}\left[C_2+\sum_{j=0}^{m-1}\beta^{-j-1}f(x(j))-\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m}\right]+\frac{\rho}{1-\beta}.$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，有 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 证毕.

定 理 4.3.2 设 $\sigma=\frac{\rho}{1-\beta}$, 并设 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_\sigma$. 则模型 (4.1.2) 和 (4.1.3) 的解 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))$

(A) 若 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$, 当 $n\to\infty$, 有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$;

(B) 若 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,+}$, 当 $n\to\infty$ 时, 若 $\psi(-1)\beta^K>J(\varphi)$, 有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(-\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若 $\psi(-1)\beta^K\le J(\varphi)$, 有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$;

(C) 若 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,-}$, 当 $n\to\infty$ 时, 若 $\varphi(-1)\beta^K>J(\psi)$, 有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若 $\psi(-1)\beta^K\le J(\varphi)$, 有 $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$;

(D) 若 $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 当 $n\to\infty$, 有下述命题成立:

(a) $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(-\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若

$$\psi(-1)\beta^K+J(\varphi)>\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_1},\tag{4.3.6}$$

其中 $m_1\in N(n_{2k_1+1}(\psi)+K)$ 为非负整数, 使得

$$\begin{aligned}&\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[(\varphi(-1)+\beta^{-K}J_{2k_1+1}(\psi)]}-1\\&\le m_1<\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[\varphi(-1)+\beta^{-K}J_{2k_1+1}(\psi)]}\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

此处 $k_1\in N(0,l^+(\psi)-1)$ 是最小非负整数, 满足 $-J_{2k_1+2}(\psi)<\varphi(-1)\beta^K$;

(b) $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若

$$\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)>\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_2},\tag{4.3.8}$$

其中 $m_2\in N(n_{2k_2+1}(\varphi)+K)$ 为一非负整数, 使得

$$\begin{aligned}&\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[(\psi(-1)+\beta^{-K}J_{2k_2+1}(\varphi)]}-1\\&\le m_2<\log_\beta\frac{2\rho}{(1-\beta)[\psi(-1)+\beta^{-K}J_{2k_2+1}(\varphi)]},\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

这里 $k_2\in N(0,l^+(\varphi)-1)$ 是最小非负整数, 满足 $-J_{2k_2+2}(\varphi)<\psi(-1)\beta^K$;

(c) $(x^\Phi(n),y^\Phi(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若

$$\psi(-1)\beta^K+J(\varphi)\le\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_1},\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)\le\frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_2},\tag{4.3.10}$$

这里 m_1 和 m_2 的含义分别同于 (4.3.7) 和 (4.3.8).

证 明: 我们分几种可能情形讨论:

(A) $\Phi\in\widetilde{X}_\sigma^{-,-}$. 由引理 4.2.1 的 (ii) 和 (iv) 可看出, 对 $n\in N(K)$, 有

$$\begin{cases}x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K-J(\psi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta},\\y(n)=\beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K-J(\varphi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta}.\end{cases}$$

显然，当 $n\to\infty$, 有 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

(B) $\Phi\in\tilde{X}_\sigma^{-,+}$. 由引理 4.2.1 的 (ii) 和 (iii), 对 $n\in N(K)$, 可得

$$\begin{cases} x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(y(j))\right], \\ y(n)=\beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K-J(\varphi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta}. \end{cases}$$

若 $\psi(-1)\beta^K>J(\varphi)$, 则对 $n\in N(K)$ 有

$$y(n)>\frac{\rho}{1-\beta}=\sigma.$$

因此，当 $n\in N(2K)$ 有

$$\begin{aligned} x(n) &= \beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{K-1}\beta^{-j-1}f(y(j))-\rho\sum_{j=K}^{n-K}\beta^{-j-1}\right] \\ &= \beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{K-1}\beta^{-j-1}f(y(j))+\frac{\rho}{1-\beta}\beta^K\right]-\frac{\rho}{1-\beta}. \end{aligned}$$

于是，当 $n\to\infty$, 有 $(x(n),y(n))\to\left(-\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

若 $\psi(-1)\beta^K\le J(\varphi)$, 则 $n\in N(K)$ 时

$$y(n)\le\frac{\rho}{1-\beta}=\sigma.$$

由此得

$$x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{K-1}\beta^{-j-1}f(y(j))-\frac{\rho}{1-\beta}\beta^K\right]+\frac{\rho}{1-\beta}.$$

从而，当 $n\to\infty$ 时， $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

(C) $\Phi\in\tilde{X}_\sigma^{+,-}$. 由引理 4.3.1 中的 (i) 和 (iv), 对 $n\in N(K)$ 有

$$\begin{cases} x(n)=\beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K-J(\psi)\right]+\frac{\rho}{1-\beta}, \\ y(n)=\beta^{n-K+1}\left[\psi(-1)\beta^K+J(\varphi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{n-K}\beta^{-j-1}f(x(j))\right]. \end{cases}$$

利用与 (B) 类似的推导，易证当 $n\to\infty$ 时，若 $\varphi(-1)\beta^K>J(\psi)$ 有 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},-\frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 而且，若 $\varphi(-1)\beta^K\le J(\psi)$ 有 $(x(n),y(n))\to\left(\frac{\rho}{1-\beta},\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

(D) $\Phi\in\tilde{X}_\sigma^{+,+}$. 首先注意到

$$2l^+(\psi)=l(\psi)+1,\ \text{若 } l(\psi) \text{ 是奇数},\quad 2l^+(\psi)=l(\psi),\ \text{若 } l(\psi) \text{ 是偶数},$$

$$2l^+(\varphi)=l(\varphi)+1,\ \text{若 } l(\varphi) \text{ 是奇数},\quad 2l^+(\varphi)=l(\varphi),\ \text{若 } l(\varphi) \text{ 是偶数},$$

可发现

$$-J_{2l^+(\psi)}(\psi)=\frac{\rho}{1-\beta}\beta^K=\sigma\beta^K<\varphi(-1)\beta^K.$$

$$-J_{2l^+(\varphi)}(\varphi) = \frac{\rho}{1-\beta}\beta^K = \sigma\beta^K < \psi(-1)\beta^K.$$

易看出分别在 (a) 与 (b) 中定义的 k_1 与 k_2 均存在，且 $k_1 \in N(0, l^+(\varphi)-1)$, $k_2 \in N(0, l^+(\psi)-1)$. 再注意到

$$\varphi(-1) + \beta^{-K}J_{2k_1+1}(\psi) > \beta^{-K}\left[-J_{2k_1+2}(\psi) + J_{2k_1+1}(\psi)\right] = \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{2k_1+1}(\psi)-K},$$

$$\psi(-1) + \beta^{-K}J_{2k_2+1}(\varphi) > \beta^{-K}\left[-J_{2k_2+2}(\varphi) + J_{2k_2+1}(\varphi)\right] = \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-n_{2k_2+1}(\varphi)-K};$$

由上式易看出：分别由 (4.3.7) 和 (4.3.9) 定义的整数 m_1 与 m_2 均存在，且 $m_1 > n_{2k_1+1}(\psi) + K - 1$, $m_2 > n_{2k_2+1}(\varphi) + K - 1$. 以下我们考虑几种可能情形.

情形 1. $\varphi(-1)\beta^K + J(\psi) \le \frac{2\rho}{1-\beta}$.

显然, $\varphi(-1)\beta^K \le \frac{2\rho}{1-\beta} - J(\psi) = -J_0(\psi)$, 由此可得

$$-J_{2k_1}(\psi) \ge \varphi(-1)\beta^K > -J_{2k_1+2}(\psi) \tag{4.3.11}$$

及 $-J_{2k}(\psi) \ge \varphi(-1)\beta^K$ $(k \in N(0, k_1))$. 注意到

$$x(-1) = \varphi(-1) > \sigma = \frac{\rho}{1-\beta}.$$

由引理 4.3.1 中 (i), 有

$$x(K-1) = \varphi(-1)\beta^K + J(\psi) - \frac{\rho}{1-\beta} \le \frac{\rho}{1-\beta}.$$

设 $n^* \in N(0, K-1)$ 满足

$$x(n^*) \le \frac{\rho}{1-\beta}, \quad x(n) > \frac{\rho}{1-\beta}, \qquad 若\ n \in N(-1, n^*-1), \tag{4.3.12}$$

则由 (4.1.2), 当 $n \in N(n^*+1)$ 有

$$\begin{aligned} x(n) &= \beta^n\left[x(n^*)\beta^{-n^*} + \sum_{j=n^*+1}^{n}\beta^{-j}f(y(j-K))\right] \\ &\le \beta^n\left(\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-n^*} + \rho\sum_{j=n^*+1}^{n}\beta^{-j-1}\right) \\ &= \frac{\rho}{1-\beta}, \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

因为 $n^* - K \in N(-K, 0)$，必有唯一的 $j^* \in N(1, l(\psi))$ 使得 $n^* - K \in N(n_{j^*}(\psi), n_{j^*-1}(\psi) - 1)$. 由引理 4.3.1 中 (iii) 和 (4.3.12), 得到

$$x(n^*) = \beta^{n^*-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K + J_{j^*}(\psi)\right] + (-1)^{j^*}\frac{\rho}{1-\beta} \le \frac{\rho}{1-\beta},$$

$$x(n^*-1) = \beta^{n^*-K}\left[\varphi(-1)\beta^K + J_{j^*}(\psi)\right] + (-1)^{j^*}\frac{\rho}{1-\beta} > \frac{\rho}{1-\beta},$$

于是 j^* 必为奇数，不妨设 $j^* = 2k^* + 1$. 则 $k^* \in N(1, l^+(\psi) - 1)$. 且

$$\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n^*-K+1} \geq \varphi(-1)\beta^K + J_{2k^*+1}(\psi) > \frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n^*-K}. \tag{4.3.14}$$

注意到

$$n_{2k^*}(\psi) = n_{j^*-1}(\psi) \geq n^* - K + 1 > n^* - K \geq n_{j^*}(\psi) = n_{2k^*+1}(\psi).$$

从而有

$$\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_{2k^*}(\psi)} \geq \varphi(-1)\beta^K + J_{2k^*+1}(\psi) > \frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_{2k^*+1}(\psi)},$$

即

$$-J_{2k^*}(\psi) \geq \varphi(-1)\beta^K > -J_{2k^*+2}(\psi). \tag{4.3.15}$$

比较 (4.3.11) 和 (4.3.15), 并注意到 $J_{2k}(\psi)$ 关于 k 是单调递增的，则有 $k^* = k_1$.
从 (4.3.14) 可看出

$$\log_{\frac{1}{\beta}} \frac{(1-\beta)[\varphi(-1) + \beta^{-K}J_{2k_1+1}(\varphi)]}{2\rho} - 1 \leq n^* < \log_{\frac{1}{\beta}} \frac{(1-\beta)[\varphi(-1) + \beta^{-K}J_{2k_1+1}(\varphi)]}{2\rho},$$

由此，并结合 (4.3.7), 得 $n^* = m_1$. 因而有 (4.3.12) 与 (4.3.13), 又

$$x(n) > \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若\ n \in N(-1, m_1 - 1); \qquad x(n) \leq \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若\ n \in N(m_1).$$

于是，由引理 4.3.1 (iii) 得

$$y(n) = \beta^{n-k+1}\left[\psi(-1)\beta^K + J(\varphi) - \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_1}\right] + \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若\ n \in N(m_1+K). \tag{4.3.16}$$

与情形 (B) 证明类似，当 $n \to \infty$ 时，从 (4.3.6) 不难推出 $(x(n), y(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 从 (4.3.10) 可推出 $(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

情形 2. $\psi(-1)\beta^K + J(\varphi) \leq \frac{2\rho}{1-\beta}$.

利用与情形 1 的类似推导，我们能证明

$$y(n) > \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若\ n \in N(-1, m_2 - 1); \quad y(n) \leq \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若\ n \in N(m_2).$$

由此可推出

$$x(n) = \beta^{n-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K + J(\psi) - \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_2}\right] + \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若\ n \in N(m_2 + K). \tag{4.3.17}$$

所以，当 $n \to \infty$ 时，若 (4.3.8) 成立，有 $(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$; 若 (4.3.10) 成立，有 $(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

情 形 3. $\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)>\frac{2\rho}{1-\beta}$, 且 $\psi(-1)\beta^K+J(\varphi)>\frac{2\rho}{1-\beta}$.

在这一情形下有

$$\varphi(-1)\beta^K>\frac{2\rho}{1-\beta}-J(\psi)=-J_0(\psi)>-J_2(\psi)$$

与

$$\psi(-1)\beta^K>\frac{2\rho}{1-\beta}-J(\varphi)=-J_0(\varphi)>-J_2(\varphi).$$

于是得 $k_1=k_2=0$. 从 (4.3.7) 与 (4.3.9), 我们可看到

$$\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{(1-\beta)[\varphi(-1)+\beta^{-K}J(\psi)]}{2\rho}-1\le m_1<\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{(1-\beta)[\varphi(-1)+\beta^{-K}J(\psi)]}{2\rho},$$

$$\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{(1-\beta)[\psi(-1)+\beta^{-K}J(\varphi)]}{2\rho}-1\le m_1<\log_{\frac{1}{\beta}}\frac{(1-\beta)[\psi(-1)+\beta^{-K}J(\varphi)]}{2\rho}.$$

此即

$$\begin{aligned}&\tfrac{2\rho}{1-\beta}\left(\tfrac{1}{\beta}\right)^{m_1-K+1}\ge\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)>\tfrac{2\rho}{1-\beta}\left(\tfrac{1}{\beta}\right)^{m_1-K},\\&\tfrac{2\rho}{1-\beta}\left(\tfrac{1}{\beta}\right)^{m_2-K+1}\ge\psi(-1)\beta^K+J(\varphi)>\tfrac{2\rho}{1-\beta}\left(\tfrac{1}{\beta}\right)^{m_2-K}.\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

易知 $m_1\ge K$ 及 $m_2\ge K$. 若 $m_1=K$, 则

$$x(m_1-1)=x(K-1)=\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}>\frac{\rho}{1-\beta}.$$

若 $m_1>K$, 则

$$\begin{aligned}x(m_1-1)&=\beta^{m_1-K}\left[\varphi(-1)\beta^K+J(\psi)-\frac{\rho}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{m_1-K-1}\beta^{-j-1}f(y(j))\right]\\&>\beta^{m_1-K}\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{m_1-K}-\frac{\rho}{1-\beta}-\rho\sum_{j=0}^{m_1-K-1}\beta^{-j-1}\right)\\&=\frac{\rho}{1-\beta}.\end{aligned}$$

因而, 我们总有 $x(m_1-1)>\frac{\rho}{1-\beta}$. 进一步知: 当 $n\in N(-1,m_1-2)$ 有

$$x(m_1-1)=\beta^{m_1-1}\left[x(n)\beta^{-n}+\sum_{j=n+1}^{m_1-1}\beta^{-j}f(y(j-K))\right],$$

从而推得

$$x(n)>\beta^n\left(\frac{\rho}{1-\beta}\beta^{-m_1+1}-\rho\sum_{j=n+1}^{m_1-1}\beta^{-j-1}\right)=\frac{\rho}{1-\beta},$$

因此
$$x(n) > \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若 \quad n \in N(-1, m_1 - 1), \tag{4.3.19}$$
同理易证
$$y(n) > \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若 \quad n \in N(-1, m_2 - 1). \tag{4.3.20}$$
下面我们考虑几种情形:

(a) 假设 (4.3.6) 成立. 则由 (4.3.18), 我们有 $m_2 - K + 1 > m_1$. 于是 $0 \le m_1 - K < m_2 - 1$. 注意到 (4.3.18) 和 (4.3.20) 可发现
$$\begin{aligned} x(m_1) &= \beta^{m_1-K+1}\left[\varphi(-1)\beta^K + J(\psi) - \frac{\rho}{1-\beta} + \sum_{j=0}^{m_1-K}\beta^{-j-1}f(y(j))\right] \\ &\le \beta^{m_1-K+1}\left(\frac{2\rho}{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{m_1-K+1} - \frac{\rho}{1-\beta} + \rho\sum_{j=0}^{m_1-K}\beta^{-j-1}\right) \\ &= \frac{\rho}{1-\beta}, \end{aligned}$$
且易知对 $n \in N(m_1+1)$ 有 $x(n) \le \frac{\rho}{1-\beta}$, 从而
$$x(n) \le \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 若 \quad n \in N(m_1). \tag{4.3.21}$$
由 (4.3.19) 和 (4.3.21), 易推出 (4.3.16). 于是 $(x(n), y(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

(b) 假设 (4.3.8) 成立. 则如情形 (a), 我们得到
$$y(n) \le \frac{\rho}{1-\beta}, \quad 对 \quad n \in N(m_2), \tag{4.3.22}$$
由此并结合 (4.3.20), 可得 (4.3.17). 因此有 $(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$.

(c) 假设 (4.3.10) 成立. 则由 (4.3.18) 可得 $m_1 - K < m_2$ 及 $m_2 - K < m_1$. 利用与前面类似推导, 能证明 (4.3.21) 与 (4.3.22) 成立. 由 (4.3.19)- (4.3.20) 及 (4.3.21)-(4.3.22), 我们得到 (4.3.16)-(4.3.17). 因而当 $n \to \infty$, $(x(n), y(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 证毕.

定 理 4.3.2' 设 $\sigma = -\frac{\rho}{1-\beta}$ 且 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_\sigma$. 则模型 (4.1.2) 和 (4.1.3) 的解 $(x^\Phi(n), y^\Phi(n))$

(A)' 对 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,+}$, 当 $n \to \infty$, 有 $(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$;

(B)' 对 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{+,-}$, 当 $n \to \infty$ 时, 若 $-\varphi(-1)\beta^K \ge J(\psi)$, 有 $(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$. 若 $-\varphi(-1)\beta^K < J(\psi)$, 有 $(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$;

(C)' 对 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,+}$, 当 $n \to \infty$ 时, 若 $-\psi(-1)\beta^K \ge J(\varphi)$, 有 $(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若 $-\psi(-1)\beta^K < J(\varphi)$, 有 $(x^\Phi(n), y^\Phi(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$;

(D)' 对 $\Phi \in \widetilde{X}_\sigma^{-,-}$, 当 $n \to \infty$, 有下述命题

(a)' $(x^{\Phi}(n), y^{\Phi}(n)) \to \left(\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若

$$|\psi(-1)|\beta^K + J(\varphi) \geq \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_1},$$

其中 $m_1 \in N(n_{2k_1+1}(\psi) + K)$ 为非负整数，使得

$$\log_\beta \frac{2\rho}{(1-\beta)[(|\varphi(-1)| + \beta^{-K} J_{2k_1+1}(\psi)]} - 1$$

$$< m_1 \leq \log_\beta \frac{2\rho}{(1-\beta)[|\varphi(-1)| + \beta^{-K} J_{2k_1+1}(\psi)]},$$

此处 $k_1 \in N(0, l^+(\psi) - 1)$ 是最小非负整数，满足 $-J_{2k_1+2}(\psi) \leq |\varphi(-1)|\beta^K$;

(b)' $(x^{\Phi}(n), y^{\Phi}(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, \frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若

$$|\varphi(-1)|\beta^K + J(\psi) \geq \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_2},$$

其中 $m_2 \in N(n_{2k_2+1}(\varphi) + K)$ 为一非负整数，使得

$$\log_\beta \frac{2\rho}{(1-\beta)[(|\psi(-1)| + \beta^{-K} J_{2k_2+1}(\varphi)]} - 1$$

$$\leq m_2 < \log_\beta \frac{2\rho}{(1-\beta)[|\psi(-1)| + \beta^{-K} J_{2k_2+1}(\varphi)]},$$

这里 $k_2 \in N(0, l^+(\varphi) - 1)$ 是最小非负整数，满足 $-J_{2k_2+2}(\varphi) < |\psi(-1)|\beta^K$;

(c)' $(x^{\Phi}(n), y^{\Phi}(n)) \to \left(-\frac{\rho}{1-\beta}, -\frac{\rho}{1-\beta}\right)$, 若

$$|\psi(-1)|\beta^K + J(\varphi) \leq \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_1},$$

且

$$|\varphi(-1)|\beta^K + J(\psi) \leq \frac{2\rho}{1-\beta}\beta^{-m_2},$$

这里 m_1 和 m_2 的含义分别同于 (a') 和 (b') .

证 明 . 略.

与上一节定理 4.2.3 证明类似可得

定 理 4.3.3. 设 $|\sigma| > \frac{\rho}{1-\beta}$, 则 (4.1.2) 和 (4.1.3) 的平衡解为全局指数渐近稳定.

第 5 章 两类双阈值二元神经网络模型的渐近性质

5.1 引 言

在本论文的最后一章我们考虑下列时滞微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y - g(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{5.1.1}$$

与

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + f(y(t-\tau)), \\ \dot{y} = -y + g(x(t-\tau)). \end{cases} \tag{5.1.2}$$

其中时滞 $\tau > 0$ 为常数， $f, g : R \to R$ 为下列不连续函数

$$f(\xi) = \begin{cases} -1, & 若\ \xi > \sigma_1, \\ 1, & 若\ \xi \le \sigma_1, \end{cases} \tag{5.1.3}$$

与

$$g(\xi) = \begin{cases} -1, & 若\ \xi > \sigma_2, \\ 1, & 若\ \xi \le \sigma_2. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

众所周知，对二元神经网络模型的研究为进一步了解大系统神经网络模型奠定了基础. 因此近年来很多学者为此作了大量工作. 然而，对双阈值情形的结果却不多见，其工作也还是将系统初值限定在非振动型函数空间进行解的动力学分析. 因而，这一章我们打算在前面研究的基础上，将我们的工作进一步扩展，着重研究 $\varphi - \sigma_2$ 与 $\psi - \sigma_1$ 若出现有限次符号改变时解的渐近行为. 即考虑方程 (5.1.1) 和 (5.1.2) 具有这些初值 $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{\pm,\pm} = \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+,+} \cup \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+,-} \cup \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-,+} \cup \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-,-}$，其中

$$\widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{\pm,\pm} = \{\ \Phi \in X; \Phi = (\varphi, \psi), \varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_2}^{\pm} \ \ 和 \ \ \psi \in \widetilde{C}_{\sigma_1}^{\pm}\},$$

这里

$$\widetilde{C}_{\sigma_i}^{+} = \{\varphi : [-\tau, 0] \longrightarrow R; \varphi(0) - \sigma_i > 0,\ 和\ \ \varphi(t) - \sigma_i \le 0\ 对某个\ t \in [-\tau, 0)\}, i = 1, 2$$

及

$$\widetilde{C}_{\sigma_i}^{-} = \{\varphi : [-\tau, 0] \longrightarrow R; \varphi(0) - \sigma_i \le 0,\ 和\ \ \varphi(t) - \sigma_i > 0\ 对某个\ t \in [-\tau, 0)\}, i = 1, 2.$$

至于其它情形可作类似处理，在此省略. 在本章第三节，我们证明了若 $\sigma_1 > \sigma_2 > 1$，且 $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}$ 则模型 (5.1.1) 与 (5.1.2) 的每一个解 $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t))$ 都分别收敛于唯一平衡点. 特别对 τ, σ 及 Φ 获得了在临界情形 $\sigma_1 > \sigma_2 = 1$ 下，保证解分别趋于两平衡点之一的充要条件.

5.2 记号与引理

本节所要用到的记号与第二章类似，为方便行文仍如下列出：

设 $\tau > 0$ 为给定常数，让 S 表示定义在 $(-\infty, 0]$ 上的点序列 $\{t_j\}_{j=0}^{n}$ 的集合且满足 $1 \le n < \infty, t_0 = 0, t_n = -\tau$ 及 $t_j > t_{j+1}$ (其中 $j = 0, 1, 2, \cdots, n$). 对给定集合 $S = \{t_j\}_{j=0}^{n}$, 记

$$I_s^+ = \bigcup_{k=0}^{n^+-1} [t_{2k+1}, t_{2k}),$$

$$I_s^- = [-\tau, 0) \backslash I_s^+ = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{n^-} [t_{2k}, t_{2k-1}), & 若\ n \ne 1, \\ \phi, & 若\ n = 1, \end{cases}$$

其中

$$n^{\pm} = (n \pm 1)/2 \quad 若\ n\ 为奇数, \quad n^{\pm} = n/2 \quad 若\ n\ 为偶数.$$

设 $\widetilde{C}_{\sigma_i} = \widetilde{C}_{\sigma_i}^+ \cup \widetilde{C}_{\sigma_i}^- (i = 1, 2.)$, 则对任意 $\varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_i}$, 必存在 $s(\varphi) = \{t_j(\varphi)\}_{j=0}^{n(\varphi)} \in S$, 使得要么

$$\varphi(t) > \sigma_i\ 对几乎一切\ t \in I_{s(\varphi)}^+,\ 且\ \varphi(t) \le \sigma_i\ 对所有\ t \in I_{s(\varphi)}^- (\ 若\ \varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_i}^+), \quad i = 1, 2,$$

要么

$$\varphi(t) \le \sigma_i\ 对所有\ t \in I_{s(\varphi)}^+,\ 且\ \varphi(t) > \sigma_i\ 对几乎所有\ t \in I_{s(\varphi)}^- (\ 若\ \varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_i}^-), \quad i = 1, 2.$$

再定义如下一个 R 上的点序列 $\{J_i(\varphi)\}_{i=0}^{n(\varphi)+1}$：

$$J_i(\varphi) = \begin{cases} (-1)^{n(\varphi)-1} e^{-\tau} + 2 \sum\limits_{j=i}^{n(\varphi)-1} (-1)^{j-1} e^{t_j(\varphi)}, & 若\ i = 0, 1, \cdots, n(\varphi) - 1, \\ (-1)^{i-1} e^{-\tau}, \ 若\ i = n(\varphi), n(\varphi) + 1. \end{cases}$$

显然，对每一个 $\varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_i}$, 必存在 $J_i(\varphi) (i = 0, 1, \cdots, n(\varphi) + 1)$, 满足

$$J_{j+1}(\varphi) = J_j(\varphi) - 2(-1)^{j-1} e^{t_j(\varphi)}\ A\#, \quad j = 0, 1, \cdots, n(\varphi).$$

另外，易知当 $k = 0, 1, \cdots, n^-(\varphi)$ 时

$$J_{2k-1}(\varphi) > J_{2k+1}(\varphi),$$

当 $k = 0, 1, \cdots, n^+(\varphi) - 1$ 时，有

$$J_{2k}(\varphi) < J_{2k+2}(\varphi),$$

其中 $n^{\pm}(\varphi) = (n(\varphi))^{\pm}$.

为方便起见，将 $J_1(\varphi)$ 记作 $J(\varphi)$，即有

$$J(\varphi)=\begin{cases}(-1)^{n(\varphi)-1}e^{-\tau}+2\sum\limits_{j=1}^{n(\varphi)-1}(-1)^{j-1}e^{t_j(\varphi)}, & 若\ n(\varphi)\neq 1,\\ (-1)^{n(\varphi)-1}e^{-\tau}, & 若\ n(\varphi)=1.\end{cases}$$

与第二章类似有下面引理.

引 理 5.2.1. 设 $\sigma_1>\sigma_2\geq 1$, $(x(t),y(t))$ 为具初值 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_{\sigma_{21}}$ 的系统 (5.1.1) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4)(或 (5.1.2) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4)) 的解. 则

(i) 当 $\varphi\in\widetilde{C}^+_{\sigma_2}$ 时，有

$$\begin{cases}y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\mp J_j(\varphi)]\mp(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ t_j(\varphi)\leq t-\tau<t_{j-1}(\varphi), j=1,2,\cdots,n(\varphi),\\ y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\mp J(\varphi)\pm 1\mp\int_0^{t-\tau}e^sf(x(s))ds],\quad 若\ t\geq\tau;\end{cases}\tag{5.2.1}$$

(ii) 当 $\varphi\in\widetilde{C}^-_{\sigma_2}$ 且 $\sigma_2\geq 1$ 时，有

$$\begin{cases}y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\pm J_j(\varphi)]\pm(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ t_j(\varphi)\leq t-\tau<t_{j-1}(\varphi), j=1,2,\cdots,n(\varphi),\\ y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}\pm J(\varphi)]\mp 1,\quad 若\ t\geq\tau;\end{cases}\tag{5.2.2}$$

(iii) 当 $\psi\in\widetilde{C}^+_{\sigma_1}$ 时，有

$$\begin{cases}x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}+J_j(\psi)]+(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ t_j(\psi)\leq t-\tau<t_{j-1}(\psi), j=1,2,\cdots,n(\psi),\\ x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)-1+\int_0^{t-\tau}e^sf(y(s))ds],\quad 若\ t\geq\tau;\end{cases}\tag{5.2.3}$$

(iv) 当 $\psi\in\widetilde{C}^-_{\sigma_1}$ 且 $\sigma_1\geq 1$ 时，有

$$\begin{cases}x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}-J_j(\psi)]-(-1)^j,\\ \qquad\qquad 若\ t_j(\psi)\leq t-\tau<t_{j-1}(\psi), j=1,2,\cdots,n(\psi),\\ x(t)=e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau}-J(\psi)]+1,\quad 若\ t\geq\tau.\end{cases}\tag{5.2.4}$$

证 明：与引理 2.2.1 完全相似，从略.

5.3 主要结果及证明

首先讨论当 $\sigma_1>\sigma_2=1$ 及 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma_{21}}$ 时，模型 (5.1.1) 与 (5.1.2) 的渐近行为.

定 理 5.3.1. 设 $\sigma_1>1=\sigma_2$ 且 $\Phi=(\varphi,\psi)\in\widetilde{X}_{\sigma_{21}}$. 则当 $t\to\infty$ 时，系统 (5.1.1) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的解 $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(1,-1)$ 或 $(1,1)$. 进一步有 $(x^\Phi(t),y^\Phi(t))\to(1,-1)$ 当且仅当下列情形之一成立：

(a) $\Phi \in \widetilde{X}^{-,\pm}_{\sigma_{21}}$；

(b) $\Phi \in \widetilde{X}^{+,-}_{\sigma_{21}}$ 且 $\varphi(0)e^{-\tau} \le J(\psi)$;

(c) $\Phi \in \widetilde{X}^{+,+}_{\sigma_{21}}$ 且 $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}-J_{j_*}(\varphi)} \le \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1+(-1)^{j_*}}$，这里 j_* 是满足 $F_{j_*}(\varphi) \le \psi(0)e^{-\tau}$ 与 $1 \le j_* \le n(\varphi)$ 的最小正整数，其中

$$F_j(\varphi) = \frac{1-(-1)^j\sigma_1}{2}J_j(\varphi) + \frac{1-(-1)^{j+1}\sigma_1}{2}J_{j+1}(\varphi), \quad j=1,2,\cdots,n(\varphi). \tag{5.3.1}$$

另一方面 $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t)) \to (1,1)$ 当且仅当满足下列情形之一：

(b)' $\Phi \in \widetilde{X}^{+,-}_{\sigma_{21}}$ 且 $\varphi(0)e^{-\tau} > J(\psi)$;

(c)' $\Phi \in \widetilde{X}^{+,+}_{\sigma_{21}}$ 且 $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}-J_{j_*}(\varphi)} > \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1+(-1)^{j_*}}$，其中 j_* 的含义见 (c).

证 明： 分下列几种情形讨论

Case 1. $\Phi \in \widetilde{X}^{-,-}_{\sigma_{21}}$，即 $\varphi \in \widetilde{C}^-_{\sigma_2}$ 及 $\psi \in \widetilde{C}^-_{\sigma_1}$

由 (5.2.2) 和 (5.2.4), 当 $t \ge \tau$, 有

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} - J(\psi)] + 1, \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1. \end{cases}$$

显然有 $(x(t), y(t)) \to (1,-1)$ ($t \to \infty$).

Case 2. $\Phi \in \widetilde{X}^{-,+}_{\sigma_{21}}$，即 $\varphi \in \widetilde{C}^-_{\sigma_2}$ 及 $\psi \in \widetilde{C}^+_{\sigma_1}$

若 $t \ge \tau$, 由 (5.2.2) 及 (5.2.3) 得

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(y(s))ds], \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1. \end{cases}$$

让 $T>0$ 充分大，使得

$$y(t) < \sigma_1, \quad 对 \quad t > T.$$

则当 $t > T+\tau$ 时，可发现

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^T e^t f(y(t))dt + \int_T^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^T e^t f(y(t))dt - e^T\right] + 1. \end{aligned}$$

因此， $(x(t), y(t)) \to (1,-1)$ ($t \to \infty$).

Case 3. $\Phi \in \widetilde{X}^{+,-}_{\sigma_{21}}$，即 $\varphi \in \widetilde{C}^+_{\sigma_2}$ 且 $\psi \in \widetilde{C}^-_{\sigma_1}$

从 (5.2.1) 与 (5.2.4), 可知 $t \ge \tau$ 时

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} - J(\psi)] + 1, \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds]. \end{cases}$$

须考虑下面两种情形：

(A) $\varphi(0)e^{-\tau} \le J(\psi)$;

(B)$\varphi(0)e^{-\tau} > J(\psi)$.

对情形 (A), 我们易看出

$$x(t) \le 1, \quad 若 \quad t \ge \tau.$$

若 $t \ge 2\tau$, 得

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{\tau} e^t f(x(t))dt - e^{\tau}] + 1.$$

从而，有 $(x(t), y(t)) \to (1, -1)$ $(t \to \infty)$.

对情形 (B), 类似可证 $(x(t), y(t)) \to (1, 1)$ $(t \to \infty)$.

Case 4. $\Phi \in \tilde{X}^{+,+}_{\sigma_2 1}$, 即 $\varphi \in \tilde{C}^+_{\sigma_2}$ 与 $\psi \in \tilde{C}^+_{\sigma_1}$

显见 $y(0) = \psi(0) \ge \sigma_1$. 另一方面，由 (5.2.1), 可得

$$y(t) \le e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1. \qquad 若\ t \ge \tau. \tag{5.3.2}$$

于是对所有充分大的 t, 都有 $y(t) < \sigma_1$. 设 t^* 为 $y(t) - \sigma_1$ 在 $[0, \infty)$ 上的第一个零点. 则 $0 \le t^* < \infty$; $y(t^*) = \sigma_1$. 并且

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\left[y(t^*)e^{t^*} - \int_{t^*}^{t} e^s f(x(s-\tau))ds\right] \\ &\le e^{-t}\left(\sigma_1 e^{t^*} - e^{t^*}\right) + 1 \\ &< \sigma_1, \qquad 若\ t > t^*. \end{aligned}$$

由 (5.2.3) 可导出

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t^*} e^t f(y(t))dt + \int_{t^*}^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 2e^{t^*}\right] + 1, \qquad 若\ t > t^* + \tau. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

现在，取 j_* 如 (c) 所述. 观察 (5.3.1), 得到

$$\begin{aligned} F_{n(\varphi)}(\varphi) &= \frac{(-1)^{n(\varphi)}\sigma_1 - 1}{2} \cdot (-1)^{n(\varphi)}e^{-\tau} \\ &\quad - \frac{-(-1)^{n(\varphi)+1}\sigma_1 + 1}{2} \cdot (-1)^{n(\varphi)+1}e^{-\tau} \\ &= \sigma_1 e^{-\tau} \\ &\le \psi(0)e^{-\tau}. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

易知 j_* 存在，且 $1 \le j_* \le n(\varphi)$.

我们考虑下面两种可能情形:

(I) $j_* \neq 1$, 即

$$F_{j_*}(\varphi) \leq \psi(0)e^{-\tau} < F_j(\varphi), \qquad j = 1, 2, \cdots, j_* - 1.$$

特别有

$$\psi(0)e^{-\tau} < F_1(\varphi) = \frac{1+\sigma_1}{2}J_1(\varphi) + \frac{1-\sigma_1}{2}J_2(\varphi) = J(\varphi) + (\sigma_1 - 1)e^{t_1(\varphi)},$$

由 (5.2.1), 我们发现

$$y(\tau + t_1(\varphi)) = e^{-t_1(\varphi)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1 < \sigma_1,$$

于是, 有 $-\tau \leq t^* - \tau < t_1(\varphi)$ 及 $n(\varphi) > 1$. 设 $t_{j^*}(\varphi) \leq t^* - \tau < t_{j^*-1}(\varphi)$.
则 $2 \leq j^* \leq n(\varphi)$, 且

$$y(t^*) = e^{-(t^*-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J_{j^*}(\varphi)] - (-1)^{j^*} = \sigma_1.$$

从而

$$e^{t^*-\tau} = \frac{\psi(0)e^{-\tau} - J_{j^*}(\varphi)}{\sigma_1 + (-1)^{j^*}}. \tag{5.3.5}$$

且

$$e^{t_{j^*}(\varphi)} \leq \frac{\psi(0)e^{-\tau} - J_{j^*}(\varphi)}{\sigma_1 + (-1)^{j^*}} < e^{t_{j^*-1}(\varphi)},$$

即有

$$\begin{aligned}
&[\sigma_1 + (-1)^{j^*}] \cdot \frac{1}{2}(-1)^{j^*}[J_{j^*+1}(\varphi) - J_{j^*}(\varphi)] \\
&\leq \psi(0)e^{-\tau} - J_{j^*}(\varphi) < [\sigma_1 + (-1)^{j^*}] \cdot \frac{1}{2}(-1)^{j^*-1}[J_{j^*}(\varphi) - J_{j^*-1}(\varphi)]
\end{aligned}$$

或等价写成

$$F_{j^*}(\varphi) \leq \psi(0)e^{-\tau} < F_{j^*-1}(\varphi). \tag{5.3.6}$$

观察 (5.3.1) 发现对 $j = 1, 2, \cdots, n(\varphi)$, 有

$$\begin{aligned}
F_j(\varphi) - F_{j+1}(\varphi) &= \frac{1-(-1)^j\sigma_1}{2}J_j(\varphi) - \frac{1-(-1)^{j+2}\sigma_1}{2}J_{j+2}(\varphi) \\
&= \frac{1-(-1)^j\sigma_1}{2}\left[-2(-1)^j e^{t_j(\varphi)} - 2(-1)^{j+1}e^{t_{j+1}(\varphi)}\right] \\
&= [\sigma_1 - (-1)^j]\left[e^{t_j(\varphi)} - e^{t_{j+1}(\varphi)}\right] > 0,
\end{aligned}$$

即 $F_j(\varphi)(j = 1, 2, \cdots, n(\varphi))$ 是单调递减的. 由 (5.3.6) 可知 $j^* = j_*$. 又从 (5.2.1),(5.3.3) 及 (5.3.5) 知, 当 $t > t^* + \tau$, 有

$$\begin{cases}
x(t) = e^{-(t-\tau)}\{\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - \frac{2e^\tau}{\sigma_1+(-1)^{j_*}}[\psi(0)e^{-\tau} - J_{j_*}(\varphi)]\} + 1, \\
y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds].
\end{cases}$$

我们来考虑两种情形:

(I)' $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)}{\psi(0)e^{-\tau}-J_{j_*}(\varphi)} \le \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1+(-1)^{j_*}}$;

(II)' $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}-J_{j_*}(\varphi)} > \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1+(-1)^{j_*}}$.

利用与 Case 3 的类似证明, 易知 (I)' 保证了 $(x(t),y(t)) \to (1,-1)$ ($t\to\infty$), 而 (II)' 又保证了 $(x(t),y(t)) \to (1,1)$ ($t\to\infty$).

(II) $j_*=1$, 即

$$F_1(\varphi)=J(\varphi)+(\sigma_1-1)e^{t_1(\varphi)} \le \psi(0)e^{-\tau}.$$

首先我们称 $t^* \ge t_1(\varphi)+\tau$. 若不然, 则有 $-\tau \le t^*-\tau < t_1(\varphi)$. 设对某个正整数 j^* 且 $2\le j^* \le n(\varphi)$, 有 $t_{j^*}(\varphi) \le t^*-\tau < t_{j^*-1}(\varphi)$. 利用类似于情形 (I) 的推导, 有 (5.3.6) 成立. 因而

$$F_1(\varphi) \ge F_{j^*-1}(\varphi) > \psi(0)e^{-\tau},$$

矛盾. 其次, 设

$$T=\tau+ln\frac{\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)}{\sigma_1-1},$$

那么 $\tau+t_1(\varphi) \le T < \infty$. 由 (5.2.1), 有

$$y(t)=e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)]+1, \quad 若\ \tau+t_1(\varphi) \le t < \tau, \tag{5.3.7}$$

从 (5.3.2) 和 (5.3.7) 可看到

$$y(t) < e^{-(T-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)]+1=\sigma_1, \qquad 若\ t<T,$$

由此可推出 $t^* \le T$. 因而

$$\tau+t_1(\varphi) \le t^* \le \tau+ln\frac{\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)}{\sigma_1-1}. \tag{5.3.8}$$

讨论下面两种情形:

(A)' $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)} > \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1-1}$;

(B)' $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}-J(\varphi)} \le \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1-1}$.

首先考虑情形 (A)'. 由 (5.3.3) 及 (5.3.8), 我们发现

$$x(t)>1, \quad 若\ t>t^*+\tau.$$

由 (5.2.1) 与 (5.3.3). 易看出 $(x(t),y(t)) \to (1,1)$ ($t\to\infty$). 其次对情形 (B)', 有

$$x(t) \le 1, \quad 对\ t>T+\tau. \tag{5.3.9}$$

若不然, 则存在某个 $t_0 > T+\tau$, 使得

$$x(t_0) > 1, \tag{5.3.10}$$

对 $0 \le t \le T < t_0$, 易看出

$$x(t) = e^{-t}[x(t_0)e^{t_0} - \int_t^{t_0} e^s f(y(s-\tau))ds] > 1.$$

由 (5.2.1) 有

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1. \quad 若 \tau \le t \le T + \tau,$$

由此并结合 (5.3.7), 得到

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1, \quad 若 \tau + t_1(\varphi) \le t \le T + \tau.$$

再注意到 (5.3.8) 有

$$y(t^*) = e^{-(t^*-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1 = \sigma_1,$$

从而有 $t^* = \tau + ln\frac{\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)}{\sigma_1 - 1} = T$, 于是由 (5.3.3) 有

$$x(t) \le 1, \quad 若 t > T + \tau,$$

此与 (5.3.10) 矛盾．这说明 (5.3.9) 必成立，于是有 $(x(t), y(t)) \to (1, -1)$ ($t \to \infty$). 证毕.

定 理 5.3.2. 设 $\sigma_1 > 1 = \sigma_2$ 且 $\Phi = (\varphi, \psi) \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}$. 则当 $t \to \infty$ 时, 系统 (5.1.2) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的解 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1, -1)$ 或 $(1, 1)$. 进一步有 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t) \to (1, 1))$ 当且仅当下列情形之一成立:

(i) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-;\pm}$;

(ii) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+;-}$ 且 $\varphi(0)e^{-\tau} \le J(\psi)$;

(iii) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+;+}$ 且 $\frac{\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau} + J_{j_*}(\varphi)} \le \frac{2e^\tau}{\sigma_1 - (-1)^{j_*}}$, 这里 j_* 是满足 $F_{j_*}(\varphi) \le \psi(0)e^{-\tau}$ 与 $1 \le j_* \le n(\varphi)$ 的最小正整数, 其中

$$F_j(\varphi) = \frac{-1 + (-1)^{j-1}\sigma_1}{2} J_j(\varphi) + \frac{-1 + (-1)^j \sigma_1}{2} J_{j+1}(\varphi), \quad j = 1, 2, \cdots, n(\varphi). \tag{5.3.11}$$

另一方面 $(x^\Phi(t), y^\Phi(t)) \to (1, -1)$ 当且仅当下列情形之一成立:

(iv) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+;-}$ 且 $\varphi(0)e^{-\tau} > J(\psi)$;

(v) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+;+}$ 且 $\frac{\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau} + J_{j_*}(\varphi)} > \frac{2e^\tau}{\sigma_1 - (-1)^{j_*}}$, 其中 j_* 的含义见 (iii).

证 明 : 分下列几种情形讨论

情 形 1. $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-;-}$, 即 $\varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_2}^-$ 及 $\psi \in \widetilde{C}_{\sigma_1}^-$

由 (5.2.2) 和 (5.2.4), 对 $t \geq \tau$, 有

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} - J(\psi)] + 1, \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1, \end{cases}$$

不难看出 $(x(t), y(t)) \to (1, 1)$ $(t \to \infty)$.

情 形 2. $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-,+}$, 即 $\varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_2}^{-}$ 及 $\psi \in \widetilde{C}_{\sigma_1}^{-}$

若 $t \geq \tau$, 由 (5.2.2) 及 (5.2.3) 得

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(y(s))ds], \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1. \end{cases}$$

易知: 必存在充分大的 $T > 0$, 使得

$$y(t) < \sigma_1, \quad 对\ t > T.$$

则当 $t > T + \tau$ 时,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^T e^t f(y(t))dt + \int_T^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^T e^t f(y(t))dt - e^T\right] + 1. \end{aligned}$$

因此, $(x(t), y(t)) \to (1, 1)$ ($t \to \infty$).

情 形 3. $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+,-}$, 即 $\varphi \in \widetilde{C}_{\sigma_2}^{+}$ 且 $\psi \in \widetilde{C}_{\sigma_1}^{-}$

从 (5.2.1) 与 (5.2.4), 可知 $t \geq \tau$ 时

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} - J(\psi)] + 1, \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds]. \end{cases}$$

再考虑下面两种情形:

(A) $\varphi(0)e^{-\tau} \leq J(\psi)$;

(B) $\varphi(0)e^{-\tau} > J(\psi)$.

对情形 (A), 我们不难看出

$$x(t) \leq 1, \quad 若\ t \geq \tau.$$

对 $t \geq 2\tau$, 有

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - 1 + \int_0^{\tau} e^t f(x(t))dt - e^{\tau}] + 1.$$

从而有 $(x(t), y(t)) \to (1, 1)$ ($t \to \infty$).

对情形 (B), 类似易证得 $(x(t), y(t)) \to (1, -1)$ ($t \to \infty$).

情 形 4. $\Phi \in \tilde{X}^{+,+}_{\sigma_{21}}$, 即 $\varphi \in \tilde{C}^{+}_{\sigma_2}$ 与 $\psi \in \tilde{C}^{+}_{\sigma_1}$

显见 $y(0) = \psi(0) \geq \sigma_1$. 另一方面, 由 (5.1.2) 及 (5.2.1), 可知对所有充分大的 $t > 0$ 有

$$y(t) \leq e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - 2] + 1 < \sigma_1. \qquad 若\ t \geq \tau. \tag{5.3.12}$$

设 t^* 为 $y(t) - \sigma_1$ 在 $[0, \infty)$ 上的第一个零点, 则 $0 \leq t^* < \infty, y(t^*) = \sigma_1$, 从而

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\left[y(t^*)e^{t^*} + \int_{t^*}^{t} e^s f(x(s-\tau))ds\right] \\ &\leq e^{-t}\left(\sigma_1 e^{t^*} - e^{t^*}\right) + 1 \\ &< \sigma_1, \qquad 对\ t > t^*. \end{aligned}$$

由 (5.2.3) 可导出

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t^*} e^t f(y(t))dt + \int_{t^*}^{t-\tau} e^s f(y(s))ds\right] \\ &= e^{-(t-\tau)}\left[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 2e^{t^*}\right] + 1, \qquad 对\ t > t^* + \tau. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

观察 (5.3.11). 得到

$$\begin{aligned} F_{n(\varphi)}(\varphi) &= \frac{(-1)^{n(\varphi)-1}\sigma_1 - 1}{2}[-(-1)^{n(\varphi)}e^{-\tau}] + \frac{(-1)^{n(\varphi)}\sigma_1 - 1}{2}[-(-1)^{n(\varphi)+1}e^{-\tau}] \\ &= \sigma_1 e^{-\tau} \\ &\leq \psi(0)e^{-\tau}, \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

$$F_1(\varphi) = \frac{\sigma_1 - 1}{2}J(\varphi) + \frac{-\sigma_1 - 1}{2}J_2(\varphi) = -J(\varphi) + (\sigma_1 + 1)e^{t_1(\varphi)},$$

且对 $j = 1, 2, \cdots, n(\varphi) - 1$, 有

$$\begin{aligned} F_j(\varphi) - F_{j+1}(\varphi) &= \frac{(-1)^{j-1}\sigma_1 - 1}{2}J_j(\varphi) - \frac{(-1)^{j+1}\sigma_1 - 1}{2}J_{j+2}(\varphi) \\ &= \frac{(-1)^{j-1}\sigma_1 - 1}{2}[-2(-1)^j e^{t_j(\varphi)} - 2(-1)^{j+1}e^{t_{j+1}(\varphi)}] \\ &= [\sigma_1 - (-1)^j][e^{t_j(\varphi)} - e^{t_{j+1}(\varphi)}] \\ &> 0. \end{aligned}$$

亦即 $J_j(\varphi)$ $(j = 1, 2, \cdots, n(\varphi))$ 是单调减少的. 取 j_* 如 (iii) 所述. 由 (5.3.14) 我们看出 j_* 存在且 $1 \leq j_* \leq n(\varphi)$.

接下来我们考虑下面两种情形:

(I) $j_* \neq 1$, 即

$$F_{j_*}(\varphi) \leq \psi(0)e^{-\tau} < F_{j_*-1}(\varphi), \tag{5.3.15}$$

显然,

$$\psi(0)e^{-\tau} < F_1(\varphi) = \frac{\sigma_1 - 1}{2} J_1(\varphi) + \frac{-\sigma_1 - 1}{2} J_2(\varphi) = -J(\varphi) + (\sigma_1 + 1)e^{t_1(\varphi)}.$$

由 (5.2.1), 可得

$$y(\tau + t_1(\varphi)) = e^{-t_1(\varphi)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1 < \sigma_1.$$

于是 $n(\varphi) > 1$, $t^* < t_1(\varphi) + \tau$; 所以 $-\tau \leq t^* - \tau < t_1(\varphi)$. 设 $t_{j^*}(\varphi) \leq t^* - \tau < t_{j^*-1}(\varphi)$, 那么 $2 \leq j^* \leq n(\varphi)$, 且

$$y(t^*) = e^{-(t^* - \tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J_{j^*}(\varphi)] + (-1)^{j^*} = \sigma_1.$$

从而

$$e^{t^* - \tau} = \frac{\psi(0)e^{-\tau} + J_{j^*}(\varphi)}{\sigma_1 - (-1)^{j^*}}, \tag{5.3.16}$$

且

$$e^{j^*(\varphi)} \leq \frac{\psi(0)e^{-\tau} + J_{j^*(\varphi)}}{\sigma_1 - (-1)^{j^*}} < e^{t_{j^*-1}(\varphi)},$$

即有

$$\frac{\sigma_1 - (-1)^{j^*}}{2(-1)^{j^*}}[J_{j^*+1}(\varphi) - J_{j^*}(\varphi)] \leq \psi(0)e^{-\tau} + J_{j^*}(\varphi) < \frac{\sigma_1 - (-1)^{j^*}}{2(-1)^{j^*-1}}[J_{j^*}(\varphi) - J_{j^*-1}(\varphi)],$$

或等价写成

$$F_{j^*}(\varphi) \leq \psi(0)e^{-\tau} < F_{j^*-1}(\varphi). \tag{5.3.17}$$

注意到序列 $\{F_j(\varphi)\}_{j=1}^{n(\varphi)}$ 的递减性. 由 (5.3.15) 与 (5.3.17) 即知 $j^* = j_*$. 当 $t \geq t^* + \tau$, 从 (5.2.1),(5.3.13) 及 (5.3.16) 得到

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}\{\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - \frac{2e^\tau}{\sigma_1 - (-1)^{j_*}}[\psi(0)e^{-\tau} + J_{j_*}(\varphi)]\} + 1, \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds]. \end{cases}$$

我们来考虑两种情形:

(A)' $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}+J_{j_*}(\varphi)} \leq \frac{2e^\tau}{\sigma_1-(-1)^{j_*}}$;

(B)' $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}+J_{j_*}(\varphi)} > \frac{2e^\tau}{\sigma_1-(-1)^{j_*}}$.

利用与情 形 **3** 的类似证明, 易知情形 (A)' 保证了 $(x(t), y(t)) \to (1,1)$ ($t \to \infty$). 而情形 (B)' 又保证了 $(x(t), y(t)) \to (1,-1)$ ($t \to \infty$).

(II) $j_* = 1$, 即

$$F_1(\varphi) = -J(\varphi) + (\sigma_1 + 1)e^{t_1(\varphi)} \le \psi(0)e^{-\tau}. \tag{5.3.18}$$

首先我们有 $t^* \ge t_1(\varphi) + \tau$. 若不然，则有 $-\tau \le t^* - \tau < t_1(\varphi)$. 设对某个正整数 j^* 且 $2 \le j^* \le n(\varphi)$, 有 $t_{j^*}(\varphi) \le t^* - \tau < t_{j^*-1}(\varphi)$. 利用类似于情形 (I) 的推导，有 (5.3.17) 成立. 因而， $F_1(\varphi) \ge F_{j^*-1}(\varphi) > \psi(0)e^{-\tau}$, 此与 (5.3.18) 矛盾. 下面讨论两种情形:

(a) $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)} > \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1+1}$. 设

$$T_1 = \tau + ln\frac{\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi)}{2}, \quad T_2 = \tau + ln\frac{\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)}{\sigma_1 + 1}. \tag{5.3.19}$$

那么 $\tau + t_1(\varphi) \le T_2 < T_1 - \tau < \infty$. 当 $\tau \le t < T_1$, 由 (5.2.3) 我们看到

$$x(t) > e^{-(T_1-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi)] - 1 = 1,$$

特别有 $x(\tau) > 1$, 于是对 $0 \le t \le \tau$ 有

$$x(t) = e^{-t}[x(\tau)e^{\tau} - \int_t^{\tau} e^s f(y(s-\tau))ds] > 1.$$

因而

$$x(t) > 1, \quad \text{若 } 0 \le t < T_1.$$

由 (5.2.1) 可导出

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1, \quad \text{对 } \tau + t_1(\varphi) \le t \le T_1 + \tau.$$

注意到 $\tau + t_1(\varphi) \le T_2 < T_1 + \tau$, 可得

$$y(T_2) = e^{-(T_2-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1 = \sigma_1,$$

与

$$y(t) \ne \sigma_1, \qquad \text{若 } t \ne T_2, \ \ \tau + t_1(\varphi) \le t \le T_1 + \tau.$$

由于 $t^* \ge \tau + t_1(\varphi)$, 于是有 $t^* = T_2$. 再由 (5.3.13) 不难发现

$$x(t) > 1, \qquad \text{若 } \ t \ge t_2 + \tau.$$

由上式及 (5.3.12) , 得到 $(x(t), y(t)) \to (1, -1)(\ t \to \infty)$.

(b) $\frac{\varphi(0)e^{-\tau}+J(\psi)}{\psi(0)e^{-\tau}+J(\varphi)} \le \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1+1}$.

可以证明

$$x(t) \le 1, \quad \text{若 } t \ge T_2 + \tau. \tag{5.3.20}$$

否则有

$$x(t_0) > 1, \quad 对某个\ t_0 \geq T_2 + \tau. \tag{5.3.21}$$

利用类似情形 (a) 的论证，易知

$$y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} + J(\varphi)] - 1, \quad 若\ \tau + t_1(\varphi) \leq t < t_0 + \tau.$$

从而必有 $t^* = T_2$. 于是由 (5.3.13)

$$x(t) \leq 1, \qquad 当 \quad t \geq T_2 + \tau,$$

此与 (5.3.21) 矛盾. 于是 (5.3.20) 成立，因此 $(x(t), y(t)) \to (1, 1)$ ($t \to \infty$).

综上所述，定理得证.

推 论 5.3.1. 设 $\sigma_1 > 1 = \sigma_2$, $\Phi = (\varphi, \psi) \in X_{\sigma_{21}}$, $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t))$ 为系统 (5.1.1) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的解. 则当 $t \to \infty$ 时, $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t)) \to (1, -1)$ 当且仅当 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{-,\pm}$ 与 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,-}$, $\varphi(0) = 1$ 与 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,+}$, $\frac{\varphi(0)+1}{\psi(0)-1} \leq \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1 - 1}$ 三者之一成立; $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t)) \to (1, 1)$ 当且仅当 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,-}$, $\varphi(0) \neq 1$ 与 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,+}$, $\frac{\varphi(0)+1}{\psi(0)-1} > \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1 - 1}$ 两者之一成立.

推 论 5.3.2. 设 $\sigma_1 > 1 = \sigma_2$, $\Phi = (\varphi, \psi) \in X_{\sigma_{21}}$, $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t))$ 为系统 (5.1.2) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的解. 则当 $t \to \infty$ 时, $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t)) \to (1, 1)$ 当且仅当 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{-,\pm}$ 与 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,-}$, $\varphi(0) = 1$ 与 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,+}$, $\frac{\varphi(0)+1}{\psi(0)+1} \leq \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1 + 1}$ 三者之一成立; $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t)) \to (1, -1)$ 当且仅当 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,-}$, $\varphi(0) \neq 1$ 与 $\Phi \in X_{\sigma_{21}}^{+,+}$, $\frac{\varphi(0)+1}{\psi(0)+1} > \frac{2e^{\tau}}{\sigma_1 - 1}$ 两者之一成立.

下面的定理阐明了当 $\sigma_1 > \sigma_2 > 1$ 且 $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}$ 时，模型 (5.1.1) 的渐近行为.

定 理 5.3.3. 若 $\sigma_1 > \sigma_2 > 1$ 且 $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}$, 则系统 (5.1.1) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的解 $(x^{\Phi}(t), y^{\Phi}(t)) \to (1, -1)(t \to \infty)$.

证 明 : 讨论四种情形:

(i) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+,+}$;

(ii) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{+,-}$;

(iii) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-,+}$;

(iv) $\Phi \in \widetilde{X}_{\sigma_{21}}^{-,-}$.

只须考虑情形 (i). 其他情形同理可证. 由 (5.2.1) 和 (5.2.3), 有

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 1 + \int_0^{t-\tau} e^s f(y(s))ds], \\ y(t) = e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi) + 1 - \int_0^{t-\tau} e^s f(x(s))ds], \end{cases} \qquad 若 \quad t \geq \tau$$

于是有

$$\begin{cases} x(t) \leq e^{-(t-\tau)}[\varphi(0)e^{-\tau} + J(\psi) - 2] + 1, \\ y(t) \leq e^{-(t-\tau)}[\psi(0)e^{-\tau} - J(\varphi)] + 1. \end{cases}$$

因此，必存在 $T>0$ 使得

$$x(t)<\sigma_2, \qquad y(t)<\sigma_1, \quad 若\ t\geq T.$$

从而，容易证得 $(x(t),y(t))\to(1,-1)\ (t\to\infty)$. 证毕.

定 理 5.3.3'. 若 $\sigma_1>\sigma_2>1$ 且 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma_{21}}$. 则系统 (5.1.2) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的解 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))\to(1,1)(t\to\infty)$.

证 明： 略.

定 理 5.3.4. 若 $\sigma_1>\sigma_2>1$ 且 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma_{21}}$. 则当 $t\to\infty$ 时，系统 (5.1.1) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的唯一平衡解 $(1,-1)$ 是全局指数渐近稳定的.

证 明：与第二章定理 2.3.1 的证明完全类似，省略.

定 理 5.3.4'. 若 $\sigma_1>\sigma_2>1$ 且 $\Phi\in\widetilde{X}_{\sigma_{21}}$. 则当 $t\to\infty$ 时，系统 (5.1.2) 和 (5.1.3) 及 (5.1.4) 的唯一平衡解 $(1,1)$ 是全局指数渐近稳定的.

证 明： 略.

结 论

近年来，关于神经网络模型动力学性质分析研究，引起了不少学者的极大关注，出现了非常多的研究成果．由于神经网络的高度非线性性及信号传输过程的高度复杂性，因此，还需要广大致力于该领域的研究人员作进一步深入和细致的工作．本学位论文主要探讨了两类二元神经网络模型的动力学性质．我们所考虑的问题与以往参考文献研究的 (讨论非振动型初值) 不同：着重考虑具振动型初值的解的渐近行为、稳定性、及周期解存在性．

在本论文第二章，我们利用分析方法研究两类非线性二元神经网络微分方程模型．对 $\varphi-\sigma$ 与 $\psi-\sigma$ 在 $[-\tau,0]$ 上出现有限次变号情形，完整地讨论了解的渐近行为与稳定性．结果表明：在大阈值 $|\sigma|>1$ 情形，两类模型都有唯一平衡点，而且是全局指数渐近稳定的；对临界阈值 $|\sigma|=1$ 情形，当 $\varphi-\sigma$ 与 $\psi-\sigma$ 出现有限次变号时，我们比较完整细致地研究了两类模型的渐近行为，所得结果表明：系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 存在两个平衡点，系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 存在三个平衡点，进一步我们对 τ 及 (φ,ψ) 分别给出了保证系统 (2.1.1) 和 (2.1.3) 与系统 (2.1.2) 和 (2.1.3) 趋于不同平衡点之一的充要条件．通过具体例子看出我们的结果推广并改进了文 [49] 与文 [50] 的相应结果．

本文的第三章，我们研究模型 (3.1.1) 在小阈值 (即 $|\sigma|<1$) 情形下周期解的存在性．当 $\varphi(t)-\sigma$ 与 $\psi(t)-\sigma$ 出现有限次符号改变时，借助代数工具及分析方法得到回复映射，从而获得系统存在孤立周期解 (其周期 $T\in(\tau,2\tau)$) 的充分条件，对这种情形的周期行为是已有文献中不曾研究的，这一结果是全新的．并且进一步举例说明了对某些阈值 ($\sigma=0$) 的周期解的不稳定性．

本文第四章中我们考虑两类离散二元神经网络模型，当初值振动时解的渐近行为与全局指数稳定．我们得到了较好的结果：当 $|\sigma|>\frac{\rho}{1-\beta}$ 时，系统 (4.1.1) 和 (4.1.2) 分别有唯一的平衡点，且是全局指数渐近稳定的；而对临界情形 (即 $|\sigma|=\frac{\rho}{1-\beta}$) 及振动型初值，我们证明了系统 (4.1.1) 和 (4.1.2) 各有 2 个和 3 个平衡点，且获得了两系统分别趋于不同平衡点的充要条件．可以看出，本章结果是我们在第二章所得结果的离散化．

就现有文献来看，双阈值情形的结果则见得更少，其工作也还是将系统初值限定在非振动型函数空间进行解的动力学分析．在第五章，我们将前面的研究工作进一步扩展，着重研究 $\varphi-\sigma_2$ 与 $\psi-\sigma_1$ 若出现有限次符号改变时解的渐近行为．我们证明了若 $\sigma_1>\sigma_2>1$，且 $\Phi\in\tilde{X}_{\sigma_{21}}$ 则模型 (5.1.1) 与 (5.1.2) 的每一个解 $(x^{\Phi}(t),y^{\Phi}(t))$ 都分别收敛于唯一平衡点．特别对 τ,σ 及 Φ 获得了在临界情形 $\sigma_1>\sigma_2=1$ 下，保证解分别趋于两平衡点之一的充要条件．这一章的结果是在双

阈值情形下，进一步地推广了第二章所得结果.

从上述研究工作可看出：具振动型初值的二元神经网络微分方程模型及离散模型较之非振动型初值的二元神经网络模型而言，其动力学行为更为复杂，要想进一步了解神经网络的动力学性态还需要作更深入细致的工作. 如：怎样将这些处理问题的方法运用到更一般的神经网络系统或者是大规模的系统？如何利用更为有效的数学工具来解决这类问题？对这些问题的研究将是我们今后需做的工作. 而且对神经网络理论的发展也是十分必要的.

参考文献

[1] W. S. McCulloch and W. Pitts, A logical calculus of the ideas imminet in nervous activity, Bulletin of Mathematical biophysics, 1943, 5: 115-133.

[2] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proc. Natl. Acad. Sci. 1982.79: 2554-2558.

[3] J. J. Hopfield. Neurons with graded response have collective computational properties like two-stage neurons.Proc. Natl. Acad. Sci. 1984.81: 3088-3092.

[4] K. L. Babcock and R. M. Westervelt, Dynamics of simple electronic neural networks with added inertia. Phys. D,1986, 23: 464-469.

[5] K. L. Babcock and R. M. Westervelt, Complex dynamics in simple neural circuits,in Neural networks for computing, Edited by J. S. Denker, Amer. Inst. Phys., New york, 1986. pp.23-28.

[6] K. L. Babcock and R. M. Westervelt, Dynamics of simple electronic neural networks . Phys. D, 1987. 28: 305-316.

[7] P.Baldi. Symmetries and learning in a neural network models, Phys. Rev. Lett. 1987.59: 1976-1978.

[8] J. Balicki, A. Sateczny and B. Zak, Genetic algorithms and Hopfield neural networks for solving combinatorial problems, Appl. Math. Comput. Sci. 1997, 7: 567-592.

[9] J. Bélair, Stability in a model of a delayed neural network. J.Dynam. Diff. Eq., 1993, 5: 603-623.

[10] J. Bélair. S. A. Campbell and P. van den Driessche. Frustration. stability, and delay-induced oscillations in a neural network model, SIAM J. Appl. Math., 1996, 56: 245-255.

[11] C. Bishop, Neural Networks for Pattern Recognition, The Clavendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[12] Neural Networks for Vision and Image Processing, Edited by G. A. Carpenter and S. Grossberg. The MIT Press, 1992.

[13] M. A. Cohen and S. Grossberg, Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 1983, 13: 815-826.

[14] Z. Feng and A. N. Michel, Global asymptotic stability of a class of feedback neural networks with an application to optimization problems, Circuits Systems Signal Process.1998, 17: 219-241.

[15] B. M. Forrest. Content-addressability and learning in neural networks.J. Phys. 1988.21:(A) 245-255.

[16] M. Forti, S. manetti and M. Marini, Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. 1994, 41: 491-494.

[17] S. Grossberg. On learning and energy-entropy in recurrent and nonrecurrent *signed networks*, J. Stati. Phys. 1969, 1: 319-350.

[18] S. Grossberg. Pavlovian pattern learning by nonlinear networks. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1971, 68: 828-831.

[19] S. Grossberg. Pattern learning by functional-differential neural networks with arbitrary path weights, pp.121-160 in Delay and Functional Differential Equations and Their Applications. Edited by K. Schmitt, Academic Press. New York. 1972.

[20] S. Grossberg, Studies of Mind and Brain. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland, 1982.

[21] S. Grossberg, Nonlinear neural networks: Principles, mechanisms, and architectures. Neural Networks. 1988, 1: 17-61.

[22] J. Haykin, Neural Networks: A Comprehensive Foundation, Macmillan College Publishing Co.,New York, 1994.

[23] Q. M. He and L. S. Kang. Existence and stability of global solution for generalized Hopfield neural network system, Neural Parallel Sci. Comput. 1994, 2: 165-175.

[24] B. Kamgar-Parsi. On problem solving with Hopfield neural networks, Biol. Cybernet. 1990, 62: 415-423.

[25] T. Khanna, Foundations of Neural Networks, Addison-Wesley Publishing Co., 1990.

[26] D. Kleinfield and H. Sompolinsky. Associative neural network model for the generation of temporal patterns, Biophys. J. 1988, 54: 1039-1051.

[27] S. Köksal and S. Sivasundarm. Stability properties of the Hopf-type neural networks. Dynam. Stability Systems 1993, 8: 181-187.

[28] Neural Networks : Theoretical Foundations and analysis, Edited by C. Lau, IEEE Press, New York, 1992.

[29] Neural Networks for Knowledge Representation and Inference, Edited by D. S. Levine and M. Aparicio IV, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ, 1994.

[30] Neural Networks for Vision. Speech and natural Language. Edited by R. Linggard, D. J. Myers and C. Nightingale, Chapman & Hall, London, 1992.

[31] X. Liang and L. Wu, Global exponential stability of Hopfield-type neural network and its applications, Sci. China Ser. 1995, 38(A): 757-768.

[32] X. Liang and L. Wu, Global exponential stability of Hopfield-type neural networks, China Sci. Bull. 1996, 41: 1046-1051.

[33] N.López Reyes and L. Lemus del Cueto. Using a neural network of Hopfield Type to find an optimal voting algorithm. Investigación Oper. 1995, 16: 11-35.

[34] C. M. Marcus and R.M Westervelt. Stability of analog neural networks with time delay, Phys. Rev. 1989, 39(A): 347-359.

[35] G. W. Ng. Applications of Neural networks to Adaptive Control of Nonlinear Systems, Research Studies Press LTD. England, 1997.

[36] L.Oline and J. Bélair, Bifurcations. Stability, and monotonicity Proterties of a delayed neural network model, Phys. D 1997, 102: 349-363.

[37] P. Peretto, An Introduction to the Modeling of Neural Networks, *Collection Alea-saclay*

Monographs and Texts in Statistical Physics 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[38] M. Qi, Financial application of artificial neural networks, Statistical methods in finance, Handbook of Statist.North-Holland, Amsterdam, 1996, 14: 529-552.

[39] B. D. Ripley, Pattern Recognition and Neural Networks, Cambridge University Press, 1996.

[40] S.Ruan and J.Wei, Periodic solutions of planar systems with two delays, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1999, 129:(A) 1017-1032.

[41] A. C. Scott, Neurophysics, Wiley-Interscience, New York, 1977.

[42] L. Shayer and S. A. Campbell, Stability, bifurcation and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays, SIAM J. Appl. Math., 2000, 61: 673-700.

[43] P. van den Driessche and X. Zou. Global attractivity in delayed Hopfield neural network models, SIAM J. Appl. Math., 1998, 58: 1878-1890.

[44] J. Wei and S. Ruan, Stability and bifurcation in a neural network model with two delay. Phys.D 1999, 130(D): 255-272.

[45] A. Jun-Wei Wong, Recognition of general Patterns using neural networks, Biol. Cybernet. 1988. 58: 361-372.

[46] J. Wu, Symmetric functional differential equations and neural networks with memory, Trans. Amer. Math. Soc. 1998, 350: 4799-4838.

[47] Y. Xia, J. Wang and D. L. Hung, Recurrent neural networks for solving linear inequalities and equations, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. 1999,46: 452-462.

[48] J. Wu, Introduction to neural dynamics and signal transmission delay, New York: Walter de Gruyter, 2002.

[49] L. Huang and J. Wu, Dynamics of inhibitory artificial neural networks with threshold nonlinearity, fields Inst. Commun., 2001, 29: 235-243.

[50] L. Huang and J. Wu, The role of threshold in preventing delay-induced oscillations of frustrated neural networks with McCulloch-Pitts nonlinearity, Int. J. Math. Game Theory and Algebra, 2001,11(6):71-100.

[51] Z. Zhou, J. S. Yu and L.H. Huang. Asymptotic behavior of delay difference systems, Comput. Math.Appl., 2001, 42: 283-290.

[52] Z. Zhou and J. Wu, Attractive periodic orbits in nonlinear discrete-time neural networks with delayed feedback, J. D. Eq. Appl., 2001, 8: 467-483.

[53] Z. Zhou, Period solutions of a class of difference systems, Fields Inst. Commun.,to appear.

[54] Z. -B. Xu and C. P. Kwong, Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays, Phys. Rev. 1994, 50(E): 4206-4213.

[55] H.Ye, A. N. Michel and K. Wang, Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays, Phys. Rev. 1994,50(E): 4206-4213.

[56] D. -J. Yu,Z. -Y. Mao, Q. -J. Zhou and T,-P. Leung, Qualitative analysis of Hopfield neural networks, Control Theory Appl. 1995, 12: 382-388.

[57] X. Zhang, Mathematical analysis of some neural networks for solving linear and quadratic

programming, Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.) 1996, 12: 1-10.

[58] R. D. Degroat and L.R. Hunt, Discrete-time nonlinear system stability, IEEE Trans. Circuits Syst. 1992,39: 834-840.

[59] D. Zhou, J. Cao and J. Li, Stability analysis of Hopfield neural networks with delays, Ann. Differential Equations 1998, 14: 460-467.

[60] A. Bhaya , E. Kaszkurewicz and V. Kozyakin , Existence and stability of a unique equilibrium in continous-valued discrete-time asynchronous hopfield neural networks, IEEE Trans. Neural.Networks, 1996, 7(3): 620-627.

[61] W. E. Brumley, On the asymptotic behavior of differential-difference equations of neutral type,J. Diff. Equs.,1970, 7: 175-188.

[62] P. Baldi and A. F. Atiya, How delays affect neural dynamics and learning, IEEE Trans. Neural Networks,1994, 5: 612-621.

[63] F. Chapeau and G. Chauvet, Stability, oscillatory and chaotic region in the dynamics of small neural networks with delay, Neural Network, 1992, 5: 735-743.

[64] J.Wu, Introduction to neural dunamics and signal transmission delay. New York: Walter de Gruyter,2001.

[65] 焦李成，神经网络系统理论，西安电子科技出版社， 1991.

[66] 王旭，王宏，王文辉，人工神经元网络原理与应用，东北大学出版社， 2000.

[67] 徐秉铮，张百灵，韦岗．神经网络理论与应用，华南理工大学出版社， 1994.

[68] T. Ushio ,Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete time systems, IEEE Trans. Circuits Syst., 1996,43(9): 815-816.

[69] S. N. Zhang, Stability of infinite delay difference system, Nonl.Anal. TMA,1994,22: 1209-1219.

[70] K. Gopalsamy and I. Leung, Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition,Phys. D. 1995, 89: 395-426.

[71] K. Gopalsamy and X. Z. He, Delay-independent stability in bidiretional associative memory networks,IEEE Trans. Neural Networks, 1994, 5(6): 998-1002.

[72] K. Gopalsamy and X. Z. He, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, Phys.D, 1994, 76: 344-358.

[73] K. Gopalsamy and I. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays, IEEE Trans. Neural Networks, 1997, 8(2): 341-348.

[74] Y. Chen and J. Wu, The asymptotic shapes of periodic solutions of a singular delay differential system, J. Diff. Eq., 2001,169: 614-632.

[75] Y. Chen and J. Wu, Slowly oscillating periodic solutions for a delayed frustrated network of two neurons, J. Math. Anal. Appl.,2001, 259: 188-208.

[76] Y. Chen and J. Wu, Special symmetric periodic solutions of delayed monotone feedback systems. Canadian Appl. Math. Quarterly, to appear.

[77] Y. Chen and J. Wu, Minimal instability and unstable set of a phase-locked orbit in a delayed neural network, Phys. D, 1999, 134: 185-199.

[78] M. Z. Baptistini and P.Z. Yaboas, On the existence and global bifurcation of periodic solutions to planar differential delay equations, J. Diff. Equs., 1996, 127: 391-425.

[79] Y. Chen, J. Wu and T. Krisztin, Connecting orbits from synchronous periodic solutions to phase-locked periodic solutions in a delay differential system, J. Diff. Eq., 2000, 163: 130-173.

[80] M. Gilli, Strange attractors in delayed cellular neural networks, IEEE Trans. Circuits Syst. 1993, 40: 849-853.

[81] K. Pakdaman, C. Grotta-Ragazzo and C.P.Multa, Effect of delay on the boundary of the basin of attraction in a system of two neurons. Neural Networks,1998,11: 509-519 .

[82] P. van den Driessche, J. Wu and X. Zou, Stabilization role of inhibitory self-connections in a delayed neural network, Phys. D, 2001, 150: 84-90.

[83] 孟益民，黄立宏，刘开宇，双阈值二元神经网络极限环的存在唯一性. 高校应用数学学报， 2002, 17A(2): 133-139.

[84] 孟益民，黄立宏，刘开宇，二元双阈值时滞神经网络模型解的渐近性. 应用数学学报, 2003, 26(1): 158-175.

[85] 孟益民，黄立宏，双阈值二元神经网络模型解的收敛性. 模糊系统与数学， 2001, 15(4): 100-104.

[86] Z. B. Xu and C. P. Kwong, Global convergence and asymptotic stability of asymmetric Holpfield networks, J. Math. Anal.Appl.,1995,191: 405-425.

[87] D. zhou, J. Cao and J. Li, Stability analysis of Hopfield neural networks with delays, Ann. Diff. Eq., 1998, 14: 460-467.

[88] L. Lin and M. M. Gupta, Globally asymptotical stability of discrete time analog neural networks, IEEE Trans. Neural Networks, 1996,7: 1024-1031.

致　谢

在本篇博士学位论文完稿之际．此时的我，固然不乏完成任务之后的轻松和喜悦，但萦绕在心头的，更有那难以忘怀的感激．

我要衷心地感谢我的导师钱祥征教授，该文从选题、资料收集、到最终完稿钱老师自始自终都给予了无微不至的关怀和精心指导．我的学业得以顺利完成是与他悉心指导和热情鼓励分不开的．钱老师严谨的治学态度和兢兢业业的工作作风以及坚韧不拔的科学精神给我留下了深刻的印象，使学生受益匪浅．

我要真诚地感谢曾经支持和帮助过我的硕士导师、广州大学校长庾建设教授，王志成教授，是他们引领我步入科学研究的神圣殿堂，一直关心与支持我的博士学习与研究，如果说我能够在研究工作中取得一点点成绩，那是与他们的热情支持分不开的．

在此我还要特别感谢湖南大学数学与计量经济学院院长黄立宏教授，副院长戴斌祥教授，以及学院其他领导与同事，没有他们给予的工作关心与学习支持，要在职完成博士学习简直难以想象．

我还要感谢我的同事与朋友周展教授、张弘强副教授、袁朝晖博士．他们的支持和无私帮助使我的各项研究工作得以顺利进行．

最后我要感谢我的家人对我学业的关心与支持．

附录 A 攻读学位期间所发表的学术论文目录

[1] K.Y.Liu and X.Z.Qian, Limiting Behaviors of Delay Discrete-Time Neural Networks, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems.(SCI 源刊) 已录用.

[2] K.Y.Liu and H.Q.Zhang, Asymptotic Behavior in Nonlinear Discrete-Time Neural Networks with Delayed Feedback, Fields Institute Communications, 2004, 43: 231-240.

[3] K.Y.Liu and X.Z.Qian, Asymptotic Behaviors of Solutions of Frustrated Neural Networks with McCulloch-Pitts Nonlinearity, Ann.of Diff. Eqs. 2003, 19(3): 352-361.

[4] K.Y.Liu, Oscillation of a First Order Neutral Equation and a Second Order Non-neutral Equation , Differential Equations and Dynamical Systems, 2001, 9: 37-48.

[5] K.Y.Liu and X.Z.Qian, 具时滞的三种群捕食系统的周期解，湖南师大学报，2002, 25(2): 8-12.