高中数学竞赛专题讲座

数列与归纳法

本书主编　韦吉珠

浙江大學出版社

目 录

第一讲 等差与等比数列 …… (1)
知识扫描 …… (1)
例题分析 …… (2)
思考交流 …… (9)
能力训练 …… (10)

第二讲 递归数列(一) …… (12)
知识扫描 …… (12)
例题分析 …… (13)
思考交流 …… (20)
能力训练 …… (22)

第三讲 递归数列(二) …… (24)
知识扫描 …… (24)
例题分析 …… (25)
思考交流 …… (31)
能力训练 …… (32)

第四讲 递推数列的应用 …… (34)
知识扫描 …… (34)
例题分析 …… (34)
思考交流 …… (52)

能力训练 …………………………………………………………………… (55)

第五讲　数学归纳法 …………………………………………………… (57)

知识扫描 …………………………………………………………………… (57)

例题分析 …………………………………………………………………… (57)

思考交流 …………………………………………………………………… (66)

能力训练 …………………………………………………………………… (68)

参考答案 …………………………………………………………………… (69)

第一讲　等差与等比数列

知识扫描

等差数列

1. 定义

数列$\{a_n\}$若满足 $a_{n+1}-a_n=d$(常数),则这个数列叫做等差数列,d 叫做公差.

若 a, A, b 成等差数列,则 A 叫做 a 与 b 的等差中项,由定义知 $A=\frac{a+b}{2}$.

2. 通项公式

若等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1,公差为 d,则通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 对于任意 m, $n\in\mathbf{N}^*$,有 $a_n=a_m+(n-m)d$.

3. 前 n 项和

设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n,则 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$或 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

4. 一些重要性质

(1)若 m, n, p, $q\in\mathbf{N}^*$,且 $m+n=p+q$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.

(2)若$\{a_n\}$是等差数列,正整数 l, m, p 也成等差数列,则 a_l, a_m, a_p 必成等差数列.

(3)若 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项之和,则 S_k, $(S_{2k}-S_k)$, $(S_{3k}-S_{2k})$,…也成等差数列.

(4)当 $d>0$ 时,$\{a_n\}$是递增数列;当 $d=0$ 时,$\{a_n\}$是常数数列;当 $d<0$ 时,$\{a_n\}$是递减数列.

(5)对项数 n 来说,a_n是一次函数,S_n是二次函数,这是因为 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$;$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

等比数列

1. 公比 $q=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=\frac{a_2}{a_1}(q\neq 0)$.

2. 通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$,还可以写作 $a_n=a_1(\frac{a_2}{a_1})^{n-1}$ 或 $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}(n>1)$.

3. 前 n 项和公式 $S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$,当 $|q|<1$ 时,所有项之和 $S=\frac{a_1}{1-q}$.

4. 对于任意正整数 p, q, s, t,如果 $p+t=q+s$,则 $a_pa_t=a_qa_s$ 成立;特别地,若 $p+s=2q$,则 $a_pa_s=a_q^2$ 成立.

例题分析

例 1 (2000 年全国高中数学联赛)等比数列 $a+\log_2 3$, $a+\log_4 3$, $a+\log_8 3$ 的公比是________.

解:设公比为 q,由已知条件可知 $q=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{a+\log_8 3}{a+\log_4 3}$.

进而由比例的性质知

$$q=\frac{a+\log_4 3-(a+\log_8 3)}{a+\log_2 3-(a+\log_4 3)}=\frac{\log_4 3-\log_8 3}{\log_2 3-\log_4 3}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 3}{\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 3}=\frac{1}{3}.$$

所以应填上 $\frac{1}{3}$.

评析 作为数列中较为基础的等差、等比数列的知识,常以填空题或选择题的形式在高中数学联赛中出现,而且等差数列与等比数列常在同一道题中出现.

例 2 (2002 年上海市数学竞赛题)已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,且对一切正整数 n,$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+31}{31n+3}$.

(1)求 $\frac{b_{28}}{a_{28}}$ 的值;

(2)求使 $\frac{b_n}{a_n}$ 为整数的所有正整数 n.

解：

(1)因为$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{a_1+a_{2n-1}}{2}}{\frac{b_1+b_{2n-1}}{2}}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{3(2n-1)+31}{31(2n-1)+3}=\frac{3n+14}{31n-14}$.

所以$\frac{b_{28}}{a_{28}}=\frac{31\times 28-14}{3\times 28+14}=\frac{61}{7}$.

(2)因为$(3n+14,\ 3)=1$，要使$\frac{b_n}{a_n}=\frac{31n-14}{3n+14}$为整数，即要使$\frac{3(31n-14)}{3n+14}=31-\frac{476}{3n+14}$为整数.从而$(3n+14)\mid 476$.

因为$476=2^2\times 7\times 17$，$3n+14\geqslant 17$.

所以$3n+14=17,\ 28,\ 34,\ 68,\ 119,\ 238,\ 476$.

因为n为整数，所以$n=1,\ 18,\ 35,\ 154$.

评析 这是道适用于高考的题型，一般同学用“笨”方法或许也做得出来，但作为有一定数学基础的同学，应该能用数列的性质给出巧妙的解答.

例3 已知$\{a_n\}$是等差数列且公差$d\neq 0$，其中$a_n\neq 0(n\in\mathbf{N}^*)$，一组二次方程$a_kx^2+2a_{k+1}x+a_{k+2}=0(k\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证：不论k取怎样的正整数，这组方程总有公共根.

(2)若各方程的不同的根依次为$x_1,\ x_2,\cdots,x_n,\cdots$，求证：$\frac{1}{x_1+1},\frac{1}{x_2+1},\frac{1}{x_3+1},\cdots,\frac{1}{x_n+1},\cdots$成等差数列.

证明：

(1)因为$\{a_n\}$是等差数列，$d\neq 0$，$a_n\neq 0\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以$2a_{k+1}=a_k+a_{k+2}$.

将上式代入方程得$a_kx^2+(a_k+a_{k+2})x+a_{k+2}=0$.

即$(x+1)(a_kx+a_{k+2})=0\ (k\in\mathbf{N}^*)\cdots$①

由$x+1=0$得知，这组方程有公共根$x_0=-1$.

(2)由①得知各方程的不同的根为$x_k=-\frac{a_{k+2}}{a_k}$.

所以$x_k+1=-\frac{a_{k+2}}{a_k}+1=\frac{a_k-a_{k+2}}{a_k}=-\frac{2d}{a_k}$.

因此$\frac{1}{x_k+1}=-\frac{a_k}{2d}$.进而可得$\frac{1}{x_{k+1}+1}=-\frac{a_{k+1}}{2d}$.

因为$\frac{1}{x_{k+1}+1}-\frac{1}{x_k+1}=-\frac{a_{k+1}-a_k}{2d}=-\frac{d}{2d}=-\frac{1}{2}$(常数).

所以数列$\{\frac{1}{x_k+1}\}$是等差数列.

评析 本题属于方程与数列结合的产物，是基础题.

例4 给定正整数n和正数M，对于满足条件$a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$的所有等差数列$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，试求$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$的最大值.

解:在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{2n+1}=a_1+2nd=2(a_1+nd)-a_1=2a_{n+1}-a_1$.

因为$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=\frac{a_{n+1}+a_{2n+1}}{2}(n+1)=\frac{(3a_{n+1}-a_1)}{2}(n+1)$.

又因为$M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{1}{10}(1+3^2)[(-a_1)^2+a_{n+1}^2]\geqslant\frac{1}{10}(3a_{n+1}-a_1)^2$.

因此$\sqrt{10M}\geqslant 3a_{n+1}-a_1$.

所以$S\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}$.

从而$S_{\max}=\frac{10}{2}(n+1)\sqrt{M}$，此时$a_1=\frac{\sqrt{10M}}{8}$，$a_{n+1}=\frac{3\sqrt{10M}}{8}$.

评析 本题将不等式与数列很好地结合在一起，在变形上有一定的技巧性.

例5 (1999年上海市数学竞赛题)$\triangle ABC$的边长a，b，c ($a\leqslant b\leqslant c$)同时满足下列三个条件：

(ⅰ)a，b，c均为整数；

(ⅱ)a，b，c组成等比数列；

(ⅲ)a与c中至少有一个等于100.

求出三元数组(a, b, c)的所有可能的解.

解:依题意可知，正整数a，b，c满足$\begin{cases}a\leqslant b\leqslant c\\ a+b>c\\ b^2=ac\\ a、c\text{ 中至少有一个为 }100\end{cases}$

(1)若$a=100$，则$b^2=100c$，故$10\mid b$.

又因为$100+b>c=\frac{b^2}{100}$，$b^2-100b-100^2<0$.

所以$100\leqslant b<50(\sqrt{5}+1)$.

又已证$10\mid b$，故b可取100，110，120，130，140，150，160.

相应地$c=100$，121，144，169，196，225，256.

(2)若$c=100$，则$b^2=100a$，故$10\mid b$.

又因为$\frac{b^2}{100}+b>100$，$b^2+100b-100^2>0$.

所以 $50(\sqrt{5}-1)<b\leqslant 100$.

又已证 $10\mid b$,故 b 可取 70, 80, 90, 100,相应地 $a=49, 64, 81, 100$.

综上所述,三元数组 (a, b, c) 共有 10 组可能的解:

(49, 70, 100), (64, 80, 100), (81, 90, 100), (100, 100, 100), (100, 110, 121), (100, 120, 144), (100, 130, 169), (100, 140, 196), (100, 150, 225), (100, 160, 256).

评析 这里的讨论并不复杂,若改为求解的个数的填空题,难度会稍大,因为不细心会导致漏解.

例 6 数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 a_n, a_{n+1} 是方程 $x^2-c_nx+(\frac{1}{3})^n=0$ 的两个根,且 $a_1=2$,求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项之和 S_{2n}.

解:依题意得 $\begin{cases} c_n=a_n+a_{n+1} \cdots ① \\ a_na_{n+1}=(\frac{1}{3})^n \cdots ② \end{cases}$

由②得 $a_{n+1}a_{n+2}=(\frac{1}{3})^{n+1}\cdots ③$

$\frac{③}{②}$ 得 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{3}$.

所以, $a_1, a_3, \cdots, a_{2k-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2k}, \cdots$ 都是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

又由 $a_1a_2=\frac{1}{3}$, $a_1=2$ 可得 $a_2=\frac{1}{6}$.

由 $a_2a_3=\frac{1}{9}$ 可得 $a_3=\frac{2}{3}$.

由①可得

$$\begin{aligned} S_{2n}&=c_1+c_2+\cdots+c_{2n}=(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})+(a_2+a_3+\cdots+a_{2n+1}) \\ &=2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}) \\ &=2\cdot\frac{\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{2[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}} \\ &=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n](2\times\frac{1}{6}+2+\frac{2}{3}) \\ &=\frac{9}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]. \end{aligned}$$

评析 这里求 S_{2n-1} 也可用类似的方法,但结果不如 S_{2n} 漂亮,故这里只要求 S_{2n}.

例 7 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是前 n 项和.

(1)求证：$\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$；

(2)是否存在正常数 c，使得 $\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立？并给予证明.

证明：

(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由题设知 $a_1>0$，$q>0$.

(ⅰ)当 $q=1$ 时，有 $S_n=na_1$.

于是，$S_n\times S_{n+2}-S_{n+1}^2=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2=-a_1^2<0$；

(ⅱ)当 $q\neq1$ 时，有 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

于是，$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=\dfrac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\dfrac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}=-a_1^2q^n<0$.

因此，由(ⅰ)、(ⅱ)知，$S_n\times S_{n+2}<S_{n+1}^2$成立，对此边同时取对数即可得证.

(2)若$\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立，则必有

$$\begin{cases}(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2\\ S_n-c>0\end{cases}.$$

我们分两种情形进行讨论：

(ⅰ)当 $q=1$ 时，我们有

$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2=(na_1-c)[(n+2)(a_1-c)]-[(n+1)a_1-c]^2$
$=-a_1^2<0$，

即不存在正常数 c 使结论成立.

(ⅱ)当 $q\neq1$ 时，若 $(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2$ 成立，则

$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2$

$=\left[\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c\right]\left[\dfrac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c\right]-\left[\dfrac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c\right]^2$

$=-a_1q^n[a_1-c(1-q)]$.

但 $a_1q^n\neq0$，故只能是 $a_1-c(1-q)=0$，即 $c=\dfrac{a_1}{1-q}$.

此时，由于 $c>0$，$a_1>0$，故必须 $0<q<1$.

但 $0<q<1$ 时，$S_n-\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{-a_1q^n}{1-q}<0$，不满足 $S_n-c>0$，即不存在正常数 $c>0$ 满足题设条件.

综上所述，我们证明了不存在正常数 c 满足题意.

评析 运用等比数列求和公式时，一定要注意讨论公比 q 是否为 1.

例 8 已知 $f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，且 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 组成等差数列，n 为正偶数. 又 $f(1)=n^2$，$f(-1)=n$. 试比较 $f(\frac{1}{2})$ 与 3 的大小.

解：因为 $f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$，所以 $\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2$，即 $a_1+a_n=2n$.

又 $f(-1)=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots-a_{n-1}+a_n=n$.

即 $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=n$.

所以 $\frac{n}{2}d=n$，即 $d=2$.

由 $a_1+a_n=2a_1+2(n-1)=2n$，即 $2a_1-2+2n=2n$ 得

$a_1=1$，$a_n=a_1+2(n-1)=2n-1(n\in\mathbf{N})$.

所以 $f(x)=x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-1)x^n$.

所以 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+5(\frac{1}{2})^3+\cdots+(2n-1)(\frac{1}{2})^n$，

$\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+3(\frac{1}{2})^3+\cdots+(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

以上两式相减可得

$\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+\cdots+2(\frac{1}{2})^n-(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

即 $\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}-(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$.

从而 $f(\frac{1}{2})=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n$

$$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n.$$

所以 $f(\frac{1}{2})=3-(\frac{1}{2})^{n-2}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n<3$，即 $f(\frac{1}{2})<3$.

评析 由已知条件求得 $a_n=2n-1$，$f(\frac{1}{2})$ 是等差数列 $\{2n-1\}$ 与等比数列 $\{x^n\}$ 对应项的乘积所组成的数列 $\{(2n-1)x^n\}$ 的前 n 项和. 对于此种数列前 n 项求和问题，我们通常用错项相减法. 另外，求数列前 n 项和还有倒序相加法、裂项相消法、分组求和法等.

例 9 （1998 年以色列—匈牙利数学竞赛题）将素数从小到大排列为 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$，令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}p_i$. 求证：对于任意正常数 n，存在一个完全平方数 a_n，使得 $S_n<a_n<S_{n+1}$.

证明:对于 $n<5$,我们有 $2<2^2<2+5$, $7<3^2<7+7$, $14<4^2<14+11$,故结论成立.

当 $n\geqslant 5$ 时,$p_n\geqslant 11$,记 $S'_n=1+3+5+\cdots+p_n$,则 $S'_n=(\frac{1+p_n}{2})^2$,且 $S'_n>S_n$.

反设结论不成立,则存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $k^2<S_n<S_{n+1}\leqslant(k+1)^2$.

由上述结论知:$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i>1+3+\cdots+(2k-1)$.

即 $p_n\geqslant 2k-1$,则 $p_{n+1}\geqslant 2k+1$.

从而 $S_{n+1}>1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$,但 $S_{n+1}<(k+1)^2$,矛盾!

因此,对任意正整数 n,存在一个完全平方数 a_n,使得 $S_n<a_n<S_{n+1}$,得证.

评析 *本题关键是能注意到等差数列前 n 项和.求得 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=(\frac{1+p_n}{2})^2(n\geqslant 5)$,并会运用反证法问题即可迎刃而解.*

例 10 设 r 为正整数,定义数列 $\{a_n\}$ 如下:$a_1=1$,且对每个正整数 n,$a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}$.求证:每个 a_n 都是正整数,并确定哪些 n,a_n 是偶数.

证明:由题设得 $(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r}$.

对上式两边同乘以 $n+1$ 得

$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)^{2r+1}$.

令 $b_n=(n+1)na_n(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

于是,$b_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})+b_1$.

由 $b_n=2n^{2r+1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1})$, $n\mid k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}$ 可得 $n\mid b_n$.

再将 b_n 改写成 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2r+1}+\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)^{2r+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$,即得 $(n+1)\mid b_n$.

因为 $(n, n+1)=1$,所以 $n(n+1)\mid b_n$.

从而 $a_n=\frac{b_n}{(n+1)n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是正整数.

在 $n\equiv 3\pmod 4$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{n+1}&\equiv\sum_{k=1}^{n}[k^{2r}-k^{2r-1}(n+1-k)+\cdots+(n+1-k)^{2r}]\\&\equiv\sum_{k=1}^{n}(2r+1)k^{2r}\equiv\sum_{k=1}^{n}k^{2r}\end{aligned}$$

$\equiv (1+0+1+0)+\cdots+(1+0+1+0)+1+0+1$

$\equiv 0(\text{mod}2)$.

于是，$a_n = \dfrac{b_n}{n(n+1)}$ 也是偶数.

类似可证在 $n \equiv 0(\text{mod}4)$ 时，a_n 是偶数；在 $n \equiv 1, 2(\text{mod}4)$ 时，a_n 是奇数.

综上所述，在 $n \equiv 0, 3(\text{mod}4)$ 时，a_n 是偶数；在 $n \equiv 1, 2(\text{mod}4)$ 时，a_n 是奇数.

评析 本题看似是数论题，实际上是数列题，这种题型有相当的难度.

思考交流

把数列按一定的规则分组后就构成了分群数列，如把正奇数数列分为(1)，(3,5,7)，(9,11,13,15,17)，….

思考题 1 在奇整数的非减数列

$(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (1,3,3,5,5,5,5,5,\cdots)$ 中，每个正奇数 k 出现 k 次，已知有整数 b，c，d 存在，使得对于所有的正整数 n，满足 $a_n = b[\sqrt{n+c}]+d$，求 b，c，d.

解：将数列 $\{a_n\}$ 这样分群

(a_1)，(a_2, a_3, a_4)，$(a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$，…，

其中，第 k 个群有 $2k-1$ 个元素. 由原数列的性质，可知第 k 个群中每一项均有 $2k-1$，$k=1,2,\cdots$，并且，当且仅当 $(k-1)^2 < n \leqslant k^2$ 时，a_n 是第 k 群中的元素，所以，当且仅当 $(k-1)^2 \leqslant n-1 \leqslant k^2-1$ 时，a_n 是第 k 群中的元素，即可得当 $k-1=[\sqrt{n-1}]$ 时，a_n 的值为 $2k-1$.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 2[\sqrt{n-1}]+1$，$n=1,2,\cdots$，所以，$b=2$，$c=-1$，$d=1$.

思考题 2 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 2$，$x_{n+1} = [\frac{3}{2}x_n]$，$n=1,2,\cdots$，记 $y_n = (-1)^{x_n}$，求证：$\{y_n\}$ 不是周期数列.

证明：由假设可知，当 x_n 是偶数时，则 $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n$；当 x_n 是奇数时，则 $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{1}{2}$，于是对任意自然数 $n > m$，若 x_n 与 x_m 同奇偶，

则 $x_{n+1} - x_{m+1} = \dfrac{3}{2}(x_n - x_m)$. ①

如果 $\{y_n\}$ 是周期数列，设其周期为 T，则对任何自然数 n，x_{n+T} 与 x_n 同奇偶，由 ① 可得

$$x_{n+1+T}-x_{n+1}=\frac{3}{2}(x_{n+T}-x_n)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

依此类推，对任意自然数 n 有 $x_{n+T}-x_n=(\frac{3}{2})^{n-1}(x_T-x_1)$，显然存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，$(\frac{3}{2})^{n-1}(x_T-x_1)$ 不是整数，这和 $\{x_n\}$ 是自然数列矛盾.

注　数列的周期性是数列重要性质，是竞赛考查的重点内容.

能力训练

一、选择题（每小题 6 分，共 6 小题，满分 36 分）

1.（**1999 年河南高中数学竞赛题**）设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. $S_9=18$，$a_{n-4}=30(n>9)$，$S_n=336$，则 n 的值为（　）

A. 16　　B. 21　　C. 9　　D. 8

2. 等差数列的前 p 项之和为 q（p，q 为不相等的正整数），前 q 项之和为 p，则这数列的前 $p+q$ 项之和为（　）

A. $p+q$　　B. $p-q$　　C. $-p+q$　　D. $-p-q$

3. 一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2^{-5}$，它的前 11 项的几何平均数为 2^5，若在前 11 项中抽出一项后的几何平均数为 2^4，则被抽去的项是（　）

A. a_8　　B. a_9　　C. a_{10}　　D. a_{11}

4. 设函数 $f(x)=\frac{x^2-x+n}{x^2+x+1}$（$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{n-1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$）的最小值为 a_n，最大值为 b_n，记 $c_n=(1-a_n)(1-b_n)$，则数列 $\{c_n\}$（　）

A. 是公差不为零的等差数列　　B. 是公比不为 1 的等比数列

C. 是常数列　　D. 既不是等差数列也不是等比数列

5.（**1999 年全国高中数学联赛题**）给定公比为 $q(q\neq1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$，设 $b_1=a_1+a_2+a_3$，$b_2=a_4+a_5+a_6$，$\cdots$，$b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$，$\cdots$，则数列 $\{b_n\}$（　）

A. 是等差数列　　B. 是公比为 q 的等比数列

C. 是公比为 q^3 的等比数列　　D. 既非等差数列又非等比数列

6.（**第 27 届美国高中数学考试题**）设有一个 n 项的等比数列，首项是 1，公比是 r，和是 s，其中 r 和 s 是非零数. 则原数列每一项都用它的倒数取代后所得到的新的等比数列的和是（　）

A. $\frac{1}{s}$　　B. $\frac{1}{r^n s}$　　C. $\frac{s}{r^{n-1}}$　　D. $\frac{r^n}{s}$

二、填空题(每小题 9 分,共 6 道题,满分 54 分)

7. 等差数列前 n 项之和为 2000,公差为 2,首项为整数,且 $n>1$,则所有可能的 n 值之和为________.

8. 代数式 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots+\frac{1}{255\cdot 257}$ 的值为________.

9. 设 $x\neq y$,且两个数列 x, a_1, a_2, a_3, y 和 b_1, x, b_2, b_3, y, b_4 均为等差数列,那么 $\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=$ ________.

10. 设正整数数列 a_1, a_2, a_3, a_4 是等比数列,其公比 r 不是整数,而且 $r>1$. 在这样的数列中,a_4 可取到的最小值是________.

11. (第 22 届美国高中数学考试题)若 n 个量形成等比数列,P 是它们的乘积,S 是它们的和,S' 是它们的倒数和,那么以 S、S' 和 n 来表示 P 为________.

12. (第 33 届美国高中数学考试题)将一组以 1 开头的连续的正整数写在黑板上,擦去其中的一个数,余下的数的算术平均值为 $35\frac{7}{17}$. 则擦去的那个数为________.

三、解答题(每题 20 分,共 3 道题,满分 60 分)

13. (2001 年全国高中数学联赛题)设 $\{a_n\}$ 为等差数列,$\{b_n\}$ 为等比数列,且 $b_1=a_1^2$, $b_2=a_2^2$, $b_3=a_3^2(a_1<a_2)$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\sqrt{2}+1$,试求 $\{a_n\}$ 的首项与公差.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2,前 n 项和为 S_n,且 $\{S_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n=a_nS_n$,求数列 $\{S_n\}$ 的各项和.

15. 给定 $n\ (n\geqslant 5)$ 个互不相同的实数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,所有的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个和 $a_i+a_j(1\leqslant i, j\leqslant n, i\neq j)$ 中互不相同的数恰好有 $2n-3$ 个的充要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等差数列.

第二讲　递归数列(一)

知识扫描

对于一个数列$\{a_n\}$,若存在自然数k和一个把a_{n+k}与前面k项a_{n+k-1},a_{n+k-2},…,a_n联系起来的方程$f(a_{n+k},a_{n+k-1},\cdots,a_n)=0\ (n\in\mathbf{N}^*)$…①,则称数列$\{a_n\}$为$k$阶递归数列,且称①式是数列$\{a_n\}$的递归方程.由①式得出$a_{n+k}=g(a_{n+k-1},a_{n+k-2},\cdots,a_n)$…②又称为数列$\{a_n\}$的递归关系(或递推关系).数列$\{a_n\}$的开头$k$项的值$a_1$,$a_2$,…,$a_k$(为已知常数)称为递归数列$\{a_n\}$的初始条件或初始值.递归数列$\{a_n\}$由递归关系②及初始值$a_1$,$a_2$,…,$a_k$所唯一确定.

形如$a_{n+1}=a_n+f(n)$的一阶递归式,其通项求法为$a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)$.

形如$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1)$的递归式,由$a_{n+1}=pa_n+q$,$a_n=pa_{n-1}+q$两式相减得$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$.故$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为$a_2-a_1$、且公比为$p$的等比数列,先求出$a_{n+1}-a_n$,再求出$a_n$.

形如$a_{n+1}=pa_n+q(n)(p\neq 1)$的递推式,两边同除以$p^{n+1}$得$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{q(n)}{p^{n+1}}$.令$\dfrac{a_n}{p^n}=b_n$,则$b_{n+1}=b_n+\dfrac{q(n)}{p^{n+1}}$,这就化归为已知方法求解.

形如$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}(n\geqslant 2)$的递推式,可通过下面方法求通项公式:若$p+q=1$,则$a_{n+1}-a_n=-q(a_n-a_{n-1})$,可知$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列,先求得$a_{n+1}-a_n$,再求出$a_n$;若$p+q\neq 1$,则存在$\alpha$,$\beta$满足$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$,即$a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}$,从而由$\alpha+\beta=p$,$\alpha\beta=-q$可解出$\alpha$,$\beta$,这样可先求出$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$的通项公式,再由已知

方法求出 a_n. 注意：α,β 实质上是二次方程 $x^2 - px - q = 0$ 的两个根，将方程 $x^2 - px - q = 0$ 称为递推式 $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 的特征方程.

在数列$\{a_n\}$中，给出 a_1，a_2，且 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$，它的特征方程 $x^2 = px + q$ 的两个根 α,β. 若 $\alpha \neq \beta$，则 $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$；若 $\alpha = \beta$，则 $a_n = (An + B)\alpha^n$，其中 A，B 是常数，可由初始值 a_1，a_2 求出.

例题分析

(1) 特征根法

例 1 (2004 年高考重庆·文) 设 $a_1 = 1$，$a_2 = \frac{5}{3}$，$a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n (n \in \mathbf{N}^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解：考虑其特征方程 $x^2 = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$，解得 $x_1 = \frac{2}{3}$，$x_2 = 1$.

故可设 $a_n = A \cdot (\frac{2}{3})^n + B \cdot 1^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

由 a_1，a_2 的值可得

$$\begin{cases} a_1 = A \cdot (\frac{2}{3})^1 + B \cdot 1 = 1 \\ a_2 = A \cdot (\frac{2}{3})^2 + B \cdot 1^2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$，解之得 $A = -3$，$B = 3$.

所以 $a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot (-3) + 3$.

评析 本题为典型的 $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n+1}$ 型的题目，在做这种题时，可利用特征根法求解，其一般方法如下：

1) 由递推式列出其特征方程，并求出其特征根 x_1，x_2；

2) 设数列通项 $a_n = A \cdot (x_1)^n + B \cdot (x_2)^n$；

3) 由数列前几项解出 A，B，即得出通项公式 a_n.

而对这一类题目的推广，即 $a_{n+2} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + \gamma$ 型问题，可先将其变形为 $a_{n+2} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta - 1} = \alpha(a_n + \frac{\gamma}{\alpha + \beta - 1}) + \beta(a_{n+1} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta - 1})$，再用 b_n 代换 $a_n + \frac{\gamma}{\alpha + \beta - 1}$，化为 $b_{n+2} = \alpha b_n + \beta b_{n-1}$，此时可用特征根法求解. 应注意：当 $\alpha + \beta = 1$ 时，不可用上述方法，此时可将其化为 $a_{n+2} - a_{n+1} - \frac{\gamma}{\beta + 1} = -\beta(a_{n+1} - a_n - \frac{\gamma}{\beta + 1})$，易知 $\{a_{n+2} - a_{n+1} - \frac{\gamma}{\beta + 1}\}$ 是公比

为 $-\beta$ 的等比数列，从而 a_n 易求.

例 2 （2003 年西部数学奥林匹克改编）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0$，$a_{n+1}=ka_n+\sqrt{(k^2-1)a_n^2+1}$（$n=0,1,2,\cdots,k\geqslant 2$），其中 k 为给定的正整数. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：由已知条件可得 $a_{n+1}^2-2ka_na_{n+1}+a_n^2-1=0$.

所以 $a_{n+2}^2-2ka_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2-1=0$.

将以上两式相减可得 $a_{n+2}^2-a_n^2-2ka_{n+1}a_{n+2}+2ka_na_{n+1}=0$.

即 $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-2ka_{n+1})=0$.

我们可证数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的，故 $a_{n+2}=2ka_{n+1}-a_n$…①

易知 $a_0=0$，$a_1=1$.

① 式的特征方程为 $x^2=2kx-1$，解之得 $x=k\pm\sqrt{k^2-1}$.

故可设 $a_n=A(k+\sqrt{k^2-1})^n+B(k-\sqrt{k^2-1})^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

再结合 $a_0=0$，$a_1=1$ 可知

$$\begin{cases}a_1=Ak+A\sqrt{k^2-1}+Bk-B\sqrt{k^2-1}=1\\ a_0=A+B=0\end{cases}.$$

解之得 $A=\dfrac{1}{2\sqrt{k^2-1}}$，$B=-\dfrac{1}{2\sqrt{k^2-1}}$.

所以 $a_n=\dfrac{1}{2\sqrt{k^2-1}}(k+\sqrt{k^2-1})^n-\dfrac{1}{2\sqrt{k^2-1}}(k-\sqrt{k^2-1})^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

评析　对于非线性化的递推式，一般先将其线性化，然后再寻求其他解法. 本题将递推式化为 $a_{n+1}^2-2ka_na_{n+1}+a_n^2=1$ 后，通过取 n 和 $n+1$ 得到两式，再相减可进一步化简，最后得到二阶线性递归关系.

例 3　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$（$n\geqslant 3$），求其通项公式 a_n.

解：原递推关系可化为 $a_na_{n-2}=a_{n-1}^2+2$.

上式用 $n+1$ 代替 n 得 $a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+2$.

两式相减得 $a_{n+1}a_{n-1}-a_na_{n-2}=a_n^2-a_{n-1}^2$，即 $\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

令 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$（$n\geqslant 3$），则 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_3=\dfrac{a_3+a_1}{a_2}=4$.

故 $\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=4$，即 $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$（$n\geqslant 3$）.

由其特征方程 $x^2=4x-1$ 解出两个根为 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$.

可设 $a_n = A\cdot(2+\sqrt{3})^n + B\cdot(2-\sqrt{3})^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

由 $a_1 = a_2 = 1$ 得 $\begin{cases}A(2+\sqrt{3})+B(2-\sqrt{3})=1\\A(2+\sqrt{3})^2+B(2-\sqrt{3})^2=1\end{cases}$，解之得 $A=\dfrac{-5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$，$B=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

所以 $a_n=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}[(-5+3\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(5+3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n](n\in\mathbf{N}^*)$.

评析　本题看上去很难下手，但通过几次代换后，得到我们熟悉的 $a_{n+2}=\alpha a_n+\beta a_{n+1}$ 的形式.在做题时要多注意观察将那些自己不熟悉的式子转化为自己熟悉的式子来求解.

例 4　在数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，且 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}(n\in\mathbf{N}^*)$，求其通项公式 a_n.

解：特征方程 $x=\dfrac{3x+2}{x+4}$，解之得 $x_1=1$，$x_2=-2$.

先用 $x_1=1$ 作为数列代换的常数 x：令 $b_n=a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=b_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

将它代入原递推式得 $b_{n+1}+1=\dfrac{3(b_n+1)+2}{(b_n+1)+4}$，从而 $b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{b_n+5}(n\in\mathbf{N}^*)$.

因为 $b_1=a_1-1=3\neq 0$，所以 $b_k\neq 0\ (k\in\mathbf{N}^*)$.

因而递推公式又可写成 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{3}=(\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{3})(\dfrac{5}{2})^{n-1}=(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3})(\dfrac{5}{2})^{n-1}=\dfrac{2}{3}\cdot(\dfrac{5}{2})^{n-1}$.

故 $b_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{2\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}}=\dfrac{3\cdot 2^{n-2}}{5^{n-1}-2^{n-2}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

又因为 $a_n=b_n+1$，所以 $a_n=\dfrac{2^{n-1}+5^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

注：类似地，我们也可以用特征方程的第 2 个根 $x_2=-2$ 来代换：

令 $b_n=a_n+2$，则 $a_n=b_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$，代入原递推公式得 $b_{n+1}=\dfrac{5b_n}{b_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

此时 $b_1=a_1+2=6\neq 0$，所以 $b_k\neq 0\ (k\in\mathbf{N}^*)$.

于是递推公式可写成 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{5}(n\in\mathbf{N}^*)$.

故 $\dfrac{1}{b_{n+1}}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{5}(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{3})(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{3}=(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{3})\cdot(\dfrac{2}{5})^{n-1}=-\dfrac{1}{6}(\dfrac{2}{5})^{n-1}$，从而 $b_n=\dfrac{3\cdot 5^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-2}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

又因为 $a_n=b_n-2$，所以 $a_n=\dfrac{3\cdot 5^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-2}}-2=\dfrac{5^{n-1}+2^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

评析 由此可见，当特征方程有两个不同的根时，任意选一个根作数列代换 $b_n=a_n-x_i(i=1$ 或 $2)$，都能把原递推公式变为递推公式 $b_{n+1}=\dfrac{\alpha_1{}'b_n}{\alpha_2{}'b_n+\beta_2{}'}$，通过求 b_n，再来求 a_n. 而且求出来的通项公式是一样的. 当特征方程的两个根是虚数时，上述求通项公式的方法也是正确的.

例 5 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-4}{a_n+6}(n\in\mathbf{N}^*)$，求其通项公式 a_n.

解：特征方程 $x=\dfrac{2x-4}{x+6}$，解之得 $x_1=x_2=-2$.

令 $a_n=b_n-2\ (n\in\mathbf{N}^*)$，将之代入原递推式得 $b_{n+1}=\dfrac{4b_n}{b_n+4}(n\in\mathbf{N}^*)$.

因为 $b_1=a_1+2=4\neq 0$，所以 $b_k\neq 0\ (k\in\mathbf{N}^*)$.

故 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$.

因此 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{n}{4}$，从而 $b_n=\dfrac{4}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

又因为 $a_n=b_n-2$，所以 $a_n=\dfrac{4}{n}-2=\dfrac{4-2n}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

评析 从以上两题可以看出，当特征方程 $x=\dfrac{\alpha_1x+\beta_1}{\alpha_2x+\beta_2}$ 的两个根相等时，由代换 $b_n=a_n-x_i(i=1,2)$ 得到的数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 是一个等差数列. 由于 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_1}+(n-1)d\ (d$ 为常数)，因而数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是关于 n 的一次分式 $a_n=\dfrac{A_1n+B_1}{A_2n+B_2}(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 A_i，B_i $(i=1,2)$ 都是常数. 关于这个问题，第三讲有详细论述.

(2) 代换法

例 6 (第 5 届希望杯 · 高二试题) 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a\ (0<a<1)$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：注意到题目中出现 $\sqrt{1-a_n^2}$，自然地联想到进行三角代换.

解：由 $0<a<1$ 可设 $a_1=a=\sin\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 且 $\theta=\arcsin a)$，则

$$a_2=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sin\frac{\theta}{2},\ a_3=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2}}=$$

$\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\theta}{2}}{2}}=\sin\dfrac{\theta}{4}$.

以依次类推 $a_n=\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$,可用数学归纳法证明.(以下略)

评析　有一类题目给出的递推关系会与某个三角公式或三角形恒等式相吻合,而且对应项的取值范围也会与某个三角函数相吻合(例如,$\sin\alpha$ 对应的范围为 $[-1,1]$,而 $\sin^2\alpha$ 对应的范围为 $[0,1]$),这时熟练的同学会果断地进行三角代换.正如本题,给出的递推关系颇为复杂,不用三角代换法求解是很棘手的.

例 7　设数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$,求 a_n.

分析:该题在递归关系中出现了根式,在数学解题方法中,消去根号有乘方和代换两种方法.显然该题不宜用前者.

解:设 $b_n=\sqrt{1+24a_n}$,则 $b_1=\sqrt{1+24a_1}=5$, $b_n^2=1+24a_n$.

从而 $a_n=\dfrac{b_n^2-1}{24}$…①

将①代入已知递推公式得$\dfrac{b_{n+1}^2-1}{24}=\dfrac{1}{16}(1+4\times\dfrac{b_n^2-1}{24}+b_n)$.

从而$(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2$.

由 $b_n>0$ 得 $2b_{n+1}=b_n+3$,即 $2(b_{n+1}-3)=b_n-3$.

故$\{b_n-3\}$是等比数列,首项为2,公比为$\dfrac{1}{2}$.

则 $b_n-3=2\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=(\dfrac{1}{2})^{n-2}$,从而 $b_n=(\dfrac{1}{2})^{n-2}+3$.

故 $a_n=\dfrac{b_n^2-1}{24}=\dfrac{(\dfrac{1}{2})^{2n-4}+3\times(\dfrac{1}{2})^{n-3}+8}{24}=\dfrac{1+3\times2^{n-1}+2^{2n-1}}{3\times2^{2n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 8　已知数列$\{a_n\}$,$a_1=1$, $a_2=-1$, $a_n=-a_{n-1}-2a_{n-2}(n\geqslant3)$.求证:$2^{n+2}-7a_n^2$ 是完全平方数.

证明:我们先证明一个引理.

引理:若数列$\{a_n\}$满足 $a_n=aa_{n-1}+ba_{n-2}(n\geqslant3)$…①,则数列$\{a_n^2\}$必满足 $a_n^2=(a^2+b)a_{n-1}^2+b(a^2+b)a_{n-2}^2-b^3a_{n-3}^2(n\geqslant4)$.

引理的证明:由①得 $a_n^2=a^2a_{n-1}^2+2aba_{n-1}a_{n-2}+b^2a_{n-2}^2$.

故 $a_{n+1}^2=a^2a_n^2+2aba_na_{n-1}+b^2a_{n-1}^2$.

又因为 $ba_{n-2}=a_n-aa_{n-1}$,所以 $b^2a_{n-2}^2=a_n^2-2aa_na_{n-1}+a^2a_{n-1}^2$.

消去 $a_n a_{n-1}$ 得

$a_{n+1}^2+b^3a_{n-2}^2=(a^2+b)a_n^2+(b^2+a^2b)a_{n-1}^2$，即

$a_{n+1}^2=(a^2+b)a_n^2+b(a^2+b)a_{n-1}^2-b^3a_{n-2}^2$.

即得 ① 式成立，引理得证.

下面回到原题：

对于数列$\{a_n\}$，由引理得 $a_n^2=-a_{n-2}^2+2a_{n-3}^2+8a_{n-3}^2(n\geqslant 4)$.

设 $b_n=2^{n+2}-7a_n^2$，则 $a_n^2=\dfrac{2^{n+2}-b_n}{7}$，代入上式得出数列$\{b_n\}$的递推关系式

$$\frac{2^{n+2}-b_n}{7}=-\frac{2^{n+1}-b_{n-1}}{7}+\frac{2(2^n-b_{n-2})}{7}+\frac{8(2^{n-1}b_{n-3})}{7}.$$

故 $b_n=-b_{n-1}+2b_{n-2}+8b_{n-3}$.

令 $a^2+b=-1$ 且 $b(a^2+b)=2$，$-b^3=8$，解得 $a=\pm 1$ 且 $b=-2$.

经计算：$b_1=2^3-7a_1^2=4=1^2$，$b_2=2^4-7a_2^2=9=3^2$，$b_3=2^5-7a_3^2=25=(-5)^2$.

又因为 $-5=-1\times 3-2\times 1$，取 $a=-1$，所以 $b_n=c_n^2$，其中 $c_1=1$，$c_2=3$，$c_n=-c_{n-1}-2c_{n-2}(n\geqslant 3)$.

显然，c_n 是整数，故 $b_n=2^{n+2}-7a_n^2=c_n^2$ 是完全平方数.

评析 本题的关键是求出 b_n 的递推关系式，而 b_n 的递推关系式则是由引理推出.读者平时应多注意积累，在做题时就可以将一些知识以引理形式出现，这样可帮助我们简化题目解题思路.

(3) 线性递推式组求法

设 m $(m\geqslant 2)$ 个数列$\{a_n^{(1)},a_n^{(2)},\cdots,a_n^{(m)}\}$的首项分别为 $a_1^{(1)}$，$a_1^{(2)}$，$\cdots$，$a_1^{(m)}$，且这 m 个数列满足如下关系：

$$\begin{cases}a_{n+1}^{(1)}=\alpha_{1,1}a_n^{(1)}+\alpha_{1,2}a_n^{(2)}+\cdots+\alpha_{1,m}a_n^{(m)}+\gamma_1\\ a_{n+1}^{(2)}=\alpha_{2,1}a_n^{(1)}+\alpha_{2,2}a_n^{(2)}+\cdots+\alpha_{2,m}a_n^{(m)}+\gamma_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n+1}^{(m)}=\alpha_{m,1}a_n^{(1)}+\alpha_{m,2}a_n^{(2)}+\cdots+\alpha_{m,m}a_n^{(m)}+\gamma_m\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

其中 $\alpha_{i,j}$，$\gamma_i(i,j=1,2,\cdots,m)$ 都是常数，且 $\alpha_{i,m}(i=1,2,\cdots,m)$ 不全为 0，则称这个递推式组为线性递推式组，这 m 个数列称为由递推式组给定的数列.

例 9 在数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，且$\begin{cases}a_{n+1}=b_n+3\cdots①\\ b_{n+1}=2a_n-1\cdots②\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 a_n 和 b_n.

解：先求出$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的递推公式：

由 ① 式得 $a_{n+2}=b_{n+1}+3$.

将 ② 式代入上式消去 b_{n+1} 得

$a_{n+2}=(2a_n-1)+3=2a_n+2 \Rightarrow a_{n+2}=2a_n+2\ (n\in \mathbf{N}^*)$ …③

同理 $b_{n+2}=2b_n+5\ (n\in \mathbf{N}^*)$ …④

下面利用 ③ 式求数列 $\{a_n\}$ 的通项：

在 ③ 式中令 $x_n=a_{2n-1}$，$y_n=a_{2n}(n\in \mathbf{N}^*)$，则

$x_1=a_1=1$，$y_1=a_2=b_1+3=4$，且 $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+2 \\ y_{n+1}=2y_n+2 \end{cases} (n\in \mathbf{N}^*)$.

这是两个等比差数列，它们可以分别写成如下形式

$x_{n+1}+2=2(x_n+2)$，$y_{n+1}+2=2(y_n+2)(n\in \mathbf{N}^*)$.

由此得到

$x_n+2=(x_1+2)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$，$y_n+2=(y_1+2)\cdot 2^{n-1}=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$.

故 $x_n=3\cdot 2^{n-1}-2$；$y_n=3\cdot 2^n-2\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

于是得到 $a_{2n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2$，$a_{2n}=3\cdot 2^n-2$.

所以 $a_n=\begin{cases} 3\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}-2 & (2\nmid n) \\ 3\cdot n^{\frac{n}{2}}-2 & (2\mid n) \end{cases} (n\in \mathbf{N}^*)$.

或者写成

$a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}(3\cdot 2^{\frac{n-1}{2}})+\dfrac{1+(-1)^n}{2}(3\cdot 2^{\frac{n}{2}}-2)(n\in \mathbf{N}^*)$.

下面利用 ④ 式求数列 $\{b_n\}$ 的通项：

在 ④ 式中令 $x_n=b_{2n-1}$，$y_n=b_{2n}(n\in \mathbf{N}^*)$，则

$x_1=b_1=1$，$y_1=b_2=2a_1-1=1$，且 $x_{n+1}=2x_n+5$，$y_{n+1}=2y_n+5\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

这是两个等比差数列，它们又可以写成

$x_{n+1}+5=2(x_n+5)$，$y_{n+1}+5=2(y_n+5)(n\in \mathbf{N}^*)$.

由此可得

$x_n+5=(x_1+5)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$；$y_n+5=(y_1+5)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$.

所以 $x_n=3\cdot 2^n-5$；$y_n=3\cdot 2^n-5(n\in \mathbf{N}^*)$.

因此得到 $b_{2n-1}=3\cdot 2^n-5$，$b_{2n}=3\cdot 2^n-5\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

所以 $b_n=\begin{cases} 3\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}-5 & (2\nmid n) \\ 3\cdot 2^{\frac{n}{2}}-5 & (2\mid n) \end{cases} (n\in \mathbf{N}^*)$.

或者写成

$b_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}(3\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}-5)+\dfrac{1+(-1)^n}{2}(3\cdot 2^{\frac{n}{2}}-5)(n\in \mathbf{N}^*)$.

例 10 在数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=2$，且$\begin{cases}a_{n+1}=3a_n-2b_n\cdots①\\b_{n+1}=2a_n-b_n\cdots②\end{cases}$$(n\in\mathbf{N}^*)$，求$a_n$和$b_n$，并分别求它们的前$n$项和.

解：由①、②两式得

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-2b_{n+1}=3a_{n+1}-2(2a_n-b_n)$$
$$=3a_{n+1}-4a_n+2b_n=3a_{n+1}-4a_n+(3a_n-a_{n+1}).$$

所以$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)\cdots③$

同理可得$b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n(n\in\mathbf{N}^*)\cdots④$

③、④两式的特征方程均为$x^2=2x-1$，解之得$x_1=x_2=1$.

故可令$a_n=(A+Bn)x_1^{n-1}=A+Bn\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=(A'+B'n)x_1^{n-1}=A'+B'n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

因为$a_1=1$，$b_1=2$，所以$a_2=3a_1-2b_1=-1$，$b_2=2a_1-b_1=0$.

故由$\begin{cases}A+B=1\\A+2B=-1\end{cases}$得$A=3$，$B=-2$；由$\begin{cases}A'+B'=2\\A'+2B'=0\end{cases}$得$A'=4$，$B'=-2$.

所以$a_n=3-2n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=4-2n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

易求得$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前n项和分别为

$$S_n=3n-2(1+2+\cdots+n)=3n-2(n+1)=2n-n^2(n\in\mathbf{N}^*),$$
$$S_n'=4n-2(1+2+\cdots+n)=4n-n(n+1)=3n-n^2(n\in\mathbf{N}^*).$$

思考交流

下面再介绍几种特殊递推数列：

1. 若数列$\{x_n\}$满足递推关系式$x_{n+1}=f(n)x_n+g(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，且$x_1=a$(常数)，则可以采取添辅助数列，结合累差法求它的通项公式.

添辅助数列$\{h(n)\}$，使$f(n)=\dfrac{h(n)}{h(n+1)}$，代入$x_{n+1}=f(n)x_n+g(n)$得，

$x_{n+1}=\dfrac{h(n)}{h(n+1)}x_n+g(n)$，所以 $h(n+1)x_{n+1}=h(n)x_n+g(n)h(n+1)$，

令 $b_n=h(n)x_n$，则$b_{n+1}=b_n+h(n+1)g(n)$，所以

$b_n=b_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[h(k+1)g(k)]$，所以

$$x_n=\frac{1}{h(n)}\Big[h(1)x_1+\sum_{k=1}^{n-1}h(k+1)g(k)\Big],$$

其中 $h(n)=\dfrac{1}{f(n-1)}h(n-1)=\cdots=\dfrac{1}{f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)}h(1)$.

思考题 1 设 $x_1=4$,且 $x_n=\dfrac{5n+2}{5n-3}x_{n-1}+7(5n+2)(n=2,3,\cdots)$,求通项 x_n.

解:由已知变形得 $\dfrac{x_n}{5n+2}=\dfrac{x_{n-1}}{5n-3}x_{n-1}+7$,则数列 $\{\dfrac{x_n}{5n+2}\}$ 是以 $\dfrac{x_1}{5n+2}=\dfrac{4}{7}$ 为首项,7 为公差的等差数列,所以 $\dfrac{x_n}{5n+2}=\dfrac{4}{7}+7(n-1)$,即

$$x_n=\frac{1}{7}(49n-45)(5n+2).$$

2. 若数列 $\{x_n\}$ 满足递推式 $x_{n+1}=px_n+qx_{n-1}+f(n)(n=2,3,\cdots)$,且 $x_1=a$,$x_2=b$(a,b 为常数);则可变形为 $x_{n+1}-\alpha x_n=\beta(x_n-\alpha x_{n-1})+f(n)$,或

$x_{n+1}-\beta x_n=\alpha(x_n-\beta x_{n-1})+f(n)$,

令 $a_n=x_{n+1}-\alpha x_n$ (或 $x_{n+1}-\beta x_n=a_n$),则

$a_n=\beta a_{n-1}+f(n)$(或 $a_n=\alpha a_{n-1}+f(n)$),

其中 α,β 为方程 $x^2-px+q=0$ 两根,当 $\alpha=\beta$ 时,又要对 $f(n)$ 分类,即对 $f(n)$ 又可以分 $f(n)=m\alpha^n$ 和 $f(n)\neq m\alpha^n$ 两种情况讨论.

思考题 2 已知 $x_1=1$,$x_2=6$,且 $x_{n+1}=6x_n-9x_{n-1}+3^n(n=2,3,\cdots)$,求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解:由所给递推式得 $x_{n+1}-3x_n=3(x_n-3x_{n-1})+3^n$,两边同除 3^n,得

$\dfrac{x_{n+1}-3x_n}{3^n}=\dfrac{x_n-3x_{n-1}}{3^{n-1}}+1$,所以数列 $\left\{\dfrac{x_{n+1}-3x_n}{3^n}\right\}$ 是首项为 1、公差为 1 的等差数列,所以 $\dfrac{x_{n+1}-3x_n}{3^n}=1+(n-1)=n$,即

$$\frac{x_n}{3^{n-1}}=\frac{x_1}{3^0}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{x_{k+1}}{3^k}-\frac{x_k}{3^{k-1}}\right)=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{n(n-1)}{2},x_n=\frac{3^{n-1}}{2}(n^2-n+2).$$

3. 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=ax_n^2+bx_n+c(b^2-4ac=2b)$,且 $x_1=d$(a,b,c,d 为常数,$a\neq 0$),则 $x_{n+1}=a(x_n+\dfrac{b}{2a})^2$.

思考题 3 已知 $x_1=1$,且 $x_{n+1}=3x_n^2+12x_n+10$,求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解:由已知得 $x_{n+1}=3(x_n+2)^2-2$,即 $x_{n+1}+2=3(x_n+2)^2$,

所以 $x_n+2=3(x_{n-1}+2)^2=3[3(x_{n-2}+2)^2]^2$

$=\cdots=3^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}}(x_1+2)2^{n-2}$

$=3^{2^n-1}$,

即 $x_n=3^{2^n-1}-2$.

能力训练

一、选择题（每小题 6 分，共 6 道题，满分 36 分）

1.（1994 年全国高中联赛题）已知数列$\{a_n\}$满足 $3a_{n+1}+a_n=4$ $(n\geqslant 1)$，且 $a_1=9$，前 n 项的和为 S_n，则满足不等式 $|S_n-n-6|<\dfrac{1}{125}$ 的最小整数 n 是（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

2.（1997 年全国高中联赛题）已知数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，$x_1=a$，$x_2=b$，记 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则下列结论正确的是（　　）

A. $x_{100}=-a$，$S_{100}=2b-a$　　B. $x_{100}=-b$，$S_{100}=2b-a$

C. $x_{100}=-b$，$S_{100}=b-a$　　D. $x_{100}=-a$，$S_{100}=b-a$

3. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=\dfrac{1}{3}$，且 $x_{k+1}=x_k+x_k^2(k\in \mathbf{N}^*)$，则 $\left[\sum\limits_{i=1}^{2006}\dfrac{1}{x_i+1}\right]$（其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数）为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4.（第 14 届希望杯·高一数学试题）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_2=5$，且 n 为大于 2 的正整数，总有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，则 a_{2003} 等于（　　）

A. -5　　B. -2　　C. 2　　D. 3

5.（第 10 届希望杯·高二数学试题）已知 $n\in \mathbf{N}^*$，常数 p，q 均大于 1，且都不等于 2，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p^{n+1}-q^n}{p^{n+2}-2q^{n+1}}$ 等于（　　）

A. $\dfrac{1}{p}$ 或 $\dfrac{1}{2q}$　　B. $-\dfrac{1}{p}$ 或 $-\dfrac{1}{2q}$

C. $\dfrac{1}{p}$ 或 $\dfrac{1}{2q}$ 或 $\dfrac{p-1}{p^2-2p}$　　D. $-\dfrac{1}{p}$ 或 $-\dfrac{1}{2q}$ 或 $\dfrac{1-p}{p^2-2p}$

6.（第 10 届希望杯·高一数学试题）已知当 n 是自然数时，$f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$，则 $f(n+1)-f(n)$ 等于（　　）

A. $\dfrac{1}{2n+2}$　　B. $\dfrac{1}{2n+3}$　　C. $\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+3}$　　D. $\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+2}$

二、填空题（每小题 9 分，共 6 道题，满分 54 分）

7.（2004 年全国高中数学联赛）已知数列 a_0，a_1，a_2，…，a_n，… 满足关系式（3 —

$a_{n+1})(6+a_n)=18$，且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}$ 的值是________.

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n$，则 $a_n=$________.

9. 两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_1=2$，$b_1=1$，$\begin{cases}a_{n+1}=5a_n+3b_n+7\\ b_{n+1}=3a_n+5b_n\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$，则它们的通项公式分别为 $a_n=$________、$b_n=$________.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2004}=$________.

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=19$，$a_2=98$，$a_{n+2}=a_n-\dfrac{2}{a_{n+1}}$，则当 $a_m=0$ 时，m 为________.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，且 $a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2004}=$________.

三、解答题（每题 20 分，共 3 道题，满分 60 分）

13.（**2000 年全国高中联赛题**）设数列 $\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证：$a_n(n\in\mathbf{N})$ 是完全平方数.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=0$，且 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n+8\ (n\in\mathbf{N}^*)$，求 a_n 及 S_n.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1（常数），且 $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta_2n^2+\beta_1n+\beta_0(n\in\mathbf{N}^*)\cdots$①，其中 $\alpha\neq 1$，$\alpha\beta_2\neq 0$，求 a_n 及 S_n.

第三讲　递归数列(二)

知识扫描

形如 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 的递归式，其通项求法为 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)(n\geqslant 2)$.

形如 $a_{n+1}=pa_n^q(p>0,a_n>0)$ 的递推式，两边取对数有 $\lg a_{n+1}=q\lg a_n+\lg p$，令 $b_n=\lg a_n$，则 $b_{n+1}=qb_n+\lg p$，从而可求得 a_n.

如果递归数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d}$，其中 $c\neq 0,ad-bc\neq 0$ 以及初始值 $a_1\neq f(a_1)$，则称此数列为分式线性递归数列. 我们称方程 $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的根为该数列的不动点.

定理 1　如果特征方程 $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ 有两个不等的根 α,β，则 $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$ 可以变形为 $\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_{n+1}-\beta}=k\cdot\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}$，其中 k 是由根 α,β 和系数 c,d 确定.

定理 2　如果特征方程 $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ 有两个等根 α，则 $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$ 可变形为 $\frac{1}{x_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{x_n-\alpha}+k$，其中常数 k 是由 c,d 及 α 的值确定.

对于这一类型的分式递推数列，可以适当代换，转化为二阶线性递推数列：

由 $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}(c\neq 0)$，得 $x_{n+1}-\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx_n+d}$，

令 $a_{n+1}=x_{n+1}-\frac{a}{c}$，则 $a_{n+1}=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{ca_n+d+a}$，

再令 $a_n=\frac{b_{n-1}}{b_n}$，则 $b_{n+1}=\frac{c(a+d)}{bc-ad}b_n+\frac{c^2}{bc-ad}b_{n-1}$.

$\{b_n\}$ 是一个二阶线性递推数列.

另外，数列的通项求法还可利用以下方法：

1. 构造法：通过构造特殊的数列（一般为等差数列或等比数列），利用特殊数列的通项求递推数列的通项；

2. 迭代法：将递推式适当变形后，用下标较小的项代替某些下标较大的项，在一般项和初始项之间建立某种联系，从而求出通项；

3. 代换法：包括代数代换、三角形代换等；

4. 待定系数法：先设定通项的基本形式，再根据题设条件求出待定的系数.

例题分析

例 1 （2005 年希望杯培训题）已知 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n+3}{2a_n-4}(n\geqslant 1, n\in\mathbf{N}^*)$，求 a_n 的通项公式.

分析：本题是 $a_{n+1}=\frac{\alpha_1 a_n+\beta_1}{\alpha_2 a_n+\beta_2}$ 型的递推数列问题，可以运用不动点法求解.

解：由方程 $x=\frac{x+3}{2x-4}$ 解得 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=3$.

故 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{2(a_n+\frac{1}{2})}{2a_n-4}\cdots$①

$a_{n+1}-3=\frac{-5(a_n-3)}{2a_n-4}\cdots$②

①÷②得

$$\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_{n+1}-3}=-\frac{2}{5}\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}=(-\frac{2}{5})^n(\frac{a_1+\frac{1}{2}}{a_1-3}).$$

所以 $a_n=\frac{(-5)^n+3\cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}-2\cdot(-5)^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

评析 这是一题典型的不动点法求数列通项公式的题目，其一般解题方法为：

1) 由特征方程求出不动点 x_1，x_2；

2) 列出数列 $b_n=a_n-x_1$，$c_n=a_n-x_2$；

3) 由$\frac{b_n}{c_n}$得出关系，从而解出 a_n.

例 2　已知 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n^4+6x_n^2+3}(n\geqslant 1, n\in \mathbf{N}^*)$，求 x_n.

解：$\{x_n\}$ 的递推关系可化为 $x_{n+1}^2=2x_n^4+6x_n^2+3$.

令 $y_n=x_n^2$，则 $y_1=1$，$y_n=2y_n^2+6y_n+3=f(x_n)$，其中 $f(x)=2x^2+6x+3$.

解方程 $f(x)=x$，即 $2x^2+5x+3=0$，得 $f(x)$ 的两个不动点 $\alpha=-\frac{3}{2}$，$\beta=-1$.

所以 $y_{n+1}-(-\frac{3}{2})=2y_n^2+6y_n+\frac{9}{2}=2[y_n-(-\frac{3}{2})]^2$.

则 $y_n+\frac{3}{2}=2(y_{n-1}+\frac{3}{2})^2=2\cdot[2(y_{n-2}+\frac{3}{2})^2]^2=2^{1+2}(y_{n-2}+\frac{3}{2})2^2$

$$=\cdots=2^{1+2+\cdots+2^{n-2}}(y_1+\frac{3}{2})2^{n-1}=2^{2^{n-1}-1}(y_1+\frac{3}{2})^{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot 5^{2^{n-1}}.$$

又由数学归纳法易证 $x_n>0$，所以 $x_n=\sqrt{y_n}=\sqrt{\frac{1}{2}(5^{2^{n-1}}-3)}(n\in \mathbf{N}^*)$.

评析　一般可以证明，如果 $\alpha=-\frac{b}{2a}$ 恰好是 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的一个不动点，那么递推关系 $x_{n+1}=a\,x_n^2+bx_n+c$ 可化为 $x_{n+1}-\alpha=a(x_n-\alpha)^2$.

例 3　正数数列中，$a_1=10$，$a_{k+1}=10\sqrt{a_k}$，求 a_n 的通项公式.

分析：对于形如 $a_{n+1}=\alpha a_n^p a_{n-1}^q$ 的递推数列通项问题，可通过两边取对数，化为二阶递推数列的通项数列问题来求解.

解：易知对于任意正整数 k，$a_k>0$，递推式两边取对数得 $\lg a_{k+1}=1+\frac{1}{2}\lg a_k$.

设 $\lg a_k=b_k$，则 $b_{k+1}=\frac{1}{2}b_k+1$，且 $b_1=1$，$b_2=\frac{3}{2}$.

我们可设 $b_k=A\cdot(\frac{1}{2})^k+B$，则$\begin{cases} b_1=\frac{A}{2}+B \\ b_2=\frac{A}{4}+B \end{cases}$，进而求得$\begin{cases} A=-2 \\ B=2 \end{cases}$.

所以 $b_k=-(\frac{1}{2})^{k-1}+2$.

又因为 $\lg a_k=b_k$，所以 $a_k=10^{-(\frac{1}{2})^{k-1}+2}(k\in \mathbf{N})$.

例 4　(2003 年第 2 届女子数学奥林匹克) 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n=1, 2, 3, \cdots)$. 求证：$1-\frac{1}{2003^{2003}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$.

证明：由 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ 得 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$.

从而$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n}$.

故$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2003}}$

$=(\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_2-1})+(\dfrac{1}{a_2-1}-\dfrac{1}{a_3-1})+\cdots+(\dfrac{1}{a_{2003}-1}-\dfrac{1}{a_{2004}-1})$

$=\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_{2004}-1}=1-\dfrac{1}{a_{2004}-1}$.

可证数列$\{a_n\}$是严格递增的,故$a_{2004}>1$.

从而$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2003}}<1$.

为了证明左边不等式,只须证明$a_{2004}-1>2003^{2003}$.

由已知用归纳法可得$a_{n+1}=a_na_{n-1}\cdots a_1+1$及$a_na_{n-1}\cdots a_1>n^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

从而易得结论成立.

评析 本题的关键为取倒数,接着又利用数学归纳法得出此数列的性质,最终得出结论.

例5 在数列$\{x_n\}$中,$x_1=3$,$x_2=2$,$x_n=\dfrac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N})$,求数列$\{x_n\}$的通项公式.

解:原递归式取倒数得$\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{2}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_{n-2}}(n\geqslant3)$.

即$\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_{n-2}}=\cdots=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

所以$\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{1}{6}(n\geqslant2)$.

于是$\dfrac{1}{x_n}=(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}})+(\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_{n-2}})+\cdots+(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1})+\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{6}\cdot(n-1)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{n-1}{6}=\dfrac{n+1}{6}$.

从而$x_n=\dfrac{6}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

评析 本题运用了逐差法和倒数法,特别是倒数法的运用,将看起来无从入手的式子简化.在解决$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\alpha a_n+\beta}$或$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}}{\alpha a_n+\beta a_{n-1}}$等问题时,倒数法经常可以起到化繁为简的作用.

例6 (2006年希望杯培训题)已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2^{x-1}}$,数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=6-$

$2a_n + f(n-1)$，试求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解：因为 $f(x) = \frac{1}{2^{x-1}}$，所以 $f(n) = \frac{1}{2^{n-1}}$，$f(n-1) = \frac{1}{2^{n-2}}$.

又 $S_n = 6 - 2a_n + f(n-1) = 6 - 2a_n + \frac{1}{2^{n-2}}$.

所以 $a_1 = 6 - 2a_1 + \frac{1}{2^{-1}} = 8 - 2a_1$，解得 $a_1 = \frac{8}{3}$.

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = (6 - 2a_n + \frac{1}{2^{n-2}}) - (6 - 2a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-3}}) = -2a_n + 2a_{n-1} + \frac{4}{2^n} - \frac{8}{2^n}$.

故 $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2^{n-1}}$，即 $a_n - 4 \times \frac{1}{2^n} = \frac{2}{3}(a_{n-1} - 4 \times \frac{1}{2^{n-1}})$.

因此，数列 $\{a_n - 4 \times \frac{1}{2^n}\}$ 是首项为 $(a_1 - 4 \times \frac{1}{2})$、公比为$\frac{2}{3}$ 的等比数列.

所以，$a_n - 4 \times \frac{1}{2^n} = (a_1 - 4 \times \frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$，即 $a_n = (\frac{2}{3})^n + \frac{4}{2^n} (n \geqslant 2)$ (*)

又当 $n = 1$ 时，$a_1 = \frac{8}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{2}$，即当 $n = 1$ 时，a_1 也满足(*).

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (\frac{2}{3})^n + \frac{4}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

评析　在求数列通项时，应注意验证 a_1 是否符合所求出的通项式.

例 7　(1993 年全国高中联赛题) 正数列$\{a_n\}$满足 $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1}$，又 $a_0 = a_1 = 1$，求 a_n 的通项公式.

分析：如何去掉根号是本题的关键，通过尝试不难发觉，两边同除以 $\sqrt{a_{n-1} a_{n-2}}$，再使用换元法即可化为线性递推数列问题来求解.

解：显然 $\sqrt{a_{n-1} a_{n-2}}$ 非零，原式两边同除以 $\sqrt{a_{n-1} a_{n-2}}$ 得$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}} - 1 = 2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$.

令 $b_n = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}} (n \geqslant 1)$，则 $b_1 = 1$，且 $b_n = 2b_{n-1} + 1 \ (n \geqslant 3)$.

设 $b_n = A \cdot 2^n + B$…①

由 b_1，b_2 的值解得$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$.

故 $b_n = 2^n - 1$，从而$\frac{a_n}{a_{n-1}} = b_n^2 = (2^n - 1)^2$.

所以，$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 = \prod_{i=1}^{n}(2^n - 1)^2 (n \in \mathbf{N})$.

评析 ① 处的化简是对 $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta$ 的形式都适用．这是因为 $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta$，而 $x_{n-1} = \alpha x_{n-2} + \beta$，两式相减得 $x_n - (\alpha+1)\alpha_{n-1} + \alpha x_{n-2} = 0$．由特征根法知 $x^2 - (\alpha+1)x + \alpha = 0$ 的两根为 $x_1 = \alpha$，$x_2 = 1$．故可设 $x_n = A \cdot (\alpha)^n + B$.

另外，求解 $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta$ 形式的数列时还可化简后用换元法变成等比数列求解.

例 8 （2005年高中联赛辽宁省预赛）已知 $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}(n \geqslant 3)$；$b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_n = \frac{b_{n-1}^2 + 2}{b_{n-2}}(n \geqslant 3)$；$c_1 = 1$，$c_{n+1} = 2c_n + \sqrt{3c_n^2 - 2}(n \geqslant 3)$．求证：对一切正整数 n，有 $a_n = b_n = c_n$.

证明：由 $b_n = \frac{b_{n-1}^2 + 2}{b_{n-2}}(n \geqslant 3)$ 得

$b_n b_{n-2} = b_{n-1}^2 + 2 \cdots$①

则 $b_{n+1} b_{n-1} = b_n^2 + 2 \cdots$②

② － ① 得

$b_{n+1} b_{n-1} - b_n b_{n-2} = b_n^2 - b_{n-1}^2$.

所以 $\frac{b_{n+1} + b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_n + b_{n-2}}{b_{n-1}}$.

于是 $\frac{b_n + b_{n-2}}{b_{n-1}} = \frac{b_{n-1} + b_{n-3}}{b_{n-2}} = \cdots = \frac{b_3 + b_1}{b_2} = 4$.

即 $b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2}(n \geqslant 3)$.

从而易得 $a_n = b_n (n \geqslant 3)$.

由 $c_{n+1} = 2c_n + \sqrt{3c_n^2 - 2}(n \geqslant 3)$ 得

$(c_{n+1} - 2c_n)^2 = 3c_n^2 - 2$.

即 $c_{n+1}^2 - 4c_{n+1}c_n + c_n^2 + 2 = 0 \cdots$③

则 $c_n^2 - 4c_n c_{n-1} + c_{n-1}^2 + 2 = 0 \cdots$④

③ － ④，并因式分解得

$(c_{n+1} - c_{n-1})(c_{n+1} - 4c_n + c_{n-1}) = 0$.

由递推公式易知 $\{c_n\}$ 递增，因此 $c_{n+1} > c_n$.

于是 $c_{n+1} - 4c_n + c_{n-1} = 0$ $(n \geqslant 2)$.

则 $c_n = 4c_{n-1} - c_{n-2}(n \geqslant 3)$.

又 $a_1 = c_1$，$a_2 = c_2$，所以 $a_n = c_n (n \geqslant 3)$.

综上所述，对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n = b_n = c_n$.

评析 本题初看上去比较复杂，同时出现了 3 个数列，但证明起来并不难，只要对

$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的递推关系进行变形即可.

例 9 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = \frac{21}{16}$,以

$$2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}, n \geqslant 2. \quad ①$$

设 m 为正整数, $m \geqslant 2$. 证明:当 $n \leqslant m$ 时,有

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}. \quad ②$$

证明:由 ① 式得 $\quad 2^n a_n = 3 \cdot 2^{n-1} a_{n-1} + \frac{3}{4}$,

记 $b_n = 2^n a_n, n = 1,2,\cdots$

$$b_n = 3b_{n-1} + \frac{3}{4}, b_n + \frac{3}{8} = 3\left(b_{n-1} + \frac{3}{8}\right),$$

由于 $b_1 = 2a_1 = \frac{21}{8}$,所以 $b_n + \frac{3}{8} = 3^{n-1}\left(b_1 + \frac{3}{8}\right) = 3^n$,

故得 $\quad a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2^{n+3}}$.

因此,为证明 ②,只需证明 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}$,

即只需证 $\quad \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m - 1. \quad ③$

首先估计 $1 - \frac{n}{m+1}$ 的上界. 由贝努里不等式,有 $1 - \frac{n}{m+1} < \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^n$,

所以 $\quad \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m < \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{mn} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{mn} = \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}\right]^n$.

(注:也可以根据平均不等式导出:

$$\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m = \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{mn-m\text{个}1} < \left[\frac{m\left(1 - \frac{n}{m+1}\right) + mn - m}{mn}\right]^{mn}$$
$$= \left(\frac{m}{m+1}\right)^{mn}).$$

由于 $m \geqslant 2$,根据二项式定理,可得 $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geqslant 1 + C_m^1 \cdot \frac{1}{m} + C_m^2 \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2m} \geqslant \frac{9}{4}$,

所以 $\quad \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m < \left(\frac{4}{9}\right)^n$,

即 $1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$，

所以，欲证 ③，只需证 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1$，

即 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1.$ ④

记 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}=t$，则 $0<t<1$，④ 式为 $t(m-t^{m-1})<m-1$，

即 $(t-1)[m-(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1)]<0$.

此不等式显然成立，从而原不等式成立.

思考交流

若数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1}=\frac{x_n^2+p}{2x_n+q}(q^2+4p\neq 0)$，且 $x_1=a$（常数），则有如下定理：

定理 如果特征方程 $x=\frac{x^2+p}{2x+q}$ 有两个根 α、β，则 $x_{n+1}=\frac{x_n^2+p}{2x_n+q}$ 可变形为 $\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_{n+1}-\beta}=\left(\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}\right)^2$.

思考题 1 设 $x_1=3$，且 $x_n=\frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}-1}(n=2,3,\cdots)$，求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解：特征方程 $x=\frac{x^2+2}{2x-1}$，即 $x^2-x-2=0$，有两根 $\alpha=2,\beta=-1$，所以

$x_n+1=\frac{x_{n-1}^2+2x_{n-1}+1}{2x_{n-1}-1}$，$x_n-2=\frac{x_{n-1}^2-4x_{n-1}+4}{2x_{n-1}-1}$，

所以 $\frac{x_n+1}{x_n-2}=\left(\frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}-2}\right)^2=\left[\left(\frac{x_{n-2}+1}{x_{n-2}-2}\right)^2\right]^2=\cdots=\left(\frac{x_1+1}{x_1-2}\right)^{2^{n-1}}=4^{2^{n-1}}$，

故 $x_n=\frac{-1-2\times 4^{2^{n-1}}}{1-4^{2^{n-1}}}=\frac{2\times 2^{2^n}+1}{2^{2^n}-1}$.

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2+p\cdot q^n}{x_n}$，且 $x_1=a$，$x_2=b$（a，b 为常数），则我们可以通过消去 q^n 的方法，使之转化为二阶线性递推数列.

思考题 2 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2-4}{x_n}$，且 $x_1=6$，$x_2=4$，求通项 x_n.

解:由已知得 $x_{n+2}\cdot x_n=x_{n+1}^2-4$, ①

$x_{n+1}\cdot x_{n-1}=x_n^2-4$, ②

①－② 得 $x_{n+2}x_n-x_{n+1}x_{n-1}=x_{n+1}^2-x_n^2$,即

$x_n(x_{n+2}+x_n)=x_{n+1}(x_{n+1}+x_{n-1})$,即

$$\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}}=\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n+x_{n-2}}{x_{n-1}}=\cdots=\frac{x_3+x_1}{x_2}=2.$$

所以,$x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$,即

$x_{n+2}-x_{n+1}=x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}=\cdots=x_2-x_1=-2$,所以

$x_n=6-2(n-1)=8-2n$.

显然,当 $n=4$ 时,$x_n=4$,故数列递推式只满足前4项.当 $n=5$ 时,递推式分母为零,无意义,故 $x_n=8-2n(1\leqslant n\leqslant 4)$.

能力训练

一、选择题(每小题6分,共6道小题,满分为36分)

1. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=-\dfrac{1}{a_n+1}$,则 a_{2001} 等于 ( )

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 1　　D. 2

2. 数列$\{a_n\}$的前 n 项之和为 S_n,已知 $a_1=4$, $a_n=S_{n-1}+2n+1$,则 a_{2005} 等于 ( )

A. $3\times 2^{2005}-2$　　B. $6\times 2^{2005}-2$　　C. $11\times 2^{2004}-2$　　D. $11\times 2^{2003}-2$

3. (2005年河南省竞赛题)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2-(3n-1)a_n+3$,则数列$\{a_n\}$的前11项的和 $S_{11}=$ ( )

A. 198　　B. 55　　C. 204　　D. 188

4. 若数列$\{a_n\}$中,$a_n=\dfrac{100^n}{n!}$,则 ( )

A. $\{a_n\}$为递增数列　　B. $\{a_n\}$为递减数列

C. 从某项起递减　　D. 从某项起递增

5. 已知一个数列$\{a_n\}$各项是1或0,首项为1,且在第 k 个1和第 $k+1$ 个1之间有 $2k-1$ 个0,即1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,…,则第2004个是1是该数列的第几项 ( )

A. 45　　B. 1981　　C. 4012009　　D. 4014013

6. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_n=3^{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，则$a_{1990}$的末位数字是 （　　）

A. 3　　B. 9　　C. 7　　D. 1

二、填空题（每小题9分，共6道小题，满分为54分）

7.（1976年南斯拉夫数学奥林匹克）设$a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$\sum\limits_{k=1}^{99}a_k=$ ________.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，且$(\sqrt{5}-1)a_n^2a_{n-2}=2a_{n-1}^3$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$ ________.

9. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=\dfrac{2005a_n}{2003a_n+2005}$，$a_1=1$，则$a_{2006}=$ ________.

10. 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=2$，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}(n\geqslant 1)$，则$a_n=$ ________.

11. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}=\dfrac{(n^2+n)a_n}{3a_n+n^2+n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则其通项公式$a_n=$ ________.

12. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=10$，且$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$，则其通项公式$a_n=$ ________.

三、解答题（每小题20分，共3道题，满分为60分）

13. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}}{\sqrt{a_n^2+a_{n-1}^2+1}}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

14. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+4}{2a_n+3}$，求其通项公式$a_n$.

15.（1993年中国国家集训队测验题）设$a_1=a_2=\dfrac{1}{3}$，且当$n=3,4,5,\cdots$时，$a_n=\dfrac{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}{2a_{n-1}^2-4a_{n-2}a_{n-1}^2+a_{n-2}}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

第四讲　递推数列的应用

知识扫描

递推数列在实际生活、不等式证明、几何图形等方面有着广泛的应用，递推数列的应用，就是一个数学建模过程，即从实际问题寻找递推关系.

非斐拿契数列就有着深刻的应用背景.

已知数列$\{F_n\}$，$F_0=F_1=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n\geqslant 2$，则通项F_n为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

该数列在数论中有着广泛的应用.

例题分析

例 1　已知一抛物线$y=x^2$，过原点O引斜率为1的直线交抛物线于点P_1，过点P_1引斜率为$\frac{1}{2}$的直线交抛物线于点P_2，再过点P_2引斜率为$\frac{1}{4}$的直线交抛物线于点P_3，…，过点P_n引斜率为$\frac{1}{2^n}$的直线交抛物线于点P_{n+1}，…. 设点P_n的坐标为(x_n,y_n)，试求x_{2n+1}，并求出点P_1、P_3、P_5、… 趋近于哪一点.

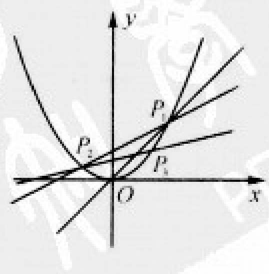


图 4-1

解：如图 4-1，直线$P_{2n}P_{2n+1}$的斜率为

$$\frac{x_{2n+1}^2-x_{2n}^2}{x_{2n+1}-x_{2n}}=x_{2n+1}+x_{2n},$$

所以 $x_{2n+1}+x_{2n}=\frac{1}{2^{2n}}$.

同理,得

$x_{2n}+x_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-1}}$,即 $-x_{2n}-x_{2n-1}=-\frac{1}{2^{n-1}}$.

显然 $x_1=1$.

令 $n=1,2,3,\cdots$,得

$-x_2-x_1=-\frac{1}{2}$,

$x_3+x_2=\frac{1}{2^2}$,

……

$x_{2n-1}+x_{2(n-1)}=\frac{1}{2^{2(n-1)}}$,

$-x_{2n}-x_{2n-1}=-\frac{1}{2^{2n-1}}$,

$x_{2n+1}+x_{2n}=\frac{1}{2^{2n}}$.

把以上各式相加,得

$$\begin{aligned}左边&=x_1-x_2-x_1+x_3+x_2-\cdots+x_{2n-1}+x_{2n-2}-x_{2n}-x_{2n-1}+x_{2n+1}+x_{2n}\\&=x_{2n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右边&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n}}\\&=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\cdots-\frac{1}{2^{2n-2}}+\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}\right)\\&=1-\frac{\frac{1}{2}\left[1-(-\frac{1}{2})^{2n}\right]}{1-(-\frac{1}{2})}=1-\frac{1}{3}\left[1-(\frac{1}{2})^{2n}\right]\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times4^{-n}=\frac{1}{3}(2+4^{-n}),\end{aligned}$$

所以 $x_{2n+1}=\frac{1}{3}(2+4^{-n})$.

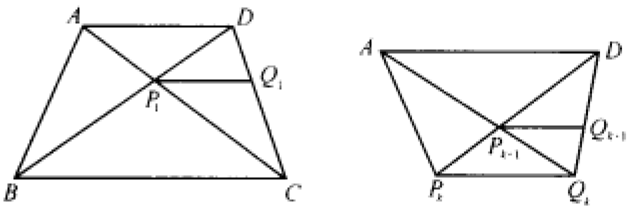
$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(2+4^{-n})=\frac{2}{3}$.

因此点 P_1、P_3、P_5、… 无限趋近于点$\left(\frac{2}{3},\frac{4}{9}\right)$.

例 2　设 $ABCD$ 是梯形，$AD \parallel BC$，$AD = a$，$BC = b$，对角线 AC 和 BD 交于 P_1，经过 P_1 作 $P_1Q_1 \parallel AD$ 交 CD 于 Q_1，连 AQ_1，交 BD 于 P_2，过 P_2 作 $P_2Q_2 \parallel AD$ 交 CD 于 Q_2，连 AQ_2 交 BD 于 P_3，…，如果继续下去，设 P_nQ_n 的长为 x_n.

(1) 用 a、b、n 表示 x_n；(2) 证明 $x_n \leqslant \dfrac{a+nb}{4n}$.

解：(1) 如图 4-2 甲，因为 $AD = a$，$BC = b$，依题意得



甲　　　　乙

图 4-2

$$P_1Q_1 = x_1 = \frac{ab}{a+b},$$

取出梯形 AP_kQ_kD，如图乙可得

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{DQ_{k+1}}{DQ_k}.$$

又　$$\frac{x_{k+1}}{AD} + \frac{DQ_{k+1}}{DQ_k} = 1,$$

所以　$$\frac{x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_{k+1}}{AD} = 1,$$

即　$$\frac{x_{k+1}}{x_k} + \frac{x_{k+1}}{a} = 1, \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = \frac{1}{a},$$

所以数列 $\left\{\dfrac{1}{x_k}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a}$ 为公差的等差数列，所以

$$\frac{1}{x_n} = \frac{a+b}{ab} + \frac{n-1}{a} = \frac{a+nb}{ab},$$

故　$$x_n = \frac{ab}{a+nb}.$$

$$(2)\ x_n = \frac{ab}{a+nb} = \frac{a \cdot nb}{n(a+nb)} \leqslant \frac{\left(\dfrac{a+nb}{2}\right)^2}{n(a+nb)} = \frac{a+nb}{4n},$$

所以　$$x_n \leqslant \frac{a+nb}{4n}.$$

例 3　一容器内盛水 10 千克，第一次倒出 $\dfrac{1}{3}$，然后注入 1 千克纯酒精；第二次再倒出 $\dfrac{1}{3}$，然后注入 $\dfrac{1}{2}$ 千克纯酒精；以后逐次倒掉 $\dfrac{1}{3}$，然后注入纯酒精的量为上次注入量的一半. 问：第 n 次操作后，容器内酒精溶液的浓度是多少？

解：设第 n 次操作后容器内盛的水为 x_n 千克，盛的纯酒精为 a_n 千克，显然有

$$x_1 = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3},$$

$$x_n=\frac{2}{3}x_{n-1},$$

所以 $$x_n=\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$ ①

因为 $a_1=1$,

依题意有 $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\geqslant 2)$.

令 $$a_n+m\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left[a_{n-1}+m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],$$

所以 $$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{m}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$ ②

比较①、②式系数得 $\frac{m}{6}=1,m=6$,

即 $$a_n+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left[a_{n-1}+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],$$

所以 $$a_n=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

于是第 n 次操作后容器内酒精浓度为

$$\frac{a_n}{x_n+a_n}=\frac{12-9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{32-9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}},$$

答:第 n 次操作后容器内酒精浓度为 $\frac{12-9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{32-9\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$.

例 4 凸 n 边形的各边依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,将每边涂上红、黄、蓝三种颜色之一,要使相邻两边不同色,共有几种不同的涂色方法?

解:设共有 s_n 种涂色方法,显然 $s_3=6$,a_1 有三种涂法,a_1 涂色后,再涂 a_2,依题意有 2 种涂法,a_3 也有 2 种涂法,如此顺次涂色,将 n 边全部涂色的方法有 $3\times 2^{n-1}$ 种,但这种涂法只能保证 a_i 与 $a_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 不同色,而 a_1 与 a_n 则有可能同色.若 a_n 与 a_1 同色,再把 a_n 与 a_1 视为同一边,其涂法总数恰好为 s_{n-1},即得到递推关系式

$$s_n+s_{n-1}=3\cdot 2^{n-1}\quad(n\geqslant 3),$$ ①

用待定系数法,令 $s_n-p\cdot 2^n=-(s_{n-1}-p\cdot 2^{n-1})$,

与①比较系数得 $p=1$,所以数列 $\{s_n-2^n\}$ 是第 3 项为

$$s_3-2^3=6-8=-2,$$

公比为 -1 的等比数列,从而 $s_n=2^n+2(-1)^{n-2}(n\geqslant 3)$.

故合题意的涂法有 $2^n + 2\cdot(-1)^{n-2}$ 种.

例5 一凸 n 边形($n \geqslant 4$),它的任何三条对角线不交于一点,求所有对角线交点的总数.

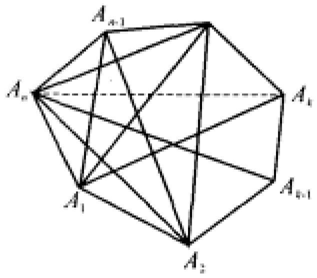


图 4-3

解:设 a_n 为凸 n 边形的对角线交点总数,先确定初始值,易知 $a_4 = 1$.

当 $n \geqslant 5$ 时,凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 的所有对角线交点可分两部分:一部分凸 $n-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 所有对角线交点,其数为 a_{n-1};另一部分是从 A_n 引出的诸对角线和其他对角线的交点,它的计数可依图,作对角线 $A_nA_k(k = 2,3,\cdots,n-2)$,在 A_nA_k 的一侧有顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_{k-1}$,在另一侧有 $n-k-1$ 个顶点 $A_{k+1},A_{k+2},\cdots,A_{n-1}$,在每侧各取一点所联成的对角线必与 A_nA_k 交成一点,因此 A_nA_k 与其他对角线的交点数为 $(k-1)(n-k-1)$,遍取 $k = 2,3,\cdots,n-2$,得第二部分交点总数为

$$1\cdot(n-3)+2\cdot(n-4)+\cdots+(n-4)\cdot 2+(n-3)\cdot 1$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}=C_{n-1}^3,$$

所以得递推关系式 $\quad a_n = a_{n-1} + C_{n-1}^3 \quad (n = 5,6,\cdots)$,

所以 $\quad a_n = a_4 + \sum_{k=5}^{n} C_{k-1}^3 = 1 + C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_{n-1}^3 = C_n^4.$

故所求对角线交点的总数为 C_n^4.

例6 某次运动会相继开了 $n(n>1)$ 天,共发出奖章 m 枚.第一天发出奖章一枚又余下的 $m-1$ 枚的 $\frac{1}{7}$,第二天发出两枚又余下的 $\frac{1}{7}$,依次类推,最后在第 n 天发出 n 枚而没有剩下奖章.问:这次运动会共开了几天?共发了几枚奖章?

解法1:设 u_k 是 k 天未发奖章前所剩下的奖章数,则在第 k 天发的奖章数为 $k+\frac{1}{7}(u_k-k)$,

于是 $\quad u_{k+1} = u_k - \left(k + \frac{1}{7}(u_k - k)\right) = \frac{6}{7}(u_k - k)$,

所以 $\quad u_k - \frac{7}{6}u_{k+1} = k.$

已知 $u_1 = m, u_n = n$,故有

$$m - \frac{7}{6}u_2 = 1,$$

$$u_2 - \frac{7}{6}u_3 = 2,$$

…

$$u_{n-1}-\frac{7}{6}n=n-1,$$

用$\left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}$乘上面第 k 式并相加，得

$m=1+2\left(\frac{7}{6}\right)+3\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$,

$\frac{7}{6}m=\frac{7}{6}+2\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+n\left(\frac{7}{6}\right)^n$,

以上两式相减，得

$-\frac{1}{6}m=\left(1+\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\right)-n\left(\frac{7}{6}\right)^n=6\left(\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right)-n\left(\frac{7}{6}\right)^n$,

所以 $m=36+(n-6)\frac{7^n}{6^{n-1}}$.

当 $n>1$ 时，$|n-6|<6^{n-1}$，而且 7^n 和 6^{n-1} 互素. 故 $n-6=0$. 所以

$$n=6, m=36$$

解法 2：设第 k 天发出的奖章数为 $V(k)$，则

$V(1)=1+\frac{1}{7}(m-1)$,

$V(2)=2+\frac{1}{7}(m-V(1)-2)=\frac{6}{7}(1+V(1))$,

……

$$\begin{aligned}V(k)&=k+\frac{1}{7}(m-V(k-1)-k)=\frac{6}{7}(1+V(k-1))\\&=\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}V(1)+\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}+\left(\frac{6}{7}\right)^{k-2}+\cdots+\frac{6}{7},\end{aligned}$$

$V(n)=\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}V(1)+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{6}{7}$,

将上面 n 个等式相加，得

$$\begin{aligned}m=\sum_{k=1}^{n}V(k)&=\left(\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right)V(1)+\left(\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right)+\\&\quad\left(\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}\right)+\cdots+\left(\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2\right)+\frac{6}{7}\\&=(6+m)\left(1-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right)+6\left(1-\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right)+\cdots+6\left(1-\frac{6}{7}\right)\\&=6n-6\left(\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{6}{7}\right)^n\right)+m-m\left(\frac{6}{7}\right)^n\end{aligned}$$

$$= 6n - 6^2\left(1-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right) + m - m\left(\frac{6}{7}\right)^n.$$

经整理，得 $$m = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 36, \quad ①$$

对于 $n > 1$，显然有 $|n-6| < 6^{n-1}, (7^n, 6^{n-1}) = 1$， ②

由 ① 和 ② 式，再根据 m 和 n 是正整数，就得到 $n = 6$，从而得 $m = 36$.

因此，运动会共开了 6 天，共发出 36 枚奖章，在第 6 天中每天都正好发出 6 枚奖章.

例 7 设 $\angle A$ 和 $\angle E$ 为一个正八边形中相对的两个顶角. 一只青蛙从顶点 A 开始跳. 在八边形除 E 外的其他顶点，该青蛙可能跳向相邻两个顶点中的任何一个. 当青蛙到达点 E 后就停下来. 若青蛙跳到点 E 共跳了 n 次，用 a_n 表示这 n 次跳动可能采取的路径的数目. 证明 $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), n = 1,2,3,\cdots$，

其中 $x = 2+\sqrt{2}, y = 2-\sqrt{2}$.

解： 青蛙不能在跳 4 次之内到达点 E，故 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$；它能按两条路径跳 4 次跳到点 E. 故 $a_4 = 2$.

从点 A 作奇数次跳，青蛙可能到达点 B, D, F, H，但不可能到达点 E，如图 4-4 所示，故 $a_{2n-1} = 0$（对于所有的 n）.

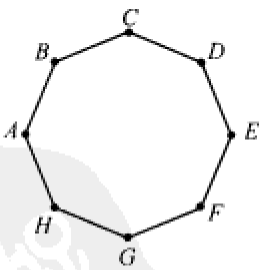


图 4-4

现在，用 b_n 表示从点 C 开始以 n 次跳最后跳到点 E 的各不同路径的数目（这与从点 G 开始一样）. 从点 C 跳 2 次到点 E 只有一种路径，故 $b_2 = 1$.

青蛙从点 A 起跳跳 2 次之后，它可能在点 C, G 或返回到点 A. 它可以有两种路径返回 A，即 $A \to B \to A$ 或 $A \to H \to A$. 故从 A 到 E 跳 n 次的路径数 a_n 等于从点 C, G 跳 $n-2$ 次到达点 E 的路径数加上从 A 到 E 跳 $n-2$ 次的路径数的 2 倍. 即

$$a_n = 2b_{n-2} + 2a_{n-2}. \quad ①$$

当青蛙从点 C 开始跳并跳了大于 2 次的次数，前 2 次跳的结果或落在点 A 或落在点 C（因为若落在点 E 它不能再跳，即只跳了 2 次）. 所以路径数 $b_n (n > 2)$ 等于从 A 起跳跳 $n-2$ 次到点 E 的路径数加上从 C 起跳跳 $n-2$ 次到点 E 的路径数的 2 倍（因为前 2 次跳可能为 $C \to D \to C$ 或 $C \to B \to C$）. 故

$$b_n = 2b_{n-2} + a_{n-2}, n > 2, \quad ②$$

① $-$ ② 得 $\quad b_n - a_n = -a_{n-2}$，

用 $n-2$ 代替 n 得 $\quad b_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4}$，

代入 ① 式得 $\quad a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4}, n > 4.$ ③

很清楚，由 $a_2 = 0, a_4 = 2$ 及 ③ 式可以惟一地确定 a_n 数列. 因此，我们只须证明题中

所给的答案

$$c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$$

满足 $c_2=0,c_4=2$(③ 式的初值) 及 ③ 式(其中 n 值已用 $2n$ 代换),即

$$c_{2n}=4c_{2n-2}-2c_{2n-4}.$$

因为 $x=2+\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}$ 为方程 $t^2-4t+2=0$ 的根,同时也是方程

$$p(t)=t^{n-1}-4t^{n-2}+2t^{n-3}=0$$

的根,因此$(\frac{1}{\sqrt{2}})(p(x)-p(y))=0$,

或 $$\frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{2}-4\frac{x^{n-2}-y^{n-2}}{2}+2\frac{x^{n-3}-y^{n-3}}{2}=0,$$

且 $$c_{2n}=4c_{2n-2}-2c_{2n-4}.$$

由于 ③ 式在给定条件下的解是惟一的,我们可将 a_{2n} 与 c_{2n} 相等同,则

$$a_{2n}=c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}).$$

在这个解中,我们使用了题中给出的公式且证明它满足我们推导出的关系式 ③. 但假如没有给出任何公式,我们自己能求出吗?回答是肯定的.

例 8 已知无穷数列$\{a_n\}$满足 $a_0=x,a_1=y,a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}},n=1,2,\cdots$,

(1) 对于怎样的实数 x 与 y,总存在正整数 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,a_n 恒为常数?

(2) 求通项 a_n.

解:(1) 我们有

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}=\frac{a_n^2-1}{a_n+a_{n-1}},n=1,2,\cdots. \quad ①$$

所以,如果对某个正整数 n,有 $a_{n+1}=a_n$,则必有 $a_n^2=1$,且 $a_n+a_{n-1}\neq 0$.

如果 $n=1$,我们得

$$|y|=1 \quad 且\ x\neq -y. \quad ②$$

如果 $n>1$,我们有

$$a_n-1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}-1=\frac{(a_{n-1}-1)(a_{n-2}-1)}{a_{n-1}+a_{n-2}},n\geqslant 2, \quad ③$$

和

$$a_n+1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}+1=\frac{(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)}{a_{n-1}+a_{n-2}},n\geqslant 2, \quad ④$$

将 ③ 和 ④ 式两端相乘,得

$$a_n^2-1=\frac{a_{n-1}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}},n\geqslant 2,\quad ⑤$$

由 ⑤ 递推,必有 ② 或

$$|x|=1\quad 且\ y\neq -x.\quad ⑥$$

反之,如果条件 ② 或 ③ 满足,则当 $n\geqslant 2$ 时,必有 $a_n=$ 常数,且常数是 1 或 -1.

(2) 由 ③ 和 ④,我们得到

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1},n\geqslant 2.\quad ⑦$$

记 $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$,则当 $n\geqslant 2$ 时,

$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=(b_{n-2}b_{n-3})b_{n-2}=b_{n-2}^2b_{n-3}=(b_{n-3}b_{n-4})^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}^2=\cdots$

由此递推,我们得到

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{F_{n-1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{F_{n-2}},n\geqslant 2,\quad ⑧$$

这里

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\geqslant 2,F_0=F_1=1.\quad ⑨$$

由(2.9)解得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\right).\quad ⑩$$

上式中的 n 还可以向负向延伸,例如

$$F_{-1}=0,F_{-2}=1.$$

这样一来,⑧ 式对所有的 $n\geqslant 0$ 都成立. 由 ⑧ 解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}},n\geqslant 0.\quad ⑪$$

⑪ 式中的 F_{n-1},F_{n-2} 由 ⑩ 式确定.

例 9 数列 $\{x_n\}$ 中,$x_1=3$,且满足不等式关系

$$\begin{cases}4x_{n+1}-3x_n<2 & ①\\ 2x_{n+1}-x_n<2 & ②\end{cases}$$

求证:$2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<x_{n+1}<2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

证明:令 $x_n-2=y_n$,则将 $x_n=y_n+2$ 代入 ① 式得

$$4(y_{n+1}+2)-3(y_n+2)<2,$$

故 $$y_{n+1}<\frac{3}{4}y_n<\left(\frac{3}{4}\right)^2y_{n-1}<\cdots<\left(\frac{3}{4}\right)^ny_1,$$

所以 $$x_{n+1}-2<\left(\frac{3}{4}\right)^n(x_1-2)=\left(\frac{3}{4}\right)^n(3-2),$$

即
$$x_{n+1} < \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2.$$

同理有

$$y_{n+1} > \frac{1}{2}y_n > \cdots > \left(\frac{1}{2}\right)^n y_1, \quad x_{n+1} > 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故
$$2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n < x_{n+1} < \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2.$$

例 10 数列 $\{x_n\}$ 中，已知 $x_1 = 4, x_n = \sqrt{2x_{n-1}+3}(n \geqslant 2)$.

求证：(1) $|x_n - 3| \leqslant \frac{2}{3}|x_{n-1} - 3|$；

(2) $3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leqslant x_n \leqslant 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

证明：(1) 因为 $x_n = \sqrt{2x_{n-1}+3}$，所以

$$|x_n - 3| = |\sqrt{2x_{n-1}+3} - 3| = \frac{|(\sqrt{2x_{n-1}+3}-3)(\sqrt{2x_{n-1}+3}+3)|}{\sqrt{2x_{n-1}+3}+3}$$

$$= \frac{2|x_{n-1}-3|}{\sqrt{2x_{n-1}+3}+3} \leqslant \frac{2}{3}|x_{n-1}-3|.$$

(2) 由(1)

$$|x_n - 3| \leqslant \frac{2}{3}|x_{n-1}-3| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 |x_{n-2}-3| \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|x_1 - 3|$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|4-3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

所以 $3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < x_n < 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

例 11 数列 $\{x_n\}$ 中，$x_0 = x_1 = 1, x_2 = 3$，且 $x_n = 4x_{n-1} - 2x_{n-2} - 3x_{n-3}(n \geqslant 3)$，求证：$x_n > \frac{3}{2}(1 + 3^{n-2})$.

证明：由题设关系得

$$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 3(x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3})$$

故知数列 $\{x_n - x_{n-1} - x_{n-2}\}$ 是以 3 为公比的等比数列，首项 $x_2 - x_1 - x_0 = 1$，

所以 $x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 3^{n-2}$.

因为 $x_0 = x_1 = 1 > 0$，假设 $x_{k-1}, x_{k-2} > 0$

则
$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 3^{k-2} > 0,$$

所以
$$x_k - x_{k-1} = x_{k-2} + 3^{k-2} > 0,$$

故
$$0 < x_{n-1} \leqslant x_n,$$

因为 $$\sum_{k=3}^{n}(x_k - x_{k-1} - x_{k-2}) = \sum_{k=3}^{n}3^{k-2},$$

即 $$\sum_{k=3}^{n}(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=3}^{n}x_{k-2} = \sum_{k=3}^{n}3^{k-2},$$

所以 $x_n - x_2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}) = \dfrac{3(1-3^{n-2})}{1-3} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$,

即 $$x_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}.$$

又因为 $$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} > 0,$$

所以 $$x_n > \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1} = \frac{3}{2}(1 + 3^{n-2})(n \geqslant 3).$$

例 12 设 $a > 2$,给定数列$\{x_n\}$,其中 $x_1 = a, x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$.求证:

(1)$x_n > 2$ 且$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$;

(2) 如果 $a \leqslant 3$,那么 $x_n < 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$;

(3) 如果 $a > 3$,那么当 $n \geqslant \dfrac{\lg \frac{a}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$ 时,必有 $x_{n+1} < 3$.

证明:(1) 由 $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$ 知特征方程为 $\gamma = \dfrac{\gamma^2}{2(\gamma - 1)}$,解得 $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2$.所以$\dfrac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1}} = \left(\dfrac{x_n - 2}{x_n}\right)^2 = \left(\dfrac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1}}\right)^{2^2} = \cdots = \left(\dfrac{x_1 - 2}{x_1}\right)^{2n}$,

所以 $$x_{n+1} = \frac{2}{1 - \left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}, x_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}}.$$

因为 $$a - 2 > 0, 0 < \frac{a-2}{a} < 1,$$

所以 $$0 < 1 - \left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}} < 1,$$

$$x_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}} > 2.$$

又因为 $$0 < \frac{a-2}{a} < 1,$$

所以
$$\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}>\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n},$$
$$1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}>1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}},$$
$$\frac{1}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}<\frac{1}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}},$$
故
$$x_{n+1}=\frac{2}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}<\frac{2}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}}=x_n,$$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1.$$

(2) 因为
$$x_{n+1}-2=\frac{2}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}-2=\frac{2\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}},$$
$$x_n-2=2\frac{\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}},$$
又
$$\frac{1}{2}(x_n-2)-(x_{n+1}-2)=\frac{\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}}-\frac{2\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}$$
$$=\frac{\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}+\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}-2\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}}{\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}\right]\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}\right]}$$
$$=\frac{\left[\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}\right]-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}\left[\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}\right]}{\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}\right]\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}\right]}$$
$$=\frac{\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2n-1}\right]^2}{\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^{n-1}}\right]\left[1-\left(\frac{a-2}{a}\right)^{2^n}\right]}>0.$$
所以
$$x_{n+1}-2<\frac{1}{2}(x_n-2)<\frac{1}{2^2}(x_{n-1}-2)<\cdots<\frac{1}{2^n}(x_1-2),$$

故 $x_n < 2+\frac{1}{2^{n-1}}(3-2)=2+\frac{1}{2^{n-1}}$.

(3)(用反证法) 如果 $a>3$,且存在 $N\geqslant\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$,使得 $x_{N+1}\geqslant 3$.

因为当 $n\leqslant \mathbf{N}$ 时,$x_n>x_{n-1}\geqslant 3$,所以 $x_n>3$,$\frac{1}{x_n-1}<\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n}{2(x_n-1)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x_n-1}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$,

故 $3\leqslant x_{N+1}<\frac{3}{4}x_N<\left(\frac{3}{4}\right)^2x_{N-1}<\cdots<\left(\frac{3}{4}\right)^Nx_1=a\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^N$,

因为 $a>0$,所以 $\left(\frac{4}{3}\right)^N<\frac{a}{3}$,即 $N<\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$,这与假设矛盾,故结论(3) 成立.

例 13 设正实数序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{1995}$ 满足条件:

(1) $x_0=x_{1995}$;

(2) 对 $i=1,2,\cdots,1995$,有 $x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$,求 x_0 的最大值.

解: 当 x_i 均等于 1 时满足条件,所以若存在所要求的最大值 x_0,则必大于等于 1. 当取定 $x_{i-1}(i\geqslant 1)$ 后,由条件(2) 知,x_i 所能取的值必满足二次方程

$$2x^2-\left(x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}\right)x+1=(2x-x_{i-1})\left(x-\frac{1}{x_{i-1}}\right)=0,$$

所以必有

$$x_i=\frac{1}{2}x_{i-1} \text{ 或 } x_i=\frac{1}{x_{i-1}}. \qquad ①$$

显见,这两个值均满足条件(2). 因此,从初始值 x_0 开始,所能取的序列中的数必为以下形式,即

$$2^kx_0,2^kx_0^{-1},k\in\mathbf{Z}.$$

由于 $x_0\geqslant 1$,所以,为使(1) 成立,x_{1995} 可能取值的形式是

$$x_0(2^kx_0 \text{ 中 } k=0) \text{ 或 } 2^kx_0^{-1}(k\in\mathbf{Z}).$$

下面来证明:x_{1995} 仅可能取 $2^kx_0^{-1}$ 的形式,且最大可能取 $k=1994$. 因此,本题所求的最大值为 $x_0=2^{997}$.

我们先来分析满足条件(2) 的序列所可能取值的途径. 我们用图来表示. x_0 取定后,x_1 可能取的值由图 4-5"→"所示.

若取 $x_1=x_0^{-1}$,则 x_2 可能取的值如图 4-6 所示.

若取 $x_1 = 2^{-1}x_0$，则 x_2 可能取的值如图 4-7 所示.

把这三个图合起来得到图 4-8.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r] \arrow[d] & 2^{-1}x_0 \\ x_0^{-1} & \end{tikzcd}$$

图 4-5

$$\begin{tikzcd} & x_0 \\ 2^{-1}x_0^{-1} & x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

图 4-6

$$\begin{tikzcd} 2^{-1}x_0 \arrow[r] \arrow[d] & 2^{-2}x_0 \\ 2x_0^{-1} & \end{tikzcd}$$

图 4-7

$$\begin{tikzcd} & x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 2^{-1}x_0 \arrow[r] \arrow[d] & 2^{-2}x_0 \\ 2^{-1}x_0^{-1} & x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & 2x_0^{-1} & \end{tikzcd}$$

图 4-8

所以，序列 x_0, x_1, x_2 所可能取的值，只要在图 4-8 中，从 x_0 出发，依次沿"→"所指方向来取值 x_1, x_2，共有四种可能. 按此道理，可以用这样的图示方法来表示序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 所有可能取值的途径：从图 4-9 中的 x_0 出发，依次按"→"所指方向来取下一个值，直到取 x_n. 显然共有 2^n 种可能的途径. 如

$$x_0, 2^{-1}x_0, 2x_0^{-1}, x_0^{-1}, x_0, 2^{-1}x_0, 2^{-2}x_0, 2^2x_0$$

$$x_0, x_0^{-1}, 2^{-1}x_0^{-1}, 2^{-2}x_0^{-1}, 2^2x_0, 2x_0, x_0$$

分别给出了 $n = 7, n = 6$ 的两种序列的取值途径.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & 2^k x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 2^{k-1}x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[r] & 2^2x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 2x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 2^{-1}x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 2^{-2}x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[r] & 2^{-k+1}x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 2^{-k}x_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \cdots \\ \cdots & 2^{-k}x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & 2^{-k+1}x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & \cdots \arrow[l] & 2^{-2}x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & 2^{-1}x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & 2x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & 2^2x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & \cdots \arrow[l] & 2^{k-1}x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & 2^k x_0^{-1} \arrow[l] \arrow[u, shift left] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

图 4-9

由图 4-8 的结构容易看出：若序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的某一取值途径，使 x_n 确实回到图中的 x_0，那么，这个序列的取值图必是由一个封闭的圈路(可重复)表示，注意到 $x_n = x_0$，所以，在第一行取值的个数必比第二行取值的个数多 1. 因此，n 必为偶数. 现在 $n = 1995$，所以这种情形不可能出现. 因此，仅可能是

$$x_0 = x_n = 2^k x_0^{-1}$$

显见，k 愈大，x_0 愈大. 由图可知最大可取 $k = 1994$. 这序列仅可能是

$$\begin{cases} x_i = 2^{-i}x_0, 0 \leqslant i \leqslant 1994 \\ x_{1995} = 2^{1994}x_0^{-1} \end{cases}$$

即 $x_0 = 2^{997}$. 证毕.

例 14 数列 $\{u_n\}$ 定义如下

$u_0 = 2, u_1 = \dfrac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1, n = 1, 2, \cdots$，求证：对于正整数 n 有 $[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$，此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明：首先由递归公式立即可等得

$$u_0 = 2 = 2^0 + 2^{-0}, u_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1},$$

$u_2 = \dfrac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}, u_3 = \dfrac{65}{8} = 2^3 + 2^{-3},$

$u_4 = \dfrac{1025}{32} = 2^5 + 2^{-5},$

总结规律，可得 $\quad u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}$.

我们假定这个方程当 $n = 0,1,\cdots,k$ 时成立，再来看当 $n = k+1$ 时如何. 代入得

$$u_{k+1} = (2^{f(k)} + 2^{-f(k)})((2^{f(k-1)} + 2^{-f(k-1)})^2 - 2) - \frac{5}{2}$$

$$= (2^{f(k)} + 2^{-f(k)})(2^{2f(k-1)} + 2^{-2f(k-1)}) - \frac{5}{2}$$

$$= (2^{f(k)+2f(k-1)} + 2^{-f(k)-2f(k-1)}) + (2^{f(k)-2f(k-1)} + 2^{-f(k)+2f(k-1)}) - \frac{5}{2},$$

设 $\quad f(k+1) = f(k) + 2f(k-1),$

与此相关联的差分方程是 $E^2 - E - 2 = 0$,

它的根是 $2, -1$. 这样我们有 $f(k) = A(2)^k + B(-1)^k$.

由前面计算所得的数值表，可得 $f(0) = 0, f(1) = 1$.

这使我们能定出 A 和 B，最后可得 $f(n) = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$,

实际计算表明 $2^{f(k)-2f(k-1)} + 2^{-f(k)+2f(k-1)} - \dfrac{5}{2} = 0$,

所以，我们用归纳法证明了

$$u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}, n = 0,1,2,\cdots$$

但 $f(n)$ 总是整数. 又因为

$$2 \equiv (-1) \pmod 3$$
$$2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$$

故 $2^n - (-1)^n$ 总能被 3 整除.

最后，因 $2^{f(n)}$ 是整数，则 $2^{-f(n)}$ 是一个真分数. 故 $[u_n]$ 就等于 $2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$.

例 15 设 $\{a_n\}$ 是具有下列性质的实数列，即

$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$ ①

数列 $\{b_n\}$ 定义为

$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}, n = 1,2,3,\cdots$ ②

证明:(1) 对所有的 $n = 1,2,3,\cdots$，有 $0 \leqslant b_n < 2$.

(2) 对满足 $0 \leqslant c < 2$ 的任意实数 c，总存在着一个满足 ① 的数列 $\{a_n\}$ 使得由 ② 导出的数列 $\{b_n\}$ 中有无穷多个下标 n，使 $b_n > c$.

证明:(1) 我们注意到$\frac{a_{k-1}}{a_k}\leqslant 1$,故对于一切 n 有 $b_n\geqslant 0$. 以 a_k 表示 $\sqrt{a_k}$,则 b_n 中的第 k 项为

$$\left(1-\frac{a_{k-1}^2}{a_k^2}\right)\frac{1}{a_k}=\frac{a_{k-1}^2}{a_k}\left(\frac{1}{a_{k-1}^2}-\frac{1}{a_k^2}\right)=\frac{a_{k-1}^2}{a_k}\left(\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_k}\right)\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$
$$=\frac{a_{k-1}}{a_k}\left(1+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\leqslant 2\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right),$$

其中,$k=1,2,\cdots,n$,把诸不等式相加,我们即可看到右式成一叠进和式,故对于一切自然数 n,有

$$0\leqslant b_n\leqslant 2\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

(2) 已知 $0\leqslant c<2$,我们来证明存在适当的 a_i 使得由它导出的数列 $\{b_n\}$ 具有题中所要求的性质. 现在我们从比较简单的等比数列入手.

令$\frac{1}{\sqrt{a_k}}=d^k$,则 b_n 中的第 k 项为

$$\left(1-\frac{d^{-2(k-1)}}{d^{-2k}}\right)d^k-(1-d^2)d^k,$$

从而 $$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-d^2)d^k=(1-d^2)\sum_{k=1}^{n}d^k$$
$$=(1-d^2)\frac{d-d^{n+1}}{1-d}=d(1+d)(1-d^n).$$

我们选取 0 与 1 之间的数 d,使得当 n 足够大时

$$b_n=d(1+d)(1-d^n)>c.$$

根据给定的条件,这是容易做到的. 首先,对于任何 $c<2$,只须取 $d=\sqrt{\frac{c}{2}}$,就有 $d(1+d)>c$;其次,既然 $d<1$,对于一切充分大的 n,可得到尽量接近于1的 $1-d^n$,特别地有

$$1-d^n>\frac{c}{d(1+d)},$$

这样,对于一切充分大的 n,恒有 $d(1+d)(1-d^n)>c$.

(我们建议读者依照所给的 c 求出 N,使得对于一切 $n>N$ 有 $b_n>c$)

例 16 对任一实数 x_1,按以下构成数列 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$,$n\geqslant 1$. 证明:存在且只存在一个值 x_1,使得 $0<x_n<x_{n+1}<1$(对所有 n).

证法 1:设 $P_1(x)=x$,定义

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)\left(P_n(x)+\frac{1}{n}\right),n=1,2,\cdots \quad ①$$

从这个递归定义中，可得到

(1) P_n 为 2^{n-1} 次多项式；

(2) P_n 系数为正，且对于 $x \geqslant 0$，是一个凸的上升函数；

(3) $P_n(0) = 0, P_n(1) \geqslant 1$；

(4) $P_n(x_1) = x_n$.

因为条件 $x_{n+1} > x_n$ 等价于 $x_n > 1 - \frac{1}{n}$，

我们可以将这个题重新组织为：证明存在惟一的正实数 t，满足 $1 - \frac{1}{n} < P_n(t) < 1$（对所有 n）.

因为 P_n 是连续的，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，P_n 值从 0 增大到大于等于 1 的某值. 因此存在惟一的 a_n, b_n，使

$$a_n < b_n, P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n}, P_n(b_n) = 1, \qquad ②$$

根据 ① 式有

$$P_{n+1}(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

以及 $P_{n+1}(a_{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$，

因此 $a_n < a_{n+1}$. ③

因为 $P_{n+1}(b_n) = 1 + \frac{1}{n}, P_{n+1}(b_{n+1}) = 1$，

所以 $b_n > b_{n+1}$. ④

因为 P_n 为凸函数，$P_n(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant b_n$ 上的图形位于弦 $y = \frac{1}{b_n}x$ 之下，从而

$$P_n(x) \leqslant \frac{x}{b_n}, 0 \leqslant x \leqslant b_n,$$

特别有
$$P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{a_n}{b_n}.$$

据此及事实 $b_n \leqslant 1$，可发现

$$b_n - \frac{b_n}{n} \leqslant a_n, b_n - a_n \leqslant \frac{b_n}{n} \leqslant \frac{1}{n}\text{（对所有 } n\text{）},$$

这样，得到两个有界的无限序列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 前者递增，后者递减，$a_n < b_n$，当 n 接近增加时，它们的第 n 个元素之间的差也接近于 0. 从而得出结论：它们都趋向于一共同值 t

$$a_n < t < b_n\text{（对所有 } n\text{）}.$$

这个值惟一满足

$$1-\frac{1}{n}<P_n(t)<1\text{(对所有 }n\text{)}$$

证法 2:证明本题需要一条定理:单调有界数列必有极限.

先证惟一性.如果有这样的 x_1 存在,因

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<1$$

则数列 $\{x_n\}$ 必有极限 x,在递推公式

$$x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

两边取极限便得

$$x=x^2 \tag{6}$$

由于 $\{x_n\}$ 是递增数列,$x\neq 0$,所以 $x=1$.

若又有 $0<x'_1<x'_2<\cdots<x'_n<\cdots<1$ 满足同样的递推关系,则也有 $x'_n\to 1$. 所以,$x_n-x'_n\to 0$.

注意由⑤式及 $x_n<x_{n+1}$,可得 $x_n+\dfrac{1}{n}>1$,即

$$x_n>1-\frac{1}{n}. \tag{7}$$

所以,利用⑥式得

$$|x_{n+1}-x'_{n+1}|=\left|x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)-x'_n\left(x'_n+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|(x_n-x'_n)\left(x_n+x'_n+\frac{1}{n}\right)\right|$$

$$\geqslant|x_n-x'_n|\geqslant\cdots\geqslant|x_1-x'_1|,$$

于是由 $x_n-x'_n\to 0$,得 $x_1=x'_1$.

现在证明 x_1 的存在性.对每个自然数 n,如果取

$$x_{n+1}\in\left(1-\frac{1}{n+1},1\right)$$

那么由⑤式可得

$$x_n=\frac{-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+4x_{n+1}}}{2}\in\left(1-\frac{1}{n},1\right), \tag{8}$$

从而可逐步由⑤式求出 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$,满足

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<1 \tag{9}$$

及关系⑤式.并且在⑧式中取 $n=1$ 及 $n=2$,有

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4x_2}}{2}\in\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \tag{10}$$

形如⑨式的数列.如果能依关系⑤式推至无穷,并且每一项都大于前一项,且小于

1. 那么，x_1 即为所求. 否则，就会使下列两种情况之一发生：对某一自然数 m，

(i) $x_m \geqslant x_{m+1}$；

(ii) $x_m > 1$.

为不使记号复杂，不妨设对每个 n，$m = n+2$. 于是对每个自然数 n，存在一个长为 $n+1$ 的数列⑨，其中 x_1 是由 x_{n+1} 依公式⑤逐步确定的，我们把它记为 $x_1^{(n)}$，下面证明 $\{x_1^{(n)}\}$ 有一个收敛子列.

上述两种情况，必有一种对无限多个 n 出现，不妨设均是第一种情况. 由递推公式⑤也就是

$$x_{n+2} \leqslant 1 - \frac{1}{n+2},$$

于是
$$x_1^{(n)} < x_1^{(n+1)}.$$

(因为后者对应于满足 $x_{n+2} > 1 - \dfrac{1}{n+2}$ 的 x_{n+2})，从而 $\{x_1^{(n)}\}$ 递增，而且有界(由于⑩)，故有极限 x_1 存在. 由这个 x_1 可依递推公式⑤逐步作出 $x_2, x_3, \cdots$. 现在证明这个 x_1 即为所求，不然的话将有 m，使得 $x_m \geqslant x_{m+1}$ 或 $x_m > 1$.

不妨设有 $x_m \geqslant x_{m+1}$，对这个 m，可取定一个 $n > m$ 并且 $x_1^{(n)}$ 与 x_1 相差很小，从而 $x_m^{(n)}$ 与 x_m，$x_{m+1}^{(n)}$ 与 x_{m+1} 均相差很小，但 $x_m^{(n)} < x_{m+1}^{(n)}$，所以 $x_m \geqslant x_{m+1}$ 不可能成立. 同理可证 $x_m > 1$ 不可能，于是 x_1 即为所求.

思考交流

思考题 1 数列 $a_1, a_2, \cdots$ 定义如下：$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$，$n = 1, 2, 3, \cdots$

求与此数列的每一项都互素的所有正整数.

解法 1：我们先证明如下结论：对任意不小于 5 的素数 p，都有

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0 \pmod p \quad ①$$

因为 p 是不小于 5 的素数，所以 $(2, p) = 1$，$(3, p) = 1$，$(6, p) = 1$，由费尔马小定理

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，$6^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

所以 $3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 3 + 2 + 1 = 6 \pmod p$

即 $6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} \equiv 6 \pmod p$

故 $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0 \pmod p$

所以①式成立，于是

$a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0 \pmod p$.

又 $a_1 = 10$，$a_2 = 48$.

对任意大于1的正整数 n，它必有一个素因数 p. 若 $p\in\{2,3\}$，则 $(n,a_2)>1$；若 $p\geqslant 5$，则 $(n,a_{p-2})>1$，故大于1的正整数都不符合要求.

而1与所有正整数都互质，所以符合题设要求的正整数只能为1.

解法2：令 $b_n=a_n+1=2^n+3^n+6^n$，$n=-1,0,1,2,\cdots$

则 $b_0=3$，$b_{-1}=1$. 由特征根方法易知

$$b_{n+3}=11b_{n+2}-36b_{n+1}+36b_n,\ n=-1,0,1,\cdots \quad ②$$

（设 $f(x)=(x-2)(x-3)(x-6)$，由 $2^nf(2)+3^nf(3)+6^nf(6)=0$ 可得上式）

对任一大于3的素数 p，有 $(p,6)=1$. 记 $\overline{m}$ 为整数 m 除以 p 的余数，由于不同的3元组 $(\overline{m_1},\overline{m_2},\overline{m_3})$ 只有 p^3 个，由抽屉原理，必存在 i,j，$-1\leqslant i<j$，使得 $(\overline{b_i},\overline{b_{i+1}},\overline{b_{i+2}})=(\overline{b_j},\overline{b_{j+1}},\overline{b_{j+2}})$，则

$36b_{i-1}\equiv b_{i+2}-11b_{i+1}+36b_i\equiv b_{j+2}-11b_{j+1}+36b_j\equiv 36b_{j-1}\pmod p$

$p\mid 36(b_{i-1}-b_{j-1})\Rightarrow p\mid(b_{i-1}-b_{j-1})\Rightarrow(\overline{b_{i-1}},\overline{b_i},\overline{b_{i+1}})=(\overline{b_{j-1}},\overline{b_j},\overline{b_{j+1}})$

依此类推，可得

$$(\overline{b_{-1}},\overline{b_0},\overline{b_1})=(\overline{b_{j-i-1}},\overline{b_{j-i}},\overline{b_{j-i+1}})$$

特别地 $$b_{j-i-1}\equiv b_{-1}=1\pmod p$$

从而 $$p\mid b_{j-i-1}-1\Rightarrow p\mid a_{j-i-1}$$

若 $j-i-1=0$，则 $a_0=2$，$p\mid 2$，矛盾，故 $j-i-1\geqslant 1$. 又因为 $a_2=48$，所以与此数列的每一项都互素的正数只有1.

推广 我们常称题中的 a_n 为幂和式. 幂和式（特别是2项幂和式）是数学竞赛的常客.

(1) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下，即

$a_n=2^n+4^n+7^n+14^n+28^n-1$，$n=1,2,3,\cdots$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,7,7^2,7^3,\cdots$.

因为对任一不等于2和7的素数 p，有 $(p,28)=1$，由费马小定理得

$28a_{p-2}=14\cdot 2^{p-1}+7\cdot 4^{p-1}+4\cdot 7^{p-1}+2\cdot 14^{p-1}+28^{p-1}-28$

$\equiv 14\cdot 1+7\cdot 1+4\cdot 1+2\cdot 1+1-28\equiv 0\pmod p$

$p\mid 28a_{p-2}\Rightarrow p\mid a_{p-2}$. 又因为 $2\mid a_1$，且易得 $7\nmid a_n$，所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $7^k(k=0,1,2,\cdots)$.

进一步推广可得.

(2) 设 p 为素数，$q=2^p-1$ 也为素数（麦森素数），则 $W=2^{p-1}(2^p-1)$ 为完全数. 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下，即

$a_n=2^n+2^{2n}+2^{3n}+\cdots+2^{(p-1)n}+q^n+(2q)^n+(2^2q)^n+\cdots+(2^{p-1}q)^n-1$，$n=1,2,3,\cdots$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,q,q^2,q^3,\cdots(p\geqslant 3)$ 或 $1(p=2)$.

对 $p=2$(原题) 和 $p=3$(推广(1) 命题已证. 对 $p\geqslant 3$ 的一般情形,设 D 为任一不等于 2 和 q 的素数,则 $(D,W)=1$,由费马小定理得

$$Wa_{p-2}=\sum_{i=1}^{p-1}(2^{p-1-i}q)2^{i(p-1)}+\sum_{i=0}^{p-1}(2^{p-1-i})(2^iq)^{p-1}-W\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{p-1-i}q+\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}-W$$
$$=(2^{p-1}-1)q+(2^p-1)-W\equiv 0(\mathrm{mod}\ D)$$

$D\mid Wa_{p-2}\Rightarrow D\mid a_{p-2}$. 又因为 $2\mid a_1$ 且

$$a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1=\frac{2^{pn}-1}{2^n-1}-1(\mathrm{mod}\ q)$$

若 $p\nmid n$,则 $(p,n)=1$,且

$(2^n-1,q)=(2^n-1,2^p-1)=1$

从而

$$2^{pn}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)\Rightarrow\frac{2^{pn}-1}{2^n-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)\Rightarrow a_n\equiv -1\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$$

若 $p\mid n$,则

$$a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1\equiv\sum_{i=1}^{p-1}1-1=p-2\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$$

因为 $q\nmid a_n$,$n=1,2,\cdots$. 推广命题得证.

(3) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$a_n=3^n+3\cdot 5^n+15^n-1,n=1,2,3,\cdots$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,3,3^2,3^3,\cdots$.

因为对任一不等于 3 和 5 的素数 p,有 $(p,15)=1$,由费马小定理得

$15a_{p-2}=5\cdot 3^{p-1}+3^2\cdot 5^{p-1}+15^{p-1}-15\equiv 5\cdot 1+3^2\cdot 1+1-15\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$

$p\mid 15a_{p-2}\Rightarrow p\mid a_{p-2}$. 又因为 $3\nmid a_n$,$5\mid a_4$,所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $3^k(k=0,1,2,\cdots)$.

(4) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$a_n=2^n+3^n+7^n+42^n-1,n=1,2,\cdots$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有形如 $2^l\cdot 3^m\cdot 7^k$(l,m,k 为非负整数) 的所有正整数.

(5) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下,即

$a_n=2^n+3^n+7^n+43^n+1806^n-1,n=1,2,\cdots$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,43,43^2,\cdots$.

证明类似于上.

能力训练

1. 容器 A 中盛有浓度为 $a\%$ 的食盐水 6 升，容器 B 中盛有浓度为 $b\%$ 的食盐水 4 升，将 A 中溶液倒入 1 升到 B 中混合后，再将 B 中溶液倒入 1 升到 A 中，这样反复操作 k 次（由 A 倒入 B，再由 B 倒入 A 称反复操作一次）后，A、B 中食盐水的浓度分别为 $a_k\%$，$b_k\%$.

(1) 求 b_k-a_k 构成的数列；

(2) 求 a_k、b_k.

2. 设 P_1 是正 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的点，从 P_1 向 BC 作垂线，垂足为 Q_1，从 Q_1 向 CA 作垂线，垂足为 R_1，从 R_1 向 AB 作垂线，垂足为 P_2，再从 P_2 重复同样作法，依次得到 Q_2、R_2、P_3、Q_3、R_3、…，当 $n\to\infty$ 时，问 P_n 趋近于哪一点.

3. 对于定义为 $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}(n\geqslant 1)$ 的数列，试证：$\sqrt{2}<x_n<\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}$.

4. 定义数列 $\{x_n\}$，$x_1=-1, x_{n+1}=\dfrac{3x_n+2}{x_n+4}$，求证：

(1) $0<x_{n+2}<1$；

(2) $x_{n+1}>x_n$.

5. 数列 $\{x_n\}$ 中，$x_1>3$，且 $x_n=\dfrac{3x_{n-1}^2-x_{n-1}}{4(x_{n-1}-1)}(n=2,3,\cdots)$，求证：$3<x_{n+1}<x_n(n=1,2,\cdots)$.

6. 数列 $\{x_n\}$ 中，给定 x_1，且 $x_n=\dfrac{2x_{n-1}^2-x_{n-1}}{3(x_{n-1}-2)}(n=2,3,\cdots)$.

(1) 设 $4<x_1<5$，求证：$x_n<x_{n+1}<5(n=1,2,\cdots)$；

(2) 设 $x_1>5$，求证：$5<x_{n+1}<x_n(n=1,2,\cdots)$.

7. 数列 $\{x_n\}$ 中，$x_1=2$，且 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+3$，求证：$2\leqslant x_n<x_{n+1}<6$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{3}{2}, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+4}{2a_n+3}$，证明：

(1) $1<a_n<2$；

(2) $a_{n+1}-1=\dfrac{1}{5}(a_n-1)$；

(3) $a_n<1+\dfrac{1}{2}\times 5^{1-n}$.

9. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1, a_n<a_{n+1}$，设 $\{b_n\}$ 为 $b_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，

(1) 求证：$b_n < 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$；

(2) 求证：$0 < S_n < 2$；

(3) 若$\{a_n\}$是一个公比 $r \geqslant 3$ 的等比数列，则 $0 < S_n < 1$；

(4) 试证：当 $a_n = a^{-2(n-1)}(0 < a < 1)$ 且$\sqrt{\frac{c}{2}} < a < 1$ 时，在数列$\{S_n\}$中总可以找到一项 S_N，使得 S_N 后面所有项均大于 c.

10. 已知数列$\{a_n\}$，$a_{n+1} = a_n + \ln(m - a_n)$，$a_1 = \ln m$.（$m \geqslant 1$），求证：$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant m - 1$.

11. 设 $8 < x_1 < 12$，且 $x_n = \frac{6x_{n-1}^2 - 23x_{n-1}}{7(x_{n-1} - 5)}(n = 2,3,\cdots)$，求证：$x_n < x_{n+1} < 12(n = 1,2,\cdots)$.

12. 设 $x_n > 0$，$x_1 \neq \sqrt{7}$，且 $x_n = \frac{2x_{n-1}^2 + 5x_{n-1} + 7}{3x_{n-1} + 5}(n = 2,3,\cdots)$，求证：$x_n < x_{n+1} < \sqrt{7}$，或 $x_n > x_{n+1} > \sqrt{7}$.

13. 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个整数数列，其中既有无穷多项是正整数，又有无穷多项是负整数. 如果对每一个正整数 n，整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同. 证明：每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

第五讲 数学归纳法

知识扫描

数学归纳法是一种常用的解题方法,它的基础是自然数集的公理或最小数原理.数学归纳法所讨论的对象通常与自然数n有关.利用数学归纳法证题有着相对固定的程序,其核心是不可少的两步:第一步即奠基步,证明当n取第一个值n_0时,命题成立;第二步即关键的一步,假设$n=k\ (k\in \mathbf{N}, k\geqslant n_0)$时命题成立,由此证明当$n=k+1$时命题也成立,从而证明了对所有的自然数$n\ (n\geqslant n_0)$,命题均成立.这两个步骤缺一不可.

数学归纳法通常可分为第一数学归纳法和第二数学归纳法.第一数学归纳法如上所述,而第二数学归纳法的不同主要在于第二步,假设对$n_0\leqslant n\leqslant k$,命题成立,由此证明命题对$n=k+1$时也成立,进而得证.

例题分析

例 1 已知$x^2-3x+1=0$,对于$n\in \mathbf{N}^*$,求证:$x^{2^n}+x^{-2^n}$的末位数字是7.

证明:由$x^2-3x+1=0$知$x\neq 0$,从而可得$x+x^{-1}=3$.

(1) 当$n=1$时,$x^{2^n}+x^{-2^n}=x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=7$,命题成立.

(2) 假设$n=k$时,命题成立,即$x^{2^k}+x^{-2^k}$的末位数字是7.那么,当$n=k+1$时,$x^{2^{k+1}}+x^{-2^{k+1}}=(x^{2^k}+x^{-2^k})^2-2$.

而$x^{2^k}+x^{-2^k}$的末位数字是7,于是$(x^{2^k}+x^{-2^k})^2$的末位数字是9.

故$x^{2^{k+1}}+x^{-2^{k+1}}$的末位数字是7,从而当$n=k+1$时命题成立.

由(1)、(2)可知，对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 结论成立.

评析　这是对第一数学归纳法的运用. 归纳法一定要把握住奠基，要适当地退.

例 2　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 (n \geqslant 1)$，试证明 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \geqslant 1)$.

证明：我们用第二数学归纳法来证明本题.

当 $n = 1$ 时，$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)}$，即命题成立.

假设对 $n \leqslant k$，命题成立，则对于 $n = k+1$，由题设条件和归纳假设，即由 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = (k+1)^2 a_{k+1}$ 有

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2 - 1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = \frac{1}{k^2 + 2k}\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{k(k+2)}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k(k+2)}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

即当 $n = k+1$ 时，命题也成立.

所以由归纳原理知，对任意自然数 n，命题成立.

评析　在本题证明过程中，由 $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2 - 1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ 知，a_{k+1} 与 a_1，a_2，…，a_k 都有关，若仍设 $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ 就显得不够用了！我们应该充分利用已知条件和有关知识，推出当 $n = k+1$ 时，命题也成立.

例 3　自然数数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足关系式 $x_n + \sqrt{2} y_n = \sqrt{2}(3 + 2\sqrt{2})^{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$. 求证：$y_n - 1$ 为完全平方数.

证明：将已知条件两边平方后得

$$\frac{(x_n + \sqrt{2} y_n)^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n+1}} = x_{n+1} + \sqrt{2} y_{n+1}.$$

易证对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，x_n 为偶数，且 $x_{n+1} = 2x_n y_n$，$y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + y_n^2$ …①

因为当 $n = 1$ 时，由条件式知 $x_1 = 24$，$y_1 = 17$，所以有 $y_1^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + 1$.

从而要证 $y_n - 1$ 为完全平方数，证明 $y_n^2 = \frac{1}{2}x_n^2 + 1$ 即可.

下面用数学归纳法证明 $y_n^2 = \frac{1}{2}x_n^2 + 1\ (n \in \mathbf{N}^*)$：

当 $n=1$ 时，显然结论成立.

假设当 $n=k$ 时，结论成立，于是当 $n=k+1$ 时，

由 ① 式得 $x_{k+1}^2=4x_k^2y_k^2$，$y_{k+1}^2=y_k^4+x_k^2y_k^2+\frac{1}{4}x_k^4$.

所以 $y_{k+1}^2-(\frac{1}{2}x_{k+1}^2+1)=y_k^4+x_k^2y_k^2+\frac{1}{4}x_k^4-(2x_k^2y_k^2+1)$

$=(y_k^2-\frac{1}{2}x_k^2)^2-1=1-1=0$.

于是 $y_{k+1}^2=\frac{1}{2}x_{k+1}^2+1$.

由归纳原理知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $y_n^2=\frac{1}{2}x_n^2+1$ 成立.

最后再证明 y_n-1 为完全平方数：

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

当 $n>1$ 时，由前述论证知 $y_n=y_{n-1}^2+\frac{1}{2}x_{n-1}^2=x_{n-1}^2+1$.

因此，$y_n-1=x_{n-1}^2$ 为完全平方数，即得证.

例 4 设正数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n-1}(n=1, 2, 3, \cdots)$. 求证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n<\frac{1}{n}$.

证明：当 $n=1$ 时，由 $a_1^2\leqslant a_1-a_2<a_1$ 可知 $a_1<1$.

假设对 $n=k$，有 $a_k<\frac{1}{k}$ 成立. 那么当 $n=k+1$ 时，

若 $a_k\leqslant\frac{1}{k+1}$，则由 $a_k^2\leqslant a_k-a_{k+1}$ 可得 $a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2<a_k\leqslant\frac{1}{k+1}$.

即要证的结果成立，否则 $\frac{1}{k+1}<a_k<\frac{1}{k}$，从而 $a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2<\frac{1}{k}(1-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k+1}$.

无论何种情况，当 $n=k+1$ 时，要证的结果均成立.

因此，由归纳原理知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n<\frac{1}{n}$ 成立.

例 5 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\frac{1}{a_n}}(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证：存在正数 a，使得 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_n}{n^a}\leqslant 2(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:猜测 $\alpha=\frac{1}{3}$ 为所求.

下面我们用数学归纳法来证明 $\frac{1}{2}n^{\frac{1}{3}}\leqslant a_n\leqslant 2n^{\frac{1}{3}}(n\in\mathbf{N}^*)\cdots$①

当 $n=1$ 时,由 $a_1=1$ 可知 ① 式显然成立.

假设当 $n=k$ 时,① 式成立.

于是 $a_{k+1}=\sqrt{a_k^2+\frac{1}{a_k}}\leqslant\sqrt{4k^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}}$.

因此 $a_{k+1}^6\leqslant(4k^{\frac{2}{3}}+2k^{-\frac{1}{3}})^3=64k^2+96k+48+8k^{-1}\leqslant 64k^2+96k+56<64(k+1)^2$.

即 $a_{k+1}<2(k+1)^{\frac{1}{3}}\cdots$②

另外,由归纳假设 $a_{k+1}=\sqrt{a_k^2+\frac{1}{a_k}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{4}k^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}}}$.

所以 $a_{k+1}^6\geqslant(\frac{1}{4}k^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}})^3=\frac{1}{64}k^2+\frac{3}{32}k+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}k^{-1}>\frac{1}{64}(k+1)^2$.

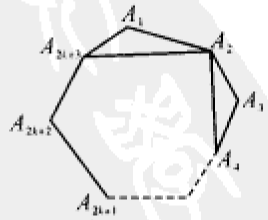
即 $a_{k+1}>\frac{1}{2}(k+1)^{\frac{1}{3}}\cdots$③

由 ②,③ 式可知,当 $n=k+1$ 时,① 式也成立.

因此,由归纳原理知,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,① 式成立.

例 6 将凸 $2n+1$ $(n\geqslant 2)$ 边形的顶点染色,使得任意两个相邻顶点染不同的颜色.求证:对上述的任意一种染色方法,此 $2n+1$ 边形都可用不相交的对角线分为若干个三角形,使得每条对角线的端点不同色.

证明:对 n 应用归纳法.



直接验证 $n=2$ 时的情形比较困难,我们不妨前移起点,考虑 $n=1$ 时的情形.

由于 $n=1$ 时是三角形,它没有对角线,且任意两个顶点不同色,所以结论正确.

设结论在 $n\leqslant k$ 时成立,现考虑 $2k+3$ 边形的顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k+3}$.

如图所示,则其中必有一个顶点,不妨设为 A_1,使得和它相邻的两个顶点 A_2 和 A_{2k+3} 不同色.

否则,和每一个顶点相邻的两个顶点都同色,对 $2k+3$(奇数)边形是不可能的.连接 A_2A_{2k+3} 和 $2k+3$ 边形 $A_2A_3\cdots A_{2k+3}$.对于 $2k+2$ 边形 $A_2A_3\cdots A_{2k+3}$ 有:

(1) 如果对于顶点 $A_2, A_3, \cdots, A_{2k+3}$ 中的每一个,和它相邻的两个顶点同色,则顶点 $A_2, A_3, \cdots, A_{2k+3}$ 被交替地染上了两种颜色,且它们和 A_1 是不同的.从而我们连接 A_1A_3,

A_1A_4，…，A_1A_{2k+2} 就把 $2k+3$ 边形分成了 $2k+1$ 个三角形，且其中的每条对角线的端点不同色.

(2) 如果顶点 A_2，A_3，…，A_{2k+3} 中存在一顶点，不妨设为 A_3，和它相邻的两个顶点 A_2，A_4 不同色，则连接 A_2A_4. 对于 $2k+1$ 边形 $A_2A_4\cdots A_{2k+3}$ 利用归纳假设，它可分成若干个三角形，其中对角线端点不同色. 再加上 $\triangle A_1A_2A_{2k+3}$ 和 $\triangle A_2A_3A_4$，便知对 $2k+3$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2k+3}$ 也是如此.

综上所述，我们证得了命题.

评析 数学归纳法并不是死的，它还有很多变化，比如大跨度的归纳. 从 $n=k$ 过渡到 $n=k+1$，称为以跨度为 1 前进. 有时候，要验证 $P(n_0)$（对某个自然数 n_0）成立，并不明显或比较繁琐，然而，这个命题对 $P(n_0-1)$ 也成立，且 $P(n_0-1)$ 比 $P(n_0)$ 容易验证. 这时，可以采取将起点向前移的办法. 另外，有时从 $P(k)$ 到 $P(k+1)$ 前进时，需要有其他的特殊情形（如 $P(n_0+1)$，$P(n_0+2)$ 等作为基础）. 所以，这时要验证几个起点.

例 7 有一列曲线 P_0，P_1，P_2，…. 已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的正三角形，P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉（$k=0，1，2，\cdots$）. 记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积.

(1) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

解：由题意，对 P_0 进行操作，易看出 P_0 的每条边变成 P_1 的 4 条边，故 P_1 的边数为 3×4，同样，对 P_1 进行操作，P_1 的每条边变成 P_2 的 4 条边，故 P_2 的边数为 3×4^2. 从而 P_n 的边数为 3×4^n.

已知 P_0 的面积 $S_0=1$，比较 P_1 与 P_0，易知 P_1 在 P_0 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^2}$，而 P_0 有 3 条边，故 $S_1=S_0+3\cdot\frac{1}{3^2}=1+\frac{1}{3}$. 再比较 P_2 与 P_1，可知 P_2 在 P_1 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{3^2}$，而 P_1 有 3×4 条边，故 $S_2=S_1+3\times4\times\frac{1}{3^2}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}$.

类似地有 $S_3=S_2+3\times4^2\times\frac{1}{3^6}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}$.

猜想 $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}=\frac{8}{3}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

以下用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，显然成立.

假设当 $n=k$ 时，有 $S_k=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^k$.

当 $n=k+1$ 时，易知第 $k+1$ 次操作后，比较 P_{k+1} 与 P_k，P_{k+1} 在 P_k 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^{2(k+1)}}$，而 P_k 有 3×4^k 条边，故 $S_{k+1}=S_k+3\times4^k\times\frac{1}{3^{2(k+1)}}$

$=S_k+\frac{4^k}{3^{2(k+1)-1}}=S_k+\frac{4^k}{3^{2k+1}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^{k+1}$.

综上所述，$S_n=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^n]=\frac{8}{5}$.

评析 在很多时候数学归纳法是与数列相结合运用的，这在近年的竞赛中越来越常见，应熟练掌握.

例 8 设 n 为正整数，集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n+1$ 个非空子集. 求证：存在 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的两个不交的非空子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 和 $\{j_1, j_2, \cdots, \cdots, j_n\}$，使得 $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}=A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_m}$.

证明：对 n 归纳证明.

当 $n=1$ 时，$A_1=A_2=\{1\}$，命题成立.

假设命题对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+2}$ 为 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的非空子集. 令 $B_i=A_i\setminus\{n+1\}$ $(i=1, 2, \cdots, n+2)$，分如下情形给予证明：

(ⅰ) 存在 $1\leqslant i<j\leqslant n+2$，使得 $B_i=B_j=\varnothing$，则 $A_i=A_j=\{n+1\}$，命题得证.

(ⅱ) 存在唯一的 i，使得 $B_i=\varnothing$，不妨设 $B_{n+2}=\varnothing$，即 $A_{n+2}=\{n+1\}$. 此时由归纳假设知存在 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的两个不交的子集 $\{i_1, \cdots, i_k\}$ 和 $\{j_1, \cdots, j_m\}$，使得 $B_{i_1}\cup\cdots\cup B_{i_k}=B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j_m}$ …①

我们记 $C=A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_k}$，$D=A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_m}$，那么 C 与 D 至多相差一个元素 $n+1$（这由 ① 式及 B_i 的定义可知），此时可通过将 A_{n+2} 并入 C 或者 D 使命题得证.

(ⅲ) 每一个 B_i 都不是空集，这时，$B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的非空子集，由归纳假设可知存在 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的不交子集 $\{i_1, \cdots, i_k\}$ 及 $\{j_1, \cdots, j_m\}$，使得 $B_{i_1}\cup\cdots\cup B_{i_k}=B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j_m}$ …②

又 $B_2, B_3, \cdots, B_{n+2}$ 也是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的非空子集，再由归纳假设可知存在 $\{2, 3, \cdots, n+2\}$ 的不交子集 $\{r_1, \cdots, r_u\}$ 及 $\{t_1, \cdots, t_v\}$，使得 $B_{r_1}\cup\cdots\cup B_{r_u}=B_{t_1}\cup\cdots\cup B_{t_v}$ …③

我们仍记 $C=A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_k}$，$D=A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_m}$，并记 $E=A_{r_1}\cup\cdots\cup A_{r_u}$，$F=A_{t_1}\cup\cdots\cup A_{t_v}$. 利用 ②，③ 式及各 B_i 的定义，可知 C 与 D 至多差一个元素 $n+1$，E 与 F 也至多差一个元素 $n+1$. 如果 $C=D$ 或 $E=F$，那么命题已成立. 因此，只需考虑 $C\neq$

D，且 $E \neq F$ 的情形.

不妨设 $C = D \cup \{n+1\}$，而 $E = F \setminus \{n+1\}$. 这时 $C \cup E = D \cup F$，将 C 与 E 中重复出现的集合合并，D 与 F 中重复出现的集合合并后，我们得到 $\{1, 2, \cdots, n+2\}$ 的两个子集 $\{p_1, \cdots, p_x\}$ 和 $\{q_1, \cdots, q_y\}$，使得 $A_{p_1} \cup \cdots \cup A_{p_x} = A_{q_1} \cup \cdots \cup A_{q_y}$ …④

其中 $G = A_{p_1} \cup \cdots \cup A_{p_x} = C \cup E$，$H = A_{q_1} \cup \cdots \cup A_{q_y} = D \cup F$.

此时，如果 $\{p_1, \cdots, p_x\} \cap \{q_1, \cdots, q_y\} = \varnothing$，则命题已成立. 如果存在 $i \in \{p_1, \cdots, p_x\} \cap \{q_1, \cdots, q_y\}$，我们记 $\overline{C} = \{A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}\}$，$\overline{D} = \{A_{j_1}, \cdots, A_{j_m}\}$，$\overline{E} = \{A_{r_1}, \cdots, A_{r_u}\}$，$\overline{F} = \{A_{t_1}, \cdots, A_{t_v}\}$，并且不妨认定 A_i 不同时属于 $\overline{C}$ 和 $\overline{E}$，也不同时属于 $\overline{D}$ 和 $\overline{F}$. 于是，只有两种可能.

(a) $A_i \in \overline{C}$ 且 $A_i \in \overline{F}$. 如果 $\overline{C}$ 中有两个集合都含有 $n+1$，则在④式的左边去掉集合 A_i，此时由于 A_i 中除可能含有 $n+1$ 外，其余的元素都属于 E（这一点由③式可知），而且④式的左边有两个集合含 $n+1$，从而去掉 A_i 后，G 的元素个数并没有减少，④式仍然是等式. 同样，如果 $\overline{F}$ 中有两个集合含有 $n+1$，则在④式的右边去掉 A_i，④式仍然成立.

当然，如果 $\overline{C}$ 与 $\overline{F}$ 中都只有一个集合含 $n+1$，则在④式的两边都去掉 A_i 后仍然为等式（此时由②，③知④式的两边不会变为空集）.

(b) $A_i \in \overline{D}$，且 $A_i \in \overline{E}$，则 $n+1 \notin A_i$，此时在④式的两边都去掉 A_i 后仍为等式.

上述操作表明，我们有办法使得④式两边各集合的下标 $\{p_1, \cdots, p_x\}$ 与 $\{q_1, \cdots, q_y\}$ 不交，所以命题对 $n+1$ 成立.

综上可知，命题成立.

评析 数学归纳法在解组合题中的运用也相应广泛，我们必须保证头脑清醒、思维清晰，必要时可运用多重数学归纳法.

例 9 设 $n\ (n \geqslant 2)$ 为正整数，试求所有的实系数多项式 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，使得 $P(x)$ 恰好有 n 个不大于 -1 的实数根，并且 $a_0^2 + a_1 a_n = a_n^2 + a_0 a_{n-1}$.

解：由条件可设 $P(x) = a_n(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n)$，其中 $\beta_i \geqslant 1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，而且 $a_n \neq 0$.

由 $a_0^2 + a_1 a_n = a_n^2 + a_0 a_{n-1}$ 得 $a_n^2\left(\prod_{i=1}^n \beta_i\right)^2 + a_n^2\left(\prod_{i=1}^n \beta_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}\right) = a_n^2 + \left(\prod_{i=1}^n \beta_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)a_n^2$.

于是 $\prod_{i=1}^n \beta_i - \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} = \sum_{i=1}^n \beta_i - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i}$ …①

下面对于 n 用数学归纳法证明：

当 $\beta_i \geqslant 1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，均有

$$\prod_{i=1}^{n}\beta_i-\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\beta_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}.$$

等号当且仅当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中有 $n-1$ 个数等于 1 时成立.

当 $n=2$ 时,若 $\beta_1,\beta_2\geqslant 1$,则有

$$\beta_1\beta_2-\frac{1}{\beta_1\beta_2}\geqslant(\beta_1+\beta_2)-\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2)^2-1\geqslant(\beta_1+\beta_2)(\beta_1\beta_2-1)$$

$$\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2-1)(\beta_1-1)(\beta_2-1)\geqslant 0.$$

所以,当 $n=2$ 时,上述命题成立.

假设当 $n=k$ 时成立,则当 $n=k+1$ 时,令 $\alpha=\beta_k\beta_{k+1}$,由归纳假设可知

$$\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i-\prod_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\beta_i}\geqslant\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\beta_i}+\alpha-\frac{1}{\alpha}.$$

等号当且仅当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1},\alpha$ 中有 $k-1$ 个数等于 1 时成立.

又由 $n=2$ 的情形可知

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=\beta_k\beta_{k+1}-\frac{1}{\beta_k\beta_{k+1}}\geqslant\beta_k+\beta_{k+1}-\frac{1}{\beta_k}-\frac{1}{\beta_{k+1}}.$$

于是,$\prod\limits_{i=1}^{n+1}\beta_i-\prod\limits_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\beta_i}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n+1}\beta_i-\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\beta_i}$.

等号当且仅当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1},\alpha$ 中有 $k-1$ 个为 1,并且 β_k,β_{k+1} 中有一个为 1 时成立.

而这等价于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1},\beta_k,\beta_{k+1}$ 中有 k 个为 1 时成立.

即结论对于 $n=k+1$ 也成立,从而结论对于所有的正整数成立.

由上述结论以及 ① 式可知,形如 $P(x)=a_n(x+1)^{n-1}(x+\beta)(a_n\neq 0,\beta\geqslant 1)$ 的多项式为所有满足条件的多项式.

例 10 (2005 年中国国家集训队测验题)设 k 是正整数,求证:可以将集合 $\{0,1,2,\cdots,2^{k+1}-1\}$ 分成两个没有公共元素的子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^k}\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_{2^k}\}$,使得对任何 $m\in\{1,2,\cdots,k\}$ 都有 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^m=\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^m$ 成立.

证明:对 k 用数学归纳法.

当 $k=1$ 时,令 $x_1=0$, $x_2=3$, $y_1=1$, $y_2=2$ 即可,故 $k=1$ 时命题成立.

假设命题在小于自然数 k 时成立. 考虑 $k+1$ 的情况.

由归纳假设知,$\{0,1,2,\cdots,2^{k+1}-1\}$ 可以被分成满足条件的两个子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^k}\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_{2^k}\}$,则

$\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^k},2^{k+1}+y_1,2^{k+1}+y_2,\cdots,2^{k+1}+y_{2^k}\}\cup\{y_1,y_2,\cdots,y_{2^k},2^{k+1}+x_1,2^{k+1}+x_2,\cdots,2^{k+1}+x_{2^k}\}=\{0,1,2,\cdots,2^{k+2}-1\}$,且这两个集合没有公共元素.

下面证明：对 $m=1,2,\cdots,k+1$，有 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum\limits_{i=1}^{2^k}(2^{k+1}+y_i)^m=\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum\limits_{i=1}^{2^k}(2^{k+1}+x_i)^m\cdots(*)$

事实上，$(*)\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum\limits_{t=0}^{m-1}C_m^t(2^{k+1})^{m-t}\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^t=\sum\limits_{i=1}^{2^k}y_i^m+\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^m+\sum\limits_{t=0}^{m-1}C_m^t(2^{k+1})^{m-t}\sum\limits_{i=1}^{2^k}x_i^t\Leftrightarrow\sum\limits_{t=0}^{m-1}C_m^t(2^{k+1})^{m-t}\sum\limits_{i=1}^{2^k}(x_i^t-y_i^t)=0$.

由归纳假设，对 $t=1,2,\cdots,m-1$，有 $\sum\limits_{i=1}^{2^k}(x_i^t-y_i^t)=0$. 故 $(*)$ 成立. 进而命题在 $k+1$ 时成立.

评析 显然，本题宜用数学归纳法，而关键的一步是证明 $\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}x_i^{k+1}=\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}y_i^{k+1}$. 而要证明这一步的办法就是将两边的集合列出来. 如果拥有庞大的阅题量与十足的预见力的话，直接就可以看出来. 假如你不拥有这样的能力，最好还是选择尝试法，从找规律入手.

例 11 （2005 年中国国家队训练题）设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个不同正整数，且都不含平方因子（其中允许有一个 1），则对任意非零有理数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\sqrt{a_i}\neq 0$.

注：若不存在正整数 $d>1$，使得 $d^2\mid n$，则称正整数 n 不含平方因子.

证明：不妨设 $b_i\in\mathbf{Z}\ (1\leqslant i\leqslant k)$，我们将证明更强的结论.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 所含的素因子集合为 P，令 $X=\{\sum\limits_{j=1}^{l}d_j\sqrt{c_j}\mid c_1,c_2,\cdots,c_l$ 是不同正整数，都不含平方因子，且所含素因子都属于 P，$d_1,d_2,\cdots,d_l\in\mathbf{Z}$，$l\in\mathbf{Z}^+\}$.

我们来证明：对 $s=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\sqrt{a_i}\in\mathbf{X}$，其中 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 都不为零，必存在 $s'\in\mathbf{X}$，使得 $s\cdot s'\in\mathbf{Z}^*$，其中 $\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}\backslash\{0\}$.

对于 $|P|$ 进行归纳：

当 $|P|=0$ 时，$s=b_1\neq 0\ (k=1,a_1=1)$，结论显然成立.

当 $|P|=1$ 时，$s=x+y\sqrt{p_1}$，x,y 不全为零. 取 $s'=x-y\sqrt{p_1}$，易知 $s\cdot s'=x^2-p_1y^2\neq 0$.

假设当 $|P|<n$ 时命题成立（$n\geqslant 2$），考察 $|P|=n$ 的情形.

设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，令 $Y=\{\sum\limits_{j=1}^{l}d_j\sqrt{c_j}\mid c_1,c_2,\cdots,c_l$ 是不同正整数，都不含平方因子且所含素因子都属于 $\{p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}\}$，$d_1,d_2,\cdots,d_l\in\mathbf{Z}$，$l\in\mathbf{Z}^+\}$.

记 $s=s_1+s_2\sqrt{p_n}$，$s_1,s_2\in\mathbf{Y}$.

由归纳假设，存在 $s_3 \in \mathbf{Y}$，使得 $f = s_2 s_3 \in \mathbf{Z}^*$.

考察 $s_3 s = s_3(s_1 + s_2\sqrt{p_n}) = s_3 s_1 + f\sqrt{p_n} = s_4 + f\sqrt{p_n}(s_4 \in Y)$，则 $s_5 = s_3 s(s_4 - f\sqrt{p_n}) = (s_4 + f\sqrt{p_n})(s_4 - f\sqrt{p_n}) = s_4^2 - f^2 p_n \in \mathbf{Y}$.

如果 $s_4 = 0$，则 $s_5 \in \mathbf{Z}^*$，取 $s' = s_3(s_4 - f\sqrt{p_n}) \in \mathbf{X}$ 即可.

如果 $s_4 \neq 0$，设 $s_4 = \sum\limits_{j=1}^{m} y_i\sqrt{x_i}(y_i \in Z^*)$，若 $m = 1$，则 $s_5 = y_1^2 x_1 - f^2 p_n \in \mathbf{Z}^*$.

若 $m > 1$，由于 x_1，x_2 是不同正整数，且都不含平方因子，故 x_1，x_2 所含的素因子集合不同，不妨设 $|P|\mid x_1$，$|P \nmid x_2$，可设 $s_4 = s_6 + s_7\sqrt{p}(s_6, s_7 \in \mathbf{W})$，其中 $W = \{\sum\limits_{j=1}^{l} d_j\sqrt{c_j} \mid c_1, c_2, \cdots, c_l$ 是不同正整数都不含平方因子，且所含素因子都属于 $P\backslash\{p_n, p\}, d_1, d_2, \cdots, d_l \in \mathbf{Z}, l \in \mathbf{Z}^+\}$.

由 P 的取法和归纳假设知 $s_6 \neq 0$，$s_7 \neq 0$. 则 $s_5 = (s_6^2 + s_7^2 p - f^2 p_n) + 2s_6 s_7\sqrt{p}$.

因为 $s_6^2 + s_7^2 p - f^2 p_n \in \mathbf{W}$，$0 \neq 2s_6 s_7 \in \mathbf{W}$，由归纳假设知 $s_5 \neq 0$.

再用归纳假设知，存在 $s_8 \in \mathbf{Y}$，使得 $g = s_5 s_8 \in \mathbf{Z}^*$.

于是，令 $s' = s_8 s_3(s_4 - f\sqrt{p_n} \in \mathbf{X}$，则有 $ss' = s_5 s_8 = g \in \mathbf{Z}^*$.

评析　加强命题也是归纳法应用的一种.

思考交流

有时候，直接证明所给的命题不太容易，我们可以采取证明比原来更强的命题，通常有两种情形：一是将原命题一般化，二是把原命题的结论加深，从而便于应用数学归纳法.

思考题 1　设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$，求证：当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right).$$

证明：加强命题为

$$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) + \frac{1}{n}, \qquad ①$$

当 $n = 2$ 时，$a_2^2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$，

$2(\frac{a_2}{2}) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. 故 ① 式成立.

假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时，命题成立，即 $a_k^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}$，则

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}^2&=\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2=a_k^2+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}+\frac{2}{k+1}\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\\
&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k+1},
\end{aligned}
$$

即　$n=k+1$，① 式也成立.

所以，对正整数 $n\geqslant 2$，① 式都成立，从而原命题也成立.

思考题 2　设数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_0=\frac{1}{2}$，及 $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$，其中 n 是一个给定的正整数. 试证：$1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

证明：由于 $a_1=a_0+\frac{1}{n}a_0^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}=\frac{2n+1}{4n}$，所以有 $\frac{n+1}{2n+1}<a_1<\frac{n}{2n-1}$，下面用数学归纳法证明，对一切 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $\frac{n+1}{2n-k+2}<a_k<\frac{n}{2n-k}$，　①

假设 ① 对 $k<n$ 时成立，则

$$
a_{k+1}=a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right)<\frac{n}{2n-k}\left(1+\frac{1}{2n-k}\right)=\frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2}<\frac{n}{2n-(k+1)},
$$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&=a_k+\frac{1}{n}a_k^2>\frac{n+1}{2n-k+2}+\frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}\\
&=\frac{n+1}{2n-k+1}-\frac{n+1}{(2n-k+2)(2n-k+1)}+\frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}\\
&=\frac{n+1}{2n-(k+1)+2}+\frac{n+1}{2n-k+2}\left(\frac{n+1}{n(2n-k+2)}-\frac{1}{2n-k+1}\right)\\
&>\frac{n+1}{2n-(k+1)+2},
\end{aligned}
$$

所以对 $k+1\leqslant n$，① 式仍成立，即 ① 式对一切 $k=1,2,\cdots,n$ 成立.

在 ① 式中的 $k=n$，即得 $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

[注]：本题若不加强命题，证明过程十分繁琐，读者不妨一试.

能力训练

1.(第 12 届韩国竞赛题)设函数 $f(x)$ 对所有的有理数 m, n,都有 $|f(m+n)-f(m)| \leqslant \frac{n}{m}$.求证:对所有正整数 k,有 $\sum\limits_{i=1}^{k} |f(2^k)-f(2^i)| \leqslant \frac{k(k-1)}{2}$.

2. 以 $[u]$ 表示实数 u 的整数部分.求证:对任何给定的自然数 n 和实数 x,都有 $[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx]$.

3. 设 $A_n=3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$(共 n 重 3),$B_n=8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}$(共 n 重 8).求证:对一切自然数 n,都有 $A_{n+1}>B_n$.

4. 试证,对任何 $n \in \mathbf{N}^*$,方程 $x^2+y^2=z^n$ 都有正整数解.

5. 已知序列 a_1, a_2,…,a_n,… 满足

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ a_n=\frac{1}{3n-1}(a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-2}a_2+a_{n-1}a_1)\ (n \geqslant 2) \end{cases}$$

.求证:$a_{n+1}<a_n$.

6. 有一个 9×2004 的方格表,在它的方格里边把正整数 1 到 2004 各填 9 次,且在每一列中所填的数之差都不大于 3.试求第一行数的和的最小可能值.

7. 设 $0!=1$,m 与 n 为任意的非负整数,试证:$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是正整数.

8. 设空间中有 $2n$ $(n \geqslant 2)$ 个点,其中任何四点都不共面,它们之间连有 n^2+1 条线段.求证:这些线段必能构成两个有公共边的三角形.

9. 将边长为正整数 m, n 的矩形划分成若干个边长均为正整数的正方形,每个正方形的边均平行于矩形的相应边.试求这些正方形边长之和的最小值.

10.(1997 年美国数学奥林匹克)设非负整数 a_1, a_2,…,a_{1997} 满足 $a_i+a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i+a_j+1$ $(1 \leqslant i, j, i+j \leqslant 1997)$.求证:存在实数 x,对所有 $1 \leqslant n \leqslant 1997$,满足 $a_n=[nx]$.

参考答案

第一讲　等差与等比数列

一、选择题

1. 选 B.

略解：因为 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_5+a_5)}{2}$，所以 $a_5=2$.

而 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_5+a_{n-4})}{2}=\frac{n(2+30)}{2}=336$，所以 $n=21$.

2. 选 D.

略解：$S_n=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}\cdot n$，由已知有 $\begin{cases}q=\frac{d}{2}p^2+\frac{2a_1-d}{2}p\cdots ①,\\ p=\frac{d}{2}q^2+\frac{2a_1-d}{2}q\cdots ②\end{cases}$

① − ② 得 $q-p=\frac{d}{2}(p^2+q^2)+\frac{2a_1-d}{2}(p-q)$.

因为 $p-q\neq 0$，所以 $-1=\frac{d}{2}(p+q)+\frac{2a_1-d}{2}$.

上式两边同乘以 $p+q$，即有 $-(p+q)=\frac{d}{2}(p+q)^2+\frac{2a_1-d}{2}(p+q)=S_{p+q}$.

即 $S_{p+q}=-(p+q)$.

3. 选 D.

略解：由已知 $2^5=\sqrt[11]{a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdots\cdot a_1q^{10}}=\sqrt[11]{a_1^{11}q^{\frac{10(10+1)}{2}}}=\sqrt[11]{a_1^{11}q^{55}}=a_1q^5$.

因为 $a_1=2^{-5}$，所以 $q=2^2=4$. 设被抽去的项为 $a_n=a_1q^{n-1}$，则 $2^4=\sqrt[10]{\frac{a_1^{11}q^{55}}{a_1q^{n-1}}}=\sqrt[10]{a_1^{10}q^{56-n}}$.

所以 $n=56-45=11$，即被抽去的是第 11 项.

4. 选 C.

略解：由 $y=\dfrac{x^2-x+n}{x^2+x+1}$ 得 $(y-1)x^2+(y+1)x+(y-n)=0$. 因 $x\neq\dfrac{n-1}{2}$，则 $y\neq 1$.

上述一元二次方程有实根，则 $\Delta=(y+1)^2-4(y-1)(y-n)\geqslant 0$，即 $3y^2-(4n+6)y+(4n-1)\leqslant 0$.

由题设知 a_n，b_n 是关于 y 的方程 $3y^2-(4b+6)y+(4n-1)=0$ 的两个根，则 $a_n+b_n=\dfrac{1}{3}(4n+6)$，$a_nb_n=\dfrac{1}{3}(4n-1)$.

从而 $c_n=1-(a_n+b_n)+a_nb_n=1-\dfrac{1}{3}(4n+6)+\dfrac{1}{3}(4n-1)=-\dfrac{4}{3}$. 故 $\{c_n\}$ 是常数列.

5. 选 C.

略解：由题设 $a_n=a_1q^{n-1}$，则 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{3n-1}+a_{3n+2}+a_{3n+3}}{a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}}=\dfrac{a_1q^{3n}+a_1q^{3n+1}+a_1q^{3n+2}}{a_1q^{3n-3}+a_1q^{3n-2}+a_1q^{3n-1}}$
$=\dfrac{a_1q^{3n}(1+q+q^2)}{a_1q^{3n-3}(1+q+q^2)}=q^3$，因此 $\{b_n\}$ 是公比为 q^3 的等比数列.

6. 选 C.

略解：在新数列中各项的和是 $1+\dfrac{1}{r}+\cdots+\dfrac{1}{r^{n-1}}=\dfrac{r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+1}{r^{n-1}}=\dfrac{s}{r^{n-1}}$.

二、填空题

7. 4835.

略解：设该数列首项为 a_1，$a_1\in\mathbf{Z}$，公差 $d=2$，前 n 项之和为 $S=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=(a+n-1)n=2000$.

由于 $2000=2^4\cdot 5^3$，所以 n 的值为 2000 的因数，则所有可能的 n 值之和为 $(1+5+25+125)(1+2+4+8+16)-1=4835$.

8. $\dfrac{128}{257}$.

略解：因为 $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2})$，则 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{n}{2n+1}$.

当 $n=128$ 时，所求和式为 $\dfrac{128}{2\cdot 128+1}=\dfrac{128}{257}$.

另解：因为$\frac{1}{n(n-k)}+\frac{1}{n(n+k)}=\frac{2}{(n-k)(n+k)}$，故所求和式是 $2(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{253\cdot 257})=4(\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{249\cdot 257})=\cdots=128(\frac{1}{1\cdot 257})=\frac{128}{257}$.

9. $2\frac{2}{3}$.

略解：设两个数列的公差分别为 d, d'，则 $y-x=4d=3d'$. 故$\frac{d}{d'}=\frac{3}{4}$. 于是$\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=\frac{2d'}{d}=2\times\frac{4}{3}=2\frac{2}{3}$.

10. 27.

略解：由题意 $r\in\mathbf{Q}$，即有互素的正整数 p, $q(p>q\geqslant 2)$，使 $r=\frac{q}{p}$，则 $a_4=a_1r^3=\frac{a_1q^3}{p^3}$.

因为 $a_4\in\mathbf{Z}$，所以 a_1 是 p^3 的倍数. 故可设 $a_1=kp^3$(k 是正整数)，于是 $a_4=kq^3$.

而 $q>p\geqslant 2$，故为使 a_4 最小，必有 $k=1$, $q=3$，此时 $a_4=27$，此数列为 8, 12, 18, 27.

11. $(\frac{S}{S'})^{\frac{1}{2}n}$.

略解：设该数列是 a, ar, ar^2, $\cdots$, ar^{n-1}，则 $P=a^nr^{\frac{1}{2}(n-1)n}$, $S=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}$, $S'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-r^{-n}}{1-r^{-1}}=\frac{r^{-(n-1)}}{a}\cdot\frac{1-r^n}{1-r}$.

所以$\frac{S}{S'}=a^2r^{n-1}$，故 $(\frac{S}{S'})^{\frac{1}{2}n}=a^nr^{\frac{1}{2}(n-1)n}=P$.

12. 7.

略解：设 n 是写在黑板上的最大的一个整数.

若 1 是被擦去的那个数，则可以得到最大的算术平均值 $\frac{2+3+\cdots+n}{n-1}=\frac{\frac{(n+1)n}{2}-1}{n-1}=\frac{n+2}{2}$;

若 n 是被擦去的那个数，则得到最小的算术平均值 $\frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n-1}=\frac{n(n-1)}{2(n-1)}=\frac{n}{2}$.

于是有 $\frac{n}{2} \leqslant 35\frac{7}{17} \leqslant \frac{n+2}{2}$，即 $n \leqslant 70\frac{14}{17} \leqslant n+2$.

因而 $68\frac{14}{17} \leqslant n \leqslant 70\frac{14}{17}$. 由此 $n = 69$ 或 70.

因为 $35\frac{7}{17}$ 是以 $n-1$ 个整数的算术平均值，所以 $(35\frac{7}{17})(n-1)$ 一定是个整数. 而当 $n = 70$ 时，这是不可能的，所以 $n = 69$.

如果 x 是被擦去的那个数，那么 $\frac{\frac{69 \cdot 70}{2} - x}{68} = 35\frac{7}{17}$，即 $69 \cdot 35 - x = 35\frac{7}{17} \cdot 68 = 35 \cdot 68 + 28$，亦即 $35 - x = 28$，解得 $x = 7$.

三、解答题

13. 解：设所求公差为 d，因为 $a_1 < a_2$，所以 $d > 0$.

由此得 $a_1^2(a_1+2d)^2 = (a_1+d)^4$，即 $2a_1^2 + 4a_1d + d^2 = 0$，解之得 $d = (-2\pm\sqrt{2})a_1$.

而 $-2\pm\sqrt{2} < 0$，故 $a_1 < 0$.

若 $d = (-2-\sqrt{2})a_1$，则 $q = \frac{a_2^2}{a_1^2} = (\sqrt{2}+1)^2$；

若 $d = (-2+\sqrt{2})a_1$，则 $q = \frac{a_2^2}{a_1^2} = (\sqrt{2}-1)^2$.

但 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n) = \sqrt{2}+1$，故 $|q| < 1$，于是 $q = (\sqrt{2}+1)^2$，这是不可能的.

从而 $\frac{a_1^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}+1$，解得 $a_1^2 = (2\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+1) = 2$.

所以 $a_1 = -\sqrt{2}$，$d = (-2+\sqrt{2})a_1 = 2\sqrt{2}-2$，即 $\{a_n\}$ 是首项为 $-\sqrt{2}$、公差为 $2\sqrt{2}-2$ 的等差数列.

14. 解：(1) $S_1 = a_1 = 2$，$S_n = 2(\frac{1}{3})^{n-1}$.

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2(\frac{1}{3})^{n-1} - 2(\frac{1}{3})^{n-2} = 2(\frac{1}{3})^{n-1}(1-3) = -4(\frac{1}{3})^{n-1}$.

所以 $a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ -4(\frac{1}{3})^{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$.

(2) $b_n = a_nS_n = -4(\frac{1}{3})^{n-1} \cdot 2(\frac{1}{3})^{n-1} (n \geqslant 2) = -8(\frac{1}{3})^{2(n-1)}$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = a_1S_1 + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=2}^{n} b_i = 4 + \frac{-8(\frac{1}{3})^2}{1-\frac{1}{9}} = 4 - 1 = 3$.

15. 解:由 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 可推出 $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \cdots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \cdots < a_{n-1} + a_n \cdots$①

不等式链 ① 恰好有 $2n-3$ 个不同的和 $a_i + a_j$.

(ⅰ)首先证明,若 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 成等差数列,则 $a_i + a_j (1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j)$ 中互不相同的数恰好有 $2n-3$ 个.

事实上,当 $i + j \leqslant n$ 时,$a_i + a_j = a_1 + a_{i+j-1}$.

当 $i + 1 > n$ 时,$a_i + a_j = a_{i+j-n} + a_n$.

于是,所有 $a_i + a_j$ 均与不等式链中的某个数相同,即 $a_i + a_j$ 恰好有 $2n-3$ 个不同的数.

(ⅱ)其次证明,若 $a_i + a_j$ 中恰好有 $2n-3$ 个数,则 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 构成等差数列.

由于 $a_1 + a_{n-1} < a_2 + a_{n-1} < a_2 + a_n \quad \cdots$②

$a_1 + a_{n-1} < a_1 + a_n < a_2 + a_n \quad \cdots$ ③

由 ②、③ 得 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$.

一般地,由 $n \geqslant 5$,对于 $1 < i < n-2$,假设有 $a_i + a_{n-1} = a_{i-1} + a_n$,则

由 $a_{i-1} + a_n = a_i + a_{n-1} < a_{i+1} + a_{n-1} < a_{i+1} + a_n \cdots$④

再由不等式链 ① 有 $a_{i-1} + a_1 < a_i + a_n < a_{i+1} + a_n \cdots$⑤

由 ④、⑤ 得 $a_{i+1} + a_{n-1} = a_i + a_n$.

于是,由数学归纳法可得

$a_i + a_{n-1} = a_{i-1} + a_n (1 < i < n-1)$, $a_i - a_{i-1} = a_n - a_{n-1} \cdots$⑥

此外,由于$a_1 + a_{n-2} < a_2 + a_{n-2} < a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \cdots$ ⑦

$a_1 + a_{n-2} < a_1 + a_{n-1} < a_1 + a_n \quad \cdots$⑧

由 ⑦、⑧ 得 $a_2 + a_{n-2} = a_1 + a_{n-1}$,即 $a_{n-1} - a_{n-2} = a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1}$.

于是,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成等差数列.

第二讲　递归数列(一)

一、选择题

1. 选 C.

略解:原递推式可化为 $3(a_{n+1}-1) = -(a_n - 1)$(其中 $x=1$ 是方程 $3x+x=4$ 的根).

令 $b_n = a_n - 1$,则 $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$, $b_1 = \frac{1}{3}b_n$, $b_1 = a_1 - 1 = 8$,故 b_n 是首项为 8、公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列,所以 $S_n - n = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_n - n) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{8[1-(-\frac{1}{3})^n]}{1-(-\frac{1}{3})} = 6 - 6 \cdot (-\frac{1}{3})^n$,于是由 $|S_n - n - 6| = 6 \cdot (\frac{1}{3})^n < \frac{1}{125}$ 得 $3^{n-1} > 250$.

而满足这个不等式的最小正整数 $n=7$.

2. 选 A.

略解：经计算知数列 $\{x_n\}$ 的前几项是 $a, b, b-a, -a, -b, a-b, a, b, b-a, -a, -b, a-b, \cdots$. 由此看出 $x_{n+6}=x_n$（事实上 $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}=(x_{n-1}-x_{n-2})-x_{n-1}=x_{n-2}$，故 $x_{n+6}=-x_{n+3}=x_n$），即 $\{x_n\}$ 是周期为 6 的数列，所以 $x_{100}=x_{6\times16+4}=x_4=-a$. 又 $x_{6k+1}+x_{6k+2}+x_{6k+3}+x_{6k+4}+x_{6k+5}+x_{6k+6}=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=a+b+(b-a)+(-a)+(-b)+(a-b)=0$，所以 $S_{100}=S_{6\times15+4}=S_4=a+b+(b-a)+(-a)=2b-a$.

3. 选 B.

4. 选 A.

略解：由 $\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$ 知 $S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{2}$.

5. 选 C.

略解：当 $p>q$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{q}{p})^n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p^{n+1}-q^n}{p^{n+2}-2q^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p-(\frac{q}{p})^n}{p^2-2\left(\frac{q}{p}\right)^n\cdot q}=\frac{p-0}{p^2-0}=\frac{1}{p}$；当 $p<q$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{p}{q})^n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p^{n+1}-q^n}{p^{n+2}-2q^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(\frac{p}{q})^n-1}{p^2(\frac{p}{q})^n-2q}=\frac{0-1}{0-2q}=\frac{1}{2q}$；当 $p=q$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p^{n+1}-q^n}{p^{n+2}-2q^{n+1}}=\frac{p-1}{p^2-2q}$.

6. 选 B.

略解：$f(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+3}$，$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+2}$.

二、填空题

7. $\frac{2^{n+2}-n-3}{3}$.

略解：由已知得 $\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{3}=2(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3})$，而 $\frac{1}{a_0}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，所以 $\{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项、2 为公比的等比数列（$n\in\mathbf{N}$），所以 $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}=(\frac{2}{3})\times2^n$，$\frac{1}{a_n}=\frac{2^{n+1}-1}{3}$. 从而 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{2^{n+1}-1}{3}=\frac{1}{3}[\sum\limits_{i=0}^{n}2^{i+1}-(n+1)]=\frac{2^{n+2}-n-3}{3}$.

8. $a_n=2\cdot3^{n-1}-4^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

略解：题设递归关系式的特征方程为 $x^2=7x-12$，它的两个根为 3 和 4，故数列 $\{a_n\}$ 的通项可设为 $a_n=A\cdot 3^n+B\cdot 4^n$，其中 $a_1=1$，$a_2=2$，于是由 $\begin{cases}3A+4B=1\\9A+16B=2\end{cases}$ 得 $\begin{cases}A=\dfrac{2}{3}\\B=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$，所以 $a_n=2\cdot 3^{n-1}-4^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

9. $a_n=2^{3n-2}+2^{n+1}-4$，$b_n=2^{3n-2}-2^{n+1}+3\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

略解：记 $\begin{cases}a_{n+1}=5a_n+3b_n+7\cdots ①\\b_{n+1}=3a_n+5b_n\quad\ \cdots ②\end{cases}$

由 ① 和 ② 得 $1+a_{n+1}+b_{n+1}=8(a_n+b_n+1)$，故 $\{a_n+b_n+1\}$ 成等比数列，公比为 8.

于是 $a_n+b_n+1=8^n(a_1+b_1+1)=2^{3n-1}\cdots ③$

① − ② + 7 得 $a_{n+1}-b_{n+1}+7=2(a_n-b_n+7)$，即 $\{a_n-b_n+7\}$ 成等比数列，公比为 2.

故 $a_n-b_n+7=2^{n-1}(a_1-b_1+7)=2^{n+2}\cdots ④$

③ + ④ 得 $2a_n+8=2^{3n-1}+2^{n+2}$，即 $a_n=2^{3n-2}+2^{n+1}-4(n\in\mathbf{N}^*)$.

③ − ④ 得 $2b_n-6=2^{3n-1}-2^{n+2}$，即 $b_n=2^{3n-2}-2^{n+1}+3\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

10. $2+\sqrt{3}$.

略解：设 $a_n=\tan\theta_n$，则 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$，$\tan\theta_{n+1}=a_{n+1}=\dfrac{a_n-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+a_n\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\tan(\theta_n-\dfrac{\pi}{6})$，即 $\theta_{n+1}=\theta_n-\dfrac{\pi}{6}$. 因此 $\theta_{2004}=\dfrac{\pi}{4}+2003\times(-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{2004\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$. 从而 $a_{2004}=\tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$.

11. 933.

略解：由题设 $a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n=-2$，设 $b_n=a_na_{n+1}$，则 $b_{n+1}-b_n=-2$. 因为 $b_1=19\times 98=1862$，所以 $b_{931}=2$，$b_{932}=0$，因此 $a_{931}a_{932}=2$，$a_{932}a_{933}=0$. 所以 $a_{933}=0$，$m=933$.

12. 4008.

略解：数列的前若干项为 1，2，3，1，2，3，…，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{2004}=(1+2+$

$3)\times\frac{2004}{3}=4008$.

三、解答题

13. 证明：由已知条件 $b_n=\frac{1}{6}(a_{n+1}-7a_n+3)$，代入 $b_{n+1}=8a_n+7b_n-4$ 后整理得 $a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n-6$，即 $a_{n+2}-\frac{1}{2}=14(a_{n+1}-\frac{1}{2})-(a_n-\frac{1}{2})$（这里 $\frac{1}{2}$ 是方程 $x=14x-x-6$ 的根）.

令 $d_n=a_{n+1}-\frac{1}{2}$，则 $d_{n+2}=14d_{n+1}-d_n$，利用特征根法可求出 $d_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n$.

所以 $a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}=[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n]^2$.

设 $(2+\sqrt{3})^n=A_n+B_n\sqrt{3}$，这里 A_n，B_n 为正整数，则 $(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n\sqrt{3}$.

于是 $a_n=A_n^2$ 为完全平方数.得证.

14. 解：由递推关系式得

$a_{n+2}-\frac{8}{1-(6-9)}=6(a_{n+1}-\frac{8}{1-(6-9)})-9(a_n-\frac{8}{1-(6-9)})$，即 $a_{n+2}-2=6(a_{n+1}-2)-9(a_{n-2}-2)(n\in\mathbf{N}^*)$.

令 $b_n=a_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$，则

$b_1=a_1-2=-2$，$b_2=a_2-2=-2$，$b_{n+2}=6b_{n+1}-9b_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

其特征方程为 $x^2=6x-9$，解之得 $x_1=x_2=3$.

故可令 $b_n=(Cn+D)\cdot3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

由 $b_1=b_2=-2$ 得 $\begin{cases}C+D=-2\\(2C+D)3=-2\end{cases}$，解之得 $C=\frac{4}{3}$，$D=-\frac{10}{3}$.

所以 $b_n=(\frac{4}{3}n-\frac{10}{3})\cdot3^{n-1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

数列的前 n 项和为

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}[(\frac{4}{3}n-\frac{10}{3})\cdot3^{n-1}+2]=\frac{4}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}-\frac{10}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}3^{k-1}+2n$.

令 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}$，则

$T_n-3T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}-\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot3^{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}3^{k-1}-n\cdot3^n=\frac{3^n-1}{3-1}-n\cdot3^n=\frac{3^n-1}{2}-$

$n \cdot 3^n$.

所以 $T_n = \frac{1}{2}[n \cdot 3^n - \frac{3^n - 1}{2}]$.

故 $S_n = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}[n \cdot 3^n - \frac{3^n - 1}{2}] - \frac{10}{3} \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 2n = (2n-6) \cdot 3^{n-1} + 2(n+1)(n \in \mathbf{N}^*)$.

15. 解:设想数列的递推公式可以写成

$a_{n+1} - [x_1(n+1)^2 + x_2(n+1) + x_3] = \alpha[a_n - (x_1 n^2 + x_2 n + x_3)]$.

为了求出 x_1, x_2, x_3,把它整理成与原递推式一样的形式

$a_{n+1} = \alpha a_n + (x_1 - \alpha x_1)n^2 + (2x_1 + x_2 - \alpha x_2)n + (x_1 + x_2 + x_3 - \alpha x_3) \cdots$②

将它与原递推公式比较得$\begin{cases} x_1 - \alpha x_1 = \beta_2 \\ 2x_1 + (1-\alpha)x_2 = \beta_1 \\ x_1 + x_2 + (1-\alpha)x_3 = \beta_0 \end{cases}$.

因为 $\alpha \neq 1$,故这个方程组有唯一组解.

因此,当 x_1, x_2, x_3 是上述方程组的解时,递推公式 ① 可写成 ②.

令 $b_n = a_n - (x_1 n^2 + x_2 n + x_3)$,则 $b_1 = a_1 - (x_1 + x_2 + x_3)$,且 $b_{n+1} = \alpha b_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

于是数列$\{b_n\}$ 是公比为 α、首项为 b_1 的等比数列.

故 $b_n = b_1 \alpha^{n-1} = [a_1 - (x_1 + x_2 + x_3)]\alpha^{n-1}$.

所以 $a_n - (x_1 n^2 + x_2 n + x_3) = [a_1 - (x_1 + x_2 + x_3)] \cdot \alpha^{n-1}$.

故数列$\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = [a_1 - (x_1 + x_2 + x_3)] \cdot \alpha^{n-1} + x_1 n^2 + x_2 n + x_3 (n \in \mathbf{N}^*)$.

因此,数列$\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = [a_1 - (x_1 + x_2 + x_3)] \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} + x_1 \sum_{k=1}^{n} k^2 + x_2 \sum_{k=1}^{n} k + x_3 n$$

$$= [a_1 - (x_1 + x_2 + x_3)] \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} + \frac{x_1 n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{x_2 n(n+1)}{2} + n x_3 (n \in \mathbf{N}^*).$$

第三讲　递归数列(二)

一、选择题

1. 选 A.

略解:由 $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$ 得 $a_{n+2} = -\frac{1}{a_{n+1} + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{a_n + 1} + 1} = -1 - \frac{1}{a_n}$, $a_{n+3} = -\frac{1}{a_{n+2} + 1} = -\frac{1}{-1 - \frac{1}{a_n} + 1} = a_n$. 则 $a_{2001} = a_{666 \cdot 3 + 3} = a_3 = -\frac{1}{a_2 + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{a_1 + 1} + 1} = -\frac{3}{2}$.

2. 选 D.

略解：由 $a_n = S_{n-1} + 2n + 1$ 得 $a_{n+1} = S_n + 2n + 3$，两式相减得 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ $(n \geqslant 2)$，即 $a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$. 而数列 $\{a_n + 2\}$ 从第 2 项开始成等比数列，故 $a_{2005} = 11 \times 2^{2003} - 2$.

3. 选 A.

略解：代入 $a_1 = 3$ 得 $a_2 = 6$，代入 $a_n = 3n$ 得 $a_{n+1} = 3(n+1)$.

4. 选 C.

略解：因为 $a_n > 0$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{100^n(n-1)!}{100^{n-1}n!} = \frac{100}{n}$，当 $n \geqslant 100$ 时，$a_{n-1} \geqslant a_n$，递减.

5. 选 D.

略解：设第 k 个 1 是 $\{a_k\}$ 中的第 b_k 项，则 $b_1 = 1$，$b_{k+1} = b_k + 2k$. 由叠加法可得 $b_{k+1} = b_1 + 2 \cdot \frac{(1+k)k}{2} = k^2 + k + 1$. 则 $b_{2004} = 2003^2 + 2003 + 1 = 4014013$.

6. 选 C.

略解：当 $n = 1$ 时，$a_1 = 4 \times 10 + 3$；当 $n = 2$ 时，$a_2 = 4 \times 6 + 3$. 由数学归纳法及二项式定理可证 $a_n = 4m + 3$ $(m \in \mathbf{N})$. 于是 $a_{1990} = 3^{a_{1990}} = 3^{4m+3} = 81^m \cdot 27$. 故 a_{1990} 的末位数字是 7.

二、填空题

7. 略解：因为 $a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. 所以 $\sum_{k=1}^{99} a_k = \sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$.

8. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

9. $\frac{1}{2004}$.

略解：由 $a_{n+1} = \frac{2005a_n}{2003a_n + 2005}$ 得 $\frac{2005}{a_{n+1}} - \frac{2005}{a_n} = 2003$. 所以 $\frac{2005}{a_n} = \frac{2005}{a_1} + 2003(n-1) = 2005 + 2003(n-1)$. 从而 $\frac{2005}{a_{2006}} = 2005 + 2003 \times 2005 = 2005 \times 2004$，故 $a_{2006} = \frac{1}{2004}$.

10. $a_n = \frac{3 \cdot 4^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}}{4^{n+1} + (-1)^n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

分析：我们引入待定系数 λ，设法将所给问题转化为我们所熟悉的问题. 先求得数列 $\{a_n\}$ 的不动点 λ_1, λ_2，则数列 $\left\{\frac{a_n - \lambda_1}{a_n - \lambda_2}\right\}$ 为一个等比数列.

略解：$a_{n+1}-\lambda=\frac{2a_n+6}{a_n+1}-\lambda=\frac{(2-\lambda)a_n+6-\lambda}{a_n+1}=\frac{2-\lambda}{a_n+1}(a_n+\frac{6-\lambda}{2-\lambda})$.

令 $-\lambda=\frac{6-\lambda}{2-\lambda}$ 得 $\lambda^2-\lambda-6=0$，解之得 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$.

所以 $a_{n+1}-3=\frac{-1}{a_n+1}(a_n-3)$，$a_{n+1}+2=\frac{4}{a_n+1}(a_n+2)$.

故 $\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-3}{a_n+2}$，即 $\{\frac{a_n-3}{a_n+2}\}$ 是公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列.

从而 $\frac{a_n-3}{a_n+2}=\frac{a_0-3}{a_0+2}\times(-\frac{1}{4})^{n+1}$.

因此 $a_n=\frac{3\cdot4^{n+1}+2\cdot(-1)^{n+1}}{4^{n+1}+(-1)^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

11. $a_n=\frac{n}{4n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

略解：两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{3}{n^2+n}=3(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$. 所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=3(1-\frac{1}{n+1})$. 从而 $a_{n+1}=\frac{n+1}{4n+1}=\frac{n}{4n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$

12. $a_n=4\cdot(\frac{5}{2})^{2^{1-n}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

略解：由题设有 $\lg a_{n+1}=\frac{1}{2}\lg a_n+\lg2$. 令 $b_n=\lg a_n$，则 $b_{n+1}-2\lg2=\frac{1}{2}(b_n-2\lg2)$. 于是 $b_n-2\lg2=(\frac{1}{2})^{n-1}(b_1-2\lg2)$，由 $b_1=1$ 得 $b_n=\lg4+(\frac{1}{2})^{n-1}\lg\frac{5}{2}$，于是 $a_n=4\cdot(\frac{5}{2})^{2^{1-n}}(n\in\mathbf{N}^*)$

三、解答题

13. 由已知递推式可得 $a_{n+1}^2=\frac{a_n^2a_{n-1}^2}{a_n^2+a_{n-1}^2+1}$.

所以 $\frac{1}{a_{n+1}^2}=\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{a_{n-1}^2}+\frac{1}{a_n^2a_{n-1}^2}$，即 $1+\frac{1}{a_{n+1}^2}=(1+\frac{1}{a_n^2})(1+\frac{1}{a_{n-1}^2})\cdots$①

我们定义数列 $\{F_n\}$ 如下：$F_1=1$，$F_2=0$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n=3,4,\cdots)$.

我们用常数归纳法证明，对一切正整数 n，均有 $1+\frac{1}{a_n^2}=(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_n}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_{n+1}}\cdots$②

证明如下：

当 $n=1,2$ 时，易验证②式成立；

假设当 $n=k-1,k$ 时②式成立，即有

$1+\frac{1}{a_{k-1}^2}=(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_{k-1}}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_k}$，$1+\frac{1}{a_k^2}=(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_k}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_{k+1}}$.

则 $1+\frac{1}{a_{k+1}^2}=(1+\frac{1}{a_k^2})(1+\frac{1}{a_{k-1}^2})$

$$=(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_k}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_{k+1}}\cdot(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_{k-1}}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_k}$$

$$=(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_k+F_{k-1}}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_{k+1}+F_k}=(1+\frac{1}{a_1^2})^{F_{k+1}}(1+\frac{1}{a_2^2})^{F_{k+2}}.$$

所以当 $n=k+1$ 时，② 式成立.

由归纳原理知，对一切正整数 n，② 式成立.

由 ② 式可得 $1+\frac{1}{a_n^2}=2^{F_{n+2}}\cdot 13^{F_{n+1}}\cdot 5^{-2F_{n+1}}$.

故 $a_n=(2^{F_{n+2}}\cdot 13^{F_{n+1}}\cdot 5^{-2F_{n+1}}-1)^{\frac{1}{2}}(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}](n\in\mathbf{N}^*)$.

14. 解：易知数列的不动点方程为 $x=\frac{x^2+4}{2x+3}$，即 $x^2+3x-4=0$，解得 $x_1=-4$，$x_2=1$.

所以 $\frac{a_{n+1}+4}{a_{n+1}-1}=\frac{\frac{a_n^2+4}{2a_n+3}+4}{\frac{a_n^2+4}{2a_n+3}-1}=(\frac{a_n+4}{a_n-1})^2$.

令 $b_n=\frac{a_n+4}{a_n-1}$，则 $b_1=11$，且 $b_n=b_{n-1}^2=b_{n-2}^{2^2}=b_{n-3}^{2^3}=\cdots=b_1^{2^{n-1}}=11^{2^{n-1}}$.

从而 $a_n=\frac{11^{2^{n-1}}+4}{11^{2^{n-1}}-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

15. 略解：由数学归纳法易证 $0<a_n<\frac{1}{2}$，于是 $\frac{1}{a_n}-2=\frac{2a_{n-1}^2-4a_{n-2}a_{n-1}^2+a_{n+2}}{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}-2=\frac{a_{n-2}}{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}$.

令 $\frac{1}{a_n}-2=b_n^2(b_n>0)$，则 $b_n=\frac{(b_{n-1}^2+2)}{b_{n-2}}$. 由此可得 $b_nb_{n-2}=b_{n-1}^2+2\cdots$①

在 ① 式中用 $n-1$ 代替 n 得 $b_{n-1}b_{n-3}=b_{n-2}^2+2\cdots$②

由 ① 及 ② 式得 $b_nb_{n-2}-b_{n-1}^2=b_{n-1}b_{n-3}-b_{n-2}^2=2$，即 $b_{n-2}(b_n+b_{n-2})=b_{n-1}(b_{n-3}+b_{n-1})$.

所以$\dfrac{b_n+b_{n-2}}{b_{n-1}}=\dfrac{b_{n-1}+b_{n-3}}{b_{n-2}}=\cdots=\dfrac{b_3+b_1}{b_2}$.

而 $b_1=\sqrt{\dfrac{1}{a_1}-2}=1$, $b_2=\sqrt{\dfrac{1}{a_2}-2}=1$, $b_3=\dfrac{b_2^2+2}{b_1}=3$.

所以$\dfrac{b_n+b_{n-2}}{b_{n-1}}=\dfrac{3+1}{1}=4$,即 $b_n=4b_{n-1}-b_{n-2}\cdots$③

易知④式的特征方程为 $r^2=4r-1$,解得 $r_1=2\sqrt{3}$, $r_2=2-\sqrt{3}$ 为其特征根.

所以设 $b_n=c_1(2+\sqrt{3})^n+c_2(2-\sqrt{3})^n$.

我们补充定义 b_0 满足 $b_2=4b_1-b_0$,即 $b_0=4b_1-4b_2=3$,则

$\begin{cases}c_1+c_2=3\\c_1(2+\sqrt{3})+c_2(2-\sqrt{3})=1\end{cases}$,解得 $c_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{6}\sqrt{3}$, $c_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{6}\sqrt{3}$.

因此 $b_n=(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{6}\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{6}\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$.

从而有 $b_n=(b_n^2+2)^{-1}$

$=\{[(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{6}\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{6}\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n]^2+2\}^{-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

第四讲 递推数列的应用

1. 解:(1) 设经过 $k-1$ 次反复操作,A、B 的浓度分别为 $a_{k-1}\%$,$b_{k-1}\%(k\geqslant1,a_0=a,b_0=b)$,依题意可得

$$b_k=\frac{1}{5}(4b_{k-1}+a_{k-1})=\frac{1}{5}a_{k-1}+\frac{4}{5}b_{k-1} \qquad ①$$

$$a_k=\frac{1}{6}(5a_{k-1}+b_k)=\frac{13}{15}a_{k-1}+\frac{2}{15}b_{k-1} \qquad ②$$

①-②得

$$b_k-a_k=-\frac{10}{15}a_{k-1}+\frac{10}{15}b_{k-1}=\frac{2}{3}(b_{k-1}-a_{k-1})$$

所以数列 $\{b_k-a_k\}$ 是首项为 $b_0-a_0=b-a$,公比为$\dfrac{2}{3}$的等比数列.

(2) 由上面的结果知

$$b_k-a_k=(b-a)(\frac{2}{3})^k \qquad ③$$

由①式有

$$b_{k+1}=\frac{1}{5}a_k+\frac{4}{5}b_k \qquad ④$$

由③、④式消去 a_k 得

$$b_{k+1}-b_k=\frac{1}{5}(a-b)\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

所以 $b_k=b_0+\sum\limits_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{5}(a-b)\left(\frac{2}{3}\right)^i\right]=b+\frac{1}{5}(a-b)\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}}$

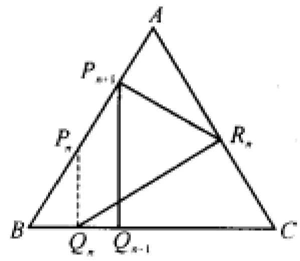
所以 $b_k=\frac{3a+2b}{5}-(a-b)\cdot\frac{3}{5}(\frac{2}{3})^k$

当 $k=0$ 时，此式仍然成立.

由③式得

$$a_k=\frac{3a+2b}{5}+(a-b)\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

2. 解：设正 $\triangle ABC$ 的边长为 a，$BP_n=x_n$，则 $BP_{n+1}=x_{n+1}$



$BQ_n=BP_n\cos60^\circ=\frac{1}{2}x_n$，$Q_nC=a-\frac{1}{2}x_n$

$CR_n=CQ_n\cos60^\circ=\frac{1}{2}\left(a-\frac{x_n}{2}\right)$

$AR_n=a-CR_n=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}x_n$

$AP_{n+1}=AP_n\cos60^\circ=\frac{1}{2}AP_n=\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}x_n$

$BP_{n+1}=x_{n+1}=a-\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}x_n=\frac{3a}{4}-\frac{1}{8}x_n$.

于是 $x_{n+1}=-\frac{1}{8}x_n+\frac{3}{4}a$

所以 $x_{n+1}-\frac{2}{3}a=-\frac{1}{8}\left(x_n-\frac{2}{3}a\right)$

即数列 $\{x_n-\frac{2a}{3}\}$ 是以 $-\frac{1}{8}$ 为公比的等比数列. 所以

$x_n-\frac{2a}{3}=(x_1-\frac{2a}{3})(-\frac{1}{8})^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2a}{3}$.

3. 解：假设 $n=k$ 时，$\sqrt{2}<x_k<\sqrt{2}+\frac{1}{k}$，当 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}>2\sqrt{\frac{x_k}{2}\cdot\frac{1}{x_k}}=\sqrt{2}$$

又 $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}<\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2k}<\sqrt{2}+\frac{1}{k+1}$.

4. 解：(1) 假设 $0 < x_{k+2} < 1$.

$x_{k+3} = \dfrac{3x_{k+2} + 2}{x_{k+2} + 4} = 1 + \dfrac{2(x_{k+2} - 1)}{x_{k+2} + 4} < 1$

所以　$0 < x_{k+3} < 1, 0 < x_{n+2} < 1$,

(2) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{-x_n^2 - x_n + 2}{x_n + 4} = \dfrac{-(x_n + 2)(x_n - 1)}{x_n + 4} > 0$,

所以　$x_{n+1} > x_n$.

5. 解：假设 $x_k > 3$，则

$x_{k+1} - 3 = \dfrac{(x_k - 3)(3x_k - 4)}{4(x_k - 1)} > 0$,

所以　$x_{k+3} > 3$.

又　$x_{n+1} - x_n = \dfrac{-x_n(x_n - 3)}{4(x_n - 1)} < 0$

所以　$3 < x_{n+1} < x_n$.

6. 解：(1) 假设 $4 < x_n < 5$,

$x_{k+1} - 5 = \dfrac{2x_k^2 - x_k}{3(x_k - 2)} - 5 = \dfrac{2(x_k - 3)(x_k - 5)}{3(x_k - 2)} < 0$.

所以　$x_{k+1} < 5$. 易证 $x_{k+1} > x_k$，所以

$$x_n < x_{n+1} < 5.$$

(2) 略(与(1) 类似).

7. 解：由题设　$x_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2}(x_n - 6)$，则

$$x_n - 6 = -4 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

所以　$x_n = 6 - 2^{3-n}$. 即　$x_{n+1} - x_n = 2^{2-n} > 0$. 所以

$2 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < 6$，　$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 6$.

8. 解：(1) 先求　$a_n = \dfrac{4 + 11^{2^{1-n}}}{11^{2^{n-1}} - 1}$，则有

$$a_n - 1 = \frac{5}{11^{2^{n-1}} - 1} > 0.$$

即　$a_n > 1$；又　$2 - a_n = \dfrac{11^{2^{n-1}} - 6}{11^{2^{n-1}} - 1} > 0$，所以 $0 < a_n < 2$.

(2) $\dfrac{1}{5}(a_n - 1) - (a_{n+1} - 1) = \dfrac{11^{2^n} - 5 \times 11^{2^{n-1}} + 4}{(11^{2^{n-1}} - 1)(11^{2^n} - 1)} > 0$

所以　$a_{n+1} - 1 < \dfrac{1}{5}(a_n - 1) < \cdots < \dfrac{1}{5^n}(a_1 - 1)$

$a_n < 1 + \frac{1}{2} \times 5^{1-n}$

9. 解：(1) 因为 $a_1 = 1 > 0, a_n < a_{n+1}$. 所以 a_n 为正项递增.

$$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{a_n}{\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) \cdot \frac{a_n}{\sqrt{a_{n+1}}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) \cdot \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}}$$

$$< 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right);$$

(2) $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) < 2$,

所以 $0 < s_n < 2$,

(3) 因为 $a_n = r^{n-1}$, 所以 $b_n = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^n$,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{r^n}}\right] < \frac{\sqrt{r} + 1}{r}$$

若 $\frac{\sqrt{r} + 1}{r} \geqslant 1$

则 $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leqslant r \leqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3$

与 $r \geqslant 3$ 矛盾，故 $0 < s_n < 1$.

(4) 把 $a_n = a^{-2(n-1)}$ 代入 s_n 化简得，$s_n = a(1 + a)(1 - a^n) > c$

所以 $a^n < 1 - \frac{c}{a(1 + a)}$.

因为 $\sqrt{\frac{c}{2}} < a < 1$,

所以 $0 < \frac{c}{a(a + 1)} < 1, 0 < 1 - \frac{c}{a(a + 1)} < 1$

取 $1 - \frac{c}{a(1 + a)} = \varepsilon$, 则 $a^n < \varepsilon, n > \log_a \varepsilon$.

取 $N = [\log_a \varepsilon]$, 当 $n > N$ 时，有 $s_n > c$.

10. 解：设 $f(x) = \ln(1 + x) - x$, 易知 $x \geqslant 0$ 时 $f(x)$ 为减函数，所以 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) \leqslant 0$. 从而 $x \geqslant 0$ 时，$\ln(1 + x) \leqslant x$. 下面先证 $a_n \leqslant m - 1$. 当 $n = 1$ 时，$a_1 = \ln m = \ln[1 + (m - 1)] \leqslant m - 1$; 设当 $n = k$ 时，有 $a_k \leqslant m - 1$, 即 $m - 1 - a_k \geqslant 0$, 则有

$$a_{k+1} = a_k + \ln(m - a_k) = a_k + \ln[1 + (m - 1 - a_k)] \leqslant a_k + m - 1 - a_k = m - 1.$$

即 $n=k+1$ 时成立，所以 $a_n \leqslant m-1$，即 $m-a_n \geqslant 1$. 再证 $a_{n+1} \geqslant a_n$，因为 $a_n \leqslant m-1$，所以 $m-a_n \geqslant 1$，

$a_{n+1}-a_n+\ln(m-a_n) \geqslant a_n+\ln 1=a_n$.

$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant m-1$.

11. 解：令 $f(x)=\dfrac{6x^2-23x}{7(x-5)}(x>8)$，则

$$f'(x)=\frac{6x^2-60x+115}{7(x-5)^2}=\frac{6(x-8)^2+36(x-8)+19}{7(x-5)^2}>0(x>8).$$

$$f(x)-x=-\frac{x(x-12)}{7(x-5)}$$

由此得出 $f(x)$ 单调增大，$8<x<12$ 时，$f(x)>x$，且

$$f(x)-12=\frac{(x-12)(6x-35)}{7(x-5)}<0(8<x<12).$$

因 $8<x_1<12$，所以 $x_1<f(x_1)<12$，即 $x_1<x_2<12$. 假设 $x_k<x_{k+1}<12$. 根据 $f(x)$ 单调性 $f(x_k)<f(x_{k+1})<12$，有 $x_{k+1}<x_{k+2}<12$. 故 $x_n<x_{n+1}<12(n=1,2,\cdots)$.

12. 解：令 $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+7}{3x+5}(x>0)$，则

$$f'(x)=\frac{6x^2+20x+4}{(3x+5)^2}>0(x>0), f(x)-x=\frac{7-x^2}{3x+5}.$$

由此得出 $f(x)$ 单调增大，$0<x<\sqrt{7}$ 时，$f(x)>x$；$x>\sqrt{7}$ 时，$f(x)<x$.

设 $0<x_1<\sqrt{7}$，则 $f(x_1)>x_1$，即 $x_2>x_1$. 假设 $x_{k+1}>x_k$，则据 $f(x)$ 的单调性，$f(x_{k+1})>f(x_k)$，即 $x_{k+2}>x_{k+1}$，所以 $x_{n+1}>x_n(n=1,2,\cdots)$. 假设某个 $x_n \geqslant \sqrt{7}$，则 $f(x_n) \leqslant x_n$，即 $x_{n+1} \leqslant x_n$，这与 $x_{n+1}<x_n$ 相矛盾，故 $x_n<x_{n+1}<\sqrt{7}(=1,2,\cdots)$.

设 $x_1>\sqrt{7}$，则 $f(x_1)<x_1$，则 $x_2<x_1$. 假设 $x_{k+1}<x_k$. 据 $f(x)$ 的单调性 $f(x_{k+1})<f(x_k)$，有 $x_{k+2}<x_{k+1}$. 故 $x_{n+1}<x_n(n=1,2,\cdots)$，假设某个 $x_n \leqslant \sqrt{7}$，则 $f(x_n) \geqslant x_n$，即 $x_{n+1} \geqslant x_n$，这与 $x_{n+1}<x_n(n=1,2,\cdots)$ 相矛盾. 所以

$x_n>x_{n+1}>\sqrt{7}(n=1,2\cdots)$.

13. 解：首先，若 $i<j$，则 $a_i \neq a_j$. 这是因为，取 $n \geqslant j>i$，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同，故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同，特别地 $a_i \neq a_j$.

其次，若 $i<j \leqslant n$，则 $|a_i-a_j| \leqslant n-1$. 否则，假设 $m=|a_i-a_j| \geqslant n$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中有两个数（a_i 和 a_j）被 m 除后所得到的余数相同. 矛盾.

现在，对任意正整数 n，记

$$a_{i(n)}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$
$$a_{j(n)}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

由前证可知

$$i(n) < j(n) \leqslant n \Rightarrow a_j(n) - a_i(n) \leqslant n-1$$

又由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同，故 $a_{j(n)} - a_{i(n)} \geqslant n-1$，所以 $a_{j(n)} - a_{i(n)} = n-1$. 这表明集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的元素是 n 个连续整数.

对任意整数 x，因为数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中有无穷多项是正整数，也有无穷多项是负整数，且数列的项互不相同，所以必存在 i, j 使得 $a_i < x < a_j$. 取 $n > \max\{i, j\}$，由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 包含了 a_i 和 a_j 之间的所有整数，当然也包含了 x. 这就证明了，每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

注　可证明，如下构造的数列 $\{a_n\}$ 符合题意，即

$$a_n = \begin{cases} k, n = 2k \\ 1-k, n = 2k-1, k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

易见数列 $\{a_n\}$ 为 $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$，不难证明对每一个正整数 n，整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同，且每个整数恰好在数列 $\{a_n\}$ 中出现一次.

第五讲　数学归纳法

1. 证明：对 k 用数学归纳法.

当 $k=1$ 时，左边 $=0=$ 右边，结论成立.

当 $k=2$ 时，左边 $=|f(4)-f(2)|=|f(2+2)-f(2)|<1=$ 右边，结论也成立.

假设当 $k=n$ 时，结论成立，即

$|f(2^n)-f(2)|+|f(2^n)-f(2^2)|+\cdots+|f(2^n)-f(2^{n-1})|+|f(2^n)-f(2^n)| \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

则当 $k=n+1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n+1} |f(2^{n+1})-f(2^i)| = \sum_{i=1}^{n+1} |f(2^{n+1})-f(2^n)+f(2^n)-f(2^i)|$$

$$\leqslant n \cdot |f(2^{n+1})-f(2^n)| + \sum_{i=1}^{n} |f(2^n)-f(2^i)|$$

$$\leqslant n \cdot |f(2^n+2^n)-f(2^n)| + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\leqslant n \cdot 1 += \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2},$$

即 $k=n+1$ 时结论成立.

综上所述，则由归纳原理知对所有正整数 k，不等式成立.

2. 分析：虽然本题仅与一个自然数 n 有关，但是若对固定的 x 关于 n 使用数学归纳法却并非是一件易事. 当然更不能对实数 x 进行归纳. 这里我们将 n 视为固定的自然数，将

实数轴划分为一个个的小区间$[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n})$($m=0,\pm1,\pm2,\cdots$),然后对$x$所在的区间的标号$m$使用数学归纳法.

证明:当$m=0$即$x\in[0,\frac{1}{n})$,此时对$i=0,1,\cdots,n-1$,都有$[x+\frac{i}{n}]=0$.故有$\sum\limits_{i=0}^{n-1}[x+\frac{i}{n}]=0$.又因为$0\leqslant nx\leqslant\frac{n}{n}=1$,所以$[nx]=0$.故当$m=0$时等式成立.

假设当$m=k$(k为非负整数)时等式已成立,即对任何$x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})$时,有

$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx]$.

当$m=k+1$即当$x\in[\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n})$时,相当于给满足上述等式的某个$x$加上了一个$\frac{1}{n}$,因此等式左端除最末一项外,都向右"移动"了一项(即变得与原来在其右侧紧邻的一项相等),而最末一项则成为$[x+1]$,它比$[x]$多1.因此当将$m=k$变作$m=k+1$时,等式左端增加1.与此同时,等式右端的$[nx]$也比$m=k$时之值增加了1.所以当$m=k+1$时,等式也成立.

再假设当$m=k$(k为非正整数)时等式已成立,那么仿照上述过程可类似地证明当$m=k-1$时,等式也成立.

所以对任何给定的自然数n,对一切实数x,所证的等式都成立.

评析:本题将n"固定",并不是将n固定为某个具体的或是特殊的自然数,而是将n作为任意一个自然数而固定下来.在这种固定之下,我们只假定n具备作为一个自然数而应具备的性质,除此之外,我们没有再用到也没有再认为它具有任何别的性质.这种处理方法可以起到减少变元的作用,从而将双重归纳问题化归为单重归纳问题来处理.另外,由于题中m的变化范围是一切整数,因此我们在具体做法上有些不同,请读者注意.

3.分析:如果试着证明命题本身,我们发现这并非是一件易事,但如果我们把命题加强,就好证明.

我们先将命题加强为:对一切自然数n,都有$A_{n+1}>3B_n\cdots(^*)$

证明:当$n=1$时,$A_2=3^3=27>24=3\cdot8=3B_1$,$(^*)$成立.

假设当$n=k$时,有$A_{k+1}>3B_k$成立.

当$n=k+1$时,$A_{k+1+1}=3^{A_{k+1}}>3^{3B_k}=(3^3)^{B_k}=27^{B_k}>24^{B_k}=3^{B_k}\cdot8^{B_k}>3\cdot8^{B_k}=3B_{k+1}$.

故当$n=k+1$时,$(^*)$式成立.

由归纳原理知,对一切自然数n,都有$A_{n+1}>3B_n$成立.

从而更有 $A_{n+1}>3B_n>B_n$ 成立.得证.

4. 证明:当 $n=1$ 时,任取正整数 x, y,方程均有正整数解($z=x^2+y^2$).

当 $n=2$ 时,$x=3$, $y=4$, $z=5$ 即为方程的一组正整数解.

假设当 $n=k$ 时,方程有正整数解(x_0, y_0, z_0),即 $x_0^2+y_0^2=z_0^k$,则

$(x_0z_0)^2+(y_0z_0)^2=(x_0^2+y_0^2)z_0^2=z_0^kz_0^2=z_0^{k+2}$.

以上说明 $n=k+2$ 时,方程 $x^2+y^2=z^n$ 也有解.

由跳跃式归纳原理知命题得证.

5. 证明:我们用第二数学归纳法来证明此题.

当 $n=2$, 3 时,$a_2=\frac{1}{5}a_1^2=\frac{1}{10}a_1<a_1$, $a_3=\frac{2}{8}a_1a_2=\frac{1}{8}a_2<a_2$,结论成立.

假设 $a_k<a_{k-1}<\cdots<a_3<a_2<a_1$,则 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{1}{3k+2}(a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots+a_{k-2}a_3+a_{k-1}a_2+a_ka_1)\\&=\frac{a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots+a_{k-2}a_3+a_{k-1}a_2}{3k+2}+\frac{a_1a_k}{3k+2}\\&=\frac{a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots+a_{k-2}a_3+a_{k-1}a_2}{3k+2}+\frac{a_k}{2(3k+2)}\\&\leqslant\frac{3k-1}{3k+2}\,\frac{a_1a_{k-1}+\cdots+a_{k-1}a_1}{3k-1}+\frac{a_k}{2(3k+2)}\\&=\frac{3k-1}{3k+2}a_k+\frac{a_k}{2(3k+2)}=\frac{6k-1}{2(3k+2)}a_k<a_k,\end{aligned}$$
这表明 $n=k+1$ 时命题成立.

综上,由归纳原理知命题成立.

6. 解:最小可能值为 $C_{2003}^2+1=2005004$.

考察 $9\times n$ 的方格表,在它的方格里边把正整数 1 到 n 各填 9 次,且在每一列中所填的数之差都不大于 3.我们用数学归纳法证明:第一行数的和不小于 C_{n-1}^2+1.

当 $n\leqslant4$ 时,结论显然成立.因为每个方格中的数都不小于 1,且当 $n\leqslant4$ 时,有 $n\geqslant C_{n-1}^2+1$.

接下来作归纳过渡.如有必要,可以通过调整数列的顺序,使得第一行中的数按非降顺序排列.故可假设第一行中的数已经按非降顺序排列.以 S_i 表示第一行中不小于 i 的数的个数,并令 $D_i=n-S_i$.于是 $S_1=n$, $D_1=0$,且第一行数的和 $S=S_1+S_2+\cdots+S_n$.

改写上式可得 $S=(n-D_1)+(n-D_2)+\cdots+(n-D_n)\geqslant n(n-3)-(D_1+D_2+\cdots+D_{n-3})$.

如果对任意 $i\leqslant n-3$,都有 $D_i\leqslant i+1$,则 $S\geqslant n(n-3)-[0+3+4+\cdots+(n-2)]=\frac{n^2-3n+4}{2}$,即为所证.

假设存在某个 $k\leqslant n-3$，使得 $D_k\geqslant k+2$，此时必有 $k\geqslant 2$. 由于第一行中至少有 $k+2$ 个数小于 k，则该表中的前 $k+2$ 列中的数都不超过 $k+2$. 这表明，所有这样的数全都在前 $k+2$ 列中，因此，后面各列中的数都小于 $k+3$.

现在将整个表分成两部分：前 $k+2$ 列为第一部分，其余的为第二部分. 由于 $n-1\geqslant k+2\geqslant 4$，所以，第一部分中第一行数的和不小于 C_{k+1}^2+1. 如果将第二部分中的每个数都减去 $k+2$，则得到一个具有 $n-(k+2)\geqslant 1$ 列的满足题意的方格表. 于是，由归纳假设知，它的第一行数的和不小于 $(k+2)(n-k-2)+C_{n-k-3}^2+1$.

将上述两个估计值相加即得 $S\geqslant C_{k+1}^2+1+(k+2)(n-k-2)+C_{n-k-3}^2+1=C_{n-1}^2+3$.

下面再给出一个可以达到最小可能值的例子(见下表)

1	1	1	2	3	4	…	k	…	1998	1999	2000	2001	2001
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2001	2002	2003	2004
1	2	3	4	5	6	…	$k+2$	…	2000	2002	2002	2003	2004
2	3	4	5	6	7	…	$k+3$	…	2001	2002	2003	2003	2004
2	3	4	5	6	7	…	$k+3$	…	2001	2002	2003	2004	2004

7. 证明：我们来固定 m，仅对 n 进行归纳.

当 $n=0$ 时，因为一切非负整数 m，$\dfrac{(2m)!}{m!m!}$ 是组合数，故知其为正整数，所以命题成立.

假设当 $n=k$ 时，对一切非负整数 m，$\dfrac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}$ 都是正整数，则因

$$\frac{(2m)!(2k+2)!}{m!(k+1)!(m+k+1)!}=4\times\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}-\frac{(2m+2)!(2k)!}{(m+1)!k!(m+1+k)!}$$

故由归纳假设可知 $\dfrac{(2m)!(2k+2)!}{m!(k+1)!(m+k+1)!}$ 也是整数.

又由阶乘的定义知其为正整数，所以命题对 $n=k+1$ 也成立.

所以对一切非负整数 m 与 n，$\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 皆为正整数.

评析：由上述论证可以看出，在“活化”了一个变元之后，对另一变元实施的归纳过渡

同仅与一个变元有关的命题并无两样.因此,完全可以当作一重归纳问题去处理.

8. 证明:我们记题设命题为 $P(n)$,再构造一个命题 $Q(n)$ 为:设空间中有 $2n+1(n\geqslant 2)$ 个点,其中任何四点不共面,它们之间连有 n^2+n+1 条线段,则这些线段必能构成两个有公共边的三角形.

先证 $P(2)$ 成立:对于空间中不共面的四个点,它们之间连有5条边,则此图形为一个四面体去掉一条棱.因而总有两个有公共边的三角形,即 $P(2)$ 成立.

假设 $P(k)$ 成立,现考虑 $2k+1$ 个点,它们之间连有 k^2+k+1 条边.设点 A 是这 $2k+1$ 个点中引出的数量最少的一点(若引出边数最少的点不只一个,则任选其中一个作为 A),则点 A 引出的边数 $\leqslant k$,否则,边数总和不小于 $\frac{1}{2}(2k+1)(k+1)=k^2+k+\frac{1}{2}(k+1)>k^2+k+1$,矛盾!我们把 A 连同与 A 相连的边去掉,则剩下 $2k$ 个点,至少 k^2+1 条边,由假设 $P(k)$ 成立知,$Q(k)$ 也成立.

假设 $Q(k)$ 成立.考虑 $2k+2$ 个点,它们之间连有 $(k+1)^2+1$ 条边,设 A 是这 $2k+2$ 个点中引出边数最少的一个点,则点 A 引出的边数不大于 $k+1$,否则,边数总和不小于 $\frac{1}{2}(2k+2)(k+2)=(k+1)^2+k+1>(k+1)^2+1$,矛盾!把点 A 连同与 A 相连的边去掉,则剩下 $2k+1$ 个点,至少 $(k+1)^2+1-(k+1)=k^2+k+1$ 条边,由 $Q(k)$ 成立知 $P(k+1)$ 也成立.

综上所述,对所有正整数 $n\ (n\geqslant 2)$,$P(n)$,$Q(n)$ 均成立.

9. 解:记所求最小值为 $f(m,n)$,可证 $f(m,n)=m+n-(m,n)\cdots(^*)$

其中 (m,n) 表示 m 和 n 的最大公约数.

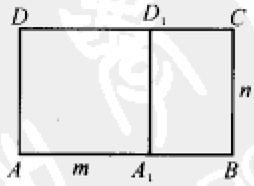
事实上,不妨设 $m\geqslant n$,

(1) 关于 m 归纳,可证存在一种合乎题意的方法,使所得正方形边长之和恰好为 $m+n-(m,n)$.

当 $m=1$ 时,命题显然成立.

假设当 $m\leqslant k$ 时,结论成立($k\geqslant 1$),当 $m=k+1$ 时,

若 $n=k+1$,则命题显然成立.



若 $n<k+1$,从矩形 $ABCD$ 中切去正方形 AA_1D_1D,由归纳假设矩形 A_1BCD_1 有一种分法使得正方形边长之和恰好为 $m-n+n-(m-n,n)=m-(m,n)$.

于是原矩形 $ABCD$ 有一种分法使得所得正方形边长之和为 $m+n-(m,n)$.

(2) 关于 m 归纳可证$(^*)$成立.

当 $m=1$ 时,由于 $n=1$,显然 $f(m,n)=1=m+n-(m,n)$.

假设当 $m\leqslant k$ 时,对任意 $1\leqslant n\leqslant m$ 有 $f(m,n)=m+n-(m,n)$.

若 $m=k+1$，当 $n=k+1$ 时显然 $f(m,n)=k+1=m+n-(m,n)$.

当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时，设矩形 $ABCD$ 按要求分成了 p 个正方形，其边长分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_p$，不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_p$.

显然 $a_1=n$ 或 $a_1<n$.

若 $a_1<n$，则在 AD 与 BC 之间的与 AD 平行的任一直线至少穿过两个分成的正方形（或其边界），于是 $a_1+a_2+\cdots+a_p$ 不小于 AB 与 CD 之和. 所以 $a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant 2m>m+n-(m,n)$.

若 $a_1=n$，则一个边长分别为 $m-n$ 和 n 矩形可按题目要求分成边长分别为 $a_2,a_3,\cdots,a_p$ 的正方形，由归纳假设 $a_2+a_3+\cdots+a_p\geqslant m-n+n-(m-n,n)=m-(m,n)$. 从而 $a_1+a_2+\cdots+a_p\geqslant m+n-(m,n)$.

于是当 $m=k+1$ 时，$f(m,n)\geqslant m+n-(m,n)$.

再由(1)可知 $f(m,n)=m+n-(m,n)$.

10. 证明：结论即对 $1\leqslant n\leqslant 1997$，有 $\dfrac{a_n+1}{n}>x\geqslant\dfrac{a_n}{n}$.

若取定 $x=\max\dfrac{a_n}{n}$，则只需证对一切 $1\leqslant m\leqslant 1997$，有 $\dfrac{a_m+1}{m}>x$，即 $\dfrac{a_m+1}{m}>\dfrac{a_n}{n}$ 或 $na_m+n>ma_n$.

我们用数学归纳法来证明上式：

若 $m=1$，则

$$\begin{aligned}a_n&\leqslant a_{n-1}+a_1+1\leqslant a_{n-2}+2a_1+2\leqslant a_{n-3}+3a_1+3\leqslant\cdots\\&\leqslant a_1+(n-1)a_1+(n-1)=na_1+(n-1)<n(a_1+1).\end{aligned}$$

若 $n=1$，则

$$\begin{aligned}a_m+1&\geqslant a_{m-1}+a_1+1\geqslant a_{m-2}+2a_1+1\geqslant a_{m-3}+3a_1+1\geqslant\cdots\\&\geqslant a_1+(m-1)a_1+1=ma_1+1>ma_1.\end{aligned}$$

设 m,n 均小于 k 时，上式成立. 当 m,n 中较大的为 k 时，有两种情形：

(ⅰ) 当 $n=k$ 时，设 $n=qm+r$，q 为自然数，$0\leqslant r<m$.

由已知得

$$a_n\leqslant a_{qm}+a_r+1\leqslant a_{(q-1)m}+a_m+a_r+2\leqslant\cdots\leqslant qa_m+a_r+q.$$

再由归纳假设 $ra_m+r>ma_r$ 得

$$ma_n\leqslant mqa_m+ma_r+mq<na_m+n.$$

(ⅱ) 当 $m=k$ 时，设 $m=qn+r$，q 为自然数，$0\leqslant r<n$.

类似(ⅰ)有

$$a_m\geqslant qa_n+a_r,\ na_m+n\geqslant nqa_n+na_r+n=ma_n+na_r+n-ra_n>ma_n.$$

综上所述，得证.