2．静止的点电荷能在它的周围空间任一点激起电场；线电流元是否也能在它的周围空间任一点激起磁场?

答：不一定。

电流元激起的磁场由毕奥-萨伐尔定律给出

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{r}$ 为电流元到空间任一点(场点)的有向线段，

当 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 的夹角 θ 为0或 π 时，

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\theta = 0$$

在电流元 $Id\vec{l}$ 的延长线上各点，电流元不能激起磁场。在线电流元周围空间的其他位置上，是能够激发磁场的。

3．由毕奥-萨伐尔定律可导出“无限长”直线电流的磁场公式为 $B=\mu_0 I/(2\pi r)$

当场点无限接近导线（$r\to 0$）时，$B\to\infty$，这一结果是没有物理意义的。应如何解释?

答：该公式只对线电流适用。

所谓“线电流”是指电流横截面的线度比从该截面到场中考察点的距离小得多的情况。

当$r\to 0$时，线电流概念已不复存在，上式不再适用。

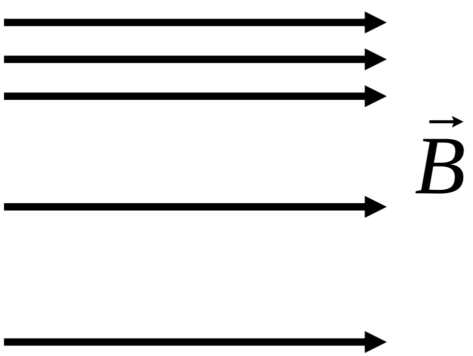
如果不是线电流，可将电流划分成许多线电流，用场强叠加原理来求 $r\to 0$ 的点的磁感应强度 $\vec{B}$。

只要电流密度 $\vec{j}$ 到处有限，

这样求得的 $\vec{B}$ 仍为一有限值，不会成为无限大。

7．在没有电流分布的空间区域里，是否能存在这样的稳恒磁场：其磁感应线为一系列不均匀分布的平行直线。

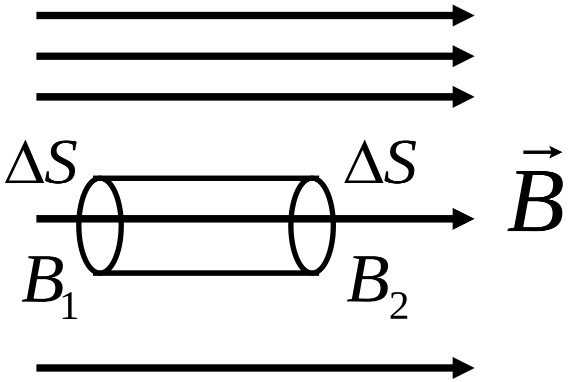
答：不存在。



假设存在如问题中所描述的磁场，磁感应线如图所示。

沿磁感应线做一柱形高斯面，如图由磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$



当 ΔS 很小时，可得

$$B_2\Delta S - B_1\Delta S = 0$$

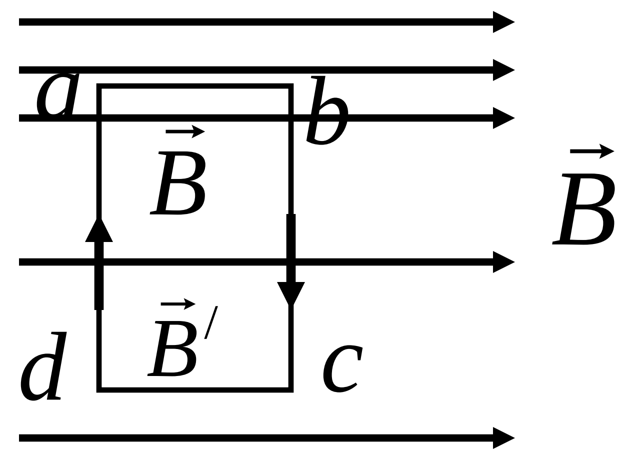
有 $B_2 = B_1$ ，即同一条磁感应线上的 $\vec{B}$ 相等

如再在该磁场中做一有向矩形安培环路 $abcda$ ，

让 ab、cd 与磁感应线平行，bc 、da与磁感应线垂直。设沿ab段磁感应强度为$\vec{B}$，沿cd段磁感应强度为$\vec{B}'$，由磁感应线疏密不均匀可知 ，

磁感应强度沿该回路的线积分为

$$\oint_{abcda} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot\overline{ab} - B'\cdot\overline{cd} \neq 0$$



而根据安培环路定理，

考虑到环路 $abcda$ 中

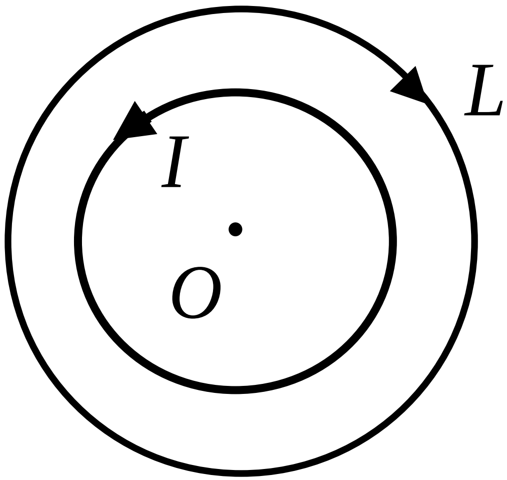
不包围电流，应有

$$\oint_{abcda} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

说明假想的磁场不遵守稳恒磁场的安培环路定理，

即这样的稳恒磁场并不存在

8．在一圆形电流 I 所在的平面内，选取一个同心圆形闭合回路 L ，则由安培环路定理可知



A． $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$ ，且环路上任意一点 $B=0$

B． $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$ ，且环路上任意一点 $B\neq 0$

C． $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}\neq 0$ ，且环路上任意一点 $B\neq 0$

D． $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}\neq 0$ ，且环路上任意一点 B 为恒量

哪一个正确?

C. $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} \neq 0$ ，且环路上任意一点 $B \neq 0$

D. $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} \neq 0$ ，且环路上任意一点 B 为恒量

根据安培环路定理，

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

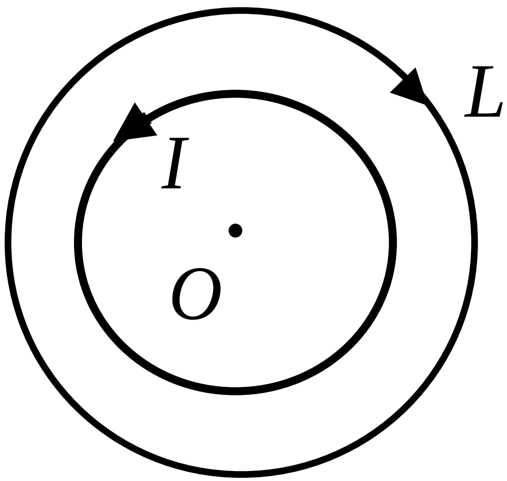
，

$\sum I_i$ 为正向穿过该环路的电流的代数和，

本题中因无电流从该环路穿过，

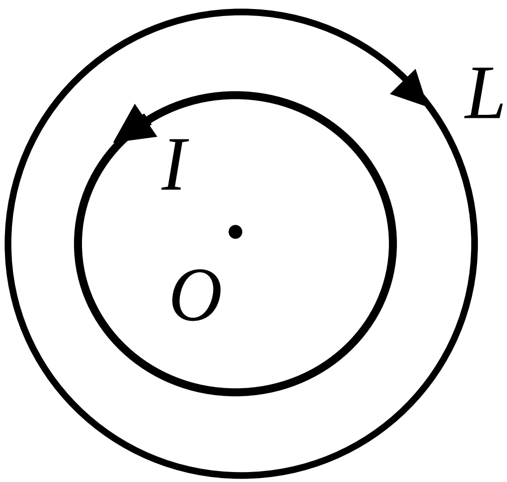
所以 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ 。

故C、D前半部分不对



A. $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ ，且环路上任意一点 $B=0$

B. $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ ，且环路上任意一点 $B\neq 0$



圆电流 I 在空间任一点

都会激发磁场，

环路 L 上任意一点均不为零，

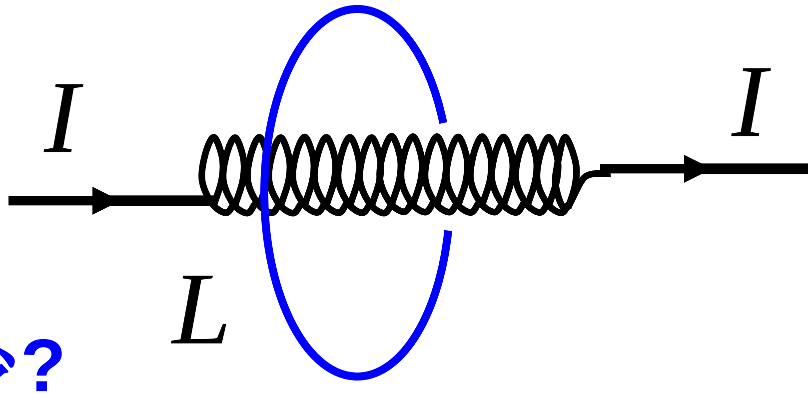
由对称性分析可知， L 上

的 $\vec{B}$ 大小相等，

方向垂直于圆电流和环路 L 所在平面，

方向向里。故A后半部分错，B对。

10．在一载流螺线管外，做一平面圆回路 L ，且其平面垂直于螺线管的轴，圆心在轴上。

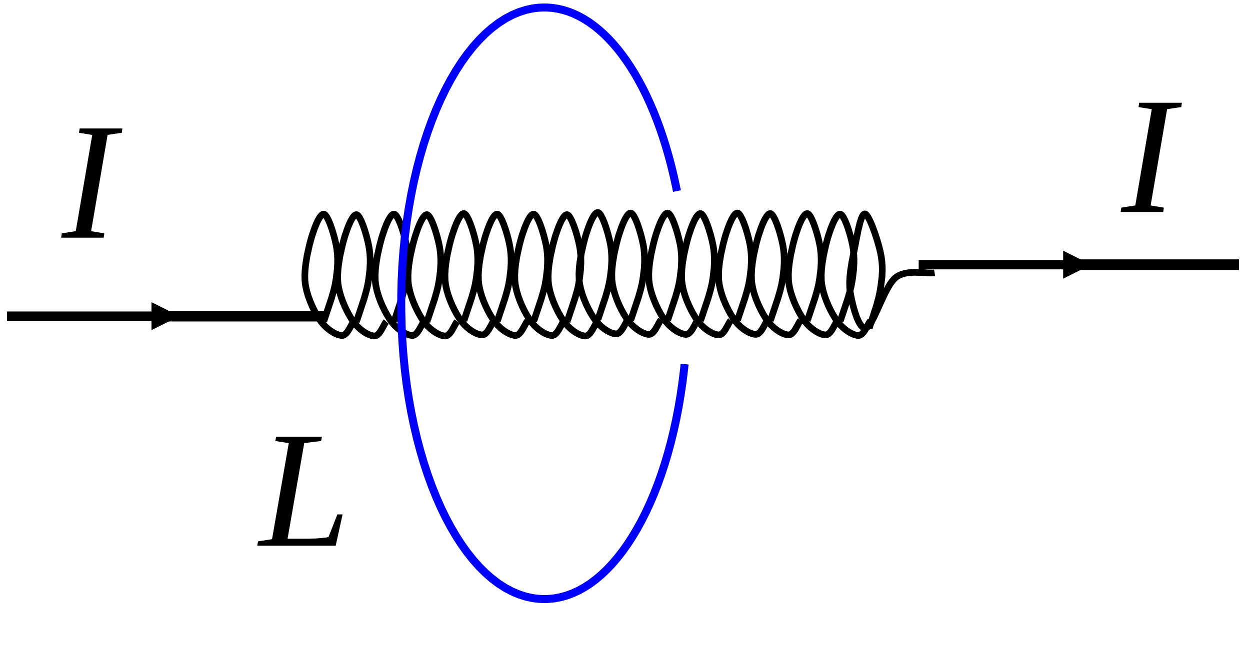


则环路积分 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于多少?

有人说，$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$ ，

有人根据安培环路定理认为 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$ ，究竟哪种说法 正确?

答：密绕的无限长螺线管，常用紧密排列的封闭圆电流组来近似，因而管内 $B=\mu_0 nI$ ，管外 $B=0$ 。所以，紧密排列的封闭圆电流组产生的磁场中，在管外绕一周，积分 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$ 。



但实际的螺线管并不等同于紧密排列的封闭圆电流组，电流总是从一端输入，一端输出，

以管外任一闭合回路为边界的曲面总和一根电线相交，

因而 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ 。

- 作业27

6.能否利用磁场对带电粒子的作用来增大粒子的动能？随时间变化的磁场呢？

答：1.不能。因为：$\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$ 带电粒子所受的磁场力始终与运动速度垂直，所以它只改变速度的方向，不能改变速度的大小。因而不能改变粒子的动能。

2.可能。变化的磁场产生电场，而电场是可以对带点粒子做功的。

例2.四条平行的无限长直导线，

垂直通过边长为 $a=20cm$ 正方形顶点，

每条导线中的电流都是 $I=20A$，这四条导线

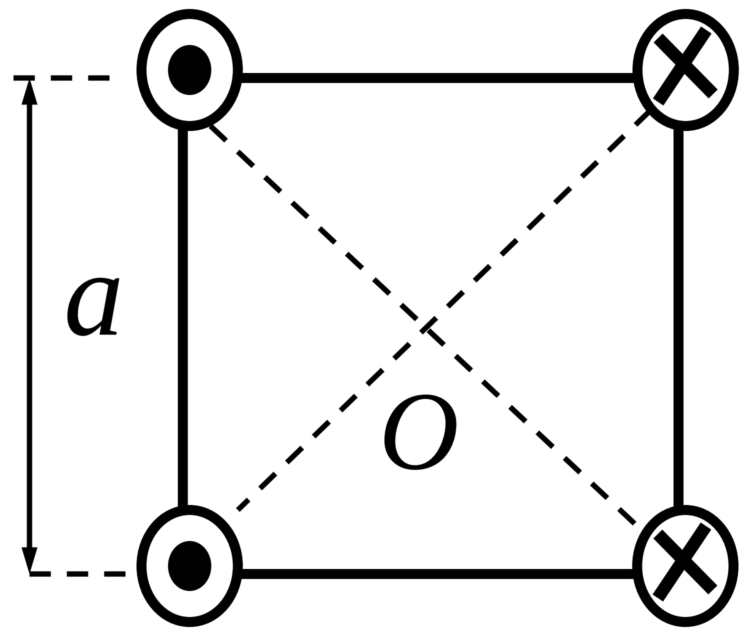
在正方形中心点 O 产生的磁感应强度为[ ]。

A. $B=0.8\times10^{-4}T$

B. $B=1.6\times10^{-4}T$

C. $B=0$

D. $B=0.4\times10^{-4}T$



解：建立直角坐标系，则4根无限长载流直导线在正方形中心产生的磁感应强度为

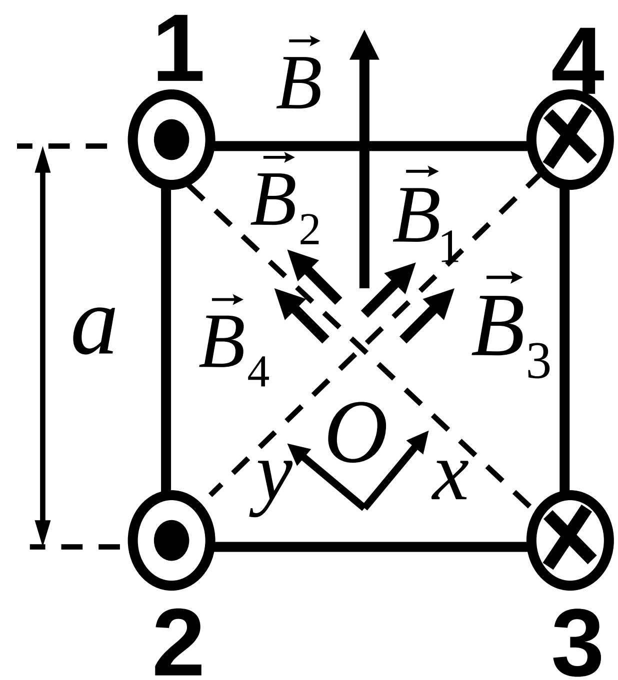
$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{i} \qquad \vec{B}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{j}$$

$$\vec{B}_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{i} \qquad \vec{B}_4=\frac{\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}\vec{j}$$

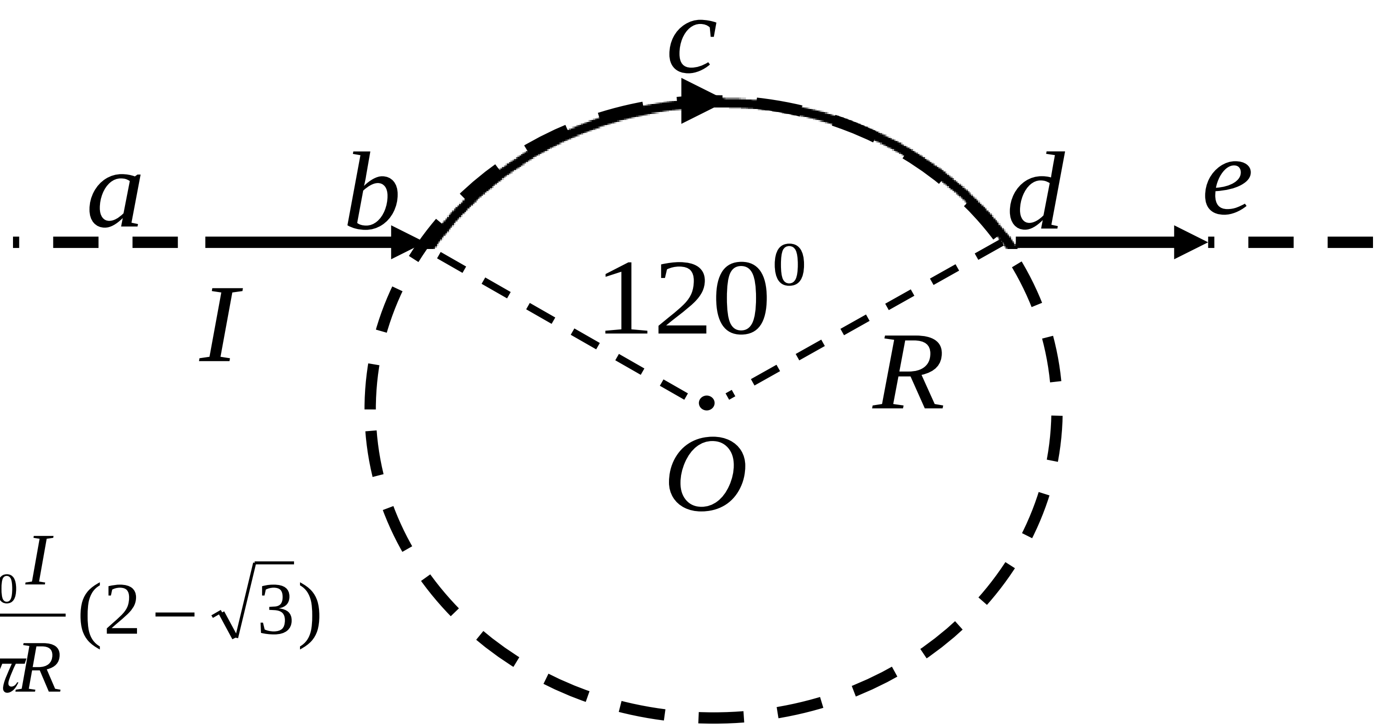
$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4$$

$$=\frac{2\mu_0 I}{2\pi a\cos 45^\circ}(\vec{i}+\vec{j})$$

$$B=8\times 10^{-5}T$$



例3.一根无限长直导线 $abcde$ 弯成图所示的形状，中部 bcd 是半径为 R 、对圆心 O 张角为 120^0 的圆弧当通以电流 I 时， O 处磁感应强度的大小 $B=$ ______，方向为______。



答案:

$$B=\frac{\mu_0 I}{6R}+\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(2-\sqrt{3})$$

方向垂直纸面向里

解：将整个载流导线分为三段：

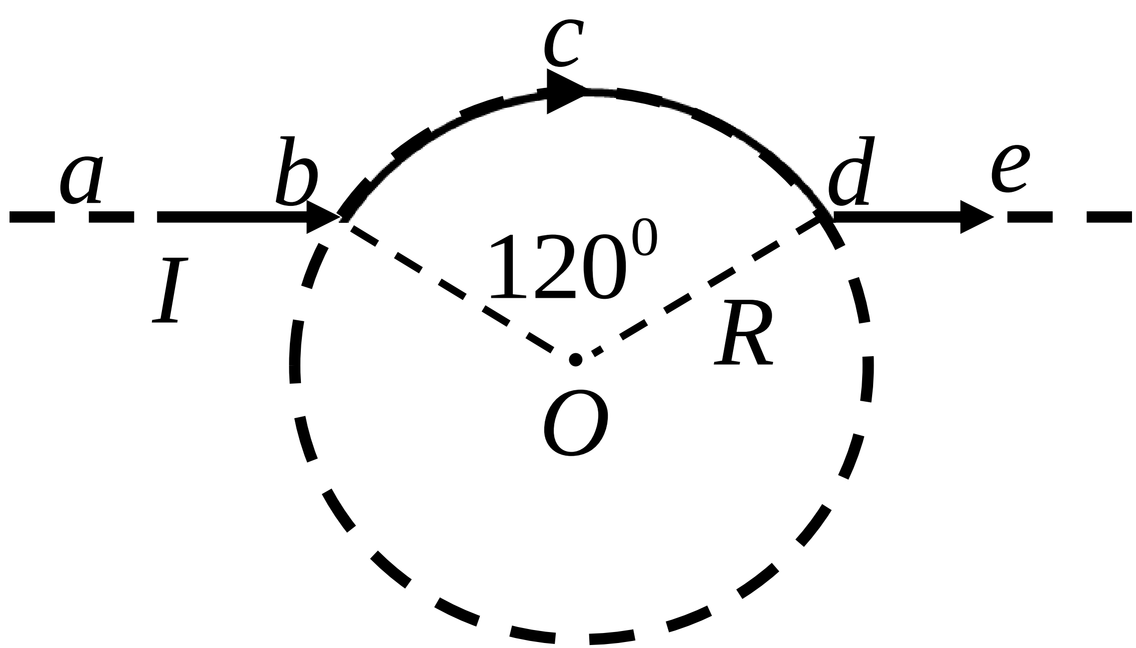
直线 ab 、圆弧 bcd 、直线 de 。

由毕萨定律可以判断出，

三段载流导线在圆心处产生的电磁感应强度

方向均沿着垂直纸面向里，

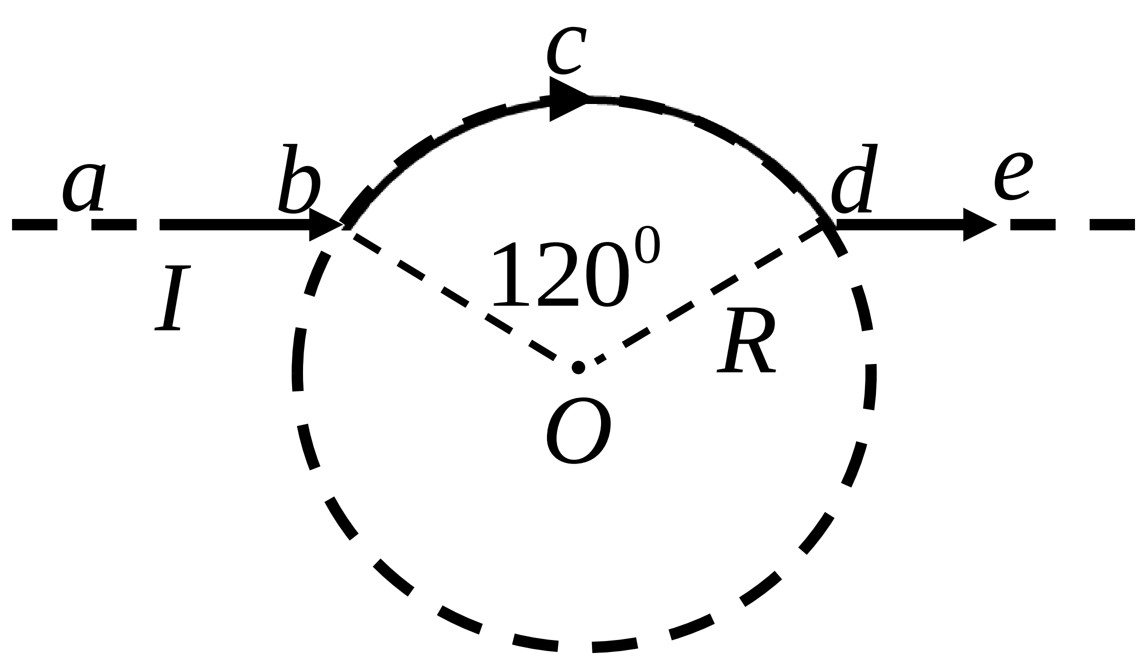
因此，总的电磁感应强度方向沿着垂直纸面向里。



两段载流直线在圆心处产生的电磁感应强度

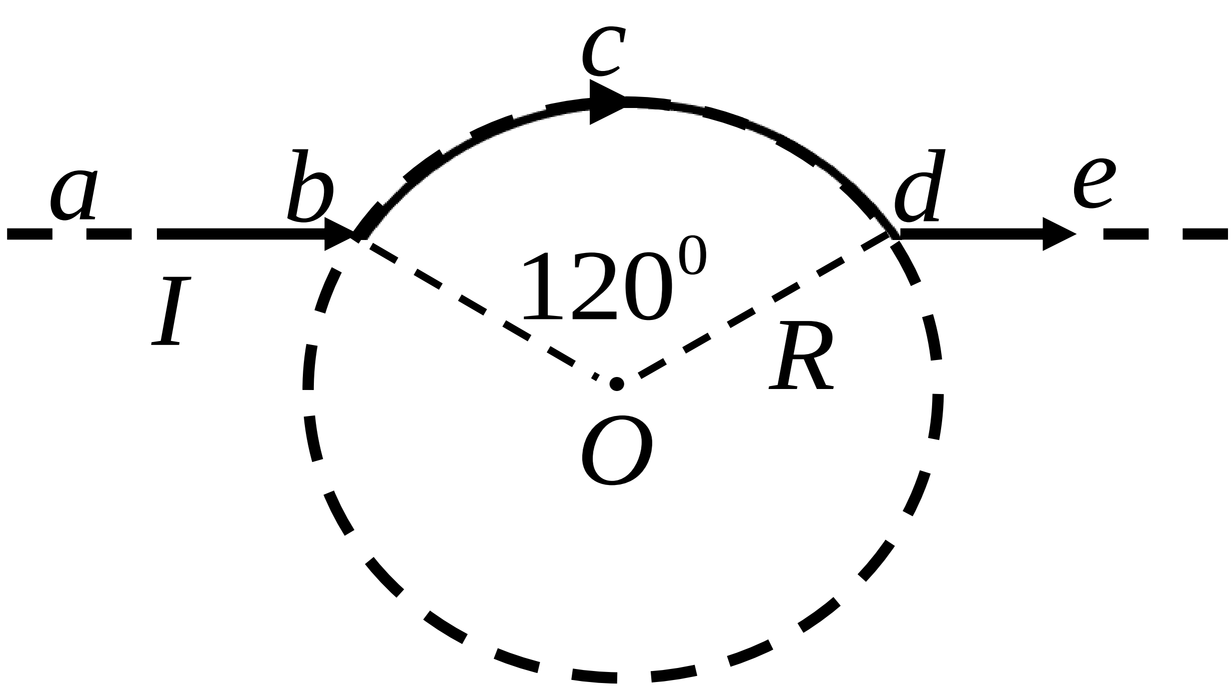
$$B_{a-b}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos 60^\circ}(\cos 0^\circ-\cos 30^\circ)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2-\sqrt{3})$$

$$B_{d-e}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos 60^\circ}(\cos 120^\circ-\cos 180^\circ)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2-\sqrt{3})$$



三分之一圆弧在圆心处产生的电磁感应强度

$$B_{bcd} = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \frac{1}{3} = \frac{\mu_0 I}{6R}$$



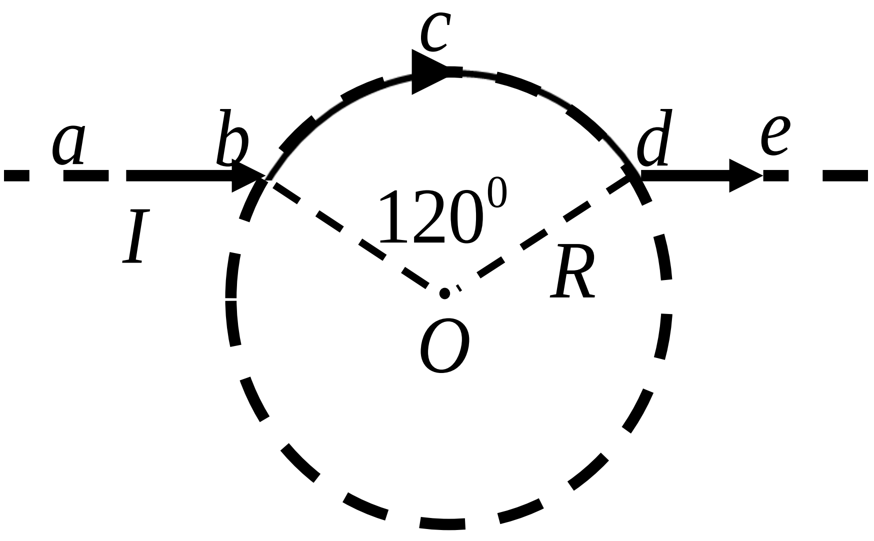
$$B_{a-b} = B_{d-e} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2-\sqrt{3}) \qquad B_{bcd} = \frac{\mu_0 I}{6R}$$

方向均沿着垂直纸面向里

在圆心处产生的总电磁感应强度

$$B = B_{a-b} + B_{bcd} + B_{d-e}$$

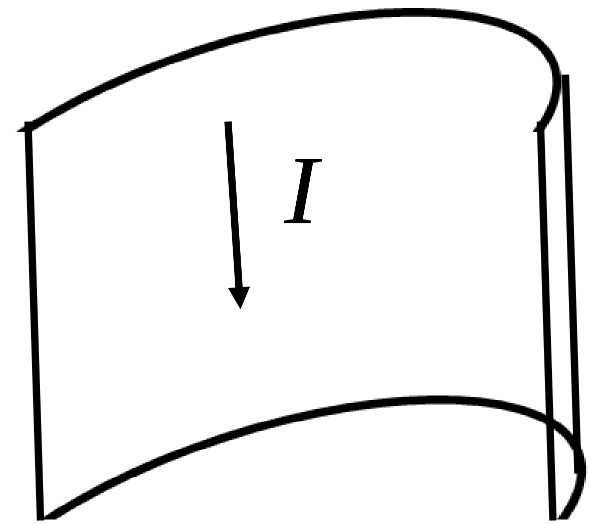
$$= \frac{\mu_0 I}{6R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(2-\sqrt{3})$$



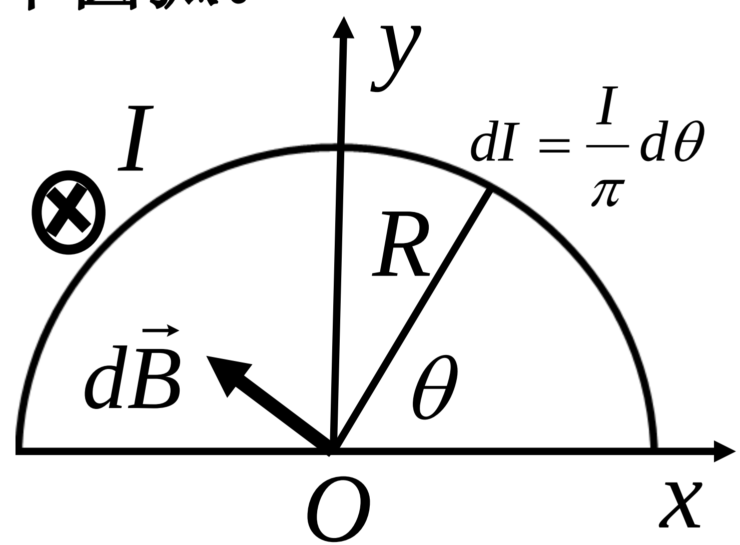
方向垂直纸面向里

例5.在一半径 $R = 1.0cm$ 的无限长半圆柱形金属薄片中，自上而下地有电流 $I = 3.0A$ 通过，试求：

圆柱轴线上任一点 O 的磁感应强度



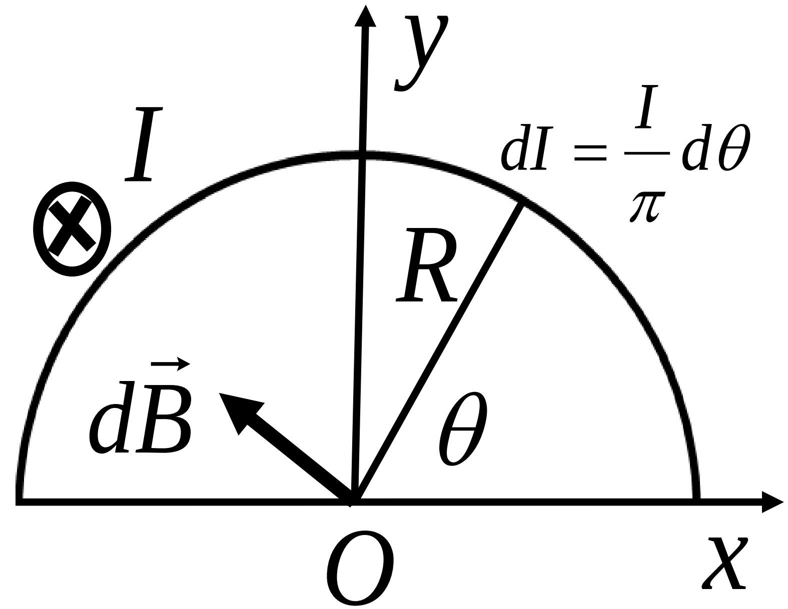
解：如图，取过场点 O 的横截面为 xy 平面，横截面与金属薄片的交集为一个半圆弧。



可以将电流分成无限多小的无限长电流 dI，圆心角为 θ - $\theta + d\theta$ 的电流

$$dI = \frac{I}{\pi R} R d\theta = \frac{I}{\pi} d\theta$$

$$dI=\frac{I}{\pi R}Rd\theta=\frac{I}{\pi}d\theta$$



它对场点的磁场贡献为

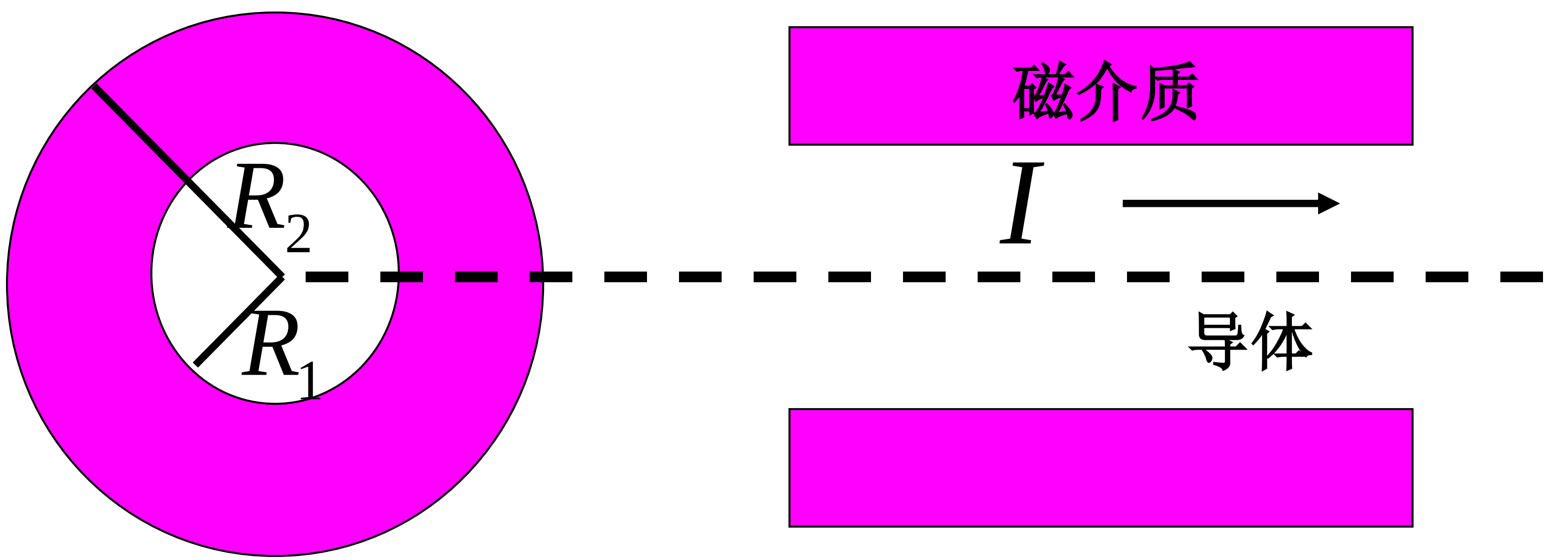
$$d\vec{B}=\frac{\mu_0(I/\pi)d\theta}{2\pi R}(-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j})$$

对θ 从**0**到 π 积分，可得

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}(-2\vec{i})=-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}=-3.82\times10^{-5}\vec{i}\ (T)$$

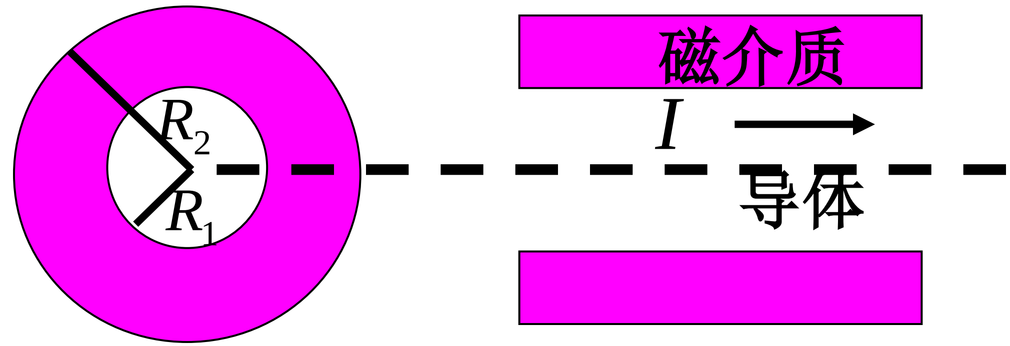
例7.一无限长圆柱形直导线，
外包一层相对磁导率为 μ_r 的圆筒形磁介质，
导线半径为 R_1 ，磁介质外半径为 R_2 ，
导线内有电流 I 通过（见图）。求：

（1）介质内、外的磁感应强度的分布，
（2）介质内、外的磁场强度的分布，



解：在以圆柱轴线为对称轴的圆周上，
各处磁场强度大小相等且沿圆周切线方向。
应用**H**的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi rH = \sum I_0$$



在导体内 $r < R_1$

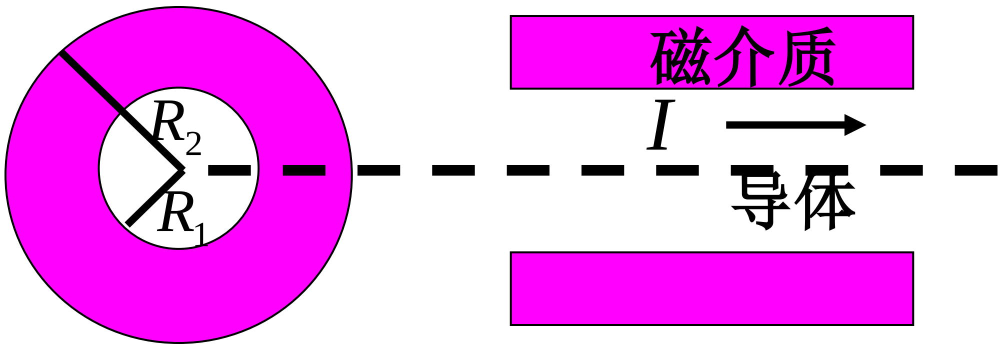
$$\sum I_0 = I\frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} = I\frac{r^2}{R_1^2} \qquad 2\pi \mathrm{rH} = I\frac{r^2}{R_1^2}(r < R_1),$$

在导体外 $r > R_1$

$$\sum I_0 = I \qquad 2\pi \mathrm{rH} = I\,(r > R_1),$$

$$2\pi\, \mathrm{rH} = I\frac{r^2}{R_1^2}\,(r < R_1),$$

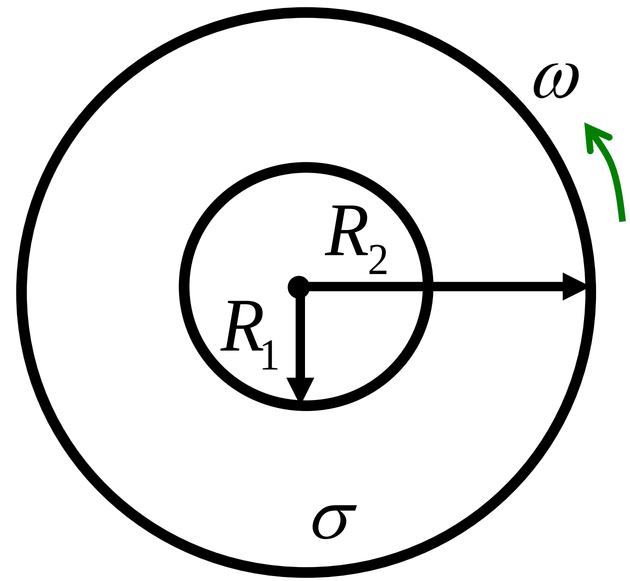
$$2\pi\, \mathrm{rH} = I\,(r > R_1),$$



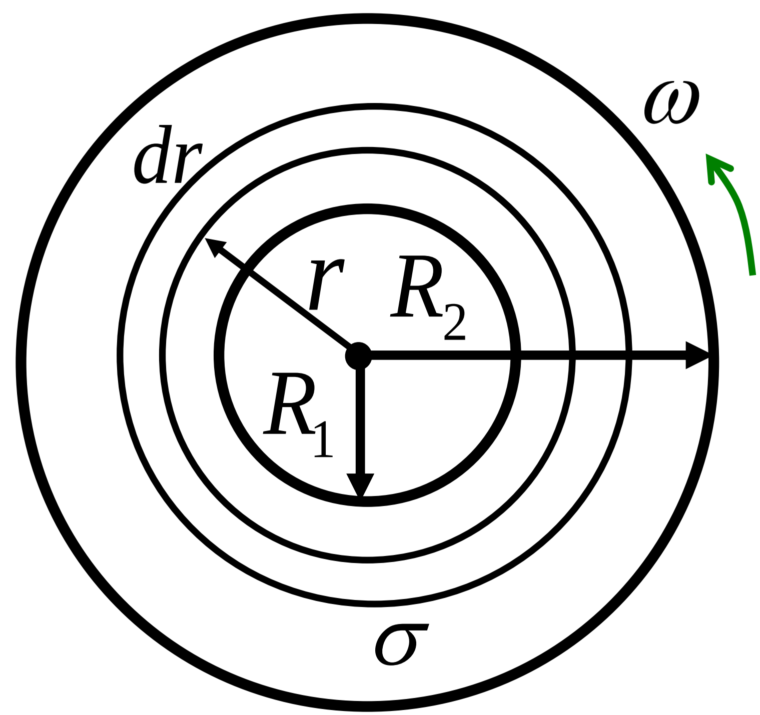
$$\mathrm{H} = \begin{cases} I/(2\pi\,\mathrm{r}) & (r > R_1) \\ Ir/(2\pi R_1^2) & (r < R_1) \end{cases}$$

$$\mathrm{B} = \begin{cases} \mu_0 Ir/(2\pi R_1^2) & (r < R_1) \\ \mu_0\mu_r I/(2\pi\,\mathrm{r}) & (R_1 < r < R_2) \\ \mu_0 I/(2\pi\,\mathrm{r}) & (r > R_2) \end{cases}$$

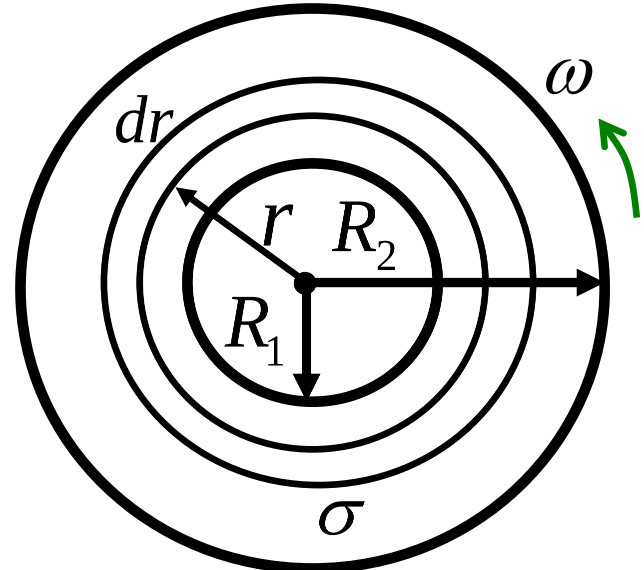
例10 内、外半径分别为 R_1 、R_2，面电荷密度为 σ 的均匀带电非导体平面圆环，绕轴线以匀角速度 ω 旋转时，求圆环中心的磁感应强度。



解：当带电平面圆环旋转时，其上电荷作圆周运动形成电流在空间激发磁场。



平面圆环上的电流可看成是半径连续变化的圆形电流的叠加。可取半径为 r 宽为 dr 的细圆环，旋转时，细圆环上的电流为



$$dI = \sigma 2\pi r dr \frac{\omega}{2\pi} = \sigma\omega r dr$$

该线电流在环心 O 处产生的磁感应强度

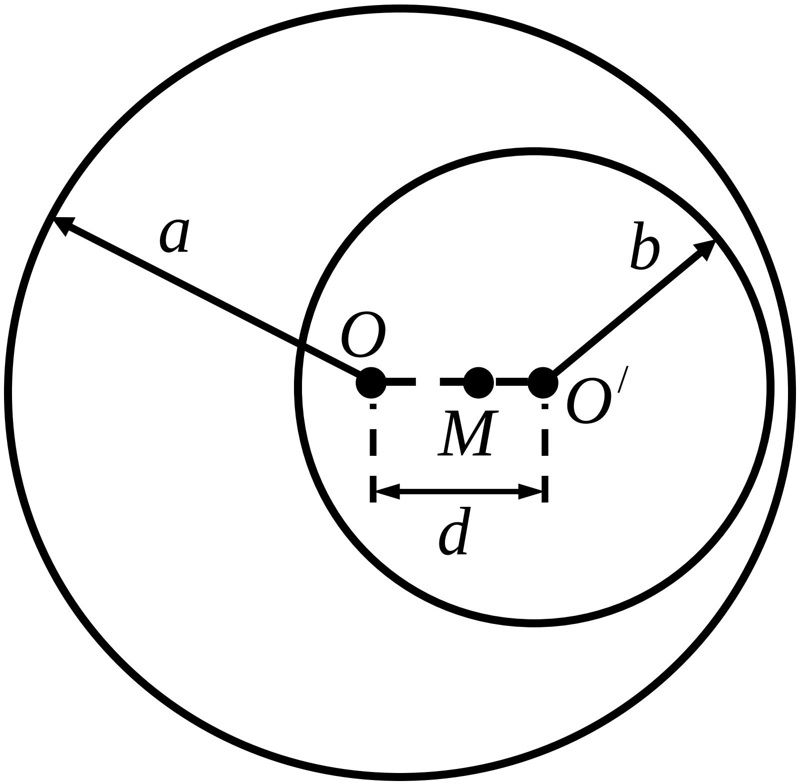
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma\omega}{2} dr$$ 方向：垂直纸面

半径不同的细圆环在 O 处产生的磁感应强度方向相同

则 O 处总磁感应强度大小

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \sigma\omega}{2} \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma\omega (R_2 - R_1)$$

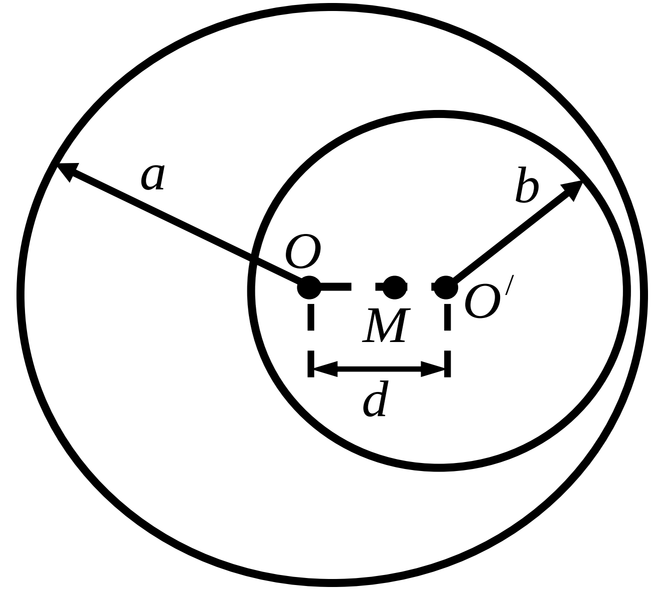
例11 半径为 a 的无限长金属圆柱体内挖去一半径为 b（ $b<a$ ）的无限长柱体，两柱轴线平行，轴间距 d（ $d<a-b$ ）。空心导体沿轴向通有电流，并沿截面均匀分布。



(1)求此二柱轴线联线上任一点的 $\vec{B}$；

(2)证明腔内磁场是均匀磁场。

分析：题中的电流分布不具有高度对称性，不能直接用安培环路定理求解，而直接用毕奥—萨伐尔定律求解又相当麻烦。如果我们把非对称的电流填补成对称的电流，就变得简单了。



假想空腔中在轴向存在方向相反、数量相等的电流，电流密度与导体中的相同，这样，

空腔内任一点的磁场 $\vec{B}$ 可看成是半径为 a 的长圆柱形均匀载流导体产生的磁场 $\vec{B}_1$ 与半径为 b 的长圆柱形电流产生的磁场 $\vec{B}_2$ 之和，两部分电流各自产生的磁场具有轴对称性，可分别由安培环路定理求得。

解：（1）

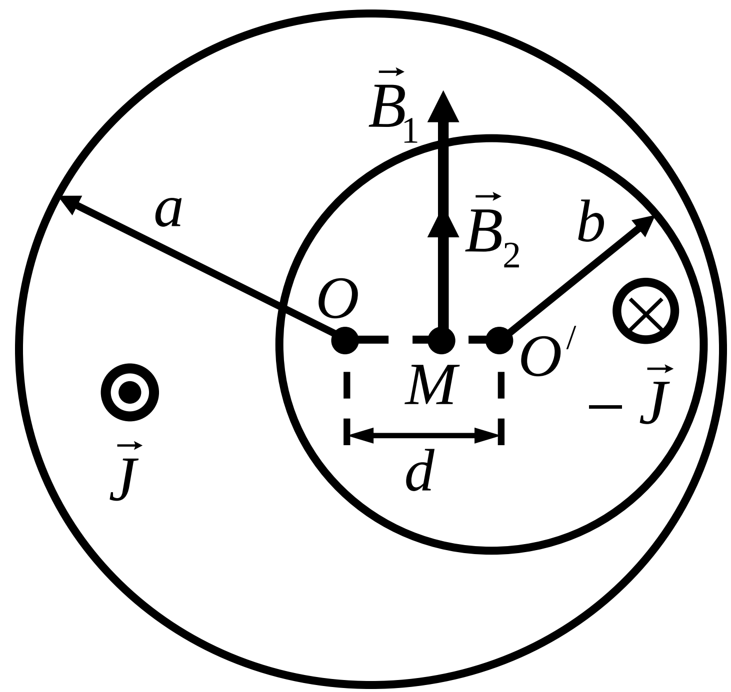
半径为 a 、电流密度为 $\vec{J}$ 的长圆柱形载流导体在两轴联线上任一点 M 处产生的磁感应强度为 $\vec{B}_1$，

取以 O 为圆心，半径 r 的圆作闭合回路，

由安培环路定理

导体中的电流密度

$$J=\frac{I}{\pi(a^2-b^2)}$$



$$\oint \vec{B}_1\cdot d\vec{l}=B_1 2\pi r=\mu_0\pi r^2 J$$

$$B_1=\frac{1}{2}\mu_0 rJ$$

解：（1）

导体中的电流密度

$$J=\frac{I}{\pi(a^2-b^2)}$$

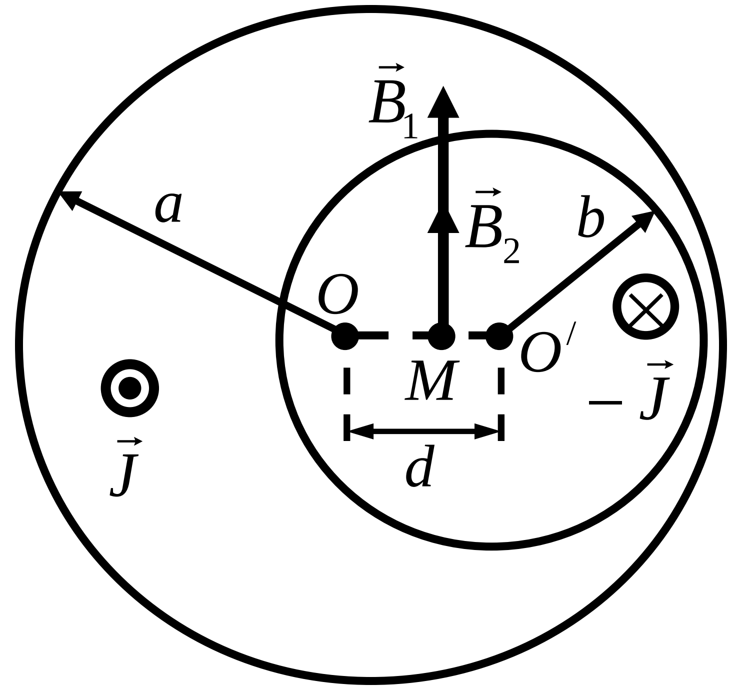
半径为 b 、电流密度为 $-\vec{J}$ 的长圆柱形载流导体在两轴联线上任一点 M 处产生的磁感应强度为 $\vec{B}_2$，

取以 O' 为圆心，半径 $d-r$ 的圆作闭合回路，

由安培环路定理

$$\oint \vec{B}_2\cdot d\vec{l}=B_2 2\pi(d-r)$$

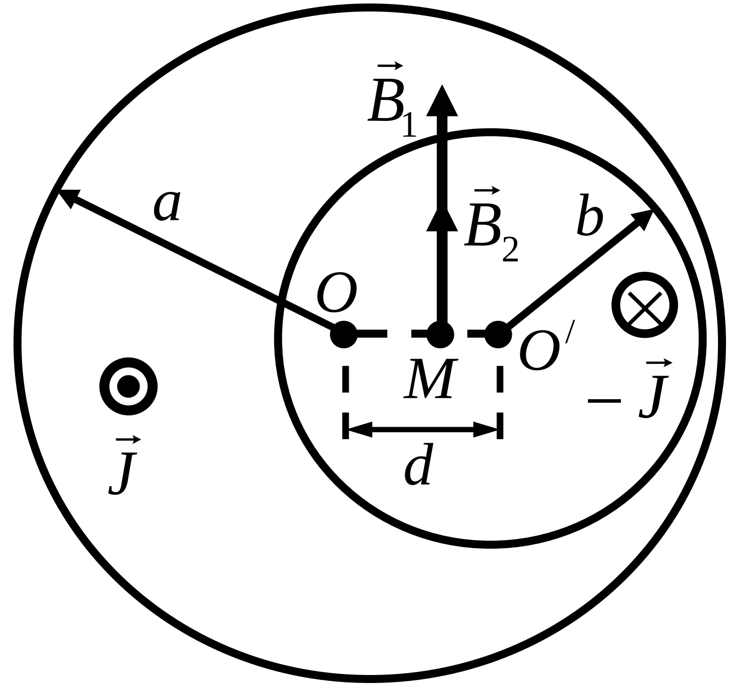
$$=\mu_0\pi(d-r)^2 J$$



$$B_2=\frac{1}{2}\mu_0(d-r)J$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 rJ$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 (d - r)J$$



M 点磁感应强度

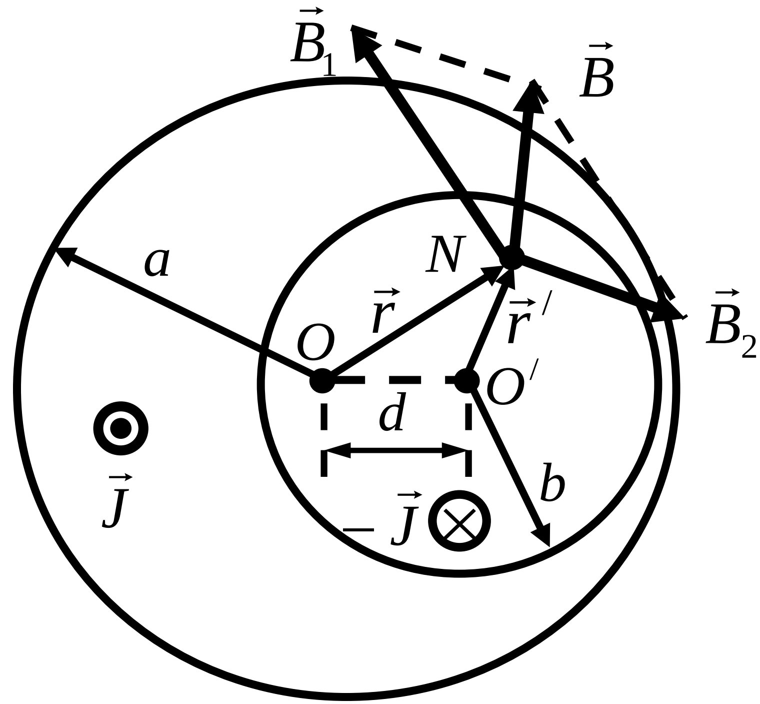
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

大小为 $B = B_1 + B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 Jd$ 方向垂直于两轴联线

M 点的 B 与 r 无关，

两轴联线上各点的 $\vec{B}$ 大小相等、方向相同。

(2)证明：设 N 为腔内任一点，由安培环路定理可分别求得



$$B_1=\frac{1}{2}\mu_0 rJ \qquad B_2=\frac{1}{2}\mu_0 r^{\prime} J$$

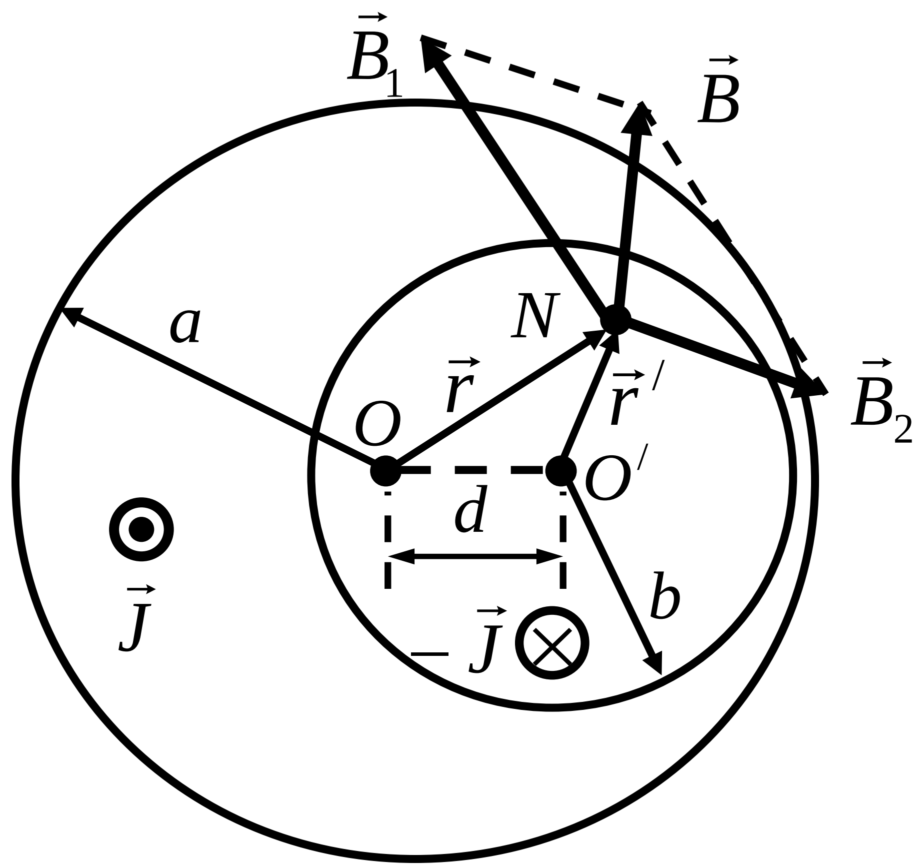
考虑到各量的方向

$$\vec{B}_1=\frac{1}{2}\mu_0\vec{J}\times\vec{r} \qquad \vec{B}_2=-\frac{1}{2}\mu_0\vec{J}\times\vec{r}^{\,\prime}$$

所以 N 点的磁感应强度

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{1}{2}\mu_0\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime})=\frac{1}{2}\mu_0\vec{J}\times\overrightarrow{OO^{\prime}}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{2}\mu_0\vec{J}\times\overrightarrow{OO'}$$



大小、方向与 N 点在腔内的位置无关，

$\vec{B}$ 为常矢量

$\vec{B}$ 的方向与$\overrightarrow{OO'}$ 垂直，大小为 $B=\frac{1}{2}\mu_0 Jd$，即空腔内的场是均匀磁场。

问题讨论

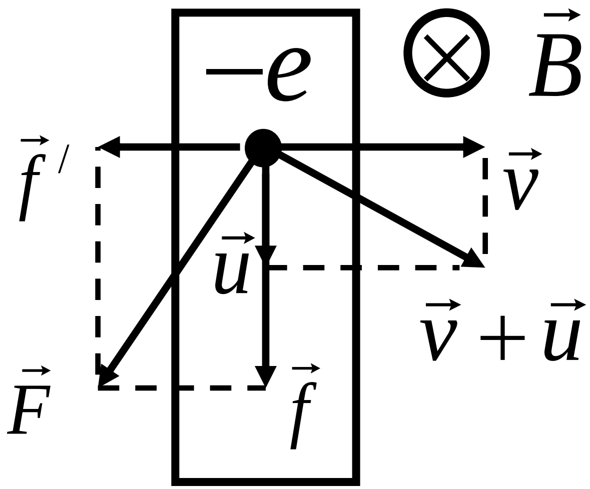
1. 动生电动势是由洛仑兹力做功引起的。而洛仑兹力永远和运动电荷的运动方向垂直，因而对电荷不做功，两者是否矛盾?

答：两者并不矛盾。

由于洛仑兹力总是和带电粒子的运动速度相垂直，因而它对电荷不做功，但在运动导线中的电子除了有随导体运动的速度 $\vec{v}$ 之外，还有相对导线的定向运动速度 $\vec{u}$，(正是由于电子的后一运动构成了动生电动势）。因此电子所受的总的洛仑兹力为

$$\vec{F} = -e(\vec{v}+\vec{u})\times\vec{B}$$

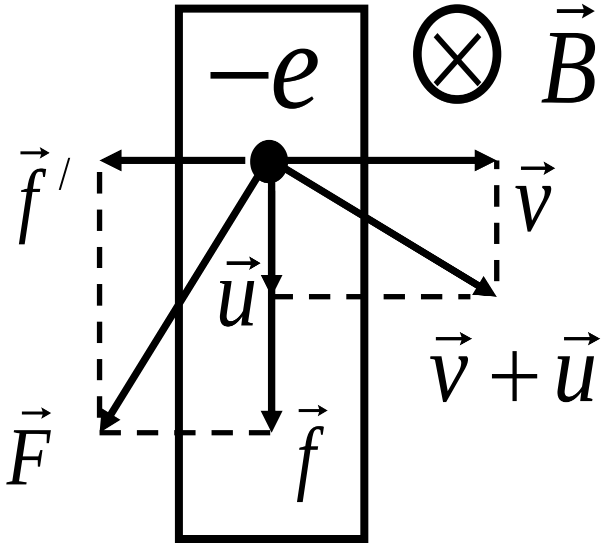
它与电子的合速度 $(\vec{v}+\vec{u})$ 垂直，总的洛仑兹力不对电子做功。



然而 $\vec{F}$ 的一个分量

$$\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

却对电子做正功，形成动生电动势；



而另一分量

$$\vec{f}' = -e\vec{u} \times \vec{B}$$

它的方向沿 $-\vec{v}$ ，阻碍导体的运动，从而做负功。

总的洛仑兹力做功的功率为

$$\vec{F} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{f} + \vec{f}') \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = evBu - evBu = 0$$

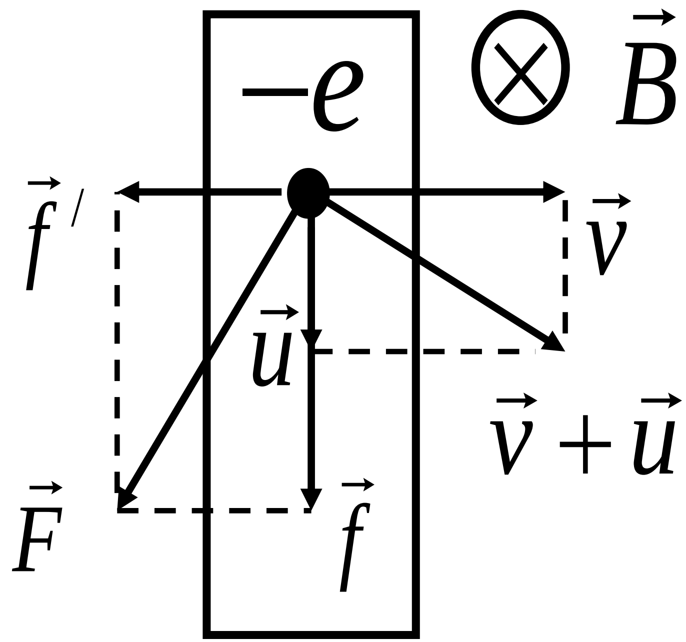
$$\vec{f} \cdot \vec{u} = -\vec{f}' \cdot \vec{v}$$

洛仑兹力的两个分量
所做的功的代数和等于零

$$\vec{f}\cdot\vec{u}=-\vec{f}'\cdot\vec{v}$$

安培力 $\vec{f}'$ 和产生动生电动势的非静电力 $\vec{f}$ 都是洛仑兹力的分量，它们都能做功，只是二者做功之和等于零。

如果动生电动势做正功，
则安培力做负功，
外界必须克服安培力做功。
实际上是电能和机械能的相互转换过程，
而稳恒磁场在其中起着转换中介的作用。



3．均匀磁场被限制在半径为 R 的无限长圆柱内，磁场随时间作线性变化，现有两个闭合曲线 L_1 (为一圆形)与 L_2 (为一扇形)。

讨论：

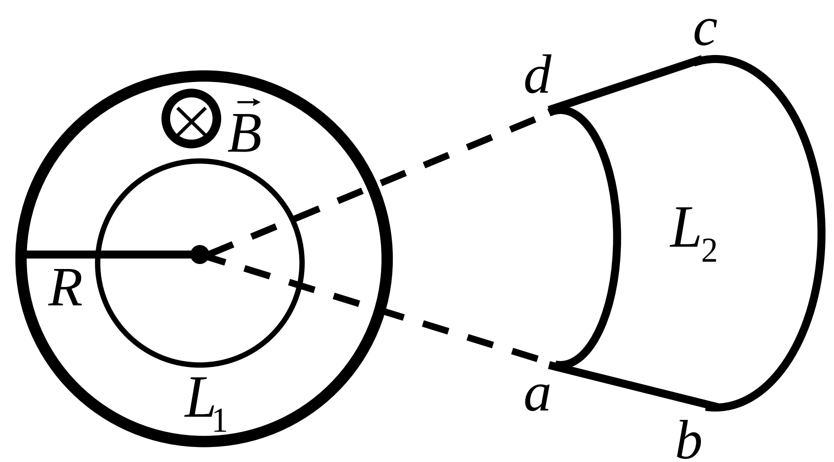
L_1 与 L_2 上每一点的 $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ 是否为零?

答：L_1 处于磁场区域内，

L_1 上各点的 $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ 不为零，

L_2 处于磁场区域外，

L_2 上各点 $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ 等于零。



涡旋电场 $\vec{E}'$ 是否为零?

变化的磁场激发涡旋电场 $\vec{E}'$ ，

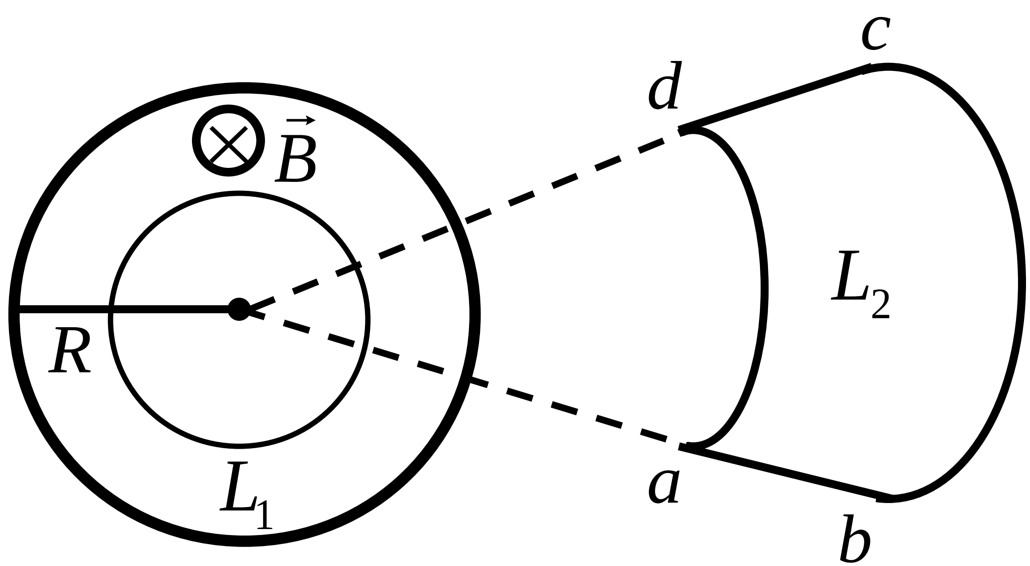
磁场被限制在半径为 R 的圆柱形区域内。

但此磁场随时间变化

产生的涡旋电场 $\vec{E}'$

却不局限于有磁场的

区域内



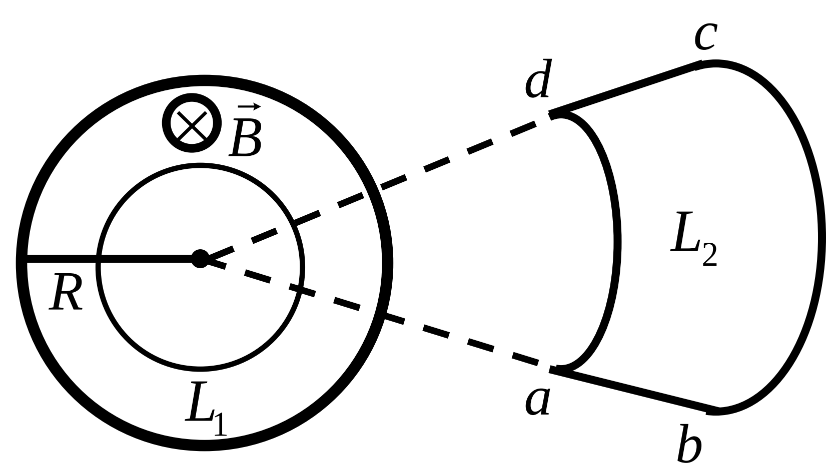
因而 L_1 和 L_2 上各点的涡旋电场 $\vec{E}'$ 均不为零

$\oint_{L_1} \vec{E}' \cdot d\vec{l}$ 与 $\oint_{L_1} \vec{E}' \cdot d\vec{l}$ 是否为零?

由 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 可知，

穿过以 L_1 闭合曲线为边界的曲面的磁通量不为零，

因而 $\oint_L \vec{E}' \cdot d\vec{l} \neq 0$ ；



而闭合曲线 L_2 在磁场之外，穿过以 L_2 闭合曲线为边界的曲面的磁通量为零，因而:

$$\oint_L \vec{E}' \cdot d\vec{l} = 0$$

7．在闭合电路中电源，可变电阻器和螺线管相串联，如图所示，下列几种情况下，

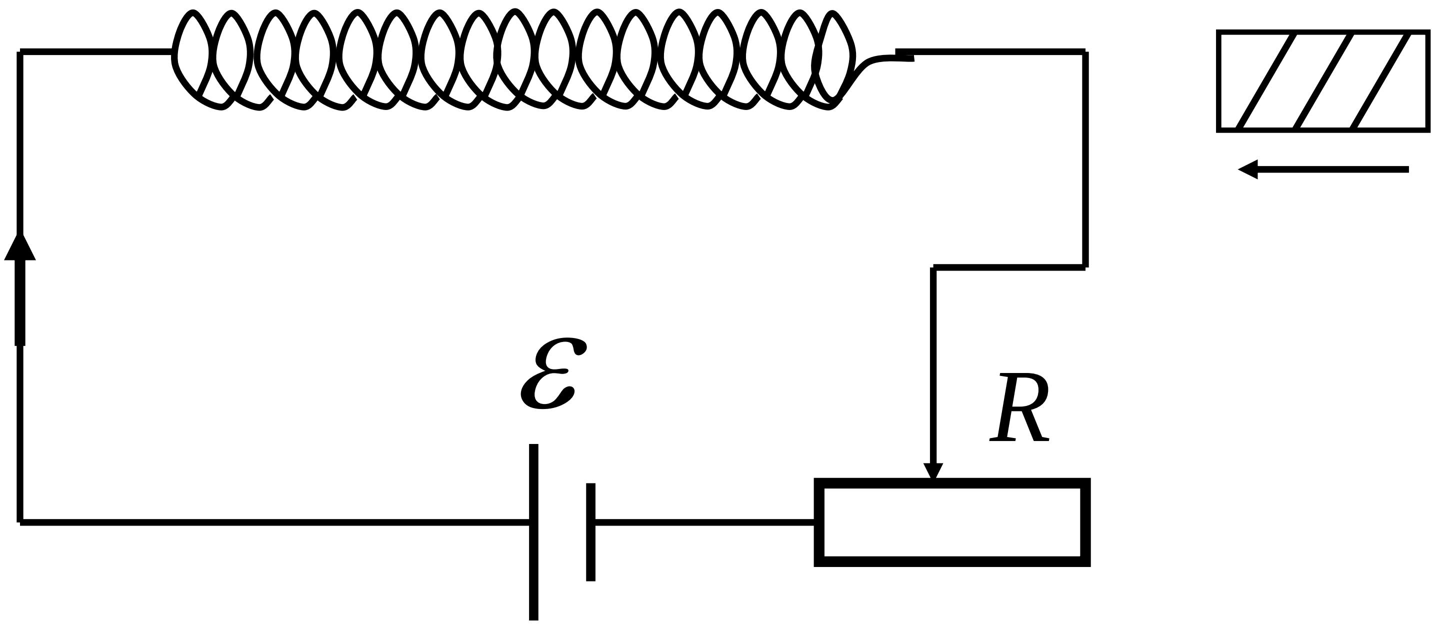
回路中是否会产生感应电流?方向如何?

(1)可变电阻器的滑线触点向左移动;

(2)螺线管的截面压扁;

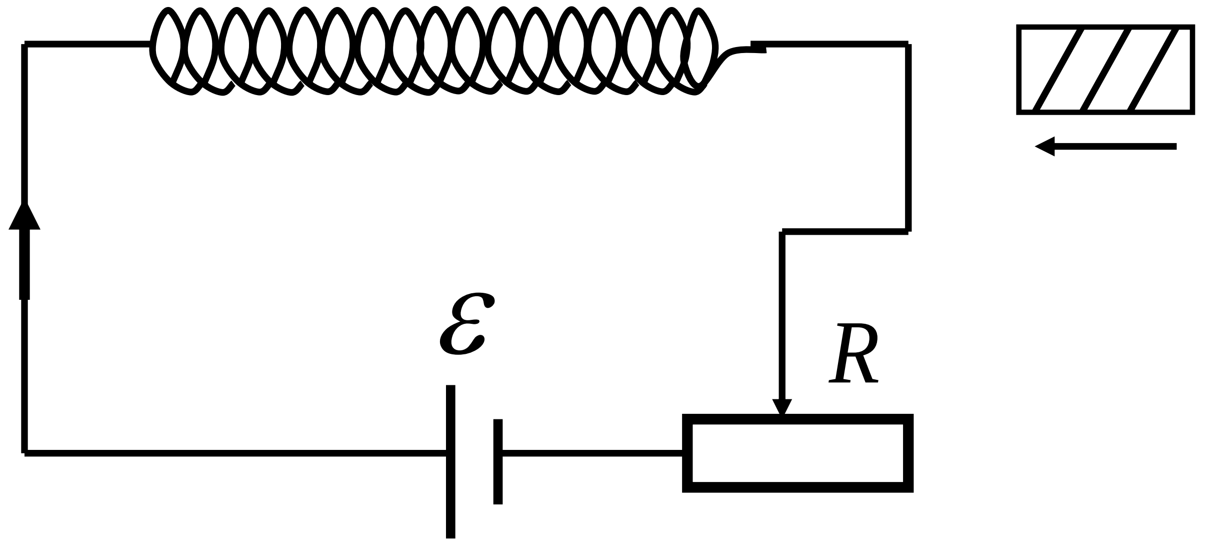
(3)螺线管的长度缩短(总匝数不变);

(4)把一铁芯插入螺线管中。



回路中是否会产生感应电流?方向如何?

(1)可变电阻器的滑线触点向左移动;



答:(1)可变电阻器的触点向左移动时,

回路中的电阻减小,电流增大,

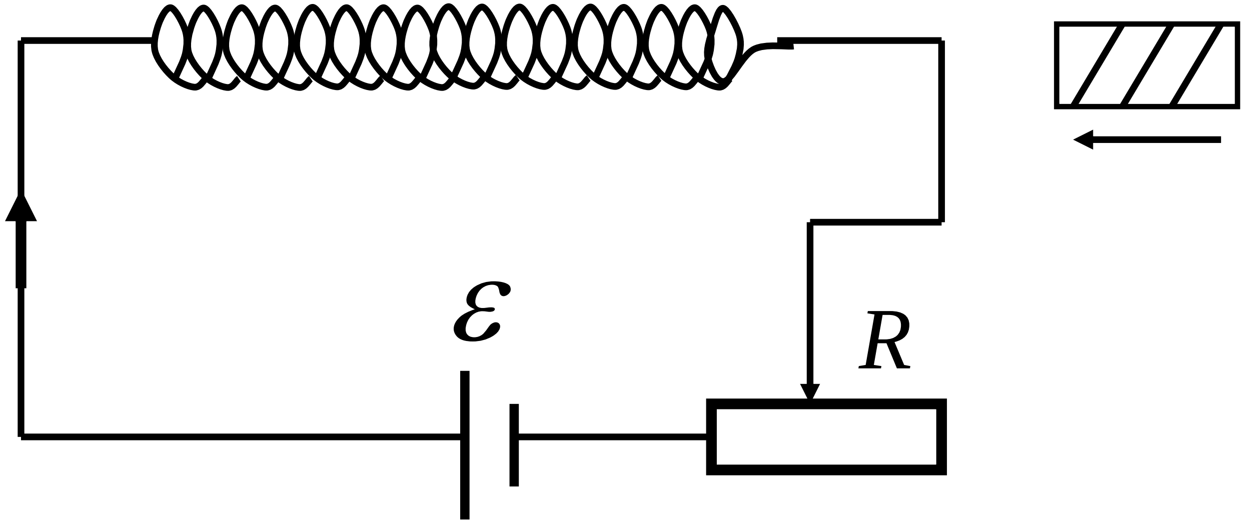
使得螺线管的全磁通增加,

感应电流的磁通要阻碍原磁通的增加,

感应电流的方向与原电流的方向相反。

回路中是否会产生感应电流?方向如何?

(2)螺线管的截面压扁；



答：(2)螺线管截面压扁，全磁通减小，

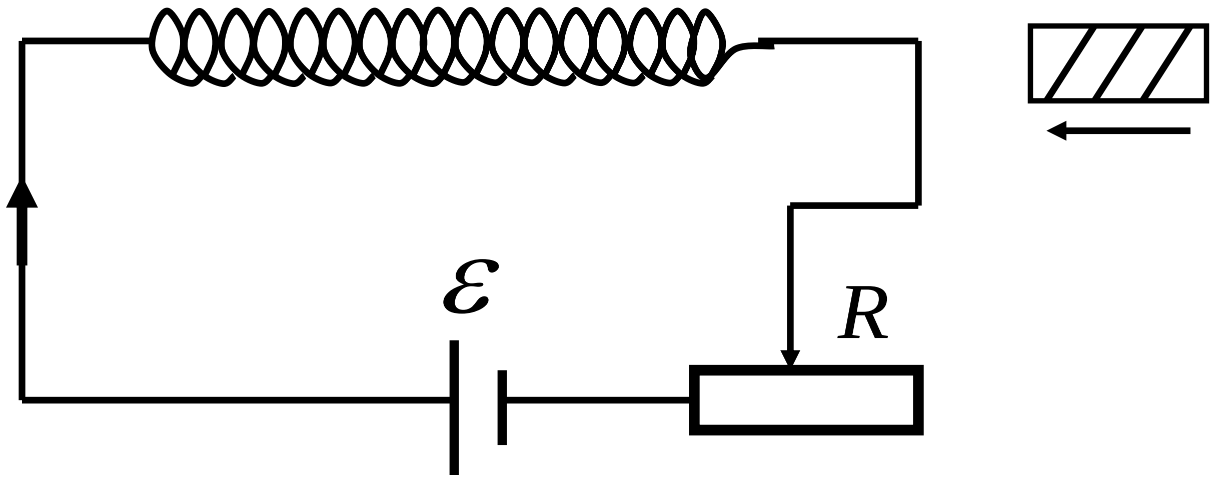
会产生感应电流，

感应电流的磁通要阻碍原磁通的减小，

所以，感应电流方向与原电流的方向相同。

回路中是否会产生感应电流?方向如何?

(3)螺线管的长度缩短(总匝数不变);



答：(3)对理想的长直螺线管，压缩后，

单位长度的匝数增加，

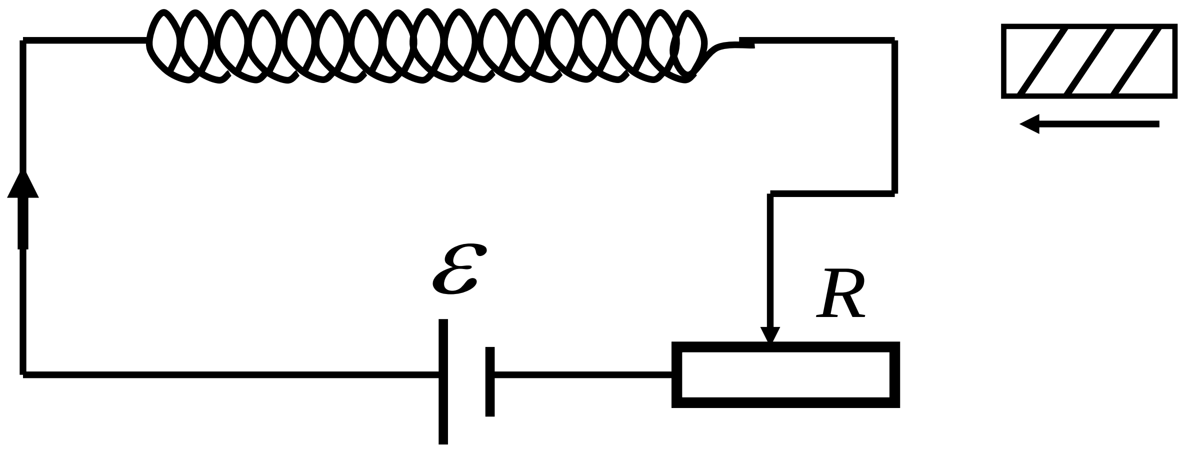
管内磁场 $B = \mu_0 nI$ 也增加，

通过螺线管的全磁通增加，

使得感应电流与原电流反向。

回路中是否会产生感应电流?方向如何?

(4)把一铁芯插入螺线管中。



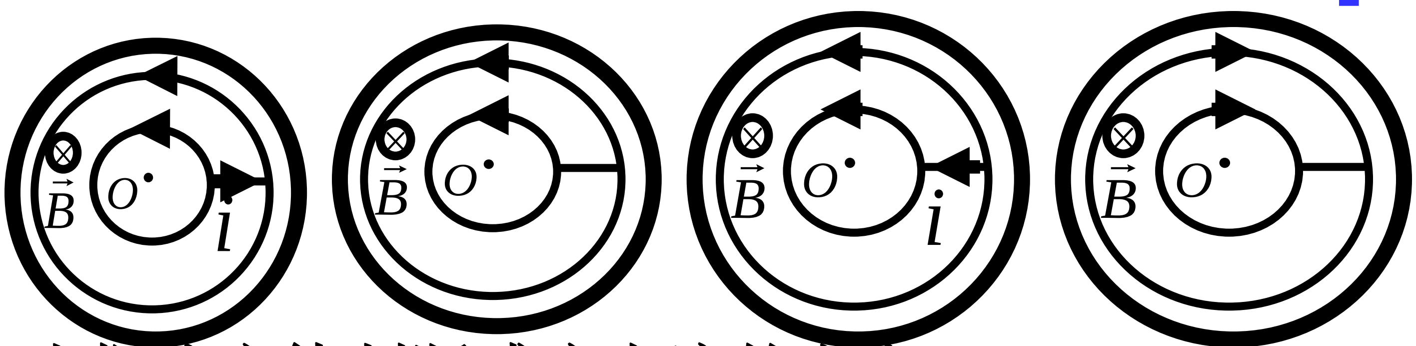
答：(4)铁芯插入，磁场增强，

通过螺线管的全磁通增加，

产生的感应电流阻碍磁通的增加，

方向与原电流的方向相反。

8. 用导线围成回路（两个以O点为圆心，半径不同的同心圆，在一处用导线沿半径方向相连），
放在轴线通过O点的圆柱形均匀磁场中，
回路平面垂直于柱轴，如图所示。
如磁场方向垂直图面向里，其大小随时间减小，
正确表示涡旋电场方向及感应电流的流向的是[ ]。



解：由楞次定律判断感应电流的方向。
由于磁场垂直于纸面向里，并且减小，所以，
感生电流产生的磁场垂直于纸面向里，由此可以判断出：
回路中感生电流的方向是顺时针的。
注意：由于两环之间的导线上没有电动势，
所以不同环之间没有电流。

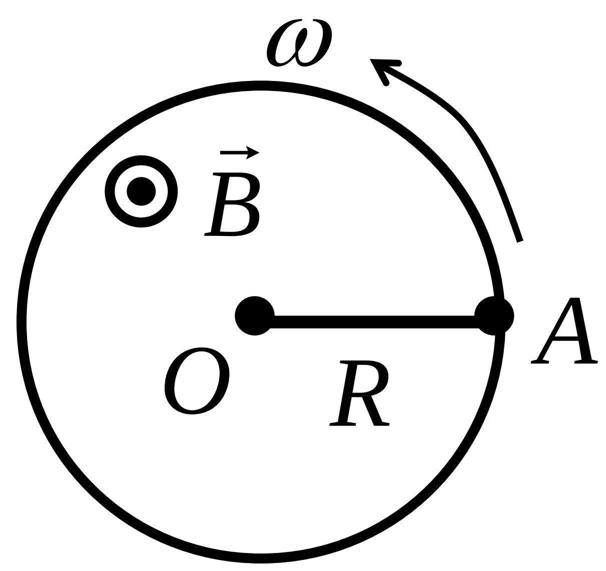
答：D

解题指导

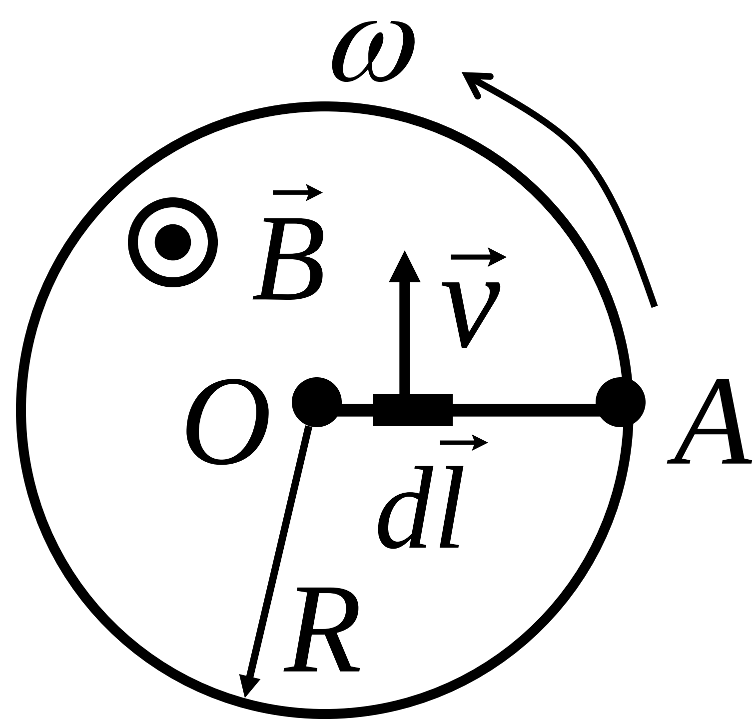
例1 在均匀磁场 $\vec{B}$ 中，有一半径为 R 的导体圆盘，盘面与磁场方向垂直，当圆盘以匀角速度 ω 绕过盘心的与 $\vec{B}$ 平行的轴转动时，盘心 O 与边缘上的点 A 间，其电势差 $U_O - U_A$ 等于[ ]。

A. $\frac{1}{2}\omega R^2 B$ B. $-\frac{1}{2}\omega R^2 B$

C. $\frac{1}{4}\omega R^2 B$ D. $-\frac{1}{4}\omega R^2 B$



解：由于导体圆盘，相当于有无数多由盘心到盘边的直导线绕盘心 O 转动，切割磁场线，因此，会在盘心 O 与盘边产生动生电动势。



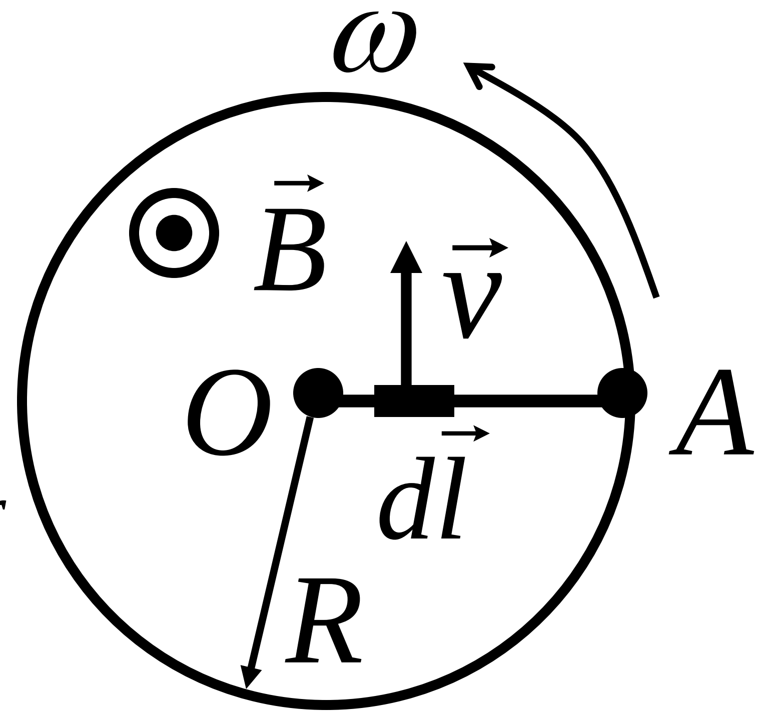
在 OA上，

距盘心 r 处取线元 $d\vec{l}=d\vec{r}$ ，

它所产生的动生电动势为

$$d\varepsilon_{OA}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$$

$$d\varepsilon_{OA} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$$



$$\vec{v}\perp\vec{B} \qquad (\vec{v}\times\vec{B})\,//\,d\vec{r}$$

$$d\varepsilon_{OA} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r} = vBdr = \omega rBdr$$

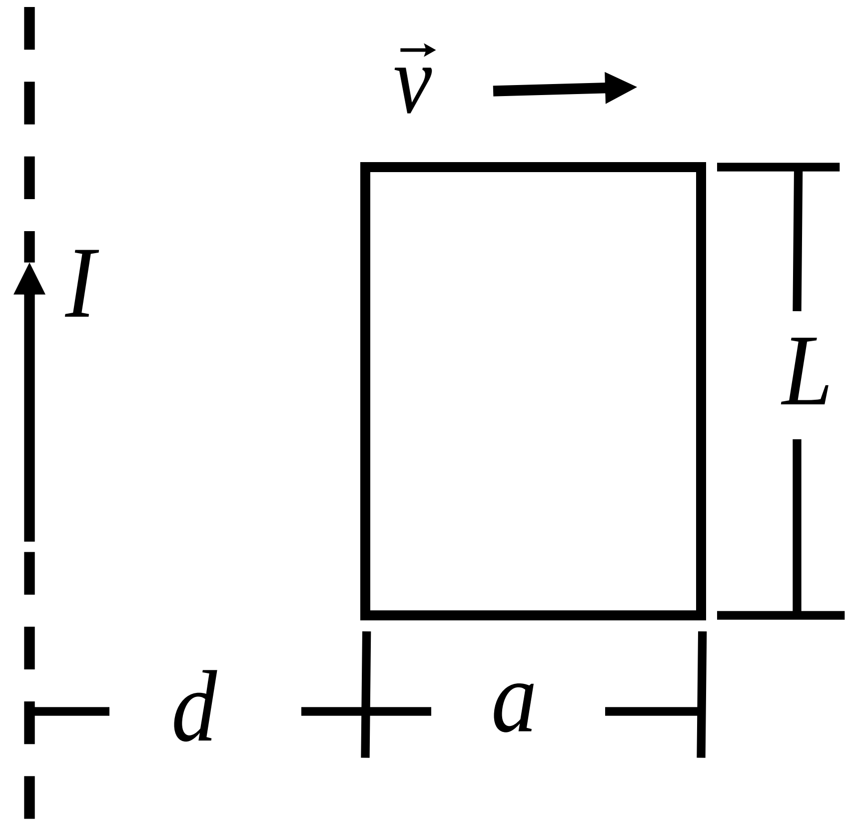
$$\varepsilon_{OA} = \int_{OA} d\varepsilon_{OA} = \int_{OA}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{OA}\omega Brdr = \int_0^R \omega Brdr = \frac{1}{2}\omega BR^2$$

电动势的方向为低电势指向高电势

$$\varepsilon_{OA} = U_A - U_O = \frac{1}{2}\omega BR^2 \qquad U_O - U_A = -\frac{1}{2}\omega BR^2$$

例3 长直导线中通有电流 $I=6A$，
另一矩形线圈与长直导线共面共10匝，
宽 $a=10cm$，$L=20cm$ 长，
以的速度 $v=2m\cdot s^{-1}$ 向右运动，



求：$d=10cm$ 时线圈中的感应电动势。

解1： 动生电动势。

将矩形导体框看成4段导体棒，则每个棒都在无限长载流直导线产生的磁场中运动，都有可能有动生电动势，总的电动势是每段动生电动势的代数和。

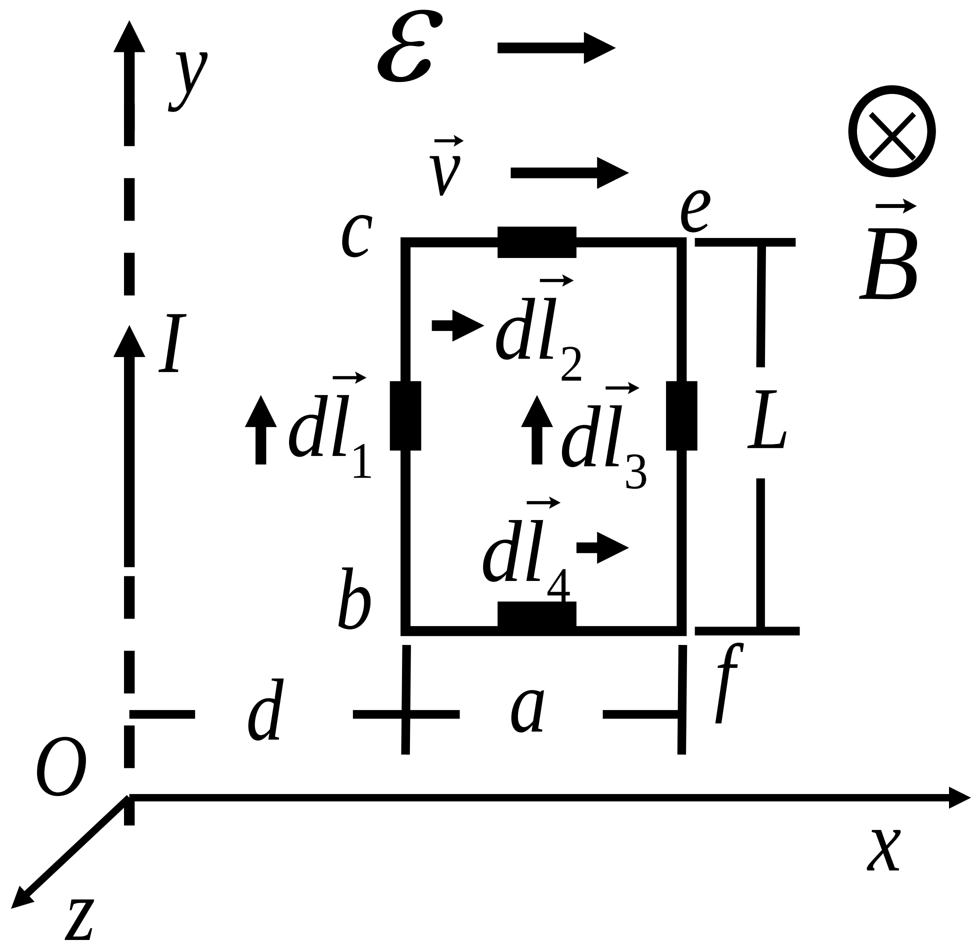
建立直角坐标系

$$\vec{v} = v\vec{i}$$

无限长载流直导线，产生的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\vec{k})$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}$$



线元 $d\vec{l}_1 = dy\vec{j}$

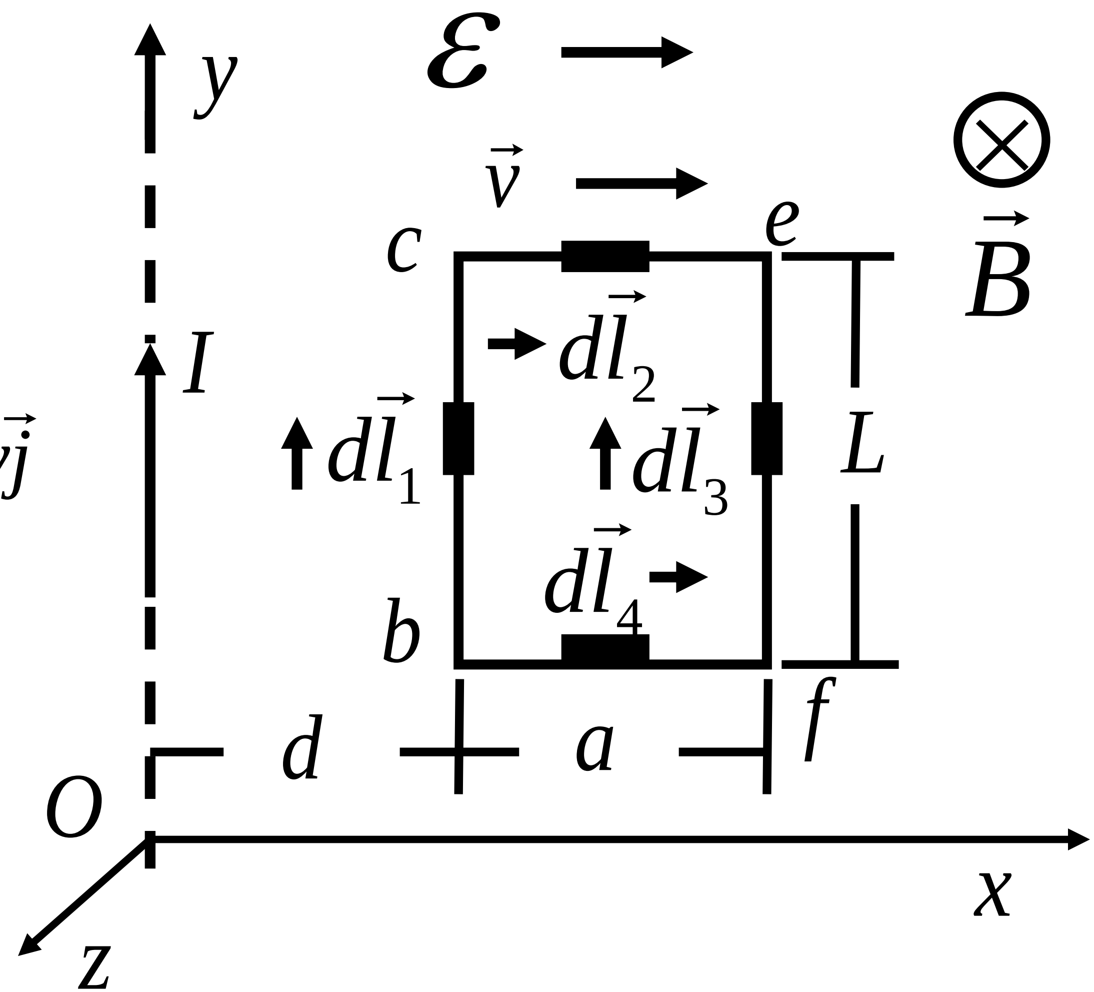
的动生电动势

$$d\varepsilon_{bc} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}_1$$

$$= (-v\vec{i}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{k})\cdot dy\vec{j}$$

$$= (v\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{j})\cdot dy\vec{j}$$

$$= v\frac{\mu_0 I}{2\pi d}dy$$



$$\varepsilon_{bc} = \int_{bc} d\varepsilon_{bc} = \int_0^L v\frac{\mu_0 I}{2\pi d}dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi d}L$$

线元 $d\vec{l}_2 = dx\vec{i}$

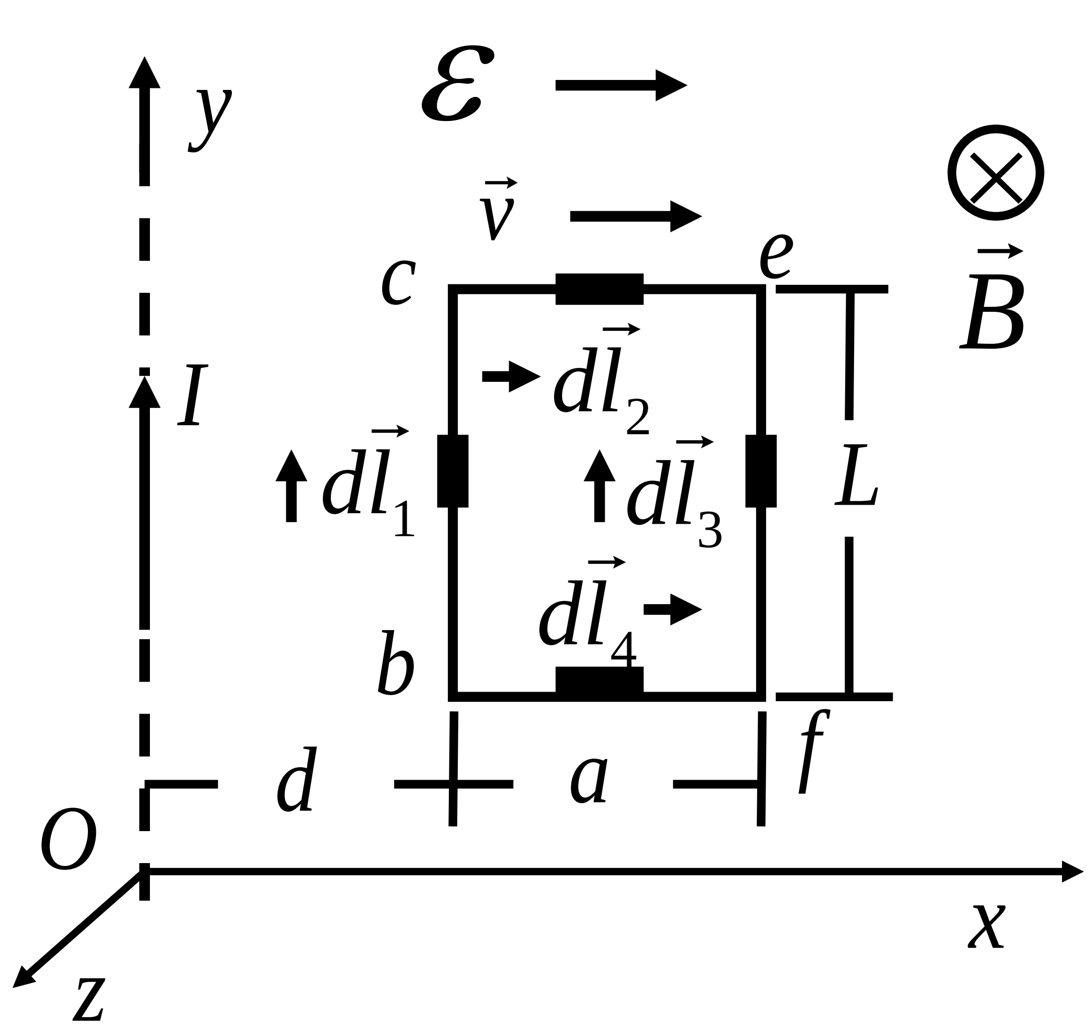
的动生电动势

$$d\varepsilon_{ce} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}_2$$

$$= (-v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}) \cdot dx\vec{i}$$

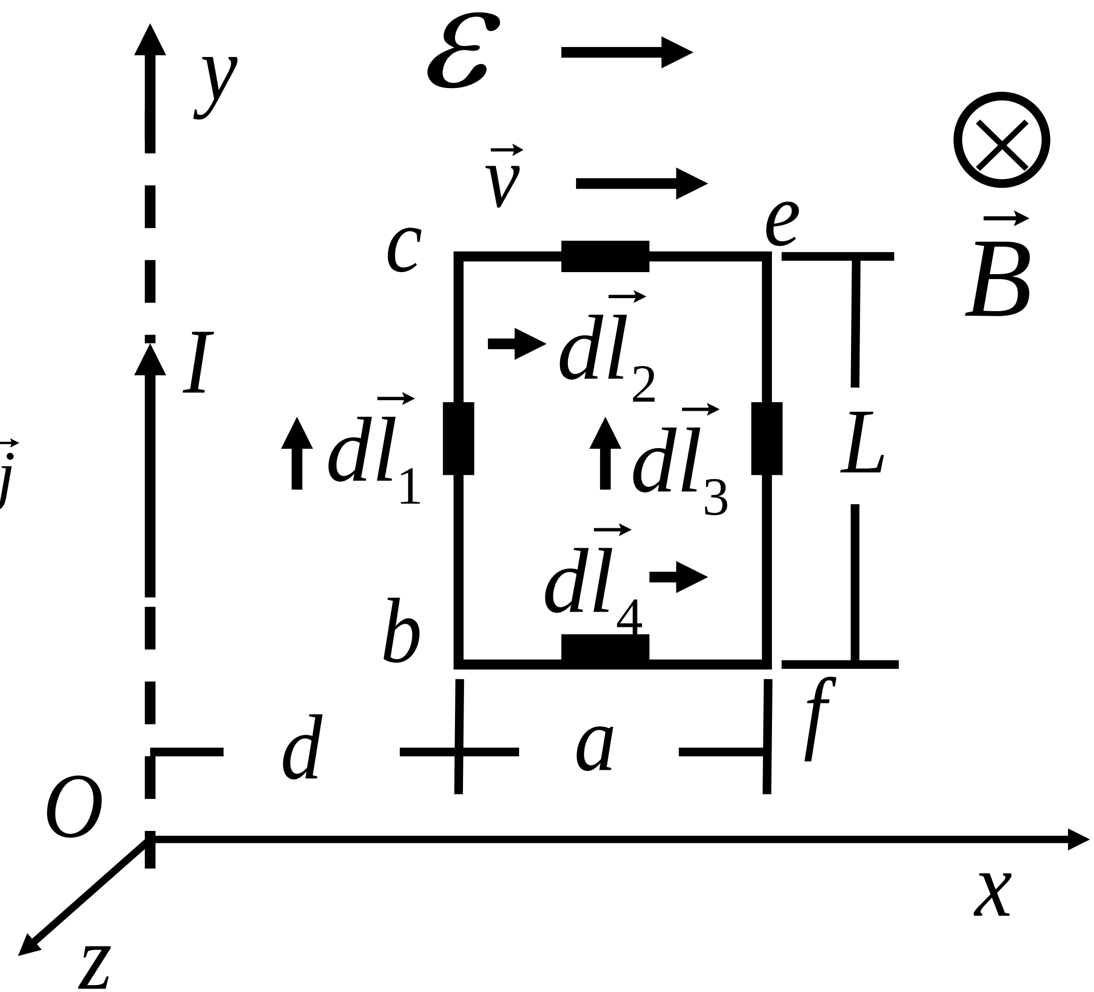
$$= (v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{j}) \cdot dx\vec{i} = 0$$

$$\varepsilon_{ce} = 0$$



线元 $d\vec{l}_3 = dy\vec{j}$

的动生电动势



$$d\varepsilon_{fe} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}_3$$

$$= (-v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}\vec{k})\cdot dy\vec{j}$$

$$= (v\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}\vec{j})\cdot dy\vec{j}$$

$$= v\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}dy$$

$$\varepsilon_{fe} = \int_{fe} d\varepsilon_{fe} = \int_0^L v\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+a)}L$$

线元 $d\vec{l}_4 = dx\vec{i}$

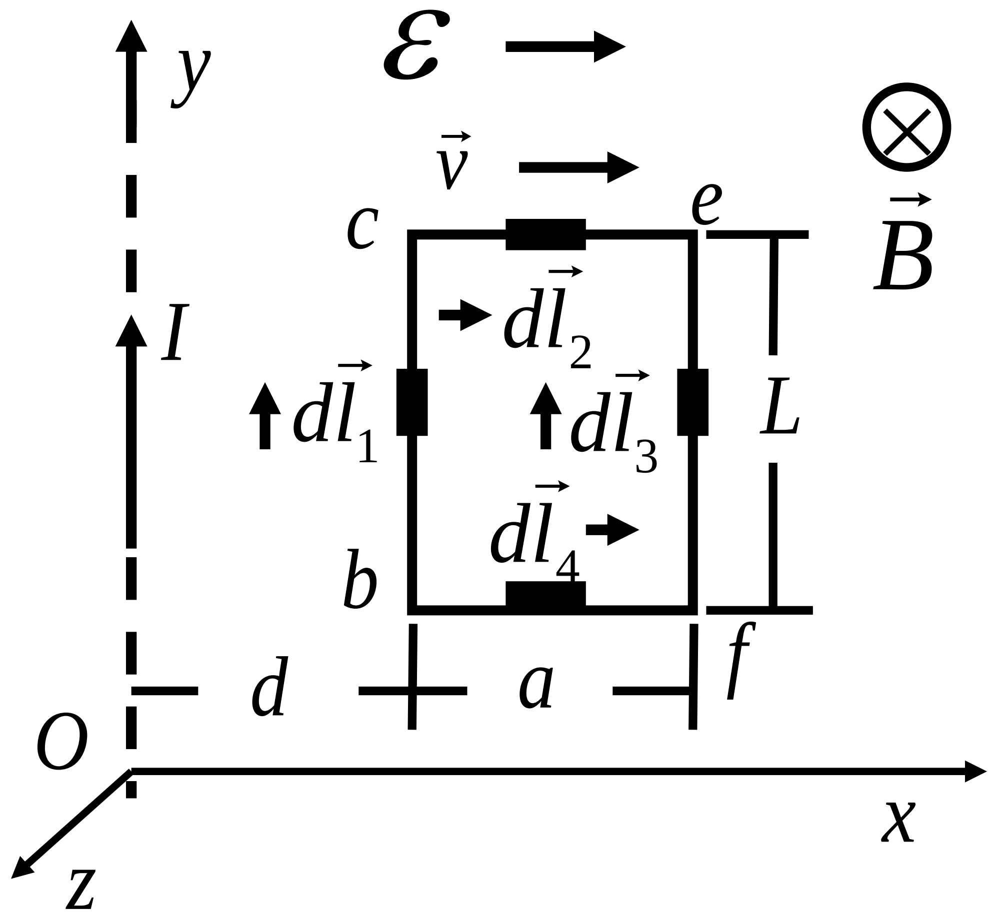
的动生电动势

$$d\varepsilon_{bf} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}_4$$

$$= (-v\vec{i}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k})\cdot dx\vec{i}$$

$$= (v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{j})\cdot dx\vec{i} = 0$$

$$\varepsilon_{bf} = 0$$



以顺时针方向为线框中电动势的正方向

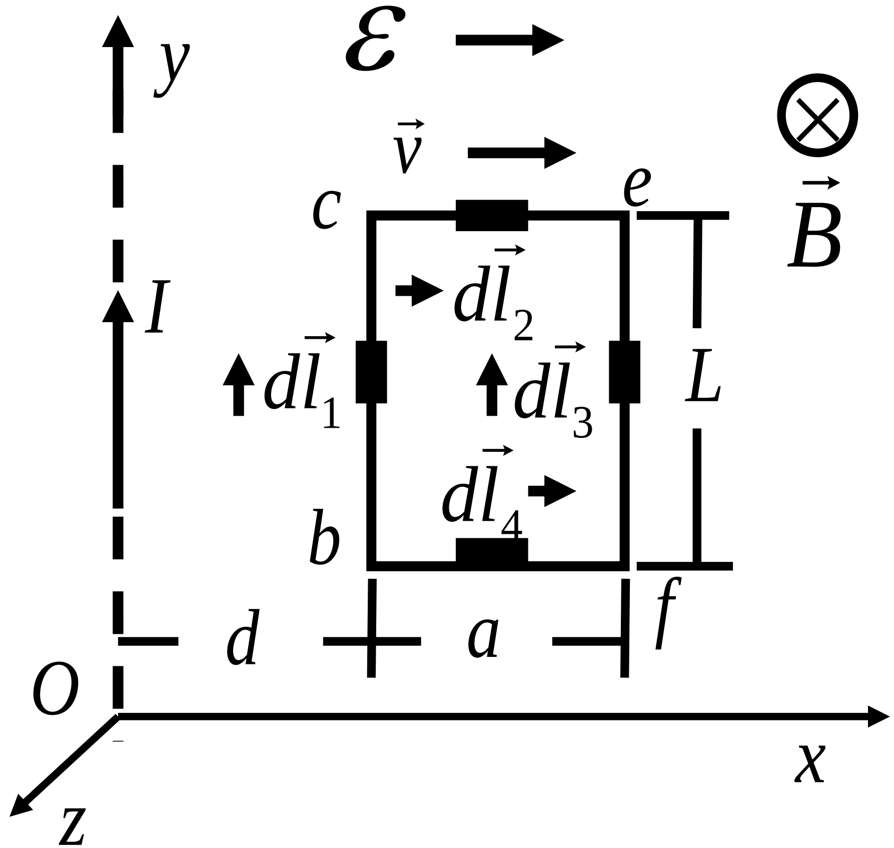
$$\varepsilon_{bc}=\frac{\mu_0 I v}{2\pi d}L \qquad \varepsilon_{ce}=0$$

$$\varepsilon_{ef}=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+a)}L \qquad \varepsilon_{fb}=0$$

$$\varepsilon=\varepsilon_{bc}+\varepsilon_{be}+\varepsilon_{ef}+\varepsilon_{fb}$$

$$=\frac{\mu_0 I v}{2\pi d}L+0-\frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+a)}L+0$$

$$=\frac{\mu_0 I v}{2\pi}L\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+a}\right)$$



线圈共有 N 匝，电动势

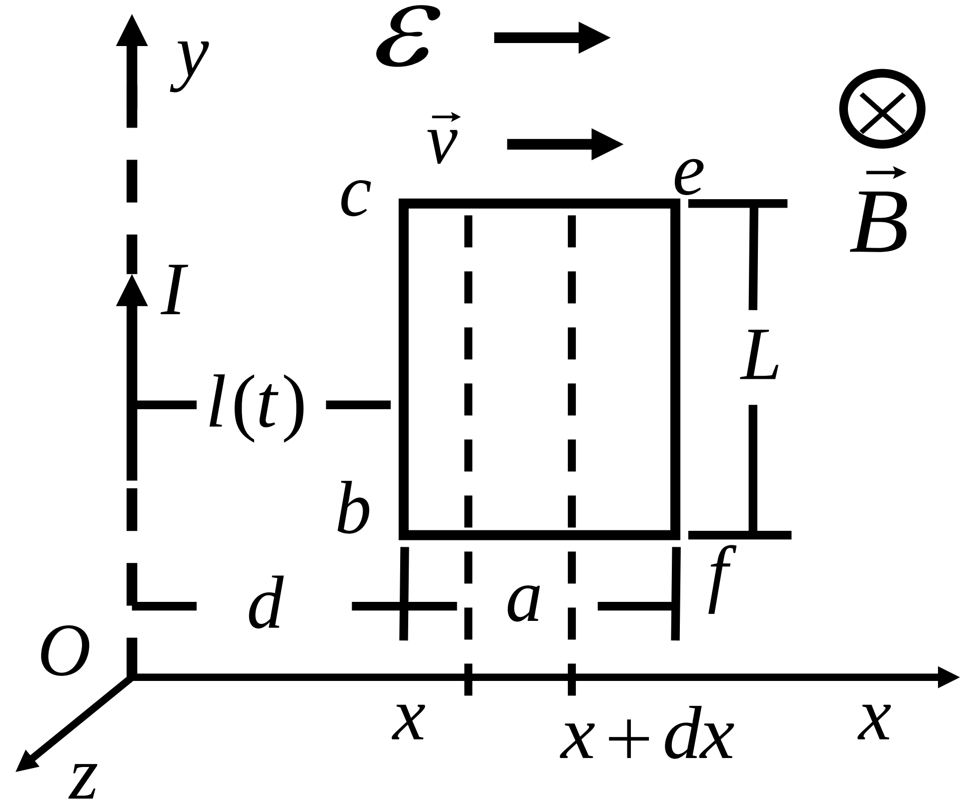
$$E=N\varepsilon=N\frac{\mu_0 I v}{2\pi}L\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+a}\right)=2.4\times10^{-5}(V)$$

解2：感生电动势。

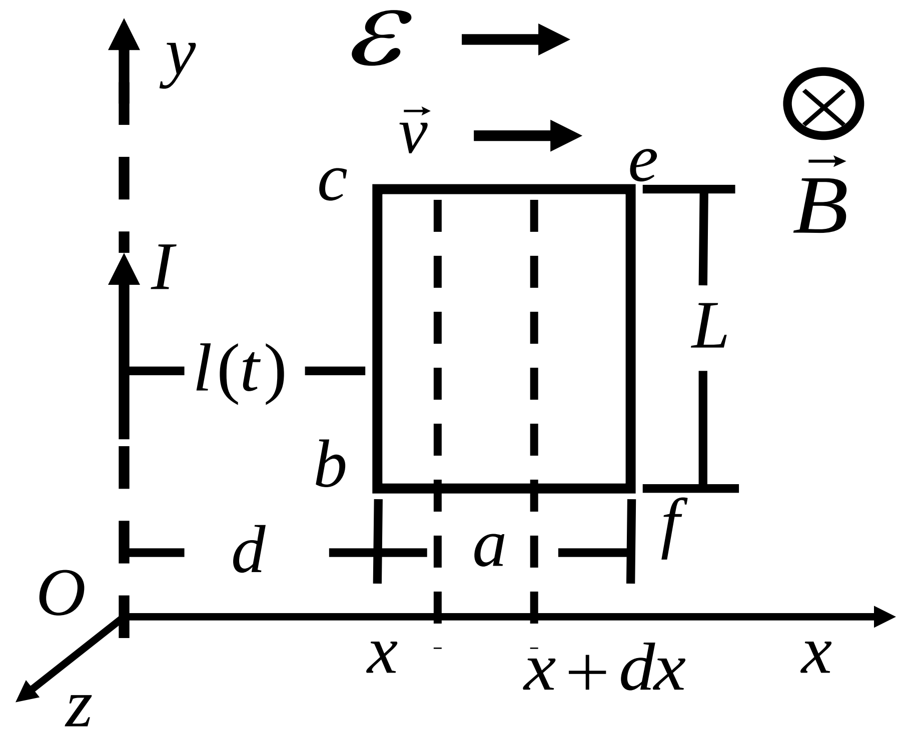
由于无限长载流导线产生的磁场与场点到导线的距离成反比，线圈在移动的过程中，
穿过线圈平面的磁通量发生变化，
因此在线圈中产生感生电动势。

建立直角坐标系

设 t 时刻 bc 边距离载流直导线 $l(t)$ ，
感生电动势的正方向为顺时针方向，
即取磁通量的正方向垂直纸面向里



速度 $v=\dfrac{dl(t)}{dt}$



无限长载流直导线，
产生的磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\vec{k})=-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}$$

取 t 时刻 $x\rightarrow x+dx$ 的面积元 $d\vec{S}=Ldx(-\vec{k})$

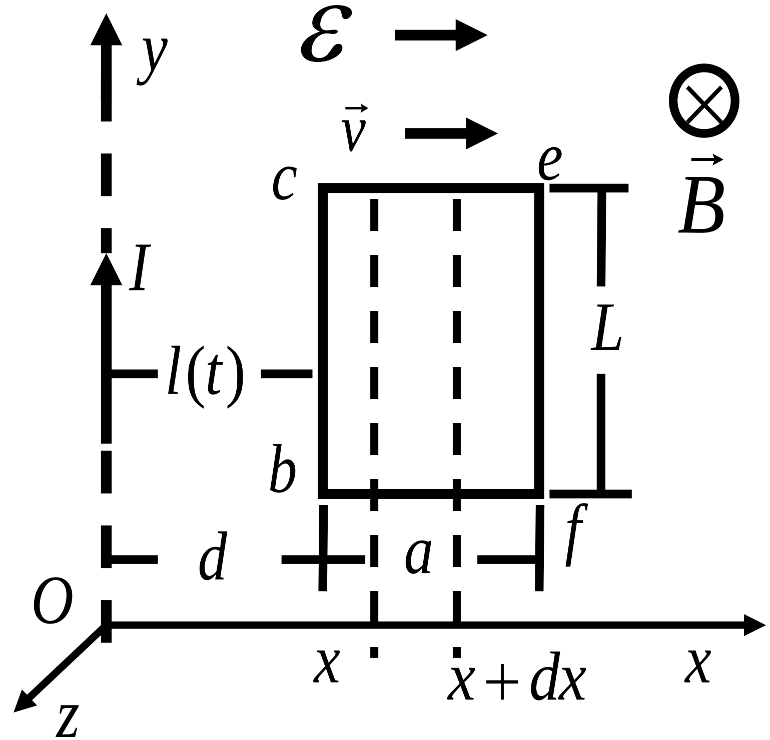
穿过单匝线圈中 $d\vec{S}$ 的磁通量为

$$d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}\cdot Ldx(-\vec{k})=\frac{\mu_0 LI}{2\pi x}dx$$

穿过单匝线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{l(t)}^{l(t)+a} \frac{\mu_0 LI}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 LI}{2\pi} \ln \frac{l(t)+a}{l(t)}$$



由法拉第电磁感应定律，
得到单匝线圈产生的电动势为

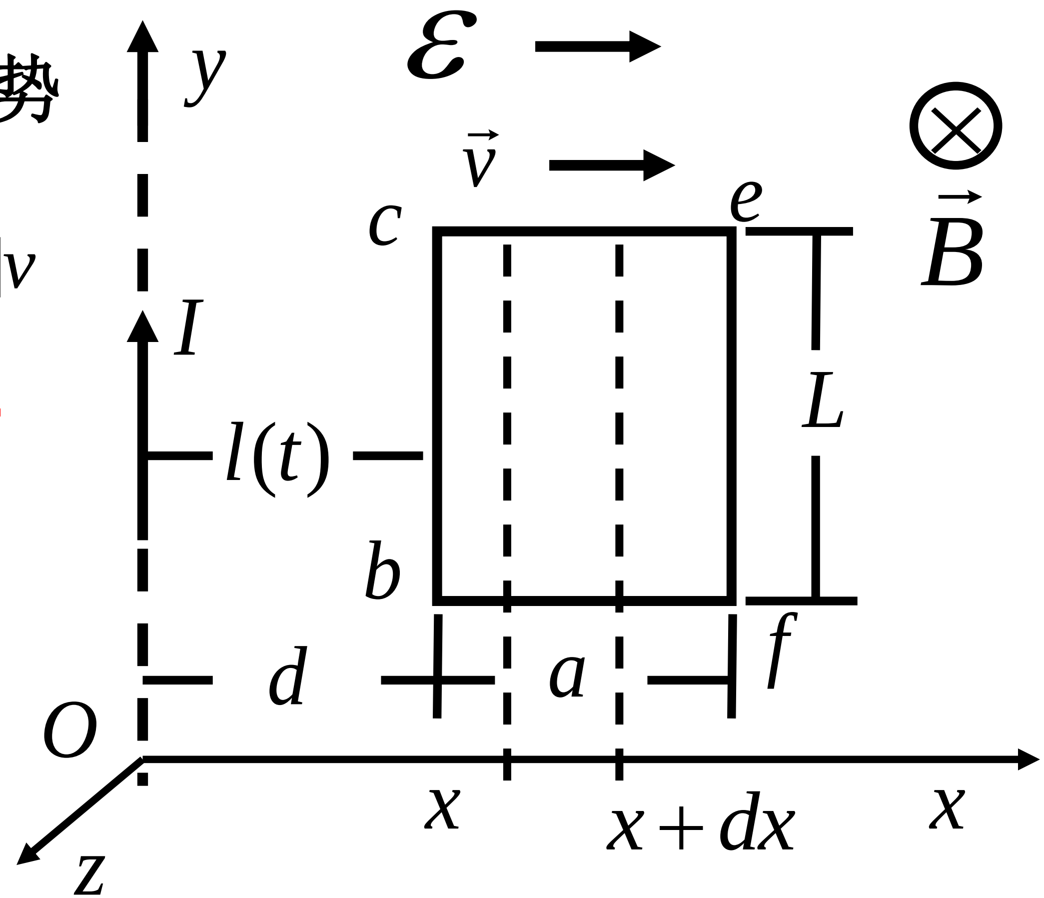
$$d\Phi = \frac{\mu_0 LI}{2\pi x} dx$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 LI}{2\pi} \frac{d}{dt}[\ln \frac{l(t)+a}{l(t)}]$$

$$= -\frac{\mu_0 LI}{2\pi}[\frac{1}{l(t)+a} - \frac{1}{l(t)}]\frac{dl(t)}{dt} = \frac{\mu_0 LI}{2\pi}[\frac{1}{l(t)} - \frac{1}{l(t)+a}]v$$

单匝线圈产生的电动势

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 LI}{2\pi}[\frac{1}{l(t)} - \frac{1}{l(t)+a}]v$$



当 $l(t)=d$ 时，

总电动势为

$$E = N\varepsilon = N\frac{\mu_0 LI}{2\pi}[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}]v = 2.4\times 10^{-5}(V)$$

5. 图 30-5 所示，均匀磁场 $B=B_0t$，固定一宽度为 L 的 U 形介质导轨，金属杆（长度见图示）在导轨上以 v 的速度匀速向右运动，设 t=0 时刻金属杆与导轨左边缘重合，求：t 时刻（1）回路中的感应电动势；（2）杆中的动生电动势。

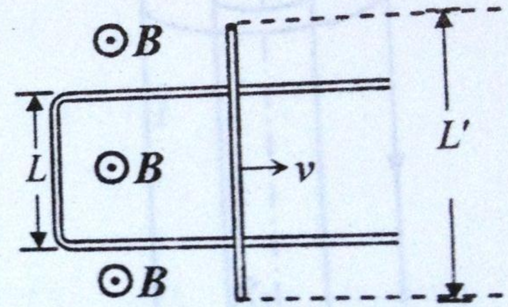


图 30-5

(1) 根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon=-\frac{d\emptyset}{dt}$$

∅表示穿过导线回路的磁通量∅=BS

$$\varepsilon=-\frac{d\emptyset}{dt}=-(B\frac{dS}{dt}+S\frac{dB}{dt})=-(B_0tLv+LvtB_0)=-2B_0tLv$$

(2)动生电动势是指在稳恒磁场中运动着的导体内产生的感应电动势

$$\varepsilon=BL'v=B_0tL'v$$