目　录

（上　册）

（下　册）

第一部分

概率论习题详解

第一章　概率论的基本概念

一、基本内容

1. 随机试验、样本空间及随机事件

（1）随机试验 E

若一试验具有以下三个特点：

① 可以在相同的条件下重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有可能结果；

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果出现，

则称此试验为随机试验.

（2）样本空间 S

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间. 组成样本空间的元素，即 E 的每个可能结果，称为样本点，或称为基本事件.

（3）随机事件

随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件. 当且仅当事件包含的样本点中至少一个出现时，称这一事件发生.

（4）事件间的运算：

设 A，B，C 为随机事件，则

$$A\cup B=B\cap A;$$

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$

$$A\cap B=B\cap A;$$

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$
$$A-B=A\cap\overline{B};$$
$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}; \qquad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

2. 事件发生的频率和概率

（1）事件 A 发生的频率 f_n（A）为 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 与试验总次数 n 之比，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

（2）事件 A 发生的概率 $P(A)$ 具备以下三个特点：

① $\forall A\subset S$，$P(A)\geqslant 0$；

② $P(S)=1$；

③ 若 A_1，A_2，…为两两互不相容事件列，即

$\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

（3）概率的基本性质

① $P(\varnothing)=0$.

② $\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，i，$j=1$，2，…，n，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

③ $\forall A\subset B$，则有 $P(A)\leqslant P(B)$，且有

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

④ $\forall A\subset S$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

⑤ $\forall A$，$P(A)+P(\overline{A})=1$.

⑥ $\forall A$，B，$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$，且有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

3. 古典概型（等可能概型）

（1）古典概型概念

若试验具有以下两个特点：

① 试验的样本空间中的元素个数只有有限个，不妨设为 n 个，记为 e_1，e_2，…，e_n；

② 每个基本事件$\{e_i\}$出现的可能性相同，

则称此实验为古典概型.

（2）古典概型计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

4. 条件概率

（1）条件概率

设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$A(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率.

（2）乘法定理

设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

（3）全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1、B_2、…、B_n 为 S 的一个划分，即满足条件：

① B_1，B_2，…，B_n 两两互不相容，即 $B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n；

② $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

且 $P(B_i)>0$（$i=1$，2，…，n），则有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

（4）贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0$，$i=1$，2，…，n，则有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}，\quad i=1，2，\cdots，n.$$

5. 事件的独立性

（1）两个事件的独立性

设 A，B 是两事件，若有

$$P(AB)=P(A)P(B)，$$

则称 A，B 为相互独立的事件.

（2）逆事件的独立性

如果四对事件 A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的事件，则另外各对也是相互独立的事件.

（3）多个事件的独立性

设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，如果对于任意 $k\ (1\leqslant k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n})$$

则称 A_1，A_2，…，A_n 为相互独立事件.

设 A_1，A_2，…为可列多个事件，如果其中任意有限个事件是相互独立的，则称这可列多个事件为相互独立事件列.

6. 贝努利概型

（1）概念

设一次试验 E 的结果，仅为 A 或 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p\ (0<p<1)$，将 E 独立地重复进行 n 次，则称这一串重复进行的独立试验为 n 重贝努利试验，亦称为贝努利概型.

（2）二项概率公式

n 重贝努利试验中事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}，\quad k=0，1，\cdots，n，\ 0<p<1.$$

二、基本要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系和运算.

2. 理解事件频率的概念、掌握频率的计算公式.

3. 理解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，掌握古典概型计算公式.

4. 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法定理，学会运用全概率公式和贝叶斯公式求事件的概率.

5. 理解事件的独立性概念，了解事件的独立性定义，并学会运用事件的独立性解题.

6. 理解试验的独立性概念，掌握贝努利概型，学会二项概率的计算方法.

三、习题详解

1.1　箱中有三个球，一红，一黄，一黑. 考虑这样的试验：从箱中取出一球，看过颜色后将它放回箱中，混和后再第二次取出一球，并观察其颜色，试写出这次试验的样本空间；若第一次取出的球不放回，就第二次取球，样本空间又是怎样的.

解　设试验的样本空间分别为 S_1、S_2，R 表示“出现红球”，W 表示“出现黄球”，B 表示“出现黑球”，均为基本事件，则 S_1，S_2 可表示为

$$S_1=\{(R,R),(R,W),(R,B),(W,R),(W,W),(W,B),(B,R),(B,W),(B,B)\}$$

$$S_2=\{(R,W),(R,B),(W,R),(W,B),(B,R),(B,W)\}.$$

1.2　在编号为 1，2，3，4，5 的五张卡片中，一次任取二张，记录编号的和，试写出试验所有可能的不同结果的全体 S.

解　显然最小编号和为 $1+2=3$，最大编号和为 $4+5=9$，编号和还能取到它们之间的每个整数，令

$K=\{$编号和为 $k\}$　　$k=3, 4, 5, \cdots, 9$.

则样本空间　　$S=\{3, 4, 5, \cdots, 9\}$.

1.3　试写出下列试验的样本空间：

（1）记录一个小班（30 人）一次概率考试的平均分数（以百分制记分）.

（2）同时掷三颗骰子，记录骰子点数之和.

（3）生产某产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

（4）对某工厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”．如连续查出两个次品的停止检查，或检查 4 个产品停止检查，记录检查的结果.

（5）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

（6）将一尺之棰折成 3 段，观察各段的长度.

解　（1）显然，若这个小班 30 人中人人都得 0 分，自然班平均分数为 0；若人人都得 100 分，自然班平均分数为 100，而班级总分从 0 取到 30×100 都是可能的，故样本空间为

$$S_1=\left\{\frac{0}{30}, \frac{1}{30}, \frac{2}{30}, \cdots, \frac{30\times100}{30}\right\}.$$

（2）因为每个骰子最小点数为 1，故三个骰子的最小点数和为 3；而每个骰子最大点数为 6，故三个骰子最大点数和为 18. 而三个骰子点数和从 3 取到 18 都是可能的，故此试验的样本空间为

$$S_2=\{3, 4, 5, \cdots, 18\}.$$

（3）由于生产的产品直到有 10 个正品为止，故生产此种产品的总数至少为 10，即全部 10 个为正品；其次为 11，即其中有一次品；同理，生产产品总数可能为 12，13，…，故此试验的样本空间为

$$S_2=\{10, 11, 12, 13, \cdots\}.$$

（4）记正品为“1”，次品为“0”，则此试验的样本空间可用“0”和“1”表示，如“00”表示连续两个次品，“010”表示第

一次查到次品，第二次查到正品，第三次查到次品，但“010”并不是本试验的一个基本事件，因其不满足试验的要求，而“0100”或“0101”才是本试验的基本事件，故此试验的样本空间可表示为

$$S_4=\{00,\ 0100,\ 100,\ 1010,\ 0101,\ 0110,\ 0111,\ 1010,\ 1011,\ 1111,\ 1100,\ 1101\}.$$

（5）在单位圆内任取一点，这一点的坐标设为$(x,\ y)$，则 x，y 应满足条件 $x^2+y^2\leqslant 1$，故此试验的样本空间为

$$S_5=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

（6）将一尺之棰折为 3 段，设各段长为 x，y，z，则 x，y，z 应满足条件 $x+y+z=1$ 且 $x>0$，$y>0$，$z>0$. 故此试验的样本空间为

$$S_6=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x+y+z,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}.$$

1.4 写出下列随机试验 E 的样本空间 S，并说出所给事件 A 的基本事件组成：

（1）E_1：观察 50 粒种子中发芽的粒数；

A_1：发芽数不多于 40 粒.

（2）E_2：一组有 a，b，c，d 四人，要选正式代表和列席代表各 1 人去参加会议，观察选取结果；

A_2：a 当选.

（3）E_3：甲、乙两人下棋一局，观察棋赛结果；

A_3：至少有一人不败.

解 （1）E_1 的基本事件是 e_i={50 粒种子有 i 粒发芽}，$i=0$，1，2，…，50，样本空间 $S_1=\{e_i\,|\,i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50\}$，而事件 A_1 由其中 41 个基本事件组成，即 $A_1=\{e_i\,|\,i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 40\}$

（2）E_2 的基本事件为 a，b，c，d 中任取两人，即样本空间

$$S_2=\{ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc\}$$

共含有 $A_4^2=4\times 3=12$ 个基本事件.

其中每一个基本事件用两个字母表示，写在前面的表示正式

代表，写在后面的表示列席代表. 事件 A_2={a 当选}={ab，ac，ad，ba，ca，da}共含有 $A_3^2=3\times 2=6$ 个基本事件.

（3）E_3 的样本空间有 3 个基本事件组成，即

S_3 = {甲胜乙负，乙胜甲负，和局}.

由事件 A_3 = {至少有一个不败} = {甲不败，或乙不败，或甲乙都不败}易见此事件 A 与样本空间 S_3 相同.

1.5　抽查 5 件产品，设 A 为{至少有 1 件次品}，B 为{次品不少于两件}，试问 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 分别表示什么事件?

解　$\overline{A}$ 表示{一件次品也没有}这类事件；

$\overline{B}$ 表示{次品少于两件}，即{没有次品或次品只有 1 件}这一事件.

1.6　在图书馆中任选一本书，设 A = {数学书}，B = {中文版的}，C = {1990 年后出版的}，试问：

（1）$A\cap B\cap \overline{C}$ 表示什么事件?

（2）在什么条件下有 $ABC=A$?

（3）$\overline{C}\subset B$ 表示什么意思?

（4）若 $\overline{A}=B$，是否意味着：馆中所有的数学书都不是中文版的?

解　（1）$A\cap B\cap \overline{C}$ 表示事件 A 发生，事件 B 发生但事件 C 不发生，即表示事件{1990 年或 1990 年以前出版的中文数学书}；

（2）若 $ABC=A$，则 $A\subset BC$，故只有在事件“馆中所有的数学书都是 90 年代后出版的中文书”成立的条件下，等式才成立；

（3）$\overline{C}\subset B$ 表示馆内 20 世纪 90 年代或 20 世纪 90 年代以前出版的书都是中文版的；

（4）$\overline{A}=B$ 意味着：馆中所有非数学书都是中文版的，而且所有中文版的书都不是数学书. 因为 $\overline{A}=B$ 与 $A=\overline{B}$ 等价，故可解释为：馆中所有的数学书都不是中文版的，而且所有的外文版的书都是数学书.

1.7 事件 A、B、C 分别表示从Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ套不同的全集中至少取出一本书的事件，每套全集各有三本以上的书，事件 A_i 表示{从第Ⅰ套中取出 i 本书}，B_j 表示{从第Ⅱ套中取出 j 本书}，说明下列事件的意义：

（1）ABC；（2）$A\cup B\cup C$；（3）$A_1\cup B_3$；（4）A_2B_4.

解 （1）ABC 表示{从三套全集中各自至少取出一本书}这一事件；

（2）$A\cup B\cup C$ 表示{从第Ⅰ套或第Ⅱ套或第Ⅲ套全集中至少取出一本书}这一事件；

（3）$A_1\cup B_3$ 表示{从第Ⅰ套中取出一本书或从第Ⅱ套中取出三本书}这一事件；

（4）A_2B_4 表示{从第Ⅰ套中取出两本书，且从第Ⅱ套中取出四本书}这一事件.

1.8 设 A，B、C 为三个事件，试将下列事件用 A，B、C 的运算关系表示出来：

（1）三个事件都发生；

（2）三个事件都不发生；

（3）三个事件至少有一个发生；

（4）A 发生，B、C 不发生；

（5）A，B 都发生，C 不发生

（6）三个事件中至少有两个发生；

（7）不多于一个事件发生；

（8）不多于两个事件发生.

解 （1）ABC；

（2）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

（3）$A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

或 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$；

（4）$A\bar{B}\bar{C}$ 或 A－(B∪C)；

（5）$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；

（6）$AB\cup BC\cup AC$；

（7）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$；

（8）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$，或

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup \overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup \overline{A}BC\cup A\overline{B}C$.

1.9　判断关于事件的结论

$$A\cup B-B=A$$

是否成立，为什么？

解法一　利用事件运算的分配律，有

$$A\cup B-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}\cup\varnothing=A\overline{B}=A-B$$

显然，$A-B$ 一般不等于 A，故结论 $A\cup B-B=A$ 不一定成立，只当 $AB=\varnothing$ 时，$A\cup B-B=A$ 成立.

解法二　举反例. 令 S = {取到号码 1，2，…，10}

A = {取到号码 3，4，5，6}，B = {取到号码 5，6，7，8}

则 $A\cup B$ = {取到号码 3，4，5，6，7，8}，而

$A\cup B-B$ = {取到号码 3，4}$\neq A$.

故由此例知，$A\cup B-B=A$，当 $AB\neq\varnothing$ 时，不成立. 但若取 B' = {取到号码 7，8，9}，则 $A\cup B'$ = {取到号码 3，4，5，6，7，8，9}，

$A\cup B'-B'$ = {取到号码 3，4，5，6}$=A$ 成立，此时有 $AB=\varnothing$.

1.10　证明：对于任意二事项 A 与 B，关系式（1）$A\subset B$；（2）$\overline{A}\supset\overline{B}$；（3）$A\cup B=B$；（4）$AB=A$；（5）$A\overline{B}=\varnothing$ 相互等价.

证　（1）⇒（2）用反证法：设 $\overline{A}\subset\overline{B}$ 成立，即 A 不发生则 B 不发生，这等价于 $B\subset A$，从而与(1)矛盾，故有(1)⇒(2)成立.

（2）⇒（3）因为 $\overline{B}\subset\overline{A}$ 表示“B 不发生则 A 一定不发生”，这就是说 A 是 B 的部分事件即 $A\subset B$，故 $A\cup B=B$.

（3）⇒（4）　显然有 $AB\subset A$，由（3）知 $A\cup B=B$，故有

$AB=A(A\cup B)=A\cup AB\supset A$，即由 $AB\subset A$ 且 $AB\supset A$ 得 $AB=A$.

（4）$\Rightarrow$(5)，由(4)知 $AB=A$，故

$$A\overline{B}=(AB)\overline{B}=A(B\overline{B})=A\varnothing=\varnothing$$

即(5)式成立.

（5）$\Rightarrow$(1)，用反证法：若（1）不成立，则有 $B\subset A$，故 A－B 不是不可能事件，即 $A\overline{B}\neq\varnothing$，这与(5)矛盾，因此(5)$\Rightarrow$(1)得证.

1.11　下列有关事件的关系是否正确？若不正确，应如何改正？

（1）$A\cup B\cup C=A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$；

（2）$(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$.

解　（1）$A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$

$$=A\cup(B\overline{AB})\cup(C\overline{AC})$$
$$=A\cup(B(\overline{A}\cup\overline{B}))\cup(C(\overline{A}\cup\overline{C}))$$
$$=A\cup(B\overline{A})\cup(C\overline{A})$$
$$=(A\cup B)\cup(C\overline{A})=A\cup B\cup C,$$

故（1）式正确.

（2）因为$(A\cup B)-C=(A\cup B)\overline{C}$，

而 $A\cup(B-C)=A\cup(B\overline{C})=(A\cup B)(A\cup\overline{C})$，

若$(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$，则应有 $\overline{C}=A\cup\overline{C}$，即 $A\subset\overline{C}$，则由第 1.10 题知，$A\subset\overline{C}$ 等价于 $AC=\varnothing$，所以（2）式只是 $AC=\varnothing$ 时才能成立.

1.12　求下列关于随机事件的等式中的事件 X：

$$A\cup X=A\cup B.$$

解　因为 $A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup(B\overline{A})$ 是包含事件 A 与事件 $\overline{A}B$ 在内的任意事件的事件，满足条件

$$A\cup X=A\cup B,$$

故有 $X=(\overline{A}B)\cup(AD)$.

其中 D 为任意事件.

1.13　求下列关于随机事件的等式中的事件 X：

（1）$AX=AB$；

（2）$\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}=B$.

解 （1）因为 $AX=AB$，故 $\overline{AX}=\overline{AB}$，即

$$\overline{A}\cup\overline{X}=\overline{A}\cup\overline{B}\ ,$$

由 1.12 题知 $\overline{X}=(\overline{\overline{A}}\,\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{D})=(A\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{D})$，

故 $X=\overline{(A\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{D})}=\overline{(A\overline{B})}\,\overline{(\overline{A}\,\overline{D})}=(\overline{A}\cup B)(A\cup D)$，

其中 D 为任意事件.

（2）因为 $\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}=B$，故由德·摩根律知

$$(X\cup A)(X\cup\overline{A})=\overline{B}\ ,$$

运算即得 $X=\overline{B}$.

1.14 一部四卷的文集，按任意次序放到书架上，问各卷自左向右，或自右向左的卷号的顺序恰好为 1，2，3，4 的概率是多少？

解 设 $A=\{$文集排列为 1，2，3，4 或 4，3，2，1 的次序$\}$，而一切可能的排列总数为 $n=4!$，有利于所讨论的事件的排序项序总数为 $k=2$，即按 1、2、3、4 及 4、3、2、1 两种次序排列，则所求概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}.$$

1.15 投掷两颗骰子，试求两颗骰子中至少有一颗出现 6 点，且点数之和为偶数的概率.

解 设 A = {两颗骰子中有一颗为 6 点，且点数之和为偶数}，则因为每个骰子都可能出现 1，2，…，6 点，且每次掷第一颗骰子出现的点数和第二颗骰子出现的点数相配合，因此，此试验的所有可能的基本事件的总数为 6 × 6=36，其样本空间为

$$S=\begin{pmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\end{pmatrix}.$$

故样本点总数 $n=36$，显然 A 包含样本点(2,6)，(4,6)，(6,2)，(6,4)，(6,6)，故 $k=5$，所以

$$P(A)=\frac{5}{36}.$$

1.16　把10本书任意地放在书架上，求其中指定的三本书放在一起的概率.

解　设 A={指定10本书中三本书放在一起}．将10本书任意地排列，可能的排列数 $n=10!$，即样本点总数为 $n=10!$．A 包含的样本点数相当于把指定的三本书当作一个元素进行全排列的总数，乘以这三本书相互之间进行全排列的总数，即 $k=8!3!$，故

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{8!3!}{10!}=\frac{3\times2}{10\times9}=\frac{1}{15}.$$

1.17　电话号码由7个数字组成，每个数字可以是0，1，2，…，9中的任意一个数，求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率.

解　一切可能结果的总数，是从10个数字中允许重复地选取7个进行排列的总数，即 $n=10^7$，设 $A=\{7$ 个数字全不相同$\}$，则 A 包含的样本点数等于在10个数字中不重复地取7个数字的种数，即 $k=\mathrm{A}_{10}^7$，故所求概率

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\mathrm{A}_{10}^7}{10^7}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{10^7}=\frac{189}{3\,125}.$$

1.18　有5条线段，长度分别为1，3，5，7，9，从这5条线段中任取3条，求所取3条线段能构成一个三角形的概率.

解　设 $A=\{$从长度为1，3，5，7，9的5条线段中任取3条能构成三角形$\}$，等可能的基本事件总数为 C_5^3，即从5条线段中任取3条的总的取法数，$n=\mathrm{C}_5^3=10$，A 发生时，所取的三条线段必须满足条件：其中任意两段长度的和大于第三段，因此这3条线段只能是3，5，7或3，7，9，或5，7，9，于是，A 仅包含3个基本事件，

故 $$P(A)=\frac{3}{10}.$$

1.19 20 名运动员中有两名种子选手，现将运动员平分为两组，问两名种子选手分在不同组的概率是多少？

解 设 A={两名种子选手在不同组}，而将 20 名运动员任意平分为两组的分法共有 C_{20}^{10} 种，即基本事件总数 $n=C_{20}^{10}$，A 包含的基本事件数为 $C_2^1\cdot C_{18}^9$，故所求概率

$$P(A)=\frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}}=\frac{10}{19}.$$

1.20 对一个五人学习小组考虑生日问题：

（1）求五个人的生日都在星期日的概率；

（2）求五个人的生日都不在星期日的概率；

（3）求五个人的生日不都在星期日的概率.

解 （1）设 A_1={五个人的生日都在星期天}，因为一个星期共 7 天，每个人的生日在星期天的概率均为 1/7，故所求概率

$$P(A_1)=\left(\frac{1}{7}\right)^5.$$

（2）设 A_2={五个人的生日都不在星期天}，则

$$P(A_2)=\left(\frac{6}{7}\right)^5.$$

（3）设 A_3={五个人的生日不都在星期天}，则

$$P(A_3)=P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-\left(\frac{1}{7}\right)^5.$$

1.21 一批产品共有 100 件，该产品中有 5% 的废品，现对其进行抽样调查，规定从中任意取 5 件，若发现至少有一件为废品时，则整批产品作不合格处理，即拒收，问该批产品被拒收的概率为多少？

解 设 A={未发现废品}，则因废品的概率为 5%，即 100 件

产品视为有 5 件废品，现从 100 件产品中任取 5 件，总共取法为 $n = C_{100}^5$，则 A 发生时，所取 5 件应来自合格品，故有取法 $k = C_{95}^5$，故接收的概率为

$$P(A) = \frac{C_{95}^5}{C_{100}^5} = 0.769\ 6,$$

则拒收的概率为 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.230\ 4$.

1.22　100 件产品中，有 10 件次品.

（1）无放回地从中任取两次，每次一件，求取得正品的概率；

（2）无放回地从中任取两次，每次一件，求取得的至少有一件正品的概率；

（3）任取两件，每次一件，每次取出仍放回去，求取得的都是正品的概率；

（4）任取两次，每次一件，每次取出仍放回去，求取得至少有一件正品的概率.

解　（1）设 $A_1 = \{$取得的都是正品$\}$，则因从 100 件产品中任取两次，每次一件，取后不放回，总的取法数为 $n = 100 \times 99$，而 A 包含取法 $k = 90 \times 89$，故所求概率

$$P(A) = \frac{90 \times 89}{100 \times 99} \approx 0.809\ 1.$$

（2）设 $A_2 = \{$取得产品中至少有一件正品$\}$，则 $\overline{A}_2 = \{$取得的产品都是次品$\}$，而 $\overline{A}_2$ 包含的取法数为 10×9，故

$$P(\overline{A}_2) = \frac{10 \times 9}{100 \times 99} = 0.009\ 1$$

所以　$P(A_2) = 1 - (\overline{A}_2) = 1 - 0.002 = 0.990\ 9.$

（3）设 $A_3 = \{$放回抽样时，两次都取正品$\}$，则因从 100 件产品中放回抽样两次，总取法 $n = 100 \times 100$ 种，而 A_3 发生时，包含的取法共有 $k = 90 \times 90$ 种，故

$$P(A_3)=\frac{90\times 90}{100\times 100}=0.81.$$

（4）设 A_4 = 放回抽样中，至少取得一正品}，则 $\overline{A}_4$ = {放回抽样中，取得的全是次品}，而 $\overline{A}_4$ 包含取法 10×10 种，

故 $$P(\overline{A}_4)=\frac{10\times 10}{100\times 100}=0.01.$$

所以 $$P(A_4)=1-P(\overline{A}_4)=0.99.$$

1.23 在 0 至 9 这十个整数中，任取四个，能排成一个四位偶数的概率是多少？

解 设 A = {从 0，1，…，9 中任取四数能排成一个四位偶数}，因从 0 至 9 十个数字中不重复地任取 4 个排列的总数为 $n=\mathrm{A}_{10}^4$，排成偶数时，最后一位数（个位数）只能有 5 种取法：0，2，4，6，8. 令它取定后，前面三位数可以从其余 9 个数字中任取 3 个来排列，故排列的种数为 $k_1=5\mathrm{A}_9^3$，但是四位有效数字不能以 0 开头，故应把首位数是 0 的情况除掉. 而首位数是 0 时，最后一位数只有 4 种取法，中间的两位数字从余下的 8 个数字中取 2 个来排列，故排列的种数为 $k_2=4\mathrm{A}_8^2$，所以 A 的概率

$$P(A)=\frac{k_1-k_2}{n}=\frac{5\mathrm{A}_9^3-4\mathrm{A}_8^2}{\mathrm{A}_{10}^4}=\frac{5\cdot 9\cdot 8\cdot 7-4\cdot 8\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}$$

$$=\frac{41}{90}=0.455\,6.$$

1.24 把一个表面涂有颜色的立方体等分为一千个小立方体. 在这些小立方体中，随机地取出一个，试求它是有 i 面涂有颜色的概率 $P(A_i)$ $(i=0,1,2,3)$.

解 设 A_i = {小立方体有 i 面涂有颜色}，$i=0,1,2,3$. 则在一千个小立方体中，只有位于原立方体的角上的小立方体是三面涂有颜色的，这样的小立方体共有 8 个. 只有位于原立方体的棱上（除去八个角外）的小立方体是两面涂有颜色的. 这样的小立方体

共有 $12\times 8=96$ 个. 同理，原立方体的六个面上（除去棱）的小立方体是一面涂有颜色的，共有 $8\times 8\times 6=384$ 个. 其余 $1\ 000-(8+96+483)=512$ 个内部的小立方体是没有颜色的. 故所求的概率为

$$P(A_0=\frac{512}{1\ 000}=0.512,\ P(A_1)=\frac{384}{1\ 000}=0.384,$$

$$P(A_3)=\frac{96}{1\ 000}=0.096,\ P(A_4)=\frac{8}{1\ 000}=0.008.$$

1.25　在一个房间内的 10 个人分别标号为 1，2，…，10，随机地选出 5 个人，让他们一同走出房间，并观察他们的号码：

（1）最小的号码为 5 的概率是多少?

（2）最大的号码为 5 的概率是多少?

（3）中间的号码为 5 的概率是多少?

解　（1）设 $A_1=\{5$ 人中最小号码为 $5\}$. 则因从 10 人任意选出 5 人的取法共有 $n=C_{10}^5$，而 A_1 发生，意味着选出的 5 人中有一人的号码为 5，其余人的号码均大于 5，故此种取法共有 $k_1=C_5^4$，故

$$P(A_1)=\frac{C_5^4}{C_{10}^5}=0.019\ 84.$$

（2）设 $A_2=\{5$ 人中最大号码为 $5\}$，则当 A_2 发生时，选出的 5 人中有一人号码为 5，其余 4 人的号码为 1，2，3，4，只有 1 种取法，即 $k_2=1$，所以

$$P(A_2)=\frac{1}{C_{10}^5}=0.003\ 97.$$

（3）设 $A_3=\{5$ 人中中间的号码为 $5\}$，则当 A_3 发生时，选出的 5 人中有一人号码为 5，其余 4 人中有两人的号码应小于 5，另两人的号码应大于 5，共有取法 $k_2=C_4^2\cdot C_5^2$，故有

$$P(A_3)=\frac{C_4^2C_5^2}{C_{10}^5}=0.238\ 1.$$

1.26 从一批由 45 件正品，5 件次品组成的产品中任取 3 件，求其中恰有一件次品的概率.

解 设 A={从 50 件产品中任取 3 件，其中恰有一件次品}. 因为从 50 件中任取 3 件的取法总数为 $n=\mathrm{C}_{50}^{3}$，而 A 发生时，所取到的 3 件中有一件为次品，当从 5 件次品中抽取，取法总数为 C_{5}^{1}；另两件当从正品中抽取，取法总数为 C_{45}^{2}，由组合乘法定理知，A 包含的取法总数为 $k=\mathrm{C}_{5}^{1}\cdot\mathrm{C}_{45}^{2}$，故所求概率

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{5}^{1}\mathrm{C}_{45}^{2}}{\mathrm{C}_{50}^{3}}=0.252\ 6.$$

1.27 20 个运动队，任意分成甲乙两组（每组 10 队）进行比赛，已知其中有两个队是一级队，求这两个队

（1）被分在同一组的概率；

（2）被分在不同组的概率.

解 （1）设 A_1={两个一级队分在同一组}. 因将 20 个队任意平分成两组的分法总数 $n=\mathrm{C}_{20}^{10}$，A_1 发生时，两个组中有一组中含两一级队，其余 8 队应从 18 个队（非一级队）中选取，故分法总数 $k=\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{18}^{8}$，故有

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{18}^{8}}{\mathrm{C}_{20}^{10}}=0.473\ 68.$$

（2）设 A_2={两个一级队被分到不同组}. 当 A_2 发生时，每个组有一个一级队，这两个一级队分到不同组的分法有 C_{2}^{1} 种，各组中其余 9 队应由 18 个非一级队均分而得，分法共有 C_{18}^{9} 种，故 $k_2=\mathrm{C}_{2}^{1}\ \mathrm{C}_{18}^{9}$，所求概率为

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{18}^{9}}{\mathrm{C}_{20}^{10}}=0.526\ 32.$$

另解 因为 $A_2=\overline{A_1}$，所以 $P(A_2)=P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-0.473\ 68=0.526\ 32$.

1.28 某工厂一个班组有男工 7 人，女工 4 人，现要选 3 个代表去先进单位参观学习，问 3 个代表中至少有一个女工的概率是多少?

解 设 A={3 个代表中至少有一个女工}，这一事件可分解为以下三个事件：

A_i={3 个代表中，恰有 i 个女工}， i=1，2，3，

即 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且这三个事件互不相容，由概率有限可加性可得 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$，而从 11 人中任选 3 人的选法共有 $n=C_{11}^3$ 中，A_i 发生时，选出的 3 人中恰有 i 个女工（i=1，2，3），选取方法共有 $C_4^iC_7^{3-i}$ 种，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_4^1C_7^2}{C_{11}^3}+\frac{C_4^2C_7^1}{C_{11}^3}+\frac{C_4^3C_7^0}{C_{11}^3}=0.787\ 88.$$

另解 因为 $\overline{A}$={3 个代表全是男工}，包含的选取方法为

$$k=C_7^3，故\ P(\overline{A})=\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=0.212\ 12，$$

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.212\ 12=0.787\ 88.$

1.29 从 5 双不同的鞋中任取 4 只，求这 4 只鞋中至少有两只配成一双的概率.

解法一 设 A={4 只鞋中至少有两只配成一双}，则 $\overline{A}$={4 只鞋中没有 2 只能配成一双}，先求 $P(\overline{A})$，再求 $P(A)$. 因为从 10 只鞋中任取 4 只的取法共有 $n=C_{10}^4$ 种取法，而 $\overline{A}$ 发生时，取法共有 $k=\dfrac{10\times8\times6\times4}{4!}$ 种（因为不考虑取 4 只鞋的次序，所以被 4!除），故 $\overline{A}$ 的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{\dfrac{10\times8\times6\times4}{4!}}{C_{10}^4}=0.380\ 95，$$

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.380\ 95=0.619\ 05.$

解法二 因为有利于事件 A 的取法总数为 $C_5^1C_8^2-C_5^2$（即先从 5 双中任取一双，再在其余 8 只中任取 2 只的取法共有 $C_5^1C_8^2$ 种. C_5^2 是所取四只恰为两双的取法数是重复的数目，应用 $C_5^1C_8^2$ 中扣掉），所以有

$$P(A)=\frac{C_5^1+C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}=0.619\ 05.$$

解法三 可以考虑从 5 双鞋中一只一只地连取 4 只鞋，这样取法的总数为 $n=10\times9\times8\times7$，而 $\overline{A}$ 发生，意味着没有两只能配成一双，故第一次从 10 只鞋中任取一只，取法为 10，第二次再从去除与第一只配对的那一只后的 8 只鞋中取一只，取法数 8，类似地第三次取法数为 6，第 4 次取法数为 4，故 $\overline{A}$ 的总取法数为 $k=10\times8\times6\times4$，所以

$$P(\overline{A})=\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{8}{21},$$

故 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$.

解法四 直接求 $P(A)$. 因为 A 的取法包含两类，一类是所取 4 只中恰有两只配成一双，它有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种取法，即从 5 双中任取一双，再从其余 4 双中任取两双，而在这两双中各取一只；另一类则是所取 4 只恰好成两双的情况，这种选法共有 C_5^2 种，由加法原理知，4 只中至少有 2 只配成一双的取法共有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2$ 种，故所求概率为

$$P(A)=（P(A)=\frac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

1.30 一批产品共 N 件，其中 M 件正品. 从中随机地取出 n 件（$n<N$）. 试求其中恰有 m 件（$m\leqslant M$）正品（记为 A）的概率. 如果：

（1）n 件是同时取出的；

（2）n 件是无放回逐件取出的；

（3）n 件是有放回逐件取出的.

解　（1）由于取件方式是从 N 件产品中一次取出 n 件，故各产品的次序是不加考虑的．即应用组合数来计算结果．所以，所有可能结果为 C_N^n．要 n 件中恰有 m 件正品，这 m 件正品只能从 M 件正品取出，而其余 $n-m$ 件非正品必须从总数 $N-M$ 件非正品中取出．故 n 件中恰有 m 件正品的结果数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ 种，所求概率

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

（2）由于抽取是无放回逐件进行的，故应用排列法来计算结果．从 N 件产品中取 n 件的排列数为 A_N^n 种，n 次抽取中恰有 m 件正品的组合数为 C_n^m 种．对于固定的一种正品与非正品的抽取次序，从 M 件正品中取 m 件的排列数有 A_M^m 种，从 $N-M$ 件非正品中取 $n-m$ 件的排列数为 A_{N-M}^{n-m} 种，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_n^m A_M^m A_{N-M}^{n-m}}{A_N^n}.$$

（3）对于有放回的抽取，每次都有 N 种可能结果，n 次抽取的所有可能结果数为 N^n 种．n 次抽取中恰有 m 件正品的组合数有 C_n^m 种，对于固定的一种正品与非正品的抽取次序，m 次取得正品的每一次，都有 M 种可能的结果，m 次抽取共有 M^m 种结果．同理 $N-M$ 种非正品的 $n-m$ 次抽取，共有 $(N-M)^{n-m}$ 种抽取方式．故所求概率应为

$$P(A)=\frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n}.$$

1.31　袋中有 5 个白球，3 个红球．从中任意抽取 4 个球．试问恰好抽到 3 个白球的概率是多少？

解　参见 1.30 题(1)，此处 $N=5+3=8$，$M=5$，$n=4$，$m=3$，

所求概率 P(恰抽到 3 个白球) $= C_5^3C_3^1/C_8^4 = \dfrac{3}{7}$.

1.32 在一副扑克牌（52 张）中任取 4 张，求 4 张牌花色全不相同的概率.

解 设 A={抽到的 4 张牌花色全不相同}. 从 52 张牌中任取 4 张的取法总数为 C_{52}^4，而 A 包含的取法是第一张在四种花色的任一种花色中任取一张，取法数为 C_{13}^1，而第二张不能取第一张相同花色，只能在其它 3 种花色中任一花色中任取一张，取法数为 C_{13}^1，类似第三、四张取法数亦为 C_{13}^1，故 A 包含取法总数为 $C_{13}^1\ C_{13}^1\ C_{13}^1\ C_{13}^1$，所以

$$P(A)=\frac{C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1}{C_{52}^4}=\frac{13^4}{C_{52}^4}=0.105\,5.$$

1.33 口袋里放有二个伍分，三个贰分，五个壹分钱的硬币，现任取其中 5 个，求总值不小于一角钱的概率.

解 设 A={5 个硬币总值不小于一角钱}. 由于我们只考虑硬币的面值，故所取硬币的次序是无关紧要的. 故用组合法来计算结果. 因为从 10 个硬币中任取 5 个的取法总数为 C_{10}^5，而 A 包含的取法有以下几种方式：

（1）二个伍分，再与另外的任意三个，取法共 C_8^3 种；

（2）一个伍分，二个贰分，二个壹分，取法共 $C_2^1C_3^2C_5^2$ 种；

（3）一个伍分，三个贰分，一个壹分，取法共 $C_2^1C_5^1$ 种；

（4）一个伍分，一个贰分，三个壹分，取法共 $C_2^1C_3^1C_5^3$ 种.

故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_8^3+C_2^1C_3^2C_5^2+C_2^1C_5^1+C_2^1C_3^1C_5^3}{C_{10}^5}=\frac{31}{42}.$$

1.34 在一批灯泡 50 个中有 2 个是坏的，一个检验员从中无放回地随机取出 5 个进行检查.

（1）求在 5 个灯泡中至少有一个坏泡（记为 A）的概率；

（2）应该检查多少个灯泡才能保证至少一个坏泡(记为 B)的概率超过 1/2?

解（1）可以有两种做法：

解法一 从 50 个灯泡中任取 5 个共有 C_{50}^5 种取法，而 5 个中至少有一个坏的包括两种情况，一种是 5 个中恰有一个坏的，另一种是 5 个中恰有两个坏的. 我们关心的是出现坏泡的个数是 1 个还是 2 个，至于它们是在哪一次被取出是无关紧要的，故对第一种情况有 $C_2^1C_{48}^4$ 种取法，第二种情况有 $C_2^2C_{48}^3$ 种取法，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_2^1C_{48}^4+C_2^2C_{48}^3}{C_{50}^5}=\frac{47}{245}.$$

解法二 因为 5 个灯泡中都没坏泡（$\overline{A}$）的情形共有 C_{48}^5 种取法，故 5 个灯泡都是好的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{C_{48}^5}{C_{50}^5}=\frac{198}{245},$$

所以 $$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{198}{245}=\frac{47}{245}.$$

（2）设要检查 n 个灯泡才能保证 $P(B)>1/2$. 此时总的取法有 C_{50}^n 种，而 n 个灯泡全是好的取法共有 C_{48}^n 种，于是

$$P(B)=1-\frac{C_{48}^n}{C_{50}^n}=1-\frac{(50-n)(49-n)}{50\times 49}>\frac{1}{2},$$

整理得 $n^2-99n+25\times 49<0$,

$$\left(n-\frac{99+\sqrt{4901}}{2}\right)\left(n-\frac{99-\sqrt{4901}}{2}\right)<0.$$

当 $15\leqslant n\leqslant 84$ 时，上述不等式一定成立. 但对我们的问题来说，应有 $15\leqslant n\leqslant 50$，即至少检查 15 个灯泡，才能保证 $P(B)>1/2$.

1.35　箱中盛有 α 个白球和 β 个黑球．从其中任意地接连取出 $k+1\,(k+1\leqslant\alpha+\beta)$ 个球．如每球被取出后不放回，试求最后取出的是白球的概率．

解法一　设 $A=\{$最后取出的是白球$\}$．按题意，要注意取球的次序，故利用排列法来计算基本事件的个数．显然，从$\alpha+\beta$ 个球中不还原地接连取出 $k+1$ 的所有可能取法数为 $\mathrm{A}_{\alpha+\beta}^{k+1}$ 种．要求最后取出的是白球，这个白球可以是α个白球中任一个，故有α种不同取法．对于每一个固定的白球，前 k 个球可以是$\alpha+\beta-1$ 个中的任意 k 个的任意排列，故有取法 $\mathrm{A}_{\alpha+\beta-1}^{k}$ 种．于是所求概率为

$$P(A)=\alpha\frac{\mathrm{A}_{\alpha+\beta-1}^{k}}{\mathrm{A}_{\alpha+\beta}^{k+1}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

解法二　因为所有可能的取法共有 $\mathrm{A}_{\alpha+\beta}^{k+1}$ 种，而从$\alpha+\beta$ 个球中连续取 k 个球，而恰有 $r\,(r<\alpha)$个白球的取法总数为

$$\mathrm{C}_{\alpha}^{r}\mathrm{C}_{\beta}^{k-r}k!\,,\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

对于上述每一种取法，第 $k+1$ 次取得白球的方法有$\alpha-r$ 种，故其取法总数为

$$\mathrm{C}_{\alpha}^{r}\mathrm{C}_{\beta}^{k-r}k!\,(\alpha-r),\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

现设 $A_r=\{$前 k 次取球中恰有 r 次取得白球，第 $k+1$ 次取得白球$\}$，则 A_1，A_2，$\cdots$，A_k是互不相容的，且有

$$P(A_r)=\frac{\mathrm{C}_{\alpha}^{r}\mathrm{C}_{\beta}^{k-r}k!(\alpha-r)}{\mathrm{A}_{\alpha+\beta}^{r+1}}.$$

于是所求概率为

$$P(A)=P\left(\bigcup_{r=0}^{k}A_r\right)=\sum_{r=0}^{k}P(A_r)=\frac{k!}{\mathrm{A}_{\alpha+\beta}^{k+1}}\sum_{r=0}^{k}\mathrm{C}_{\alpha}^{r}\mathrm{C}_{\beta}^{k-r}(\alpha-r)$$

$$=\frac{k!\alpha}{\mathrm{A}_{\alpha+\beta}^{k+1}}\left[\mathrm{C}_{\alpha+\beta}^{k}-\mathrm{C}_{\alpha+\beta-1}^{k-1}\right]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

解法三 设 B_i 表示第 i 次取出白球的事件，$\overline{B}_i$ 表示第 i 次取出黑球的事件（i=1，2，…，$k+1$），于是

$$P(B_1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

$$P(\overline{B}_1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

设 $P(B_i)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，往证 $P(B_{i+1})=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. 因为 $P(B_{i+1})$ 表示从 $\alpha+\beta-1$ 个球，其中有 $\alpha-1$ 个白球的箱中第 i 次取得白球的概率，由归纳假设

$$P(B_{i+1}|B_1)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1},$$

同理可得 $P(B_{i+1}|\overline{B}_1)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta-1}$，

所以 $$P(B_{i+1})=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

这表示，每一次取得白球的概率均为 $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，特别地，第 $k+1$ 次取得白球的概率为 $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

1.36 圆周上有十个等分圆周的点，以这十个点中任取三个作为顶点构成三角形，求它是直角三角形的概率.

解 设事件 A={三点构成的是直角三角形}，从十个点中任选三点构成三角形的取法总数为 C_{10}^3，而要构成直角三角形，其中两点必在圆的直径上，共有 5 种取法，而第三点可在另八个点中任取一点，所以 A 包含的取法总数为 $5C_8^1$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{5C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{3}.$$

1.37 同时掷五个骰子，试求下列事件的概率：

A={点数各不相同}；B={恰有两个点数相同}；

C={某两个点数相同，另三个是另一相同的数}.

解 基本事件的总数为 6^5，故有

$$P(A)=\frac{6\times5\times4\times3\times2}{6^5}=\frac{5}{54},$$

$$P(B)=\frac{6\times C_5^2\times(5\times4\times3)}{6^5}=\frac{25}{54},$$

$$P(C)=\frac{6\times C_5^2\times5}{6^5}=\frac{25}{648}.$$

1.38 袋中装有编号为 1，2，…，n 的 n 个球，每次从中任意摸一球，若按下面的方式，求第 k 次摸球时，首次摸到 1 号球的概率：（1）有放回方式摸球；（2）不放回方式摸球.

解 （1）设 A = {有放回第 k 次摸球时首次摸到 1 号球}，因为有放回时每次摸球都有 n 种可能，故摸 k 次共有 n^k 种等可能的结果. 若摸第 k 次首次摸到 1 号球，那前面 $k-1$ 次就都是从 1 号以外的 $n-1$ 个球中摸取，从而有利于 A 的结果有 $1\times(n-1)^{k-1}$ 种，故

$$P(A)=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}.$$

（2）设 B={不放回摸球 k 次时首次摸到 1 号球}，显然 $k\leqslant n$（$k>n$ 时为不可能事件）. 设想将 k 次摸到的球排成一排，总的结果个数相当于从 n 个球中一次摸取 k 个的排列数 A_n^k，每种结果是等可能的，若第 k 次摸球时，首次摸到 1 号球，那前面的 $k-1$ 次就 k 相当于从 1 号以外的 $n-1$ 个球中一次摸取 -1 个的排列，从而有利于 B 的结果有 $1\times A_{n-1}^{k-1}$ 种，故

$$P(B)=\frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_n^k}=\frac{1}{n}.$$

1.39 一架升降机开始时有 6 位乘客，并停于十层楼的每一层. 试求下列事件的概率：

（1）A = 某指定的一层有两位乘客离开；

（2）B = 没有两位及两位以上的乘客在同一层离开；

（3）C = 恰有两位乘客在同一层离开；

（4）D = 至少有两位乘客在同一层离开.

假设乘客离开的各种可能排列具有相同的概率.

解 由于每位乘客均可在十层楼中的任一层离开，故所有可能结果为 10^6 种.

（1）某指定的一层有两位乘客离开，这二人可以是 6 人中的任意二人，故有 C_6^2 种离开方式. 其余 4 人可在另外的九层中接任意方式离开. 故有 9^4 种离开方式. 从而所求的概率为

$$P(A)=\frac{C_6^2 9^4}{10^6}=0.098\,41.$$

（2）没有两位及两位以上乘客在同一层离开，即 6 个人在十层中任意 6 层离开，故有 A_{10}^6 种离开方式. 于是所求的概率为

$$P(B)=\frac{A_{10}^6}{10^6}=0.151\,2.$$

（3）恰有两位乘客在同一层离开. 由于没有规定在哪一层离开，故可在十层中的任一层发生该事件，即有 C_{10}^1 种可能结果. 有二人在该层离开，共有 C_6^2 种离开方式. 最后，既然恰有二人在同一层离开，即其余 4 人的离开方式中不能再有二人在某一层同时离开的情况，这包含以下三种离开方式① 4 个人在某一层同时离开，这有 C_9^1 种方式；② 有 3 人在同一层离开，另一人在其余的八层中的任一层离开，共有 $C_9^1C_4^3C_8^1$ 种可能结果；③ 4 人都不在同一层离开，这有 A_9^4 种可能结果. 于是 C 事件包含的基本事件数为

$$C_{10}^1C_6^2(C_9^1+C_9^1C_4^3C_8^1+A_9^4),$$

故所求概率为

$$P(C)=\frac{C_{10}^1C_6^2(C_9^1+C_9^1C_4^3C_8^1+A_9^4)}{10^6}=0.498\ 2.$$

（4）因为 $D=\overline{B}$，所以

$$P(D)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.151\ 2=0.848\ 8.$$

1.40　在箱子中盛有 m 个红球，$n-m$ 个黑球，所有的球都是可区分的．连续地从中取球且取出后不放回去，直到取出黑球为止，求取得的红球数刚好是 $k\ (0\leqslant k\leqslant m)$ 的概率 $P(A_k)$.

解　由于取球是逐次进行的，所以从 n 个球中取出 $k+1$ 个球共有 A_n^{k+1} 种可能结果．要求第 $k+1$ 次取出黑，前 k 次取得红球的可能结果是 $A_m^k(n-m)$ 种．故所求概率为

$$P(A_k)=\frac{A_m^k(n-m)}{A_n^{k+1}}.$$

1.41　在 11 张卡片上分别写上 Probability 中的 11 个字母，从中任意抽取 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

解　设 A={抽出的 7 张能排列成 ability}．从 11 张卡片中任意取 7 张排成一排，排法总数为 A_{11}^7，而排成 ability 全部可能的排法为 $C_1^1C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1C_1^1C_1^1=2\times2=4$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{4}{A_{11}^7}=0.000\ 002\ 4.$$

1.42　某商店有三桶油漆，分别为红漆，黑漆和白漆，在搬运中所有的标签脱落，售货员随意将这些漆卖给需要红漆，黑漆和白漆的三位顾客，试问至少有一位顾客买到所需颜色油漆的概率.

解　设 A={至少有一位顾客买到所需颜色油漆}，这是一个配对问题，因为将三桶油漆随意卖给三位顾客的可能结果有 3! 种，可以这样思考，把三种油漆编为 1，2，3 号油漆，三位顾客对应编为 1，2，3 号顾客，第 i 号油漆卖给第 i 号顾客，算作一个配对．1，2，3 号的全部排列结果为 3! 种，即 123　132　213　231 312　321，剔除没有一个配对的排列 231 与 312，知至少有一位顾客买到所需

油漆的可能结果有 4 个，故所求概率为

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

1.43　某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运中所有的标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所定颜色如数得到定货的概率是多少？

解　设 $A=\{$顾客能如数得到定货$\}$，从 17 桶油漆中任取 9 桶油漆的取法共有 C_{17}^{9} 种，而顾客得到 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆的取法共有 $C_{10}^{4}C_{4}^{3}C_{3}^{2}$ 种，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{10}^{4}C_{4}^{3}C_{3}^{2}}{C_{17}^{9}}=0.103\,66.$$

1.44　某城市的自行车分别以 00 001 到 10 000 编号，共 10 000 辆. 试问偶然遇到的一辆自行车，其牌照号码中没有数字 8（记为事件 A）的概率等于多少？

解　由题意知，所有可能的结果为 10 000 种，考虑车辆牌照后四位数，要 8 不出现，即每一位数都只能是 0 到 7 及 9 这九个数中的任一个. 且 0000 即表示车牌码 10000. 故共有 9^4 种有利结果，所求概率为

$$P(A)=\frac{9^4}{10^4}=0.9^4=0.656\,1.$$

1.45　设有 n 间房，分给 n 个不同的人. 每人都以 $1/n$ 的概率进入每一个房间，而且每间房里的人数无限制. 试求 $A=\{$不出现空房$\}$的概率及 $B=\{$恰恰出现一个空房$\}$的概率.

解　按题意，n 个房间分给 n 个不同的人共有 n^n 种不同的分法. 不出现空房等价于每个房间都有一人，故有 $n!$ 种不同的分法，于是

$$P(A)=\frac{n!}{n^n}.$$

恰恰出现一个空房时，即 n 个房间中的某一个是空的，而另外 $n-1$ 间房中有一房间恰有二人. 其余 $n-2$ 间房为每房一人，故 B 的有利结果数为

$$C_n^1 C_{n-1}^1 C_n^2 (n-2)!.$$

从而 $$P(B)=C_n^1 C_{n-1}^1 C_n^2 (n-2)!/n^n=C_n^2 n!/n^n .$$

1.46 有 n 个人，每人都以同样的概率被分配在 N $(n\leqslant N)$间房中的每一房间里，试求下列各事件的概率：

（1）某指定 n 间房里各有一人(A)；

（2）恰有 n 间房，其中各有一人(B)；

（3）某指定房中恰有 $m(m\leqslant n)$个人(C).

解 由于每个人都可以进入 N 间房的每一间. 故 n 个人在 N 间房中所有可能的分配方法共有 N^n 种.

（1）指定的 n 间房中各有一人，即 n 个人分配在指定的间房中. 其不同的分配方法共有 $n!$ 种，因此

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

（2）由于未固定哪 n 个房间，而从 N 间房中选出 n 间房的方法有 C_N^n 种. 对于选定的 n 间房，n 个人分配在其中且每房不空的方法有 $n!$ 种，因此

$$P(B)=C_N^n\cdot\frac{n!}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

（3）某指定房中有 m 个人的分法有 C_n^m 种，由于题意只对指定房中的人数加以限制，其余 $n-m$ 个人在 $N-1$ 间房中的分配方法未加限制，故共有$(N-1)^{n-m}$种分法，从而

$$P(C)=C_n^m\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

1.47 两个骰子连续掷 25 次，试问：至少一次出现双五点（记为 A）与完全不出现双五（记为 B）两事件的概率是否相等？

解 我们先考虑两个骰子连续掷 n 次，至少出现一次双五点的概率. 因为对于两个骰子的每一次投掷，都有 $6\times 6=36$ 种可能的结果，并且对于任何一次投掷的每一种结果能与任何一次投掷的每一种结果相联合，故所有可能结果的总数为 36^n 种. 在两个骰子的一次投掷中，双五点不出现的结果总数为 35. 这样，在 n 次投掷中，双五点不出现的数目为 35^n. 于是至少出现一次双五点的结果数为 36^n-35^n 种，故至少出现一次双五的概率为

$$P(A)=\frac{36^n-35^n}{36^n}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

如果 $P(A)>1/2$，即在 n 次投掷中至少出现一次双五点的概率大于一次也不出现双五点的概率，而

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n>\frac{1}{2}$$

即有 $$n>\frac{\ln 2}{\ln 36-\ln 35}=24.6.$$

这意味着在 25 次投掷中，至少一次出现双五点的概率比一次双五点也不出现的概率大.

1.48 24 个班的学生中，每班选两个代表出席学生代表大会. 代表的常委会由 48 个代表中随机地选出 24 个人来组成. 试求：

（1）一指定班在常委会有代表（记为 A）的概率；

（2）各班在常委会都有代表（记为 B）的概率.

解 （1）先求逆事件 $\overline{A}$ 的概率，即指定的班在常委会没有代表的概率 $P(\overline{A})$. 因为 48 人中有 46 人不属于指定的班，故指定的班在常委会没有代表的结果数为 C_{46}^{24} 种，而从 48 人中任意选出 24 人的所有可能结果数为 C_{48}^{24}，故指

$$P(\overline{A})=\frac{C_{46}^{24}}{C_{48}^{24}}=0.244\ 68.$$

从而指定的班在常委会有代表的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.244\ 68=0.755\ 32.$$

（2）各班在常委会都有代表，即是说，每班选出的 2 个代表中有且只有一人参加常委会. 故常委会的组成方式有 2^{24} 种，从而所求的概率为

$$P(B)=\frac{2^{24}}{C_{48}^{24}}=0.000\ 000\ 52.$$

1.49　一辆汽车停于一排($N-1$)辆汽车之间而不是在两端. 当司机再回该车时，发现N个停车位置中仍有 r 个被占用. 试问该车的两个邻位是空（记为 A ）的概率是多少？该车的两个邻位都不空（记为 B ）的概率是多少？

解　因为共有 N 个停车位，除去该车外，还有 $N-1$ 个停车位. 这 N 个停车位中有 r 个被占用，除去该车外，还有 $r-1$ 个被占用. 考虑这 $N-1$ 个停车位中有 $r-1$ 个被占用的随机试验，所有可能的结果为 C_{N-1}^{r-1} 种，要求该车的两个邻位是空的，则（$r-1$）个被占用的停车位只能从其余的 $N-3$ 个停车位中选取，故共有 C_{N-3}^{r-1} 种可能结果，于是所求 A 事件的概率为

$$P(A)=\frac{C_{N-3}^{r-1}}{C_{N-1}^{r-1}}.$$

要求该车的两个邻位都不空，则只要求出 $r-3$ 个被占用的停车位在总数 $N-3$ 个停车位中的选择方法数. 显然，它等于 C_{N-3}^{r-3}. 从而所求 B 事件的概率为

$$P(B)=\frac{C_{N-3}^{r-3}}{C_{N-1}^{r-1}}.$$

1.50　从 a, b, c, d, e 五个符号中有放回地抽取 25 次组成的 25 位数中，每个符号恰好出现 5 次的概率是多少？

解　设 A = {每个符号恰好出现 5 次}，从五个符号中有放回地抽取 25 次，全部可能的结果有 5^{25} 种，而每个符号恰好出现 5 次，即为 5 个 a，5 个 b，5 个 d 及 5 个 e 所组成的 25 位数. 这 25

个符号可以排列成 25!个不同的 25 位数，但同一符号的任意调换不构成不同的结果，故可区别的结果数为 $25!/(5!)^5$，从而所求概率为

$$P(A)=\frac{25!}{5^{25}(5!)^5}=0.002\,09.$$

1.51 从一付扑克牌（共 52 张）中一张一张地无放回取牌. 求在第 r 次取牌时第一次取出 A 牌，第二次取出 A 牌，第三次取出 A 牌，第四次取出 A 牌的概率.

解 设 $A_i=\{$在第 r 次取牌时第 i 次取出 A 牌$\}$，$i=1,2,3,4$. 从 52 张牌中无放回地取出 r 张牌的所有可能结果数为 A_{52}^r 种.

（1）第 r 次取牌时第一次取出 A 牌，表明前 $r-1$ 次取牌中均未取出 A 牌. 故前 $r-1$ 次取牌的不同结果数为 A_{48}^{r-1}，而第 r 次所取出的 A 牌可为 4 张 A 牌中的任一张，共有 C_4^1 种结果，所以

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_{48}^{r-1}}{\mathrm{A}_{52}^r}.$$

（2）第 r 次取牌时第二次取出 A 牌，表明前 $r-1$ 次取牌中恰有一次取出 A 牌. 考虑取 A 牌的取法有 C_4^1 种，取到 A 牌的时间可为 $r-1$ 次中的任一次，共 $r-1$ 种取法. 而固定了一张 A 牌后，非 A 牌的取法有 A_{48}^{r-2} 种. 故前 $r-1$ 次取牌中取出一张 A 牌的取法共有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_{48}^{r-2}(r-1)$ 种. 最后，第 r 次取牌时取出 A 牌共有 C_3^1 种，所以要求的概率为

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1(r-1)\mathrm{A}_{48}^{r-2}}{\mathrm{A}_{52}^r}.$$

（3）第 r 次取牌时第三次取出 A 牌，即是前 $r-1$ 次取牌中恰有二次取出 A 牌，及取到 $r-3$ 张非 A 牌. 这样的结果数等于先从 4 张 A 牌中取出 2 张，并从 48 张非 A 牌中取出 $r-3$ 张，再将这 $r-1$ 张取出的牌组成排列的数目，共有 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_{48}^{r-3}(r-1)!$ 种. 此时，第 r 张牌为 A 牌的取法有 C_2^1 种，故有利结果数为

$$C_4^2 C_{48}^{r-3}(r-1)!C_2^1,$$

故所求概率为

$$P(A_3)=\frac{C_4^2 C_2^1 C_{48}^{r-3}(r-1)!}{A_{52}^r}.$$

（4）同理，第 r 次取牌时第四次取到 A 牌的概率为

$$P(A_4)=\frac{C_4^3 C_{48}^{r-4}(r-1)!}{A_{52}^r}.$$

1.52　求 6 个人的生日集中于两个月份，而不集中于一个月份（记为 A）的概率.

解　6 个人的生日按月考虑的所有可能结果为 12^6 种，全部集中于 12 个月份中的二个月份时，首先，对月份来说，这是 12 个月份中的任意二个月份，共有 C_{12}^2 中选法，对于选定的二个月份，每个人的生日可以是这二个月份中的任意一个，共有 2^6 种可能的结果. 但是其中有两个结果要除外，即 6 个人有生日全部集中于这二个月份中的一个月份之内. 综上所述，有利结果为 $C_{12}^2(2^6-2)$ 种. 于是所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{12}^2(2^6-2)}{12^6}=0.001\,37.$$

1.53　一批产品共 n 件，其中有 m 件 $(m<n/2)$ 次品. 若逐件进行检查. 试求不连续出现两件次品的概率.

解　设 A={不连续出现两件次品}，因为 n 件产品的所有不同的排列数为 $n!$ 种. 为了计算 A 包含的可能结果数，我们采用如下的技巧：用 $n-m$ 条棍子表 $n-\mathrm{m}$ 件正品，用 m 个 $*$ 表示 m 件次品. 则 $n-m$ 条棍子之间形成了 $n-m-1$ 个间隔. 再加上两头的空隙共有 $n-m+1$ 个空隙. 不连续出现两件次品的排列数就等于从 $n-m+1$ 个空隙中任意取出 m 个空隙放置 $*$，并且 m 个 $*$ 可以任意地在这 m 个空隙中排列，故共有 $C_{n-m+1}^m m!$ 种放法，然而 $n-m$ 条棍子本身也可以任意排列. 这共有 $(\mathrm{n}-\mathrm{m})!$ 种排法. 于是有利结果数为

$$C_{n-m+1}^{m}m!(n-m)!=A_{n-m+1}^{m}(n-m)!,$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{A_{n-m+1}^{m}(n-m)!}{n!}.$$

对上面的结果也可以作这样的理解：设 A 表示不连续出现两件次品. A 的结果数视为可先将 $n-m$ 件正品作全排列，对于每一种固定的排法，在它们之间插入 m 件次品. 每两件正品之间最多插入一件次品，共有 A_{n-m+1}^{m} 种插入法，由乘法原理即得有利结果数与相应概率.

1.54 从一个给定的 $2n+1$ 边的正多边形的顶点中，随机地选择三种不同的顶点，假定所有这样的选法是等可能的. 试求下面事件的概率：

给定的那个正多边形的中心恰好位于由三个随机选取的点所确定的三角形的内部.

解 由 $2n+1$ 个顶点中任意选出三个不同顶点的选法是 C_{2n+1}^{3} 种. 设 A_n={$2n+1$ 边的正多边形的中心恰好位于由随机选取的三个顶点所确定的三角形的内部}这一事件.

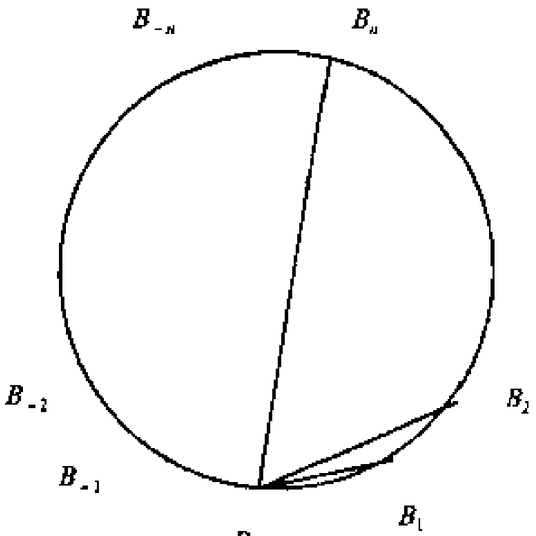

图 1.1

我们先考虑 $\overline{A}_n$，由图 1.1，易见，凡由某一固定点（例如 B_0）开始朝反时针方向连接的 n 个顶点（固定的那个点除外）中选出 2 个顶点与固定的顶点构成的三角形都导致 $\overline{A}$ 出现，这样的三角形共有 C_n^2 中，对 $2n+1$ 个顶点都可如此处理，于是共得 $(2n+1)C_n^2$ 个不同的三角形，它们都导致 $\overline{A}$ 出现，而且再没有别的三角形导致 $\overline{A}$ 出现. 故 $\overline{A}$ 的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{(2n+1)C_n^2}{C_{2n+1}^3}=\frac{3(n-1)}{2(2n-1)},$$

从而 $$P(A_n)=1-P(\overline{A_n})$$
$$=1-\frac{3(n-1)}{2(2n-1)}=\frac{n+1}{2(2n-1)}\quad (n\geqslant 1).$$

1.55 证明：$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$

并说明此结果的概率意义.

证 因为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B=A\cup B-AB$

且 $AB\subset A\cup B$，所以

$$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\cup B-AB)=P(A\cup B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-2P(AB).$$

此结果的概率意义是，A、B 中仅有一个发生的概率等于它们每个概率之和减去它们的积事件的概率的两倍.

1.56 设 $P(A)=x$，$P(B)=y$，$P(AB)=z$，试用 x，y，z 表示下列事件的概率：

$$P(\overline{A}\cup\overline{B});\ P(\overline{A}B);\ P(\overline{A}\cup B);\ P(\overline{A}\overline{B}).$$

解 $$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-z,$$
$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B-BA)=P(B)-P(BA)=y-z,$$
$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)$$
$$=1-x+y-(y-z)$$
$$=1-x+z,$$
$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=1-x-y+z.$$

1.57 （1）已知事件 A_1，A_2 同时发生，则事件 A 发生. 证明

$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$.

（2）已知任意三个事件 A_1，A_2，A_3 都满足 $A_i\subset A$ (i=1，2，3)

证明 $P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2$.

证 （1）因为 A_1，A_2 同时发生则 A 发生，等价于 $A_1A_2 \subset A$

故 $P(A) \geqslant P(A_1A_2)$.

而 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$，且 $0 \leqslant P(A_1 \cup A_2) \leqslant 1$，

所以 $P(A) \geqslant P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \geqslant P(A_1) + P(A_2) - 1$.

（2）因为 $A_i \subset A\,(i=1, 2, 3)$，所以 $A_1A_2A_3 \subset A$，

由（1）结果得

$$\begin{aligned}P(A) &\geqslant P(A_1A_2) + P(A_3) - 1\\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - 1\\ &\geqslant P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2.\end{aligned}$$

1.58 已知 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(A \cup B)=c$，试求概率

（1）$P(A\overline{B})$；（2）$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 （1）因为 $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ 得

$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = a - P(AB)$，

而 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，得

$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = a + b - c$.

所以 $P(A\overline{B}) = a - (a + b - c) = c - b$.

（2）$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{B} - A) = P(\overline{B} - \overline{B}A) = P(\overline{B}) - P(A\overline{B})$

$= 1 - b - (c - b) = 1 - c$.

1.59 试证：$P(B|A) \geqslant 1 - \dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$，假定 $P(A) > 0$.

证 由 1.57 题（1）知 $P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant 1$，

且 $P(AB) = P(A)P(B|A)$，$P(B) = 1 - P(\overline{B})$，

得 $P(A) + 1 - P(\overline{B}) - P(A)P(B|A) \leqslant 1$，

即 $P(A)P(B|A) \geqslant P(A) - P(\overline{B})$.

两边同除以 $P(A)$，最后得

$$P(B|A)\geqslant 1-P(\overline{B})/P(A).$$

1.60 设 A，B 为二事件，$P(A)=0.8$，$P(B)=0.5$，试确定 $P(AB)$ 的最大值与最小值以及取得最大值与最小值的条件.

解 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，即

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.8+0.5-P(A\cup B).$$

故当 $P(A\cup B)=1$ 时，$P(AB)$取最小值 0.3.

当 $B\subset A$ 时，$P(A\cup B)=P(A)=0.8$，此时 $P(AB)$取最大值 0.5.

1.61 对任意的随机事件 A，B，C，试证：

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A).$$

证 因为 $A(B\cup C)\subset A$，$ABC\subset BC$，故有

$$\begin{aligned}P(A)&\geqslant P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)\\&=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\\&\geqslant P(AB)+P(AC)-P(BC).\end{aligned}$$

1.62 将 3 个球随机放入 4 个杯子中去，求杯中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

解 设 $A_i=\{$杯中球的最大个数为 $i\}$，$i=1,2,3$，将 3 个球随机放入 4 个杯子中，全部可能的放法有 4^3 种. 当杯中球的最大个数为 1 时，即每个杯子最多放一球，可能的放法有 $4\times3\times2$ 种，即 A_1 的概率为

$$P(A_1)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}.$$

而三个球全放入一个杯子中的放法有 C_4^1 种，故 A_3 的概率为

$$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16},$$

$$P(A_2)=1-P(A_1\cup A_3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}.$$

1.63 50 只个铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 个铆钉强度太弱. 每个部件 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 试问发生一个部件强度太

弱的概率是多少?

解 将10个部件编号为1，2，…，10，设$A_i=\{$第i号部件太弱$\}$. 从50只铆钉中任选3只的取法总数为C_{50}^3，取到3只强度太弱的铆钉的取法仅有一种，故第i号部件太弱的概率为

$$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3}=\frac{1}{19\ 600}.$$

所以，10个部件中发生一个部件强度太弱的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10}A_i\right)=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)=\frac{10}{19\ 600}=\frac{1}{1\ 960}.$$

1.64　已知$P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，试求$P(B\mid A\cup\overline{B})$.

解 因为$P(B\mid A\cup\overline{B})=\dfrac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{P(AB)}{1-0.3+1-0.4-0.5}=\frac{P(AB)}{0.8},$$

而
$$P(AB)=P(A\overline{\overline{B}})=P(A-\overline{B})=P(A-A\overline{B})=P(A)-P(A\overline{B})$$
$$=1-0.3-0.5=0.2,$$

所以
$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}=0.25.$$

1.65　已知$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，试求$P(A\cup B)$.

解 因为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=\frac{1}{4}+P(B)-P(AB),$$

而 $$P(B)=P(B(A\cup\overline{A}))=P(BA\cup B\overline{A})$$
$$=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}P(B\mid\overline{A}),$$

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B)P(\overline{A}\mid B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}P(B)}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}P(B),$$

故 $$P(B)=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}P(B)\text{，得 }P(B)=\frac{1}{6}.$$

而 $$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},$$

所以 $$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

1.66 若事件 A 与事件 B 互斥，且 $P(\overline{B})\neq 0$,

则 $$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A)}{1-P(B)}.$$

证 $$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A-AB)}{P(\overline{B})}$$
$$=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A)}{1-P(B)},$$

此处因 A 与 B 互斥，故有 $P(AB)=0$.

1.67 证明“确实的原则”(Sure-thing)：若 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$, $P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

证 由 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，得 $\dfrac{P(AC)}{P(C)}\geqslant\dfrac{P(BC)}{P(C)}$，即有

$$P(AC)\geqslant P(BC).$$

同理，由 $P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$ 得 $P(A\overline{C})\geqslant P(B\overline{C})$.

故 $$P(A)=P(A(C\cup\overline{C}))=P(AC\cup A\overline{C})=P(AC)+P(A\overline{C})$$
$$\geqslant P(BC)+P(B\overline{C})=P(B).$$

1.68 设有一列火车共有 n 节车厢. 在某站有 k $(k\geqslant n)$ 个旅客上这列火车，并随意地选择车厢. 试求每一节车厢至少进入一个旅客的概率.

解 设 $A_j=\{$没有一个旅客进入第 j 节车厢$\}$，则

$$P(A_j)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k,\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

同理，没有一个旅客进入第 i 节及第 j 节车厢的概率为

$$P(A_i\cap A_j)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^k,\qquad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq j.$$

没有一个旅客进入第 i_1，i_2，$\cdots$，i_{n-1} 节车厢的概率为

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}})=\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

其中 i_1，i_2，$\cdots$，i_{n-1} 是 1，2，$\cdots$，n 中的任意 $n-1$ 个.

显然，n 节车厢全空的概率为零. 于是

$$S_1=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=\mathrm{C}_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k,$$

$$S_2=\sum_{i<j}^{n}P(A_j\cap A_j)=\mathrm{C}_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k,$$

……

$$S_{n-1}=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}}^{n}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}})$$
$$=\mathrm{C}_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

$$S_n=0.$$

由 n 个事件之和的概率公式，$A=\{$至少有一节车厢空$\}$的概率为

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^n S_{n-1}$$

$$=\mathrm{C}_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-\mathrm{C}_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\cdots$$

$$+(-1)^n\mathrm{C}_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

故 $B=\{$每一节车厢都不空的概率为$\}$

$$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$=1-\mathrm{C}_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+\mathrm{C}_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

[注] 一种错误的解法：因为 k 个旅客中的每一个都可能进入 n 节车厢中的每一节，因此全部基本事件有 n^k 种.

要求每一节车厢内至少有一旅客的基本事件数可用如下方法计算，先在 k 个旅客中选 n 个，这 n 个以任意的排列次序进入 n 节车厢的每一节(即每节一人)，共有 A_k^n 种方式，这样就保证了每节车厢不空的条件成立. 然后，其余的 $k-n$ 个旅客任意进入任一节车厢，共有 n^{k-n} 种方式，由此，有利的基本事件的总数为 $\mathrm{A}_k^n n^{k-n}$. 于是，所求的概率为：

$$P(B)=\frac{\mathrm{A}_k^n}{n^n}.$$

这种做法似乎很有道理，其实是不对的. 现对 $n=3$ 且 $k=5$ 的情形来看它错在哪里.

我们用①，②，③，④，⑤表示 5 位旅客，而车厢用方格表示.

首先，我们选①，②，③人，每人进入一节车厢，共有 3! 种方式，而④，⑤都进入第一节车厢，结果用下图表示

①④⑤	②	③

①④⑤	③	②

②④⑤	①	③

②④⑤	③	①

③④⑤	①	②

③④⑤	②	①

其次再选②，③，④人，每人进往一节车厢，而①，⑤也都进入第一节车厢. 以下图表示

②①⑤	③	④

②①⑤	④	③

③①⑤	②	④

③①⑤	④	②

④①⑤	②	③

④①⑤	③	②

以上所述，可见两种选法的结果出现重复，这就是错误的关键.

1.69　在 n 阶行列式的展开式中任取一项，求它不含主对角线元素的概率 $P(B_n)$ 是多少，并求

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

解　设 n 阶行列式的元素为 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n），因为行列式的每一项为取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{1j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 j_1，j_2，…，j_n，是 1，2，…，n 的一个排列，故 n 阶行列式共有 $n!$ 项.

令 A_k 表示 n 阶行列式的项中含 a_{kk} 元素的事件($k=1$，2，…，n)，则

$$P(A_k)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},$$

$$P(A_kA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},$$

……

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}.$$

于是 $$S_1=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)=n\cdot\frac{1}{n}=1,$$

$$S_2=\sum_{k<j}^{n}P(A_kA_j)=\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!},$$

$$S_3=\sum_{k<j<i}^{n}P(A_kA_jA_i)=\mathrm{C}_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!},$$

……

$$S_n=P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}.$$

所以 $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n+1}S_n$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.$$

故所求 $B_n=\{n$ 阶行列式展开式中不含主对角线元素$\}$的概率为

$$P(B_n)=1-P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)$$

$$=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}.$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=\mathrm{e}^{-1}$ $\left(\text{由展开式 } \mathrm{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\text{, 可知}\right)$

1.70 某人先写了 n 封投向不同地的信，再写 n 个标有这 n 个地址的信封，然后在每个信封内随意装入一封信. 试问：

（1）每一封信都碰对了地址(记为 A)的概率是多少?

（2）至少有一封信碰对了地址(记为 B)的概率是多少?

解 （1）将 n 个地址写到 n 个信封上的写法共有 $n!$ 种，其

中完全碰对的仅有一种，所以有

$$P(A)=\frac{1}{n!}.$$

（2）设 $A_k=\{$第 k 封信碰对了地址$\}$ $k=1, 2, \cdots, n$，因为任一地址都有同等可能写到第 k 封信上去，故正好有若干个碰对的概率为

$$P(A_i)=\frac{1}{n}, \qquad i=1, 2, \cdots, n,$$

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j\mid A_i)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}, \qquad 1\leqslant i<j\leqslant n,$$

$$\begin{aligned}P(A_iA_jA_k)&=P(A_i)P(A_j\mid A_i)P(A_k\mid A_iA_j)\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}, \qquad 1\leqslant i<j<k\leqslant n,\end{aligned}$$

……

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n!}.$$

所以 B 的概率为

$$\begin{aligned}P(B)&=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}^{n}P(A_iA_jA_k)-\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\\&=\mathrm{C}_n^1\cdot\frac{1}{n}-\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n(n-1)}+\mathrm{C}_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}.\end{aligned}$$

[注] 与这种信和地址配对的问题很多，例如：

1° n 个学生在一个有 n 个座位的教室中上课，假定学生入座是随机的，试问第二天上课时，至少有一个学生入座第一天位置的概率是多少？

2° 在袋子里有 n 个相同的球，其号码从 1 到 n，依次取球，每次取出一个不放回. 求至少有一次所取出的球的号码与取球的次数一样的概率.

1.71 设某动物活到 10 岁的概率为 0.8，而活到 15 岁的概率为 0.4. 试问现龄为 10 岁的这种动物活到 15 岁的概率是多少？

解 这是条件概率问题. 设 $A=\{$某动物由出生活到 10 岁$\}$，$B=\{$某动物由出生活到 15 岁$\}$，$C=\{$某动物由 10 岁活到 15 岁$\}$，则 $B=AC$，且 $P(B)=P(A)P(C|A)$，由题设条件，$P(B)=0.4$、$P(A)=0.8$，故

$$P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

1.72 考虑恰有两个小孩的家庭，以 b，g 分别表示男孩及女孩，并依孩子出生的先后排列代表其性别的字母. 于是有四种可能情形 bb，gg，bg，gb. 各有概率 1/4，若已知一家有一男孩，试问两个小孩都是男孩（记为 A）的概率是多少？

解 已知一家有一男孩，就是说这家至少有一个男孩，故有三种可能，其概率为 3/4. 两个小孩都是男孩，只有一种可能. 故其概率为 1/4. 于是，所求的概率为

$$P(A)=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

1.73 据以往资料表明，某一三口之家，患某种传染病的概率有以下规律：$P\{$孩子得病$\}=0.6$，$P\{$母亲得病 | 孩子得病$\}=0.5$，$P\{$父亲得病 | 母亲及孩子得病$\}=0.4$，试求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解 设 $A_1=\{$孩子得病$\}$，$A_2=\{$母亲得病$\}$，$A_3=\{$父亲得病$\}$，由

题意得：

$$P(A_1)=0.6,\ P(A_2|A_1)=0.5,\ P(A_3|A_1A_2)=0.4,$$

则所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3})=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)$$
$$=0.6\times0.5\times(1-0.4)=0.18.$$

1.74 某人忘记了电话号码的最后一位数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过 3 次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解 设 A_i={第 i 次未接通所需电话}，i=1，2，3，则依题意有

$$P(A_1)=\frac{9}{10},\ P(A_2|A_1)=\frac{8}{9},\ P(A_3|A_1A_2)=\frac{7}{8},$$

故 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2A_1)P(A_3|A_1A_2)$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=0.7.$$

P（三次中至少一次接通）$=1-0.7=0.3$

若已知最后一个数字为奇数，则可能的拨号为 1，3，5，7，9 五种可能，类似可得

$$P（三次中至少一次接通）=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=0.6.$$

1.75 袋中有 10 个球，9 个是白球，1 个是红球，10 个人依次从袋中各取一球，每人取一球后，不再放回袋中，试问第一人，第二人，…，最后一人取得红球的概率是多少？

解 设 A_i={第 i 人抽到红球}，i=1，2，3，…，10，由题意得

$P(A_1)=1/10$

$P(A_2)=P(A_2(A_1\cup\overline{A_1}))=P(A_2A_1\cup\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1}A_2).$

因为袋中只有一个红球，第一人与第二人同时取得红球是不可能事件，即 $A_1A_2=\varnothing$，$P(A_1A_2)=0$，所以

$$P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}.$$

类似地　$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}.$$

同理　$P(A_i)=\frac{1}{10}$,　　$i=1, 2, \cdots, 10$.

本题意味着无论先抽后抽，每人抽得红球的概率相等.

1.76　有 100 张票，其中有 30 张戏票，甲、乙两人先后在其中抽一张，试证明：抽得戏票的概率和抽票先后次序无关.

解　只需证明第一人与第二人两人抽得戏票的概率相等.

令　$A=\{$第一人抽得戏票$\}$，$B=\{$第二人抽得戏票$\}$

则　$P(A)=\dfrac{30}{100}=0.3.$

而　$P(B)=P(B(A\cup\overline{A}))=P(AB)+P(\overline{A}B)$

$$=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=\frac{30}{100}\times\frac{29}{99}+\frac{70}{100}\times\frac{30}{99}=\frac{2970}{9900}=0.3.$$

故抽得戏票的概率与抽得先后次序无关.

1.77　在空战中，甲机先向乙机开火，击落乙机的概率是 0.2，若乙机未被击落，就进行还击，击落甲机的概率是 0.3，若甲机未被击落，则再攻击乙机，击落乙机的概率是 0.4. 求在这几个回合中：

（1）甲机被击落的概率；

（2）乙机被击落的概率.

解　设在这三次攻击中，“击落敌机”事件分别为 A，B，C，则依题意，有

$$P(A)=0.2,\ P(B|\overline{A})=0.3,\ P(C|\overline{A}\overline{B})=0.4.$$

（1）P(甲机被击落)$=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

$$=(1-0.2)\times0.3=0.24.$$

（2）$P(\text{乙机被击落})=P(A\cup\overline{A}\ \overline{B}\ C)=P(A)+P(\overline{A}\ \overline{B}\ C)$

$$\begin{aligned}&=P(A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})P(C\mid\overline{A}\ \overline{B})\\&=0.2+(1-0.2)(1-0.3)\times 0.4\\&=0.424.\end{aligned}$$

1.78　制造一种零件可采用两种工艺. 第一种工艺有三道工序，每道工序的废品率为 0.1，0.2，0.3；第二种工艺只有二道工序，但每道工序的废品率都是 0.3，如果用第一种工艺，在合格零件中，一级品率为 0.9；而用第二种工艺，在合格零件中，一级品率只有 0.8，试问哪一种工艺能保证得到一级品率较大？

解　设 $A=\{\text{任抽一件得到合格品}\}$，$B=\{\text{得到一级品}\}$，则 A 发生时，要求各道工序皆不出废品，且 $B\subset A$，故有 $AB=B$.

采用第一种工艺时：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB)=P(A)P(B\mid A)\\&=(1-0.1)(1-0.2)(1-0.3)\times 0.9=0.453\,6.\end{aligned}$$

采用第二种工艺时：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB)=P(A)P(B\mid A)\\&=(1-0.3)^2\times 0.8=0.392.\end{aligned}$$

故第一种工艺得到一级品概率较大.

1.79　轰炸机要完成它的使命，必须是驾驶员找到了目标，同时投弹员投中了目标. 设驾驶员甲和乙找到目标的概率分别为 0.9 和 0.8；又投弹员丙和丁在驾驶员找到了目标的条件下投中目标的概率分别为 0.7 和 0.6. 现在要装备两架轰炸机的人员，试问甲、乙、丙、丁应怎样两两配合才能使完成使命有较大的概率？又这个概率比起另一种配合大多少？（注意，只要有一架飞机投中目标即完成使命）.

解　设 $A=\{\text{甲找到目标}\}$，$B=\{\text{乙找到目标}\}$，$C=\{\text{丙投中目标}\}$，$D=\{\text{丁投中目标}\}$. 完成使命要求两架飞机至少有一架找到目标并投中目标. 故完成使命的概率为：

（1）采用甲丙，乙丁配合时，则有

$$
\begin{aligned}
P(AC \cup BD) &= P(AC) + P(BD) - P(ACBD) \\
&= P(A)P(C|A) + P(B)P(D|\mathrm{B}) \\
&\quad - P(A)P(C|A)P(B)P(D|B) \\
&= 0.9 \times 0.7 + 0.8 \times 0.6 - 0.9 \times 0.7 \times 0.8 \times 0.6 \\
&= 0.807\,6.
\end{aligned}
$$

（2）采用甲丁、乙丙配合时，则有

$$
\begin{aligned}
P(AD \cup BC) &= P(AD) + P(BC) - P(ADBC) \\
&= P(A)P(D|A) + P(B)P(C|B) \\
&\quad - P(A)P(D|A)P(B)P(C|B) \\
&= 0.9 \times 0.6 + 0.8 \times 0.7 - 0.9 \times 0.6 \times 0.8 \times 0.7 \\
&= 0.797\,6.
\end{aligned}
$$

而 $P(AC \cup BD) - P(AD \cup BC) = 0.807\,6 - 0.797\,6 = 0.01$

故知甲丙，乙丁配合比甲丁，乙丙配合有稍大的概率完成使命，前者的概率仅比后者的概率大 0.01.

1.80　从 1 到 100 共 100 个整数中任意取出一数，在已知这数是 3 的整数倍的条件下，求这数能被 5 整除的概率.

解　设 $A=$ {这数能被 5 整除}，$B=$ {这数是 3 的整数倍}，则

$AB=$ {这数既能被 5 整除又能被 3 整除}.

由于从 1 到 100 这 100 个整数中只有 15，30，45，60，75，90 这 6 个数能同时被 3 和 5 整除，实际上可由 $6<100/15<7$ 知，使 AB 发生的基本事件数为 6. 而 B 发生时，由 $33<100/3<34$ 知，从 1 到 100 的 100 个整数中，能整除 3 的数只有 33 个，故得

$$P(AB)=\frac{6}{100}，P(B)=\frac{33}{100}.$$

所以得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{6/100}{33/100}=\frac{2}{11}.$$

1.81　有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在两批种子中各任取一粒进行试种，试求：

（1）两粒种子都发芽的概率；

（2）至少有一粒种子发芽的概率；

（3）恰好有一粒种子发芽的概率.

解 设 $A=\{$由甲批中所取的一粒能发芽$\}$，$B=\{$由乙批中所取的一粒能发芽$\}$. 由题意可知，A，B 相互独立，且有 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.7$，于是所求的概率分别为

（1）$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times 0.7=0.56$

（2）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.7-0.56=0.94$.

由于 A 与 B 独立，故 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立，故计算 $P(A\cup B)$还可如下进行：

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\ \overline{B})$$
$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.2\times 0.3=0.94.$$

或 $$P(A\cup B)=P(AB\cup A\overline{B}\cup \overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$$
$$=P(A)P(B)+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})$$
$$=0.8\times 0.7+0.2\times 0.7+0.8\times 0.3=0.94.$$

（3）$P(A\overline{B}\cup \overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$
$$=0.8\times 0.3+0.2\times 0.7=0.38.$$

1.82 设 m，a，r，y 的所有全排列是等概率的. 令 $A_1=\{$最后一个字母是 y 的排列$\}$，$A_2=\{$最前一个字母是 m 的排列$\}$，试求：

$$P(A_1\cup A_2),\ P(A_1A_2),\ P(\overline{A_1}\overline{A_2})\text{与 } P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}).$$

解 由 m，a，r，y 四个字母组成的全排列的个数共有 $4!=24$ 个.

若将 y 固定在最后一位的排列形如

$***y$

在 y 的左方的 3 个元素为 a，r，m 的任一排列，共有 $3!=6$ 种. 同理 m 在首位的排列形如

$m***$

在 m 右边的三个元素为 a，r，y 的任一个全排列都行，于是

导致 A_2 的排列共有 $3!=6$ 种.

而 m 在首位，y 在末位的排列数为 $2!=2$ 种，故得

$$P(A_1)=\frac{6}{24},\ P(A_2)=\frac{6}{24},\ P(A_1A_2)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}.$$

所以 $$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{6}{24}+\frac{6}{24}-\frac{2}{24}=\frac{5}{12},$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12},$$

$$P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})=1-P(A_1A_2)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.$$

1.83 对一个随机试验观测 800 次、事件 A 发生 254 次、$\overline{A}$ 发生 546 次；事件 B 与 $\overline{B}$ 各发生 400 次，由频率的稳定性，故且假定事件的概率等于它的频率，那么，若事件 A 与 B 相互独立，则可期望事件 AB、$A\overline{B}$、$\overline{A}B$、$\overline{A}\overline{B}$ 在 800 次观测中各发生多少次?

解 $$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{254}{800}\times\frac{400}{800}=\frac{127}{800},$$

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=\frac{254}{800}\times\frac{400}{800}=\frac{127}{800},$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=\frac{546}{800}\times\frac{400}{800}=\frac{273}{800},$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{546}{800}\times\frac{400}{800}=\frac{273}{800}.$$

故可期望事件 AB，$A\overline{B}$ 在 800 次观测中各发生 127 次，事件 $\overline{A}B$、$\overline{A}\overline{B}$ 各发生 273 次.

1.84 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，试证明：A 与 B 相互独立和 A 与 B 互不相容不能同时成立.

证 用反证法. 设 A 与 B 相互独立，且 A 与 B 互不相容，则有 $AB=\varnothing$，故有

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.$$

因而 $P(A)=0$，或 $P(B)=0$ 中至少一个成立，这与题设条件矛盾，所以 A 与 B 相互独立和 A 与 B 互不相容不能同时成立.

1.85　已知事件 A 与 A 本身相互独立，试证：

$P(A)=0$，或 $P(A)=1$.

证　因为事件 A 与 A 本身相互独立，则有

$$P(AA)=P(A)P(A)，\text{而 } P(AA)=P(A),$$

故　$[P(A)]^2=P(A)$，即 $P(A)(1-P(A))=0$.

所以有　$P(A)=0$ 或 $P(A)=1$.

1.86　设步枪射中飞机的概率为 0.004，试求：

（1）250 支步枪同时射击时击中飞机的概率；

（2）要使击中飞机的概率达到 99%，至少需要多少支步枪？

解　设 $A_i=\{$第 i 支步枪射中飞机$\}$，已知 $P(A_i)=0.004$，则 $P(\overline{A}_i)=0.996$，$i=1$，2，⋯

（1）250 支步枪全射不中的概率为

$$P(\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\cdots\overline{A}_{250})=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{250})=0.996^{250}\approx 0.37,$$

则所求的概率为 $1-P(\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\cdots\overline{A}_{250})\approx 1-0.37=0.63$.

（2）n 支步枪同时射击时击中飞机的概率为

$$1-P(\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\cdots\overline{A}_n)=1-[1-0.004]^n=1-0.996^n,$$

依题意有　$1-0.996^n=0.99$,

解得　　$n\approx 1150$ 支.

即所需步枪数至少应为 1 150 支.

1.87　两射手彼此独立地向同一目标射击，设甲射中的目标为 $P(A)=0.9$，乙射中的概率为 $P(B)=0.8$，试求目标被击中的概率是多少？

解　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98,$$

或 $P(A\subset B)=1-P(\overline{A}\ \overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.1\times0.2$

$=0.98$,

或 $P(A\cup B)=P(AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B})$

$=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$

$=P(A)P(B)+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})$

$=0.9\times0.8+0.1\times0.8+0.9\times0.2=0.98.$

1.88 三人独立地破译一个密码. 他们能单独译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4，试求此密码被译出的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 人独立译出密码$\}$，$i=1, 2, 3$，$B=\{$密码被译出$\}$，则

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

1.89 一工人看管三台机床，在一个小时内甲，乙，丙三台机床不需工人照看的概率分别是 0.9，0.8 和 0.85，求在一小时中

（1）三台机床都需要照看的概率；

（2）至少有一台机床需要照看的概率；

（3）至多只有一台机床不需照看的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 台机床不需要照看$\}$，$i=1, 2, 3$，因为三台机床要不要照看是相互独立的，所以 $P(A_1)=0.9$，$P(A_2)=0.8$，$P(A_3)=0.85$.

（1）$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$

$=(1-0.9)\times(1-0.8)\times(1-0.85)=0.003.$

（2）$P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)=P(\overline{A_1A_2A_3})=1-P(A_1A_2A_3)$

$=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388.$

（3）设 $B=\{$至多有一台机床不需要照看$\}$，则

$$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\ \overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\ \overline{A}_2A_3)$$
$$=0.003+0.9\times0.2\times0.15+0.1\times0.8\times0.15+0.1\times0.2\times0.85$$
$$=0.059.$$

1.90　设每人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%. 令事件 A_i ={第 i 人的血清中含有肝炎病毒}, i=1, 2, …, 100, 那么 100 人的血清混合后的血清中含有肝炎病毒的概率是否为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{100})=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{100})$$
$$=0.004\times100=0.4?$$

答　不对. 因为A_1, A_2, …, A_{100}相互独立, 故正确应为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}})$$
$$=1-P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\cdots\overline{A}_{100})$$
$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{100})$$
$$=1-(1-0.004)^{100}=1-0.996^{100}\approx0.33.$$

1.91　设随机试验中, 某一事件 A 出现的概率为$\varepsilon>0$. 试证明: 不论$\varepsilon>0$ 如何小, 只要不断地独立地重复做此试验, 则 A 迟早会出现的概率为 1.

证　设A_k = {A 于第 k 次试验中出现}, 则有

$$P(A_k)=\varepsilon,\ P(\overline{A}_k)=1-\varepsilon\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

则在前 n 次试验中 A 都不出现的概率为

$$P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=(1-\varepsilon)^n.$$

于是, 在前 n 次试验中, A 至少出现一次的概率为

$$P_n(A)=1-P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-(1-\varepsilon)^n.$$

如果我们把试验一次接一次地做下去, 即让 $n\to\infty$, 由于 $0<\varepsilon<1$, 则当 $n\to\infty$时, 有 $P_n(A)\to1$, 此即说明小概率事件 A 迟早会出现的概率是 1.

概率论中的这一结论, 具有非常重要的实际意义. 它告诉人们在实际工作中, 不能忽视小概率事件. 一件看来可能性很小的事

情，在大量重复之下，可能性就会很大. 例如，在油库内乱丢烟头，就一次而言，引起火灾的机会不大，但如很多人这么做，必然将引发不可避免的火灾. 这一结论，从理论上说明了加强防范有危害的小概率事件的重要性与必要性.

1.92　有两个裁判组，其中一组由 3 个人组成，内两人独立地以概率 p 作出正确的裁定，而第三个人以掷硬币决定，最后结果根据多数人意见决定；另一组由 1 个人组成，他以概率 p 作出正确裁定. 现问这两个裁判组哪一组作出正确裁定的概率大？

解　把 3 人这个组的正确裁定概率算出来，再与 p 比较一下即可. 为此，应该先搞清楚"最后结果根据多数人意见决定"的意思.

因为第一裁判组有 3 人，每人都可以作出正确或错误的裁定. 现以 A，B，C 分别表示此 3 个人，同时又表示"此 3 个人做出正确裁定"的事件，于是，依题意有

$$P(A)=P(B)=p,\quad P(C)=1/2$$

因为每个人都有正确与错误两种裁决，故 3 人共有 $2^3=8$ 种方式如下：

方式	ABC	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$A\overline{B}\overline{C}$
组判定的真伪	正确	正确	正确	错误

方式	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
组判定的真伪	正确	错误	错误	错误

故导致 3 人裁判组正确裁定的事件为

$$R=ABC\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$$

由于事件 A，B，C 相互独立，故由加法定理得

$$\begin{aligned}P(R)&=P(ABC\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)\\&=P(ABC)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P(A)P(B)P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C}) \\
&\quad +P(A)P(\overline{B})(C)+P(\overline{A})P(B)P(C) \\
&= \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p(1-p)+\frac{1}{2}p(1-p) \\
&= p.
\end{aligned}
$$

这样，两个裁判组正确裁定的概率一样大.

1.93 现有 4 台机器，如果在一个小时内这些机器发生故障的概率第一台为 0.21，第二台 0.21，第三台是 0.20，第四台是 0.19. 假设各台机器是否发生故障相互之间没有影响.

（1）设一工人同时照看此四台机器，试求在一个小时内，这四台机器都不发生故障（记为事件 A）的概率；

（2）设一台机器发生故障需要且只需要一人修理，试求机器发生故障需要等待修理（记为事件 B）的概率；

（3）设一台机器发生故障需要且只需要一人修理，试问至少需配备多少工人，才能保证当机器发生故障时等待修理的概率小于 0.1?

解 设 A_i={第 i 台机器发生故障} i=1，2，3，4，由题意知，

$P(A_1)=0.21$，$P(A_2)=0.21$，$P(A_3)=0.20$，$P(A_4)=0.19$.

（1）$\overline{A}_i$ = {第 i 台机器不发生故障}，故 $P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=1-0.21=0.79$，$P(\overline{A}_3)=1-0.20=0.80$，$P(\overline{A}_4)=1-0.19=0.81$. 在一小时内都不发生故障的事件 $A=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$，由题意 A_1、A_2、A_3、A_4 相互独立，其对立事件 $\overline{A}_1$，$\overline{A}_2$，$\overline{A}_3$，$\overline{A}_4$ 亦相互独立的. 于是由
独立性的充要条件有

$$
\begin{aligned}
P(A)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) \\
&=0.79\times0.79\times0.80\times0.81=0.404\,4.
\end{aligned}
$$

（2）因为 $\overline{B}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4$

$=\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$，

所以 $P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$

$$
\begin{aligned}
&+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)\\
&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)\\
&\quad+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)\\
&\quad+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)\\
&\quad+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)\\
&=0.404\,4+2\times0.21\times0.79\times0.80\times0.81+0.79\times0.79\times0.20\\
&\quad\times0.81+0.79\times0.79\times0.80\times0.19\\
&=0.815\,4.
\end{aligned}
$$

故所求概率$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.815\,4=0.184\,6.$

另解　因为$B=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_1A_4\cup A_2A_3\cup A_2A_4\cup A_3A_4$

但因上述合事件 B 中诸事件互不相容，利用广义加法定理求出$P(B)$很麻烦，故考虑B的另一表达式：

$$
\begin{aligned}
B=&A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup A_1\overline{A}_2A_2\overline{A}_4\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\cup\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\\
&\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\\
&\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1A_2A_3A_4
\end{aligned}
$$

上述合事件B并中的 11 个事件是互不相容的，所以由加法定理与事件的独立性，可知

$$
\begin{aligned}
P(B)=&P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)\\
&+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)\\
&+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)\\
&+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)\\
&+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\
&+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\
=&0.21\times0.21\times0.80\times0.81+0.21\times0.79\times0.20\times0.81\\
&+0.21\times0.79\times0.80\times0.19+0.79\times0.21\times0.20\times0.81\\
&+0.79\times0.21\times0.80\times0.19+0.79\times0.79\times0.20\times0.19\\
&+0.21\times0.21\times0.20\times0.81+0.21\times0.21\times0.80\times0.19\\
&+0.21\times0.79\times0.20\times0.19+0.79\times0.21\times0.20\times0.10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+0.21\times0.21\times0.20\times0.19\\
&=0.028\ 58+0.026\ 88+0.025\ 22+0.026\ 88+0.025\ 22\\
&\quad+0.023\ 72+0.007\ 14+0.006\ 70+0.006\ 30\\
&\quad+0.006\ 30+0.001\ 68\\
&=0.184\ 6,
\end{aligned}
$$

所以 $P(B)=0.184\ 6$.

（3）设需配备 N 个工人. 显然对本题来讲，应有 $N\leqslant4$.

令 $\qquad B_N=\{$配备 N 个工人时机器等待修理$\}$.

若 $N=4$，即无需等待，故 $P(B_4)=0$；若 $N=1$，由(2)知 $P(B_1)=0.184\ 6$. 当 $N=2$ 时，则有

$$
\begin{aligned}
B_2=&A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4\\
&\cup A_1A_2A_3A_4,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
P(B_2)=&P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)\\
&+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\
&+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\
=&0.21\times0.21\times0.20\times0.81+0.21\times0.21\times0.80\times0.19\\
&+0.21\times0.79\times0.20\times0.19+0.79\times0.21\times0.20\times0.19\\
&+0.21\times0.21\times0.20\times0.19\\
=&0.007\ 14+0.006\ 70+0.006\ 3+0.006\ 3+0.001\ 68\\
=&0.028\ 12.
\end{aligned}
$$

因为 $P(B_2)=0.028\ 12<0.1$，而 $P(B_1)=0.184\ 6>0.1$，故配备 2 个工人管理此 4 台机器，就可使等待维修的概率小于 10%. 于是无需计算 $N=3$ 的等待修理的概率（事实上 $P(B_3)=P(A_1A_2A_3A_4)=0.001\ 68$）.

1.94 通常称元件能正常工作的概率为元件的可靠性，称由元件组成的系统能正常工作的概率为系统的可靠性. 假定构成系统的每个元件的可靠性均为 p（$0<p<1$），且各元件能否正常工作是彼此独立的，试求下列三个系统的可靠性，并比较其大小.

（1）系统Ⅰ：串联系统如图 1.2 所示；

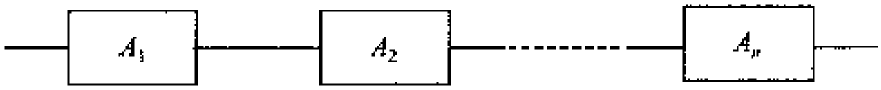

图 1.2

（2）系统Ⅱ：串并联系统如图 1.3 所示；

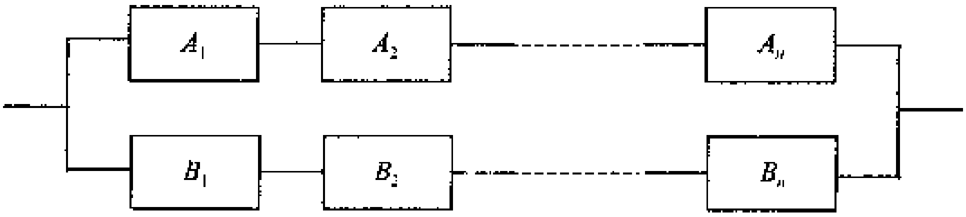

图 1.3

（3）系统Ⅲ：并串联系统如图 1.4 所示；

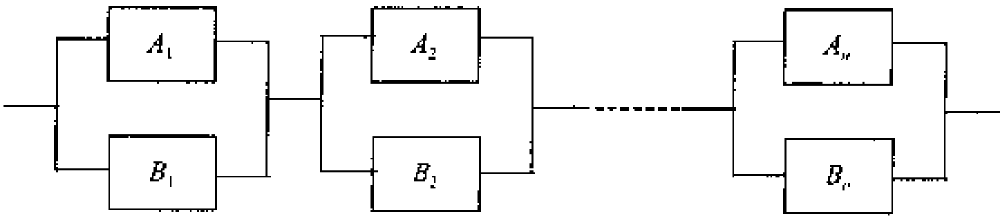

图 1.4

解 设 $A_i=\{$第一组第 i 个元件及第 i 个元件正常工作$\}$，

$B_i=\{$第二组第 i 个元件及第 i 个元件正常工作$\}$，

$i=1，2，\cdots，n$，则 $P(A_i)=P(B_i)=p$.

（1）P(系统Ⅰ正常工作) $=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

$$=p^n.$$

（2）P(系统Ⅱ正常工作)

$$\begin{aligned}&=P(A_1A_2\cdots A_n\cup B_1B_2\cdots B_n)\\&=P(A_1A_2\cdots A_n)+P(B_1B_2\cdots B_n)\\&\quad-P(A_1A_2\cdots A_nB_1B_2\cdots B_n)\\&=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)+P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)\\&\quad-P(A_1)P(A_2)\cdots+P(A_n)P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)\\&=p^n+p^n-p^{2n}=p^n(2-p^n).\end{aligned}$$

（3）P(系统Ⅲ正常工作) $= P((A_1 \cup B_1)(A_2 \cup B_2)\cdots(A_n \cup B_n))$

$$= P(A_1 \cup B_1)P(A_1 \cup B_2)\cdots P(A_n \cup B_n)$$
$$= [P(A_1 \cup B_1)]^n$$
$$= [P(A_1) + P(B_1) - P(A_1B_1)]^n$$
$$= (2p - p^2)^n = p^n(2-p)^n.$$

因为 $0 < p < 1$，故 $0 < p^n < 1$，故 $2 - p^n > 1$，所以 $p^n(2 - P^n) > p^n$，故 P（系统Ⅱ正常工作）$> P$（系统Ⅰ正常工作）;

又因为 $2 - p > 1$，故$(2-p)^n > 1$，所以 $p^n(2 - P^n) > p^n$，从而有 P（系统Ⅲ正常工作）$> P$（系统Ⅰ正常工作）.

因为 $(2-p)^2 = 4 - 4p + p^2 = 2 - p^2 + (2 - 4p + 2p^2)$

$$= 2 - p^2 + 2(1-p)^2 > 2 - p^2,$$

若假定$(2-p)^k > 2 - p^k$成立，则有

$$(2-p)^{k+1} = (2-p)^k(2-p) > (2-p^k)(2-p)$$
$$= 4 - 2p^k - 2p + p^{k+1}$$
$$= 2 - p^{k+1} + 2p^{k+1} - 2p^k + 2 - 2p$$
$$= 2 - p^{k+1} + 2p^k(p-1) + 2(1-p)$$
$$= 2 - p^{k+1} + 2(1-p)(1-p^k) > 2 - p^{k+1},$$

由此依照数学归纳法可知，对于任意自然数 n，永远成立

$$(2-p)^n > 2 - p^n.$$

从而有 $p^n(2-p)^n > p^n(-p)^n$，此即表明

P(系统Ⅲ正常工作) $> P$(系统Ⅱ正常工作) $> P$(系统Ⅰ正常工作).

这说明了改变元件的连接方式，可以提高系统的可靠性.

1.95　已知三个事件 A、B、C 有相同的概率 p，且两两独立但三个事件不能同时发生. 试确定 p 的最大可能值.

解　已知 $P(A) = P(B) = P(C) = p$，$P(ABC) = 0$，且 A、B、C 两两独立，

故有　$P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = P(\overline{C}) = 1 - p$，$P(AB) = P(A)P(B) = p^2$，$P(AC) = p^2$，$P(BC) = p^2$.

设 $P(A\cup B\cup C)=k$，则有

$$k=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=3p-3p^2.$$

解出 p 的方程，得

$$p=\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4k}{3}}\right)\Big/2$$

如果 $p=\left(1-\sqrt{1-\frac{4k}{3}}\right)\Big/2$，则当 $k=\frac{3}{4}$ 时，p 达到最大值 $\frac{1}{2}$；

如果 $p=\left(1+\sqrt{1-\frac{4k}{3}}\right)\Big/2$，则有 $p\geqslant\frac{1}{2}$，但是，在 $1-\frac{4k}{3}>0$ 条件下，

$k<\frac{3}{4}$，$p>\frac{1}{2}$，将导致矛盾. 实际上，由 $P(A\overline{B})=P(A\overline{B}C\cup A\overline{B}\,\overline{C})$

$=P(A\overline{B}C)+P(A\overline{B}\,\overline{C})$

故 $\quad P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A\overline{B})-P(A\overline{B}C)$

而 $\quad P(A\overline{B}C)=P(AC)-P(ABC)=P(A)P(C)=p^2$

故 $\quad P(A\overline{B}\,\overline{C})=p(1-p)-p^2=p-2p^2$

因为 $0<p-2p^2<1$　故 $p(1-2p)>0$，得 $1-2p>0$

即 $p<\frac{1}{2}$，所以 $p>\frac{1}{2}$ 将引起矛盾. 因此 p 的最大可能取值为 $\frac{1}{2}$.

另解　我们先求出组成完全事件组的下列事件的概率

$A\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$AB\overline{C}$，$A\overline{B}C$，$\overline{A}BC$，$ABC$，$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

因为 $\quad AB=ABC\cup AB\overline{C}$，

故 $\quad P(AB)=P(ABC)+P(AB\overline{C})=P(AB\overline{C})$.

即 $\quad P(AB\overline{C})=P(A)P(B)=p^2$,

类似可得 $\quad P(A\overline{B}C)=P(\overline{A}BC)=p^2$.

又由 $\qquad A\overline{B} = A\overline{B}C \cup A\overline{B}\overline{C}$,

得 $\qquad P(A\overline{B}) = P(A\overline{B}C) + P(A\overline{B}\overline{C}) = p^2 + P(A\overline{B}\overline{C})$,

即 $\qquad P(A\overline{B}\overline{C}) = P(A)P(\overline{B}) - p^2 = p(1-p) - p^2 = p - 2p^2$.

类似可得 $\quad P(\overline{A}B\overline{C}) = P(\overline{A}\overline{B}C) = p - 2p^2$.

又 $\qquad P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - [3p^2 + 3(p-2p^2)] = 3p^2 - 3p + 1$

因为任何事件的概率均在[0，1]内取值，所以上述各概率均应满足此条件，于是有：

$$\begin{cases} 0 \leqslant p^2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant p - 2p^2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 3p^2 - 3p + 1 \leqslant 1 \end{cases} \tag{*}$$

解此不等式组，可得：

$$\begin{cases} 0 \leqslant p < 1 \\ 0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 \leqslant p \leqslant 1 \end{cases}$$

因此，满足不等式组（*）的 p 的最大可能为 1/2.

1.96 甲，乙比赛射击，每进行一次，胜者得一分. 在一次射击中，甲“胜”的概率为 α，乙胜的概率为 β（$\alpha+\beta=1$）. 独立地进行射击到有一人超过对方两分就停止（例如在乒乓球比赛中，双方比分为 20：20 时，开始交替发球，直到有一方超过对方两分为止），多得两分者为胜. 试求甲、乙获胜的概率（设每一次射击均可分出胜负）.

解 由题意知，在一次比赛中，甲，乙二人有且仅有一人得一分. 又因要求射击进行到有一人超过对方 2 分时停止，故需进行偶数次方能分出胜负.

设 A_n = {甲在第 n（n 为偶数）次获胜}，则 A_n 发生，表示甲在前第 $n-1$ 次，与第 n 次各得一分. 而在前 $n-2$ 次中，甲，乙

得分相等，且在比赛过程中没有一方的积分数超过对方 2 分及 2 分以上.

现用“1”表示得一分，用“0”表示未得分，则有

A_2：11，故 $P(A_2)=\alpha^2$

A_4：1011 或 0111，故 $P(A_4)=\alpha^3\beta+\alpha^3\beta=2\alpha^3\beta$

……

一般地 $P(A_{2m})=(2\beta)^{m-1}\alpha^{m+1}=\alpha^2(2\alpha\beta)^{m-1}$ $m=1,2,\cdots$

由于 A_{2m}，$m=1,2,\cdots$，互不相容，故所求概率为

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{2m}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_{2m})=\alpha^2\sum_{m=1}^{\infty}(2\alpha\beta)^{m-1}$$

$$=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}.$$

同理可得乙胜的概率为 $\beta^2/2\alpha\beta$

另解 设以二次比赛为一轮，$A_i=\{$在一轮比赛中甲得 i 分$\}$，$i=0,1,2,$

$$B=\{\text{甲获胜}\}.$$

又因为若甲在一轮比赛中得一分，则与下轮比赛中是否获胜无任何关系，即

$$P(B|A_1)=P(B),$$

因此 $P(A_0)=\beta^2,$

$$P(A_1)=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta,$$

$$P(A_2)=\alpha^2,$$

由全概率公式得：

$$P(B)=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$

$$=0+P(B)\cdot 2\alpha\beta+\alpha^2\cdot 1$$

所以 $P(B)=\dfrac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta},$

同理可得 $P(\overline{B})=\beta^2/1-2\alpha\beta.$

1.97　进行四次独立试验，在每一次试验中 A 出现的概率为 0.3. 如果 A 不出现，则 B 也不出现. 如果 A 出现一次，则 B 出现的概率为 0.6. 如果 A 出现不少于二次，则 B 出现的概率为 1. 试求 B 出现的概率.

解　设 $H_i=\{$在四次独立试验中 A 出现 i 次$\}$　$i=0, 1, 2, 3, 4$

则有：

$$P(H_0)=0.7^4=0.240\,1,$$

$$P(H_1)=C_4^1\times 0.3\times 0.7^3=0.411\,6,$$

$$P(H_2\cup H_3\cup H_4)=1-P(H_0)-P(H_1)$$

$$=1-0.240\,1-0.411\,6=0.348\,3,$$

而

$$P(B|H_0)=0,\ P(B|H_1)=0.6,$$

$$P(B|H_2\cup H_3\cup H_4)=1.$$

故由全概率公式得

$$P(B)=P(H_0)P(B|H_0)+P(H_1)P(B|H_1)+P(H_2\cup H_3\cup UH_4)$$

$$\cdot P(B|H_2\cup H_3\cup H_4)$$

$$=0+0.411\,6\times 0.6+0.348\,3$$

$$=0.595\,26.$$

1.98　两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率为 0.03，第二台出现废品的概率为 0.02. 加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的零件是合格的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 台车床出现废品$\}$，$i=1, 2$，

由题设条件知

$$P(A_1)=2/3,\ P(A_2)=1/3.$$

又设 $B=\{$取出的零件为合格的$\}$，则由全概率公式知，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2),$$

且其中

$$P(B|A_1)=1-0.03=0.97,$$

$$P(B|A_2)=1-0.02=0.98,$$

故得

$$P(B)=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98=0.973.$$

1.99　按以往概率考试结果分析，努力学习的学生有 90% 的可能考试及格，不努力学习的学生有 90% 的可能考试不及格. 据调查学生中有 90% 的人是努力学习的，试问：

（1）考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人?

（2）考试不及格的学生有多大可能是努力学习的人?

解　设 A = {被调查学生是努力学习的}，则 $\overline{A}$ = {被调查学生是不努力学习的}，由题设条件知：

$$P(A)=0.90,\ P(\overline{A})=0.10.$$

又设 B = {被调查学生考试及格}，则 $\overline{B}$ = {被调查学生考试不及格}，且由题设条件知：

$$P(B|A)=0.90,\ P((\overline{B}\mid\overline{A}))=0.90.$$

故由逆概公式知

$$（1）P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$

$$=\frac{0.10\times(1-0.90)}{0.90\times0.90+0.10\times(1-0.90)}$$

$$=\frac{0.01}{0.82}=0.012\,2,$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 1.22%.

$$（2）P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B}\mid A)}{P(A)P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}$$

$$=\frac{0.90\times(1-0.90)}{0.90\times(1-0.90)+0.10\times0.90}=0.50,$$

即考试不及格的学生中努力学习的学生占到 50%.

1.100　已知男人中有 5% 是色盲患者，女人中有 0.25% 是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，试问此人是男性的概率是多少?

解　设 A = {选出者为男性}，B = {选出者为色盲}，则由题设条件知：

$$P(A)=P(\overline{A})=0.5,\ P(B|A)=0.05,\ P(B|\overline{A})=0.002\,5,$$

由逆概公式可得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$

$$=\frac{0.5\times0.05}{0.5\times0.05+0.5\times0.002\,5}=0.952\,4.$$

1.101 在已有两个球的箱子中再放一白球，然后任意取出一球，若发现这球为白球，试求箱中原有一白球的概率（箱中原有什么球是等可能的）.

解 设 $A_i=\{$箱中原有 i 个白球$\}$，$i=0,1,2$

由题设条件知 $P(A_i)=1/3$，$i=0,1,2$

又设 $B=\{$抽出一球为白球$\}$，则由题设条件可知

$$P(B|A_0)=1/3,\ P(B|A_1)=2/3,\ P(B|A_2)=3/3=1,$$

故由逆概公式可得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times1}=\frac{1}{3}.$$

1.102 设 8 支枪中已有 5 支经试射校正，有 3 支未试射校正，一射手用校正过的枪射击时，中靶概率为 0.8，而用未试射校正的枪射击，中靶的概率为 0.3. 今从 8 支枪中任选一支进行射击，结果中靶，求所用的枪是已校正过的概率.

解 设 $A=\{$选出的枪是经试射校正过的$\}$，$B=\{$射击中靶$\}$，则由题设条件知：

$$P(A)=5/8,\ P(\overline{A})=3/8,\ P(B|A)=0.8,\ P(B|\overline{A})=0.3,$$

故由逆概公式知所求概率为

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}\times 0.8}{\frac{5}{8}\times 0.8+\frac{3}{8}\times 0.3}$$

$$=0.816\,33.$$

1.103 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出来，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01. 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2 : 1. 若接收站收到的信息是 A，试问原发信息是 A 的概率是多少？

解 由题设条件知

P(收 B |发 A) = 0.02，P(收 A|发 B) = 0.01，P(发 A) = 2/3，P(发 B) = 1/3

故由逆概公式知所求概率为

$$P(\text{发}A|\text{收}A)=\frac{P(\text{发}A)P(\text{收}A\mid\text{发}A)}{P(\text{收}A)}$$

$$=\frac{P(\text{发}A)P(\text{收}A\mid\text{发}A)}{P(\text{发}A)P(\text{收}A\mid\text{发}A)+P(\text{发}B)P(\text{收}A\mid\text{发}B)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times(1-0.02)}{\frac{2}{3}\times(1-0.02)+\frac{1}{3}\times 0.01}$$

$$=0.994\,92.$$

1.104 某人下午 5:00 下班. 他所积累的资料表明：

到家时间	5:35 ~ 5:39	5:40 ~ 5:44	5:45 ~ 5:49	5:50 ~ 5:54	迟于 5:54
乘地铁到家的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车到家的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 分

到家的，试求他是乘地铁回家的概率.

解 设 A = {此人乘地铁回家}，则 $\overline{A}$ = {此人乘汽车回家}，由题设条件知：

$$P(A)=P(\overline{A})=0.5$$

又设 B = {此人在 5:45 ~ 5:49 时回家}，则由题设条件知

$$P(B|A)=0.45,\ P(B|\overline{A})=0.20.$$

故由逆概公式知所求概率为

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}\\&=\frac{0.5\times0.45}{0.5\times0.45+0.5\times0.20}\\&=0.692\ 31.\end{aligned}$$

1.105 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中有 10 只是一等品，第二箱装 30 只，其中 18 只一等品. 今从两箱中任选一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样. 试求：

（1）第一次取到的零件是一等品的概率；

（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率.

解 设 A_i = {第 i 次取到一等品}，$i=1,\ 2$，

B_i = {选到第 i 箱}，$i=1,\ 2$，

则由题设条件知：

$$P(B_i)=1/2,\ i=1,\ 2.$$

（1）$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10\times49}{50\times49}+\frac{1}{2}\times\frac{18\times29}{30\times29}\\&=0.4.\end{aligned}$$

（2）$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10\times 9}{50\times 49}+\frac{1}{2}\times\frac{18\times 17}{30\times 29}}{0.4}$$

$$=0.485\ 57.$$

1.106 袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽），在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽．试问这只硬币是正品的概率是多少？

解 设 $A=\{$投掷这只硬币 r 次都出现正面$\}$，

$B=\{$这只硬币为正品$\}$，

则由题设条件知 $P(B)=\dfrac{m}{m+n}$，$P(\overline{B})=\dfrac{n}{m+n}$，

且 $P(A|B)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^r=\dfrac{1}{2^r}$，$P(A|\overline{B})=1$．

故由逆概公式知所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^r}}{\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}\times 1}$$

$$=\frac{m}{m+2^r n}.$$

1.107 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有 3 种：损坏 2%（这一事件记为 A_1），损坏 10%（事件 A_2），损坏 90%（事件 A_3）．且知 $P(A_1)=0.8$、$P(A_2)=0.15$、$P(A_3)=0.05$．现在从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B）．试求 $P(A_1|B)$、$P(A_2|B)$、$P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）．

解 根据题意，这里物品件数很多，随机取一件检查可视为有放回抽样，这样

$$P(B|A_1)=(1-0.02)^3,\ P(B|A_2)=(1-0.10)^3,$$

$$P(B|A_3)=(1-0.90)^3,$$

故由逆概公式知

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{3}P(A_j)P(B\mid A_j)},\ i=1,\ 2,\ 3,$$

而 $P(B)=\sum_{j=1}^{3}P(A_j)P(B\mid A_j)$

$$=0.8\times0.98^3+0.15\times0.90^3+0.05\times0.10^3$$

$$=0.862\ 35$$

故 $P(A_1|B)=\dfrac{0.8\times0.98^3}{0.862\ 35}=0.873\ 14,$

$$P(A_2|B)=\frac{0.15\times0.90^3}{0.862\ 35}=0.126\ 80,$$

$$P(A_3|B)=\frac{0.05\times0.10^3}{0.862\ 35}=0.000\ 06.$$

1.108 将 A，B，C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出为其它字母的概率都是$(1-\alpha)/2$. 今将字母串 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 之一输入信道，输入 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 的概率分别为p_1，p_2，p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出为 $ABCA$，问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少（设信道传输每个字母的工作是相互独立的）？

解 根据题意，所求概率为

$$P(AAAA|ABCA)$$

$$=\frac{P(AAAA)P(ABCA|AAAA)}{P(AAAA)P(ABCA|AAAA)+P(BBBB)P(ABCA|BBBB)+P(CCCC)P(ABCA|CCCC)}$$

$$= \frac{p_1\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2}{p_1\cdot\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2+p_2\cdot\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3+p_3\quad\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{2p_1\alpha}{2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)}$$

$$= \frac{2p_1\alpha}{(3\alpha-1)p_1+1-\alpha}.$$

1.109 某射手射击中靶的概率为 0.9，那么他射击 10 次恰中 9 次的概率是否为 100%?

答 否. 因为由二项概率公式知该射手射击 10 次恰中 9 次的概率为

$$P_{10}(9)=C_{10}^{9}0.9^9\times0.1=0.387\ 42.$$

1.110 设某种型号的电阻次品率为 0.02，现从产品中任取 6 只，分别求出没有次品，恰有一个次品，恰有两个次品，恰有 3 个次品及全是次品的概率.

解 由二项概率公式，可得所求概率为

$P(\text{没有次品})=(1-0.02)^6=0.885\ 84,$

$P(\text{恰有一次品})=C_6^1 0.02\cdot(1-0.02)^5=0.108\ 47,$

$P(\text{恰有二次品})=C_6^2 0.02^2\cdot(1-0.02)^4=0.005\ 53,$

$P(\text{恰有三次品})=C_6^3 0.02^3\cdot(1-0.02)^3=0.000\ 15,$

$P(\text{全是次品})=0.02^6=0.$

1.111 某类电灯泡使用时数在 1 000 小时以上的概率为 0.3，试求五个灯泡在使用 1 000 小时以后最多有两个坏的概率.

解 这是贝努利概型，$n=5$、$p=0.3$，由二项概率公式得

$P(\text{5 只灯泡在使用 1 000 小时后最多有两个坏的})$

$$=\sum_{k=0}^{2}p_5(k)=p_5(0)+p_5(1)+p_5(2)$$

$=0.3^5+C_5^1\times0.7\times0.3^4+C_5^2\times0.7^2\times0.3^3$

$=0.163\ 08.$

1.112 一张英语试卷，有10道选择填空题，每题有4个选择答案，且其中只有一个是正确答案，某同学投机取巧，随意填空，试问他至少填对6道的概率是多大?

解 这是贝努利概型，随意填对的概率为1/4，即此处 $n=10$，$p=1/4$，所求概率为

$$
\begin{aligned}
P(10\text{题中至少填对 }6\text{ 题}) &= \sum_{k=6}^{10}P_{10}(k)\\
&=\sum_{k=6}^{10}C_{10}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}\\
&=C_{10}^{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}+C_{10}^{7}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\\
&\quad+C_{10}^{8}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\\
&\quad+C_{10}^{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\\
&=0.016\ 22+0.003\ 09+0.000\ 389+0.000\ 03+0\\
&=0.019\ 73.
\end{aligned}
$$

1.113 甲、乙两位篮球运动员投篮命中率分别为 0.7、0.6，每人投篮三次，试求：

(1) 两人进球数目相等的概率;

(2) 甲比乙投中次数多的概率.

解 甲、乙投篮命中试验都属贝努利概型，且两人投篮相互独立.

设 A_k={甲投篮命中 k 个}，$k=0，1，2，3$，

B_k={乙投篮命中 k 个}，$k=0，1，2，3$.

(1) $\mathrm{P}(\text{两人进球数相等})=\sum_{k=0}^{3}P(A_iB_i)$

$$= \sum_{k=0}^{3} P(A_k)P(B_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{3} C_3^k \times 0.7^k 0.3^{3-k} \cdot C_3^k \times 0.6^k 0.4^{3-k}$$

$$= 0.027 \times 0.064 + 0.189 \times 0.288$$

$$+ 0.441 \times 0.432 + 0.343 \times 0.216$$

$$= 0.320\ 76.$$

（2）$P(\text{甲比乙投中次数多}) = P(A_1B_0) + P(A_2 \cap (B_0 \cup B_1)$

$$+ P(A_3 \cap (B_0 \cup B_1 \cup B_2))$$

$$= 0.189 \times 0.064 + 0.441 \times (0.064 + 0.288)$$

$$+ 0.343 \times (1 - 0.216)$$

$$= 0.436\ 24.$$

1.114　有甲、乙两种味道和颜色都极为近似的名酒各 4 杯. 如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是成功一次.

（1）某人随机地去猜，试问他成功一次的概率是多少？

（2）某人声称他通过品尝能区分两种酒. 他连续试验 10 次，成功 3 次，试推断他是猜对的，还是确有区分能力（设各次试验是相互独立的）.

解　（1）$P(\text{成功一次}) = \dfrac{C_4^4}{C_8^4} = \dfrac{1}{70} = 0.014\ 29.$

（2）若此人无区分能力，则随机连续试验 10 次，其中恰有 3 次获成功的概率为：

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{70}\right)^3 \left(\frac{69}{70}\right)^7 = 0.000\ 32.$$

且此人若无区分能力时，连续试验 10 次中至少猜对 3 次以上的概率为：

$$\sum_{k=3}^{10} P_{10}(k) = \sum_{k=3}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{70}\right)^k \left(\frac{69}{70}\right)^{10-k} = 0.000\ 33.$$

可见若此人无区分能力，则在 10 次试验中恰猜中 3 次的概率仅为万分之三点二，至少猜对 3 次以上的概率也仅为万分之三点三，这概率如此之小，说明此随机事件几乎不可能发生，所以应认为此人确有区分能力.

1.115　进行一系列独立试验，每次成功的概率为 p，下面三个概率是否相同：

（1）第 k 次才成功的概率；

（2）n 次试验中恰有 k 次成功的概率；

（3）在第 n 次成功前已有 $k-1$ 次成功的概率；

解　设 A_i={第 i 次试验成功}，$i=1$、2，…，n，

则依题意　$P(A_i)=p$，　　$i=1$，2，…，n.

$$（1）P(\text{第 }k\text{ 次才成功})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)$$
$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{n-1})P(A_k)$$
$$=(1-p)(1-p)\cdots(1-p)p$$
$$=(1-p)^{k-1}p.$$

$$（2）P(n\text{ 次试验中恰有 }k\text{ 次成功})=P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

（3）P(第 n 次成功前已有 $k-1$ 次成功）

$=P$(第 n 次成功，前 $n-1$ 次试验中恰有 $k-1$ 次成功）

$$=\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}p$$
$$=\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}.$$

显然，三者概率是不相同的.

1.116　巴拿赫火柴盒问题：某数学家有甲，乙两盒火柴，每盒有 N 根火柴，每次用火柴时他在两盒中任取一盒并从中任取一根. 试求他首次发现一盒空时另一盒恰有 r 根的概率是多少（$r=0$，1，2，…，N）？第一次用完一盒火柴时（不是发现空）而另一盒恰有 r 根的概率又是多少？

解　设选取甲盒火柴为“成功”，选取乙盒火柴为“失败”，于是相继选取甲盒“成功”与“失败”的概率均为 1/2，且为独立试验序列.

（1）当在某一时刻首次发现甲盒中无火柴，而乙盒中恰剩 r 根的事件相当于恰有 $N-r$ 次失败发生在第 $N+1$ 次成功之前，类似 1.114 题(3)知，其概率为

$$C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-r}.$$

由对称性，首次发现乙盒中无火柴而甲盒中恰剩 r 根的事件的概率亦为

$$C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-r}.$$

故所求概率为

$$P_1=2C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1-r}=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r}.$$

（2）同理，在第一次用完一盒火柴（不是发现空）而另一盒恰有 r 根的事件的概率为

$$P_2=C_{2N-r-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r-1}.$$

事实上，第一次用完一盒火柴（不是发现空）而另一盒恰有 r 根相当于 $N-r$ 次失败发生在第 N 次成功之前，且第 $2N-r$ 次试验是成功.

1.117　某种疾病在牲畜中传染的概率为 0.25. 设对 20 头牲畜注射某种血清后，其中仍有一头受到感染，试问这种血清是否有效?

解　若这种血清无效，则因每头牲畜注射血清后都有受到感染和未受感染两种结果，且牲畜间是相互独立的，故此试验相当于 20 重贝努利试验，$n=20$，$p=0.25$，故知 20 牲畜中出现至多一头受感染的概率为

$$P_{20}(0)+P_{20}(1)=0.75^{20}+C_{20}^{1}\times0.25\times0.75^{19}=0.024\ 31.$$

因为这个概率很小，一般在一次试验中不易发生，故根据小概率推断原理，知此种血清是有效的.

1.118　设某自动化机器发生故障的概率为 1/5. 如果一台机器发生了故障只需要一个维修工人去处理，因此，每 8 台机器配备一个维修工人. 试求：

（1）维修工人无故障可修的概率；

（2）工人正在维修一台出故障的机器时，另外又有机器出故障待修的概率. 如果认为每四台机器配备一个维修工人，还经常出了故障得不到及时维修. 那么，四台机器至少应配备多少维修工人才能保证机器发生了故障待修的概率小于 3%.

解　（1）因为每台机器发生故障是相互独立的，故维修工人无故障可修的事件，即为 8 台机器均不发生故障的事件，故所求概率为

$$P_1=\left(1-\frac{1}{5}\right)^8=\left(\frac{4}{5}\right)^8\approx 0.167\,77.$$

（2）因为工人正在维修一台出故障的机器时，另外又有机器出了故障待修的事件的逆事件为 8 台机器中至多有一台发生故障，故所求机器待修的概率为

$$P_2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^8-\mathrm{C}_8^1\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^7\approx 0.496\,68.$$

又按四台机器配备维修工人时，若配备一个工人，则当机器发生故障，又不能及时维修（发生故障的机器多于 1 台）的概率为

$$P_3=1-\left(\frac{4}{5}\right)^4-\mathrm{C}_4^1\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\approx 0.180\,8>3\%.$$

若四台机器配备 2 人时，则当机器发生故障又不能及时维修的概率为

$$P_4=1-\left(\frac{4}{5}\right)^4-\mathrm{C}_4^1\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^3-\mathrm{C}_4^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$\approx 0.027\,2 < 3\%$.

故四台机器至少应配备 2 个维修工人才能保证机器发生了故障待修的概率小于 3%.

1.119 昆虫繁殖问题：设昆虫产 k 个卵的概率 $p_k = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0, 1, 2\cdots$，又设一个虫卵能孵化成昆虫的概率等于 p. 若卵的孵化是相互独立的，试问昆虫的下一代有 m 条的概率是多少?

解 设 $A_m = \{$昆虫的下一代有 m 条$\}$，$m=0, 1, 2, \cdots$

$B_k = \{$昆虫产 k 个卵$\}$，$k=0, 1, 2, \cdots$

依题意有
$$P(B_k) = p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \cdots$$

且
$$P(A|B_k) = C_k^m p^m (1-p)^{k-m}, \quad k=m, m+1, \cdots$$

故所求概率为

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=m}^{\infty} P(B_k)P(A|B_k) \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!} p^m (1-p)^{k-m} \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} p^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{k-m}}{(k-m)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)}}{m!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!}, \quad m=0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

第二章　随机变量及其分布

一、基本内容

1. 随机变量及其分布函数

（1）随机变量

如果对于随机试验的样本空间中的每一个样本点(基本事件)，都对应一个实数 $X=X(e)$，这样建立在样本空间 S 上的单值实函数 $X=X(e)$称为随机变量，它的值域为 $R_X\subset(-\infty,\ +\infty)$.

（2）分布函数

设 X 是一个随机变量，对于任意一个实数 $x\in\mathbf{R}$，函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$ 称为 X 的分布函数，它满足：

1° $F(x)$ 是一个不减函数；

2° $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

3° $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$是右连续的.

[注]　若定义 $F(x)=P(X<x)$，则此 $F(x)$ 是左连续的.

2. 离散型随机变量及分布

（1）离散型随机变量

若随机变量 X 的可能取值仅有有限或可列多个，则称此随机变量为离散型随机变量.

（2）概率分布

若离散型随机变量 X 取值为 x_k 的概率为

$$P(X=x_k)=p_k, \qquad k=1,2,\cdots$$

且满足条件

1° $p_k \geqslant 0$;

2° $\sum_{i=1}^{\infty} p_k = 1$,

则称 $P(X=x_k)=p_k$, $k=1,2,\cdots$ 为 X 的概率分布(或分布律).

概率分布亦可用下表表示:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_k	$\cdots$

亦可用图形表示, 以 X 为横轴, $p_k=P(X=x_k)$ 为纵轴:

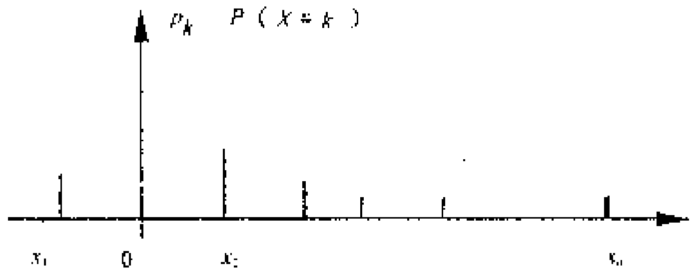

图 2.1 概率分布图

(3) 常见的离散型随机变量的概率分布及分布函数

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k .$$

1° (0 - 1) 分布 (两点分布)

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, \qquad k=0, 1, 0<p<1,$$

或

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称此 X 服从(0－1)分布，记为 $X\sim(0-1)$分布.

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-p, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

2° 等可能分布(离散型均匀分布)

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=x_k)=\frac{1}{n},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ x_1<x_2<\cdots<x_n,$$

则称 X 服从参数为 n 的等可能分布或离散型均匀分布，记为 $X\sim U(n)$.

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ \dfrac{k}{n}, & x_k\leqslant x<x_{k+1},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\\ 1, & x\geqslant x_n,\end{cases}$$

3° 二项分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记为 $X\sim B(n,\ p)$.

其分布函数为

$$F(x)=\sum_{k=0}^{[x]}\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中 $[x]$ 为 x 的最大整数部分，下同.

4° 超几何分布

如果随机变量 X 具有概率分布

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k=0, 1, 2, \cdots, n,$$

则称 X 服从参数为 N, M, $n\,(\leqslant M)$ 的超几何分布，记为 $X \sim S(N, m, n)$.

其分布函数为

$$F(x)=\sum_{k=0}^{[x]} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

5° 泊松(Poisson)分布

如果随机变量 X 具有概率分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \cdots$$

则称 X 服从参数为λ的泊松分布，记为 $X \sim \pi(\lambda)$.

其分布函数为

$$F(x)=\sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

3. 连续型随机变量及其分布

（1）连续型随机变量

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数 x 均有

$$F(x)=P(X \leqslant x)=\int_{\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量，其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.

（2）概率密度 $f(x)$ 的性质

1° $f(x) \geqslant 0$;

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$;

3° $P(x_1<X \leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \quad (x_1 \leqslant x_2)$;

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$.

（3）常见的连续型随机变量的分布

1° 均匀分布

如果随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 a，b 的均匀分布，记为 $X\sim U(a，b)$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b,\end{cases}$$

特别当 $a=0$，$b=1$ 时，$U(0，1)$称为标准均匀分布.

2° 指数分布

如果随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad (\alpha>0)$$

则称 X 服从参数为α的指数分布，记为 $X\sim Z(\alpha)$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

3° 正态分布

如果随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

则称 X 服从参数为μ，$\sigma^2(\sigma>0)$的正态分布，记为 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$.
特别当$\mu=0$，$\sigma^2=1$ 时，$N(0，1)$称为标准正态分布，其概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

其分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

因为$\varphi(x)$关于y轴对称，故有$\varphi(-x)=\varphi(x)$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

若$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

$$\begin{aligned}P(x_1<X\leqslant x_2)&=F(x_2)-F(x_1)\\&=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

4° Γ分布

如果随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\tilde{A}(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0(\alpha,\ \beta>0),\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则称X服从参数为α，β的Γ分布，记为$X\sim\Gamma(\alpha,\ \beta)$.

特别当$\alpha=1$时，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

即X服从参数为$\dfrac{1}{\beta}$的指数分布$Z\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$.

4. 随机变量X的函数$Y=g(X)$的分布

（1）离散型随机变量的函数的概率分布

情形1：若已知离散型随机变量X的概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k, \quad k=1,2,\cdots$$

对于所有的 k，$g(x_k)=y_k$ 全不相同时，$Y=g(X)$ 的概率分布为

$$P(Y=y_k)=P(X=x_k)=p_k, \quad k=1,2,\cdots$$

情形 2：若知某个 $i\neq j$，而有 $g(x_i)=g(x_j)=y_k$ 时，则由概率可加性知

$$P(Y=y_k)=P(X=x_i \text{或} X=x_j)$$
$$=P(X=x_i)+P(X=x_j)=p_i+p_j$$

一般地，$Y=g(X)$ 的概率分布为

$$P(Y=y_k)=\sum_{g(x_i)=y_k}P(X=x_i)=\sum_{g(x_i)=y_k}p_i \quad k=1,2,\cdots$$

（2）连续型随机变量的函数的概率密度

若已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，当 $a<x<b$ 时，$f_X(x)>0$，$y=g(x)$ 处处可导，且恒有 $g'(x)>0$（或 $g'(x)<0$），则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)|, & c<y<d, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $x=h(y)$ 为 $y=g(x)$ 的反函数，$c=\min\{g(a), g(b)\}$，$d=\max\{g(a), g(b)\}$.

一般地，求 $Y=g(x)$ 的概率密度的步骤为：

1° 先设法利用 X 的分布函数求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

2° 再求 $F_Y(y)$ 对变量 y 的导数得 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

3° 最后按 $Y=g(x)$ 的定义域所决定的值域，确定出能使 $f_X(x)>0$ 的 y 值，即得随机变量 Y 的可能取值.

二、基本要求

1. 理解随机变量的概念、离散型随机变量、概率分布及性质，连续型随机变量、概率密度的概念及性质.

2. 理解分布函数的概念及性质，已知随机变量的概率分布

及密度时，会求其分布函数，以及利用概率分布、密度或分布函数计算有关事件的概率.

3. 掌握二项分布、泊松分布及正态分布，了解均匀分布与指数分布.

4. 会求简单随机变量的函数的概率分布或密度.

三、习题详解

2.1 设盒中有 5 个球，其中 2 个白球、3 个红球，现从中随机取 3 球，设 X 为抽得白球数，试求 X 的概率分布及分布函数(不妨将盒中球标记为 1，2，3 号为红球，4，5 号为白球).

解 依题意，X 为随机变量，其可能取值为 0，1，2，相应的概率分布为

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=0.1,\qquad P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=0.6,$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=0.3,$$

故其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.1, & 0\leqslant x<1,\\ 0.7, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

2.2 设某运动员投篮投中的概率为 $p=0.3$，试求一次投篮时投中次数的概率分布表和分布函数.

解 设 $X=\{$某运动员一次投篮投中次数$\}$，则 X 的可能取值为 0，1，即 X 服从(0－1)分布，且 $P(X=0)=1-0.3=0.7$，$P(X=1)=0.3$，即 X 的概率分布表为

X	0	1
p_k	0.7	0.3

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.7, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

2.3 设某射手每次击中目标的概率为 0.8，现连续地向一目标射击，直到击中为止，设 X 为射击次数，则 X 的可能取值为 1，2，…，试求：

（1）X 的概率分布与分布函数；

（2）概率 $P(2<X\leqslant 4)$及 $P(X\geqslant 3)$.

解 （1）依题意 X 为随机变量，可能取值为 1、2、…，由于每次射击相互独立，故知事件$\{X=k\}$意味着射手前 $k-1$ 次未击中目标，而第 k 次才首次击中目标，故其概率为

$$\begin{aligned}P(X=k)&=(1-0.8)(1-0.8)\cdots(1-0.8)\times 0.8\\&=0.2^{k-1}\times 0.8, \qquad k=1,\ 2,\ \cdots\end{aligned}$$

此即所求概率分布.其分布函数为

$$F(x)=\sum_{k=1}^{[x]}0.2^{k-1}0.8\,.$$

（2）$P(2<X\leqslant 4)=P(X=3)+P(X=4)$

$$\begin{aligned}&=0.2^{3-1}\cdot 0.8+0.2^{4-1}\cdot 0.8\\&=0.038\ 4,\end{aligned}$$

$$P(X\geqslant 3)=\sum_{k=3}^{\infty}0.2^{k-1}\cdot 0.8=1-0.8-0.2\cdot 0.8=0.04.$$

2.4 假设一批稻种内混合 5‰的草籽，试求在 1000 粒稻种中恰有 3 粒草籽的概率及至少有 3 粒草籽的概率.

解 设 X=$\{$1 000 粒稻种中的草籽数$\}$，则 X 的可能取值为 0，1，2，…，1 000，依题意，X 服从参数为 n=1 000，p=0.005 的

二项分布，故有

$$P(X=k)=C_{1\,000}^{k}\cdot 0.005^{k}\cdot 0.995^{1\,000-k},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

故所求概率为

$$P(X=3)=C_{1\,000}^{3}\cdot 0.005^{3}\cdot 0.995^{1\,000-3}=0.140\,30,$$

$$P(X\geqslant 3)=\sum_{k=3}^{1\,000}C_{1\,000}^{k}\cdot 0.005^{k}\cdot 0.995^{1\,000-k}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{2}C_{1000}^{k}\cdot 0.005^{k}\cdot 0.995^{1\,000-k}=0.875\,98.$$

利用泊松分布近似计算可得，$\lambda=np=1\,000\times 0.005=5$，

$$P(X=3)\approx\frac{5^{3}e^{-5}}{3!}=0.140\,37,$$

$$P(X\geqslant 3)\approx 1-\frac{5^{0}e^{-5}}{0!}-\frac{5^{1}e^{-5}}{1!}-\frac{5^{2}e^{-5}}{2!}=0.875\,35.$$

2.5　设某机场每天有 200 架飞机在此降落，任一飞机在某一时刻降落的概率设为 0.02，且设各飞机降落是相互独立的.试问该机场需配备多少条跑道，才能保证某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01(每条跑道只能允许一架飞机降落)?

解　设 $X=\{$某一时刻 200 架飞机中需立即降落的飞机数$\}$，则 X 为离散型随机变量，服从参数 $n=200$，$p=0.02$ 的贝努利分布，故其概率分布为

$$P(X=k)=C_{200}^{k}\cdot 0.02^{k}\cdot 0.98^{200-k},\ k=0,1,2,\cdots,200.$$

依题意，设机场至少需配备 N 条跑道，那么有

$$P(X\geqslant N)<0.01,$$

即

$$\sum_{k=N}^{200}C_{200}^{k}\cdot 0.02^{k}\cdot 0.98^{200-k}<0.01.$$

利用泊松分布近似得，$\lambda=np=200\times 0.02=4$，

$$P(X \geq N) = \sum_{k=N}^{200} C_{200}^{k} \cdot 0.02^{k} \cdot 0.98^{200-k}$$
$$\approx \sum_{k=N}^{\infty} \frac{4^{k} \cdot e^{-4}}{k!} < 0.01$$

查泊松分布表得 $N \geq 9$，故机场至少应配备 9 条跑道，才能使某一时刻飞机需立即降落而没有空闲跑道的概率小于 0.01.

2.6　一批产品共 N 个，其中有 M 个次品，试求：

（1）任意取出的 n 个产品中次品数的分布(超几何分布)；

（2）设 $N=100$，$M=10$，$n=5$，写出取出的次品数的概率分布表；

（3）写出取出的次品数的分布函数.

解　设 $X=$｛从 N 个产品(其中 M 个次品)中任意取出的 n 个产品中次品的个数｝，则 X 为随机变量，其可能取值为 $k=0$，1，2，…，$m=\min(M, n)$，则有 X 的概率分布

（1）$P(X=k)=\dfrac{C_{M}^{k} C_{N-M}^{n-k}}{C_{N}^{n}}$，$k=0$，1，2，…，$m$.

（2）当 $N=100$，$M=10$，$n=5$ 时 $m=5$，得 X 的概率分布

$$P(X=k)=\frac{C_{100}^{k} C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}，k=0，1，2，\cdots，5.$$

计算相应概率值，列成如下概率分布表：

X	0	1	2	3	4	5
p_i	0.583	0.340	0.070	0.007	≈0	≈0

（3）X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0.583, & 0 \leqslant x<1, \\ 0.923, & 1 \leqslant x<2, \\ 0.993, & 2 \leqslant x<3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

2.7 一批零件中有九个合格品与三个废品.安装机器时，从这批零件中任取一个，如果每次取出的废品不再放回去，求在取得合格品以前已取出的废品数的分布.

解 设 X=在取得合格品以前取出的废品数，则 X 是一随机变量，它可能取的数值为 0，1，2，3，它取得这些数值的概率分别是：

$$P(X=0)=\frac{9}{12}=0.750,$$

$$P(X=1)=\frac{3}{12}\cdot\frac{9}{11}\approx 0.204\,55,$$

$$P(X=2)=\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10}\approx 0.040\,91,$$

$$P(X=3)=\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9}\approx 0.004\,55.$$

列成概率分布表为：

X	0	1	2	3
p_i	0.75	0.204 55	0.040 91	0.004 55

2.8 自动生产线在调整以后出现废品的概率为 p，生产过程中出现废品时立即重新进行调整，求在两次调整之间生产的合格品数的分布.

解 设 X={两次调整之间生产的合格品数}，则 X 为随机变量，可能取值为 0，1，2，⋯，故 $\{X=0\}$表示调整后生产的第一个产品是废品，则 $P(X=0)=p$；$\{X=1\}$表示调整后生产的第一个产品是合格品，而第二个产品是废品，则 $P(X=1)=(1-p)p$；$\{X=2\}$表示调整后生产的第一个与第二个产品是合格品，而第三个产品是废品，则 $P(X=2)=(1-p)^2p$.

以此类推，可知合格品数 X 的概率分布为

$$P(X=k)=(1-p)^kp,\quad k=0,1,2,\cdots$$

2.9 设一批产品的次品率为 p，每次任抽两个检查，直到抽得二个全为次品为止，求检查次数的概率分布.

解 设 $X=\{$检查次数$\}$，则 X 为随机变量，其可能取值为 1，2，3，…，$\{X=1\}$意味着检查一次，即第一次抽到两个全为次品，则 $P(X=1)=p^2$；$\{X=2\}$意味着检查两次，即第一次抽出的两个产品中至少有一个为非次品，而第二次取的两个产品全为次品，故 $P(X=2)=(1-p^2)p^2$.

以此类推，检查次数 X 的概率分布为

$$P(X=k)=(1-p^2)^{k-1}p^2,\qquad k=0,1,2,3,\cdots$$

2.10 从 10 个随机数字 0，1，2，…，9 中进行有放回的随机抽样，令 X 表示直到出现数字 5 或 0 前的抽样次数(亦称等待时间)，试求 X 的分布.

解 因为每次抽样时，取到 5 或 0 的概率均为 1/5，取到其它数字的概率为 4/5.如果设取到数字 5 或 0 的事件为 A，则有 $P(A)=1/5$，$P(\overline{A})=4/5$，X 表示直到事件 A 出现的等待时间，故有

$$P(X=0)=\frac{1}{5},$$

$$P(X=1)=\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right),$$

$$P(X=2)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right).$$

以此类推，可得 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\left(\frac{4}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right),\qquad k=1,2,\cdots$$

此即首项为 1/5 的几何分布.

2.11 甲、乙两名篮球队员轮流投篮，直到某人投中篮圈为止，今设甲先投，如果甲投中的概率为 0.4，乙为 0.6，试求各队员投篮次数的概率分布.

解 设 X，Y 分别表示甲，乙的投篮次数，由于甲先投，乙后投，故 X 可取 1，2，…，而 Y 可取 0，1，2，….$\{X=k\}$表示甲投了 k 次，这意味着甲在前 $k-1$ 次都未投中，而乙在前 $k-1$ 次亦未投中，而甲的第 k 次投篮或者投中、或者投不中，但此时乙

的第 k 次投篮投中，这样得 X 的概率分布为

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= 0.6^{k-1}\cdot 0.4^{k-1}\cdot 0.4+0.6^{k}\cdot 0.4^{k-1}\cdot 0.6 \\
&= 0.76\cdot 0.24^{k-1}, \qquad k=1,\ 2,\ \cdots
\end{aligned}
$$

同理可得 Y 的概率分布为

$$
\begin{aligned}
&P(Y=0)=\mathrm{P}(X=1)=0.4, \\
&P(Y=k) = 0.6^{k}\cdot 0.4^{k-1}\cdot 0.6+0.6^{k}\cdot 0.4^{k}\cdot 0.4 \\
&\qquad\quad = 0.456\cdot 0.24^{k-1}, \qquad k=1,\ 2,\ \cdots
\end{aligned}
$$

2.12 抛一个均匀的硬币，出现正面的概率为 p，出现反面的概率为 $q(p+q=1)$，设随机变量 X 为一直抛到正、反面均出现为止所需的次数，求 X 的概率分布.

解 X 的可能取值为 2，3，…，$\{X=k\}$意味着前 $k-1$ 次正面向上而第 k 次反面向上，或前 $k-1$ 次反面向上，而第 k 次正面向上，故有相应概率为

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= P(\text{前 } k-1 \text{ 次正面向上，第 } k \text{ 次反面向上}) \\
&\quad + P(\text{前 } k-1 \text{ 次反面向上，第 } k \text{ 次正面向上}) \\
&= p^{k-1}q+q^{k-1}p, \qquad k=2,\ 3,\ \cdots
\end{aligned}
$$

2.13 利用一批同类型的仪器作试验，每相隔 5 秒钟顺次接通一个，每个仪器在接通后 16 秒开始工作，当对任一仪器获得满意结果时，立即结束试验.如果对每个仪器获得满意结果的概率为 p，不获得满意结果的概率为 $q=1-p$，试求获得满意结果而要接通的仪器的个数的概率分布.

解 设 $X=\{$为获得满意结果需要接通的仪器的个数$\}$，因为对任一仪器从接通到获得满意结果之间必须经过 16 秒，而在这段时间内已顺利地接通了另外的三个仪器，故有

$$
P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=0.
$$

$\{X=4\}$则表示第一个接通的仪器获得满意的结果，故有 $p(X=4)=p$，同理$\{X=5\}$表示第一个接通的仪器未获满意的结果，而第二个接通的仪器获得了满意的结果.于是有

$$
P(X=5)=(1-p)p=qp.
$$

类似可得，X的概率分布为

$$P(X=k)=q^{k-4}p,\qquad k=4,\ 5,\ 6,\ \cdots$$

2.14　袋中装有 5 只球，编号 1，2，3，4，5.在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，试写出随机变量 X 的概率分布及分布函数.

解　依题意，随机变量 X 的可能取值为 3，4，5，故其概率分布为

$$P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=0.1,\qquad P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=0.3,$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=0.6.$$

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ 0.1, & 3\leqslant x<4,\\ 0.4, & 4\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$$

2.15　设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中任取 3 次，每次取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，试求 X 的概率分布.

解　依题意，随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，故其概率分布为

$$P(X=0)=\frac{13\times12\times11}{15\times14\times13}=\frac{22}{35}\approx0.628\ 57,$$

$$P(X=1)=\frac{13\times12\times2\times C_3^1}{15\times14\times13}=\frac{12}{35}\approx0.342\ 86,$$

$$P(X=2)=\frac{13\times2\times1\times C_3^2}{15\times14\times13}=\frac{1}{35}\approx0.028\ 57.$$

另解：本题也可按组合方式求 X 的概率分布，即

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{22}{35}, \qquad P(X=2)=\frac{C_{133}^{1}C_{2}^{2}}{C_{15}^{3}}=\frac{1}{35}.$$

$$P(X=1)=\frac{C_{13}^{2}C_{1}^{2}}{C_{15}^{3}}=\frac{22}{35}$$

2.16 进行重复独立试验，设每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $q=1-p\ (0<p<1)$.

（1）将试验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，试求 X 的概率分布(此时称 X 服从参数为 p 的几何分布)，并求 X 取偶数的概率；

（2）将试验进行到 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，试求 Y 的概率分布(此时称 Y 服从参数为 r、p 的巴斯卡分布).

解 （1）X 的可能取值为 1，2，3，…，$\{X=1\}$意味着第一次试验就成功，故 $P(X=1)=p$；$\{X=2\}$意味着第一次试验未成功，第二次试验成功，由试验的独立性可知其概率 $P(X=2)=(1-p)p=qp$，以此类推，可知$\{X=k\}$意味着前 $k-1$ 次试验未成功，第 k 次试验成功，故其概率为

$$P(X=k)=q^{k-1}p, \qquad k=1,2,\cdots$$

此即 X 的概率分布.

$$P(X\text{取偶数时})=\sum_{m=1}^{\infty}P(X=2m)=\sum_{m=1}^{\infty}q^{2m-1}p$$

$$=pq^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}(q^{2})^{m}=pq^{-1}\left[\frac{1}{1-q^{2}}-1\right]$$

$$=\frac{pq}{1-q^{2}}.$$

（2）X 的可能取值为 r、$r+1$、$r+2$，…，$\{X=r\}$意味着 r 次试验均获成功，相应的概率为 $P(X=r)=p^{r}$、$\{X=r+1\}$意味着

第 $r+1$ 次试验成功，而前 r 次试验中恰有一次不成功，其余 $r-1$ 次试验均成功，故由二项分布知

$$P(X=r+1)=C_r^1\, qp^{r-1}\cdot pC_r^1\, qp^r$$

类似地，$P(X=r+2)=C_{r+1}^2 q^2p^{r-1}\cdot pC_{r+1}^1q^2p^r$

一般地有 X 的概率分布为

$$P(X=k)=C_{k-1}^{k-r}q^{k-r}p^r,\qquad k=r,\ r+1,\ r+2,\ \cdots$$

具有此概率分布的随机变量 X，称其服从号数为 r，p 的巴斯卡分布.

2.17 一幢大楼装有 5 个同类型的供水设备.经调查表明在任一时刻，每个设备被使用的概率为 0.1，每个设备被使用是相互独立的.试问在同一时刻

（1）恰有两个设备被使用的概率是多少?

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是多少?

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是多少?

（4）至多有 1 个设备被使用的概率是多少?

解 设 $X=\{5$ 个设备在某一时刻被使用的个数$\}$，则 X 的可能取值为 0，1，2，3，4，5，依题意，X 服从参数为 5，0.1 的二项分布 $B(5,\ 0.1)$，故其概率分布为

$$P(X=k)=C_5^k\,0.1^k0.9^{5-k}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$$

所以得

（1）$P(X=2)=C_5^2\,0.1^2 0.9^3=0.072\ 9$

（2）$P(X\geqslant 3)=\sum\limits_{k=3}^{5}C_5^k\cdot 0.1^k\cdot 0.9^{5-k}$

$$=C_5^3\cdot 0.1^3\cdot 0.9^2+C_5^4\cdot 0.1^4\cdot 0.9+C_5^5\cdot 0.1^5\cdot 0.9^0$$

$$=0.008\ 56$$

（3）$P(X\leqslant 3)=\sum_{k=3}^{3}C_5^k\cdot 0.1^k\cdot 0.9^{5-k}$

$=1-P(X=4)-P(X=5)$

$=1-C_5^4\cdot 0.1^5\cdot 0.9+C_5^5\cdot 0.1^5\cdot 0.9^0$

$=0.999\ 54.$

（4）$P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$=C_5^0\cdot 0.1^0\cdot 0.9^5+C_5^1\cdot 0.1^1\cdot 0.9^4$

$=0.918\ 54$

2.18　设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3，当 A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号，

（1）进行了 5 次独立试验，试求指示灯发出信号的概率；

（2）进行了 7 次独立试验，试求指示灯发出信号的概率.

解　（1）设 $X=\{5$ 次独立试验中事件 A 发生的次数$\}$，则 X 服从参数为 5，0.3 的二项分布 $B(5,\ 0.3)$，其概率分布为

$$P(X=k)=C_5^k\cdot 0.3^k\cdot 0.7^{5-k}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$$

故所求概率为：

$$P(\text{指示灯发出信号})=P(X\geqslant 3)=\sum_{k=3}^{5}C_5^k\,0.3^k 0.7^{5-k}$$

$$=C_5^3\cdot 0.3^3\cdot 0.7^2+C_5^4\cdot 0.3^4\cdot 0.7^1$$

$$+C_5^5\cdot 0.3^5\cdot 0.7^0$$

$$=0.163\ 08.$$

（2）设 $Y=\{7$ 次独立试验中事件 A 发生的次数$\}$，则 Y 服从参数为 7，0.3 的二项分布 $B(7,\ 0.3)$，其概率分布为

$$P(Y=k)=C_7^k\cdot 0.3^k\cdot 0.7^{7-k}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$$

故所求概率为

$$P(\text{指示灯发出信号}) = P(Y \geqslant 3) = \sum_{k=3}^{7} C_7^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{7-k}$$

$$= 1 - C_7^0 \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^7 - C_7^1 \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^6 - C_7^2 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^5$$

$$= 0.352\ 93.$$

2.19 尽管在几何教科书中已经讲过用圆规和直尺三等分一个任意角是不可能的，但每年总有一些“发明者”撰写关于用圆规和直尺将角三等分的文章；设某地每年撰写此类文章的篇数 X 服从泊松分布 $\pi(6)$，试求明年没有此类文章及至多两篇类似文章的概率.

解 依题意，随机变量 X 服从泊松分布 $\pi(6)$，即其概率分布为

$$P(X=k) = \frac{6^k e^{-6}}{k!}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

故所求概率为

$$P(X=0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = e^{-6} = 0.002\ 48,$$

$$P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= e^{-6} + \frac{6e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!}$$

$$= 0.061\ 97.$$

2.20 一个电话交换台每分钟收到呼唤的次数服从泊松分布 $\pi(4)$，试求

（1）每分钟恰有 8 次呼唤的概率；

（2）每分钟的呼唤次数大于 10 的概率.

解 依题意，设 $X=\{\text{交换台每分钟收到呼唤的次数}\}$，则 X 服从泊松分布 $\pi(4)$，即其概率分布为

$$P(X=k)=\frac{4^k e^{-4}}{k!}, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

故所求概率为

（1） $P(X=8)=\frac{4^8 e^{-4}}{8!}=0.029\ 77$,

（2） $P(X>10)=\sum_{k=11}^{\infty}\frac{4^k e^{-4}}{k!}\xlongequal{\text{查表}}0.002\ 840.$

2.21　为了保证设备正常工作，需配备适量的维修工人(工人配备多了就浪费，配备少了又要影响生产)，现有同类型设备250台，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是0.01.在通常情况下一台设备的故障可由一个人来处理(我们也只考虑这种情况)，问至少需配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01？

解　设 $X=\{250$ 台设备发生故障的台数$\}$，X 的可能取值为 0，1，2，…，250，依题意 X 服从参数为 250，0.01 的二项分布 $B(250, 0.01)$，即其概率分布为

$$P(X=k)=C_{250}^{k}\cdot 0.01^k\cdot 0.99^{250-k} \quad k=0,1,2,\cdots,250.$$

再设需配备 N 个工人，欲使

$$P(X>N)=\sum_{k=N}^{250}C_{250}^{k}\cdot 0.01^k\cdot 0.99^{250-k}<0.01,$$

利用泊松分布近似可得，$\lambda=np=250\times 0.01=2.5$，

$$P(X>N)\approx\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{2.5^k e^{-2.5}}{k!}<0.01,$$

查表可得 $N+1=8$，故 $N=7$，即至少应配备 7 个工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01.

2.22　两名同一水平的棋手下棋，假定一方获胜的概率为1/2，试问其中一名棋手在四局中获胜两局，或在六局中获胜三局(假定无和局)的概率是多少？

解　设 $X=\{$其中一位棋手在四局中获胜的局数$\}$，则 X 为随

机变量，可能取值为 0，1，2，3，4，依题意，X 服从参数为 4，0.5 的二项分布 $B(4，0.5)$，即其概率分布为

$$P(X=k)=C_4^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{4-k}=C_4^k \cdot 0.5^4,$$
$$k=0，1，2，3，4，$$

故所求四局中获胜两局的概率

$$P(X=2)=C_4^2 \cdot 0.5^4=0.375.$$

又设 $Y=\{$其中一位棋手在六局中获胜的局数$\}$，同上可知，Y 服从参数为 6，0.5 的二项分布 $B(6，0.5)$，其概率分布为

$$P(Y=k)=C_6^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{6-k}=C_6^k \cdot 0.5^6,$$
$$k=0，1，2，\cdots，6，$$

故所求六局中获胜三局的概率为

$$P(Y=3)=C_6^3 \cdot 0.5^6=0.312\,5.$$

2.23　某教科书出版了 2 000 册，因装订等原因造成错误的册数的概率为 0.001，试求在这 2 000 册书中恰有 5 册错误的概率.

解　设 $X=\{$2 000 册书中有错误的册数$\}$，则 X 为随机变量，其可能取值为 0，1，2，…，2 000，各册书是否错误可视为相互独立，故此 X 服从参数为 2 000，0.001 的二项分布，即其概率分布为

$$P(X=k)=C_{2\,000}^k \cdot 0.001^k \cdot 0.999^{2\,000-k},$$
$$k=0，1，2，\cdots，2\,000，$$

故所求 2 000 册书中恰有 5 册错误的概率为

$$P(X=5)=C_{2\,000}^5 \cdot 0.001^5 \cdot 0.999^{1\,995}.$$

利用泊松分布作近似计算，由 $\lambda=2\,000\times 0.001=2$，可得

$$P(X=5)\approx \frac{2^5 e^{-5}}{5!}=0.001\,8.$$

2.24　设随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{k}{15}\qquad k=1，2，\cdots，5$$

试求：

（1）$P(X=1 \text{ 或 } X=3)$；

（2）$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)$；

（3）$P(4 \leqslant X<6)$.

解　（1）$P(X=1 \text{ 或 } X=3)=P(X=1)+P(X=3)$

$$=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}=\frac{4}{15}.$$

（2）$P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})=P(X=1)+P(X=2)$

$$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

（3）$P(4 \leqslant X<6)=P(X=4)+P(X=5)$

$$=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

2.25　设　$P(X=k)=C_2^k p^k(1-p)^{2-k}$，$k=0$，1，2；

$P(Y=m)=C_4^m p^m(1-p)^{4-m}$，$m=0$，1，2，3，4，

分别为随机变量 X，Y 的概率分布，如果已知 $P(X \geqslant 1)=5/9$，试求 $P(Y \geqslant 1)$.

解　因为 $P(X \geqslant 1)=5/9$，故 $P(X<1)=1-P(X \geqslant 1)=4/9$.

而　$P(X<1)=P(X=0)=C_2^0 p^0(1-p)^{2-0}=(1-p)^2$，

故得　$(1-p)^2=\frac{4}{9}$，即 $1-p=\frac{2}{3}$，$p=\frac{1}{3}$，从而

$$P(Y \geqslant 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)$$

$$=1-C_4^0 p^0(1-p)^{4-0}=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=\frac{65}{81} \approx 0.802\,47.$$

2.26　在一部篇幅很大的书籍中，发现只有13.5%的页数没有印刷错误，如果我们假定每页的错字个数是服从泊松分布的随机变量，试求正好有一个错字的页数的百分比.

解　设 $X=\{$每页的错字个数$\}$，则 X 为随机变量．其可能取值为 0，1，2，…，依题意，X 服从泊松分布，参数λ未知，即其概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

注意到一页上不出现错字就是指出现错字的个数为 0.因此一页上不出现错字的概率为

$$P(X=0)=\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=e^{-\lambda}.$$

因为只有13.5%的页数不出现印刷错误，这等于说一页上不出现印刷错误的概率为0.135.于是得

$$e^{-\lambda}=0.135,\quad \lambda=-\ln 0.135=2.002\,48.$$

从而一页上正好有一个印刷错误的概率为

$$P(X=1)=\frac{2.002\,48}{1!}\cdot e^{-2.002\,48}=0.270\,33,$$

即正好有一个错字的页数约为27%.

2.27　设随机变量 X 的概率密度为

（1）$f(x)=ae^{-\lambda|x|}$，$\lambda>0$

（2）$f(x)=\begin{cases} bx, & 0<x<1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & 其它, \end{cases}$

试确定常数 a、b，并求其分布函数 $F(x)$.

解　（1）因为概率密度$f(x)$满足等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

此外 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x = 2a\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$= 2a \cdot \frac{1}{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2a}{\lambda}.$$

所以 $\frac{2a}{\lambda} = 1$，$a = \frac{\lambda}{2}$，即 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}, & x \leqslant 0, \\ \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

当 $x \leqslant 0$ 时，$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x},$$

当 $x > 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}(=\mathrm{e}^{\lambda x})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}, & x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

（2）同理，因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} bx\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}$，

令 $\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，得 $b=1$，故 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其 它}, \end{cases}$$

又当 $x<0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ ;$$

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}\ ;$$

当 $x\geqslant 2$ 时， $F(x)=1$.

故得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1, \\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}, & 1\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

2.28 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ Ax^2, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & x\geqslant 1, \end{cases}$$

试求：

（1）系数 A；

（2）X 落在区间(0.3，0.7)内的概率；

（3）X 的概率密度.

解　（1）因为 X 的分布函数 $F(x)$满足等式

$$F(+\infty)=1,$$

在此题中　$\forall x\geqslant 1$，　　$F(x)=1$，

且 X 为连续型随机变量，$F(x)$为连续函数，故当 $x=1$ 时，

$$1=F(1)=F(1-0)=\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^-}Ax^2=A$$

所以常数 $A=1$，于是有 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$

（2）$P(X$ 落在区间$(0.3，0.7)$内$)=P(0.3<X<0.7)$

$$=F(0.7)-F(0.3)$$

$$=0.7^2-0.3^2=0.4.$$

（3）X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

2.29　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x,\qquad -\infty<x<+\infty,$$

试求：

（1）系数 A 与 B；

（2）X 落在区间$(-1，1)$内的概率；

（3）X 的概率密度.

解　（1）由分布函数性质知 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$ 得

$$\begin{cases} A+B\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ A+B\cdot\dfrac{\pi}{2}=1 \end{cases}\qquad \text{解得}\quad A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{\pi}$$

于是有　$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$,　　　$-\infty<x<+\infty$.

（2）$P(X$落在区间$(-1,\ 1)$内$)=P(-1<X<1)$

$$\begin{aligned}
&=F(1)-F(-1)\\
&=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right]\\
&=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right]\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

（3）$f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,　　　$-\infty<x<+\infty$.

[注]　如果X具有上述概率密度$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则称$X$服从柯西分布.

2.30　如果X的可能值充满区间:（1）$[0,\ \dfrac{\pi}{2}]$;（2）$[0,\ \pi]$;（3）$[0,\ \dfrac{3\pi}{2}]$，函数$\sin x$是否可为随机变量X的概率密度?

解　令$f(x)=\sin x$，$x\in[a,\ b]$．若$f(x)$为随机变量X的概率密度，则$f(x)$应符合密度的基本特征:

1°　$f(x)\geqslant 0$;

2°　$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$;

3° $f(x)=F'(x)$;

4° $P(x_1<X\leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$.

（1）当$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & 其它,\end{cases}$

易见 $f(x)\geqslant 0$，且$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$，

则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f_1(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^x\sin x\mathrm{d}x=1-\cos x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

即 $F'(x)=f_1(x)$.

易见 $P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f_1(x)\mathrm{d}x$，

因而 $f_1(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & 其它\end{cases}$ 为X的概率密度.

（2）若$f_2(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

则因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2\neq 1$，

故$f_2(x)$不能成为概率密度.

（3）若$f_3(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\dfrac{3}{2}\pi,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

则因$f_3(x)$在$\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$上不能保持$f_3(x)\geqslant 0$，故此$f_3(x)$亦不能成为概率密度.

2.31 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

试求：

（1）系数 A；

（2）X 的分布函数；

（3）X 落在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的概率.

解 （1）由 $F(+\infty)=1$ 得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos x\mathrm{d}x=2A\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=2A\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2A,$$

所以 $2A=1$，$A=\dfrac{1}{2}$，于是概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其 它}.\end{cases}$$

（2）当 $x<-\dfrac{\pi}{2}$ 时，　$F(x)=0$；

当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x+1);$$

当 $x \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时，　　$F(x)=1$.

即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2} \leqslant x<\frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geqslant \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

（3）$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi}{4}+1\right)-\frac{1}{2}(\sin 0+1)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2.32　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A x^{2} \mathrm{e}^{-k x}, & x>0, \\ 0, & x \leqslant 0,\end{cases} \quad (k>0)$$

试求：

（1）系数 A；

（2）$F(x)$；

（3）$P\left(-1<X<\frac{1}{k}\right)$

解　（1）由概率密度的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x=\int_{0}^{+\infty} A x^{2} \mathrm{e}^{-k x} \mathrm{d} x$$

$$=A\left[-\frac{1}{k} x^{2} \mathrm{e}^{-k x}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{k} \int_{0}^{+\infty} 2 x \mathrm{e}^{-k x} \mathrm{d} x\right]$$

$$= A\left[-\frac{2}{k^2}xe^{-kx}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{k^2}\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx\right]$$

$$=\frac{2A}{k^3},$$

所以 $A=\frac{k^3}{2}$，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\quad (k>0)$$

（2）当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=0$;

当 $x>0$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_0^x\frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}dx$

$$=-\frac{k^2}{2}\left[x^2e^{-kx}\Big|_0^x-2\int_0^x xe^{-kx}dx\right]$$

$$=-\frac{k^2}{2}\left[x^2e^{-kx}+\frac{2}{k}xe^{-kx}\Big|_0^x\frac{2}{k}\int_0^x e^{-kx}dx\right]$$

$$=-\frac{k^2}{2}\left[x^2e^{-kx}+\frac{2}{k}xe^{-kx}+\frac{2}{k^2}e^{-kx}-\frac{2}{k^2}\right]$$

$$=1-e^{-kx}\left(1+kx+\frac{k^2}{2}x^2\right).$$

所以 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-kx}\left(1+kx+\frac{k^2}{2}x^2\right), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

（3）$P\left(-1<X<\frac{1}{k}\right)=F\left(\frac{1}{k}\right)-F(-1)=F\left(\frac{1}{k}\right)-0$

$$= 1 - e^{-k\cdot\frac{1}{k}}\left(1 + k\cdot\frac{1}{k} + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{5}{2}e^{-1}.$$

2.33 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1, \\ \ln x, & 1 \leqslant x < e, \\ 1, & x \geqslant e, \end{cases}$$

试求：

(1) $P(X<2)$，$P(0<X\leqslant 3)$，$P(2<x<2.5)$；

(2) 概率密度 $f(x)$.

解 (1) $P(X<2) = F(2) = \ln 2$,

$P(0<X\leqslant 3) = F(3) - F(0) = 1 - 0 = 1$,

$P(2<X<2.5) = F(2.5) - F(2) = \ln 2.5 - \ln 2 \approx 0.223\ 14$.

(2) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 1<x<e, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

2.34 设随机变量 X 的概率密度为

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1, \\ 0, & 其它; \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x<1, \\ 2(1-x^2), & 1 \leqslant x<2, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

试求其分布函数 $F(x)$.

解 (1) 当 $x<-1$ 时， $F(x) = 0$；

当 $-1<x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_{-1}^{x}$$

$$=\frac{1}{\pi}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+\frac{1}{2};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$.

故
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{\pi}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

（2）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$;

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}$;

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^x 2(1-x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}(1-x)^3$;

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=1$.

即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}(1-x)^3, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

2.35　在区间$[0, a](a>0)$上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标，设这个质点落在$[0, a]$中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例，试求 X 的分布函数.

解 依题意，$P(0\leqslant X\leqslant a)=1$，$P(X<0)=0$，$P(X>a)=0$，

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$P(0\leqslant X\leqslant x)=kx$.

当 $x=a$ 时有

$$1=P(0\leqslant X\leqslant a)=ka,$$

故得 $k=\dfrac{1}{a}$，于是

当 $x<0$ 时，　$F(x)=P(X\leqslant x)=0$；

当 $0\leqslant x<a$ 时，　$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X<0)+P(0\leqslant X<x)$

$$=0+\frac{1}{a}x=\frac{x}{a};$$

当 $x\geqslant a$ 时，　$F(x)=P(X\leqslant x)$

$$=P(X<0)+P(0\leqslant X\leqslant a)+P(a<X<x)$$
$$=0+1+0=1.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{a}, & 0\leqslant x<a,\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$$

2.36 研究了英格兰在 1875～1951 年期间，在矿山导致 10 人或 10 人以上死亡的事故的频繁程度，得知相继两次事故之间的时间 T(以日计)服从指数分布，其概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{241}\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

试求其分布函数，并求概率 $P(50<T<100)$.

解 当 $t<0$ 时，　$F(t)=P(T\leqslant t)=\int_{-\infty}^{t}f_T(t)\mathrm{d}t=0$；

当 $t>0$ 时， $F(t)=\int_0^t \frac{1}{241}\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}\Big|_0^t=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}$.

故 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{241}}, & t>0,\\ 0, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P(50<T<100)&=F(100)-F(50)\\ &=(1-\mathrm{e}^{-\frac{100}{241}})-(1-\mathrm{e}^{-\frac{50}{241}})\\ &=\mathrm{e}^{-\frac{50}{241}}-\mathrm{e}^{-\frac{100}{241}}\\ &\approx 0.812\,64-0.660\,38=0.152\,26.\end{aligned}$$

2.37 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,\ 10)$，试求方程

$$x^2-Xx+1=0$$

有实根的概率.

解 欲使方程 $x^2-Xx+1=0$ 有实根，则其判别式应不小于 0，即 $X^2-4\geqslant 0$， 即 $X^2\geqslant 4$.

而 $X\sim U(0,\ 10)$，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & 0<x<10,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

故所求概率为

$$\begin{aligned}P(X^2\geqslant 4)&=P(X>2\text{ 或 }X<-2)=P(X>2)+P(X<-2)\\ &=\int_2^{10}\frac{1}{10}\mathrm{d}x+0=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0.8.\end{aligned}$$

2.38 设某灯泡厂生产的灯泡寿命 X(以小时记)服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1200}\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

试确定常数 a，并求其分布函数.若灯泡寿命超过 1 000 小时为一级品，试问任取一灯泡测试，其为一级品的概率是多少？

解 由概率密度的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1\ 200}\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\frac{1}{1\ 200}a\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1\ 200}(-a)，$$

得 $a=-1\ 200.$

故 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1\ 200}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1\ 200}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=0;$

当 $x>0$ 时， $F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{1\ 200}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1200}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{1200}}\Big|_{0}^{x}$

$$=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{1200}}.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{1200}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

由此可得一级品的概率为

$$P(X>1\ 000)=1-P(X\leqslant 1\ 000)$$

$$=1-F(1\ 000)=1-1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1000}{1200}}\right)$$

$$= e^{-\frac{1000}{1200}} = e^{-\frac{5}{6}} \approx 0.434\ 60.$$

2.39 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}},$$

试求:

(1) 常数 a;

(2) 在两次独立观察中 X 取小于 1 的数值的概率.

解 (1) 由概率密度的性质知:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x = a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(e^x)}{1 + e^{2x}}$$

$$= a \cdot \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2}a,$$

所以 $a = \dfrac{2}{\pi}$.

从而 X 的分布函数为

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{\pi}\arctan e^t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{2}{\pi}\arctan e^x.$$

(2) 在两次观察中, X 取小于 1 的数值的概率, 等价于相互独立且与 X 同分布的随机变量 X_1, X_2 的联合概率 $P(X_1 < 1, X_2 < 1)$.

因为 X_1 与 X_2 相互独立且与 X 同分布, 即随机事件 $\{X_1 < 1\}$ 与 $\{X_2 < 1\}$ 相互独立, 且概率相同, 即

$$P(X_1 < 1,\ X_2 < 1) = [P(X_1 < 1)]^2 = [F(1)]^2$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\arctan 1\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

2.40 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数, 试问:

(1) $F_1(x) + F_2(x)$ 是否为分布函数?

（2）若 $a_1>0, a_2>0$ 均为常数，且 $a_1+a_2=1$，则 $a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$ 是否为分布函数？

解 （1）设 $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$，则

$$F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}F_1(x)+\lim_{x\to\infty}F_2(x)$$

$$=F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2,$$

因此 $F(+\infty)\neq 1$，故 $F(x)$不是分布函数.

（2）设 $F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$，则因为 $F_1(x)$，$F_2(x)$为分布函数，故它们单调不减，右连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}F_i(x)=0$，及 $\lim\limits_{x\to\infty}F_i(x)=1$，$i=1$，2，从而知 $F(x)$亦单调不减、右连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$，及 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=a_1+a_2=1$，故 $F(x)$为分布函数.

[注] 本题(1)的结果说明两个分布函数之和不再是分布函数；(2)的结果可推广为：任意有限个分布函数的凸线性组合仍为分布函数.即若 $F_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$为分布函数，且 $a_i>0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i F_i(x)$ 仍为分布函数.

2.41 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，乘客到达汽车站的任一时刻是等可能的，试求乘客候车时间不超过 3 分钟的概率.

解 乘客到达公共汽车站的时刻为 T，他到站后来到的第一辆公共汽车到站的时刻为 t_0，依题意，T 在时间区间 $[t_0-5, t_0]$ 内服从均匀分布，那么 T 的概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}1/5, & t_0-5<T<t_0, \\ 0, & 其它.\end{cases}$$

候车时间不超过 3 分钟，即 T 落于区间$[t_0-3, t_0]$，故所求概率为

$$P(t_0-3<T<t_0)=\int_{t_0-3}^{t_0}\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{5}=0.6.$$

2.42　使用了 t 小时的电子管在以后的 Δt 小时内损坏的概率等于 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，其中 λ 是不依赖于 t 的数，$o(\Delta t)$ 表示较 Δt 为高阶的无穷小，求电子管在 T 小时内损坏的概率.

解　设电子管的使用寿命为 X(小时).则随机事件 $\{t<X\leqslant t+\Delta t\}$ 意味着电子管在时间段落 $[t,\ t+\Delta t]$ 内损坏.

依题意，电子管使用了 t 小时未损坏，而在时段 $(t,\ t+\Delta t)$ 内损坏的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，即给出了 $X>t$ 这一条件下，随机事件 $\{t<X<t+\Delta t\}$ 的条件概率：

$$P(t<X\leqslant t+\Delta t\mid X>t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

则
$$P(X\overline{\in}(t,\ t+\Delta t)\mid X>t)=1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)$$

而
$$\begin{aligned}P(X>t+\Delta t)&=P(X>t\text{ 且 }X\overline{\in}(t,\ t+\Delta t))\\&=P(X>t)P(X\overline{\in}(t,\ t+\Delta t)\mid X>t)\\&=[1-P(X\leqslant t)][1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)]\\&=[1-F(t)][1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)],\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}F(t+\Delta t)&=1-P(X>t+\Delta t)\\&=1-[1-F(t)]\cdot[1-\lambda t-o(\Delta t)]\\&=F(t)+\lambda(1-F(t))\Delta t+(1-F(t))o(\Delta t),\end{aligned}$$

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lambda(1-F(t))+(1-F(t))\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

令 $\Delta t\to 0$，因 $o(\Delta t)$ 是关于 Δt 的高阶无穷小，故 $\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t\to 0}0$，由上式可得：

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda[1-F(t)].$$

这是关于 $F(t)$ 的微分方程，初始条件为 $F(t)\mid_{t=0}=P(X\leqslant 0)=0$，用分离变量法解此微分方程

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{F(t)-1} = -\lambda \mathrm{d}t,$$

得 $F(t)=1+C\mathrm{e}^{-\lambda t}$，且 $0=F(0)=1+C$ 得 $C=-1$，

于是得 $\quad F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \geqslant 0)$.

电子管在 T 小时内损坏，即 $X \leqslant T$，此事件的概率为

$$P(X \leqslant T)=F(T)=1-\mathrm{e}^{-\lambda T}.$$

2.43　气体分子在 $t=0$ 时与另一分子碰撞后，它在时刻 t 以前不与其它分子碰撞，而在$(t,\ t+\Delta t)$内与其它分子碰撞的概率等于$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，求它的自由运行时间(即连续两次碰撞之间的时间)大于 t 的概率.

解　设气体分子的自由运行时间为随机变量 X，所求的概率为 $P(X>t)$，分子在时刻 t 以前不与其它分子碰撞，即 $X>t$，依题意，在 $X>t$ 的条件下，$X\in(t,\ t+\Delta t)$的条件概率为

$$P(X\in(t,\ t+\Delta t) \mid X>t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

则
$$P(X\notin(t,\ t+\Delta t) \mid X>t)=1-\lambda\Delta t-o(\Delta t),$$

$$\begin{aligned}P(X>t+\Delta t)&=P(X>t)P(X>t+\Delta t \mid X>t)\\&=(1-F(t))(1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)),\end{aligned}$$

其中 $F(t)=P(X\leqslant t)$为 X 的分布函数.

$$\begin{aligned}F(t+\Delta t)&=1-P(X>t+\Delta t)\\&=1-(1-F(t))(1-\lambda\Delta t-o(\Delta t))\\&=F(t)+\lambda(1-F(t))\Delta t+(1-F(t))o(\Delta t),\end{aligned}$$

故
$$\frac{F(t+\ddot{A}t)-F(t)}{\ddot{A}t}=\lambda(1-F(t))+(1-F(t))\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\ddot{A}t)-F(t)}{\ddot{A}t}=\lambda(1-F(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{F(t)-1}=-\lambda\mathrm{d}t,$$

$$\ln(F(t)-1)=-\lambda t+\ln C,$$

$$F(t)=1+C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

再由初始条件 $F(0)=P(X\leqslant 0)=0$，代入上式得 $C=-1$，于是

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}\qquad (t\geqslant 0),$$

故所求概率 $P(X>t)=1-P(X\leqslant t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}\qquad (t\geqslant 0)$.

2.44　电话用户在 $(t,\ t+\Delta t)$ 这段时间内对电话站呼唤一次的概率等于 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，并且与时间 t 以前的呼唤次数无关，而在这段时间内呼唤两次或两次以上的概率等于 $o(\Delta t)$，试求在 $(0,\ t)$ 这段时间内呼唤 k 次的概率为 $P_k(t)$，$k=0,1,2,\cdots$

解　（1）事件{在 $(0,\ t+\Delta t)$ 内无呼唤} = {在 $(0,\ t)$ 内无呼唤} $\cap$ {在 $(t,\ t+\Delta t)$ 内无呼唤}

相应的概率为

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\{1-[\lambda\Delta t+o(\Delta t)]-o(\Delta t)\}$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0 t-\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}P_0(t),$$

令 $\Delta t\to 0$ 得　$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t).$$

（2）事件{在 $(0,\ t+\Delta t)$ 内呼唤 k 次}

= {在 $(0,\ t)$ 内呼唤 $k-2$ 次以下}

$\cap$ {在 $(t,\ t+\Delta t)$ 内呼唤 2 次或以上}

+ {在 $(0,\ t)$ 内呼唤 $k-1$ 次以下}

$\cap$ {在 $(t,\ t+\Delta t)$ 内呼唤 1 次}

+ {在 $(0,\ t)$ 内呼唤 k 次以下} $\cap$ {在 $(t,\ t+\Delta t)$ 无呼唤}

相应的概率为

$$\begin{aligned}P_k(t+\Delta t)=&\left(\sum_{k_i\leqslant k-2}P_{k_i}(t)\right)\cdot o(\Delta t)\\&+P_{k-1}(t)\cdot[\lambda\Delta t+o(\Delta t)]\\&+P_k(t)\cdot[1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)-o(\Delta t)],\end{aligned}$$

$$\frac{P_0(t+\text{Ä}t)-P_0(t)}{\text{Ä}t}=\left(\sum_{k_i\leqslant k-2}P_{k_i}(t)\right)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+P_{k-1}(t)$$

$$\times\left[\lambda+\frac{o(\text{Ä}t)}{\text{Ä}t}\right]-P_k(t)\left[\lambda+\frac{o(\text{Ä}t)}{\text{Ä}t}\right],$$

令 $\Delta t\to 0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}P_k(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\text{Ä}t)-P_k(t)}{\text{Ä}t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)],$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

且注意初始条件：$P_0(0)=1$，$P_k(0)=0$、$k=1$，2，$\cdots$

解此微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda P_0(t), & P_0(0)=1,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}P_k(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)], & P_k(0)=1,\quad k=1,2,\cdots\end{cases}$$

可得：$P_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

当 $k=1$ 得，$\dfrac{\mathrm{d}P_1(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda[P_0(\mathrm{t})-P_1(t)]=\lambda[\mathrm{e}^{-\lambda t}-P_1(t)]$，

即求 $\dfrac{\mathrm{d}P_1(t)}{\mathrm{d}t}+\lambda P_1(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 的通解，由一阶线性微分方程求解公式得

$$P_1(t)=\mathrm{e}^{-\int\lambda\mathrm{d}t}\left(\int\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\int\lambda\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t+C_1\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t+C_1).$$

再由 $P_1(0)=0$ 知 $C_1=0$，即得

$$P_1(t)=\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

当 $k=2$ 时，得 $\dfrac{\mathrm{d}P_2(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda[P_1(t)-P_2(t)]=\lambda[\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-P_2(t)]$，

即 $$\frac{dP_2(t)}{dt}+\lambda P_2(t)=\lambda^2 t e^{-\lambda t},$$

同上可得

$$P_2(t)=e^{-\int\lambda dt}\left(\int\lambda^2 t e^{-\lambda t}e^{\int\lambda dt}dt+C_2\right)$$

$$=e^{-\lambda t}\left(\int\lambda^2 t e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t}+C_2\right)$$

$$=e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda^2}{2}t^2+C_2\right)$$

$$=\frac{\lambda^2 t^2}{2}e^{-\lambda t}+C_2 e^{-\lambda t}.$$

再由 $P_2(0)=0$，可得 $C_2=0$，于是

$$P_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}.$$

当 $k=3$ 时，$\frac{dP_3(t)}{dt}=\lambda[P_2(t)-P_3(t)]=\left[\lambda\frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}-P_3(t)\right]$，

即 $$\frac{dP_3(t)}{dt}+\lambda P_3(t)=\frac{\lambda^3 t^2}{2}e^{-\lambda t},$$

同上可得

$$P_3(t)=e^{-\int\lambda dt}\left(\int\frac{\lambda^3 t^2}{2}e^{-\lambda t}e^{\int\lambda dt}dt+C_3\right)$$

$$=e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^3}{3!}+C_3\right).$$

又由 $P_3(0)=0$ 得 $C_3=0$，于是

$$P_3(t)=\frac{(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}.$$

以此类推，一般地有

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

可利用数学归纳法证之，易见，在(0，t)时段内用户的呼唤次数服从参数为λt的泊松分布.

2.45 设K在区间(0，5)上服从均匀分布，试求方程

$$4x^2+4Kx+K+2=0$$

有实根的概率.

解 欲使一元二次方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根，则其判别式应不小于0，即

$$(4K)^2-4\times4\times(K+2)\geqslant0$$

解此不等式得 $K^2-K-2\geqslant0$，$(K-2)(K+1)\geqslant0$，

即得 $K<-1$ 或 $K>2$.

而 $K\sim U(0,5)$，其概率密度为

$$f(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 0<k<5,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

故所求概率为

$$\begin{aligned}P(K<-1或K>2)&=P(K<-1)+P(K>2)\\&=0+\int_2^5\frac{1}{5}\,dk=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

2.46 有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设每辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为0.000 1，在某天的该段时间内有1 000辆汽车通过，试问出事故的汽车数不小于2的概率是多少?

解 设X=1 000辆汽车中在某段时间出事故的汽车数，则X为随机变量，可能取值为0，1，2，…，1 000，因各车是否出事故相互独立，故X服从参数为100、0.000 1的二项分布B(1 000，0.000 1)，其概率分布为

$$P(X=k)=C_{1000}^{k}\cdot 0.000\,1^{k}\cdot 0.999\,9^{1\,000-k},$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 1\,000.$$

出事故的汽车数不小于 2 的概率为

$$P(X\geqslant 2)=\sum_{k=0}^{1000}C_{1000}^{k}\cdot 0.000\,1^{k}\cdot 0.999\,9^{1\,000-k}$$

$$=1-P(X=0)-P(X=1).$$

由 $np=1\,000\times 0.000\,1=0.1$，利用泊松分布近似得

$$P(X\geqslant 2)\approx 1-\frac{0.1^{0}\cdot e^{-0.1}}{0!}-\frac{0.1^{1}\cdot e^{-0.1}}{1!}=0.004\,68.$$

2.47　某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $t/2$ 的泊松分布，而与时间间隔无关(时间以小时计).

（1）试求某一天中午 12 时至下午 3 时没有收到紧急呼救的概率；

（2）试求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到一次紧急呼救的概率.

解　依题意，在时间间隔为 t 内收到紧急呼救的次数 X 服从泊松分布 $\pi\left(\frac{t}{2}\right)$，故其概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{k}e^{-\frac{t}{2}}}{k!}=\frac{t^{k}e^{-\frac{t}{2}}}{2^{k}k!},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

（1）$P(12\text{ 时到 }3\text{ 时无紧急呼救})=\dfrac{3^{0}e^{-\frac{3}{2}}}{2^{0}0!}=e^{-\frac{3}{2}}.$

（2）$P(12\text{ 时到 }5\text{ 时至少有一次紧急呼救})$

$$=1-\frac{5^0 e^{-\frac{5}{2}}}{2^0 0!}=1-e^{-\frac{5}{2}}.$$

2.48 设 X 服从泊松分布，其分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

试问当 k 取何值时，$P(X=k)$为最大?

解 因为 $$P(X=k+1)=\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{-\lambda}}{(k+1)!},$$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{-\lambda}}{(k+1)!}\bigg/\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\frac{\lambda}{k+1},$$

易见当λ非整数时，若$[\lambda]\leqslant k$，则 $P(X=k+1)\leqslant P(X=k)$是 k 的下降函数；若$[\lambda]>k$，则 $P(X=k+1)\geqslant P(X=k)$是 k 的上升函数.

因而当 $k=[\lambda]$时，$P(X=k)$达到最大.

当λ为整数时，$k=\lambda-1$ 及λ时 $P(X=\lambda)=P(X=\lambda-1)$，故 $P(X=k)$达到最大.综述可得，当

$$K=\begin{cases}[\lambda], & \text{当}\lambda\text{为非整数},\\ \lambda-1,\text{或}\lambda, & \text{当}\lambda\text{为整数}\end{cases}$$

时，$P=(X=K)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$达到最大.

2.49 设 X 服从二项分布，其分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

试问当 k 取何值时 $P(X=k)$为最大.

解 因为 $$P(X=k+1)=C_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1},$$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{C_n^{k+1}\cdot p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}}$$

$$=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{1-p},$$

若 $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \geqslant 1$，则 $\dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geqslant 1$，

有 $\quad (n-k)p \geqslant (k+1)(1-p)$，

即 $\quad (n+1)p \geqslant k+1$；

若 $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \leqslant 1$，则 $\dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \leqslant 1$，

有 $\quad (n-k)p \leqslant (k+1)(1-p)$，

即 $\quad (n+1)p \leqslant k+1$.

故若 $(n+1)p$ 不是整数时，则

当 $k \geqslant [(n+1)p]$ 时，$P(X=k+1) \leqslant P(X=k)$；

当 $k < [(n+1)p]$ 时，$P(X=k+1) > P(X=k)$；

故　当 $k=[(n+1)p]$ 时，$P(X=k)$ 达到最大.

若 $(n+1)p$ 是整数，则因令 $\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} = 1$，

得 $\quad (n-k)p = (k+1)(1-p)$，

$$np - kp = k - kp + (1-p),$$

求得 $\quad k = (n+1)p - 1$.

由二项分布对称性知当 $k=(n+1)p-1$，$(n+1)p$ 时，$P(X=k)$ 达到最大.综述可得，当

$$k=\begin{cases}[(n+1)p], & \text{当}(n+1)p\text{为非整数}, \\ (n+1)p-1\text{，或}(n+1)p, & \text{当}(n+1)p\text{为整数}\end{cases}$$

时，$P=(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 取最大值.

2.50　设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，其概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}},$$

试验证 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$.

解 令 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I$，则

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = 2\pi$$

所以 $I = \sqrt{2\pi}$，即 $\frac{I}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$.

2.51　已知随机变量 X 服从正态分布 $N(1, 0.9^2)$，试求：

（1）$P(2.539 < X < 3.259)$，$P(X < -0.9^2)$及 $P(X > 2.8)$；

（2）$P(1 - 0.9k < X < 1 + 0.9k)$，$k = 1, 2, 3$.

解　（1）$\mathrm{P}(2.539 < X < 3.259) = \ddot{O}\left(\frac{3.259-1}{0.9}\right) - \ddot{O}\left(\frac{2.539-1}{0.9}\right)$

$$= \Phi(2.51) - \Phi(1.71)$$

$$= 0.994\,0 - 0.955\,4$$

$$= 0.038\,6,$$

$$P(X < -0.9^2) = \ddot{O}\left(\frac{-0.9^2-1}{0.9}\right) = \Phi(-2.01) = 1 - \Phi(-2.01)$$

$$= 1 - 0.977\,8 = 0.022\,2,$$

$$P(X > 2.8) = 1 - \ddot{O}\left(\frac{2.8-1}{0.9}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977\,2$$

$$= 0.022\,8;$$

（2）$P(1 - 0.9k < X < 1 + 0.9k) = \ddot{O}\left(\frac{1+0.9k-1}{0.9}\right)$

$$- \ddot{O}\left(\frac{1-0.9k-1}{0.9}\right)$$

$$= \Phi(k) - \Phi(-k)$$

$$= \Phi(k) - (1 - \Phi(k))$$
$$= 2\Phi(k) - 1,$$

当 $k = 1$ 时，$P(1 - 0.9 < X < 1 + 0.9) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.841\,3 - 1 = 0.682\,6$,

当 $k = 2$ 时，$P(1 - 2 \times 0.9 < X < 1 + 2 \times 0.9)$
$= 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.977\,2 - 1 = 0.954\,4$,

当 $k = 3$ 时，$P(1 - 3 \times 0.9 < X < 1 + 3 \times 0.9)$
$= 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.998\,7 - 1 = 0.997\,4$,

[注]　一般地，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1.$$

即有
$$P(|X - \mu| < k\sigma) = 2\Phi(k) - 1,$$
$$P(|X - \mu| < \sigma) = 0.682\,6,$$
$$P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.954\,4,$$
$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = 0.997\,4,$$

2.52　某人从南郊前往北郊火车站乘火车，有两条路可走.第一条路穿过市中区，路程较短，但交通拥挤，所需时间(以分钟计)服从正态分布 $N(35, 80)$；第二条路沿环城公路走，路程较长，但意外阻塞较少，所需时间服从正态分布 $N(40, 20)$.试问：

（1）假如有 50 分钟时间可用，应走哪一条路线?

（2）若只有 40 分钟时间可用，又应走哪条路线?

解　设 X = {某人沿第一条路从南郊到北郊所需时间}，
Y = {某人沿第二条路从南郊到北郊所需时间}，

依题意 $X \sim N(35, 80)$，$Y \sim N(40, 20)$.

（1）若有 50 分钟可用，则因

$$P(X \leqslant 50) = \Phi\left(\frac{50 - 35}{\sqrt{80}}\right) = \Phi(1.677) \approx 0.953\,5,$$

$$P(Y \leqslant 50) = \Phi\left(\frac{50 - 40}{\sqrt{20}}\right) = \Phi(2.236) \approx 0.987\,4,$$