摘 要

本文考虑以下非线性抛物方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})+u^{1+\alpha} \quad , \quad x\in\Omega, t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega$$

$$u(x,t)=0, x\in\partial\Omega$$

的整体解的存在性. 其中$\Omega\subset R^n$为有界域. 其中p,α满足条件:

若$N\le p, p<2+\alpha<\infty$; 若$N>p, p<2+\alpha\le\frac{Np}{N-p}$

主要利用新定义的位势井族结合 Galerkin 方法对整体弱解和正则解的存在性进行研究，得到了新的弱解和正则解的存在条件. 并在此基础上研究了解的真空隔离性质，即方程的所有解均在$W_0^{1,p}(\Omega)$空间的一个小球的内部或一个大球的外部出现，而不会在中间的带形区域出现，形成一个无解区域称为真空隔离区域。最后，利用位势井的方法研究了具有临界初值条件的非线性抛物方程，获得整体解的存在性结论。

关键词：抛物方程；位势井；整体解；存在性

Abstract

In this paper,we study the initial boundary value problem of nonlinear parabolic equation.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})+u^{1+\alpha} \quad , \quad x\in\Omega, t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in\Omega$$

$$u(x,t)=0, x\in\partial\Omega$$

$\Omega\subset R^n$ is a bounded domain. And the existence and nonexistence of global solutions are established.

A family of potential wells that we defined combined with the Galerkin method soloved the existence problem of the weak solutions and regular solutions, and the existence terms of the weak solutions and regular solutions were obtained. On the bases of these research vacuum isolating property of the solutions of the equations were obtained .That means that all solutions of the equations may be in a small ball or out of a large ball of $W_0^{1,p}(\Omega)$space. At last by using potential well method we studied the nonlinear parabolic equation with critical initial conditions, and obtain some new existence theorems of global solutions.

Keywords: parabolic equation; potential well; global solution; existence;

哈尔滨工程大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：本论文的所有工作，是在导师的指导下，由作者本人独立完成的。有关观点、方法、数据和文献的引用已在文中指出，并与参考文献相对应。除文中已注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者（签字）：于涛

日期：2007 年 4 月 20 日

第 1 章 绪论

1.1 概述

作为偏微分方程的一个重要组成，非线性抛物方程（组）涉及的大量问题来自物理、化学、力学、生物等领域的数学模型，具有强烈的实际背景．同时，在非线性抛物方程（组）的理论研究中，也给数学家提出了许多挑战性的问题．上个世纪 30 年代，在 Sobolev 空间基础上建立的泛函分析的方法，为处理非线性偏微分方程提供了一个有力的工具，使人们可以在更广泛的函数类空间寻求问题的解．因此，近几十年，越来越多的数学家、物理学家和相关专业技术人员对非线性抛物方程（组）的研究产生了浓厚的性趣，大量的研究成果不断的发表．这些研究成果涉及了许多重要的方面，如解的唯一性、正则性、blow-up 等等．这些工作使得抛物方程的一般理论得到极大的丰富，在文[81]-[87]中得到的结果为我们学习与研究提供了极为宝贵的理论基础与论证方法．

1.2 主要方法及问题的研究现状

1.2.1 Galerkin 方法及位势井理论

Galerkin 方法是研究非线性抛物方程解的存在性的一个有力工具，它不仅提供了一种理论证明的手段，在实际计算中也是一种行之有效的方法．Galerkin 方法的基本思想是先选取一个适当的基本空间以及该空间的一组标准正交基 $\{w_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$，再证明所讨论的问题具有形如 $\sum a_j(t)w_j(x)$ 的解．其基本步骤是：

(1) 构造近似解

在一个适当的可分的空间中选取一组标准正交基，然后在有限个向量张成的子空间中构造线性组合形式的近似解，利用常微分方程组局部解存在性定理证明局部解存在.

(2)作先验估计

一般采用乘以近似解或其关于时间变量的某阶导数然后关于空间变量在给定空间区域积分而获得先验估计，往往在非线性项可能为负数时结合势井理论获得先验估计.

(3)取极限

利用泛函分析Banach空间内一个有界集合的弱紧性与弱*紧性原理取弱极限或弱*极限.

(4) 说明

说明所得到的解满足初边值条件.

Galerkin 方法在研究方程的整体解的存在性时，对近似解的先验估计往往是很困难的. 而位势井理论常常能起到弥补的作用，二者结合使用能有效的处理抛物方程解的存在性问题.

位势井理论是1968年首先由Sattinger为了解决不具有正定能量的双曲方程整体解的存在性而引进的. 此后，位势井理论就成为研究非线性发展方程的一个重要方法，被很多数学家用来研究各种非线性发展方程解的整体存在性与不存在性[34-61]. 其中，比较重要的工作有Tsutsumi 于 1972 年对希尔伯特空间中的半线性双曲与抛物方程的研究、1973 对强非线性抛物方程的研究; Payne 与 Sattinger 于 1975 年对一般的二阶半线性双曲方程与抛物方程的研究; Levine 于 1987 年对具非线性边界条件的发展方程的研究; Nakao 于 1993 年对柯西问题的研究; 他们将位势井理论在不同的领域里作了相应的推广和应用.

Tsutsumi 在文[1]中研究了一类带 P-Laplace 算子的抛物方程初边值问题

的解的存在性和爆破;Ikeata 在文[13]中研究了一类半线性热方程和带耗散项的双曲型方程的初边值问题得到了关于存在性和爆破的条件，Kosuke 等人在文[14]中研究了一类退化的双曲型方程;Todorova 在文[18]中研究了带耗散和阻尼的双曲方程;Alfredo 在文[19]中研究了一类 Kirchhoff 型双曲方程;杨晗在文[21]中用位势井理论结合算子半群理论研究一类半线性热传导方程不仅得到了解的存在性还得到了其解的增长性质.目前郑州大学的张宏伟，厦门大学的潭忠等一批学者活跃于研究用位势井理论来解决非线性发展方程解的存在性和不存在性.

1.2.2 研究现状

对非线性发展方程的解的整体存在性的研究，已经有了很多的研究结果，总结了不少有效的处理方法.但由于发展方程包含的范围十分广泛，非线性的具体特点又多种多样，因此大量结果往往只是针对某一特定的物理模型，对某一类具体方程的定解问题而得到的，关于非线性发展方程的解的整体存在性的研究，还没有一个统一的处理方法.虽然这些方面的问题是比较难的，目前得到的成果也少，但也是最有挑战性、方兴未艾的领域.下面就与本研究题目相关的，应用 Galerkin 方法及位势井理论的文献做简单叙述.

文[47]研究了一类用于描述一维弹塑性杆的纵振动问题的非线性四阶波动方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=\sigma(u_x)_x+f(x),\quad x\in(0,1),\quad t>0$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$$

的定解问题．并定义

$$K(u_t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2$$

$$J(u_x,u_{xx})=\frac{1}{2}\|u_{xx}\|^2+\int_\Omega F(u_x)dx$$

$$W=\{u|u\in H_0^2(\Omega),0\le J(\lambda u_x,\lambda u_{xx})<d,0<\lambda<1\}$$

利用紧致的方法及位势井理论证明了，在不同的假设条件下，所研究的初边值问题存在整体弱解、唯一的整体广义解、唯一的整体古典解. 文中从能量的定义出发，对位势井、弱解逐一定义，证明了无井深位势井的有关性质，进一步证明了整体解的存在性. 其运用的理论与证明方法对位势井方法的推广有参考价值.

文[29]利用 Galerkin 方法和改进的势井理论研究了一类具有耗散和阻尼项的 Kirchhoff 型方程

$$u_{tt}-M(\int_\Omega|\nabla u|^2dx)\Delta u+\delta u_t=|u|^\alpha u,\quad x\in\Omega,t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x)$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad t>0$$

初边值问题整体解的存在性. 定义

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\|\nabla u\|^2dx-\frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$I(u)=\int_\Omega\|\nabla u\|^2dx-\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega),I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\}$$

研究了当$M(r)$和α满足一定条件且初值充分小时，方程存在整体解. 该文的思想有很好的借鉴意义.

文[48]研究了一类半线性热方程的初值问题

$$u_t-\Delta u=u^r\quad(r>1)$$
$$u(x,0)=\varphi(r)$$

非负古典解与L^p解的整体存在性，非存在性与blow-up.首先，利用归一化的高斯函数得到了一些新的解的非整体存在的充分条件，这些条件对古典解与L^p解是普遍适用的;然后又讨论了某些非负整体解的存在性.本文不但得到了一些新的结果，而且还简化和统一了某些已知的结果，为进一步研究提供了坚实的理论基础.

文[33]研究了具粘性阻尼的非线性波动方程的初边值问题

$$u_{tt}-2bu_{xxt}+\alpha u_{xxxx}=\beta(|u_x|^{n-1}u_x)_x+f(x),\quad x\in(0,1),\quad t>0$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$$

通过定义

$$J(u)=\frac{1}{2}\alpha\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{n+1}\|u_x\|_{n+1}^{n+1}$$

$$K(u)=\alpha\|u_{xx}\|^2+\beta\|u_x\|_{n+1}^{n+1}$$

$$W=\{u\in H_0^2(\Omega),K(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\}$$

证明了当初值属于位势井W时，对$\beta\in R$，问题存在整体弱解.

文[10]中， 作者用位势井理论研究了强阻尼非线性波动方程的初边值问题，对非线性项假设为$f(u)u\geq 0$.

$$u_{tt}-\alpha\Delta u-\Delta u=f(u),\alpha>0,x\in\Omega,t>0.$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x)$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad t>0$$

在这篇文献中，作者定义

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\alpha}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$I(u)=\|\nabla u\|^2-\alpha\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega),I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\}$$

用与以前不同的方法再次得到了位势井的深度d的值，并且首次得到了位势井内外结构. 而后用位势井方法得到了问题的整体弱解，整体强解的存在性. 最后证明了位势井W及井外集合V在问题的流之下的不变性. 这篇文章是在位势井方法提出之后又一次实质的发展.

文[32]研究了描述弹性杆中纵向波的初边值问题

$$u_{tt}-\Delta u_{tt}-\alpha\Delta u_t-\Delta u=g(u)\,,x\in\Omega,t>0$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x)$$

文中定义

$$K(u_t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_t\|^2$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2-\int_\Omega G(u)dx$$

$$I(u)=\|\Delta u\|^2-\int_\Omega ug(u)dx$$

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega),0\le J(\lambda u)<d,\lambda\in[0,1]\}$$

利用位势井的方法，证明了对比较普遍的函数$g(s)$，问题存在整体弱解. 同时给出$d=\infty$时整体弱解存在性的证明，这也是对临界初值问题的探索. 本文在位势井族的引进、及临界初值问题的探索上有极大的启发和创新.

在文献[2]中作者对传统的位势井方法作了改进，引进了一族位势井，它

包含已知位势井作为特殊情形，并探讨了位势井族的性质及位势井的结构，利用位势井族方法研究了半线性波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=|u|^{p-1}u \qquad x\in\Omega,t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x) \quad u_t(x,0)=u_1(x) \qquad x\in\Omega$$

$$u|_{\partial\Omega}=0 \qquad t\geq 0$$

Ω 为 R^n 中的有界域，$1<p<\infty$ 当 $n=1,2$ 时，$1<p\leq\dfrac{n+2}{n-2}$ 当 $n\geq 3$ 时. 利用此法得到了所研究的问题，关于弱解和强解存在性的新结果，并在 $H_0^1(\Omega)$ 空间对位势井的结构作了细致的分析，首次发现了解的真空隔离现象. 即 $\forall e\in(0,d)$（d 为位势井的深度），初始能量 $0<E(0)\leq e$，则问题的所有解都在真空区域

$$U_e=\left\{u\in H_0^1(\Omega)\left|\left(\frac{p+1}{2C_*^{p+1}}\delta_1\right)^{\frac{1}{p-1}}<\|\nabla u\|<\left(\frac{p+1}{2C_*^{p+1}}\delta_2\right)^{\frac{1}{p-1}}\right.\right\}$$

的外部. 即把 $H_0^1(\Omega)$ 空间分为三个区域，所有解只在一个小球的内部和一个大球的外部出现.

在文献[78]中作者用位势井族研究一类四阶非线性色散、耗散波动方程的初边值问题

$$u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=f(u) \qquad x\in\Omega,t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x) \quad u_t(x,0)=u_1(x) \qquad x\in\Omega$$

$$u|_{\partial\Omega}=0 \qquad t\geq 0$$

其中 $f(u)u\geq 0$. 利用这族位势井得到了全新的整体弱解的存在性及强解的存在性.

文[5]对如下的半线性波动方程的临界初值问题进行了研究，

$$u_{tt}-\Delta u=|u|^{p-1}u,\quad x\in\Omega,t>0$$

$$u(x,0)=u_0,\quad u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,t\geq 0$$

这里，$\Omega\subset R^n$ 为有界域，p 满足条件：

$$若N=1,2,\quad p<2+\alpha<\infty;\ \ 若N\geq 3,1<p\leq\frac{N+2}{N-2}$$

定义如下工具

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$I(u)=\|\nabla u\|^2-\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

及位势井

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega)\,|\,I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\}$$

其中

$$d=\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}}(\sup J(\lambda u))$$

证明了问题存在整体解．有关临界初值的问题一直没有任何结果，该文在这一方面具有重大价值。

位势井理论是研究非线性发展方程的一个重要方法，很多数学家将 Sattinger 提出的位势井理论作了相应的推广和应用，用来研究各种非线性发展方程解的整体存在性与不存在性．但就其本质来讲，这些推广与 Sattinger 原始的位势井理论是相同的，而利用这些位势井方法所得到的结

果也是彼此类似的，即当初始函数$u_0(x)$属于位势井W，且$E(0)$（或$J(u_0)$）小于位势井深度d时，问题存在整体解，且在这个位势井中．另外，对位势井W在它所在的空间$H_0^1(\Omega)$或$W_0^{1,p}(\Omega)$中的结构，对位势井深度d的值或其估值，以及对具有临界初始条件$E(0)=d$（或$J(u_0)=d$）的问题是否存在整体解这些基本重要问题，一直没有任何结果．

1.2.3 本文的工作

在本文中，利用位势井族方法研究了以下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+u^{1+\alpha}\quad,\quad x\in\Omega,t>0 \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega \tag{1.2}$$

$$u(x,t)=0,x\in\partial\Omega \tag{1.3}$$

的初边值问题．其中，$\Omega\subset R^n$为有界域．

要解决的问题是

（1） 建立所研究的问题的位势井族，并探讨相关性质．

（2） 应用位势井族的方法，对已有结果作进一步的推广．

（3） 探讨临界初值问题的解的存在性问题，这是以前没有得到的结果．

（4） 研究解的真空隔离现象．

本文首次将位势井族方法应用于抛物方程．位势井族方法作为位势井方法的改进，使原来的位势井成为其特殊情况．在证明解的存在性问题时改进了前人的结果，而且得到了新的解的结构即解的真空隔离现象．这正是其优越性的体现．

同时，还要进一步研究该方程的临界初值问题．临界初值问题是公认的开放问题（open problem），目前对它的研究成果非常少，是偏微分方程领

域中的一个空白地带.

本文中，用$\|\cdot\|_p$表示$L^p(\Omega)$模，$L^2(\Omega)$模又简记为$\|\cdot\|$，$W^{k,p}$模用$\|\cdot\|_{k,p}$表示及$(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x$.

本文需要用到以下几个结论，我们不加证明的叙述如下：

引理1.1 (Sobolev嵌入定理)设Ω具有锥性质，Ω^k表示Ω与R^n中一个k维平面的交集，$1\le k\le n,m$为正整数，j为非负整数，$1\le p<+\infty$，则有下列嵌入关系：

(1)如果$mp<n$，且$n-mp<k\le n$，则

$$W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega),\quad p\le q\le\frac{np}{n-mp}\tag{1.4}$$

$$W^{j+m,p}(\Omega)\subset W^{j,q}(\Omega),\quad p\le q\le\frac{np}{n-mp}\tag{1.5}$$

$$W^{j+m,p}(\Omega)\subset W^{j,q}(\Omega^k),\quad p\le q\le\frac{kp}{n-mp}\tag{1.6}$$

如果$p=1$，则$m<n$，这时当$n-m=k$时，(1.6)式仍成立．即

$$W^{j+m,1}(\Omega)\subset W^{j,1}(\Omega^{n-m})$$

(2)如果$mp=n$，则对$1\le k\le n$，有

$$W^{j+m,p}(\Omega)\subset W^{j,q}(\Omega^k),\quad p\le q<\infty\tag{1.7}$$

特别是

$$W^{m,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega),\quad p\le q<\infty\tag{1.8}$$

若$p=1$则$m=n$，这时当$q=\infty$时(1.7)、(1.8)仍成立.

(3) 如果$mp>n$，则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\subset C_B^j(\Omega)$$

若Ω具有强局部Lipschitz性质，则上述嵌入关系可改善为下列形式

(1)假定$mp>n>(m-1)p$,则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\subset C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}),0<\alpha\le m-\frac{n}{p}$$

(2)假定$n=(m-1)p$，则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\subset C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}),0<\alpha<1$$

如果$p=1,n=m-1$，则上式对$\alpha=1$也成立.

引理 1.2 对$u\in H^2(\Omega)$，$\|u\|+\|\Delta u\|$为$\|u\|_{2,2}$的等价模，对$u\in H_0^1(\Omega)$，$\|\nabla u\|$为$\|u\|_{1,2}$的等价模.

引理 1.3[16] 若$g(x,t)\in L^q(Q)$，$\{g_m(x,t)\}$于$L^q(Q)$有界，$1<q<\infty$，且$g_m(x,t)\to g(x,t)$于Q几乎处处收敛，则$g_m(x,t)\to g(x,t)$于$L^q(Q)$弱收敛.

引理1.4 设$\{w_j(x)\}$为问题

$$\begin{cases}-\Delta w_j=\lambda_j w_j\\ w_j\big|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的特征函数系，则

i) 当$\Omega\in C^m$时，$w_j(x)\in C^m(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)\subset H^m(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$

ii) $\{w_j(x)\}$构成$L^2(\Omega)$的正交完备系

iii) $\{w_j(x)\}$在$H_0^1(\Omega)$中稠密

iv) $\{w_j(x)\}$在$H^2(\Omega)$中的闭线性扩张为$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$

引理 1.5 若$g(x,t)\in L^q(Q)$，$\{g_m(x,t)\}$于$L^q(Q)$有界，$1<q<\infty$，且

$g_m(x,t) \to g(x,t)$ 于 Q 几乎处处收敛，则 $g_m(x,t) \to g(x,t)$ 于 $L^q(Q)$ 弱收敛.

引理 1.6 假设 $f \in C^k$ ， $u_j(x,t) \in L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$， $k \geq 1$， $1 < p < \infty$， $j = 1,2,\cdots,s$. 则 $f(u_1,u_2,\cdots,u_s) \in L^\infty(0,T;W^{k,p}(\Omega))$.

第2章 位势井族及其性质

2.1 位势井的引进及其性质

为了解决问题（1.1）--（1.3），我们首先考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})+\varphi(u) \tag{2.1}$$

在这里，我们规定，$\varphi(u)=\{u^{1+\alpha}$,当$u\ge 0$时；0, 当$u<0$时$\}$.

对问题（2.1），（1.2），（1.3）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})+\varphi(u) \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega \tag{1.2}$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega, t\ge 0 \tag{1.3}$$

如参考文献[1]一样，我们做如下准备工作.

定义 1 $$J(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$I(u)=\|\nabla u\|_p^p-\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

及位势井

$$W=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\big|I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\} \tag{2.2}$$

这里

$$u^+=\max\{u,0\}$$

其中

$$d=\inf_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ u\neq 0}}(\sup_{\lambda\ge 0}J(\lambda u)) \tag{2.4}$$

在以下定理 2.1—引理 2.16 中，我们一直假设$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，p,α满足条件(H_0)．其中

(H_0)　　若$N \le p, p < 2+\alpha < \infty$；若$N > p, p < 2+\alpha \le \dfrac{Np}{N-p}$

定理 2.1 $d = \inf J(u)$，其中$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，$\|\nabla u\|_p \ne 0, I(u) = 0$．

为了证明定理 2.1，我们首先证明引理 2.2—引理 2.4.

引理 2.2 对任给$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，$\|u^+\|_{2+\alpha} \ne 0$，$g(\lambda) = J(\lambda u)$满足下述性质：

（i）$\lim\limits_{\lambda \to 0} g(\lambda) = 0$，$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = -\infty$；

（ii）存在唯一的解$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(u) > 0$，满足$g'(\bar{\lambda}) = 0$；

（iii）当$0 < \lambda < \bar{\lambda}$时，$g'(\lambda) > 0$；当$\bar{\lambda} < \lambda < \infty$时，$g'(\lambda) < 0$；

（iv）当$0 \le \lambda \le \bar{\lambda}$时，$g(\lambda)$单调增加；当$\bar{\lambda} \le \lambda < \infty$时，$g(\lambda)$单调减少；

（v）$g''(\bar{\lambda}) < 0$

（vi）当$0 < \lambda < \bar{\lambda}$时，$I(\lambda u) > 0$；当$\bar{\lambda} < \lambda < \infty$时，$I(\lambda u) < 0$；$I(\bar{\lambda} u) = 0$．

证明　　$$g(\lambda) = J(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda^{2+\alpha}}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$= \lambda^p\left(\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda^{2+\alpha-p}}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\right)$$

由假设(H_0)，我们可以证明（i）成立.

令

$$g'(\lambda) = \lambda^{p-1}\|\nabla u\|_p^p - \lambda^{1+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} = 0$$

我们得到唯一的

$$\overline{\lambda}=\left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}}\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \tag{2.4}$$

则（ii），（iii），（iv）显然成立.

对上述$\overline{\lambda}$，

$$\begin{aligned}g''(\overline{\lambda})&=(p-1)\overline{\lambda}^{p-2}\|\nabla u\|_p^p-(1+\alpha)\overline{\lambda}^{\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\\&=(p-1)(\overline{\lambda}^{p-2}\|\nabla u\|_p^p-\overline{\lambda}^{\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha})-(2+\alpha-p)\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\\&=-(2+\alpha-p)\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}<0\end{aligned}$$

则（v）成立.

根据（ii），（iii）及$I(u)$的定义，有

$$I(\lambda u)=\lambda^p\|\nabla u\|_p^p-\lambda^{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}=\lambda g'(\lambda)$$

这样，（vi）得证.

推论 2.3 若$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，且$\|u^+\|_{2+\alpha}\neq 0$，则

$$\sup_{\lambda\geq 0}J(\lambda u)=\sup_{\lambda>0}J(\lambda u)=J(\overline{\lambda}u)$$

这里$\overline{\lambda}$由式（2.4）定义.

引理 2.4 若$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，且$\|u^+\|_{2+\alpha}\neq 0$，则

$$J(\lambda^* u)=\sup_{\lambda\geq 0}J(\lambda u) \tag{2.5}$$

当且仅当

$$I(\lambda^* u)=0 \tag{2.6}$$

证明 由推论 2.3 我们有

$$J(\overline{\lambda}u)=\sup_{\lambda\geq 0}J(\lambda u),$$

这里$\bar{\lambda}$由式（2.4）定义．对这个$\bar{\lambda}$，我们有

$$
\begin{aligned}
I(\bar{\lambda}u) &= \bar{\lambda}^{p}\|\nabla u\|_p^p - \bar{\lambda}^{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} \\
&= \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}}\right)^{\frac{p}{2+\alpha-p}}\|\nabla u\|_p^p - \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}}\right)^{\frac{2+\alpha}{2+\alpha-p}}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

另一方面，从$I(\lambda^* u)=0$，我们有

$$
I(\lambda^* u) = (\lambda^*)^p\|\nabla u\|_p^p - (\lambda^*)^{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} = 0
$$

$$
\lambda^* = \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}}\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}
$$

即得到$\lambda^* = \bar{\lambda}$．式(2.5)成立．

下面我们开始证明定理 2.1．

证明 首先，若$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，$u \neq 0$，则$\|u\|_{2+\alpha} \neq 0$．若$\|u^+\|_{2+\alpha} = 0$，则取$v=-u$，这样，$\|v^+\|_{2+\alpha} \neq 0$，于是有

$$
J(v) = \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - \frac{1}{2+\alpha}\|v^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} < \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p = J(u)
$$

因此可得

$$
\inf_{\substack{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ v\neq 0}} J(v) = \inf_{\substack{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|v^+\|_{2+\alpha}\neq 0}} J(v)
$$

$$
\inf_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ u\neq 0}}(\sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u)) = \inf_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|u^+\|_{2+\alpha}\neq 0}}(\sup_{\lambda>0} J(\lambda u)) = \inf_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|u^+\|_{2+\alpha}\neq 0}} J(\bar{\lambda}u)
$$

$$
= \inf_{\substack{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ v\neq 0, I(v)=0}} J(v) = \inf_{\substack{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|\nabla v\|_p\neq 0, I(v)=0}} J(v) \qquad (v=\bar{\lambda}u)
$$

定理 2.1 得证.

引理 2.5 设 $C_*^+=\sup\frac{\|u^+\|_{2+\alpha}}{\|\nabla u\|_p}$，则有 $C_*^+=C_*$.

这里 C_* 是从 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 到 $L^{2+\alpha}(\Omega)$ 的嵌入常数.

$$C_*=\sup\frac{\|u\|_{2+\alpha}}{\|\nabla u\|_p} \tag{2.7}$$

证明 显然，我们可以看到 $0<C_*^+\le C_*$. 令 w 是式（2.7）的一个极值点，

$$C_*=\frac{\|w\|_{2+\alpha}}{\|\nabla w\|_p}$$

取 $v=|w|$，则 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$，$v^+=|w|$ 且 $\|\nabla v\|_p=\|\nabla w\|_p$

这样我们有

$$C_*^+\ge\frac{\|v^+\|_{2+\alpha}}{\|\nabla v\|_p}=\frac{\|w\|_{2+\alpha}}{\|\nabla w\|_p}=C_*.$$

因此，

$$C_*^+=C_*.$$

引理 2.6 $d=\frac{1}{\sigma C_*^\sigma}$，其中 $\sigma=\frac{(2+\alpha)p}{2+\alpha-p}$.

证明 若 $I(u)=0$，$\|\nabla u\|_p\ne0$，由

$$\|\nabla u\|_p^p=\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\le C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\|\nabla u\|_p^p$$

以及

$$J(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$=(\frac{1}{p}-\frac{1}{2+\alpha})\|\nabla u\|_p^p+\frac{1}{2+\alpha}I(u)$$

$$=\frac{2+\alpha-p}{(2+\alpha)p}\|\nabla u\|_p^p$$

这样可得到

$$\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\geq\frac{1}{C_*^{2+\alpha}}$$

$$J(u)\geq\frac{1}{\sigma C_*^{\sigma}}$$

由此及引理 2.5，以及C_*的定义，我们证明了引理 2.6.

引理 2.7　设 $u\in W_0^{1,p}(\Omega), J(u)\leq d$，则$I(u)\geq 0$当且仅当

$$\|\nabla u\|_p^p\leq C_*^{-\sigma}。$$

证明　若$\|\nabla u\|_p^p\leq C_*^{-\sigma}$成立，则

$$\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\leq C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha}=C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\|\nabla u\|_p^p\leq\|\nabla u\|_p^p$$

所以可得

$$I(u)\geq 0$$

另一方面，由$I(u)\geq 0$以及

$$J(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}=\frac{2+\alpha-p}{(2+\alpha)p}\|\nabla u\|_p^p+\frac{1}{2+\alpha}I(u)$$

$$\leq d=\frac{1}{\sigma C_*^{\sigma}}$$

可得　$\|\nabla u\|_p^p\leq C_*^{-\sigma}$。

2.2 位势井族的引进及其性质

为了深入研究位势井的结构，我们引入位势井族的概念。对于$\delta\in(0,1)$，

规定

定义 2 $$J_\delta(u)=\frac{\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$W_\delta=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\big|J_\delta(u)>0,J(u)<d(\delta)\}\cup\{0\}，\quad 0<\delta<1$$

$$d(\delta)=\frac{1-\delta}{p}\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{p}{2+\alpha-p}}$$

引理 2.8 如果$J(u)<d(\delta)$，则$J_\delta(u)>0$当且仅当

$$0<\|\nabla u\|_p<\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \tag{2.8}$$

证明 如果式（2.8）成立，我们有

$$\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\le C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha}=C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\|\nabla u\|_p^p<\frac{2+\alpha}{p}\delta\|\nabla u\|_p^p,$$

$$\frac{\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p>\frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

因此，$J_\delta(u)>0$.

另一方面，如果$J_\delta(u)>0$，则有$\|\nabla u\|_p>0$，从

$$J(u)=\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p+J_\delta(u)\le d(\delta) \tag{2.9}$$

$$\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p\le d(\delta)=\frac{1-\delta}{p}\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{p}{2+\alpha-p}}$$

$$0<\|\nabla u\|_p<\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}$$

式（2.8）得证.

引理 2.9 如果$J(u)\le d(\delta)$，则$J_\delta(u)<0$当且仅当

$$\|\nabla u\|_p > (\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \tag{2.10}$$

证明 如果$J_\delta(u)<0$，且$\|\nabla u\|_p \neq 0$，从

$$\frac{2+\alpha}{p}\delta\|\nabla u\|_p^p < \|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} \le C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\|\nabla u\|_p^p$$

我们得到式（2.10）.

另一方面，由式（2.9），（2.10），

$$J(u)=\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p + J_\delta(u) \le d(\delta)$$

$$J_\delta(u) \le d(\delta)-\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p$$

$$< \frac{1-\delta}{p}(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{p}{2+\alpha-p}} - \frac{1-\delta}{p}[(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}]^p = 0$$

即得到 $J_\delta(u)<0$.

由引理 2.8 及引理 2.9，我们可以得到一个显然的结论.

引理 2.10 如果$J(u)=d(\delta)$，则$J_\delta(u)=0$当且仅当

$$\|\nabla u\|_p = (\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}$$

引理 2.11 作为δ的函数，$d(\delta)$在区间$0\le\delta\le 1$上满足下述性质：

（i） $d(0)=d(1)=0$;

（ii）$d(\delta)$在$\delta_0=\frac{p}{2+\alpha}$处取得最大值$d(\delta_0)=\frac{1}{\sigma C_*^\sigma}$，其中$\sigma=\frac{(2+\alpha)p}{2+\alpha-p}$;

（iii） $d(\delta)$于$[0,\delta_0]$单调增加且于$[\delta_0,1]$单调减少;

（iv）对任一给定的$e\in(0,d(\delta_0))$，方程$d(\delta)=e$恰有两实根$\delta_1\in(0,\delta_0)$及$\delta_2\in(\delta_0,1)$.

证明 $d(\delta)=\dfrac{1-\delta}{p}(\dfrac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{p}{2+\alpha-p}}$

则（i）显然成立.

由

$$d'(\delta)=(\frac{1-\delta}{p}(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{p}{2+\alpha-p}})'$$

$$=A\delta^{\frac{p}{2+\alpha-p}}(\frac{p}{2+\alpha-p}\frac{\delta}{1-\delta}-1)=\frac{p}{2+\alpha-p}A\delta^{\frac{p}{2+\alpha-p}}(\frac{1}{\delta}-\frac{2+\alpha}{p})$$

其中：$A=\dfrac{1}{p}(\dfrac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}})^{\frac{p}{2+\alpha-p}}$

可得驻点

$$\delta_0=\frac{p}{2+\alpha}$$

即有$d(\delta)$最大值

$$d(\delta_0)=\frac{1}{\sigma C_*^{\sigma}}，\text{其中}\sigma=\frac{(2+\alpha)p}{2+\alpha-p}.$$

结论（ii）得证.

由$d'(\delta)$的表示式，(iii)成立显然.

由$d(\delta)$的单调性，（iv）成立显然.

定理 2.12 $d(\delta)=\inf J(u)$，其中$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，$\|\nabla u\|_p\neq 0$，$J_\delta(u)=0$.

证明 若$J_\delta(u)=0,\|\nabla u\|_p\neq 0$，则由

$$J(u)=\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p+J_\delta(u)=\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u\|_p^p$$

及

$$\frac{2+\alpha}{p}\delta\|\nabla u\|_p^p=\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\le C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\|\nabla u\|_p^p$$

即 $J(u)\ge d(\delta)$．由此及引理 2.5，以及 C_* 的定义，我们证明了定理 2.12.

推论 2.13 $d=d(\delta_0)=\dfrac{1}{\sigma C_*^\sigma}$ ，其中 $\sigma=\dfrac{(2+\alpha)p}{2+\alpha-p}$.

证明 这个推论能从定理 2.1，及定理 2.12 得出.

同时由

$$J_{\delta_0}(u)=\frac{1}{p+1}\|\nabla u\|^2-\frac{a}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}=\frac{I(u)}{p+1}$$

我们还有结论：

$$J_{\delta_0}(u)=0 \text{ 等价于 } I(u)=0 .$$

由定理 2.1，定理 2.12 及推论 2.13，我们可以定义如下的位势井族：

$$W_\delta=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,|\,J_\delta(u)>0,J(u)<d(\delta)\}\cup\{0\},\quad 0<\delta<1,$$

$$\overline{W}_\delta=W_\delta\cup\partial W_\delta=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,|\,J_\delta(u)\ge 0,J(u)\le d(\delta)\}$$

显然我们有

$$W_{\delta_0}=W$$

另外我们定义

$$V=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,\middle|\,I(u)<0,J(u)<d\right\},$$

$$V_\delta=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,\middle|\,J_\delta(u)<0,J(u)<d(\delta)\right\},\quad 0<\delta<1,$$

$$\overline{V}_\delta=V_\delta\cup\partial V_\delta=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,\middle|\,J_\delta(u)\le 0,J(u)\le d(\delta)\right\}$$

$$B_\delta=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\Big|\|\nabla u\|_p<(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}\right\}$$

$$\overline{B}_\delta=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\Big|\|\nabla u\|_p\le(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}\right\}$$

$$B_\delta^c=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\Big|\|\nabla u\|_p>(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}\right\}$$

显然有

$$V_{\delta_0}=V$$

注意到$J(u)\le\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p$，因此对于任意的$\delta\in(0,1)$，当

$$0<\|\nabla u\|_p<(1-\delta)^{\frac{1}{p}}(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}$$

则有$J(u)<d(\delta)$且(由引理 2.8) $J_\delta(u)>0$.这意味着$B_{\bar\delta}\subset W_\delta$，$\bar\delta$满足

$$(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\bar\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}=(1-\delta)^{\frac{1}{p}}(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}$$

由此，及引理 2.8 与引理 2.9，我们有

定理 2.14 令W_δ，B_δ，V_δ，B_δ^c及$\bar\delta$如上所定义，则

$$B_{\bar\delta}\subset W_\delta\subset B_\delta,\quad V_\delta\subset B_\delta^c。$$

推论 2.15 $B_{\bar\delta_0}\subset W\subset B_{\delta_0}$，$V\subset B_{\delta_0}^c$

其中

$$B_{\delta_0}=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\Big|\|\nabla u\|_p<C_*^{-\frac{2+\alpha}{2+\alpha-p}}\right\};$$

$$(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\bar\delta_0)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}=(\frac{2+\alpha-p}{2+\alpha})^{\frac{1}{p}}C_*^{-\frac{2+\alpha}{2+\alpha-p}}$$

特别的，从引理 2.8 及引理 2.9，我们获得如下结果：

推论 2.16 假设对给定的 $J(u)<d$，则

（i）$u\in W_\delta(W)$ 当且仅当 $u\in B_\delta(B_{\delta_0})$

（ii）$u\in V_\delta(V)$ 当且仅当 $u\in B_\delta^c(B_{\delta_0}^c)$

引理 2.17 （i）若 $0<\delta'<\delta''\le\delta_0$，则 $W_{\delta'}\subset W_{\delta''}$.

（ii）若 $\delta_0\le\delta'<\delta''<1$，则 $V_{\delta''}\subset V_{\delta'}$.

证明 由及 W_δ, V_δ 的定义及引理 2.9 可得.

引理 2.18 假设对给定的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，$0<J(u)<d$ 成立，$\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=J(u)$ 的两根，则 $J_\delta(u)$ 的符号于区间 $\delta\in(\delta_1，\delta_2)$ 不变.

证明 首先，$J(u)>0$ 意味着 $\|\nabla u\|_p\neq 0$.若 $J_\delta(u)$ 的符号是可变的，则必有一个 $\delta^*\in(\delta_1，\delta_2)$ 使得 $J_{\delta^*}(u)=0$.因此由引理 2.9 定理 2.10 我们有

$$J(u)\ge d(\delta^*)>d(\delta_1)=d(\delta_2),$$

此与 $J(u)=d(\delta_1)=d(\delta_2)$ 矛盾.

推论 2.19 假设对给定的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，$0<J(u)<d$ 成立，$\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=J(u)$ 的两根.则 $J_\delta(u)>0(<0)$ 于 $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$ 当且仅当存在一个 $\bar\delta\in[\delta_1,\delta_2]$ 使得 $J_{\bar\delta}>0(<0)$.

2.3 本章小结

本章针对所研究的抛物方程，首先给出了位势井的定义，对位势井的深度 d 及位势井的性质作了研究．在现有理论的基础上，引入参数 $\delta\in(0,1)$，

给出了位势井族的定义，对位势井深度的值做了推广. 接着证明了与位势井及位势井族相关的一些引理、定理，使我们对 Sobolev 空间中的位势井结构有了比较清楚的认识.

第 3 章 整体解的存在性

3.1 整体解的存在性

在文[1]，Tsutsumi 利用位势井的方法对问题（1.1），（1.2），（1.3）进行了研究，并获得如下结果

定理 3.1 设 p,α 满足 (H_0)，对任给 $u_0(x)\in W$，问题（2.1），（1.2），（1.3）存在整体解 $u(x,t)$： $\forall T>0$， $t\in[0,T]$， 有 $u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，$u\in W$．且满足：

（i）对 $t\geq s\geq 0$，有 $\|u(t)\|\leq\|u(s)\|$；

（ii）若 $N<p$，则解是唯一的；

（iii）对 $t>0$，若 $u_0(x)\geq 0, a.e.\ in\ \Omega$，则 $u(x,t)\geq 0, a.e.\ in\ \Omega$，$u(x,t)$ 是问题（1.1）-（1.3）的一个解．

[注 1]：若 $\|\nabla u_0\|_p\neq 0$， $u_0(x)\in W$，意味着 $u_0(x)$ 满足条件 $J(u_0)<d$，且 $J(u_0)>J_{\delta_0}(u_0)>0$．

下面，我们利用位势井族的方法，从本质上改进定理 3.1 的结果，并进一步证明了整体解满足的一些性质。

定理 3.2 设 p,α 满足 (H_0)，$u_0(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$，假设 $0<J(u_0)<d$ 成立，$\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=J(u_0)$ 的两根，且 $J_{\delta_2}(u)>0$，则问题（2.1），（1.2），（1.3）存在一个整体解 $u(x,t):u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，对 $0\leq t<\infty$，$\delta\in[\delta_1,\delta_1]$，$u\in W_\delta$．且成立

（i）对 $t \ge s \ge 0$，有 $\|u(t)\| \le \|u(s)\|$；

（ii）若 $N < p$，则解是唯一的；

（iii）对 $t > 0$，若 $u_0(x) \ge 0, a.e.\ in\ \Omega$，则 $u(x,t) \ge 0, a.e.\ in\ \Omega$，$u(x,t)$ 是问题（1.1）-（1.3）的一个解.

证明 设 $\{w_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ 是空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的一组完备的基函数系．我们构造问题（2.1），（1.2），（1.3）的近似解

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x)，\quad (m = 1,2,\Lambda\Lambda)$$

满足

$$(u_{mt}, w_s) + a(u_m, w_s) = (\varphi(u_{mt}), w_s), \qquad 1 \le s \le m, \tag{3.1}$$

$$u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} w_j(x) \to u_0(x) \quad in \quad W_0^{1,P}(\Omega) \tag{3.2}$$

这里

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

将(3-1)两边乘 $g'_{sm}(t)$ 再对 s 求和，对 t 积分可得：

$$\int_0^t \|u_{mt}\|^2 \mathrm{d}\tau + J(u_m(t)) = J(u_m(0)), \quad t > 0 \tag{3.3}$$

若 $0 < J(u_0) < d$ 及 $J_{\delta_2}(u_0) > 0$，则由推论 2.19 可得 $J_\delta(u_0) > 0$ 和 $J(u_0) < d(\delta)$，$u_0(x) \in W_\delta$ 于 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$．对任一固定的 $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$，对充分大的 m，我们有 $J_\delta(u_m(0)) > 0$ 且 $J(u_m(0)) < d(\delta)$．

下面证明对充分大的 m 及 $t > 0$ 有 $u_m(t) \in W_\delta$．用反证法，若不然，则必

存在 $t_0>0$，使得 $u_m(t_0)\in\partial W_\delta$，即 $J_\delta(u_m(t_0))=0$ 且 $\|\nabla u_m(t_0)\|_p\neq 0$, 或 $J(u_m(t_0))=d(\delta)$．从式（3.3）我们得到

$$J(u_m(t))\le J(u_m(0))<d(\delta),\qquad t>0 \tag{3.4}$$

由式（3.4）可知，$J(u_m(t_0))=d(\delta)$ 是不可能的．若 $J_\delta(u_m(t_0))=0$ 且 $\|\nabla u_m(t_0)\|_p\neq 0$,则由定理 2.10 可得

$$J(u_m(t_0))\ge d(\delta)$$

这与式（3.4）矛盾.

由式（3.4）以及

$$J(u_m(t))=\frac{1-\delta}{p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p+J_\delta(u_m(t))$$

我们可得，对充分大的 m 及 $t>0$ 有

$$\|\nabla u_m(t)\|_p<\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \tag{3.5}$$

$$\int_0^t\|\nabla u_{mt}\|^2\,d\tau<d(\delta) \tag{3.6}$$

由式（3.4）及（3.6），利用众所周知的紧致的方法与单调算子方法我们能证明问题（2.1），（1.2），（1.3）存在一个整体弱解 $u(x,t)$：$u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，对 $0\le t<\infty$，$u\in W_\delta$．由 δ 的任意性，可得对任意 $\delta\in[\delta_1,\delta_2]$，$t\ge 0$ 时，有 $u\in W_\delta$．

3.2 整体解的性质

推论 3.3 在定理 3.2 的条件下，对 $0\le t<\infty$，有 $u(t)\in\overline{W}_{\delta_1}$．

证明 固定 $t\ge 0$，在 $J_\delta(u)>0$ 和 $J(u)<d(\delta)$ 情况下，令 $\delta\to\delta_1$，我们获

得$J_{\delta_1}(u)>0$和$J(u)<d(\delta_1)$，i.e. $u\in\overline{W}_\delta$

推论 3.4 在定理 3.1 的条件下，定理 3.2 和推论 3.3 也成立，如果$\|\nabla u_0\|=0$，则对$\delta\in(0,1)$，有 $u\in W_\delta$.

证明 注意到若$\|\nabla u_0\|=0$，则$u(t)\equiv 0$是问题（2.1)，（1.2)，（1.3）的一个整体解，因此这个推论是显然的.

并且由$I(u_0)>0$意味着$J_{\delta_0}(u_0)>0$，又由$J_{\delta_2}(u_0)>J_{\delta_0}(u_0)$

由定理 3.2，推论 2.16，推论 3.3 可得

定理 3.5 设p,α，$J(u_0)$，δ_i $(i=1,2)$同定理 3. 2 一样。倘若$u\ (x)\in B_{\delta_2}$，则问题（2. 1)，（1. 2)，（1. 3）存在一个整体解$u(x,t)$：$u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，$u\in\overline{B}_{\delta_1}$，$0\le t<\infty$. 进一步，$u(x,t)$也满足定理 3. 1 的结论（ i ）-（iii)。

3. 3 本章小结

本章我们利用位势井的方法，证明了近似解的模有界，通过已有的结论和单调算子的方法，证明了当初值属于某一区域时，问题存在一个整体弱解。并对这个弱解的性质作了一些讨论。

第 4 章 解的真空隔离

4.1 正则解及其性质

在得到方程整体解的存在性之后，我们要对方程的正则解作一番研究，探讨她们的性质。

引理 4.1 设 p,α 满足

$$(H_1)\qquad 若N\le p,\ p<2+\alpha<\infty;\quad 若N>p,\ p<2+\alpha\le\frac{Np}{N-p}$$

则定理 3.1 中的 $u(x,t)$ 满足

$$\int_0^t\|u_t\|^2d\tau+J(u(t))\le J(u_0),\quad 0<t<T \tag{4.1}$$

证明 由条件 (H_1) 可知从空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 到空间 $L^{2+\alpha}(\Omega)$ 的嵌入是紧的，从式（3.5)，(3.6）可得，存在 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_\nu\}$ 及问题（2.1)，(1.2)，(1.3）存在一个解 $u(x,t)$，使得当 $\nu\to\infty$ 时

$$u_\nu(x,t)\to u(x,t)\ 在\ L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\ 中弱*收敛 \tag{4.2}$$

$$u_{\nu t}(x,t)\to u_t(x,t)\ 在\ L^2(0,T;L^2(\Omega))\quad \forall T>0\ \ 中弱收敛 \tag{4.3}$$

对几乎所有的 $t\in[0,T]$

$$u_\nu(x,t)\to u(x,t)\ 在\ L^{2+\alpha}(\Omega)\ 中强收敛 \tag{4.4}$$

在(3.3)中，取 $m=\nu$，我们有

$$\int_0^t\|u_{\nu t}\|^2d\tau+\frac{1}{p}\|\nabla u_\nu\|_p^p$$

$$=\frac{1}{2+\alpha}\|u_{\nu}^{+}\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}+\frac{1}{p}\|\nabla u_{\nu}(0)\|_{p}^{p}-\frac{1}{2+\alpha}\|u_{\nu}^{+}(0)\|_{2+\alpha}^{2+\alpha} \qquad (4.5)$$

由（4.2）—（4.5）和（3.2），我们有

$$\int_{0}\|u_{t}\|^{2}d\tau+\frac{1}{p}\|\nabla u_{\nu}\|_{p}^{p}\le\liminf_{\nu\to\infty}\int_{0}\|u_{\nu t}\|^{2}d\tau+\liminf_{\nu\to\infty}\frac{1}{p}\|\nabla u_{\nu}\|_{p}^{p}$$

$$\le\liminf_{\nu\to\infty}(\int_{0}\|u_{\nu t}\|^{2}d\tau+\frac{1}{p}\|\nabla u_{\nu}\|_{p}^{p})$$

$$=\liminf_{\nu\to\infty}(\frac{1}{2+\alpha}\|u_{\nu}^{+}\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}+\frac{1}{p}\|\nabla u_{\nu}(0)\|_{p}^{p}-\frac{1}{2+\alpha}\|u_{\nu}^{+}(0)\|_{2+\alpha}^{2+\alpha})$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}(\frac{1}{2+\alpha}\|u_{\nu}^{+}\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}+\frac{1}{p}\|\nabla u_{\nu}(0)\|_{p}^{p}-\frac{1}{2+\alpha}\|u_{\nu}^{+}(0)\|_{2+\alpha}^{2+\alpha})$$

$$=\frac{1}{2+\alpha}\|u^{+}\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}+\frac{1}{p}\|\nabla u_{0}\|_{p}^{p}-\frac{1}{2+\alpha}\|u_{0}^{+}\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

因此，我们得到

$$\int_{0}\|u_{t}\|^{2}d\tau+J(u(t))\le J(u_{0}),\quad 0<t<T$$

定义 4 如果$u=u(x,t)$是问题（2.1），（1.2），（1.3）的一个弱解，并满足式（4.1），$u\in L^{\infty}(0,T;W_{0}^{1,p}(\Omega))$，$u_{t}\in L^{2}(0,T;L^{2}(\Omega))$．则称$u$是该问题的一个正则解.

定理 4.2 设p,α满足(H_0)，$u_0(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$，假设$0<e<d$，其中$\delta_1<\delta_2$是方程$d(\delta)=e$的两个根．则

（i）倘若$I(u_0)>0$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)=e$的所有正则解都属于W_{δ}，其中$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$.

（ii）倘若$I(u_0)<0$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)=e$

的所有正则解都属于V_δ，其中$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$.

证明

（i）设$u(t)$是问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)=e$及$I(u_0)>0$的任一个正则解，T是$u(t)$存在的时间.

首先，由推论2.19我们知道$J_\delta(u_0)>0$，$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$. 因此$u_0(x)\in W_\delta$，$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$.

下面我们证明$u(t)\in W_\delta$，$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$，$0<t<T$. 事实，若不然，则必存在$t_0\in(0,T)$，使得$u(t_0)\in\partial W_\delta$，即对某些$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$，有$J_\delta(u(t_0))=0$且$\|\nabla u_m(t_0)\|_p\neq 0$,或$J(u(t_0))=d(\delta)$. 从式（4.5）我们得到

$$J(u(t))\le J(u(0))<d(\delta),\qquad 0<t<T \tag{4.6}$$

从（4.6）我们发现$J(u_0)=d(\delta)$是不可能的. 另一方面，若$J_\delta(u(t_0))=0$，$\|\nabla u_m(t_0)\|_p\neq 0$,则由定理2.10，我们可得$J(u(t_0))\ge d(\delta)$，这与（4.6）矛盾.

（ii）设$u(t)$是问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)=e$及$I(u_0)<0$的任一个正则解，T是$u(t)$存在的时间.

首先，由推论2.19我们知道$J_\delta(u_0)<0$，$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$. 根据这个结果及$J(u_0)<d$，可得$u_0(x)\in V_\delta$，$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$.

下面我们证明$u(t)\in V_\delta$对$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$，$0<t<T$. 若不然，则必存在$t_0\in(0,T)$，使得$u(t_0)\in\partial V_\delta$，即对某些$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$，有$J_\delta(u(t_0))=0$，或$J(u(t_0))=d(\delta)$. 从（4.6）我们发现$J(u_0)=d(\delta)$是不可能的. 另一方面，

设t_0是第一时间使得$J(u(t_0))=0$，则对$0\le t<t_0$，$J_\delta(u(t))<0$. 从（4.6）及引理2.9可得$u(t)\in B_\delta^c$，因此有$u(t_0)\in \overline{B}_\delta^c$.

利用定理2.12，我们有$J(u(t_0))\ge d(\delta)$，这与（4.6）矛盾. 定理4.2得证.

从定理4.2及引理2.11，我们有如下结果

定理4.3 设p,α，$u_0(x)$，$e,\delta_i\ (i=1,2)$如定理4.1中的一样，则

（i）倘若$I(u_0)>0$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0<J(u_0)\le e$的所有正则解都属于W_δ，其中$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$.

（ii）倘若$I(u_0)<0$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0<J(u_0)\le e$的所有正则解都属于V_δ，其中$\delta\in[\delta_1,\delta_2]$.

推论4.4 设p,α，$u_0(x)$，$e,\delta_i\ (i=1,2)$如定理4.1中的一样，则

（i）倘若$I(u_0)>0$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0<J(u_0)\le e$的所有正则解都属于$\overline{W}_{\delta_1}$.

（ii）倘若$I(u_0)<0$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0<J(u_0)\le e$的所有正则解都属于$\overline{V}_{\delta_2}$.

证明 设$u(t)$是问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0<J(u_0)\le e$的任一个正则解，T是$u(t)$存在的时间. 从（4.5）可得$J(u)\le d(\delta_1)=d(\delta_2)$

对问题（i），在$J_\delta(u)>0$的情况下，固定$t\in[0,T]$，令$\delta\to\delta_1$，我们可得在$0\le t<T$时$J_{\delta_1}(u)\ge 0$.

对问题（ii），在$J_\delta(u)<0$的情况下，固定$t\in[0,T]$，令$\delta\to\delta_2$，我们可得

在$0 \le t < T$时$J_{\delta_1}(u) \le 0$.

由推论 4.4 及推论 2.16 可得

4.2 解的真空隔离

定理 4.5 设p,α，$u_0(x)$，$e,\delta_i\ (i=1,2)$如定理 4.1 中的一样，则

（i）倘若$u_0(x) \in B_{\delta_0}$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0 < J(u_0) \le e$的所有正则解都属于球$\overline{B}_{\delta_1}$内（也可以是∂B_{δ_1}）.

（ii）倘若$u_0(x) \in B_{\delta_0}^c$，问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0 < J(u_0) \le e$的所有正则解都属于属于球B_{δ_2}内（也可以是∂B_{δ_2}）.

由定理 4.4 的结果，对于$\forall e \in (0,d)$，都存在一个解的真空区域

$$U_e = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \middle| \left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta_1\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} < \|\nabla u\|_p < \left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{p+1}}\delta_2\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \right\}$$

问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$0 < J(u_0) \le e$的所有解，不可能出现在U_e内，我们把这种现象成为解的真空隔离现象.

其中真空区域U_e随着e的增大而减小，当$e=0$时U_e达到最大

$$U_e = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \middle| 0 < \|\nabla u\|_p < \left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \right\}$$

事实上，我们还有下述结果

定理 4.6 设p,α，$u_0(x)$如定理 4.1 中的一样，则问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)=0$的所有正则弱解都位于球B_1外（也可以是∂B_1）.

证明 设$u(t)$是问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)=0$的任一个正则弱解，T是$u(t)$存在的时间．从（4.5）可得

$$J(u(t))\le J(u_0)=0,\quad 0<t<T \tag{4.7}$$

再由

$$\frac{2+\alpha}{p}\|\nabla u\|_p^p\le\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\le C_*^{2+\alpha}\|\nabla u\|_p^{2+\alpha-p}\|\nabla u\|_p^p$$

可得对任何$t\in[0,T)$必有$\|\nabla u\|_p=0$或者

$$\|\nabla u\|_p\ge\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \tag{4.8}$$

假设$\|\nabla u_0\|_p=0$，对$0<t<T$，我们证明$\|\nabla u\|_p\equiv 0$.

用反证法，若不然，则必存在$t\in(0,T)$，使得$u(t)\in U_0$，这与上述关于$\|\nabla u(t)\|_p$的结论矛盾．

通过一个类似的过程，可证明若$u_0(x)$满足（4.8），则$u(t)$满足（4.8）于$0<t<T$.

定理 4.7 设p,α，$u_0(x)$如定理 4.1 中的一样，则问题（2.1），（1.2），（1.3）满足初始条件$J(u_0)<0$的所有正则弱解都满足

$$\|\nabla u\|_p>\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \tag{4.9}$$

并且

$$\|\nabla u\|_p\ge\left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}(-qJ(u_0))^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{4.10}$$

证明 首先，由定理 4.6 的证明，可得（4.9），另一方面，利用不等式

$$\frac{1}{p}a^{p}+b=\frac{1}{p}a^{p}+\frac{((qb)^{\frac{1}{q}})^{q}}{q}\geq a(qb)^{\frac{1}{1+\alpha}},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{4.11}$$

以及（4.5），我们有

$$\frac{1}{2+\alpha}\left\|u^{+}\right\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\geq\frac{1}{p}\left\|\nabla u\right\|_{p}^{p}-J(u_{0})\geq(-qJ(u_{0}))^{\frac{1}{q}}\left\|\nabla u\right\|_{p} \tag{4.12}$$

从（4.12）可得

$$\left\|u^{+}\right\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}\leq C_{\cdot}^{2+\alpha}\frac{1}{p}\left\|\nabla u\right\|_{p}^{1+\alpha}\left\|\nabla u\right\|_{p}$$

这样可推出（4.10）.

定理 4.8 如果在定理 4.1—定理 4.6 中，我们进一步假设 $u_{0}(x)\geq 0$，则定理 4.2—定理 4.7 的结论同样满足问题（1.1），（1.2），（1.3）.

4.3 本章小结

我们定义了正则解，同时探讨了在不同的初值状态下，问题的正则解存在的区域。然后又研究了解的真空隔离现象，这个结论对我们研究 Sobolev 空间中解的分布情况有很大帮助

第5章 临界初值问题的研究

5.1 临界初值问题

前文，我们对初值位于所定义的位势井内的问题作了研究，得到了抛物方程存在整体解的结论．可是，若初值属于位势井的边界，结论是什么样的？这个问题一直没有人探讨，在双曲方程中，类似的问题也没有任何结论．这是偏微分方程研究领域中公认的一个公开问题（open problem）．直到2004年，刘亚成教授在Nonlinear Analysis上撰文，对如下的半线性波动方程的临界初值问题进行了研究．

$$u_{tt}-\Delta u=|u|^{p-1}u,\quad x\in\Omega,t>0$$

$$u(x,0)=u_0,\quad u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,t\geq 0$$

这里，$\Omega\subset R^n$ 为有界域，p 满足条件：

若$N=1,2,\quad p<2+\alpha<\infty$；若$N\geq 3,1<p\leq\dfrac{N+2}{N-2}$

定义如下工具

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$I(u)=\|\nabla u\|^2-\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

及位势井

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega)\,|\,I(u)>0,J(u)<d\}\cup\{0\}$$

其中

$$d = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} (\sup J(\lambda u))$$

利用位势井的理论证明了，若$u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$，$u_1(x) \in L^2(\Omega)$，$E(0)=d$，且$I(u_0)>0$或者$I(u_0)=0$，$0<E(0)\le d$，则上述半线性波动方程的临界初值问题存在一个整体解u，$u \in \overline{W}$，$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$，$u_t \in L^\infty(0,T;L_0^2(\Omega))$，对所有的$t \in [0,\infty)$成立.

这篇文献的思路及论证方法，对本文研究的抛物方程的临界初值问题有极大的指导作用，我们利用位势井原理，研究临界初值问题解的存在性．我们先定义条件

$$(H_1) \qquad 若 N \le p,\ p<2+\alpha<\infty;\quad 若 N>p,\ p<2+\alpha \le \frac{Np}{N-p}$$

5.2 解的存在定理

定理 5.1 设 p,α 满足(H_1)，$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$，假定$J(u_0)=d$，$I(u_0)>0$或者$I(u_0)=0$，$0<J(u_0)\le d$，则问题（2.1)，(1.2)，(1.3）存在一个整体解$u(t) \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，且有$u(t) \in \overline{W}$，于$0 \le t < \infty$上．这里

$$\overline{W} = W \cap \partial W = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) | I(u) \ge 0, J(u) \le d\}$$

证明 令$\lambda_m = 1-\frac{1}{m}$，$u_{0m}(x)=\lambda_0 u_0(x), m=2,3,\Lambda$．考虑初值条件

$$u(x,0)=u_{0m}(x) \tag{5.1}$$

和相应的问题（2.1)，(1.2)，(1.3).

首先，由$I(u_0)\ge 0$和（2.1)，我们有

$$\overline{\lambda}=\left(\frac{\|\nabla u_0\|_p^p}{\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}}\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}}\geq 1$$

由$0<\lambda_m<1$及引理 2.2 可得

$$I(u_{0m})=I(\lambda_m u_0)>0\,,\quad J(u_{0m})=J(\lambda_m u_0)<J(u_0)\leq d$$

另一方面，由

$$J(u)=\frac{2+\alpha-p}{(2+\alpha)p}\|\nabla u\|_p^p+\frac{1}{2+\alpha}I(u)$$

可得

$$J(u_{0m})>0$$

由定理 3.1，注释 1 和引理 4.1，可得当$m\geq 2$时，问题（2.1)，(1.2)，(1.3) 存在一个整体解$u_m(t)\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_{mt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，且对$0\leq t<\infty$，有$u_m(t)\in\overline{W}$满足

$$(u_{mt},v)+a(u_m,v)=(\varphi(u_m),v),\qquad \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega),t\geq 0 \tag{5.2}$$

$$\int_0\|u_{mt}\|^2\mathrm{d}\tau+J(u_m(t))\leq J(u_m(0))=J(u_{0m})<d,\quad \forall t\geq 0 \tag{5.3}$$

$$\int_0\|u_{mt}\|^2\mathrm{d}\tau+\frac{2+\alpha-p}{(2+\alpha)p}\|\nabla u_m\|_p^p+\frac{1}{2+\alpha}I(u_m)<d,\quad \forall t\geq 0 \tag{5.4}$$

这里$a(u,v)=\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$

由（5.4）及$I(u_m)>0$，可得

$$\int_0\|u_{mt}\|^2\mathrm{d}\tau,\frac{2+\alpha-p}{(2+\alpha)p}\|\nabla u_m\|_p^p<d,\quad \forall t\geq 0 \tag{5.5}$$

因此存在u，ξ及$\{u_m\}$的子序列$\{u_\nu\}$使得当$\nu\to\infty$时

$u_v(x,t) \to u(x,t)$ 在 $L^\infty(0,\infty;W_0^{1,p}(\Omega))$ 中弱 * 收敛

$u_{vt}(x,t) \to u_t(x,t)$ 在 $L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$ 中弱收敛

$\varphi(u_v) \to \xi$ $L^\infty(0,\infty;L^q(\Omega))$ 中弱 * 收敛 $\quad q=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

利用单调算子理论，可得 $\xi=\varphi(u)$

在式（5.2）中，令 $v\to\infty$ 可得

$$(u_t,v)+a(u,v)=(\varphi(u),v), \qquad \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega), t\ge 0$$

另一方面，对 $u_m(0)=u_{0m}$ 令 $m=v\to\infty$ 可得 $u(0)=u_0$ 于 $W_0^{1,p}(\Omega)$. 因此 $u(t)$ 是问题（2.1)，（1.2)，（1.3）的一个整体解. 基于这些，由式（5.3）出发，利用引理 4.1 中同样的证明过程可得 $u(t)$ 满足式(4.1). 于是可得对 $0\le t<\infty$，

$J(u)\le d$.

另一方面，由式（5.5）可得

$$\|\nabla u\|_p^p \le \lim_{v\to\infty}\|\nabla u_v\|_p^p \le \frac{(2+\alpha)p}{2+\alpha-p}d=\sigma\frac{1}{\sigma C_*^\sigma}=C_*^{-\sigma}$$

根据引理 2.6，引理 2.9 可得 $I(u)\ge 0$，对 $0\le t<\infty$， $u(t)\in\overline{W}$ 。因此，定理 5.1 得证.

由定理 5.1 及定理 1 的证明可得下述结论.

推论 5.2 如果在定理 5.1 中作进一步的假设 $u_0(x)\ge 0$，则定理 5.1 中给出的 $u(t)$ 仍是问题（1.1）--（1.3）的解.

在（1.1)，（2.2）中取 $p=2$，我们得到拟线性抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+u^{1+\alpha} \tag{5.6}$$

以及位势井

$$W = \{u \in H_0^1(\Omega) \big| I(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{0\}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{1}{2+\alpha}\|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

$$I(u) = \|\nabla u\|^2 - \|u^+\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}$$

井深d的定义如（2.3）

通过推论 5.2，可得下述结论

推论 5.3

(H_2)　　若$N=1,2$时　$p<2+\alpha<\infty$;　若$N\geq 3$时，$p<2+\alpha\leq \dfrac{Np}{N-p}$

$u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$ 且 $u_0(x)\geq 0$，假设 $J(u_0)=d$，$I(u_0)>0$ 或者 $I(u_0)=0$，$0<J(u_0)\leq d$. 问题（5.6），（1.2），（1.3）存在一个整体解 $u(t)\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$，$u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，且对$0\leq t<\infty$，有$u(t)\in \overline{W}$.

5.3 本章小结

本章我们证明了，对临界初值这种特殊的情况，所研究的抛物方程(2.1)存在整体解。同时我们也证明了，当初值非负时，方程的解非负，并且是方程（1.1）的解。

结论

本文以 Sobolev 空间为主要研究工具，利用 Galerkin 方法和位势井族方法研究了一类抛物方程初边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+u^{1+\alpha}\quad,\quad x\in\Omega,t>0$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega$$

$$u(x,t)=0,x\in\partial\Omega$$

的整体解存在性，其中 $\Omega\subset R^n$ 为有界域。用位势井族方法对抛物方程初边值问题的研究，目前还没见到相关的文献。本文首次利用这种新方法证明方程整体解的存在性，并研究了方程的正则解随初值的的变化而存在的区域，进一步探讨了解的真空隔离现象，最后解决了临界初值状态下，问题整体解的存在性问题。

首先利用新的方法引进了一族位势井，通过证明一系列引理和定理，研究了这族位势井的某些性质及结构，再次用全新的方法得到了位势井深度的值，补充了原位势井理论的不足。

其次，研究了整体解的存在性问题，利用近似解的想法及位势井族，我们证明了结论：

设 p,α 满足 (H_0)， $u_0(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$，假设 $0<J(u_0)<d$ 成立， $\delta_1<\delta_2$ 是方程 $d(\delta)=J(u_0)$ 的两根，且 $J_{\delta_2}(u)>0$，则问题（2.1），（1.2），（1.3）存在一个整体解 $u(x,t)$： $u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$， $u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，对 $0\le t<\infty$， $\delta\in[\delta_1,\delta_1]$， $u\in W_\delta$． 且成立

（ⅰ）对 $t\ge s\ge 0$，有 $\|u(t)\|\le\|u(s)\|$；

（ii）若 $N < p$，则解是唯一的；

（iii）对 $t > 0$，若 $u_0(x) \geq 0, a.e.\ in\ \Omega$，则 $u(x,t) \geq 0, a.e.\ in\ \Omega$，$u(x,t)$ 是问题（1.1）-（1.3）的一个解.

然后研究了方程得正则解及其相关的性质，发现了解的真空隔离现象，即对于 $\forall e \in (0,d)$，都存在一个真空区域

$$U_e = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \middle| \left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{2+\alpha}}\delta_1\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} < \|\nabla u\|_p < \left(\frac{2+\alpha}{pC_*^{p+1}}\delta_2\right)^{\frac{1}{2+\alpha-p}} \right\}$$

满足初始条件 $0 < J(u_0) \leq e$ 的所有解，不可能出现在 U_e 内。

最后研究了临界初值状态下，问题的整体解存在性。得到结论如下：

设 p,α 满足 (H_1)，$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$，假定 $J(u_0) = d$，$I(u_0) > 0$ 或者 $I(u_0) = 0$，$0 < J(u_0) \leq d$，则问题（2.1），（1.2），（1.3）存在一个整体解 $u(t) \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，且有 $u(t) \in \overline{W}$，于 $0 \leq t < \infty$ 上. 这里：$\overline{W} = W \cap \partial W = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) | I(u) \geq 0, J(u) \leq d\}$。

若 $u_0(x) \geq 0$，则上述 $u(t)$ 仍是问题（1.1）--（1.3）的解.

参考文献

[1] Tsutsumi M. Existence and non-existence of global solutions for nonlinear parabolic equations. Publ.Res.Inst.Math.Sci , 8(1972), 211-229P.

[2] Liu Yacheng. On potential wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations. Jour.Diff.Eqs, 2003, 192(1): 155-169P.

[3] Levine H A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -A(u) + F(u)$. Arch.Rational.mech.Anal , 1973(51) , 371-386P.

[4] Sattinger, D H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations. Arch.Rat. Mech.Anal, 30(1968), 148-172P.

[5] Liu Yacheng, Zhaojunsheng.Nonlinear parabolic equations with critical initial conditions $J(u_0) = d$ or $I(u_0) = 0$ .Nonlinear Analysis, 58(2004) 873-883P.

[6] Liu Yacheng, Zhaojunsheng.On potential wells and applications to semilinear hyperbolic equations and parabolic equations. Nonlinear Analysis, 64(2006) 2665-2687P.

[7] Otani M. On existence of strong solutions for $(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})(t) - \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$. J.Fac.Sci.Univ. Tokyo Sect.IA, 24(1977), 575-605P.

[8] Pao, C V. Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum

Press. New York and London, in 1992.

[9] L. E. Payne and D. H. Sattinger. Saddle Points and Unstability of Nonlinear Hyperboic Equations. Israel. J. Math, 1975, 22:273-303P

[10] 刘亚成，刘萍.关于位势井及其对强阻尼非线性波动方程的应用.应用数学学报. 2004，27(4):133-146 页.

[11] H. A. Levine and R. A. Smith Ames. A Potential Well Theory for the Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition . Math. Meth. in the Appl. Sci, 1987, 9: 127-136P.

[12] Mitsuhiro Nakao, Kosuke Ono. Existence of Global solutins to the Cauchy problem for the semi-linear dissipative wave equations. Math. Z, 1993, 214: 325-342P.

[13] Ryo Ikehata and Takashi Suzuki. Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type. Hiroshima Math. J , 1996, 26:475-491P.

[14] Ryo Ikehata. Some Remarks on the Wave Equations with Nonlinear Damping and Source Terms. Nonlinear Analysis , Theory , Methods&Applications, 1996, 10(27): 1161-1175P.

[15] Kosuke Ono. Blowing up and Global Existence of Solutions for some Degenerate Nonlinear Wave Equations with Some Dissipation. Nonlinear Analysis, Theory, Methods& Applications , 19977(30): 4449-4457P.

[16] Kosuke Ono. Global Existence, Decay, and Blowing up of Solutions for some Mildy Degenerate Nonlinear Kirchhoff Strings. Jounal of Differential Equations, 1997, 137:273-301P.

[17] Tokio Matsuyam. Quasilinear hyperbolic-hyperbolic singular

perturbations with nonmonotone nonlinearity. Nonlinear Analysis, 1999, 35:589-607P.

[18] Grozdena Todorova. Stable and Unstable Sets for the Cauchy Problem for a Nonlinear Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 239:213-226P.

[19] Jorge Alfredo Esquivel-Avila. A characterization of global and nonglobal solutions of nonlinear wave and Kirchhoff equations. Nonlinear Analysis, 2003, 52:1111-1127P.

[20] 杜心华. 一类非线性波动方程混合问题整体解的存在唯一性. 四川师范大学学报(自然科学版). 1994, 17(4):35-42 页.

[21] 杨晗. 一类非线性热传导方程混合问题整体解的存在唯一性. 四川师范大学学报(自然科学版). 1995, 18(1):92-96 页.

[22] 杨从军. 一类拟线性退化抛物型方程的初边值问题. 数学学报. 1995, 38(1):134-139 页.

[23] Hu Maolin. Global solution for the Quasilinear Wave Equations with Viscosity. Advances in Mathematics, 2001, 30(2):123-132P.

[24] 闫春华, 刘若慧, 张桂霞. 具阻尼的 Klein-Gordon 方程组的整体解的存在性. 天中学刊. 2001, 16(2):7-8 页.

[25] 杨林. 一类非线性波动方程解的存在性. 云南大学学报(自然科学版). 2001, 23(2):95-99 页.

[26] 杨林, 王晓兰. 一类非线性波动方程解的唯一性、光滑性. 云南大学学报(自然科学版). 2001, 23(3):166-168 页.

[27] 谭忠. 具有特殊扩散过程的反应扩散方程. 数学学刊. 22A:5(2001), 597-606 页.

[28] 李庆霞. 一类非线性双曲方程的局部解存在性. 数学研究. 2002，35(2):175-180 页.

[29] 李庆霞，谭忠. 具有耗散和阻尼的Kirchhoff型方程的整体解的存在性. 厦门大学学报(自然科学版). 2002，41(4):418-422 页.

[30] 呼青英，张宏伟. 一类非线性双曲方程整体弱解的存在性与非存在性. 数学研究. 2002，35(1):72-78 页.

[31] 张宏伟，呼青英. 具阻尼的 Klein-Gordon 方程组整体解的存在性、衰减性和爆破性. 数学理论与应用. 2002，22(2):34-38，77 页.

[32] 杨宏志，呼青英. 一类非线性发展方程组整体解的存在性和不存在性. 数学的实践与认识. 2002，32(4):658-663 页.

[33] 杨宏志，张宏伟. 具阻尼的非线性波动方程的稳定集与不稳定集. 数学的实践与认识. 2002，32(5):808-812 页.

[34] 张宏伟，呼青英. 一类偶合非线性 Klein-Gordon 方程组的稳定集与不稳定集. 纯粹数学与应用数学. 2002，18(3):207-210 页.

[35] 王培林. 具有 Neumann 边界及临界 Sobolev 指数的半线性抛物方程. 厦门大学学报(自然科学版). 2003，42(2):144-147 页.

[36] 陈勇明. 一类非线性波动方程解的爆破. 重庆工学院学报. 2003，6.

[37] R. A. Adams 著；叶其孝等译. 索伯列夫空间[M]. 北京:人民教育出版社，1981.

[38] 王凡彬. 广义神经传播型非线性拟双曲方程解的爆破和熄灭. 应用数学和力学. 1996;17(11):1039-1043 页.

[39] 宋长明，任华国，高桂芳. 一类非线性波动方程解的爆破问题. 河南科学. 2002；20(2):111-113 页.

[40] 查中伟. 非线性发展方程混合问题解的 Blow-up. 三峡大学学报. 2002，24(3):276-279 页.

[41] 强晓风. 两类双曲型方程解的爆破性质. 广东职业技术师范学院学报. 2000(4):16-19 页.

[42] 张健. 一类双曲发展系统的爆破行为. 应用数学学报. 1993; 16(3):428-429 页.

[43] 陈宁. 某些具有偏差变元的偏微分方程解的振动性. 工程数学学报. 1999; 16(1):37-42 页.

[44] Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo Sect. L, 1996(13): 109-124P.

[45] Levine H A. The role of critical exponents in blow-up theorems. SIAM Rew, 1990;32:262-288P.

[46] Souplet Ph. Blow-up in non-local reaction-diffusion equations. SIAM J. Math. Anal, 1998; 29:1301-1334P.

[47] 张宏伟, 陈国旺. 一类非线性四阶波动方程的位势井方法. 数学物理学报. 2003, 23A(6):758-768 页.

[48] 刘亚成. 半线性热方程整体解的存在性与非存在性. 数学年刊. 18A, 1(1997):65-72 页.

[49] Badiale M. and Tarantello G. A sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics. Arch Rational Mech Anal, 163(2002):259-293P.

[50] Ladyzenskaja O. A. Solonnikov V. A. and Ural' ceva N. N. Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translations of Mathematical Monographs, 23, Amer Math. Soc. Providence, R. L. 1968.

[51] Garcia Azorero, J. P. and Peral Alonso L. Hardy inequalities

and some critical elliptic and parabolic problems. J. of Diff.Equs, 144(1990), 441-476P.

[52] Ye, Q.X. and Li, Z.Y. An introduction to reaction diffusion equations.Science Press, Beijing(in Chinese), 1985.

[53] Nakao M. L^p-estimates of solutions of some nonlinear degenerate diffusion equations. J.Math.Soc.Japan, 37:1(1985), 23-30P.

[54] Fila M. Boundedness of global solutions of nonlinear diffusion equations. J.of Diff.Equs, 98(1992), 226-240P.

[55] Knops, R.J., Levine H.A. and Payne L.E. Nonexistence instability and growth theorems for solutions of a class of abstract nonlinear equations with applications to nonlinear elastrodynamics. Arch. Rational Mech.Anal, 55(1974), 52-72P.

[56] Aguilar J.A.and Peral I. On some nonlinear parabolic equations, preprint U.A.M.(1997).

[57] Arioli G.and Gazzola F. Some results on p-Laplace equations with a critical growth term. Research Report in Mathematics No.14, Dept.Math.Stockholm University, 1996.

[58] Levine H.A.and Bandle C. On the existence and nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains.Trans.Amer.Math.Soc, 655(1989), 595-624P.

[59] Ekeland I. On the variational principle. J.Math.Anal.Appl, 47(1974), 324-353P.

[60] Galaktionov V.and Vazquez J.L. Continuation of blow-up solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions. Comm.Pure Appl.Math, 50(1997).61-67P.

[61] Hardy G. Littlewood J.E.and Polya G. "Inequalities," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1934.

[62] Pucci P.and Serrin J. A general vatiational identity.Indiana University Math.J, 35(3)(1986), 681-703P.

[63] Serrin J. Nonlinear Elliptic Equations of Second Order, AMS Symposium in Partial Differential Equations. Berkeley, Calif. August, 1971.

[64] An Lianjun, Peirce A. A weakly nonlinear analysis of elaseto-plastic microstructure models. SIAM J.App.Math, 1995, 55:136-155P.

[65] Banks H T. Gilliam D S. Shubov V I. Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic systems. Diff. Integ. Equa, 1997, 10:309-332P.

[66] Love A H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elaslicity. Dover, New York, 1964.

[67] Christiansen P L. Lomdahl P.S, Muto V. On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. Nonlinearity, 1990, 4:477-501P.

[68] Steven Paul Levandosky. Decay Estimates for Fourth-Order Wave Equations. Journal of Differential Equations, 1998, 143:360-413P.

[69] Steven Levandosky. Stablility and Instability of Fourth-Order Solitary Waves. Journal of Dynamics and Differential Equations, 1998, 10(1):151-188P.

[70] Juha Berkovits. On the bifurcation of large amplitude solutions

for a system of wave and beam equations. Nonlinear Analysis, 2003, 52:343-354P.

[71] A.S.Ackleh, H.T.Banks and G.A.Pinter. A Nonlinear Beam Equation. Applied Mathematics Letters, 2002, 15:381-387P.

[72] K.Balachandran, J.Y.Park and I.H.Jung. Existence of Solutions of Nonlinear Existensible Beam Equation. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 36:747-754P.

[73] Jia-Quan Liu. Free vibrations for an asymmetric beam equation. Nonliear Analysis, 2002, 51:487-497P.

[74] Thomas Bartsch, Yanheng Ding. Periodic solutions of superlinear beam and membrane equations with perturbations from symmetry. Nonlinear Analysis, 2001, 44:727-747P.

[75] Alberto Aosio. A geometrical nonliear correction to the Timoshenko beam equation. Nonliear Analysis, 2001, 47:729-740P.

[76] S.A.Avdonin, N.G. Medhin, T.L.Sheronova. Identification of a piecewise constant coefficient in the beam equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 114:11-21P.

[77] S.M.Choo, S.K.Chung. Finite element Galerkin solutions for the nonplanar oscillatory beam equations. Applied Mathematics and Computation, 2000, 114:279-301P.

[78] M.X. Wang, Long time behaviors of solutions of a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition, Acta Math. Sinica 39 (1) (1996), 118-124, in Chinese.

[79] M.X. Wang and Y.H. Wu, Global existence and blow up problems

for quasilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, SIAM J. Math. Anal., 24(6)(1993), 1515-1521.

[80] Y.H.Wu, M.X.Wang, Existence and nonexistence of global solution of nonlinear parabolic equation with nonlinear boundary condition, Chinese Ann. of Math., 13(1995), ser. B, 371-378. CMP 96:07 .

[81] H. Levine and L.E. Payne, Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary condition and for the porous medium equation backward in time, J. of Diff. Eqns., 16(1974), 319-334.

[82] W. Walter, On existence and nonexistence in the large of solutions of parabolic differential equation with a nonlinear boundary condition, SIAM J. Math. Anal., 6(1)(1975), 85-90P.

[83] M. Chipot, F. Fila and P. Quittner, Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, Acta Math. Univ. Comenian, 60(1991), 35-103.

[84] J.R. Anderson, Local existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations, Commu. In Partial Diff. Eqns., 16(1)(1991), 105-143.

[85] Engler, H.; Kawohl, B.; Luckhaus, S., Gradient estimates for solutions of parabolic equations and systems, J. Math. Anal. Appl., 147 (1990), 309-329. MR1050207.

[86] Amann, H.: Periodic solutions of semilinear parabolic equations. In: Nonlinear analysis: a collection of papers in honour of Erich

H. Rothe, 1 - 29. New York: Academic Press 1978.

[87] Amann, H.: Parabolic evolutions equations and nonlinear boundary conditions. J. Differ. Equations72, 201 - 269 (1988).

[88] Ishii H. Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations. Jour.Diff.Eqs, 26(1977), 291-319P.

攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果

[1]于涛，徐润章．生物物理中一类反应扩散方程组解的积分估计.哈尔滨工程大学学报,2005,6

[2] 于涛，徐润章.一类发展方程解的爆破.哈尔滨工程大学学报，2006,4

致谢

两年的硕士学习生活转瞬即逝，回首过去，心情感慨万千，这其中的点点滴滴都将成为我今生美好的回忆。

首先感谢我的导师杨海欧教授，感谢杨老师两年来给予的悉心教导和帮助。她渊博的学识、严谨的作风、敬业的精神、宽厚的胸怀和崇高的品质使我身受教益。从导师身上我真正领悟了“学高为师，身正为范”的内涵，这些都为我以后的治学态度和做人标准树立了楷模。

没有导师两年来的谆谆教诲，就没有我今天学业的顺利完成。在论文的选题、写作和修改过程中，都得到了杨教授热情的指导和细致的审阅。在论文即将完成之际，向我的导师表示最诚挚的感谢！