几类非线性微分方程边值问题的可解性

摘 要

在本文中，我们主要应用非线性泛函分析中的半序理论，锥拉伸与锥压缩不动点理论，对一些非线性边值问题进行讨论，全文共分为五章.

第一章是本文的绪论部分. 主要介绍了本文的研究课题.

第二章主要考虑 p-laplacian 算子型奇异边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0 \quad t \in (0,1) \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \phi_p(u'(t)) = u(1) + \theta(\lim\limits_{t\to 1^-} \phi_p(u'(t))) = 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$ 在 $u = 0, t = 0, 1$ 可以有奇性.

在如下条件下：

(H_1) $q \in c(0,1)$，且在 $(0,1)$ 上，$q > 0$，且 $\int_0^{\frac{1}{2}} \phi_q(\int_s^{\frac{1}{2}} q(r)dr)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi_(q)(\int_{\frac{1}{2}}^s q(r)dr)ds < \infty$,

(H_2) $f : [0,1] \times (0,\infty) \to R$ 是连续的. $\theta : R \to R$ 是连续的不减函数，且 $\theta(0) = 0$,

(H_3) 有一个不增的序列 ρ_n 满足 $\lim_{n\to\infty} = 0$, 且对 $\frac{1}{n} \le t \le 1, q(t)f(t,\rho_n) \ge 0$, 其中 $n = 3, 4, \cdots$,

(H_4) 存在一个函数 $\alpha \in c[0,1] \bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(\alpha') \in c^1[0,1]$

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_p(\alpha'(t)) = \partial(\lim_{t\to 1^-} \phi_p(\alpha'(t))) + \alpha(1) = 0$$

在 $[0,1)$ 上 $\alpha > 0$, 对 $n = 3, 4, \cdots$,

$$q(t)f(t,u) + \phi_p(\alpha'(t))' > 0 \quad (t,u) \in [\frac{1}{n}, 1) \times 0 < u < \alpha(t)$$

$$q(t)f(\frac{1}{n}, u) + \phi_p(\alpha'(t))' > 0 \quad (t,u) \in (0, \frac{1}{n}) \times 0 < u < \alpha(t)$$

(H_5) 对每个 $n=3,4,\cdots$, 存在一个函数列 $\beta_n\in c[0,1]\bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(\beta_{n'})\in c^1[0,1]$

$$\lim_{t\to 0^+}\phi_p(\beta_n'(t))\le 0,\quad \theta(\lim_{t\to 1^-}\phi_p(\beta_n'(t)))+\beta_n(1)\ge\rho_n$$

在 [0,1] 上 $\beta_n(t)\ge\rho_n$;

$$\forall t\in[\frac{1}{n},1),q(t)f(t,\beta_n(t))+(\phi_p\beta_n'(t))'\le 0$$

$$\forall t\in(0,\frac{1}{n}],q(t)f(\frac{1}{n},\beta_n(t))+(\phi_p\beta_n'(t))'\le 0$$

(H_6) $\sup\{\max_{t\in[0,1]}\beta_n(t)|n=3,4,\cdots\}<+\infty$

(H_7) $\phi_q(\int_0^1 q(s)g(\alpha(s))ds)<+\infty$

考虑问题 (2.1.1) 正解的存在性. 得出如下结论:

定理 2.2.2 设 $(H_1)-(H_7)$ 成立, 那么问题 (2.1.1) 有一个解 $u\in c[0,1]\bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(u')\in c^1(0,1)$, 且在 [0,1] 上 $u(t)\ge\alpha(t)$.

第三章主要考虑 p-laplacian 算子型奇异边值问题

$$\begin{cases}(\phi_p(x'))'+a(t)f(x(t))=0, & t\in(0,1)\ ,\\ \alpha x(0)-\beta x'(0)=0, & \gamma x(1)+\delta x'(1)=0\ .\end{cases}\tag{3.1.1}$$

其中 $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s,p>1,\ \alpha,\gamma>0,\ \beta,\delta\ge 0,f\in C([0,\infty))$, $a(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上有可数个奇性点. 在条件

(H) 存在数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $t_{i+1}<t_i,(i\in N),t_1<\frac{1}{2},\lim_{i\to\infty}t_i=t*\ge 0$, $\lim_{t\to t_i}a(t)=+\infty\forall\ \ i=1,2,\cdots$,

$$0<\int_0^1 a(s)ds<+\infty.\tag{3.2.0}$$

并且在 [0,1] 的任何子区间上 $a(t)$ 不恒为零. 得出主要结果:

定理 3.2.2 假设条件 (H) 满足，存在 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\mu_k \in (t_{k+1}, t_k)$， $k = 1,2,\cdots$，令 $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足

$$R_{k+1} < \mu_k r(k) < r(k) < \Lambda_1 r_k < R_k, \quad k = 1,2\cdots,$$

其中 $\Lambda_1 \in (\frac{2}{L}, +\infty)$. 对任意的自然数 k, 假定 f 满足:

$(H_1) f(x) \geq (\Lambda_1 r_k)^{p-1}, \forall\, x \in [\mu_k r_k, r_k]$,

$(H_2) f(x) \leq (\Lambda_2 R_k)^{p-1}, \forall\, x \in [0, R_k]$, 其中 $0 < \Lambda_2 < \{(\frac{\beta}{\alpha}+1)\phi_q(\int_0^1 a(s)ds)\}^{-1}$

则 (3.1.1) 有无限多个正解 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，且满足 $r_i \leq \|x_i\| \leq R_i, \quad \forall\, i = 1,2\cdots$.

第四章主要考虑 p-laplacian 算子型方程组边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(x'))' + f(t,x,y) = 0, & t \in (0,1) \\ (\phi_p(x'))' + g(t,x,y) = 0, & t \in (0,1) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

在如下边值条件

$$\begin{cases} \alpha_1\phi_p(x(0)) - \beta_1\phi_p(x'(0)) = 0, \gamma_1\phi_p(x(1)) + \delta_1\phi_p(x'(1)) = 0, \\ \alpha_2\phi_p(y(0)) - \beta_2\phi_p(y'(0)) = 0, \gamma_2\phi_p(y(1)) + \delta_2\phi_p(y'(1)) = 0 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

下的解的存在性.

其中，$\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, \alpha_i > 0,\ \beta_i \geq 0 (i = 1,2) \quad \gamma_i > 0\ \delta i \geq 0\ (i = 1,2)$
$f, g \in c([0,1] * [0,\infty] * [0,\infty), [0,\infty))$

在如下条件成立时:

(H) 若 $x(t), y(t) \in K$, 那么 $x(t) + y(t) \geq \zeta(\|x\| + \|y\|) \quad t \in [\zeta, 1-\zeta]$ 其中 $\zeta \in (0, \frac{1}{2})$ 是常数. 得出主要结果:

定理 4.2.1 假设存在两个不同的正常数 λ 和 η, 使得

$$f(t, x(t), y(t)) \leq \phi_p(m_1\lambda)\ , \quad 0 \leq t \leq 1\ , \quad 0 \leq x, y \leq \frac{\lambda}{2}, \tag{4.2.1}$$

$$g(t,x(t),y(t)) \le \phi_p(m_2\lambda)\ ,\quad 0 \le t \le 1\ ,\quad 0 \le x,y \le \frac{\lambda}{2}, \tag{4.2.2}$$

并且

$$f(t,x(t),y(t)) \ge \phi_p(l\eta)\ ,\quad \theta \le t \le 1-\theta\ ,\quad \theta\eta \le x+y \le \eta, \tag{4.2.3}$$

或

$$g(t,x(t),y(t)) \ge \phi_p(l\eta)\ ,\quad \theta \le t \le 1-\theta\ ,\quad \theta\eta \le x+y \le \eta, \tag{4.2.4}$$

成立.

那么边值问题至少存在一个正解而且介于 λ 和 η 之间.

定理 4.3.1 假设存在 $\lambda > 0$，使 (4.2.1)(4.2.2) 成立，且满足下列条件:

(H_3) $f_0(t) \ge \phi_p(\frac{l}{\theta})$，当 $\theta \le t \le (1-\theta)$, 或者 $g_0(t) \ge \phi_p(\frac{l}{\theta})$, 当 $\theta \le t \le (1-\theta)$,

(H_2) $f_\infty(t) \ge \phi_p(\frac{l}{\theta})$, 当 $\theta \le t \le (1-\theta)$, 或者 $g_\infty(t) \ge \phi_p(\frac{l}{\theta})$, 当 $\theta \le t \le (1-\theta)$, 之一成立,

则边值问题 (4.1.1)-(4.1.2) 存在两个解.

定理 4.3.2 假设存在 $\eta > 0$，使得 (4.2.3)(4.2.4) 之一成立，且满足下列条件:

$$(H_1)\ \ f_0(t) \le \phi_p(m_1),\ \ 0 \le t \le 1,\quad g_0(t) \le \phi_p(m_2),\ \ 0 \le t \le 1,$$

$$(H_4)\ \ f_\infty(t) \le \phi_p(m_1),\ \ 0 \le t \le 1,\quad g_\infty(t) \le \phi_p(m_2),\ \ 0 \le t \le 1,$$

则存在两个正解 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 使得 $\|(x_1,y_1)\| \le \eta \le \|(x_2,y_2)\|$.

第五章本文考虑二阶奇异边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha,\gamma>0,\beta,\delta\geq 0,\rho:=\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$, $f(t,u)\in C([0,\infty),[0,\infty))(H)$ 在 $t=0,1$ 可以有奇性. 得出主要结果如下:

定理 5.2.1 假设存在两个不同的正常数 λ 和 η，使得

(h_1) $f(t,u)\leq m\lambda$ $0\leq t\leq 1$, $0\leq u\leq\lambda$,

(h_2) $f(t,u)\geq l\eta$ $\theta\leq t\leq 1-\theta$, $\theta\eta\leq u\leq\eta$.

那么边值问题 (5.1.1) 至少存在一个解 u(t) 介于 λ 和 η 之间.

定理 5.3.1 假设存在 $\lambda>0$，使得条件 (h_1) 成立，且满足下列条件

$$f_0(t)\geq\frac{l}{\theta},\quad \theta\leq t\leq 1-\theta;\quad f_\infty(t)\geq\frac{l}{\theta},\quad \theta\leq t\leq 1-\theta, \tag{5.3.1}$$

那么问题 (5.1.1) 至少存在两个正解 u_1,u_2 满足 $0<\|u_1\|<\lambda<\|u_2\|$.

定理 5.3.2 假设存在 $\eta>0$，使得条件 (h_2) 成立，且满足条件

$$f_0(t)\leq m,\quad 0\leq t\leq 1,\quad f_\infty(t)\leq m,\quad 0\leq t\leq 1, \tag{5.3.2}$$

那么边值问题 (5.1.1) 至少存在两个解 u_1,u_2，使得 $0<\|u_1\|<\eta<\|u_2\|$.

定理 5.3.3 假设条件 $(H_1),(H_2)$ 成立，且存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2$ 使得条件 (h_1) 对于 $\lambda=\lambda_2(\lambda=\lambda_1)$ 成立，条件 (h_2) 对于 $\eta=\lambda_1(\eta=\lambda_2)$ 成立，那么边值问题 (5.1.1) 至少存在三个正解 u_1,u_2,u_3，满足 $0<\|u_1\|<\lambda_1<\|u_2\|<\lambda_2<\|u_3\|$.

定理 5.3.4 令 $n=2k+1,k\in N,$，假设 $(H_1),(H_2)$ 成立，并存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}$，使条件 $(h_2)((h_1))$ 对于 λ_{2i-1}, $1\leq i\leq k$ 成立, 条件 $(h_1)((h_2))$ 对于 λ_{2i}, $1\leq i\leq k$ 成立, 那么边值问题 (5.1.1) 至少存在 n 个正解 $u_1,u_2,\cdots u_n$, 满足 $0<\|u_1\|<\lambda_1<\|u_2\|<\lambda_2<\cdots<\|u_{n-1}\|<\lambda_{n-1}<\|u_n\|$.

定理 5.3.5 令 $n=2k,k\in N,$，假设 (5.3.1),(5.3.2) 成立，并存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}$，使条件 $(h_1)((h_2))$ 对于 λ_{2i-1}, $1\leq i\leq k$ 成立, 条件 $(h_2)((h_1))$ 对于 λ_{2i}, $1\leq i\leq k$ 成立, 那么边值问题 (5.1.1) 至少存在个 n 正解 $u_1,u_2,\cdots u_n$, 满足 $0<\|u_1\|<\lambda_1<\|u_2\|<\lambda_2<\cdots<\|u_{n-1}\|<\lambda_{n-1}<\|u_n\|$.

关键词

奇异边值问题; 正解; 不动点定理; 锥;

Solvability of Boundary Value Problem for Several Classes of Nonlinear Differential Equations

ABSTRACT

In this paper, we apply theory of ordering, expansion and compression theory, to study some nonlinear BVPs. This paper is composed of five chapters.

In chapter 1, is the introduction of this paper, which introduces the main contents of this paper.

In chapter 2, we deals with the BVP for the one-dimensional p-Laplacian

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \phi_p(u'(t)) = u(1) + \theta(\lim\limits_{t\to 1^-} \phi_p(u'(t))) = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

where $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$, which is singular at $u = 0, t = 0, 1$.

Throughout this paper, we assume that:

(H_1) $q \in c(0,1)$, for all t$\in (0,1)$, with $q > 0$, and $\int_0^{\frac{1}{2}} \phi_q(\int_s^{\frac{1}{2}} q(r)dr)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi_(q)(\int_{\frac{1}{2}}^s q(r)dr)ds < \infty$,

(H_2) $f : [0,1] \times (0,\infty) \to R$ is continuous. $\theta : R \to R$ is continuous and nondecreasing, and $\theta(0) = 0$,

(H_3) There exists a nonincreasing sequence $\{\rho_n\}$ and satisfies $\lim_{n\to\infty} = 0$, and for all t $\in \frac{1}{n} \le t \le 1, q(t)f(t,\rho_n) \ge 0$, where $n = 3, 4, \cdots$,

(H_4) There exists a function $\alpha \in c[0,1] \bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(\alpha') \in c^1[0,1]$

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_p(\alpha'(t)) = \theta(\lim_{t\to 1^-} \phi_p(\alpha'(t))) + \alpha(1) = 0,$$

for all t$\in$[0,1), with $\alpha > 0$, $\forall n = 3, 4, \cdots$,

$$q(t)f(t,u) + \phi_p(\alpha'(t))' > 0 \quad (t,u) \in [\frac{1}{n}, 1) \times 0 < u < \alpha(t),$$

$$q(t)f(\frac{1}{n},u)+\phi_p(\alpha'(t))'>0 \quad (t,u)\in(0,\frac{1}{n})\times 0<u<\alpha(t),$$

(H_5) For all $n=3,4,\cdots$, there exists a sequence of functions $\{\beta_n\}\in c[0,1]\bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(\beta_{n'})\in c^1[0,1]$

$$\lim_{t\to 0^+}\phi_p(\beta_n'(t))\leq 0, \quad \theta(\lim_{t\to 1^-}\phi_p(\beta_n'(t)))+\beta_n(1)\geq \rho_n,$$

at [0,1]$\beta_n(t)\geq\rho_n$;

$$\forall t\in[\frac{1}{n},1),\ q(t)f(t,\beta_n(t))+(\phi_p\beta_n'(t))'\leq 0,$$

$$\forall t\in(0,\frac{1}{n}],\ q(t)f(\frac{1}{n},\beta_n(t))+(\phi_p\beta_n'(t))'\leq 0,$$

(H_6) $\sup\{\max_{t\in[0,1]}\beta_n(t)|n=3,4,\cdots\}<+\infty$,

(H_7) $\phi_q(\int_0^1 q(s)g(\alpha(s))ds)<+\infty$,

We have the main result:

Thorem 2.2.2 Suppose $(H_1)-(H_7)$ hold, then the problem(2.1.1) has a solution $u\in c[0,1]\bigcap c^1(0,1),\phi_p(u')\in c^1(0,1)$, and for all t $\in[0,1]$, with$u(t)\geq\alpha(t)$.

In chapter 3, we discuss the singular boundary problem for the p-laplacian

$$\begin{cases}(\phi_p(x'))'+a(t)f(x(t))=0, & t\in(0,1),\\ \alpha x(0)-\beta x'(0)=0, & \gamma x(1)+\delta x'(1)=0\ .\end{cases} \tag{3.1.1}$$

where $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s,p>1,\ \alpha,\gamma>0,\ \beta,\delta\geq 0,f\in C([0,\infty))$, fand $a(t)$ have infinitely singularities, $\forall t\in[0,\frac{1}{2}]$. We assume that:

(H) $\exists\ \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, satisfies $t_{i+1}<t_i,(i\in N),t_1<\frac{1}{2},\lim_{i\to\infty}t_i=t*\geq 0$. $\lim_{t\to t_i}a(t)=+\infty$,$\forall\ i=1,2,\cdots$,

$$0<\int_0^1 a(s)ds<+\infty. \tag{3.2.0}$$

and in every interval of[0,1] ,with$a(t)\neq 0$.

We have the main result:

Thorem 3.2.2 Assume that condition (H)holds,exists$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, such that $\mu_k \in (t_{k+1}, t_k)$, $k = 1, 2, \cdots$, let$\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$and $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$,such that

$$R_{k+1} < \mu_k r(k) < r(k) < \Lambda_1 r_k < R_k, \quad k = 1, 2\cdots,$$

where $\Lambda_1 \in (\frac{2}{L}, +\infty)$. Furthermore, for each natural number k, assume that f satisfies:

(H_1) $f(x) \geq (\Lambda_1 r_k)^{p-1}$, $\forall\, x \in [\mu_k r_k, r_k]$,

(H_2) $f(x) \leq (\Lambda_2 R_k)^{p-1}$, $\forall\, x \in [0, R_k]$, where $0 < \Lambda_2 < \{(\frac{\beta}{\alpha} + 1)\phi_q(\int_0^1 a(s)ds)\}^{-1}$,

Then the problem(3.1.1)have $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$,and satisfies $r_i \leq \|x_i\| \leq R_i$, $\forall\, i = 1, 2\cdots$.

In chapter 4, we discuss the boundary problem of the classes of p-laplacian equations

$$\begin{cases} (\phi_p(x'))' + f(t, x, y) = 0, & t \in (0, 1), \\ (\phi_p(x'))' + g(t, x, y) = 0, & t \in (0, 1). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1\phi_p(x(0)) - \beta_1\phi_p(x'(0)) = 0, \gamma_1\phi_p(x(1)) + \delta_1\phi_p(x'(1)) = 0, \\ \alpha_2\phi_p(y(0)) - \beta_2\phi_p(y'(0)) = 0, \gamma_2\phi_p(y(1)) + \delta_2\phi_p(y'(1)) = 0. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

the existence of the positive solutions.

where $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i \geq 0 (i = 1, 2)$ $\gamma_i > 0$ $\delta i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ $f, g \in c([0, 1] * [0, \infty] * [0, \infty), [0, \infty))$,

and the following conditions hold:

(H) Suppose $x(t), y(t) \in K$, then $x(t) + y(t) \geq \zeta(\|x\| + \|y\|)$ $t \in [\zeta, 1 - \zeta]$ where $\zeta \in (0, \frac{1}{2})$ is const.

Then we have the main result:

Theorem 4.2.1 Suppose there exists two different consts λ and η, such that

$$f(t,x(t),y(t)) \leq \phi_p(m_1\lambda)\ ,\quad 0 \leq t \leq 1\ ,\quad 0 \leq x,y \leq \frac{\lambda}{2}, \tag{4.2.1}$$

$$g(t,x(t),y(t)) \leq \phi_p(m_2\lambda)\ ,\quad 0 \leq t \leq 1\ ,\quad 0 \leq x,y \leq \frac{\lambda}{2}, \tag{4.2.2}$$

and

$$f(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\eta)\ ,\quad \theta \leq t \leq 1-\theta\ ,\quad \theta\eta \leq x+y \leq \eta, \tag{4.2.3}$$

or

$$g(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\eta)\ ,\quad \theta \leq t \leq 1-\theta\ ,\quad \theta\eta \leq x+y \leq \eta, \tag{4.2.4}$$

satisfy.

Then the boundary value problem has at least one positive solutions which stand between λ and η .

Theorem 4.3.1 Suppose $\exists\lambda > 0$, such that(4.2.1) (4.2.2)hold, and one of the following conditions hold:

(H_3) $f_0(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$, for $\theta \leq t \leq (1-\theta)$, or $g_0(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$, for $\theta \leq t \leq (1-\theta)$,

(H_2) $f_\infty(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$, for$\theta \leq t \leq (1-\theta)$, or $g_\infty(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$, for$\theta \leq t \leq (1-\theta)$,

Then the boundary value problem (4.1.1)-(4.1.2) have two positive solutions.

Theorem 4.3.2 Suppose $\exists\eta > 0$,such that one of(4.2.3)(4.2.4)hold, and one of the following conditions hold.

$$(H_1)\ \ f_0(t) \leq \phi_p(m_1),\ \ 0 \leq t \leq 1,\quad g_0(t) \leq \phi_p(m_2),\ \ 0 \leq t \leq 1,$$

(H_4) $f_\infty(t) \le \phi_p(m_1)$, $0 \le t \le 1$, $g_\infty(t) \le \phi_p(m_2)$, $0 \le t \le 1$,

hen the boundary value problem have two positive solutions. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, such that$\|(x_1, y_1)\| \le \eta \le \|(x_2, y_2)\|$.

In chapter 5, we discuss the two order boundary value problem

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

where $\alpha, \gamma > 0, \beta, \delta \ge 0, \rho := \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$, $f(t,u) \in C([0,\infty),[0,\infty))(H)$ and at $t = 0, 1$ can have singular

We have the main result:

Thorem 5.2.1 Suppose there exists two different constsλ and η, such that

(h_1) $f(t,u) \le m\lambda$ $0 \le t \le 1$, $0 \le u \le \lambda$,

(h_2) $f(t,u) \ge l\eta$ $\theta \le t \le 1-\theta$, $\theta\eta \le u \le \eta$.

Then the boundary value problem (5.1.1)has at least one positive solutions which stand between λ and η.

Theorem 5.3.1 Suppose $\exists\ \lambda > 0$, such that the condition(h_1) hold , and the following condition are satisfied

$$f_0(t) \ge \frac{l}{\theta}, \quad \theta \le t \le 1-\theta; \quad f_\infty(t) \ge \frac{l}{\theta}, \quad \theta \le t \le 1-\theta, \tag{5.3.1}$$

Then the problem (5.1.1) have at least two positive solutions u_1, u_2 such that $0 < \|u_1\| < \lambda < \|u_2\|$.

Theorem 5.3.2 Suppose $\exists\ \eta > 0$, such that the condition(h_2)hold, and the following condition are satisfied

$$f_0(t) \le m, \quad 0 \le t \le 1, \quad f_\infty(t) \le m, \quad 0 \le t \le 1, \tag{5.3.2}$$

Then the problem (5.1.1)have at least two positive solutions u_1, u_2, such that$0 < \|u_1\| < \eta < \|u_2\|$.

Theorem 5.3.3 Suppose the condition(H_1), (H_2)hold,and exists const $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ such that the condition(h_1) for $\lambda = \lambda_2(\lambda = \lambda_1)$hold, the condition $(h_2)$for $\eta = \lambda_1(\eta = \lambda_2)$hold, Then the problem (5.1.1)have at least three positive solutions u_1, u_2, u_3, such that $0 < \|u_1\| < \lambda_1 < \|u_2\| < \lambda_2 < \|u_3\|$.

Theorem 5.3.4 Let $n = 2k + 1, k \in N$, suppose(H_1), (H_2)hold, and exists const$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1}$, such that the condition$(h_2)((h_1))$ forλ_{2i-1}, $1 \leq i \leq k$ hold, the condition $(h_1)((h_2))$ forλ_{2i}, $1 \leq i \leq k$ hold. Then the problem(5.1.1)have at least n positive solutions $u_1, u_2, \cdots u_n$, such that $0 < \|u_1\| < \lambda_1 < \|u_2\| < \lambda_2 < \cdots < \|u_{n-1}\| < \lambda_{n-1} < \|u_n\|$.

Theorem 5.3.5 Let $n = 2k, k \in N$, suppose(5.3.1), (5.3.2) hold, and exists const $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1}$, such that the condition $(h_1)((h_2))$ for λ_{2i-1}, $1 \leq i \leq k$hold, the condition $(h_2)((h_1))$forλ_{2i}, $1 \leq i \leq k$hold. Then the problem(5.1.1)have at least$n$ positive solutions $u_1, u_2, \cdots u_n$, such that $0 < \|u_1\| < \lambda_1 < \|u_2\| < \lambda_2 < \cdots < \|u_{n-1}\| < \lambda_{n-1} < \|u_n\|$.

KEYWORDS

Singular boundary value problem,Positive solution, Fixed point theorem, Cone.

符号说明

本文所用符号，除文中特殊说明外，均按如下规定：

1. $C \subseteq D$ 表示集合 C 包含于集合 D;
2. inf 表示下确界， sup 表示取上确界;
3. $\in$ 表示属于， $\notin$ 表示不属于， $\forall$ 表示任意， $\exists$ 表示存在， $\emptyset$ 表示空集;
4. $\neq$ 表示不等于， $:=$ 表示定义， $\rightarrow$ 表示趋于， $\nrightarrow$ 表示不趋于;
5. $C[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 区间上连续函数的全体;
6. $\overline{C}$ 表示集合 C 的闭包;
7. $C \setminus D$ 表示集合 C 去掉集合 D 中的元素后所剩元素组成的集合;
8. ∂C 表示集合 C 的边界;
9. $\|\cdot\|$ 表示范数.

第一章 绪论

§1.1 引言

随着人们对自然界认识的不断深入，已逐渐认识到非线性科学在数学，物理学，化学，生物学，医学，经济学，工程学，控制论等科学领域的重要性，特别是近年来，人们认识到在有限维空间中，系统产生混沌的本质原因是非线性. 目前，非线性泛函分析已成为现代数学中的一个重要分支，并且在其他分支中发挥重要作用，非线性泛函分析是处理非线性问题的重要有力工具，尤其是处理应用中出现的大量微分方程中发挥不可替代的作用. 在非线性泛函分析中，用锥理论 (半序方法) 来处理方程是直观而又实用的方法，并和拓扑方法相结合有力的推动了现代非线性泛函分析的发展. 在这方面，很多专家都取得了辉煌的成就.

非线性泛函分析理论能够成熟的运用于解决非线性微分边值问题中去，并把解的存在性转化为某个非线性算子的不动点存在性，这一方面的问题实在太多：微分方程的边值问题，初值问题 (包括奇异); 抽象空间中微分方程边值问题，初值问题 (包括奇异);p-laplacian 型微分方程边值问题等.

§1.2 微分方程边值问题的研究

目前，在这方面的专题文章很多：两点边值问题，三点边值问题，四点边值问题， m 点边值问题 (一阶，二阶等) 等等. 多点边值问题在弹性稳定性理论当中有着广泛的应用. 它的研究始于 Il'in 和 Moiseev. 此后， Cupta 等人相继就解的存在性建立了一些结果 (诸如文献 [1]-[3]). 近年来，诸多文献大都是利用非线性项 f 满足某种条件 (例如，次线性或超线性，关于某一变元单调，满足某种增性条件等) 的情况下，从而借助 Green 函数的一些性质给出各种边
满足某种增性条件等) 的情况下，从而借助 Green 函数的一些性质给出各种边

值问题正解的存在性，唯一性，多解性．我们可将非线性项 f 推广到更加一般的形式给予研究，甚至可以将方程推广到方程组的边值问题上去研究．

§1.3　P-laplacian 型边值问题的研究

关于 p-laplacian 型边值问题有着广泛的应用背景，例如非线性偏微分方程的径向对称解，多空介质中的气体湍流问题，弹性理论，血浆问题，宇宙问题等．近年来，已引起人们的广泛关注．特别是当 p=2 或 $\phi_p(x) = x$ 是线性情形时，有大量的文献研究这类问题的正解的存在性．这一问题也是本文的研究重点．

第二章 p-laplacian 算子型奇异边值条件的上下解方法

本章讨论一类具 p-laplacian 算子型奇异边值问题解的存在性. 本章与以往文献的不同主要在于边值条件, 此处的边值条件是带有极限的. 然后通过建立辅助函数, 借助于上下解方法得出正解的存在性.

§2.1 引言

考虑 p-laplacian 算子型奇异边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \phi_p(u'(t)) = u(1) + \theta(\lim\limits_{t\to 1^-} \phi_p(u'(t))) = 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$ 在 $u = 0, t = 0, 1$ 可以有奇性.

对于边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中在 $u = 0, t = 0, 1$ 处可以有奇性, 文 [6] 利用上下解方法, 给出边值问题 (2.1.2) 正解的存在性. 本文主要是通过建立辅助函数, 借助上下解方法, 在不同与 (2.1.2) 的边值条件 (极限边值) 下, 给出了正解的存在性.

§2.2 问题 (2.1.1) 的正解存在性

考虑问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \phi_p(u'(t)) = u(1) + \theta(\lim\limits_{t\to 1^-} \phi_p(u'(t))) = 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

在本节讨论中，我们假设如下条件成立：

(H_1) $q \in c(0,1)$, 且在 $(0,1)$ 上，$q > 0$, 且 $\int_0^{\frac{1}{2}} \phi_q(\int_s^{\frac{1}{2}} q(r)dr)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi_(q)(\int_{\frac{1}{2}}^s q(r)dr)ds < \infty$,

(H_2) $f : [0,1] \times (0,\infty) \to R$ 是连续的．$\theta : R \to R$ 是连续的不减函数，且 $\theta(0) = 0$,

(H_3) 有一个不增的序列 ρ_n 满足 $\lim_{n\to\infty} = 0$, 且对 $\frac{1}{n} \le t \le 1, q(t)f(t,\rho_n) \ge 0$, 其中 $n = 3, 4, \cdots$,

(H_4) 存在一个函数 $\alpha \in c[0,1]\bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(\alpha') \in c^1[0,1]$,

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_p(\alpha'(t)) = \theta(\lim_{t\to 1^-} \phi_p(\alpha'(t))) + \alpha(1) = 0,$$

在 [0,1) 上 $\alpha > 0$, 对 $n = 3, 4, \cdots$,

$$q(t)f(t,u) + \phi_p(\alpha'(t))' > 0, \quad (t,u) \in [\frac{1}{n}, 1) \times 0 < u < \alpha(t),$$

$$q(t)f(\frac{1}{n},u) + \phi_p(\alpha'(t))' > 0, \quad (t,u) \in (0,\frac{1}{n}) \times 0 < u < \alpha(t),$$

(H_5) 对每个 $n = 3, 4, \cdots$, 存在一个函数列 $\beta_n \in c[0,1]\bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(\beta_{n'}) \in c^1[0,1]$,

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_p(\beta_n'(t)) \le 0, \quad \theta(\lim_{t\to 1^-} \phi_p(\beta_n'(t))) + \beta_n(1) \ge \rho_n,$$

在 [0,1] 上 $\beta_n(t) \ge \rho_n$;

$$\forall t \in [\frac{1}{n}, 1), \ q(t)f(t,\beta_n(t)) + (\phi_p\beta_n'(t))' \le 0,$$

$$\forall t \in (0,\frac{1}{n}], \ q(t)f(\frac{1}{n},\beta_n(t)) + (\phi_p\beta_n'(t))' \le 0,$$

(H_6) $\sup\{\max_{t\in[0,1]} \beta_n(t) | n = 3, 4, \cdots\} < +\infty$,

(H_7) $\phi_q(\int_0^1 q(s)g(\alpha(s))ds) < +\infty$,

引理 2.2.1 对

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + f(t,u) = 0, & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

假定下列条件满足

(h_1) $f:(0,1)\times R \to R$ 是连续的，

(h_2) $\exists q \in c(0,1), q>0$. 在 $(0,1)$ 上. 且

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \phi_q(\int_s^{\frac{1}{2}} q(r)dr)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi_q(\int_{\frac{1}{2}}^s q(r)dr)ds < \infty,$$

$s.t$ $|f(t,u)| \le q(t)$, $a.e$ $t \in (0,1)$.

则 (2.1.1) 有解 $u \in c[0,1] \bigcap c^1(0,1), \phi_p(u') \in c^1(0,1)$.

定理 2.2.2 设 $(H_1)-(H_7)$ 成立，那么问题 (2.1.1) 有一个解 $u \in c[0,1] \bigcap c^1(0,1), \phi_p(u') \in c^1(0,1)$, 且在 [0,1] 上 $u(t) \ge \alpha(t)$.

证明：取定 $n \in N^+ = 3,4,\cdots$

考虑边值问题：

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f^*(t,u) = 0, & t \in (0,1), \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \phi_p(u'(t)) = 0, & u(1) + \theta(\lim\limits_{t\to 1^-} \phi_p(u'(t))) = \rho_n. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

其中：

$$f^*(t,u) = \begin{cases} f(\frac{1}{n}, \beta_{n(t)}) + r(\beta_n(t) - u), & u \ge \beta_n(t), 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ f(t, \beta_n(t)) + r(\beta_n(t) - u), & u \ge \beta_n(t), \frac{1}{n} \le t \le 1, \\ f(\frac{1}{n}, u), & \rho_n \le u \le \beta_n(t), 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ f(t,u), & \rho_n \le u \le \beta_n(t), \frac{1}{n} \le t \le 1, \\ f(t, \rho_n) + r(\rho_n - u), & u \le \rho_n, \frac{1}{n} \le t \le 1, \\ f(\frac{1}{n}, \rho_n) + r(\rho_n - u), & u \le \rho_n, 0 \le t \le \frac{1}{n}. \end{cases}$$

且 $r: R \to [-1,1]$ 为:

$$r(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ \dfrac{x}{|x|}, & |x| > 1. \end{cases}$$

由引理 2.2.1, 知 (2.2.2) 式有解, 且 $u_n \in c[0,1] \bigcap c^1(0,1)$, $\phi_p(u_n') \in c^1(0,1)$.

我们先证

$$u_n(t) \ge \rho_n, \quad t \in [0,1). \tag{2.2.3}$$

若 (2.2.3) 不成立, 那么, $u_n(t) - \rho_n$ 在 $t_0 \in [0,1]$ 有一个负的最小值, 当 $t \in (0,1)$ 时, $(u_n(t_0) - \rho_n)' = 0$, 即 $u_n'(t_0) = 0, (\phi_p u_n'(t_0))' = 0$, 而 $(\phi_p u_n'(t_0))'$

$$= -q(t_0) f^*(t, u_n(t_0)) \begin{cases} -q(t)[f(t_0, \rho_n) + r(\rho_n - u_n(t_0))], & \dfrac{1}{n} \le t_0 \le 1; \\ -q(t)[f(\dfrac{1}{n}, \rho_n) + r(\rho_n - u_n(t_0))], & 0 \le t_0 \le \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

$$< 0.$$

当 $t_0 = 0$ 时, $u_n(t_0) - \rho_n < 0$, 因此存在 $\delta > 0$, 当 $0 < t < \delta$ 时, $u_n(t) - \rho_n < 0$,

这样 $\forall t \in (0, \delta)$,

$$\phi_p(u_n - \rho_n)'(t) = -\int_0^t q(s) f^*(s, u_n(s)) ds < 0,$$

矛盾.

当 $t_0 = 1$ 时, $\lim_{t\to 1^-} \phi_p(u_n'(t)) \le 0$ 而 $\theta(\lim_{t\to 1^-} \phi_p(u_n'(t))) = \rho_n - u_n(1) > 0$ 故 $\lim_{t\to 1^-} \phi_p(u_n'(t)) > 0$. 矛盾. 因此 (2.2.3) 式成立.

下证:

$$u_n(t) \le \beta_n(t), \quad t \in [0,1]. \tag{2.2.4}$$

若 (2.2.4) 不成立, 则 $u_n(t) - \beta_n(t)$ 在 $t_0 \in [0,1]$ 有一个正的最大值, 当 $t_0 \in (0,1)$ 时, $\phi_p(u_n - \rho_n)'(t_0) = 0$ 且 $(\phi_p(u_n - \rho_n)'(t_0))' = 0$.

当 $t_0 \in [\frac{1}{n}, 1)$ 时， $u_n(t_0) > \beta_n(t_0)$ 有

$$\begin{aligned}
&(\phi_p(u_n - \beta_n)'(t_0))' \\
=& -q(t_0)f^*(t_0, (u_n - \beta_n)(t_0)) \\
=& -q(t_0)f^*(t_0, u_n(t_0)) + q(t_0)f^*(t_0, \beta_n(t_0)) \\
=& -q(t_0)(f(t, \beta_n(t_0)) + r(\beta_n(t_0) - u_n(t_0))) + q(t_0)f(t_0, \beta_n(t_0)) \\
=& -q(t_0)r(\beta_n(t_0) - u_n(t_0)) > 0,
\end{aligned}$$

矛盾.

当 $t_0 \in (0, \frac{1}{n})$ 时,

$$\begin{aligned}
&(\phi_p(u_n - \beta_n)'(t_0))' \\
=& -q(t_0)f^*(t_0, (u_n - \beta_n)(t_0)) \\
=& -q(t_0)f^*(t_0, u_n(t_0)) + q(t_0)f^*(t_0, \beta_n(t_0)) \\
=& -q(t_0)(f(\frac{1}{n}, \beta_n(t_0)) + r(\beta_n(t_0) - u_n(t_0))) + q(t_0)f(\frac{1}{n}, \beta_n(t_0)) \\
=& -q(t_0)r(\beta_n(t_0) - u_n(t_0)) > 0,
\end{aligned}$$

矛盾. 当 $t_0 = 0$ 时， $\lim_{t\to 0^+} \phi_p((u_n - \beta_n)'(t)) \le 0$ 即 $\lim_{t\to 0^+} \phi_p(\beta_n'(t)) \ge 0$. 由 (H_5) 知， $\lim_{t\to 0^+} \phi_p(\beta_n'(t)) = 0$. 由 $u_n(0) > \beta_n(0)$ 知，有 $0 < \mu < \frac{1}{n}$, $s.t$ $u_n(s) - \beta_n(s) > 0$, $s \in (0, \mu)$ 对 $t \in (0, \mu)$,

$$\begin{aligned}
&\phi_p((u_n - \beta_n)') \\
=& -\int_0^t q(s)f^*(s, u_n - \beta_n)ds \\
=& -\int_0^t q(s)f^*(s, u_n)ds + \int_0^t q(s)f^*(s, \beta_n)ds \\
=& -\int_0^t q(s)(f(\frac{1}{n}, \beta_n(s)) + r(\beta_n(s) - u_n(s))) + \int_0^t q(s)f(\frac{1}{n}, \beta_n(s))ds \\
=& -\int_0^t q(s)r(\beta_n(s) - u_n(s)) \ge 0,
\end{aligned}$$

这与 $u_n(t)-\beta_n(t)$ 在 $t_0=0$ 处，取得最大值相矛盾.

当 $t_0=1$ 时, $\lim_{t\to 1^-}\phi_p((u_n-\beta_n)')\geq 0$, 即 $\lim_{t\to 1^-}\phi_p(u_n')\geq \lim_{t\to 1^-}\phi_p(\beta_n')$

由 H_5 知,

$$\rho_n-u_n(1)=\theta(\lim_{t\to 1^-}\phi_p(u_n'))\geq\theta(\lim_{t\to 1^-}\phi_p(\beta_n'))\geq\rho_n-\beta_n(1),$$

即 $u_n(1)-\beta_n(1)\leq 0$ 矛盾. 因此 (2.2.4) 式成立.

再证

$$u_n(t)\leq\alpha(t),\qquad t\in[0,1]. \tag{2.2.5}$$

若 (2.2.5) 式不成立，则 $u_n(t)-\alpha(t)$ 在 $t_0\in[0,1]$ 有一个负的最小值，当 $t_0\in(0,1)$ 时, $\phi_p((u_n-\alpha)'(t_0)=0$, 且 $(\phi_p((u_n-\alpha)'(t_0))'=0$.

当 $t_0\in[\frac{1}{n},1)$ 时, $0<u_n(t_0)<\alpha(t_0)$, $\rho_n\leq u_n(t_0)\leq\beta_n(t_0)$.

由 (H_4) 知

$$\begin{aligned}&(\phi_p(u_n-\alpha)'(t_0))'\\=&-q(t_0)f^*(t_0,u_n-\alpha)\\=&-q(t_0)f(t_0,u_n)-(\phi_p(\alpha'))'\\=&-[q(t_0)f(t_0,u_n)+(\phi_p(\alpha'))']<0.\end{aligned}$$

矛盾.

当 $t_0\in(0,\frac{1}{n})$ 时，再由 (H_4) 知

$$\phi_p((u_n-\alpha)'(t_0))'=-[q(t_0)f(\frac{1}{n},u_n)+(\phi_p(\alpha'))']ds<0,$$

矛盾.

当 $t_0=0$ 时，存在 $0<\mu<\frac{1}{n}$，使得当 $t\in[0,\mu]$ 时, $0<u_n(t)<\alpha(t)$, $\rho_n\leq u_n(t)\leq\beta_n(t)$, 由 $\lim_{t\to 0^+}\phi_p((u_n-\alpha)')\geq 0$ ，有 $\phi_p((u_n-\alpha)')=-\int_0^t[q(s)f(\frac{1}{n},u_n)+(\phi_p(\alpha'))']ds<0$, 矛盾.

当 $t_0=1$ 时, $\lim_{t\to 1^-}\phi_p((u_n-\alpha)')\leq 0$, 即 $\lim_{t\to 1^-}\phi_p(u_n)'\leq\lim_{t\to 1^-}\phi_p(\alpha)'$

由 (H_4) 知, $\rho_n-u_n(1)\leq-\alpha(1)$, 这样 $u_n(1)-\alpha(1)\geq\rho_n>0$ 矛盾.

因此 (2.2.5) 成立.

我们最后证明 $\{u_n\}_{n\in Z^+}$ 在 $[0,1]$ 上是一致有界和等度连续的.

显然，$\{u_n\}_{n\in Z^+}$ 是一致有界的. 记 $\alpha_0=\sup\{\max_{t\in[0,1]}\beta_n(t)|n=3,4,\cdots\}$ $\forall t\in(0,1)$

$$\begin{aligned}|u_n'(t)|&=|\phi_q\int_0^t q(s)f^*(s,u_n(s))ds|\\&\le\phi_q(1+\frac{h(\alpha_0)}{g(\alpha_0)})\phi_q(\int_0^t q(s)g(\alpha(s))ds).\end{aligned}$$

由 (H_7) 知 $\{u_n\}_{n\in Z^+}$ 是等度连续的. 由 $Arzela-Ascoli$ 定理 [9] 存 $\{u_n\}_{n\in Z^+}$ 在的子序列不失一般性，仍记为 $\{u_n\}_{n\in Z^+}$ 在 $[0,1]$ 上，一致收敛于 $u\in c[0,1]$.

取定 $t\in(0,1)$ 当 $\frac{1}{n}<t<1$ 时,

$u_n(t)$ 满足

$$u_n(t)=u_n(0)+\int_0^t\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f^*(x,u_n(x))dx)ds.$$

其中 τ 是方程

$$\int_0^1\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f^*(x,u_n(x))dx)ds=u(1)-u(0).$$

的解. 由于 ϕ_p 与 ϕ_q 都是单调增加的，所以满足上述等式的 τ 是唯一确定的.

定义算子 $N_\lambda:c[0,1]\to c[0,1]$ 如下:

$$N_\lambda u(t)=u(0)+\int_0^t\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f^*(x,u(x))dx)ds. \tag{2.2.6}$$

由文献 [2] 知， N_λ 是全连续的.

$$\begin{aligned}u_n(t)&=u_n(0)+\int_0^t\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f^*(x,u_n(x))dx)ds\\&=u_n(0)+\int_0^{\frac{1}{n}}\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f(\frac{1}{n},u_n(x))dx)ds\\&\quad+\int_{\frac{1}{n}}^t\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f(x,u_n(x))dx)ds.\end{aligned}$$

由于 $f(s,u)$ 在 $[0,1]\times(0,\alpha_0]$ 的任一紧子集上一致连续，故当 $n\to\infty$ 时

$$u(t)=u(0)+\int_0^t\phi_q(\tau+\int_0^s q(x)f(x,u(x))dx)ds,$$

显然 $u(t)\geq\alpha(t)>0,\quad t\in(0,1)$ 且 $u(1)+\theta(\lim_{t\to 1^-}\phi_p(u'(t)))=0$, 由 (2.2.6) 式知

$$\phi_p(u')=-\int_0^t q(s)f(s.u(s))ds,\quad t\in(0,1),$$

这样 $\lim_{t\to 0^+}\phi_p(u'(t))=0,\quad (\phi_p(u)')'+q(t)f(t,u)=0,\quad 0<t<1.$

所以 $u(t)$ 是 (2.1.1) 式的解，且满足 $u\in c[0,1]\bigcap c^1(0,1)$. $\phi_p(u')\in c^1(0,1)$.

第三章　具有无限多个奇性点的一维 p-laplacian 方程的正解

近来，对于这类问题，许多作者都得出了存在性结果．例如 [10]．对于奇异性问题的研究，文章越来越多，但对无限多个奇性点的结果还很少．本文就是在这种假设下利用锥压缩与锥拉伸定理得出多重解的存在性．

§3.1　引言

考虑 p-laplacian 算子型奇异边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(x'))' + a(t)f(x(t)) = 0, & t \in (0,1)\ , \\ \alpha x(0) - \beta x'(0) = 0, & \gamma x(1) + \delta x'(1) = 0\ . \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1$，$\alpha, \gamma > 0$．$\beta, \delta \geq 0, f \in C([0,\infty)), a(t)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上有可数个奇性点．近来，对于这类问题，许多作者都得出了存在性结果．例如 [1]．对于奇异性问题的研究，文章越来越多但对无限多个奇性点的结果还很少本文就是在这种假设下，利用 Kransnoselakii 不动点定理得出无限多个解的存在性．

首先，我们叙述前面提到的 Kransnoselakii 不动点定理，这是本文主要结果的理论依据．

引理 3.1.1　[11] 设 E 为 Banach 空间，$K \subset E$ 是 E 的一个锥，又假设 Ω_1, Ω_2 是 E 中的开子集，满足 $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$，映射 $T : K \bigcap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1) \to K$ 是全连续算子，且使

(i)$\|Tu\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$，同时 $\|Tu\| \geq \|u\|, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$；或者

(ii)$\|Tu\| \geq \|u\|, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$，同时 $\|Tu\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$ 成立，

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 中至少存在一个不动点.

设 $E=C[0,1]$，定义 $x\in E$ 的模为 $\|x\|=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)|$，再定义锥为:

$$K=\{u\in E|u(t)\text{是 }[0,1]\text{ 上的非负凹函数}\}.$$

引理 3.1.2 令 $x\in K,\mu\in(0,\frac{1}{2})$，则

$$x(t)\ge\mu\|x\|,\quad t\in[\mu,1-\mu],$$

其中 $\|x\|=\sup\{x(t):0\le t\le 1\}$.

证明：设 $\tau=\inf\{\xi\in[0,1]:\sup_{t\in[0,1]}x(t)=x(\xi)\}$.

我们分三种情况讨论.

(1)$\tau\in[0,\mu]$. 由 x(t) 的凹性我们知道，在两点 $(\tau,x(\tau))$ 和 $(1,x(1))$ 弦上的每一点均在 x(t) 图象之下，因此我们有

$$x(t)\ge x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau),\quad t\in[\mu,1-\mu].$$

从而有

$$\begin{aligned}x(t)&\ge\min_{t\in[\mu,1-\mu]}[x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau)]\\&=x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(1-\mu-\tau)\\&=\frac{1-\mu-\tau}{1-\tau}x(1)+\frac{\mu}{1-\tau}x(\tau)\\&\ge\mu x(\tau),\end{aligned}$$

这意味着

$$x(t)\ge\mu\|x\|.$$

(2) $\tau\in[\mu,1-\mu]$. 若 $t\in[\mu,\tau]$，同样我们有,

$$x(t)\ge x(\tau)+\frac{x(\tau)-x(0)}{\tau}(t-\tau),\quad t\in[\mu,\tau].$$

因此

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \min_{t\in[\mu,\tau]}[x(\tau)+\frac{x(\tau)-x(0)}{\tau}(t-\tau)] \\ &= \frac{\mu}{\tau}x(\tau)+(1-\frac{\mu}{\tau})x(0) \\ &\geq \mu x(\tau). \end{aligned}$$

若 $t\in[\tau,1-\tau]$，同样

$$x(t)\geq x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau), \quad t\in[\tau,1-\mu].$$

从而有

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \min_{t\in[\tau,1-\mu]}[x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau) \\ &= \frac{\mu}{1-\tau}x(\tau)+\frac{1-\mu-\tau}{1-\tau}x(1) \\ &\geq \mu x(\tau), \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$x(t)\geq \mu\|x\|, \quad t\in[\mu,1-\mu].$$

(3) $\tau\in[1-\mu,1]$, 同样我们有

$$x(t)\geq x(\tau)+\frac{x(\tau)-x(0)}{\tau}(t-\tau), \quad t\in[\mu,1-\mu].$$

因此有

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \min_{t\in[\mu,1-\mu]}[x(\tau)+\frac{x(\tau)-x(0)}{\tau}(t-\tau)] \\ &= \frac{\mu}{\tau}x(\tau)+(1-\frac{\mu}{\tau})x(0) \\ &\geq \mu x(\tau). \end{aligned}$$

这就导出了

$$x(t)\geq \mu\|x\|, \quad t\in[\mu,1-\mu].$$

证毕.

在第 2 节中，我们将给出主要结果和证明

§3.2 主要结果和证明

本文中我们总假设 $a(t)$ 满足下列条件:

(H) 存在数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $t_{i+1} < t_i, (i \in N), t_1 < \frac{1}{2}, \lim_{i\to\infty} t_i = t* \geq 0$, $\lim_{t\to t_i} a(t) = +\infty \forall \ i = 1, 2, \cdots$,

$$0 < \int_0^1 a(s)ds < +\infty. \tag{3.2.0}$$

并且在 [0,1] 的任何子区间上 $a(t)$ 不恒为零.

若 (H) 满足容易得出

$$0 < \int_0^1 \phi_q(\int_0^s a(s_1)ds_1)ds < \infty, \tag{3.2.1}$$

其中 $\phi_q(s)$ 为 $\phi_p(s)$ 的逆， $\phi_q(s) = |s|^{q-2}s, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

引理 3.2.1 假定 (H) 满足，则有

$$0 < \int_{t_1}^{1-t_1} a(t)dt < +\infty, \tag{3.2.2}$$

进一步有

$$A(t) = \int_{t_1}^{t} \phi_q(\int_s^t a(s_1)ds_1)ds + \int_t^{1-t_1} \phi_q(\int_t^s a(s_1)ds_1)ds, \tag{3.2.3}$$

在 $[t_1, 1-t_1]$ 上是正的连续函数，从而， A(t) 在 $[t_1, 1-t_1]$ 上有最小值 $L > 0$.

证明：首先容易得 A(t) 在 $[t_1, 1-t_1]$ 上是连续的.

令

$$A_1(t) = \int_{t_1}^{t} \phi_q(\int_s^t a(s_1)ds_1)ds, \quad A_2(t) = \int_t^{1-t_1} \phi_q(\int_t^s a(s_1)ds_1)ds,$$

由 (H) 知， $A_1(t)$ 在 $[t_1, 1-t_1]$ 上是严格单调增的，且 $A_1(t_1) = 0$ $A_2(t)$ 在 $[t_1, 1-t_1]$ 上是严格单调减的，且 $A_2(1-t_1) = 0$. 则 $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ 在 $[t_1, 1-t_1]$ 上是正的，从而有最小值 $L > 0$.

定理 3.2.2 假设条件 (H) 满足，存在 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\mu_k \in (t_{k+1}, t_k)$, $k = 1, 2, \cdots$，令 $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足

$$R_{k+1} < \mu_k r(k) < r(k) < \Lambda_1 r_k < R_k, \quad k = 1, 2\cdots,$$

其中 $\Lambda_1 \in (\frac{2}{L}, +\infty)$. 对任意的自然数 k, 假定 f 满足:

(H_1) $f(x) \geq (\Lambda_1 r_k)^{p-1}, \forall\, x \in [\mu_k r_k, r_k]$,

(H_2) $f(x) \leq (\Lambda_2 R_k)^{p-1}, \forall\, x \in [0, R_k]$, 其中 $0 < \Lambda_2 < \{(\frac{\beta}{\alpha}+1)\phi_q(\int_0^1 a(s)ds)\}^{-1}$,

则 (3.1.1) 有无限多个正解 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，且满足 $r_i \leq \|x_i\| \leq R_i$, $\forall\, i = 1, 2\cdots$.

证明: 现在我们定义算子 $T : K \to K$ 如下

$(Tx)(t) =$

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\phi_q(\displaystyle\int_0^{\tau} a(s)f(x(s))ds) + \int_0^t \phi_q(\int_s^{\tau} a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds, 0 \leq t \leq \tau; \\ \dfrac{\delta}{\gamma}\phi_q(\displaystyle\int_{\tau}^1 a(s)f(x(s))ds) + \int_t^1 \phi_q(\int_{\tau}^s a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds, \tau \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

其中如果 $(Tx)'(0) = 0$，取 $\tau = 0$, 如果 $(Tx)'(1) = 0$, 取 $\tau = 1$; 否则 τ 是方程

$$g_1(t) = g_2(t) \tag{3.2.5}$$

的解，这里

$$g_1(t) = \frac{\beta}{\alpha}\phi_q(\int_0^t a(s)f(x(s))ds) + \int_0^t \phi_q(\int_s^t a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds, 0 \leq t < 1,$$
$$g_2(t) = \frac{\delta}{\gamma}\phi_q(\int_t^1 a(s)f(x(s))ds) + \int_t^1 \phi_q(\int_t^s a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds, 0 < t \leq 1,$$

注意到方程 (3.2.5) 在 (0,1) 上至少有一个解，事实上，由于 $g_1(t)$ 在 [0,1) 上是单调增加的连续函数，且 $g_1(0) = 0$,$g_2(t)$ 在 (0,1] 上是单调减少的连续函数且 $g_2(1) = 0$, 因此至少存在一点 $\tau \in (0, 1)$ 是方程 (3.2.5) 的解. 而且，如果 τ_1, τ_2

是 (3.2.5) 的两个解，则显然有 $a(s)f(x(s)) \equiv 0, s \in [\tau_1, \tau_2]$ ，因此这样定义的算子 T 是合理的.

又显然 Tx 满足边值条件 (3.1.1) ，由于函数 $(Tx)(\tau) = \max_{t\in[0,1]}(Tx)(t)$

$$(Tx)'(t) = \begin{cases} \phi_q(\int_t^\tau a(s)f(x(s))ds) \geq 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -\phi_q(\int_\tau^t a(s)f(x(s))ds) \leq 0, & \tau \leq t \leq 1, \end{cases}$$

在 (0,1) 上是单调减少连续函数， $(Tx)'(\tau) = 0$ ，并且

$$(\phi_p((Tx)'(t)))' = -a(t)f(x(t)), a.e. t \in (0,1),$$

因此 T(K)⊂K. 又根据 f 的连续性知， $T : K \to K$ 是全连续的.

由引理 3.1.2 知

$$x_t \geq \mu_k\|x\| \quad , \quad \forall t \in [\mu_k, 1-\mu_k].$$

假设 $\{\Omega_k^1\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{\Omega_k^2\}_{k=1}^\infty$ 为 E 中的开子集列. 定义如下：

$$\Omega_k^1 = \{x \in K, \quad \|x\| < r_k\},$$
$$\Omega_k^2 = \{x \in K, \quad \|x\| < R_k\},$$

具体证明如下：

首先 $\forall\ k \in N, x \in \partial\Omega_k^1, \quad r_k = \|x\| \geq x_s \geq \mu_k\|x\| = \mu_k r_k, \quad \forall s \in [\mu_k, 1-\mu_k]$. 由条件 (H) 知道：

$$t* < t_{k+1} < \mu_k < t_k < \frac{1}{2}, \quad \forall\ k \in N.$$

则容易知道： $[t_1, 1-t_1] \subset [\mu_k, 1-\mu_k]$, 所以我们可以在 $[t_1, 1-t_1]$ 上讨论.

以下分三种情况进行讨论：

(a): 当 $\tau \in [t_1, 1-t_1]$ 时, $\forall\ x \in \partial\Omega_k^1$, 由 (H_1)

$$\begin{aligned}
2\|Tx\| &= 2(Tx)(\tau) \\
&\geq \int_0^\tau \phi_q(\int_s^\tau a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds + \int_\tau^1 \phi_q(\int_\tau^s a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds \\
&\geq \int_{t_1}^\tau \phi_q(\int_s^\tau a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds + \int_\tau^{1-t_1} \phi_q(\int_\tau^s a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds \\
&\geq (\Lambda_1 r_k)[\int_{t_1}^\tau \phi_q(\int_s^\tau a(s_1)ds_1)ds + \int_\tau^{1-t_1} \phi_q(\int_\tau^s a(s_1)ds_1)ds] \\
&= \Lambda_1 r_k A(\tau) \\
&\geq \Lambda_1 r_k L \\
&> 2r_k = 2\|x\|,
\end{aligned}$$

(b): 当 $\tau \in [1-t_1, 1]$ 时, $\forall\ x \in \partial\Omega_k^1$, 由 (H_1) 知

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= (Tx)(\tau) \\
&\geq \int_0^\tau \phi_q(\int_s^\tau a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds \\
&\geq \int_{t_1}^{1-t_1} \phi_q(\int_s^{1-t_1} a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds \\
&\geq (\Lambda_1 r_k)\int_{t_1}^{1-t_1} \phi_q(\int_s^{1-t_1} a(s_1)ds_1)ds \\
&= \Lambda_1 r_k A(1-t_1) \\
&\geq \Lambda_1 r_k L \\
&> 2r_k > r_k = \|x\|,
\end{aligned}$$

(c): 当 $\tau \in [0, t_1]$ 时, $\forall\ x \in \partial\Omega_k^1$, 由 (H_1)

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= (Tx)(\tau) \\
&\geq \int_\tau^1 \phi_q(\int_\tau^s a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds \\
&\geq \int_{t_1}^{1-t_1} \phi_q(\int_{t_1}^s a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (\Lambda_1 r_k)\int_{t_1}^{\text{[illegible]}} \phi_q(\int_{t_1}^{s} a(s_1)ds_1)ds \\
&= \Lambda_1 r_k A(t_1) \\
&\geq \Lambda_1 r_k L \\
&> 2r_k > r_k = \|x\|,
\end{aligned}
$$

因此，无论哪种情况，对 $\forall\ x \in \partial\Omega_k^1$, 都有 $\|Tx\| \ \geq \|x\|$.

其次， $\forall\ k \in N, x \in \partial\Omega_k^2$, 由 (H_2) 知

$$
\begin{aligned}
\|Tx\| &= (Tx)(\tau) \\
&= \frac{\beta}{\alpha}\phi_q(\int_0^{\tau} a(s)f(x(s))ds) + \int_0^{\tau} \phi_q(\int_s^{\tau} a(s_1)f(x(s_1))ds_1)ds, \\
&\leq \frac{\beta}{\alpha}\phi_q(\int_0^{1} a(s)f(x(s))ds) + \phi_q(\int_0^{1} a(s)f(x(s))ds), \\
&\leq (\frac{\beta}{\alpha}+1)\Lambda_2 R_k \phi_q(\int_0^1 a(s)ds) \\
&\leq R_k = \|x\|.
\end{aligned}
$$

即 $\forall\ x \in \partial\Omega_k^2$, 有 $\|Tx\| \ \leq \|x\|$. 因此由引理 3.1.1 得， T 在 $\Omega_k^2 \setminus \overline{\Omega_k^1}$ 内有不动点，且有 $r_k \leq \|x\| \leq R_k$. 由 k 的任意性知定理结论成立.

第四章　一维 p-laplacian 方程组正解的存在性

近几年来，关于 p-laplacian 算子的边值问题正解的存在性，受到了许多中外学者的广泛关注，特别是一维情形：当 $p=2$ 或 $\phi_p(x)=x$ 是线性时有大量文献研究这类边值问题正解存在性 [14， 15] 在 $p\neq 2$ 或 $\phi_p(x)\neq x$ 为非线性时，文 [13] 用不动点指数定理获得了正解存在的许多充分性条件. 然而对于方程组，很少见文献讨论其正解的存在性，因此本文致力于研究方程组边值问题正解的存在性，建立了这类方程组边值问题存在一个或者多个正解的一系列充分条件.

§4.1　引言

本文考虑 p-laplacian 算子型方程组边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(x'))' + f(t,x,y) = 0, & t\in(0,1), \\ (\phi_p(x'))' + g(t,x,y) = 0, & t\in(0,1). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

在如下边值条件

$$\begin{cases} \alpha_1\phi_p(x(0)) - \beta_1\phi_p(x'(0)) = 0, \gamma_1\phi_p(x(1)) + \delta_1\phi_p(x'(1)) = 0, \\ \alpha_2\phi_p(y(0)) - \beta_2\phi_p(y'(0)) = 0, \gamma_2\phi_p(y(1)) + \delta_2\phi_p(y'(1)) = 0. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

下的解的存在性. 其中， $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s, p>1, \alpha_i>0$， $\beta_i\geq 0(i=1,2)$　$\gamma_i>0$　$\delta i\geq 0$ $(i=1,2)$ $f,g\in c([0,1]*[0,\infty]*[0,\infty),[0,\infty))$ 通过应用 krasnoselskii 锥不动点定理，建立了该问题存在多个正解的充分条件，推广并丰富了以往文献的一些结论.

首先，我们叙述前面提到的 krasnoselskii 锥不动点定理，这是本文主要结果的理论依据.

引理 4.1.1[16] 设 E 为 Banach 空间， $K\subset E$ 是 E 的一个锥，又假设 Ω_1,Ω_2 是 E 中的开子集，满足 $0\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$, 映射 $T:K\bigcap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子，且使

(i)$\|Tu\|\le\|u\|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_1$, 同时 $\|Tu\|\ge\|u\|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_2$, 或者

(ii)$\|Tu\|\ge\|u\|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_1$, 同时 $\|Tu\|\le\|u\|,\quad u\in K\cap\partial\Omega_2$, 成立，

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 中至少存在一个不动点.

设 $X=C[0,1]\times C[0,1]$ ，定义通常的范数 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$, 其中 $\|x\|=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 和 $\|y\|=\sup_{t\in[0,1]}|y(t)|$ 这样 X 是 Banach 空间，再定义锥 $K\subset X$, 为:

K=$\{(x,y)\in X,x(t),y(t)$ 是 [0,1] 上的非负的凹函数 $\}$

设 $\theta\in(0,1/2)$ 为常数，取 $t^*=\frac{(\frac12+1-\theta)}{2}$ 为方便，我们记 $l=\frac12[\frac{p-1}{p}(1-\frac{2\theta}{4})^{\frac{p}{p-1}}]^{-1},m_i=\frac12[1+\frac{\beta_i}{\alpha_i}]^{-1}$ 记 $\phi_q(x)$ 是 $\phi_p(x)$ 的逆，$\phi_q(x)=|x|^{q-2}x\quad(\frac1p+\frac1q=1)$ 记

$$f_0(t)=\lim_{(x,y)\to0}\frac{f(t,x,y)}{(x+y)^{p-1}}\quad,\quad f_\infty(t)=\lim_{(x,y)\to\infty}\frac{f(t,x,y)}{(x+y)^{p-1}},$$
$$g_0(t)=\lim_{(x,y)\to0}\frac{g(t,x,y)}{(x+y)^{p-1}}\quad,\quad g_\infty(t)=\lim_{(x,y)\to\infty}\frac{g(t,x,y)}{(x+y)^{p-1}}.$$

且假设

(H) 若 $x(t),y(t)\in K$, 那么 $x(t)+y(t)\ge\zeta(\|x\|+\|y\|)\quad t\in[\zeta,1-\zeta]$ 其中 $\zeta\in(0,\frac12)$ 是常数.

定义一个映射 $T:K\to K$ 如下:

$$T(x,y)(t)=(T_1(x,y)(t),T_2(x,y)(t))$$

其中

$T_1(x,y)(t)=$

$$\begin{cases}\phi_q(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\int_0^{\sigma_1} f(s,x(s),y(s))ds)+\int_0^t \phi_q(\int_s^{\sigma_1} f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds, & 0\le t\le \sigma_1\\ \phi_q(\frac{\delta_1}{\gamma_1}\int_{\sigma_1}^1 f(s,x(s),y(s))ds)+\int_t^1 \phi_q(\int_{\sigma_1}^s f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds, & \sigma_1\le t\le 1\end{cases} \tag{4.1.3}$$

其中 σ_1 为

$$\begin{aligned}&\phi_q(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\int_0^t f(s,x(s),y(s))ds)+\int_0^t \phi_q(\int_s^t f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds\\ =&\phi_q(\frac{\delta_1}{\gamma_1}\int_t^1 f(s,x(s),y(s))ds)+\int_t^1 \phi_q(\int_t^s f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds.\end{aligned}$$

的唯一解.

其中 $T_2(x,y)(t)=$

$$\begin{cases}\phi_q(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\int_0^{\sigma_2} g(s,x(s),y(s))ds)+\int_0^t \phi_q(\int_s^{\sigma_2} g(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds, & 0\le t\le \sigma_2\\ \phi_q(\frac{\delta_2}{\gamma_2}\int_{\sigma_2}^1 g(s,x(s),y(s))ds)+\int_t^1 \phi_q(\int_{\sigma_2}^s g(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds, & \sigma_2\le t\le 1\end{cases} \tag{4.1.4}$$

其中 σ_2 为

$$\begin{aligned}&\phi_q(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\int_0^t g(s,x(s),y(s))ds)+\int_0^t \phi_q(\int_s^t g(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds\\ =&\phi_q(\frac{\delta_2}{\gamma_2}\int_t^1 g(s,x(s),y(s))ds)+\int_t^1 \phi_q(\int_t^s g(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds.\end{aligned}$$

的唯一解.

容易看出边值问题 (4.1.1) – (4.1.2) 有解相当于算子方程 $T(x,y)=(x,y)$ 有不动点，并且 T 的定义是适当的，事实上，由于

$$(T_1(x,y)(t))'=\begin{cases}\phi_q(\int_t^{\sigma_1} f(s,x(s),y(s))ds) & 0\le t\le\sigma_1\\ -\phi_q(\int_{\sigma_1}^t f(s,x(s),y(s))ds) & \sigma_1\le t\le 1\end{cases}$$

是连续的，递减的，且 $(T_1(x,y))'(\sigma_1)=0$ 并且

$$[\phi_p(T_1(x,y))'(t)]'=-f(s,x(s),y(s)).a.e\ t\in(0,1)$$

这样 $T_1(x,y)$ 是非负凹函数，同样 $T_2(x,y)$ 也是非负凹函数，因此 $T(K)\subset K$ 且

$(T_1(x,y))(\sigma_1)=\max_{t\in[0.1]}(T_1(x,y))(t),(T_2(x,y))(\sigma_2)=\max_{t\in[0.1]}(T_2(x,y))(t)$

进一步易验证 $T:K\to K$ 是全连续的（参见文献 [5]）

§4.2　方程组正解的存在性

本文的主要结论如下：

定理 4.2.1 假设存在两个不同的正常数 λ 和 η, 使得

$$f(t,x(t),y(t))\le\phi_p(m_1\lambda)\ ,\quad 0\le t\le 1\ ,\quad 0\le x,y\le\frac{\lambda}{2},\tag{4.2.1}$$

$$g(t,x(t),y(t))\le\phi_p(m_2\lambda)\ ,\quad 0\le t\le 1\ ,\quad 0\le x,y\le\frac{\lambda}{2},\tag{4.2.2}$$

并且

$$f(t,x(t),y(t))\ge\phi_p(l\eta)\ ,\quad \theta\le t\le 1-\theta\ ,\quad \theta\eta\le x+y\le\eta,\tag{4.2.3}$$

或

$$g(t,x(t),y(t))\ge\phi_p(l\eta)\ ,\quad \theta\le t\le 1-\theta\ ,\quad \theta\eta\le x+y\le\eta,\tag{4.2.4}$$

成立.

那么边值问题至少存在一个正解而且介于 λ 和 η 之间.

证明：不失一般性，不妨设 $\lambda<\eta$,

令 $\Omega_\lambda=\{(x,y)\in K,\|(x,y)\|<\lambda\}$ 那么由 (4.2.1) 式, 可得当 $(x,y)\in\partial\Omega_\lambda$

时，有

$$
\begin{aligned}
&\|T_1(x,y)\| = (T_1(x,y)(\sigma_1)),\\
\le&\phi_q(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\int_0^1 f(s,x(s),y(s))ds) + \int_0^1 \phi_q(\int_0^1 f(r,x(r),y(r))dr)ds,\\
\le&[\phi_q(\frac{\beta_1}{\alpha_1}) + 1]\phi_q(\int_0^1 f(s,x(s),y(s))ds),\\
\le&[\phi_q(\frac{\beta_1}{\alpha_1}) + 1]\phi_q(\int_0^1 \phi_p(m_1\lambda)ds),\\
\le&[\phi_q(\frac{\beta_1}{\alpha_1}) + 1]m_1\lambda,\\
=&\frac{\lambda}{2} \le \frac{1}{2}\|(x,y)\|.
\end{aligned}
$$

即

$$\|T_1(x,y)\| \le \frac{1}{2}\|(x,y)\|, \tag{4.2.5}$$

同样由 (4.2.2) 式知

$$\|T_2(x,y)\| \le \frac{1}{2}\|(x,y)\|, \tag{4.2.6}$$

这样 $\forall (x,y) \in \partial\Omega_\lambda$ 由 (4.2.5), (4.2.6) 式知

$$\|T(x,y)\| = \|T_1(x,y)\| + \|T_2(x,y)\| \le \|(x,y)\|.$$

令 $\Omega_\eta := \{(x,y) \in K, | \, \|(x,y)\| < \eta\}$ 那么，当 $(x,y) \in \partial\Omega_\eta$，就有 $\|(x,y)\| = \eta$. 由 (H) 知 $\theta\eta \le x(t) + y(t)$, $\forall t \in [\theta.1-\theta]$, $\theta \in (0,\frac{1}{2})$, 为常数.

分两种情形加以讨论：

(1) $(x,y)\in\partial\Omega_\eta$, $t^*\leq\sigma_1$, 在此情形下，由 (4.2.3) 式及 T_1 的定义，有

$$
\begin{aligned}
&(T_1(x,y))(t^*)\\
\geq&\int_0^{t^*}\phi_q(\int_s^{\sigma_1}f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds,\\
\geq&\int_{\frac{1}{2}}^{t^*}\phi_q(\int_s^{t^*}f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds,\\
\geq&\int_{\frac{1}{2}}^{t^*}\phi_q(\int_s^{t^*}\phi_p(l\eta))ds\\
\geq&\int_{\frac{1}{2}}^{t^*}\phi_q(\phi_p(l\eta))\phi_q(t^*-s)ds,\\
=&l\eta\int_{\frac{1}{2}}^{t^*}\phi_q(t^*-s)ds\\
=&l\eta\int_{\frac{1}{2}}^{t^*}(t^*-s)^{q-1}ds\\
=&l\eta\int_{\frac{1}{2}}^{t^*}(t^*-s)^{\frac{1}{p-1}}ds
\end{aligned}
$$

得

$$\|T_1(x,y)\|\geq\frac{1}{2}\|(x,y)\|,$$

同理可得

$$\|T_2(x,y)\|\geq\frac{1}{2}\|(x,y)\|,$$

则

$$\|T(x,y)\|\geq\|(x,y)\|.$$

(2) $(x.y)\in\partial\Omega_\eta$, $t^*\geq\sigma_1$, 在此情形之下，那么由 (4.2.4) 式及 T_1 的定义，有

$$
\begin{aligned}
&(T_1(x,y))(t^*),\\
\geq&\int_{t^*}^{1}\phi_q(\int_{\sigma_1}^{s}f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds,\\
\geq&\int_{t^*}^{1-\theta}\phi_q(\int_{t^*}^{s}f(s_1,x(s_1),y(s_1))ds_1)ds,\\
\geq&\int_{t^*}^{1-\theta}\phi_q(\phi_p(l\eta)(s-t^*))ds,\\
=&l\eta\int_{t^*}^{1-\theta}(s-t^*)^{\frac{1}{p-1}}ds\\
=&(l\eta)\frac{p-1}{p}(1-\theta-t^*)^{\frac{1}{p-1}}\\
=&\frac{\eta}{2}=\frac{1}{2}\|(x,y)\|.
\end{aligned}
$$

得

$$\|T_1(x,y)\|\geq\frac{1}{2}\|(x,y)\|,$$

同理可得

$$\|T_2(x,y)\|\geq\frac{1}{2}\|(x,y)\|,$$

则

$$\|T(x,y)\|\geq\|(x,y)\|.$$

由引理 1 知, T 在 $(\overline{\Omega_\eta}\backslash\Omega_\lambda)$ 中至少存在一个不动点 (x,y), 且满足 $\lambda\leq\|(x,y)\|\leq\eta$.

推论 4.2.2 如果下列条件

(H_1) $f_0(t)\leq\phi_p(m_1)$, $\quad 0\leq t\leq 1$, $\quad g_0(t)\leq\phi_p(m_2)$, $\quad 0\leq t\leq 1$,

$(H_2)f_\infty(t)\geq\phi_p(\frac{l}{\theta})$, $\quad \theta\leq t\leq(1-\theta)$, 或者 $\quad g_\infty(t)\geq\phi_p(\frac{l}{\theta})$, $\quad \theta\leq t\leq(1-\theta)$

成立, 则边值问题 (4.1.1) – (4.1.2) 至少存在一个正解.

证明 :

假设 (H_1) 成立，由 $f_0(t) \leq \phi_p(m_1)$ ，那么存在充分小的 $\lambda_1 > 0$ ，当 $0 \leq x, y \leq \frac{\lambda_1}{2}, x+y \neq 0$ 时，使得

$$f(t, x(t), y(t)) \leq \phi_p(m_1)(x+y)^{p-1} \leq \phi_p(\lambda_1 m_1)$$

由 $g_0(t) \leq \phi_p(m_2)$，那么存在充分小的 $\lambda_2 > 0$，当 $0 \leq x, y \leq \frac{\lambda_2}{2}, x+y \neq 0$ 时，使得

$$g(t, x(t), y(t)) \leq \phi_p(m_2)(x+y)^{p-1} \leq \phi_p(\lambda_2 m_2)$$

取 $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ 当 $0 \leq x, y \leq \frac{\lambda}{2}, x+y \neq 0$ 时有

$$f(t, x(t), y(t)) \leq \phi_p(m_1 \lambda),$$

$$g(t, x(t), y(t)) \leq \phi_p(m_2 \lambda),$$

假设 (H_2) 成立，那么存在充分大的 $\eta > \lambda$ ，使得当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$， $x(t) + y(t) \geq \theta\eta$, 时

$$\frac{f(t, x(t), y(t))}{(x+y)^{p-1}} \geq \phi_p(\frac{l}{\theta}),$$

我们有

$$f(t, x(t), y(t)) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})(x+y)^{p-1} \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})(\theta\eta)_{p-1} = \phi_p(l\eta) ,$$

由定理 4.2.1 得边值问题 (4.1.1) – (4.1.2) 至少存在一个正解.

推论 4.2.3 如果下列条件

(H_3) $f_0(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$ ，当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$, 或者 $g_0(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$, 当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$,

(H_4) $f_\infty(t) \leq \phi_p(m_1)$, 当 $0 \leq t \leq 1$, $g_\infty(t) \leq \phi_p(m_2)$, 当 $0 \leq t \leq 1$,

成立，则边值问题 (4.1.1) – (4.1.2) 至少存在一个正解.

证明：

首先，由条件 (H_3) 知，存在充分小的 $\lambda > 0$, 使得

$$\frac{f(t,x(t),y(t))}{(x+y)^{p-1}} \geq \phi_p(\frac{l}{\theta}), \quad \theta \leq t \leq (1-\theta), \quad \theta\lambda \leq x+y \leq \lambda,$$

或者

$$\frac{g(t,x(t),y(t))}{(x+y)^{p-1}} \geq \phi_p(\frac{l}{\theta}), \quad \theta \leq t \leq (1-\theta), \quad \theta\lambda \leq x+y \leq \lambda,$$

即，当 $\theta \leq t \leq (1-\theta), \quad \theta\lambda \leq x+y \leq \lambda$, 时有

$$f(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})(x+y)^{p-1} \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})(\theta\lambda)^{p-1} \geq \phi_p(l\lambda),$$

或者

$$g(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\lambda)$$

由 (H_4) 存在充分大的 $\eta > \lambda > 0$，使得当 $x, y \geq \eta$ 时，满足

$$\frac{f(t,x(t),y(t))}{(x+y)^{p-1}} \geq \phi_p(m_1), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x,y \geq \eta \quad ,(\star)$$

下面分两种情形进行讨论：

(a) 如果是有界的，则存在常数 $L > 0$，使得 $f(t,x(t),y(t)) \leq L$，对 $0 \leq t \leq 1$ 和 $\eta \leq x, y < +\infty$ 成立，由 $(\star)$ 式可知存在常数 $r > 0$，满足 $\phi_p(r) \geq \max\{\phi_p(\eta), \frac{L}{\phi_p(m_1)}\}$，使得 $f(t,x(t),y(t)) \leq L \leq \phi_p(rm_1)$，对 $0 \leq t \leq 1$ 和 $0 \leq x, y \leq r$ 成立.

(b) 如果是无界的，此时存在 $t \in [0,1]$ 和某 $r_1 \geq \eta$，使得 $f(t,x(t),y(t)) \leq f(t_0,r_1,r_1)$. 当 $0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x, y \leq \frac{r_1}{2}$ 时，$f(t,x,y) \leq f(t_0,r_1,r_1) \leq \phi_p(m_1 r_1)$. 对于 $0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x, y \leq \frac{r_1}{2}$ 成立，因此 (4.2.1) 式对 r_1 成立.

同理可证，对 g 也有同样结论，则此时 (4.2.2) 式满足. 则由定理 4.2.1 结论成立.

§4.3 多个正解的存在性

定理 4.3.1 假设存在 $\lambda > 0$，使 (4.2.1)(4.2.2) 成立，且满足下列条件:

(H_3) $f_0(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$，当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$，或者 $g_0(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$，当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$，

(H_2) $f_\infty(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$，当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$，或者 $g_\infty(t) \geq \phi_p(\frac{l}{\theta})$，当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$，之一成立，

则边值问题 (4.1.1)-(4.1.2) 存在两个解.

证明：由推论 4.2.3，当 (H_3) 成立，存在充分小的 $\lambda_l < \lambda$，使得当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$，$\theta\lambda_1 \leq x+y \leq \lambda_1$，时有

$$f(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\lambda_1),$$

或者

$$g(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\lambda_1),$$

当 (H_2) 成立，那么存在充分大的 $\eta > \lambda$，使得当 $\theta \leq t \leq (1-\theta)$，$x(t)+y(t) \geq \theta\eta$，时

$$f(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\eta),$$

或者

$$g(t,x(t),y(t)) \geq \phi_p(l\eta),$$

由定理知存在两个正解 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，$0 < \lambda_1 \leq \|(x_1,y_1)\| \leq \lambda \leq \|(x_2,y_2)\| \leq \eta$.

证毕.

定理 4.3.2 假设存在 $\eta > 0$，使得 (4.2.3)(4.2.4) 之一成立，且满足下列条件:

$$(H_1)\quad f_0(t) \leq \phi_p(m_1),\ \ 0 \leq t \leq 1, \quad g_0(t) \leq \phi_p(m_2),\ \ 0 \leq t \leq 1,$$

(H_4) $f_\infty(t) \le \phi_p(m_1)$, $0 \le t \le 1$, $\quad g_\infty(t) \le \phi_p(m_2)$, $0 \le t \le 1$,

则存在两个正解 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 使得 $\|(x_1, y_1)\| \le \eta \le \|(x_2, y_2)\|$.

证明: 类似定理 4.3.1 证明, 由上述推论可知结论成立.

第五章　二阶奇异边值问题正解的存在性

现在这方面的文章相对较多，例如文 [14][15]. 其中文 [14] 是利用范数形式的锥拉伸和锥压缩不动点定理得出存在性，文 [15] 在一定的极限条件下和可积条件下得出结论. 本文利用另外的锥上不动点定理建立了边值问题存在多个正解的充分条件. 我们的结论推广并丰富了 [14,15] 的主要结果.

§5.1　引言

本文考虑二阶奇异边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中 $\alpha, \gamma > 0, \beta, \delta \geq 0, \rho := \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$, $f(t,u) \in C([0,\infty),[0,\infty))(H)$ 在 $t = 0,1$ 可以有奇性. 通过使用锥上的不动点定理得出一个和多个解的存在性.

设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的锥，P 导出 E 中的半序 " $\leq$ ", 即, $x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P$.

设 $G(t,s)$ 为边值问题

$$\begin{cases} u'' = 0, \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

的 Green 函数，则

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}(\gamma + \delta - \gamma t)(\beta + \alpha s), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \dfrac{1}{\rho}(\gamma + \delta - \gamma s)(\beta + \alpha t), \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

容易看出:

$$G(t,s)\le G(s,s),\quad 0\le t,s\le 1. \tag{5.1.4}$$

记

$$\phi(t):=\gamma+\delta-\gamma t,\quad \psi(t):=\beta+\alpha t,\quad 0\le t\le 1,$$

则

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{\rho}\phi(t)\psi(s), & 0\le s\le t\le 1,\\ \frac{1}{\rho}\phi(s)\psi(t), & 0\le t\le s\le 1.\end{cases}$$

进一步，对 $t:\theta\le t\le 1-\theta$ 有

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\frac{\phi(t)}{\phi(s)}, & s\le t,\\ \frac{\psi(t)}{\psi(s)}, & t\le s.\end{cases}\ge\begin{cases}\frac{\delta+\theta\gamma}{\gamma+\delta}, & s\le t,\\ \frac{\beta+\theta\alpha}{\alpha+\beta}, & t\le s,\end{cases}$$

故有

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}\ge M_\theta,\quad \theta\le t\le 1-\theta. \tag{5.1.5}$$

记 $M_\theta:=\min\{\frac{\delta+\theta\gamma}{\gamma+\delta},\frac{\beta+\theta\alpha}{\alpha+\beta}\}$. 在 C[0,1] 中，构造所有非负函数所构成的锥如下:

$K:=\{u\in C[0,1|u(t)\ge 0$:u(t) 为非负凹函数 $\}$.

为方便，我们记 $m=[\int_0^1 G(s,s)ds]^{-1}, l=[M_\theta\int_0^1 G(s,s)ds]^{-1}$. 再定义

$$f_0(t)=\lim_{u\to 0}\frac{f(t,u)}{u},\quad f_\infty(t)=\lim_{u\to\infty}\frac{f(t,u)}{u}.$$

引理 5.1.1[18]　设 $u\in K,\eta\in(0,\frac{1}{2})$, 则有 $u(t)\ge\eta\|u\|$, $\forall\, t\in[\eta,1-\eta]$. 其中 $\|u\|:=\sup\{|u(t)|;\ 0\le t\le 1\}$. 定义算子 $A:\ C[0,1]\to C[0,1]$

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds. \tag{5.1.6}$$

不难验证: (5.1.1) 有解的充要条件是

$$u(t)=Au(t)$$

有不动点.

引理 5.1.2 设条件 (H) 成立，则 $A: K \to K$ 全连续.

证明从略.

设 K 是实 Banach 空间 E 中的锥，令 $K_r = \{x \in K : \|x\| \le r\}, \partial K_r = \{x \in K : \|x\| = r\}$，且 $\overline{K}_{r,R} = \{x \in K : r \le \|x\| \le R\}$，这里 $0 < r < R < \infty$.

引理 5.1.3[19] 设 K 是实 Banach 空间 E 中的锥，$A : \overline{K}_R \to K$ 全连续算子. 假定下列条件成立：

(a) $\|Ax\| \le \|x\|$, $\forall x \in \partial K_R$;

(b) 存在 $e \in \partial K_1$，使得 $x \ne Ax + \lambda e, x \in \partial K_r, \lambda > 0$.

那么 A 在 $\overline{K}_{r,R}$ 中存在不动点.

如果 (a) 在 ∂K_r 上成立，且 (b) 在 ∂K_R 上成立，则结论仍然成立.

§5.2　问题 (5.1.1) 正解的存在性

定理 5.2.1 假设存在两个不同的正常数 λ 和 η，使得

(h_1)　$f(t,u) \le m\lambda \quad 0 \le t \le 1,\ 0 \le u \le \lambda$,

(h_2)　$f(t,u) \ge l\eta \quad \theta \le t \le 1-\theta,\ \theta\eta \le u \le \eta$.

那么边值问题 (5.1.1) 至少存在一个解 u(t) 介于 λ 和 η 之间.

证明：不失一般性，可设 $\lambda < \eta$,

令 $\Omega_\lambda = \{u \in K, \|u\| < \lambda\}$ 那么，由 (a) 式，可得，当 $u \in \partial\Omega_\lambda$ 时，有

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \le m\lambda \int_0^1 G(s,s) \le \lambda = \|u\|,$$

则 $\|Au\| \le \|u\|$.

令 $\Omega_\eta = \{u \in K, \|u\| < \eta\}$，由凹函数的性质知，$\theta\eta \le u(s) \le \eta$, $\theta \le s \le 1-\theta$, $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. 当 (h_2) 成立时，$f(t,u) \ge l\eta$, $\theta \le t \le 1-\theta$，下面证明

$u \ne Au + \lambda e \quad u \in \partial K_R, \lambda > 0$.

若不然，令 $e \equiv 1, t \in [0,1]$，存在 $u_0 \in \partial\Omega_\eta$ 及 $\lambda_0 > 0, s.t. u_0 = Au_0 + \lambda_0 e$,

其中 $e \in \partial K_1$ 则有

$$\begin{aligned} u_0(t) &= Au_0(t) + \lambda_0 e(t) \\ &= \int_0^1 G(t,s) f(s, u_0(s)) ds + \lambda_0 e(t) \\ &\geq l\eta \int_0^1 G(t,s) ds + \lambda_0 \\ &\geq l\eta \int_0^1 M_\theta G(s,s) ds + \lambda_0 \geq \eta + \lambda_0, \end{aligned}$$

即: $\eta \geq \eta + \lambda_0$ ，矛盾. 由引理 5.1.3 知 A 在 $\overline{K}_{\lambda,\eta}$ 中存在不动点 u. 且易知 $u(t) > 0$.

推论 5.2.2 如果下列条件之一成立，则边值问题 (5.1.1) 至少存在一个正解,

$$(H_1)\ \ f_0(t) \leq m, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f_\infty(t) \geq \frac{l}{\theta}, \quad \theta \leq t \leq 1 - \theta,$$

或

$$(H_2)\ \ f_0(t) \geq \frac{l}{\theta}, \quad \theta \leq t \leq 1 - \theta, \quad f_\infty(t) \leq m, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

证明: 当 (H_1) 成立时，存在充分小的 $\lambda > 0$ 和充分大的 $\eta > 0$, 使得

$$\frac{f(t,u)}{u} \leq m, \qquad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < u \leq \lambda, \Rightarrow f(t,u) \leq m\lambda,$$

$$\frac{f(t,u)}{u} \leq \frac{l}{\theta}, \qquad \theta \leq t \leq 1 - \theta \ \ u \geq \theta\eta. \Rightarrow f(t,u) \geq l\eta.$$

故由定理 5.2.1 知问题 (5.1.1) 至少存在一个正解.

当 (H_2) 成立时，存在 $0 < \lambda < \eta$, 使得

$$\frac{f(t,u)}{u} \leq \frac{l}{\theta}, \qquad \theta \leq t \leq 1 - \theta, \ \ 0 < u \leq \lambda, \tag{5.2.1}$$

$$\frac{f(t,u)}{u} \leq m. \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u \geq \eta, \tag{5.2.2}$$

由 (5.2.1) 式得 $f(t,u) \geq \frac{l}{\theta}(\theta\lambda) = l\lambda, \quad \theta \leq t \leq 1 - \theta, \ \theta\lambda \leq u \leq \lambda.$

对 (5.2.2) 式，分两种情况来讨论:

(a) f(t,u) 有界，此时存在常数 $L>0$, 使得 $f(t,u)\le L$, 对 $0\le t\le 1$ 和 $0\le u\le\infty$ 成立. 由 (5.2.2) 式，可知存在常数 r ，满足 $r>\max\{\eta,\frac{L}{m}\}$, $f(t,u)\le L<rm$, 对 $0\le t\le 1$ 和 $0\le u\le r$ 成立. 即条件 (h_1) 对于 r 成立.

(b) f(t,u) 无界，此时存在 $t_0\in[0,1]$ 和某 $r_1\ge\eta$，使得 $f(t,u)\le f(t_0,r_1)$，对 $0\le t\le 1, 0\le u\le r_1$ 成立，从而 $f(t,u)\le f(t_0,r_1)\le mr_1$，对于 $0\le t\le 1$ 和 $0\le u\le r_1$ 成立. 因此条件 (h_1) 对于 r_1 成立，故由定理 5.2.1 知结论成立.

注 1 推论 5.2.2 包含 f 是超线性和次线性的情形.

§5.3　多重正解的存在性

定理 5.3.1 假设存在 $\lambda>0$，使得条件 (h_1) 成立，且满足下列条件

$$f_0(t)\ge\frac{l}{\theta},\quad \theta\le t\le 1-\theta;\quad f_\infty(t)\ge\frac{l}{\theta},\quad \theta\le t\le 1-\theta, \tag{5.3.1}$$

那么问题 (5.1.1) 至少存在两个正解 u_1,u_2 满足 $0<\|u_1\|<\lambda<\|u_2\|$.

证明：由推论 5.2.2 证明，我们可取 $0<\lambda_1<\lambda<\lambda_2$，使得

$$f(t,u)\ge l\lambda_1,\quad \theta\le t\le 1-\theta,\quad \theta\lambda_1\le u\le\lambda_1,$$

和

$$f(t,u)\ge l\lambda_2,\quad \theta\le t\le 1-\theta,\quad \theta\lambda_2\le u\le\lambda_2,$$

故由定理 5.2.1 知，存在两个正解 u_1,u_2 使得 $0<\lambda_1<\|u_1\|<\lambda<\|u_2\|<\lambda_2$. 证毕.

定理 5.3.2 假设存在 $\eta>0$，使得条件 (h_2) 成立，且满足条件

$$f_0(t)\le m,\quad 0\le t\le 1,\quad f_\infty(t)\le m,\quad 0\le t\le 1, \tag{5.3.2}$$

那么边值问题 (5.1.1) 至少存在两个解 u_1,u_2，使得 $0<\|u_1\|<\eta<\|u_2\|$.

定理 5.3.3 假设条件 $(H_1),(H_2)$ 成立，且存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2$ 使得条件 (h_1) 对于 $\lambda=\lambda_2(\lambda=\lambda_1)$ 成立，条件 (h_2) 对于 $\eta=\lambda_1(\eta=\lambda_2)$ 成立，那么边值问题 (5.1.1) 至少存在三个正解 u_1,u_2,u_3，满足 $0<\|u_1\|<\lambda_1<\|u_2\|<\lambda_2<\|u_3\|$.

定理 5.3.2,5.3.3 的证法与定理 5.3.1, 推论 5.2.2 类似的证明，从略.

由定理 5.3.1-5.3.3 可见，当条件 $(h_1),(h_2),(H_1),(H_2)$ 适当组合，我们可以得到边值问题 (5.1.1) 存在任意多个正解，具体地说，我们有

定理 5.3.4 令 $n=2k+1,k\in N,$，假设 $(H_1),(H_2)$ 成立，并存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}$，使条件 $(h_2)((h_1))$ 对于 λ_{2i-1}，$1\le i\le k$ 成立，条件 $(h_1)((h_2))$ 对于 λ_{2i}，$1\le i\le k$ 成立，那么边值问题 (5.1.1) 至少存在 n 个正解 $u_1,u_2,\cdots u_n$，满足 $0<\|u_1\|<\lambda_1<\|u_2\|<\lambda_2<\cdots<\|u_{n-1}\|<\lambda_{n-1}<\|u_n\|$.

证明从略.

定理 5.3.5 令 $n=2k,k\in N,$，假设 (5.3.1),(5.3.2) 成立，并存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}$，使条件 $(h_1)((h_2))$ 对于 λ_{2i-1}，$1\le i\le k$ 成立，条件 $(h_2)((h_1))$ 对于 λ_{2i}，$1\le i\le k$ 成立，那么边值问题 (5.1.1) 至少存在个 n 正解 $u_1,u_2,\cdots u_n$，满足 $0<\|u_1\|<\lambda_1<\|u_2\|<\lambda_2<\cdots<\|u_{n-1}\|<\lambda_{n-1}<\|u_n\|$.

证明从略.

参考文献

[1] Gupta C P. . Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. J. Math. Anal. Appl. , 1992, (168): 540-551.

[2] Ma R. . Existence theorems for a second order three-point boundary value problem[J]. J. Math. Anal. Appl. , 1997, (212): 430-442.

[3] Gupta C. P. ,Trofimchuk S. I. .Existence of a solution of a three-point boundary value problem and the spectral radius of a related linear operator[J]. Nonlinear Analysis, 1998, (34): 489-507.

[4] Ravi P. Agarwal, Haishen L ü, Donal O'Regan. Existence theorems for the one-dimensional singular p-laplacian equation with sign changing nonlinearities[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, (143): 15-38.

[5] 李翠哲，葛渭高. p-laplacian 奇异半正单调问题的非负解 [J]. 应用数学学报， 2003, vol. 26 no. 3 july.

[6] 郭彦平，葛渭高. 二阶奇异非线性边值条件的上下解方法 [J]. 数学学报， 2003, (05): 1007-1016.

[7] Dajun Guo, V. Lakshmikantham. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces[M]. Kluwer academic publishers. Dordrecht, Boston,London.

[8] 李翠哲，葛渭高. 一维 p-laplacian 奇异 Sturm-Liouville 边值问题的正解 [J]. 应用数学. 2002, vol.15 no.3 july.

[9] Bing Liu. Positive Solutions of Three-Point Boundary Value Problems for the One-dimensional p-laplacian with Infinitely Many Singularities[J].Applied Mathematics Letters. 2004, (17): 655-661.

[10] Yao Q L, Lu H S. Positive Solutions for the One-dimensional p-laplacian[J]. Proc Amer Math Soc. 1997, (125): 2275-2283.

[11] 贺小明，葛渭高. 一维 p-laplacian 方程正解的存在性 [J]. 数学学报， 2003, vol. 46,no. 4 July.

[12] 马如云. 奇异二阶边值问题的正解 [J]. 数学学报 1998, 41(6): 1225-1230 .

[13] 李仁贵，刘立山．二阶奇异非线性微分方程边值问题的正解 [J]. 应用数学和力学， 2001, 22(4): 435-440

[14] GuoD. J. , Lakshmikantham V. Nonlinear problem in abstract cones[M]. Acdemic Press, San Diego. CA. 1998.

[15] 刘斌．具 p-laplacian 算子型奇异方程边值问题正解的存在性 [J]. 数学学报， 2005, 48(1): 35-50.

[16] Junyu Wang. The existence of positive solutions for the one-dimensional p-laplacian[J]. Proceedings of the American Mathematical Society. 1997, 125(8): 2275-2283.

[17] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces[J].

[18] R. Ma. , Positive solutions for a nonlinear three-point nonlinear boundary value problem[J]. Electron. J. Diff. Eqns. ,1999, (34): 1-8.

[19] R. Ma, N. Castaneda. Existence of solutions for nonlinear m-point boundary value problems[J]. J. Math. Anal. Appl. , 2001, (256): 556-567.

[20] J. R. L. Webb, Positive solutions for some three-point boundary value probelms via fixed point index, Nonlinear Annl. , 2001, (47): 4319-4332.

[21] B. Liu. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary value problems[J]. Computers Math. Applic ,2002, 44(1/2): 201-211.

[22] B. Liu. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary value problem[J]. Appl, Math. Comput. , 2002, (132): 11-28.

[23] E, R. Kaufmann and N. Kosnatov. A multiplicity result for a boundary value problem with infinitely many singularities[J]. J. Math. Anal. Appl. 2002, (269): 444-453.

[24] K. Deimling. Nonlinear Functional Analysis[M]. Springer, New York, (1985).

[25] Bandle C, Coffmand C. V, Marcus M. . Nonlinear elliptic problems in annular domains[J]. J. Diff. Eqs, 1987, (69): 322-345.

[26] Wang H. Y. . On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equa-

tion in the annulus[J]. J. Diff. Eqs, 1994, (109): 1-7.

[27] Coffmand C. V, Marcus M. . Existence and uniqueness results for semilinear dirichlet problems in annuli[J]. Arch. Rational. Mech, Anal, 1989, (108): 293-307.

[28] Bandle C. V, Kwong M. K. . Semilinear elliptic problems in annular domains[J]. J. Appl. Math. Phys. ZAMP, 1989, (40): 245-257.

[29] Wei Z. L. . Positive solutions of singular boundary problems of negative exponent emden-fowler equations,Acta Mathematica sinica, 1998, 41(3): 653-662(in chinese).

[30] Wei Z. L. . Positive solutions of singular dirichlet boundary value problems[J]. Chinese Annals of Mathematics, 1999, 20A(5): 543-552(in chinese).

[31] Gatica J. A. , Oliker V. , Waltman P. . Singular nonlinear boundary value problems for second order ordinary diffrential equation[J]. J. Diff. Eqs. , 1989. (79): 62-78.

[32] Wang J. Y. , Gao W. J. . A singular boundary value problem for the one-dimensional p-laplacian[J]. J. Math. Anal. Appl. ,1996, (201): 851-866.

[33] Wong F. H. Existence of positive solutions for m-laplacian boundary value problems[J]. Appl.Math.Lett. , 1999, (12): 11-17.

[34] Wang J. Y. . The existence of positive solutions for the one-dimensional p-laplacian[J]. Proc. of Amer. , Math. Soc. , 1997, 125(8): 2275-2283.

[35] Liu B. ,Yu J. S. . Multiple positive solutions of singular boundary value problems with p-laplacian[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2001, 22A(6): 721-728(in chinese).

[36] Yao Q. L. , Lu H. S. . Positive solutions of one-dimensional p-laplacian equations[J]. Acta Mathematica.Sinica, 1998, 41(6): 1255-1264(in chinese).

[37] Ben-Naoum A. K. .De Coster C. On the p-laplacian seperated-boundary value problem[J]. Diffrential and Integral Equations, 1997, 10(6): 1093-1112.

[38] Lian W. C. , Wong F. H. . Existence of positive solutions for high-order gener-

alized p-laplacian BVPs[J]. Appl. Math. Lett. , 2000, (18): 35-43.

[39] Chyan C. J. ,Henderson J. . Multiple solutions for $2m^{th}$-order Sturm-Liouville boundary value problems[J]. Computers. Math. Applic. , 2000, (40): 231-237.

[40] Erbe L. H. , Wang H. Y. . On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. Proc. Amer. Math. Soc. , 1994, 120(3): 743-748.

[41] Cheng L. W. , Wong F. H. , YenC. C. . On the existence of positive solutions of nonlinear second order differential equations[J]. Proc. Amer. Math. Soc. , 1996, 124(4): 1117-1126.

[42] Kong. L. B. , Wang. J. Y. . Multiple positive solutions for the one-dimensional p-laplacian [J].Nonlinear Anal . 2000, (42): 1327-1333.

[43] D. Q. Jiang, H. Z. Liu. On the existence of nonnegative radial solutions for the one -dimensional p-laplacian elliptic systems[J]. Ann, Polon, Math, 1999, (71): 19-29.

[44] D. Q. Jiang, W. J. Gao. Upper and lower solution method and a singular boundary vlue problem for the one-dimensional p-laplacian[J]. J. Math. Anal. Appl. ,2000, (252): 631-648.

[45] D. Q. Jiang. Upper and lower solution method and a superlinear singular boundary value problem for the one-dimensional p-laplacian[J]. Computers. Math. Applic. , 2001, (42): 927-940.

[46] Gatica J A. , Oloker V. Waltman P. . Singular nonlinear boundary value problems for second order differential equations[J]. J. D. E. , 1989, (79): 62-78.

[47] O'Regan Donal. Existence theory for nonlinear ordinary differential equations[J]. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1997.

[48] O'Regan Donal.Theory of singular boundary value problenms. Singapore: World Scientific Press, 1994.

[49] Agarwal Ravi P,O'Regan Donal A note on existence of nonnegative solutions to singular semi-positone problems[J]. Nonlinear Analysis, 1999, (36): 615-622.

在校期间的研究成果及发表的学术论文

[1] 李洪梅， P-laplacian 算子型奇异边值条件的上下解方法． (已投数学物理学报)

[2] 李洪梅，具有无限多个奇性点的一维 p-laplacian 方程的正解． (已投应用泛函分析学报)

[3] 李洪梅，二阶奇异边值问题正解的存在性． (已投应用数学学报)

致 谢

本文是在导师赵增勤教授的精心指导和悉心关怀下完成的. 从最初的资料收集, 论文的具体写作到论文的修改都得到了他热情的指导和帮助, 使我得以较顺利地完成硕士毕业论文. 两年以来, 作者不仅在赵老师的指导下学业有所进步, 同时, 赵老师严谨的治学态度和执着追求的敬业精神必将影响我从事的各项工作.

在本文的写作过程中, 赵老师经常督促和鼓励作者勇于创新, 勇于提出自己独立的见解. 从而, 培养和锻造了作者独立思考和解决问题的能力. 同时, 赵老师一丝不苟的治学态度对作者影响颇深, 大到文章立意, 框架结构, 小到标点符号, 公式, 赵老师都一一订正. 这种严谨的治学精神必将影响今后的工作和学习. 作者也诚恳地感谢刘立山教授深切教诲和正确指导.

感谢孙忠民, 李振文, 冯强, 奄艳等各位同学的支持和帮助.

衷心感谢曲阜师范大学研究生处各位老师三年来对我的教育和培养.