第十一章　　无穷级数

§11.1　　常数项级数的概念和性质

内容概要

名称	主要内容
常数项级数	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　（u_n 为常数）
常数项级数的收敛性	若 $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，（s_n:前 n 项部分和）
常数项级数常用的性质	
	1. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛,且 $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=0}^{\infty}v_n$ 2. $k \neq 0$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 同收同发 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加入有限项或去掉有限项, 不改变级数的敛散性. 4. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (收敛的必要条件)
常用的结论	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ 当 $\lvert r\rvert < 1$ 时收敛其和为 $\frac{a}{1-r}$，当 $\lvert r\rvert \geq 1$ 时发散.

例题分析

★1. 已给级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，

1)写出此级数的前二项 u_1, u_2；

2)　计算部分和 s_1, s_2；

3)　计算第 n 项部分和 s_1；

4)　用级数收敛性定义验证这个级数是收敛的，并求其和.

知识点： 前 n 项部分和 s_n,常数项级数的收敛性.

解: 1) $u_1=\frac{1}{(2-1)(2+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}, u_2=\frac{1}{(4-1)(4+1)}=\frac{1}{3\cdot 5}$

2) $s_1=u_1=\frac{1}{3}$;

$s_2=u_1+u_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{5})$

3) $\because u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$\therefore s_n=u_1+u_2+\cdots u_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

4) $\because \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}, \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛, 其和为 $s=\frac{1}{2}$.

★★★2. 求常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{a^n}$ $|a|>1$ 之和.

知识点: 前 n 项部分和 s_n.

思路: $\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{1}{a^n}$ $\therefore$ 利用 $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$ $|r|<1$

解: 令 $s_n=1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^{n-1}}$ $|a|>1$

则 $as_n=a+2+\frac{3}{a}+\cdots+\frac{n-1}{a^{n-3}}+\frac{n}{a^{n-2}}$

以上两式相减得 $(a-1)s_n=a+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\cdots+\frac{1}{a^{n-2}}-\frac{n}{a^{n-1}}$

即 $s_n=\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a-1}(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\cdots+\frac{1}{a^{n-2}}-\frac{n}{a^{n-1}})=\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a-1}(\frac{1-\frac{1}{a^{n-1}}}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n-1}})$

$\because \lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a-1}(\frac{1}{1-\frac{1}{a}})=\frac{a^2}{(a-1)^2}$, $\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{a^n}=\frac{a^2}{(a-1)^2}$, $|a|>1$.

注: 利用等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$ $|r|<1$ 判别级数的收敛性及求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和是常用的方法.

★★3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 讨论下列级数的敛散性:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$.

知识点： 常数项级数的收敛性.

思路： 利用常数项级数的性质.

解： 1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}(u_n+0.0001)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n+0.0001=0.0001\neq 0$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$ 发散.

注： $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散是判别级数发散常用的方法.

2) $\because$常数项级数的性质: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 加入有限项或去掉有限项, 不改变级数的敛散性.

$\therefore$去掉 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 前 1000 项得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 仍收敛

3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\infty\neq 0$, $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散.

课后习题全解

习题 11−1

1.写出下列级数的前五项：

★(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ ★(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$

★(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ ★(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

解： (1) $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots=1+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{5}{17}+\frac{3}{13}+\cdots$.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{15}{48}+\frac{105}{384}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}-\cdots$.

(4) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$

2.写出下列级数的一般项：

★(1) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+\cdots$ ★(2) $-\frac{3}{1}+\frac{4}{4}-\frac{5}{9}+\frac{6}{16}-\frac{7}{27}+\frac{8}{36}+\cdots$

★(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$ ★(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$

★★(5) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$

★★(6) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\frac{2^4}{17}x^4+\cdots$

解: (1) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}\qquad(n=1,2,3\cdots)$.

(2) $u_n=(-1)^n\frac{n+2}{n!}\qquad(n=1,2,3\cdots)$.

(3) $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}\qquad(n=1,2,3\cdots)$.

(4) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}=(-1)^{n+1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}\qquad(n=1,2,3\cdots)$.

(5) $u_n=2n-1+\frac{1}{2n}\qquad(n=1,2,3\cdots)$.

(6) $u_n=\frac{2^n}{n^2+1}x^n\qquad(n=1,2,3\cdots)$.

3.根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

★(2) $\frac{1}{1\cdot6}+\frac{1}{6\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

★★★(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解: (1) $\because u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\therefore s_n&=(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}})+(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}})+\cdots\\&\quad+(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})\\&=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}s_n=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,原级数收敛.

(2) $\because u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1})$.

$$\therefore s_n=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{6})+\frac{1}{5}(\frac{1}{6}-\frac{1}{11})+\cdots+\frac{1}{5}(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1})=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})$$

所以 $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{5}$,原级数收敛.

(3) $s_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}$,

$\because \sin\frac{k\pi}{6}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[\cos(2k-1)\frac{\pi}{12}-\cos(2k+1)\frac{\pi}{12}]$

$\therefore s_n=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12})+(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12})+\cdots$

$+(\cos(2n-1)\frac{\pi}{12}-\cos(2n+1)\frac{\pi}{12})]$

$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[\cos\frac{\pi}{12}-\cos(2n+1)\frac{\pi}{12}]$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$不存在,原级数发散.

注： 另解$\because u_{6k}=\sin\frac{6k\pi}{6}=0, u_{6k+3}=\sin\frac{(6k+3)\pi}{6}=1$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}u_{6k}=0, \lim\limits_{k\to\infty}u_{6k+3}=1$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在，原级数发散.

4.判定下列级数的收敛性:

★(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$

★(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$

★★(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}$

★★(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

★★(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^n 2}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$;

★★(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

解： (1)此为等比级数，因公比$q=-\frac{8}{9}$，且$|q|<1$，故此级数收敛于$\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{8}{9}}=\frac{9}{17}$

(2) 级数的一般项：$u_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}$, 由调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散和级数的性质，知题设级数发散.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}\neq 0$ $\therefore$原级数发散.

(4) $\because \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$，$\therefore$原级数发散.

(5)$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 均为等比级数且公比分别为$|q_1| = \frac{\ln 2}{2} < 1, |q_2| = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 均收敛，　　故原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^n 2}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛.

(6)$\because \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} = 1 \neq 0$.　　$\therefore$原级数发散.

★★5.求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和.

解： $\because u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2})$.

$$\therefore s_n = \frac{1}{2}(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}) + \cdots + \frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$$
$$\therefore s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$$

★★★6.求常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$之和.

解： $\because s_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，　$3s_n = 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$

$\therefore 2s_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n}{3^n} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n}$　　(上两式相减)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n}\right) = \frac{3}{4}.$$

★★7.设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的前n项和为$s_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，求级数的一般项$a_n$及和$s$.

解： $\because s_{n-1}=\frac{1}{n-1+1}+\cdots+\frac{1}{n-1+n-1}$，$\therefore a_n=s_n-s_{n-1}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}$

且 $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\cdots\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$.

★★★★8.利用柯西审敛原理判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$.

解： (1)对于任意自然数 p，因为

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|$$

$$\le\begin{cases}\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})-(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5})-\cdots-\frac{1}{n+p} & (p\text{为偶数})\\ \frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})-\cdots-(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}) & (p\text{为奇数})\end{cases}$$

$<\frac{1}{n+1}$ （令 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, 解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$）

故 $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<1,\exists N=[\frac{1}{\varepsilon}-1]>0$, 当 $n>N$ 时，对于任意自然数 p，都有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

由柯西审敛原理，知所给级数收敛.

(2) 对于任意自然数 p，因为

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|\le\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\le\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}$$

$$=\frac{1}{2^n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{2^p})=\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2^p})<\frac{1}{2^n}$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<1,\exists N=[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}]>0$, 当 $n>N$ 时，对于任意自然数 p，都有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

由柯西审敛原理，知所给级数收敛.

(3) $\forall n$, 有 $\cos\frac{1}{n}<\cos\frac{1}{n+1}$，因为

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+n}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cos\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\cos\frac{1}{n+n}\right|$$

$$\geq\left|\frac{1}{2n}\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\cos\frac{1}{n}\ +\cdots+\frac{1}{2n}\cos\frac{1}{n}\right|\quad (n\text{项})$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{n}>\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\qquad (n>2)$$

故取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$，对于任意 $n\in N,\exists\, p=2n$，使得 $\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|>\varepsilon_0$

由柯西审敛原理，知所给级数发散.

提高题

1.判定下列级数的收敛性:

★★1） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n})$；

★★2） $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}\cos(n\pi)$；

★★★★3） $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$；

★★★★4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}\cdot e^n$.

解： 1） $\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n})$ 发散.

2） $\because u_n=\sqrt[n]{2}\cos(n\pi)=(-1)^n\sqrt[n]{2}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0\quad \therefore\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}\cos(n\pi)\text{发散.}$$

3） $\because\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}\cdot\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x}$

$$\underline{\underline{t=\frac{1}{x}}}\quad e^{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}}=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}}=e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}\text{ 发散.}$$

4） $\because\frac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\cdot e^{n+1}}{\dfrac{n!}{(n+1)^n}\cdot e^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}\cdot e=\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}\cdot e$

由数列$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$单调递增趋于$e$知：$(1+\frac{1}{n})^n<e$

$$\because \frac{u_{n+1}}{u_n}>1 \text{即} u_{n+1}>u_n>u_1，\ \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0，\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^2}\cdot e^n \text{ 发散.}$$

2. 求下列级数的和.

★★1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$；　　　★★★★2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}$

解： 1) $\because u_n=\frac{1}{9n^2-2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})$.

$$\therefore s_n=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4})+\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}，\quad \therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{3}.$$

2) $\because u_n=\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}=\arctan\frac{(4n+1)-(4n-3)}{1+(4n-3)(4n+1)}$

$$=\arctan(4n+1)-\arctan(4n-3)$$

$$\therefore s_n=[\arctan5-\arctan1]+[\arctan9-\arctan5]+\cdots+[\arctan(4n+1)-\arctan(4n-3)]$$

$$=\arctan(4n+1)-\arctan1$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}，\quad \therefore\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

§11.2　正项级数判别法

内容概要

<table>
<tr><td colspan="2">名称</td><td>主要内容</td></tr>
<tr><td colspan="2">正项级数</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$　（u_n为常数，$u_n\geq 0$）</td></tr>
<tr><td colspan="3">正项级数敛散性判别法</td></tr>
<tr><td>1.比较判别</td><td>一般形式</td><td>若当$0\leq u_n\leq Cv_n$(C为大于的常数)，则
1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ 收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛.　2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散$\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ 发散</td></tr>
</table>

法	极限形式	若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则 1) $0<l<+\infty$, 这两级数同时收敛同时发散. 2) $l=0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛. 3) $l=+\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散.
2．比值判别法		$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则 1) $\rho<1$, 级数收敛；2) $\rho>1$, 级数发散; 3) $\rho=1$, 本法失效.
3. 根值判别法		$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, 则 1) $\rho<1$, 级数收敛；2) $\rho>1$, 级数发散; 3) $\rho=1$, 本法失效.
4. 积分判别法		若存在 $[1,\infty]$ 上单调减少的连续函数 $f(x)$，使得 $u_n=f(n)$，则 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散 $\Leftrightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 发散.
常用的结论		$\sum\limits_{n=0}^{\infty}ar^n$ 当 $\vert r\vert<1$ 时收敛其和为 $\frac{a}{1-r}$，当 $\vert r\vert\ge1$ 时发散. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$ 时收敛，$p\le1$ 时发散

例题分析

★1. 用比较判别法或极限判别法判别下列级数的收敛性：

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n+n^2}$;　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$;　　3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{2^n}$;　　4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

知识点： 比较判别法.

思路: 比较判别法的特点：先要初步估计一下被判级数的敛散性，然后找一个已知敛散性级数与之对比。这就要求我们初步判断正确，同时要掌握一些已知其敛散性的级数。常用的级数有两个：

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$, $|r|<1$ 时收敛，$|r|\ge1$ 时发散, p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$ 时收敛，$p\le1$ 时发散.

解： 1) **分析：** $\frac{4n-1}{n^2+n}$ 与 $\frac{1}{n}$ 当 $n\to\infty$ 时是同阶无穷小.估计 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n+n^2}$ 是发散的。

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n-1}{n^2+n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=4$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n+n^2}$ 发散.

2）**分析：** 此题无法直接用比较判别法，因 $u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 随 n 的增加而变化，当 n 为奇数时等于 1，当 n 为奇数时等于 3，即分母不超过 3，因此有 $\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}$ 。

$\because u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}$， 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 收敛，$\therefore$ 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛

3）**分析：** $\tan\frac{\pi}{2^n}\sim\frac{\pi}{2^n}$ （$n\to\infty$），估计 $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{2^n}$ 是收敛的.

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1$， 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

4) **分析：** $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{2}{n-1})\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{n-1}\sim\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ （$n\to\infty$）

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}}{\frac{2}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{n-1}}{\frac{2}{n\sqrt{n}}}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\sqrt{n}}$ 收敛，$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$ 收敛.

小结： 比较判别法判断级数的敛散性，一般可从等价无穷小量出发，找一个已知敛散性的级数与之比较.

2. 用比值判别法判别下列级数的收敛性：

★★1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ ； ★2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ ★3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(\sqrt{3}-1)^n}$

解： 1) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}2(\frac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}2\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

$\therefore$ 由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$

$\therefore$ 由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ 收敛.

3) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2(\sqrt{3}-1)^{n+1}\cdot}}{\frac{1}{n^2(\sqrt{3}-1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{3}-1}>1$

$\therefore$ 由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(\sqrt{3}-1)^n}$ 发散.

小结： 通过上面 1)−3)题，当一般项 u_n 中含有 $a^n, n!$ 等，或 u_{n+1} 与 u_n 有公因子时，常用比值判别法.

3.用根值判别法与积分判别法判别下列级数的收敛性：

★1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$ ；　　　　★2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

解： 1) $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n}=0<1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛.

2)设 $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ 　则显然 $f(x)$ 在 $x>1$ 时非负且连续，因

$$f'(x)=-\frac{\ln(x+1)+1}{[(x+1)\ln(x+1)]^2}<0\qquad(x>1)$$

故在 $x>1$ 时 $f(x)$ 单调减少.

$$\because \int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln(x+1)}d\ln(x+1)=\ln(ln(x+1))\Big|_1^{+\infty}=\infty$$

$\therefore$ 由积分判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 发散.

小结： 当一般项 u_n 中含有 a^n, n^n 等时，常用根值判别法.

课后习题全解

习题 11-2

1.用比较判别法或极限判别法判别下列级数的收敛性：

★(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}(a>0,b>0)$;　★(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;　★(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

★(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$　★(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;　★(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

★(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$　★★(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$　★★ (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$

解： (1) $u_n=\frac{1}{na+b}\sim\frac{1}{na}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{na+b}/\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{na+b}=\frac{1}{a}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}$ 发散.

(2) 法一: $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}\sim\frac{1}{n}$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+n}{1+n^2}/\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{1+n^2}=1$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 发散.

法二: $\because u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 发散.

(3) $u_n=\frac{1}{1+n^2}$, 与 $p-$级数 $(p=2)$ 比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+n^2}/\frac{1}{n^2})=1$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 收敛.

(4) $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+4)}$, 与 $p-$级数 $(p=2)$ 比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{(n+1)(n+4)}/\frac{1}{n^2})=1$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 收敛.

(5) $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}\sim\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，与 $p-$级数 $(p=\dfrac{3}{2})$ 比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}/\dfrac{1}{n^{3/2}})=1$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 收敛.

(6) $u_n=\sin\dfrac{\pi}{2^n}\sim\dfrac{\pi}{2^n}$，与几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$ 比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\sin\dfrac{\pi}{2^n}/\dfrac{\pi}{2^n})=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$ 收敛，$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(7) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2}{\sqrt{n}}\sim\dfrac{2}{n}$，与调和级数比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2}{\sqrt{n}}/\dfrac{1}{n})=2$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ 发散.

(8) $\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=\begin{cases}1 & a<1;\\ \dfrac{1}{2} & a=1;\\ 0 & a>1;\end{cases}$

$\therefore$ 当 $a\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散. 当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}<1$，这时 $u_n=\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$

由几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}(0<\dfrac{1}{a}<1)$ 收敛，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛.

(9) 法一：$u_n=\dfrac{1}{\ln(1+n)}$，与调和级数比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\ln(1+n)}/\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln(1+n)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=+\infty$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\ln(1+n)}$ 发散.

法二：$u_n=\dfrac{1}{\ln(1+n)}>\dfrac{1}{n+1}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\ln(1+n)}$ 发散.

2. 用比值判别法判别下列级数的收敛性：

★(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$ ★(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}-\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots$ ★(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}$

★(4) $1+\frac{5}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\frac{5^3}{4!}+\cdots$; ★(5) $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\frac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots$;

★★(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}(a>0)$; ★★(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$; ★(8) $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{5})^n$

解: (1) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{(n+1)\cdot 2}=\frac{3}{2}>1$

$\therefore$ 由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{2^{n+1}}}{\frac{7}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，$\therefore$ 由比值判别法知, 原级数收敛.

(3) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}}{\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}}=\frac{1}{4}<1$，$\therefore$ 由比值判别法知, 题设级数收敛.

(4) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n}{n!}}{\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0<1$，$\therefore$ 由比值判别法知, 题设级数收敛.

(5) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2^n}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}=2>1$

$\therefore$ 由比值判别法知, 题设级数发散.

(6) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}}{\frac{a^n}{n^k}}=a$

$\therefore$ 当 $a<1$ 时，由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}(a>0)$ 发散;

当 $a>1$ 时，由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}(a>0)$ 收敛;

当 $a=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$；当 $k\le 1$ 时发散，当 $k>1$ 时收敛.

(7) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{5^{n+1}-3^{n+1}}}{\frac{4^n}{5^n-3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}-3^{n+1}}=\frac{4}{5}<1$

$\therefore$ 由比值判别法知,题设级数收敛.

(8) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{3}{5}<1$，$\therefore$ 由比值判别法知,题设级数收敛.

3. 用根值判别法判别下列级数的收敛性：

★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$; ★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; ★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$

★★(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$; ★(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)^n$; ★★(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+e^n}$;

解: (1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{2n+1})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ 收敛.

(2) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ 收敛.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{3n-1})^{\frac{2n-1}{n}}=\frac{1}{9}<1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$ 收敛.

(4) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$ 发散.

(5) $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}=3>1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)^n$ 发散.

(6) $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{1+e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+e^{-n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$ 发散.

4. 用积分判别法判别下列级数的收敛性：

★★(1) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$;　　★★(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}(p\ge 1)$.

解： (1) 设 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$ 则显然 $f(x)$ 在 $x>1$ 时非负且连续，因

$$f'(x)=-\frac{(\ln x)^p+(\ln x)^{p-1}}{[x(\ln x)^p]^2}<0 \qquad (x>e)$$

故在 $x>e$ 时 $f(x)$ 单调减少.由积分判别法

当 $p\ne 1$ 时 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^p}d\ln x=\frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{+\infty}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1} & p>1\\ \infty & p<1\end{cases}$$

当 $p=1$ 时 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln lnx\Big|_2^{+\infty}=\infty$

综合上述知：当且仅当 $p>1$ 时 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛.

(2) 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x^p}$ 则显然 $f(x)$ 在 $x>3$ 时非负且连续，因

$$f'(x)=\frac{x^{p-1}-px^{p-1}\ln x}{(x^p)^2}=\frac{x^{p-1}(1-p\ln x)}{(x^p)^2}<0 \qquad (x>e^{1/p})$$

故在 $x>3$ 时 $f(x)$ 单调减少.由积分判别法

当 $p>1$ 时 $\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\int_3^{+\infty}\ln x dx^{1-p}=\frac{1}{3^{p-1}\cdot(1-p)^2}+\frac{1}{p-1}\frac{\ln 3}{3^{p-1}}<\infty$

当 $p=1$ 时题设级数发散.(例 11)

故当且仅当 $p>1$ 时 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛.

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛。证明下列级数也收敛：

★★（1） $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$;　　★★（2） $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$;　　★★（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

解： (1) $\because |a_nb_n|\le\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$，　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛.

(2) $\because (a_n+b_n)^2=a_n^2+2|a_nb_n|+b_n^2$，　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛.

(3) 在(1)中取 $b_n=\frac{1}{n}$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

★★6. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 的收敛性，其中 $a_n\to\alpha(n\to\infty)$, 且 a_n,b,α 均为正数.

解： $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{\alpha}$

所以当 $\frac{b}{\alpha}<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 收敛；

当 $\frac{b}{\alpha}>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 发散；

当 $\frac{b}{\alpha}=1$ 时，不能判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 的敛散性

★★★7. 设$u_n>0,v_n>0(n=1,2,\cdots)$,且$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$,证明:若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

解: $\because\frac{u_2}{u_1}\le\frac{v_2}{v_1},\frac{u_3}{u_2}\le\frac{v_3}{v_2},\frac{u_4}{u_3}\le\frac{v_4}{v_3},\cdots\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n},\therefore\frac{u_{n+1}}{u_1}\le\frac{v_{n+1}}{v_1}$,即$u_{n+1}\le\frac{u_1}{v_1}v_{n+1}$

故$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

★★★★8. 设$\lim_{n\to\infty}n^{\lambda}\left[\ln(1+n)-\ln n\right]V_n=3(\lambda>0)$, 试讨论正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ 的收敛性.

解: $\lim_{n\to\infty}n^{\lambda}\left[\ln(1+n)-\ln n\right]V_n=\lim_{n\to\infty}n^{\lambda}\ln(1+\frac{1}{n})V_n$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\lambda-1}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{\frac{1}{n^{\lambda-1}}}=3$$

故当$\lambda-1>1$,即$\lambda>2$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ 收敛; 当$\lambda-1\le1$,即$\lambda\le2$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ 发散.

提高题

1.判定下列级数的收敛性:

★★★1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^n}{1+n^2e^{-n}+2n^3e^n}$;;

★★★★2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$;

★★★★3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$;

★★★★4) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x^2}}dx,(\alpha>-1)$.

解: 1) $\frac{ne^n}{1+n^2e^{-n}+2n^3e^n}=\frac{n}{e^{-n}+n^2e^{-2n}+2n^3}\sim\frac{1}{2n^2}$ ($n\to\infty$),

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{ne^n}{1+n^2e^{-n}+2n^3e^n}}{\frac{1}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2n^3e^n}+\frac{1}{2ne^{2n}}+1}=1$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛, $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^n}{1+n^2e^{-n}+2n^3e^n}$ 收敛.

2) 法一: $\because\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e<3,\therefore\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\cdot\frac{n}{(n+1)^2}>\frac{1}{3}\frac{n}{(n+1)^2}$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$ $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$ 发散.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ 发散

法二：$\therefore \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\cdot\frac{n}{(n+1)^2}\sim\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{n}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\therefore$ 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ 发散.

3） $\because u_n=\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\le\frac{n^3[\sqrt{2}+1]^n}{3^n}$

由比值判别法易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+1]^n}{3^n}$ 收敛， $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 收敛.

4） $\because \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}dx\ge\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}dx=\frac{1}{(\alpha+1)\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}\cdot(\frac{1}{n})^{\alpha+1}\ge\frac{1}{(1+\alpha)\sqrt{2}}(\frac{1}{n})^{\alpha+1}$

同时 $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}x^\alpha dx=\frac{1}{(\alpha+1)}\cdot(\frac{1}{n})^{\alpha+1}$

$\therefore$ 原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^{\alpha+1}$ 同时收敛，同时发散，故原级数在 $\alpha>0$ 时收敛，在 $-1<\alpha<0$ 时发散.

★★★2.求级限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}, a>0$.

解：考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$，其通项为 $u_n=\frac{a^n}{n!}$

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(n+1)}=0<1$

$\therefore$ 由比值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 收敛.

$\therefore$ 由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

§11.3 一般常数项级数

内容概要

名称	主要内容
绝对收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$
条件收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.
莱布尼兹判别法: 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 满足下面两条件: 1） $u_{n+1}\le u_n, n=1,2\cdots$, 2） $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，且其和的绝对值小于首项 u_1.	

例题分析

★1. 判别级数下列级数的收敛性, 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

★1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^n}$;　★★2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$;　★★3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$.

知识点: 绝对收敛，条件收敛.

思路: 先要判别级数的绝对收敛性，若不绝对收敛，再判别级数的条件收敛性。

解: 1) $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+3}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 绝对收敛.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$

$$\because u_n=[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，$\therefore$ 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$ 发散.

但 1) $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

2) $\because u_n-u_{n+1}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}>0$$

$\therefore\quad u_n-u_{n+1}>0$, 即 $u_n>u_{n+1}$

由莱布尼兹判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$ 条件收敛.

注： 考察 u_{n+1} 与 u_n 的大小，常用的方法有如下三种：

法一，看 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于 1.　　法二，看 u_n-u_{n+1} 是否大于 0.

法三，看 u_n 对 n 的导数是否小于 0.（此时将 n 看成连续自变量）。

此题用法二，法一，法三留给读者自己分析。

3) $\because\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\neq0$，$\therefore$ 原级数发散.

问题： 1) 一个交错级数，如果它不满足莱布尼兹条件是否一定发散.

2) 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\ (u_n>0)$, 如果 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，该级数是否一定发散

课后习题全解

习题 11-3

1.判别级数下列级数的收敛性, 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^{n-1}}$;　　★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(n+1)^2}$.

★★(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}(a>0)$;　　★★(5) $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{10^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{3}{10^3}+\cdots$;

★(6) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$.

解： (1) 显然原级数不是绝对收敛（ $p=\frac{1}{2}$ 的 p 级数）

$$\because u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}\text{，且}\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

∴由莱布尼茨判别法知，原级数条件收敛.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}<1$, ∴绝对值级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛，原级数绝对收敛.

(3) $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{(n+1)^2}\right|\le\frac{1}{(n+1)^2}$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛，∴原级数绝对收敛.

(4) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)a^{n+2}}}{\frac{1}{(n+1)a^{n+1}}}=\frac{1}{a}$

∴当 $\frac{1}{a}<1$,即 $a>1$ 时，原级数绝对收敛；当 $\frac{1}{a}>1$,即 $a>1$ 时，原级数发散；

当 $a=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

(5) $\because u_n=\frac{1}{2^n}, v_n=\frac{3}{10^n}$

因 $q_1=\frac{1}{2}<1$, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛；因 $q_2=\frac{1}{10}<1$, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty}v_n$ 收敛；

∴原级数绝对收敛.

(6) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+3)^2}{2^{n+2}}}{\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$，∴由比值判别法知, 原级数绝对收敛.

★★★2．数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$ 是绝对收敛，条件收敛，还是发散.

解： $\because \sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=\sin n\pi\cos\frac{1}{\ln n}+\cos n\pi\sin\frac{1}{\ln n}=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$

$\therefore$原级数为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$

$\because \sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$

$\therefore \sin\frac{1}{\ln n}$ 单调下降且 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0$, $\therefore$ 原级数收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$ 发散（$\sin\frac{1}{\ln n}\sim\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}\quad n>2$）

所以原级数条件收敛.

★★★★3．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left[n+(-1)^n\right]^p}(p>0)$ 的收敛性.

解: $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\left[n+(-1)^n\right]^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}=1$, $\therefore$ 当且仅当 $p>1$ 时, 原级数绝对收敛;

当 $p\le 1$ 时

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\left[n+(-1)^n\right]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\left[1-p\frac{(-1)^n}{n}+o(\frac{1}{n})\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\frac{p}{n^{p+1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot o(\frac{1}{n})$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}(p\le 1)$ 条件收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p}{n^{p+1}}(p+1>1)$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot o(\frac{1}{n})(p\le 1)$ 绝对收敛，知原级数条件收敛.

4．讨论 x 取何值时，下列级数绝对收敛，条件收敛.

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}$;　　　　★★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^p}(p>0)$.

解: (1) $u_n=2^n x^{2n}\ge 0$, $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|2^n x^{2n}\right|}=2x^2$

$\therefore$由根值判别法知，当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时原级数绝对收敛.

当 $|x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时原级数发散.（当 $|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时显然发散）

(2) 显然 $x\ne -k(k=1,2,3\cdots)$，当 n 充分大时 $n+x>0$

$\because u_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^p}$， $\lim\limits_{n\to\infty}n^p|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{(n+x)^p}=1$

$\therefore$由比较判别法知，当 $p>1$时原级数绝对收敛. 当$0<p\le 1$时，原级数条件收敛.

★★★★5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$的某一邻域内具有二阶连续导数。且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

试证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛.

证明： 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，知 $f(0)=0$，且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nf(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{3/2}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$收敛，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛.

提高题

1. 判别级数下列级数的收敛性, 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

★★★1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})(a\ne 0)$； ★★★2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10}n}$.

解： 1)$\because\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=(-1)^n\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

当n充分大时，$0<\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\pi, 0<\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\le 1$

由$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=a^2\pi$， 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$发散,

原级数去掉有限项后为交错级数，且此时$\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$单调减少趋于$0$， $\therefore$原级数条件收敛.

2)$\because\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{\ln^{10}n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln^{10}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{10\ln^9 x}=\infty$， $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10}n}$发散.

★★★★2.设a为实数, 讨论级数$1-\dfrac{1}{2^a}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^a}+\dfrac{1}{5}+\cdots\cdots$收敛性.

解： 1)当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是莱布尼兹型交错级数，故条件收敛.

2)当 $a>1$ 时，取前 $2n$ 项之和：

$$s_{2n}=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})-(\frac{1}{2})^{a}[1+\frac{1}{2^{a}}+\frac{1}{3^{a}}+\cdots+\frac{1}{n^{a}}]$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$ 收敛

$\therefore \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})=+\infty, \lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{2^{a}}+\frac{1}{3^{a}}+\cdots+\frac{1}{n^{a}}]=s$（常数）

$\therefore \lim_{n\to\infty}s_{2n}=+\infty$，原级数发散.

3)当 $a<1$时，取前 $2n$ 项之和：

$$s_{2n}=(1-\frac{1}{2^{a}})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{a}})+\cdots\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}})$$

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}-(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}})$，

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{-(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}})}{\frac{1}{n^{a}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-[(2n)^{a}-(2n-1)]}{(2n-1)2^{a}}=\lim_{n\to\infty}-[\frac{n^{a}}{2n-1}-\frac{1}{2^{a}}]=\frac{1}{2^{a}}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}(a<1)$ 发散， . $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}-(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}})$ 发散

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}})$ 发散，且 $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{a}}<0$（当 n 充分大时），

$\therefore \lim_{n\to\infty}s_{2n}=\infty$，原级数发散.

综合上述：当且仅当 $a=1$ 时原级数收敛.

★★★2.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 绝对收敛.

解： $\because \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛， $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$

当 n 充分大时 $|a_n|<1$，此时 $a_n^2\le|a_n|$， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 绝对收敛.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|1+a_n|}=1$, 由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 绝对收敛.

$\because \frac{a_n^2}{1+a_n^2}\le a_n^2$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 收敛, 即绝对收敛.

§ 11.4　幂级数

内容概要

名称	主要内容
幂级数	$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$
收敛半径	若 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ 或 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 则　收敛半径 $R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 当\rho\ne 0\\ +\infty, & 当\rho=0\\ 0, & 当\rho=\infty\end{cases}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{\lvert a_{n+1}\rvert}$ **注意:** 利用此公式时要求 x 的幂级数不能有间隔.

幂级数常用的性质

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并在 I 上有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R_1,R_1)$ 内可导，并在 $(-R_1,R_1)$ 内有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

且逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例题分析

1.求下列幂级数的收敛域.

★（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4^{n+1}x^n$；　★（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；　★（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$；

知识点： 收敛半径，收敛域.

思路: 先求出幂级数的收敛半径 R,然后,再判别级数在收敛区间端点处的收敛性,得出幂级数的收敛域.

解:（1）$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}4^{\frac{n+1}{n}}=4$，$\therefore$收敛半径 $R=\frac{1}{4}$

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4$ 发散; 当 $x=-\frac{1}{4}$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}4$ 发散.

从而幂级数收敛域为 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

（2）法一：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\cdot\frac{2^n}{2n-1}\frac{1}{x^{2n-2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\cdot x^2=\frac{1}{2}x^2$$

当 $\frac{1}{2}x^2<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2}x^2>1$，即 $-\infty<x<-\sqrt{2},\sqrt{2}<x<\infty$ 时，级数发散.

当 $x^2=2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散

综上所述，原幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

注: 此幂级数中，x 的幂缺奇次幂故不能直接用公式,直接用比值判别法.但令 $y=x^2$ 则原幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}y^{n-1}$ 可用此公式,

法二：令 $y=x^2$ 则原幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}y^{n-1}$，

$$\because R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(2\cdot\frac{2n-1}{2n+1})=2$$

$$\therefore -2<y<2,\quad 0\le x^2<2\qquad \therefore -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数为 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$ 发散. 故原幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（3）法一：令 $y=x-1$，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n\cdot 9^n}$

因为 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 9^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot 9^{n+1}}{1}\right|=9$

当 $y=9$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，当 $y=-9$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，

从而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n\cdot 9^n}$ 的收敛域为 $-9\le y<9$

原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$ 的收敛域为 $-9\le x-1<9$,即 $[-8,10)$.

法二：因为 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 9^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot 9^{n+1}}{1}\right|=9$

当 $|x-1|<9$，即 $-8<x<10$ 时，原级数绝对收敛.

当 $x=10$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，当 $x=-8$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，

故原级数的收敛域为 $[-8,10)$.

★2.求 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

知识点： 收敛域，和函数

思路： 先求收敛域，再用幂级数的性质及 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad x\in(-1,1)$ 求和函数 $s(x)$，最后利用 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，选取适当的 x 值计算 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

解： 1° 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域.

因为 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$，且当 $x=\pm1$ 时，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n(n+1)$ 发散.

所以原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$

2° 求$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的和函数$s(x)$

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad x\in(-1,1)$

则$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

也可如下计算:

$$\because \int_0^x s(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\int_0^x s(t)dt\right]=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$$.

$$\therefore s(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \quad x\in(-1,1).$$

3° 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}$的和

取$x=\frac{1}{2}$，则 $s(\frac{1}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$

故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}s(\frac{1}{2})=2$.

★★3. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数$s(x)$.

解: 1° 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域.

$$\because R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, 是收敛的交错级数: 当$x=-1$时，原级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, 是发散的.

$\therefore$收敛域为$[-1,1)$

2°　求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数$s(x)$

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\qquad x\in[-1,1)$,

$$\because xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad \therefore [xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore xs(x)-0s(0)=\int_0^x[xs(x)]'dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\qquad -1\le x<1$$

于是　当$x\neq0$时,有$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$

$$s(0)=\lim_{x\to0}s(x)=\lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{x}\ln(1-x)\right]=1$$ (也可由$s(0)=a_0=1$得出)

故$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$

课后习题全解

习题 11-4

1. 求下列幂级数的收敛域:

★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$;　★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot3^n}$;　★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2\cdot4\cdots(2n)}$;

★(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$;　★(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}}$;　★★(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$;

★(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$;　★(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;　★(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

解: (1) $\because\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{1}\right|=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^2=1$，$\therefore$收敛半径$R=1$.

当$x=\pm1$时，数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\pm1)^n}{n^2}$的绝对值级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，从而幂级数在$x=\pm1$也收敛，收敛域为$[-1,1]$

(2) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot3^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot3^{n+1}}{1}\right|=\lim_{n\to\infty}(3\cdot\frac{n}{n+1})=3$

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的; 当 $x=-3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的.

所以原幂级数的收敛域为 $[-3,3)$

(3) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{1}\right|=\lim_{n\to\infty}[2(n+1)]=\infty$

原幂级数的收敛域为 $(-\infty,\infty)$.

(4) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{n^2+1}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

当 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n^2+1}$, 它绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 是收敛的.

从而幂级数在 $x=\pm\frac{1}{2}$ 也收敛, 原幂级数的收敛域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(5) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{5^n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{5^{n+1}\sqrt{n+2}}{1}\right|=5$

当 $x=5$ 时，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 条件收敛; 当 $x=-5$ 时，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散.

故原幂级数的收敛域为 $(-5,5]$

(6) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n+2}{\ln(n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+2}}=1$$

当 $x=1$时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 发散; 当 $x=-1$时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 条件收敛.

故原幂级数的收敛域为 $[-1,1)$

(7)令 $y=x-2$，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2}$, $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$

当 $y=\pm 1$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n^2}$ 的绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，从而幂级数在$y=\pm1$也收敛，收敛域为$-1\le y\le 1$,

即$-3\le x\le -1$, 原级数的收敛域为$[-3,-1]$.

(8)令$y=x-5$，原级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{\sqrt{n}}$，$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n+1}}{1}=1$

当$y=1$时，数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散. 当$y=-1$时，数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{\sqrt{n}}$收敛域为$-1\le y<1$,　即$-1\le x-5<1,\quad 4\le x<6$,

原级数的收敛域为$[4,6)$

(9)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big/\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|=x^2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=x^2$

当$x^2<1$即$|x|<1$时，原级数绝对收敛. 当$x^2>1$即$|x|>1$时，原级数发散.

当$x=\pm1$时，级数分别为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$都收敛.

综上所述，原幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

2.求下列幂级数的收敛半径:

★(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}x^n$;　　　★★★(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}x^n$.

解: (1) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}\Big/\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+2})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2})^{n+2}=\frac{1}{e}$

(2)记 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}},|a_n|=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

则 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\Big/\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{n!}}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=(n!)^{\frac{1}{n(n+1)}}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}$

$\because\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\le\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$

$$=\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le(n^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=n^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}$$

$$\because\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^0=1,\therefore\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1\qquad\lim_{n+1\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}=1$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$$

原级数收敛半径为 $R=1$

3. 求下列幂级数的和函数:

★(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;　　★★(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;　　★(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

解: (1)显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$

$$\because\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad(-1<x<1).$$

(2) 易求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$,

$x\ne0$ 时, 设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

$$\because\left(xs(x)\right)''=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\qquad x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

$$\therefore\left(xs(x)\right)'=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$$ (注: $(xs(x))'\big|_{x=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n}=0$)

$$\therefore xs(x)=-\int_0^x\ln(1-t)dt=-[t\ln(1-t)\big|_0^x+\int_0^x\frac{t}{1-t}dt]$$

$$=-x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x=(1-x)\ln(1-x)+x$$

$$\therefore s(x)=\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}\qquad x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

$$s(1)=\lim_{x\to1^-}s(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}=1$$ (也可: $s(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$)

$$s(-1)=\lim_{x\to-1^+}s(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}=1-2\ln 2+$$

故 $s(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}, & -1\le x<1\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$.

(3)显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. 的收敛域为 $(-1,1)$

$$\because\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}\qquad(-1<x<1)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^x[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}]dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\qquad(|x|<1)$$

★★4.求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$. 的和函数,并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$. 的和.

解: $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=xe^{x^2}\qquad -\infty<x<\infty$

$\because s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=(xe^{x^2})'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$, $\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=s'(1)=3e$.

★★5. 试求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中 $a>1$.

解: $\because\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{a})^n$, $\therefore$考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.

$$\because\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\quad x\in(-1,1),$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})=\frac{\frac{1}{a}}{(1-\frac{1}{a})^2}=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

★★6.求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}$

考虑 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$

$$\because s(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)''=(\frac{x}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}\qquad(-1<x<1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n=(-\frac{1}{2})^2\ s(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(1-\frac{-1}{2})^3}=\frac{4}{27}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}\ .$$

提高题

1.求下列幂级数的收敛域:

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$; ★★★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}x^n$.

解: (1) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}](n+1)}{[3^n+(-2)^n]n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3[1+(-\frac{2}{3})^{n+1}](n+1)}{[1+(-\frac{2}{3})^n]n}=3$

当 $x=3$ 时，$\because \lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{3^n}{[3^n+(-2)^n]n}=1$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 发散;

当 $x=-3$ 时， $\because \frac{(-3)^n}{[3^n+(-2)^n]n}=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2^n}{[3^n+(-2)^n]}\cdot\frac{1}{n}$,

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 收敛，$\therefore$ 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 收敛.

故原级数的收敛域为 $[-3,3)$

(2) 记 $a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

$$\because \frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{1+1+\cdots+1}}\le\sqrt[n]{a_n}\le\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}}=1$$

又 $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1\ \therefore R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

当 $x=1$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$，由 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{1}{n}$ 知发散;

当 $x=-1$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$, 由 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 单调减少趋于零知收敛.

故原级数的收敛域为 $[-1,1)$.

★★2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3 ,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为（　　）.

解: 令 $y=x-1$,则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}na_n y^{n+1}$

$$\because R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$\therefore$ 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n y^{n+1}$ 与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径相同,

$\therefore |y|<3$, 从而 $|x-1|<3$,即 $-2<x<4$

★★★★3.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

解: 记 $a_n=(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+3)+1}{n(2n-1)+1}\cdot\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+3)}=1$$

$\therefore$ 当 $x^2<1$,即 $|x|<1$ 时，原级数收敛

当 $x=\pm1$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]$,

$\because \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}$ 收敛, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]$ 发散.

$\therefore$ 原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n} \qquad x\in(-1,1)$，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)x^{2n}$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n}=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n}\right)'dx$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'dx+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-x^2)^n}{n}\right)'dx$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'dx+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}\cdot(-2x)dx$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}dx-2\int_0^x\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx-\ln(1+x^2)$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2).$$

§11.5 函数展开成幂级数

内容概要

名称	主要内容
泰勒级数	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$
麦克老林级数	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$
七个常用的幂级数展开式	

4. $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad x\in(-\infty,\infty)$

5. $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots \quad x\in(-\infty,\infty)$

6. $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots \quad x\in(-\infty,\infty)$

7. $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \quad x\in(-1,1]$

8. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$

9. $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$

10. $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-\cdots+(-x)^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$

例题分析

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

知识点: 麦克劳林级数

思路: 以函数幂级数展开式的唯一性作为依据, 利用七个常用的幂级数展开式,通过 $+,-,\times,\div$, 变量代换, 逐项积分, 逐项微分等方法归为七个常用的幂级数展开式的形式,从而求得所给函数的幂级数展开式.

★★(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; ★★(2) $f(x)=\frac{x}{2-x-x^2}$; ★★(3) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

解: (1) $\because \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \quad x\in(-1,1]$

$$\therefore (1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}$$

又 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

令 $n=m+1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m+2}x^{m+2}=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}x^{n+2}$,

$$\therefore (1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}x^{n+2} \qquad x\in(-1,1]$$

(2) **利用** $\frac{1}{1-x} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad x\in(-1,1)$

法一：$\because f(x) = \frac{x}{2-x-x^2} = \frac{x}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{3}[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{2+x}]$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1);\quad \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n},\ \frac{x}{2}\in(-1,1)$ 即 $x\in(-2,2)$，

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}x^n - \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\left[1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]x^n,$$

$x\in(-1,1)\cap(-2,2)$，即 $x\in(-1,1)$.

法二：$\because f(x) = \frac{x}{3}[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x}] = \frac{x}{3}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right]$

$$= \frac{x}{3}\left[\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}x^n + \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}\right] = \frac{x}{3}\left[\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^{n+1}, \qquad -1<x<1,$$

注： 1.展开时分子上的 x 可以放在括号外面，暂不考虑。

2.两种做法结果是一样的.(读者自己思考一下互换).

(3)**利用** $\frac{1}{1+x} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}(-x)^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots \quad x\in(-1,1)$

法一：$\because \left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$，　　而 $\frac{-1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n, \qquad -1<x<1$

$$\therefore \frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{-1}{1+x}\right)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}[x^n]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}\quad -1<x<1$$

法二：$\because \frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ （用幂级数的乘法）

$$=(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\cdots)\cdot(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\cdots)$$

$$=1-2x+3x^2-4x^3\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}\quad -1<x<1$$

★2. 将 $\ln x$ 展开成 $x-1$ 的幂级数:

知识点： 麦克老林级数

思 路： $x-1$ 看作一整体，利用 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\quad x\in(-1,1]$，故将 $\ln x$ 写成 $\ln[1+(x-1)]$

解： $\because \ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}\qquad x-1\in(-1,1]$

$$\therefore \ln x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}\qquad x\in(0,2]$$

课后习题全解

习题 11-5

1.将下列函数展开成 x 的幂级数,并求其成立的区间:

★(1) $f(x)=\ln(a+x)$; ★(2) $f(x)=a^x$; ★ (3) $f(x)=e^{-x^2}$;

★(4) $f(x)=\cos^2 x$; ★ (5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; ★★(6) $f(x)=\frac{x}{x^2-2x-3}$.

解：(1) $f(x)=\ln[a(1+\frac{x}{a})]=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$

$(-1<\frac{x}{a}\le 1$，即 $-a<x\le a)$

(2) $f(x)=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$， $(-\infty<x\ln a<+\infty$，即 $-\infty<x<+\infty)$

(3) $f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$ $-\infty<x<+\infty)$

(4) $f(x)=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\qquad (x\in R)$$

(5) $f(x)=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad\because \alpha=-\frac{1}{2}$

$$=x\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})}{2!}x^4\cdots+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n}+\cdots\right]$$

$$=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n+1}\qquad(-1<x<1)$$

(6) $f(x)=\frac{1}{4}[\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}]$

$$=\frac{1}{4}[-\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\frac{1}{1-(-x)}]=\frac{1}{4}[-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3^n}+(-1)^n\right)x^n\qquad(-1<x<1)$$

★★2. 将函数$\sqrt[3]{x}$展开成$x+1$的幂级数.

解：$\sqrt[3]{x}=-[1-(x+1)]^{\frac{1}{3}}\qquad(\alpha=\frac{1}{3})$

$$=-\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)\cdot\cdots\cdot(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}[-(x+1)]^n\right\}$$

$$=-1+\frac{x+1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{1+n-1+n}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x+1)^n$$

$$=-1+\frac{x+1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x+1)^n$$

$\because\quad \alpha=\frac{1}{3}>0\qquad\therefore -1\le-(x-1)\le 1$ 即 $-2\le x\le 0$

★3. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.展开成 $x-3$ 的幂级数.

解： $f(x)=\dfrac{1}{4+x-3}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{4}}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{x-3}{4})^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n \qquad (-1<\frac{x-3}{4}<1,\ 即 -1<x<7)$$

★★4. 将函数 $f(x)=\ln(3x-x^2)$ 在 $x=1$ 展开成 x 的幂级数.

解： $f(x)=\ln x(3-x)=\ln x+\ln(3-x)=\ln[1+(x-1)]+\ln(2-(x-1)]$

$$=\ln[1+(x-1)]+\ln(1-(\frac{x-1}{2})]+\ln 2$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{x-1}{2})^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^n}]\frac{(x-1)^n}{n}$$

x 满足 $:-1<x-1\le 1,$ 且 $-1<\dfrac{x-1}{2}\le 1$,即 $0<x\le 2$

★★5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展开成 x 的幂级数.

解： $f(x)=\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$

$$=\frac{1-x}{1-x^{16}}=(1-x)\sum_{0}^{\infty}x^{16n}=\sum_{0}^{\infty}(x^{16n}-x^{16n+1})$$
$$=1-x+x^{16}-x^{17}+\cdots x^{16n}-x^{16n+1}\cdots \qquad -1<x<1$$

★★★6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ 展开成 x 的幂级数.

解： $f(x)=\dfrac{2-(1-x)}{(1-x)^3}=\dfrac{2}{(1-x)^3}-\dfrac{1}{(1-x)^2}=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)''-\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)''-\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)-(n-1)]x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1} \qquad x\in(-1,1)$$

★★7. 将函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 展开成 x 的幂级数.

解：$\because \left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(x^2)^2+\cdots+\frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdots\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(x^2)^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{(-1)^2 1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}(x^2)^2+\cdots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \qquad |x|\le 1$$

$$\therefore \ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n})dx = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore x\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1} \qquad |x|\le 1$$

★★★8. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解：$\because f'(x)=\dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$

$$=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad |x|<1$$

$$\therefore f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad |x|<1$$

$$\because f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad |x|<1$$

★★9. 积分定义的误差函数 $erfx=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ 在工程学中十分重要,试把它展开成 x 的幂级数.

解：$\because e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \qquad x\in(-\infty,\infty)$

$$\therefore \int_0^x e^{-x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore erfx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi}(2n+1)n!}x^{2n+1} \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

提高题

★★★1. 将 $\sin x$ 展开成 $x-\dfrac{\pi}{4}$ 的幂级数.

思路: 把 $x-\dfrac{\pi}{4}$ 作一整体, $\sin x=\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+(x-\dfrac{\pi}{4})\right]$ 利用 $\sin x,\cos x$ 的展开式,

解: $\because \sin x=\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+(x-\dfrac{\pi}{4})\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

又

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}=1-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}+\cdots\quad x\in(-\infty,\infty)$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}=(x-\frac{\pi}{4})-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+$$

$$\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}+\cdots\quad x\in(-\infty,\infty)$$

$$\because \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\cdots\right]\qquad x\in(-\infty,\infty)$$

★★★2. 将函数 $f(x)=\arcsin x$ 展开成 x 的幂级数

解: $\because (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\quad x\in(-1,1),\ f(0)=0$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

$$\therefore \arcsin x=\int_0^x(\arcsin x)'dx=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)dx$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad x\in[-1,1]$$

★★★★3. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解： $\because f'(x)=-\dfrac{1}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},x\in(-1,1)$，又 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$\because$ 当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛.$\therefore f(x)=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

又 $f(\dfrac{1}{2})=0$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}-f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{4}$.

★★★★4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

将函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解： $\because(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\qquad x\in(-1,1)$

$$\therefore \arctan x=\int_0^x(\arctan x)'dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad x\in[-1,1]$$

$$\therefore f(x)=(\frac{1}{x}+x)\arctan x=(\frac{1}{x}+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2(n+1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})x^{2n}=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}\qquad x\neq 0$$

当 $x=0$ 时，$1-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}=0$

$$\therefore f(x)=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}\qquad x\in[-1,1]$$

$\therefore f(1)=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}-1]$.

§11.6 幂级数的应用

内容概要

名称	主要内容
余项	$r_n=s(x)-s_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_n$
结论	满足莱布尼茨条件的交错级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$，有 $\lvert r_n\rvert\le u_{n+1}$

例题分析

★1. 求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值, 使误差小于 0.01.

思路: 因为 e^{-x^2} 它的原函数是不能用初等函数表达，所以先求 e^{-x^2} 的 x 幂级数展开式，再逐项积分求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的 x 幂级数展开式，算出其近似值.

解: 1) 先将 e^{-x^2} 展开成 x 的幂级数.

$$\because e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}，\quad x\in(-\infty,\infty)$$

2) 求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的 x 幂级数展开式.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2\mathrm{n}+1}$$

3) 算出其近似值.

此为交错级数，故 $\lvert r_n\rvert<u_{n+1}$ ，逐项计算 u_{n+1} ，直到 $\lvert u_{n+1}\rvert<0.01$ 即可.

$$\because u_2=\frac{1}{2!}\frac{1}{5}=0.1,u_3=\frac{1}{3!}\frac{1}{7}\approx0.0238,u_4=\frac{1}{4!}\frac{1}{9}=0.0046<0.01$$

取 $n=3$ 即可

$$\therefore\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2\mathrm{n}+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}\approx0.7432.$$

注: 当熟练后 1)，2)可合并.

★★★2. 求 $\ln 2$ 的近似值, 使误差小于 0.0001.

思路： $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \quad x\in(-1,1]$

令 $x=1$ 可得 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots$

此为交错级数，欲$|r_n|<u_{n+1}=\frac{1}{n+1}<0.0001$， 要取 $n=10000$，计算量太大，故选一收敛较快的级数来代替它.

解： $\because \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \quad x\in(-1,1]$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots \quad x\in(-1,1]$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1+x)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots) \quad x\in(-1,1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2,$ 解得 $x=\frac{1}{3}$，以 $x=\frac{1}{3}$ 代入最后一个展开式，得

$$\ln 2=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^5}\cdots)$$

取前四项作为 $\ln 2$ 的近似值，则误差为

$$|r_4|=2(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}\cdots)<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}<\frac{1}{70000}.$$

$$\therefore \ln 2\approx 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^5})\approx 0.6931.$$

课后习题全解

习题 11-6

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

★★(1) e（误差不超过 0.00001）； ★(2) $\cos 2^\circ$（精确到 0.0001）.

解： (1) $\because e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (x\in R)$，$\therefore e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

$$|r_n|=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots)$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n\cdot n!}$$

欲$|r_n|<10^{-5}$，只要$\dfrac{1}{n\cdot n!}<10^{-5}$，　即　$n\cdot n!>10^5$

取$n=8,\qquad 8\cdot 8!=322560>10^5$

$$\therefore e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{8!}=2.71828.$$

(2) $\because \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\ x^{2n}\quad (x\in R)$，$2^\circ=\dfrac{2^\circ}{180^\circ}\pi=\dfrac{\pi}{90}$（弧度）

$$\therefore \cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\ (\frac{\pi}{90})^{2n}=1-\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{90})^2+\frac{1}{4!}(\frac{\pi}{90})^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\frac{\pi}{90})^{2n}+\cdots$$

此为交错级数，故$|r_n|<u_{n+1}$，计算

$$u_2=\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{90})^2\approx 6.1\times 10^{-4},u_3=\frac{1}{4!}(\frac{\pi}{90})^4\approx 6.186\times 10^{-8},$$

所以　$|r_2|<10^{-7}$，　故　$\cos 2^\circ\approx 1-\dfrac{1}{2!}(\dfrac{\pi}{90})^2\approx 1-0.00061\approx 0.9994.$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

★(1) $\int_0^{0.5}\dfrac{1}{1+x^4}dx$（精确到$0.0001$）；　★（2）$\int_0^{0.1}\cos\sqrt{t}dt$（精确到$0.0001$）.

解：（1）$\because \int_0^{0.5}\dfrac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}\sum_0^{\infty}(-1)^n x^{4n}dx=\sum_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}\Big|_0^{0.5}$

$$=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}0.5^{4n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots$$

此为交错级数，$\therefore |r_n|<u_{n+1}$，计算

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}=0.00625,\quad \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.00028,\quad \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009<10^{-4}\quad n=3$$

$$\therefore \int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-0.00625+0.00028=0.49403\approx 0.4940$$

（2）$\because \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\ x^{2n}\quad (x\in R)$，$\therefore \cos\sqrt{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\ t^n$

$$\therefore \int_0^{0.1}\cos\sqrt{t}dt=\int_0^{0.1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\ t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\ \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{0.1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(n+1)}\ 0.1^{n+1}$$

此为交错级数，故$|r_n|<u_{n+1}=\dfrac{1}{(2n)!(n+1)}0.1^{n+1}$

欲$|r_n|<10^{-4}$　　只要$\frac{1}{(2n)!(n+1)}0.1^{n+1}<10^{-4}$

只需$n+1=3$,　　即$n=2$

$$\therefore\int_0^{0.1}\cos\sqrt{t}dt\approx 0.1-\frac{1}{2!\cdot 2}0.1^2+\frac{1}{3!\cdot 3}0.1^3\approx 0.0975.$$

★★★3. 求正弦曲线$y=\sin x(0\le x\le\pi)$的弧长，并精确到0.01.

解:　$s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$$\because (1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\cdots\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}x^2+\cdots(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!\cdot 2^n}x^n+\cdots$$

$$\therefore s=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x+\frac{1}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x+\cdots)dx$$

又$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}\cdot n!^2}\pi$

$$\therefore s=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x+\frac{1}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x+\cdots)dx$$

$$=2(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{2^3}\pi-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cdot\frac{4!}{2^5\cdot(2!)^2}\pi+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\frac{6!}{2^7\cdot(3!)^2}\pi+\cdots)$$

$$=\pi(1+\frac{1}{4}-\frac{3}{64}+\frac{5}{256}-\cdots)$$

此为交错级数，故$|r_n|<u_{n+1}$，

取到$n=3$,计算$|r_3|<2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!\cdot 2^4}\frac{8!}{2^9\cdot(4!)^2}\pi<0.01$

$$\therefore s\approx 3.14(1+0.25-0.046875+0.0195)\approx 3.839.$$

★★★4. 将函数$e^x\cos x$展开成x的幂级数.

解: $\because e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$\therefore e^{x}\cos x=e^{x}\operatorname{Re}e^{ix}=\operatorname{Re}e^{(1+i)x}=\operatorname{Re}e^{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})x}$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})x]^{n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{n}x^{n}$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}x^{n}.$$

★★5. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n}}$;　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}$.

解: (1) **思路**: $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{1}{2})^{n}$, $\therefore$考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n}$

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n}$, 显然其收敛域$(-1,1)$.

$$\because \sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=\left(\frac{x^{2}}{1-x}\right)''=\left(\frac{x}{(1-x)^{2}}\right)'=\frac{2}{(1-x)^{3}},\quad -1<x<1$$

$$\therefore s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2x}{(1-x)^{3}}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n}}=s(\frac{1}{2})=8$.

(2) **思路**: $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{2})^{n}$, $\therefore$考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^{n}$

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$,　显然其收敛域$[-1,1), s(0)=0,$,

$$\because s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\qquad -1<x<1$$

$$\therefore s(x)=\int_{0}^{x}s'(x)dx=\int_{0}^{x}\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}=s(\frac{1}{2})=\ln 2.$$

提高题

★★1. 求$\sqrt[9]{522}$的近似值, 使误差小于0.00001

思路：利用

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad x\in(-1,1)$$

解： $\because \sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{2^9+10}=2(1+\frac{10}{2^9})^{\frac{1}{9}}$

$$=2\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{9}-1)}{2!}(\frac{10}{2^9})^2+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{9}-1)\cdots(\frac{1}{9}-n+1)}{n!}(\frac{10}{2^9})^n+\cdots\right]$$

此为交错级数，试算 $|r_n|<u_{n+1}$.

$$u_2=\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}=0.00217,u_3=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{9}(\frac{8}{9})\cdot(\frac{10}{2^9})^2=0.000019$$

$$\therefore|r_3|<0.000001$$

$$\therefore\sqrt[9]{522}\approx2(1+0.002170-0.000019)\approx2.0043.$$

★★★2. 求 $\sqrt[3]{e}$ 的近似值，使误差小于 0.0001.

思路：利用 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\qquad x\in(-\infty,\infty)$

解： $\because e^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{3})^2+\cdots+\frac{1}{n!}(\frac{1}{3})^n+\cdots$

$$r_n=\frac{1}{n!}(\frac{1}{3})^n+\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{3})^{n+1}+\cdots\le\frac{1}{n!}(\frac{1}{3})^n\left[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots\right]\quad\text{(放大成等比级数)}$$

$$=\frac{1}{n!}(\frac{1}{3})^n\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{n!}(\frac{1}{3})^n\frac{3}{2}<0.0001$$

当 $n=5$ 时，$r_5\le\frac{1}{5!}(\frac{1}{3})^5\frac{3}{2}=\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{162}=\frac{1}{19440}<0.0001$

$$\therefore e^{\frac{1}{3}}\approx1+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{162}+\frac{1}{1944}\approx1.39557\approx1.3956$$

★★★★3. 求 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$ 的近似值，使误差小于 0.001.

.**解：** $\because(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ \arctan x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}==\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad x\in(-1,1)$$

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^{0.5}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}(\frac{1}{2})^{2n+1}$$

此为交错级数，故$|r_n|<u_{n+1}$ ，计算u_{n+1}

$$u_2=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0139,\quad u_3=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.0013, u_4=\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002$$

$$\therefore\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx 0.5-0.0139+0.0013=0.4874\approx 0.487.$$

§11.7　　函数项级数的一致收敛性

内容概要

名称	主要内容
一致收敛	$r_n=s(x)-s_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_n(x)$ $\forall\varepsilon>0,\exists N$ (仅与 ε 有关而与 x 无关)，当 $n>N$ 恒有　$|r_n|<\varepsilon$
魏尔斯特拉斯判别法	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上满足：(1) $|u_n(x)|\le a_n, n=1,2,\cdots$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.
一致收敛级数和函数的性质	

（连续性，逐项积分）

若 1. $u_n(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$n=1,2,\cdots$.　　2）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛

则 1) 和函数 $s(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，　2）$\int_{x_0}^{x}s(x)dx=\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(x)dx$

2. (逐项微分）若 1）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内收敛；　2）$u_n{}'(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$n=1,2,\cdots$;

3）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}'(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛.

则 1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛；　2）$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x))'$.

例题分析

★★★1.证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛且一致收敛,但不绝对收敛.

知识点： 收敛域**,** 一致收敛，绝对收敛.

思路: 先证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，再证明一致收敛,最后证明不绝对收敛.

解： 1)证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

$\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$ 为交错级数

且 $\forall x\in(-\infty,\infty)$，有 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n}=0$，2) $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\frac{\frac{1}{x^2+n+1}}{\frac{1}{x^2+n}}=\frac{x^2+n}{x^2+n+1}<1$

$\therefore$ 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$ 在 x 处收敛，由 x 的任意性知，级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

2)证明一致收敛

$\because \forall\varepsilon>0$，由交错级数的性质知 $|r_n|\le u_{n+1}=\frac{1}{x^2+n+1}<\frac{1}{n+1}$

欲 $|r_n|\le\varepsilon$　只需取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$，　当 $n>N$ 时，　恒有　$|r_n|<\varepsilon$

$\therefore$交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$在区间$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

3)证明不绝对收敛.

$$\because\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n},x\in(-\infty,+\infty)\qquad n=1,2,3\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x^2+n}/\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{n}+1}=1$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n}$发散，

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$在$x$处不绝对收敛,由$x$的任意性知，级数在区间$(-\infty,+\infty)$上不绝对收敛.

注: 由本题可知级数一致收敛不一定绝对收敛,还可说明绝对收敛不一定一致收敛.(看习题 11-7 的第 7 题).

★★2 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin^{2n}x}{2^n},x\in(-\infty,+\infty)$在所给区间上的一致收敛性.

知识点: 一致收敛.

思路: 用魏尔斯特拉斯判别法

解: $\because|u_n(x)|=\left|(-1)^{n-1}\frac{n\sin^{2n}x}{2^n}\right|\le\frac{n}{2^n},\qquad x\in(-\infty,+\infty),n=1,2,3\cdots$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，由魏尔斯特拉斯判别法，原级数在区间$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

课后习题全解

习题 11−7

★★1.证明：级数

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots$$

在区间$[0,+\infty)$上一致收敛.

证明: 此级数的部分和

$$s_n(x)=\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)=\frac{1}{x+n}$$

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=0\qquad x\in[0,\infty)$$

$\because |r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \dfrac{1}{x+n} \le \dfrac{1}{n} \qquad x \in [0,\infty)$

$\therefore \forall \varepsilon > 0,$ 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$，当 $n > N$ 时

恒有 $\qquad |r_n(x)| < \varepsilon \qquad x \in [0,\infty)$

故原级数在区间 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

★★★★2. 设等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$ 证明：

(1)级数在 $|x| < 1$ 上不是一致收敛到极限函数 $\dfrac{1}{1-x}$;

(2)级数在 $|x| < 1$ 内部任意一个闭区间 $|x| \le r < 1$ 上一致收敛到极限函数 $\dfrac{1}{1-x}$.

解： (1) $\because s_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$， $\qquad \therefore s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \dfrac{1}{1-x} \qquad |x| < 1.$

$$\therefore |r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|$$

取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}$，对任意自然数 n，令 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{2}} \in (0,1)$

$$\because \left|r_n(\frac{1}{2})\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt[n+1]{2}}\right| \quad = \frac{1}{2}(1 + \sqrt[n+1]{2} + \sqrt[n+1]{2^2} + \cdots + \sqrt[n+1]{2^n}) > \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

故原级数在区间 $(0,1)$ 内不一致收敛.

(2) $\because |r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{1-x}\right| < \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$

$\therefore \forall \varepsilon > 0,$ 取 $N = [\dfrac{\ln(1-r)\varepsilon}{\ln r}] - 1$，当 $n > N$ 时

恒有 $\qquad |r_n(x)| < \varepsilon \qquad (|x| < r)$

故原级数在 $|x| \le r < 1$ 上一致收敛到极限函数 $\dfrac{1}{1-x}$.

★★★3. 按定义讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty,+\infty)$ 在所给区间上的一致收敛性.

解： $\because$ 此为交错级数，

$$\therefore |r_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

$$= \frac{x^2}{1+nx^2+C_n^2x^4+\cdots} \le \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n} \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0,$ 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时

恒有 $|r_n(x)| < \varepsilon \qquad x\in(-\infty,\infty)$

故原级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

★★4. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{4+n^5x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛且一致收敛.

解： $\because x=0, \quad |u_n(x)|=0$

$x\neq 0$ 时，

$$\therefore |u_n(x)| = \left|\frac{nx}{4+n^5x^2}\right| \le \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故原级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛且一致收敛.

5. 讨论下列级数在所给区间的一致收敛性: (1)

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x+3^n}, x\in(-3,+\infty);$ ★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, x\in R;$

★★★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}, x\in(0,+\infty);$ ★★(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}, x\in R.$

解： (1) 因为 $|u_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{x+3^n}\right| \le \frac{1}{-3+3^n}, \qquad x\in(-3,+\infty), n>1$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n-3}$ 收敛，由魏尔斯特拉斯判别法，原级数在区间 $(-3,+\infty)$ 一致收敛.

(2) 因为 $|u_n(x)| = \left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right| \le \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}, \qquad x\in R$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，由魏尔斯特拉斯判别法，原级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

(3) 因为 $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots \ge \frac{y^2}{2} \qquad (y\ge 0)$

令 $y = nx$，有 $e^{nx} \ge \frac{(nx)^2}{2}$ ， $e^{-nx} \le \frac{2}{n^2x^2}\,(x>0)$

故 $|u_n(x)| = |x^2e^{-nx}| \le \frac{2x^2}{n^2x^2} = \frac{2}{n^2}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数在区间 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

(4) 因为 $|u_n(x)| = \left|\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}\right| \le \left|\frac{2x}{x^2+n^3}\right| \le \left|\frac{2x}{2xn^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}} \quad x\in R$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故原级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

6.求下列级数的收敛域:

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$； ★★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$； ★★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.

解: (1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

所以当且仅当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$,即 $|1-x| < |1+x|, x>0$ 时,原级数收敛;

当 $x=0$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛; 故原级数的收敛域为 $[0,+\infty)$.

(2) 当 n 充分大时，原级数为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{1/n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}n^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$

故，当 $x>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛，原级数收敛；当 $x\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 发散，原级数的发散.

故原级数的收敛域为 $(1,+\infty)$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+x^{n+1}}\right| = \begin{cases} 0, |x|>1 \\ |x|, 0<|x|<1 \end{cases}$

当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛; 当 $x=-1$ 时，原级数无意义;

故原级数的收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

★★★7.证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$[0,1]$上收敛, 但不一致收敛.

解： $\because s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{1+x^2})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}$

$$\therefore s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}0, x=0\\ 1, x\in(0,1]\end{cases}$$

故原级数在$[0,1]$上收敛, 但和函数不连续，从而原级数不一致收敛.

提高题

★★★1.讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n!}, |x|<10$的一致收敛性.

思路： $\because \frac{e^{-nx}}{n!}\le\frac{e^{10n}}{n!}=\frac{(e^{10})^n}{n!}, |x|<10$，$\therefore$利用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{10})^n}{n!}$收敛性

解： 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{10})^n}{n!}$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(e^{10})^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(e^{10})^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{10}}{n+1}=0<1，\quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{10})^n}{n!}\text{ 收敛.}$$

$$\because \forall x\in(-10,10)，\quad \frac{e^{-nx}}{n!}\le\frac{e^{10n}}{n!}=\frac{(e^{10})^n}{n!}.$$

$\therefore$由魏尔斯特拉斯判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n!}$在$(-10,10)$上一致收敛性.

★★★★2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$

1) 求收敛域；

2) 证明级数在区间$[\delta,+\infty)$上是一致收敛的，$\delta>0$；

3) 证明和函数$s(x)$在收敛域上是连续的.

解： 1) 显然$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$为正项级数.

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}e^{-x}=e^{-x},$$

$\therefore$ 由比值判别法知, 当 $e^{-x}<1$ 即 $x>0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 收敛，原级数收敛；

当 $e^{-x}>1$ 即 $x<0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 发散，原级数发散, 当 $e^{-x}=1$,即 $x=0$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$

2） $\because ne^{-nx}\le ne^{-\delta n}\qquad x\in[\delta,+\infty)$；而 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\delta n}$ 收敛

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上是一致收敛的.

3） $\because \forall x\in(0,\infty)$,则 $\exists\delta>0$, 使得 $0<\delta<x<+\infty$. 由 2) 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 根据一致收敛级数和函数的性质知 $s(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续, 故 $s(x)$ 在 x 处连续, 又 x 为 $(0,+\infty)$ 上任意性一点,，所以 $s(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续.

§11.8　傅里叶级数

内容概要

名称	主要内容	
傅里叶级数（周期 2π）	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$	
傅里叶系数（周期 2π）	$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)$	
$f(x)$ 为奇函数		$f(x)$ 为偶函数
$a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$		$b_n=0,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$

狄利克雷收敛定理	$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & x\text{为间断点}\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为间断点}\end{cases}$

例题分析

1. 将下列周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数，讨论其收敛性，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

★★1) $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$.　★★★2) $f(x)=x^2, x\in(0,2\pi)$.

知识点： 傅里叶级数

思路: 先求傅里叶系数，再由收敛定理求傅里叶级数的和函数.

解:　1) 1° 求傅里叶系数

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{n}d(\sin nx)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[(\frac{x^2}{n}\sin nx)\Big|_0^{\pi}-2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right]\ =\frac{2}{\pi}\cdot(-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx)$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}xd\frac{-\cos nx}{n}=\frac{4}{n^2\pi}\left[(x\cos nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\left[(-1)^n\pi\right]=(-1)^n\frac{4}{n^2}\qquad n=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

2° 求傅里叶级数的和函数

因为 $f(x)$ 为连续函数，所以由狄利克雷收敛定理

$$x^2=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ -\infty\le x\le\infty.$$

3° 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

令 $x=\pi$,则有 $\pi^2=\dfrac{1}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\dfrac{1}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$

所以 $\pi^2=\dfrac{1}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{6}\pi^2$.

2)1° 求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[(\frac{x^2}{n}\sin nx)\Big|_0^{2\pi}-2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx\right]\ =\frac{1}{\pi}\cdot(-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[(x\cos nx)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right]=\frac{2}{n^2\pi}\cdot 2\pi=\frac{4}{n^2}\qquad n=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x^2}{n}d(\cos nx)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[(\frac{x^2}{n}\cos nx)\Big|_0^{2\pi}-2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx\right]$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\left[(x\sin nx)\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}\right]=-\frac{4\pi}{n}$$

$\because f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内连续 且 $\dfrac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=2\pi^2$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2k\pi\\ 2\pi^2, & x=2k\pi\end{cases}\qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots$$

3° 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

令 $x=0$,则有 $2\pi^2=\dfrac{4}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{6}\pi^2$.

注: 本题 1)，2)有区别，它们拓展的周期函数不同.但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的结果是相同的.

★★★2. 将函数 $f(x)=1-\dfrac{x}{\pi}(0\le x\le\pi)$ 展开以 2π 为周期的余弦级数, 设此级数的和函数为 $s(x)$, 求 $s(-3)$ 和 $s(12)$.

知识点： 傅里叶级数，余弦级数

思路: 先求傅里叶系数，再由收敛定理求傅里叶级数的和函数.

解： 将 $f(x)$ 函数作偶延拓，记为 $s(x)$,，则

$$s(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{\pi}, & 0\le x\le\pi\\ 1+\dfrac{x}{\pi}, & -\pi\le x<0\end{cases}$$

并定义 $s(x+2n\pi)=s(x)$，$-\pi\le x\le\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，$s(x)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数.

将 $s(x)$ 展开成余弦级数，有 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{x}{\pi})\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{x}{\pi})d(\sin nx)=\frac{2}{n\pi}\left[(1-\frac{x}{\pi})\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]$$

$$=2\cdot\frac{1}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{x}{\pi})dx=\frac{2}{\pi}(x-\frac{x^2}{2\pi})\Big|_0^{\pi}=1$$

因 $s(x)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数,故

$$s(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos nx\qquad x\in(-\infty,\infty),$$

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$s(x)=f(x)$，并且 $s(-3)=1-\dfrac{3}{\pi}$；

$$s(12)=s(4\pi+(12-4\pi)]=s(12-4\pi)=1+\frac{12-4\pi}{\pi}.$$

习题 11-8

★1. 把函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解： 将函数在区间 $(-\pi,\pi]$ 上作周期为 2π 的延拓，仍记为 $f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=0\ \ (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{-1}{n\pi}(\cos nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{[1+(-1)^{n+1}]}{n}=\frac{2}{\pi(2k-1)}(k=1,2\cdots)$$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)}\cos nx\qquad x\ne0,x\in(-\pi,\pi);$$

$x=0$时，级数收敛到$\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=\frac{1}{2}$

$x=\pm\pi$时，级数收敛到$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}$

2. 设下列 $f(x)$ 的周期为 2π , 试将其展开为傅里叶级数:

★(1) $f(x)=\pi^2-x^2, x\in(-\pi,\pi);$　　　★★(2) $f(x)=e^{2x}, x\in[-\pi,\pi);$

★★★(3) $f(x)=\sin^4 x, x\in[-\pi,\pi].$

解: (1) 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi^2-x^2}{n}d(\sin nx)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[(\frac{\pi^2-x^2}{n}\sin nx)\Big|_0^{\pi}+2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right]=-\frac{4}{n^2\pi}\left[(x\cos nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}\left[(-1)^n\pi\right]=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\qquad n=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\frac{2}{\pi}(\pi^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi^2$$

又 $f(-\pi)=f(\pi)=0$

所以 $\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, -\infty\le x\le\infty.$

(2)显然 $f(-\pi)\neq f(\pi)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{1}{\pi}e^{2x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^{2x}}{4+n^2}(2\cos nx+n\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2(-1)^n}{4+n^2}\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^{2x}}{4+n^2}(2\sin nx-n\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{4+n^2}\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\quad(n=1,2,\cdots)$$

故有

$$e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)]$$
$$x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2\cdots$$

$x=(2n+1)\pi$时，级数收敛到$\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}$.

(3) $f(x)=\sin^4 x,x\in[-\pi,\pi]$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1-\cos 2x}{2})^2\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{4n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)\cos nxdx\qquad n=1,2,3\cdots$$

由三角函数系的正交性，仅当$n=2,n=4$时，$a_n\neq 0$，此时

$$a_2=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)\cos 2xdx=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos 2xdx=-\frac{1}{2}$$
$$a_4=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)\cos 4xdx=\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 4x\cos 4xdx=\frac{1}{8}$$

$$f(-\pi)=f(\pi)=\sin^4\pi=0$$

故$\sin^4 x=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x,x\in(-\infty,\infty)$

★★3. 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内展开 $f(x)=x\cos x$ 为傅里叶级数.

解: 显然 $f(x)$ 为奇函数，所以$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin 2nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos(2n+1)x-\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos(2n-1)x]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}[x\cos(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)dx]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2n-1}[x\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)dx]\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)dx+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}(-1)^n+\frac{1}{(2n-1)^2}(-1)^{n+1}\right]=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\qquad(n=1,2\cdots)$$

$$x\cos x=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}\sin nx\qquad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$$

★★4. 在区间$(-\pi,\pi)$内将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0\\ 1, & x=0\\ 2x, & 0<x<\pi\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解： 显然 $x=0$ 是第一类间断点，且 $f(-\pi)\neq f(\pi)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_0^{\pi}2xdx\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx+\int_0^{\pi}2x\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx)+\frac{2}{n}(x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nxdx)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[(\frac{1}{n^2}\cos nx)\Big|_{-\pi}^{0}+(\frac{2}{n^2}\cos nx)\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\int_0^{\pi}2x\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx)-\frac{2}{n}(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}[\pi(-1)^n-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}]-\frac{2}{n}[\pi(-1)^n-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}]\right]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$=\frac{3(-1)^{n+1}}{n}\qquad(n=1,2\cdots)$$

故有

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{3(-1)^{n+1}}{n}\sin nx],\quad x\neq 0,x\in(-\pi,\pi);$$

$x=0$ 时，级数收敛到 $\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=0$

★★5. 将函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x(-\pi<x<\pi)$ 展开成傅里叶级数, 并利用展开式, 求

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解: 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn} x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn} x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{-2}{n\pi}\int_0^{\pi}d\cos nx$$

$$=\frac{-2}{n\pi}cosnx\Big|_0^{n\pi}=\frac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi]=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1\end{cases}\qquad k=1,2,3\cdots$$

由于 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处不连续，且 $\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=0$

故 $\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\qquad -\pi<x<\pi$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

★6. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

解: 将函数延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，则

$$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}d\cos nx$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\left[(x-\pi)\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n}\qquad(n=1,2\cdots)$$

又延拓后的函数在 $x=0$ 间断，在 $0<x\le\pi$ 连续，所以

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, (0 < x \le \pi)；$$

在 $x = 0$ 处，右边的极限收敛于 $\frac{1}{2}[f(0+0) + f(0-0)] = 0$，其中 $f(0-0)$ 是延拓后函数的左极限，其值为：

$$f(0-0) = -f(0+0) = -\frac{\pi}{2}.$$

★★7.将函数 $f(x) = 2x^2 (0 \le x \le \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解： (1)将 $f(x)$ 函数作奇延拓，仍记为 $f(x)$，展开成正弦级数. 则

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \pi \\ -2x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$a_n = 0, (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx dx = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{n} d(\cos nx) = -\frac{4}{\pi}\left[(\frac{x^2}{n}\cos nx)\Big|_0^{\pi} - 2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx dx \right]$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{4\pi}{n} + \frac{8}{n^2\pi}\left[(x\sin nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} \right] = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}) \right]$$

所以 $2x^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}) \right]\sin nx$，$0 \le x < \pi$；

在 $x = \pi$ 处，右边的极限收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi+0) + f(\pi-0)] = 0$，其中 $f(\pi+0)$ 是延拓后函数的右极限，其值为：

$$f(\pi+0) = -f(\pi-0) = -2\pi^2.$$

(与答案不同请核)

(2)将 $f(x)$ 函数作偶延拓，仍记为 $f(x)$，展开成余弦级数，则

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \pi \\ 2x^2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$b_n = 0, (n = 1,2,\cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2 \cos nx dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{n} d(\sin nx) = \frac{4}{\pi}\left[(\frac{x^2}{n}\sin nx)\Big|_0^{\pi} - 2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \right]$$

$$= \frac{8}{n^2\pi}\left[(x\cos nx)\Big|_0^{\pi} - \sin nx\Big|_0^{\pi} \right] = \frac{8}{n^2\pi}\left[(-1)^n\pi \right] = (-1)^n\frac{8}{n^2} \qquad n = 1,2,3\cdots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{4}{3}\pi^2$$

所以 $2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$，$0\le x\le\pi$.

★★★8. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 证明:

(1)如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0,\ a_{2k}=0,$

$b_{2k}=0(k=1,2\cdots);$

(2)如果 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0,\ b_{2k+1}=0(k=0,1,2\cdots).$

证明: (1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{\pi}f(x-\pi)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx-\int_{-\pi}^{0}f(u)du\right]\quad \underline{\underline{x-\pi=u}}\ 0$$

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kxdx-\int_{0}^{\pi}f(x-\pi)\cos 2kxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kxdx-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(2k\pi+2ku)du\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kxdx-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos 2kudu\right]=0$$

同理 $b_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin 2kxdx-\int_{0}^{\pi}f(x-\pi)\sin 2kxdx\right]$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin 2kxdx-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(2k\pi+2ku)du\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin 2kxdx-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin 2kudu\right]=0\ (k=1,2\cdots);$$

(2)如果 $f(x-\pi)=f(x)$，令 $x-\pi=u$。则

$$a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2k+1)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2k+1)xdx+\int_{0}^{\pi}f(x-\pi)\cos(2k+1)xdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2k+1)xdx+\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos[(2k+1)\pi+(2k+1)u]du\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2k+1)xdx-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(2k+1)udu\right]=0$$

$$b_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2k+1)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k+1)xdx+\int_{0}^{\pi} f(x-\pi)\sin(2k+1)xdx\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k+1)xdx+\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin[(2k+1)\pi+(2k+1)u]du\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k+1)xdx-\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(2k+1)udu\right]=0,(k=0,1,2\cdots).$$

★★★9. 把函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并由它推导出：

(1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$;　　　(2) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

解：　将 $f(x)$ 函数作奇延拓，则

$$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}d(\cos nx)=-\frac{1}{2n}(\cos nx)\Big|_0^{\pi}$$
$$=-\frac{1}{2n}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{1}{2k+1}, & n=2k+1\end{cases}\quad k=0,1,2\cdots$$

所以 $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\qquad 0<x<\pi$

在 $x=0$ 处，右边的极限收敛于 $\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=0$

在 $x=\pi$ 处，右边的极限收敛于 $\frac{1}{2}[-f(\pi-0)+f(\pi-0)]=0$，

(1)令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得　　$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

故　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$　即 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

(2) 令 $x=\frac{\pi}{3}$ 得　　$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n+1}{3}\pi}{2n+1}$

$$\because\sin\frac{2n+1}{3}\pi=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k\\ 0, & n=3k+1\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k+2\end{cases}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2\cdot 3k+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\cdot 3k+5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

即 $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

★★★10. 把函数 $f(x)=2x^3(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

解： 将 $f(x)$ 函数作偶延拓，则

$$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^3}{n}d(\sin nx)\ =\frac{2}{\pi}\left[(\frac{x^3}{n}\sin nx)\Big|_0^{\pi}-3\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\left[(x^2\cos nx)\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\left[(-1)^n\pi^2-\frac{2}{n}(x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nxdx)\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\left[(-1)^n\pi^2-\frac{2}{n^2}(\cos n\pi-1)\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{6\pi}{(2k)^2}, & n=2k\\ \frac{24}{(2k-1)^4\pi}-\frac{6\pi}{(2k-1)^2}, & n=2k-1\end{cases}\qquad k=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3dx=\frac{1}{2}\pi^4$$

所以

$$2x^3=\frac{1}{4}\pi^3+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6\pi}{(2k)^2}\cos 2kx+(\frac{24}{(2k-1)^4\pi}-\frac{6\pi}{(2k-1)^2})\cos(2k-1)x\right)$$

$$x\in[0,\pi]$$

令 $x=0$ $\quad 0=\frac{1}{4}\pi^3+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6\pi}{(2k)^2}+(\frac{24}{(2k-1)^4\pi}-\frac{6\pi}{(2k-1)^2})\right)$

$$=\frac{1}{4}\pi^3-6\pi(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2})+\frac{24}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$$

即 $\frac{24}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=-\frac{1}{4}\pi^3+6\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$=-\frac{1}{4}\pi^3+6\pi\cdot\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^3}{4} \qquad (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12})$$

$$\because \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{1}{96}\pi^4 \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \qquad (2)$$

（1）+（2）得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}, \quad 即 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

提高题

★★★1. 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数, 且 $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$, 证明: $f(x)$ 的余弦傅里叶级数展开式中 $a_{2n}=0$.

证明: $a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx dx\right]$

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\frac{\pi}{2}-t)\cos(n\pi-2nt)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}-t)\cos(n\pi-2nt)dt$$

令 $t=x-\frac{\pi}{2}$,则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2}+t)\cos(n\pi+2nt)dt$$

$$\because f(\frac{\pi}{2}-t)=-f(\frac{\pi}{2}+t),$$
$$\cos(n\pi-2nt)=\cos(-n\pi+2nt)=\cos(-n\pi+2nt+2n\pi)=\cos(n\pi+2nt)$$

$$\therefore a_{2n}=\frac{2}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}f(\frac{\pi}{2}+t)\cos(n\pi+2nt)dt+\int_0^{\pi}f(\frac{\pi}{2}+t)\cos(n\pi+2nt)dt\right]=0.$$

★★★★2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 并且傅里叶系数为 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$, $b_n(n=1,2,\cdots)$

(1) 求 $f(x+l)$(l 为常数) 的傅里叶系数;

(2) 求 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$ 的傅里叶系数，并利用所得的结果推出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

解：(1) 设 $f(x+l)$ 的傅里叶系数为 $\overline{a}_n(n=0,1,2,\cdots),\ \overline{b}_n(n=1,2,\cdots)$

$$\overline{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\cos nx\,dx \qquad \text{令 } z=x+l$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f(z)\cos n(z-l)dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)[\cos nz\cos nl+\sin nz\sin nl)dz$$

$$=a_n\cos nl+b_n\sin nl \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

同理

$$\overline{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\sin nxdx=b_n\cos nl-a_n\sin nl \qquad (n=1,2,\cdots)$$

(2) 设 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$，其傅里叶系数为

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dxdt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)dx]f(t)dt=\frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=a_0^2$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt]\cos xdx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nxdx]f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]f(t)dt=a_n^2+b_n^2 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt]\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin nxdx]f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-a_n\sin nt+b_n\cos nt]f(t)dt=-a_nb_n+a_nb_n=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

易见 $F(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，故

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx,$$

令 $x=0$，即得 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

§11.9　一般周期函数的傅里叶级数

内容概要

名称	主要内容	
傅里叶级数（周期 $2l$）	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$	
傅里叶系数（周期 $2l$）	$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,\cdots)$	
$f(x)$ 为奇函数		$f(x)$ 为偶函数
$a_n=0,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$		$b_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$
狄利克雷收敛定理	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=\begin{cases}f(x), & x\text{连续点}\\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为间断点}\end{cases}$	
复数形式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{l}}x,\qquad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{in\pi}{l}}dx$	

例题分析

★★1. 将函数 $f(x)=|x|, x\in[-l,l]$ 展开为以 $2l$ 为周期的傅里叶级数.

思路: 先求傅里叶系数，再由收敛定理求傅里叶级数的和函数.

解:　1° 求傅里叶系数

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^l xd(\sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(x\sin\frac{n\pi x}{l})\Big|_0^l-\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]\ =\frac{2}{n\pi}\cdot(-\frac{2}{n}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}dx)$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l d\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi x}{l})\Big|_0^l=\frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{-4l}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad k=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=\frac{1}{l}x^2\Big|_0^l=l.$$

2° 求傅里叶级数的和函数

因为 $f(x)$ 为连续函数，所以由狄利克雷收敛定理

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{l}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x,\ ,-l\le x\le l.$$

★★★★2. 设周期函数在一个周期内的表达式为： $f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ -1, & \dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解： $\because a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=-\frac{1}{2}$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi xdx=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\cos n\pi x)dx$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}+\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi xdx=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi xdx+\int_0^{\frac{1}{2}}\sin n\pi xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\sin n\pi x)dx$$

$$=\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_{-1}^{0}-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{n\pi}(1-2\cos\frac{n\pi}{2})\qquad n\in N$$

且 $\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{f(\frac{1}{2}+0)+f(\frac{1}{2}-0)}{2}=0$

∴ 由狄利克雷收敛定理

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}(1-2\cos\frac{n\pi}{2})\sin n\pi x\right\}$$

$$x\neq 2k,2k+\frac{1}{2},k=0,\pm1,\pm2\cdots$$

$\therefore$在间断点 $x=2k$ 处，，右边级数收敛于 $\frac{1}{2}$；$\therefore$在间断点 $x=2k+\frac{1}{2}$ 处，，右边级数收敛于 0.

课后习题全解

习题 11-9

★★1.（1). 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上定义为.

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases},$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛__3/2___

(2)设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1,$ 而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x),-\infty<x<+\infty,$ 其中

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx,n=1,2,3\cdots$$

则 $S(-1/2)=$__-1/4___

★★2. 在区间 $(-l,l)$ 上，函数 $f(x)$ 的傅里叶系数是 a_0,a_n,b_n，函数 $g(x)$ 的傅里叶系数是 $\alpha_0,\alpha_n,\beta_n$(其中$=1,2,\cdots$)，若 $f(-x)=-g(x)$，则必有（ B ）.

（A）$a_0=\alpha_0,a_n=\alpha_n,b_n=\beta_n;$ （B）$a_0=-\alpha_0,a_n=-\alpha_n,b_n=\beta_n;$

（C）$a_0=-\alpha_0,a_n=-\alpha_n,b_n=-\beta_n;$ （D）$a_0=\alpha_0,a_n=\alpha_n,b_n=-\beta_n.$

★★3. 设周期函数在一个周期内的表达式为：$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\le x<0\\ 1, & 0\le x<3\end{cases},$

试将其展开为傅里叶级数。

解： $\because a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)dx+\int_0^3 1dx]=-1$

$$a_n=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx]$$

$$=\frac{1}{n\pi}[(2x+1)sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-2\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx+sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}[\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}]=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-\cos n\pi]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx + \int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0} - 2\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx + \cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{0}^{3}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[1+5\cos n\pi - 2\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0} + \cos n\pi - 1]$$

$$= \frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}$$

$x \neq 3(2k-1), k=1,2,3\cdots$

$x = 3(2k-1)$ 时，级数收敛到 $\frac{1}{2}[f(-3+0)+f(3-0)] = -2$.

★★★4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)=e^{-x}$，将其展开成复数形式的傅里叶级数.

解： $\because c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{1}}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-x}e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-(1+in\pi)x}dx$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+in\pi}e^{-(1+in\pi)x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+in\pi}[e^{-(1+in\pi)} - e^{(1+in\pi)}]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}[e^{-1}(\cos n\pi - i\sin n\pi) - e(\cos n\pi + i\sin n\pi)]$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}[\frac{e^{-1}-e}{2}] = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\mathrm{sh}1 \qquad (sh1 = \frac{e^{-1}-e}{2})$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}\mathrm{sh}1\cdot e^{in\pi x} \qquad x \neq 2k+1, k=0,1,2\cdots$$

$x = 2k+1$ 时，级数收敛到 $\frac{1}{2}[f(-1+0)+f(1-0)] = \frac{e^{-1}-e}{2}$

★★★5. 将函数 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解： 依题意 $b_n = 0, (n=1,2,\cdots)$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{0}^{2}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2}(x-1)d\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\qquad k=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)dx=(\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_0^2=0$$

所以 $x-1=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$，$0\le x\le 2$.

总习题十一

★1.求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$.的和.

解： $\because u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$$\therefore s_n=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\lim_{n\to\infty}s_n=1$

★★2. 求级数 $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}+\cdots$ 之和.

解： 法一： $\because u_n=\frac{2n-1}{3^n}=\frac{3n-(n+1)}{3^n}=\frac{n}{3^{n-1}}-\frac{n+1}{3^n}$.

$$\therefore s_n=(1-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2})+\cdots+(\frac{n}{3^{n-1}}-\frac{n+1}{3^n})=1-\frac{n+1}{3^n}$$

故原式 $=\lim_{n\to\infty}s_n=1$

法二： $s_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$，　$3s_n=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$

$$\because 2s_n=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}$$

$$=2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})-\frac{2n-1}{3^n}-1$$

$$=2\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n}-1=3(1-\frac{1}{3^n})-\frac{2n-1}{3^n}-1$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = 1$

★★★★3. 已知 $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

解： 因 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛，设其 n 项部分和数列为 $\{\delta_n\}$，则可设 $\lim_{n\to\infty}\delta_n = A$

$\because \delta_n = 2(u_2-u_1)+3(u_3-u_2)+\cdots+(n+1)(u_{n+1}-u_n) = -u_1 - s_n + (n+1)u_{n+1}$

其中 s_n 是 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 的第 n 项部分和, 则 $s_n = -u_1 - \delta_n + (n+1)u_{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = -u_1 - \lim_{n\to\infty}\delta_n + \lim_{n\to\infty}(n+1)u_{n+1}$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和为 $-u_1 - A$. 证毕

4. 判别下列级数得收敛性. (4)

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)(a\ge 1)$; ★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$; ★★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{n^{n+1}}$;

★★(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$; ★★★(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!4!\cdots(2n)!}$; ★★(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\frac{1}{n})^n}$.

解： (1) $u_n = \sqrt[n]{a}-1$,当 $a=1$ 时， 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}0$ 收敛于 0

当 $a>1$ 时， $\because \lim_{n\to\infty}[(\sqrt[n]{a}-1)/\frac{1}{n}] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\ln a = \ln a$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$ 发散.

注： 利用 $\sqrt[n]{a}-1 \sim \frac{1}{n}\ln a \quad (n\to\infty)$

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$

$\therefore$ 由比值判别法知, 原级数收敛.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}<1$

$\therefore$ 由比值判别法知, 原级数收敛.

(4)法一： $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{n!^2}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$

$\therefore$ 由比值判别法知, 原级数发散.

法二：$\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!^2\,n^2}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!^2}{2}\neq 0$

$\therefore$ 由级数收敛的必要条件知, 原级数发散.

(5) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{[(n+2)!]^n}{2!4!\cdots(2n+2)!}}{\dfrac{[(n+1)!]^n}{2!4!\cdots(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^n}{1\cdot2\cdot3\cdots(n+3)(n+4)\cdots(2n+2)}$

$$\leq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[[1-\frac{1}{n+3}]^{-(n+3)}\right]^{-\frac{n}{n+3}}=e^{-1}<1$$

$\therefore$ 由比值判别法知, 原级数收敛.

(6) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{(n+\dfrac{1}{n})^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}^2}{n+\dfrac{1}{n}}=0<1$

$\therefore$由根值判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n}{2n+1})^n$ 收敛.

★★★5.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

证明： 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$，其通项为 $u_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$

$$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n=0$$

$\therefore$ 由比值判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛.

$\therefore$ 由级数收敛的必要条件知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$. 证毕.

★★★6.求级限 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}, b>a>0$.

解: 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$,

其通项为 $u_n=\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots[(n+1)a+1]}{(b+1)(2b+1)\cdots[(n+1)b+1]}\cdot\frac{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1}=\frac{a}{b}<1$$

$\therefore$ 由比值判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ 收敛.

$\therefore$ 由级数收敛的必要条件知, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}=0$.

★★★7. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$ 的收敛性.

解: $u_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}$

$$=\frac{4}{n^a}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}\sim\frac{4}{n^{a+\frac{1}{2}}}$$

当 $a+\frac{1}{2}>1$, 即 $a>\frac{1}{2}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$ 收敛;

当 $a+\frac{1}{2}\le 1$, 即 $a\le\frac{1}{2}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$ 发散.

★★★★8. 设数列 $S_1=1, S_2, S_3, \cdots$, 由公式 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}$ 决定, 其中 u_n 是正项级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的一般项, 且 $u_n>0$, 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{S_n\}$ 也收敛.

证明: 由 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}$, $S_1=1, u_n>0$. 易由归纳法证 $S_n>1$;

又由 $2S_{n+1}-S_n=\sqrt{S_n^2+u_n}$ 两边同时平方整理得

$$S_{n+1}(S_{n+1}-S_n)=\frac{u_n}{4}，故 S_{n+1}>S_n>1$$

$$S_{n+1}^2-S_n^2=(S_{n+1}+S_n)(S_{n+1}-S_n>S_{n+1}(S_{n+1}-S_n)>\frac{u_n}{4}$$

从而 $0<S_{n+1}-S_n<\frac{u_n}{4}<S_{n+1}^2-S_n^2$ *

必要性：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{4}$ 收敛. 由*及比较判别法知,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}-S_n)$ 收敛. 其 n 项部分和数列 $\{\delta_n\}$ 极限存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=A$

$\because \delta_n=(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots+(S_{n+1}-S_n)=S_{n+1}-S_1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_1)=A$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=A+S_1$ 即数列 $\{S_n\}$ 收敛.

充分性：数列 $\{S_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=B$,设 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}^2-S_n^2)$ 的第 n 项部分和 V_n ，则

$V_n=S_{n+1}^2-S_1^2$， $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=B^2-1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}^2-S_n^2)$ 收敛，由*及比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{4}$ 收敛

从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛. 证毕

9. 判别下列级数的收敛性, 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}$; ★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$; ★★★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$.

解: (1) $\because u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，$\therefore$原级数非绝对收敛.

但 $u_n>u_{n+1}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，原级数条件收敛.

(2) $\because u_n=\frac{2^{n^2}}{n!}=\frac{[2^n]^n}{n!}=\frac{[(1+1)^n]^n}{n!}>\frac{[1+n]^n}{n!}>\frac{n^n}{n!}=\frac{n}{1}\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{n}>1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，　　故原级数发散.

(3) $u_n = \dfrac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$，$(\dfrac{(n+1)^n}{2n^{n+1}} = \dfrac{1}{2n}(1+\dfrac{1}{n})^n \sim \dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{1}{n})$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^n = \dfrac{e}{2}$，$\therefore$原级数非绝对收敛.

又$\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (\dfrac{n+2}{n+1})^{n+1}\cdot(\dfrac{n}{n+1})^{n+1} = (\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1} < 1$

$\therefore u_n > u_{n+1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}(1+\dfrac{1}{n})^n = 0$

故原级数条件收敛.

★★★10. 设$|a_n| \le 1 (n=1,2,3,\cdots)$，$|a_n - a_{n-1}| \le \dfrac{1}{4}|a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2| (n=3,4,5,\cdots)$，证明:

(1)级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛;　　　　(2)数列$\{a_n\}$收敛.

证明： (1) $\because |a_n - a_{n-1}| \le \dfrac{1}{4}|a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2| = \dfrac{1}{4}|a_{n-1} - a_{n-2}||a_{n-1} + a_{n-2}| \le \dfrac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}|$

$\le \dfrac{1}{2^2}|a_{n-2} - a_{n-3}| \le \cdots \le \dfrac{1}{2^{n-2}}|a_2 - a_1| \le \dfrac{1}{2^{n-3}}$

$\therefore$　级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛.

(2)　设$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = s$

$\because a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = \sum\limits_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) + a_1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = s + a_1$，　即数列$\{a_n\}$收敛.

★★★★11. 设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，

证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛.

证明： 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，知$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x = 0$，

且$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

所以 $f(x)$ 带皮亚若项的麦克劳林公式为 $f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\quad(x\to 0)$

当 $f''(0)\neq 0$ 时， $f(\frac{1}{n})=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\sim\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$

即 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2}\frac{1}{n^2}$，由 $\sum_{1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

当 $f''(0)=0$ 时， $f(\frac{1}{n})=o(\frac{1}{n^2})\quad(n\to\infty)$

$\because\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=0$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

综合上述：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

12. 求下列幂级数的收敛区间:

★★★★(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$;　　★★★(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$;　　★★★(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n+1}}{2n+1}$.

解: (1) $\because R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

当 $x=\pm e$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{\pm e}{n}\right)^n$ 的绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$

因 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{n+1}\cdot\frac{(n)^n}{(n)!}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}e>1$

故 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0,\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{\pm e}{n}\right)^n$ 发散

$\therefore$ 原幂级数的收敛域为 $(-e,e)$

(2) $\because\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{2(n+1)}\Big/\frac{n}{2^n}x^{2n}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}x^2$

当 $x^2<2$ 即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，原级数绝对收敛; 当 $x^2>2$ 即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，原级数发散.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数均为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

$\therefore$原幂级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(3)令$y=x-2$，原级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{y^{2n+1}}{2n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y^{2n+3}}{2n+3}\Big/\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right|=y^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=y^2$$

当$y^2<1$即$|y|<1$时，原级数绝对收敛; 当$y^2>1$即$|y|>1$时，原级数发散;

当$y=\pm1$时，级数分别为$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$都收敛;

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{y^{2n+1}}{2n+1}$的收敛域为$[-1,1]$,原幂级数的收敛域为$-1\le x-2\le1$，即$[1,3]$.

13. 求下列幂级数的和函数:

★★(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$;　　　　★★★(2)$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$.

解: (1)显然级数的收敛域$(-1,1)$

$$\because\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4}(-1<x<1)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\frac{t^4}{1-t^4}dt=\int_0^x[\frac{-(1-t^4)+1}{1-t^4}]dt=\int_0^x[-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t^2}]dt$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x-x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}\qquad(|x|<1)$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}(\frac{x}{2})^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{x}{2})^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=(\frac{x}{2})^2e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2\right)e^{\frac{x}{2}}\ .$$

★★★14. 将函数$x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$展开成麦克劳林级数.

解: $\because\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad x\in[-1,1]$

$$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\quad x\in(-1,1]$$

$$\therefore x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)(2n+1)}x^{2(n+1)}\qquad x\in[-1,1]$$

★★15. 将函数 $\frac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解： $\because \frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\qquad -1<x<1$

$$\therefore \frac{1}{(2-x)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x}{2})^{n-1}\qquad -1<\frac{x}{2}<1\quad 即-2<x<2$$

★★16. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

解： $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{t-4+1}-\frac{1}{t-4+2}$

$$\underline{\underline{t=x+4}}=\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{3})^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n\qquad -1<\frac{t}{3}<1,且-1<\frac{t}{2}<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}]t^n\qquad -2<t<2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}](x+4)^n$$

$(-2<x+4<2$ 即 $-6<x<-2)$

★★17. 将函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 展开成 x 的幂级数.

解： 法一

$$f(x)=\ln[(1+x)+x^2(1+x)]=\ln(1+x)(1+x^2)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\quad x\in(-1,1]$$

法二

$$f(x)=\ln\frac{1-x^4}{1-x}=\ln(1-x^4)-\ln(1-x)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1)$$

★★18. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛域及和函数.

解： $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x-1)^n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n+1}\right)'\qquad -1<x-1<1$

$$=\left(\frac{(x-1)^2}{1-(x-1)}\right)'=\left(\frac{(x-1)^2}{2-x}\right)'=\frac{(x-1)(3-x)}{(2-x)^2}\qquad 0<x<2.$$

★★★19. 利用幂级数求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n+1}{n!}$ 的和.

解： 法一: 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$，易求得其收敛域 $x\in(-\infty,\infty)$

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}x^{2n+1}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n\right)'=(xe^{\frac{x^2}{2}})'=(1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n+1}{n!}=f(1)=2e^{\frac{1}{2}}$

法二: $\because\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{1}{2})^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n=2e^{\frac{1}{2}}$$

★★★★20. 设 $y=arc\cot x,$ 求 $y^{(n)}(0)$.

解： $\because y'=-\frac{1}{1+x^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad |x|<1$

$$\therefore y(x)-y(0)=\int_0^x y'dx=-\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,dx$$

$$y(x)=y(0)-\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,dx=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad(1)$$

又 $y(x)在x=0$ 处的麦克劳林级数展开式为

$$y(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (2)$$

比较 $(1),(2)$ 中 x^n 的系数，得

$$y^{(2k)}(0)=0 \qquad k\geq 1,$$

$$\frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \qquad k\geq 0$$

即 $y^{(2k+1)}(0)=(-1)^{k+1}\cdot(2k)! \qquad k\geq 0$

综合上述： $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\ (k\geq 1)\\ (-1)^{k+1}\cdot(2k)!, & n=2k+1\ (k\geq 0)\end{cases}$

★★★★21. 利用函数的幂级数展开式求 $\sqrt{e}$ 的近似值(精确到 0.001).

解: $\because e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (x\in R)$

$$\therefore e^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n+\cdots$$

$$|r_n|=\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{(n+2)!}(\frac{1}{2})^{n+2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}(1+\frac{1}{(n+2)}(\frac{1}{2})+\frac{1}{(n+2)(n+3)}(\frac{1}{2})^2+\cdots)$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3\cdot(n+1)!2^{n-1}}$$

取到 $n=4$,计算 $|r_4|<\frac{1}{3\cdot 5!\cdot 2^3}\approx 0.0003<0.001$

故 $e^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{4!}(\frac{1}{2})^4\approx 1.6484\approx 1.648.$

★★★22. 利用被积函数的幂级数展开式求定积分 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$ 的近似值 (精确到 0.0001).

解: $\because (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_0^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad |x|<1, \quad \arctan 0=0$

$$\therefore \arctan x=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\therefore \int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}dx=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}\Big|_0^{0.5}=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}(\frac{1}{2})^{2n+1}$$

此为交错级数，故$|r_n|<u_{n+1}$，计算

$$\frac{1}{3^2}(\frac{1}{2})^3\approx 0.0139,\frac{1}{5^2}(\frac{1}{2})^5\approx 0.0013$$

$$\frac{1}{7^2}(\frac{1}{2})^7\approx 0.00016,\frac{1}{9^2}(\frac{1}{2})^9\approx 0.000024<0.0001$$

$$\therefore \int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx 0.5-0.0139+0.0013-0.00016$$

请查看计算 0.4874

$$=0.48724\approx 0.4872$$

★★★23. 已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}$，求积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx$.

解：$\because \frac{1}{1+x}=\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$

$$\therefore \int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx=\int_0^1\ln x\sum_0^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum_0^{\infty}(-1)^n\int_0^1\ln x\cdot x^n dx$$

$$=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1+n)^2}=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=-\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}+2\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=-\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi}{12}.$$

★★★★24. 设函数$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<l/2\\ l-x, & l/2\le x\le l\end{cases}$，试将其展开成正弦级数和余弦级数.

解：(1)将$f(x)$函数作奇延拓开成正弦级数. 则

$$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=-\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}[x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}\right]$$

$$=-\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[-\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad n=1,2,3\cdots$$

所以 $f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}$，$0\le x\le l$；

(2)将 $f(x)$ 函数作偶延拓展开成余弦级数，则

$$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}[x\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}\right]=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right] \qquad n=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{l}[\int_0^{\frac{l}{2}}xdx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)dx]=\frac{l}{2}$$

所以 $f(x)=\frac{l}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$，$0\le x\le l$.

★★★25. 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数.

解： 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(2+x)d\sin n\pi x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[(2+x)\sin n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\sin n\pi x dx\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi x)\Big|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases} \qquad k=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)dx=2[2x+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^2=5$$

所以 $2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$，$-1\le x\le 1$.

★★★26. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ e^x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

解： $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_0^{\pi}e^x dx\right]=\dfrac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{e^x}{1+n^2}[\cos nx+n\sin nx]\Big|_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n^2}[e^{\pi}(-1)^n-1]\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{e^x}{1+n^2}[\sin nx-n\cos nx]\Big|_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2}[1-e^{\pi}(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots)$$

故有

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}(\ \cos nx-n\ \sin nx)$$
$$x\ne k\pi,k=1,2,3\cdots$$

$x=2k\pi,k=0,1,2\cdots$ 时，级数收敛到 $\dfrac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=\dfrac{1}{2}$

$x=(2k+1)\pi$ 时，级数收敛到 $\dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\dfrac{e^{\pi}}{2}$.

★★★★27. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi/2\le x<\pi/2\\ \pi-x, & \pi/2\le x\le 3\pi/2\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解： 作变换 $z=x-\dfrac{\pi}{2}$，函数 $f(x)$ 转化为

$$F(z)=\begin{cases}z+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le z<0\\ \dfrac{\pi}{2}-z, & 0\le z\le\pi\end{cases}$$

则 $F(z)$ 的周期为 2π，将 $F(z)$ 函数延拓，展开为傅里叶级数。

因为 $F(z)$ 为偶函数，所以 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-z+\frac{\pi}{2})\cos nzdz=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(-z+\frac{\pi}{2})d(\sin nz)$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left[(-z+\frac{\pi}{2})\sin nz\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin nzdz\right]=-\frac{2}{n^2\pi}(\cos nz)\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k \\ \dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\end{cases} \qquad k=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-z+\frac{\pi}{2})dz=0$$

所以 $F(z)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)z \qquad z\in[-\pi,\pi]$

即 $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)(x-\dfrac{\pi}{2}) \qquad x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi]$.

★★★★28. 证明: 当 $0\le x\le\pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi x}{n^2}=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi^2}{6}$.

证明: 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi}{2}x$，将 $f(x)$ 在 $0\le x\le\pi$ 上展开成余弦级数.

则 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x)\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x)d(\sin nx)$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left[(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x)\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})\sin nxdx\right]$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[(x-\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[\pi-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{n^2} \qquad n=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x)dx=-\frac{1}{3}\pi^2$$

所以 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi}{2}x=-\dfrac{1}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos nx$，$0\le x\le\pi$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos nx=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{1}{6}\pi^2 \qquad 0\le x\le\pi$.

★★★★29. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积，且 a_k,b_k 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数， 试证对任意自然数 n, 有:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

证明： 令 $s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，则

$$0\le\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}[f^2(x)-2f(x)s_n(x)+s_n^2(x)]dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)dx \qquad (1)$$

因 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$

$$=\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$$

由三角函数的正交性，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}s_n^2(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2dx$$

$$=\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$$

代入(1)得 $0\le\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$

即 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

★★★★30. 证明: $\lim_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n)=1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明： $\because\lim_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n)=1$

$\therefore$取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists N_1$， 当 $n>N_1$ 时，恒有 $\left|n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n-1\right|<\frac{1}{2}$ ，

即 $\frac{1}{2}<n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n<\frac{3}{2}$， $\frac{1}{2}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}<a_n<\frac{3}{2}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$

$\because\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{1}{n}=2$

$\therefore$对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists N_2$ ， 当 $n>N_2$ 时，恒有 $\left|2n\sin\frac{1}{n}-2\right|<\frac{1}{2}$， 即 $\frac{3}{2}<2n\sin\frac{1}{n}<\frac{5}{2}$

从而 $a_n < \frac{3}{2} n^{-2n\sin\frac{1}{n}} < \frac{3}{2} n^{-\frac{3}{2}}$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

★★★★31. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

思路： $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 可看成 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的 n 项部分和 s_n，若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$.

解： 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{3} < 1$$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛.

其部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 数列收敛

从而 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$

★★★★32. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f^{(n)}(0), n = 1, 2, \cdots$

解： $\because \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in R$

$$\therefore \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \qquad x \neq 0$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$x = 0$ 时，幂级数收敛于 1.

故 $f(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$

$$f^{(2m-1)}(0)=0,\qquad f^{(2m)}(0)=\frac{(-1)^m}{2m+1},\qquad m=1,2,3\cdots$$

★★★★33. 证明 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在任何区间 $(-R,R)(R>0)$ 上不能展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

解: 反证法 设存在 $R>0$，当 $x\in(-R,R)$ 时

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{，则系数 }a_n,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\qquad n=0,1,2,\cdots$$

因 $f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$$

若 $f^{(n)}(0)=0$

则 $$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}(\frac{1}{x})}{x}$$

$$\underline{\underline{t=\frac{1}{x}}}\lim_{t\to\infty}\frac{tP_{3n}(t)}{e^{t^2}}=0\qquad [P_n(x)\text{ 表 }n\text{ 次多项式}]$$

由归纳法得 $a_n=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=0\qquad n=0,1,2,\cdots$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n=0\qquad x\in(-R,R)$$

与 $f(x)$ 的定义域矛盾，故假设不真.

$f(x)$ 在任何区间 $(-R,R)(R>0)$ 上不能展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.