Finite Dimensional Estimation Algebras with Non-Maximal Rank in Nonlinear Filters

ZHANG Hui-Guang

Supervisor:

Prof. LIU Yun-Gang

School of Control Science and Engineering
Shandong University

May, 2010

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Master in Control Theory and Control Engineering

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：张会j　　日　期：2010.5.22

关于学位论文使用授权的声明

本人同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的印刷件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：张会j　导师签名：刘 [illegible]　日　期：2010-5-22

目　录

CONTENTS

摘　要

自从 Mitter 和 Brockett 各自提出估计代数以来, 这个概念已经成为研究非线性滤波理论的一个重要工具, 从而对非线性滤波中估计代数结构的研究成为了一个重要的课题. 由此产生的估计代数理论能够解释: 对于线性系统容易构造清晰的有限维滤波器, 而对于非线性系统却非常困难. 过去三十年,非线性滤波中估计代数理论取得了许多重要的理论成果. 解决了以下问题: 最大秩估计代数的分类、滤波系统状态空间维数等于 2 的有限维估计代数分类和五维以下估计代数结构. 与已有结论不同之处在于:本文研究对象是具有非最大秩的有限维估计代数. 包括状态空间维数等于 3的有限维估计代数结构和六维估计代数结构. 主要内容分为以下三个部分:

一、估计代数理论的综述

本部分对非线性滤波中估计代数理论进行了综述, 包括估计代数结构课题背景、理论来源及目前的研究状况. 解释了估计代数理论的优点: 滤波系统中估计代数有限维性质能够构造出一个清晰结构的有限维滤波器.

二、低维状态空间中有限维估计代数分类

本部分介绍了状态空间维数为 2 中有限维估计代数的分类, 然后针对状态空间维数为 3 的非线性滤波系统, 研究了与其对应的具有非最大秩的有限维估计代数结构. 先采用比较微分算子的方法, 研究了一阶微分算子在估计代数中的结构. 最后获得了一些二次多项式不属于有限维估计代数.

三、任意维状态空间中低维估计代数分类

本部分针对低维估计代数进行研究. 首先介绍了五维以下的估计代数分类, 然后研究了六维估计代数, 并且得到如下结论: 六维估计代数不含有三个线性无关的一次多项式、不含有一个一次多项式和一个二次多项式. 在估计代数的二次秩小于状态空间维数前提下, 六维估计代数不含有两个线性无关的二次多项式. 最后证明了带有某些条件的六维估计代数不含有某些二次多项式的形式.

关键词: 非线性滤波; 最大秩估计代数; 非最大秩估计代数; Duncan-Mortensen-Zakai方程; Wei-Norman 方法.

Abstract

Since estimation algebra was introduced independently by Mitter and Brockett, it has become an important tool to deal with questions concerning finite dimensional nonlinear filters. Thus, in the nonlinear filters, research on the structure of estimation algebra become a vital topic. The theory of estimation algebra can explains convincingly: it is easy to find finite dimensional filters for linear systems while it is very hard to handle the nonlinear filter problems. During the last thirty years, the theory of estimation algebra in nonlinear filters have obtained many important theoretical productions. The following problems have been solved: the classification of finite dimensional estimation algebras with maximal rank, the classification of finite dimensional estimation algebras with state space dimension 2 and estimation algebras of dimension at most five. The difference from the existed conclusion lies in: this thesis investigates the finite dimensional estimation algebras with non-maximal rank. Including the finite dimensional estimation algebras with state apace dimension 3 and the structure of six dimensional estimation algebras. The main contents are composed of the following three parts:

(I) Survey of the Estimation Algebra Theory

In this part, we summarize the estimation algebra theory of the nonlinear filter, including the subject background, the theoretical significance and the research status. And this part explains the advantage of estimation algebra that the finite dimensionality of the estimation algebra guarantees the explicit construction of the finite dimensional filter.

(II) Classification of Finite Dimensional Estimation Algebras in Low Dimensional State Space

In this part, we introduce classification of the finite dimensional estimation algebras with 2 dimensional state space. Then the finite dimensional estimation algebras with non-maximal rank are studied in the case of the nonlinear systems with 3 dimensional state space. Via comparing two differential operators, the structure of differential operator with order one in the estimation algebras is studied. Finally, we obtain that the finite estimation algebras cannot contain some degree two polynomials.

(III) Classification of Low Dimensional Estimation Algebras in Arbitrary Dimensional State Space

In this part, the low dimensional estimation algebras are studied. Firstly, we introduce estimation algebras of dimension at most five. Then, we study six dimensional estimation algebras, and obtain the following results: six dimensional estimation algebras cannot contain three linear independent degree one polynomials, cannot contain a degree one polynomial and a degree two polynomial. When the quadratic rank of estimation algebra is less than state space dimension of filtering system, six dimensional estimation algebras cannot contain two linearly independent degree two polynomials, Finally, the result is proved that six dimensional estimation algebras with some conditions cannot contain some degree two polynomial form.

Keywords: nonlinear filter; estimation algebra with maximal rank; estimation algebra with non-maximal rank; Duncan-Mortensen-Zakai equation; Wei-Norman approach.

第一章　绪论

1.1　非线性滤波中估计代数结构的研究概述

1.1.1　课题背景和理论意义

系统的滤波器设计是控制理论与控制系统工程的一个重要课题. 自从Kalman 滤波被提出以来, 滤波器设计在理论与应用方面都取得了进一步的发展. 然而由于这种滤波系统的漂移项和观测项均存在线性化的假设, Kalman 滤波的应用受到了限制. 非线性滤波器设计问题的研究就显得很有意义. 然而, 由于该问题本身固有的难度使得非线性滤波器设计变得十分困难. 为了解决这一难题, 文献[1, 2] 提出利用估计代数思想来构造有限维非线性滤波器的方法. 此后, 估计代数逐渐成为研究非线性滤波的一种重要工具[3,4,5,6].

利用估计代数去构造非线性滤波器, 这种想法来自于用李代数观点去解时变线性微分方程的Wei-Norman方法. 考虑方程

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)A_iX(t), \qquad X(0) = X_0, \tag{1.1}$$

其中A_i's是$n \times n$矩阵, a_i's为标量值函数. 令$B_1, \cdots, B_n$是由$A_1, \cdots, A_m$ 生成的李代数的一组基. 那么, 在$t = 0$的一个邻域内, $X(t)$具有如下形式:

$$X(t) = exp(b_1(t)B_1)\cdots exp(b_n(t)B_n)X_0,$$

其中b_i's满足仅依赖于A_i's产生的李代数和a_i's的常微分方程.

在这篇论文中, 所要考虑的滤波系统, 是基于如下的连续信号观测模型:

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dv(t), \quad x(0) = x_0, \\ dy(t) = h(x(t))dt + dw(t), \quad y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中过程x, v, y和w分别是在R^n, R^n, R^m和R^m空间上取值. v和w的元素是相互独立的, 标准的$Brownian$过程. 此外, $f = (f_1, \cdots, f_n)$和$h = (h_1, \cdots, h_m)$被假设为C^∞的, g是一个正交矩阵. $x(t), y(t)$是系统在t时刻的状态和观测值.

令$\rho(t, x)$表示给定观测值$\{y(s) : 0 \leq s \leq t\}$的状态条件概率密度. $\rho(t, x)$是由著名的Duncan-Mortensen-Zakai(DMZ)方程所决定的. DMZ方程是一个关

于$\sigma(t,x)$的随机偏微分方程, 其中$\sigma(t,x)$是$\rho(t,x)$非标准形式. 根据Stratonovich积分, 对于非线性滤波系统(1.2), 它的DMZ方程可以写如下形式:

$$\begin{cases} d\sigma(t,x) = L_0\sigma(t,x)dt + \sum_{i=1}^m h_i\sigma(t,x)dy_i(t), \\ \sigma(0,x) = \sigma_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m h_i^2$. σ_0是初时状态x_0的概率密度. 记$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - f_i$, $\eta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n f_i^2 + \sum_{i=1}^m h_i^2$, 那么$L_0 = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n D_i^2 - \eta)$.

把Wei-Norman方法利用到解决非线性滤波问题中是相当复杂的. 首先需要求解Duncan-Mortensen-Zakai方程, 而方程(1.3)是一个随机偏微分方程, 直接求解这个方程是异常困难的. 通过研究DMZ方程的鲁棒形式, 能够把这个问题的复杂性降低到解决一个时变偏微分方程上. 在[7]中, 定义了一个非规范密度函数:

$$\xi(t,x) = exp(\sum_{i=1}^m h_i(x)y_i(t))\sigma(t,x).$$

将上式代入(1.3)得:

$$\begin{cases} \frac{d\xi(t,x)}{dt} = L_0\xi(t,x) + \sum_{i=1}^m y_i(t)[L_0,h_i]\xi(t,x) \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m y_i(t)y_j(t)[[L_0,h_i],h_j]\xi(t,x), \\ \xi(0,x) = \sigma_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中$[\cdot,\cdot]$是由定义1所定义的李括号.

如果在(1.4)式中可以采用Wei-Norman方法, 那么只要保证由(1.4)式产生的李代数是有限维的(也即由定义2 所定义的估计代数是有限维的), 就能构造出一个有限维滤波器. 此类问题, 在[7, 8]中已经给出了大量的结果. 从而, 有限维滤波器的研究转化到估计代数结构的研究.

估计代数理论作为解决关于有限维滤波器问题的一种重要工具, 由它产生了许多关于有限维滤波器的新结果[9,10,11,12,13], 并且能够对一般的非线性滤波器的结构有更深的认识. 在20世纪80年代早期, 对此问题的研究很热. 这种理论很容易解释对于线性动态系统为什么容易找到回归滤波, 而对于非线性动态系统却很难. 目前,运用估计代数这个工具, 一些新的滤波器已经发现[7,14,15,16,17].

利用估计代数理论研究非线性滤波器, 最大的优点就是估计代数的有限维性质能够保证有限维滤波器有一个清晰的结构. 令人遗憾的是, 由于非线性滤波本身所具有的复杂性, 许多问题仍然无法解决, 仍旧是开放性问题. 由于能够采用Wei-Norman方法构造滤波器的系统不多, 所以对利用估计方法研究非线性滤波器设计很是艰难.

直到1983年召开的国际数学会议上, Brockett提议对所有的有限维估计代数进行分类[18]. 通过对有限维估计代数分类这个过程, 试图找到一些新的具有实际意义的有限维滤波器, 或许能够全面理解非线性滤波系统的结构. 后来Mitter和Levine[19]各自提出了关于有限维估计代数的猜想:

Mitter 猜想: *如果E是有限维估计代数, 如果ϕ是E中的函数, 那么ϕ是关于$x_1,\cdots,x_n$次数至多为一的多项式.*

Levine 猜想: *如果E是有限维估计代数, 那么E中的微分算子至多是2阶的.*

其中E是由定义2所定义的估计代数. 从而对有限维估计代数的分类也就成了对Mitter猜想和Levine猜想的验证.

1.1.2 国内外研究现状

估计代数这个概念在20世纪80年代初首次被正式提出来以后. 随后, Ocone[20]给出, 如果系统(1.2)的估计代数是有限维的, 那么$h_i's$的次数是不能大于2的多项式. 在Wong[21]中, 这个结果得到了进一步的优化, 如果f和h是实解析函数, 且f满足一些增长性条件, 那么$h_i's$是次数不能大于1的多项式. Wong[21]的结论显示有限维估计代数具有特殊的结构. 尤其, 它的一组基是由一个含有二阶微分算子L_0, 一些一阶微分算子和一次多项式组成的.

Wong[17]给出了一个重要的概念: Ω矩阵. 该矩阵第i行, 第j列的元素被定义为$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. 从此, Ω矩阵成为了研究滤波系统的估计代数的重要参数. 在Tam[8]中, 研究了$\Omega=0$的滤波系统. 另外, 如果一个滤波系统的$\Omega=0$, 则称该系统所对应的估计代数为恰当估计代数, 且由Poincare引理知, f是一个梯度向量场. 在[8]和[22]中, 解决了有限维恰当估计代数的分类.Yau[7]中扩展了对于恰当维估计代数的结果, 给出了当Ω是常数矩阵的一些重要结果, 并且运用Wei-Norman方法构造了一类有限维回归滤波. 在系统模型的漂移项$f(x)$解析, 且其一至三阶偏导数均有界的前提假设下, Wong[21]证明了该模型的估计代数是可解的, 且它的观测项$h(x)$的元素是关于$x_1,\cdots,x_n$的一次多项式.

从1990年, Yau等人开始了对最大秩有限维估计代数研究. [23]最终解决了具有最大秩的有限维估计代数的分类.

目前,对非线性滤波中有限维估计代数的研究大致有三种思路. 第一种是最大秩估计代数与非最大秩估计代数: 文献[24]提出了最大秩估计代数的概念, 解决了状态空间维数至多为2的最大秩有限维估计代数分类. 文献[25, 26] 成功地解决了状态空间维数为3和4的最大秩有限维估计代数分类.

文献[7, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33] 解决了所有的最大秩有限维估计代数分类. 第二种是状态空间维数为2与状态空间维数为n: 状态空间维数为2的非最大秩估计代数分类已经被Wu和Yau在文献[34]中得到了彻底地解决, 而关于状态空间维数为n的情形, Rasoulian和Yau在文献[35]中只给出了部分结果, 其它具有非最大秩的有限维估计代数分类问题至今未得到解决, 仍是一个开放性问题. 第三种是低维估计代数与高维估计代数: Yau和Rasoulian等人给出了估计代数维数至多为5的结构[36,37].

1.2 基本概念和性质

1.2.1 基本概念

如下定义在本文中经常用到[38,39,40,41,42]:

定义1.1 如果X和Y是微分算子, 则X和Y的李括号$[X, Y]$定义为: 对于任意的光滑函数ϕ, 有$[X,Y]\phi = X(Y\phi) - Y(X\phi)$.

很显然, 由上面定义的李括号满足:

(1) 对任意常数$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $[aX, bY] = ab[X, Y]$;

(2) $[X, X] = 0$;

(3) $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$.

这说明对任意微分算子集合, 通过如上定义的李括号都可以张成一个代数, 通常称之为李代数.

定义1.2 对滤波系统(1.2), 由微分算子集合$\{L_0, h_1, \cdots, h_m\}$经李括号生成的代数称之为估计代数, 记作$E = \langle L_0, h_1, \cdots, h_m\rangle_{L.A.}$, 其中$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h_i^2$.

定义1.3 针对滤波系统(1.2)的估计代数E, 如果对任意的$i = 1, \ldots, n$, 都存在常数c_i, 使得$x_i + c_i \in E$, 则称E为**最大秩估计代数**; 如果仅对一个x_r, $1 \le r \le n$, 不存在常数c_r使得$x_r + c_r \in E$成立, 则称E为**次最大秩估计代数**.

如果E是最大秩估计代数, 那么很容易计算得出: $[L_0, x_i + c_i] = D_i \in E$, $[D_i, x_i + c_i] = 1 \in E$. 因而, 所有次数小于1的多项式都属于$E$.

定义1.4 针对滤波系统(1.2), 该系统的Ω 矩阵被定义为一个$n \times n$矩阵$\Omega = (\omega_{ij})$, 其中$\omega_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \forall 1 \le i, j \le n$.

Ω矩阵具有如下关系:

$$\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial\omega_{ki}}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_{jk}}{\partial x_i}=0,\forall 1\leq i,j,k\leq n.$$

定义1.5 如果$L(E)$是E的子空间, 且$L(E)$是由E中所有的一次多项式组成的. 那么$v(E):=dimL(E)$是估计代数E的线性秩.

定义1.6 对于E中的一个给定的函数h, 它的二次项$h^{(2)}=x^TAx$, A是一个对称矩阵, h的二次秩$\lambda(h)$被定义为矩阵A的秩. 而E的二次秩$\lambda(E)$是E中所有二次多项式函数的最大二次秩, 即, $\lambda(E)=max_{h\in E}\lambda(h)$.

令U是微分算子的集合, 对于$\forall A\in U$, 则

$$A=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in I_A}a_{i_1,\cdots,i_n}\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}}\cdots\frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}},$$

其中, 非零函数$a_{i_1,\cdots,i_n}\in C^\infty(R^n)$, I_A是A的有限指标集合. I_A中的元素都是n元的. $i_1,\cdots,i_n$都是非负的整数. $(i_1,\cdots,i_n)$的范数是

$$|(i_1,\cdots,i_n)|=i_1+\cdots+i_n.$$

A的阶数

$$ordA=max_{(i_1,\cdots,i_n)\in I_A}|(i_1,\cdots,i_n)|.$$

如果$A=0$的阶数被定义为$-\infty$. U是基于定义1形式的李代数.

如果$I_A=I_B$, 且

$$a_{i_1,\cdots,i_n}=b_{i_1,\cdots,i_n},\forall(i_1,\cdots,i_n)\in I_A,$$

微分算子A和B在U中是等价的, 记U_k表示U的子集, 其阶数小于或等于k. 特殊情况$U_0=C^\infty(R^n)$. 通常情况下, mod 表示等价类. 即, 如果V是U的一个子集,

$$A=B\mod V\Longleftrightarrow A-B\in V.$$

如果$A,B\in U$, 定义

$$Ad_A^lB=[A,Ad_A^{l-1}B],$$

其中$Ad_A^0B=B$.

$L(D_1^{i_1}\cdots D_n^{i_n})$表示以下微分算子的集合: 阶数小于$|(i_1,\cdots,i_n)|$的微分算子; D_1的阶数小于i_1的微分算子; D_1的阶数等于i_1, 而D_1的阶数小于i_1的微分算子; $\cdots$; $D_1,\cdots,D_{n-1}$项的阶数按顺序依次等于$i_1,\cdots,i_{n-1}$, 而D_n的阶数小于i_n的微分算子. 如果$a>b$, 则有

$$aD_1^{i_1}\cdots D_n^{i_n}+L(D_1^{i_1}\cdots D_n^{i_n})>bD_1^{i_1}\cdots D_n^{i_n}+L(D_1^{i_1}\cdots D_n^{i_n}).$$

1.2.2 基本性质

如下性质在研究非线性滤波问题时经常用到:

性质1.1[7,24] 设E是滤波系统的估计代数, $X,Y,Z\in E$, 且$g,h\in C^\infty$. 那么,

(1) $[XY,Z]=X[Y,Z]+[X,Z]Y$;

(2) $[gD_i,h]=g\frac{\partial h}{\partial x_i}$;

(3) $[gD_i,hD_j]=-gh\omega_{ij}+g\frac{\partial h}{\partial x_i}D_j-h\frac{\partial g}{\partial x_j}D_i$;

(4) $[gD_i^2,h]=2g\frac{\partial h}{\partial x_i}D_i+g\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}$;

(5) $[D_i^2,hD_j]=2\frac{\partial h}{\partial x_i}D_iD_j-2h\omega_{ij}D_i+\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}D_j-h\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i}$;

(6) $[D_i^2,D_j^2]=4\omega_{ji}D_jD_i+2\frac{\partial \omega_{ji}}{\partial x_j}D_i+2\frac{\partial \omega_{ji}}{\partial x_i}D_j+\frac{\partial^2\omega_{ji}}{\partial x_i\partial x_j}+2\omega_{ji}^2$;

(7) $[D_k^2,hD_iD_j]=2\frac{\partial h}{\partial x_k}D_kD_iD_j+2h\omega_{jk}D_iD_k+2h\omega_{ik}D_kD_j+\frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}D_iD_j+2h\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i}D_k+h\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_k}D_i+h\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_k}D_j+h\frac{\partial^2\omega_{jk}}{\partial x_i\partial x_k}$;

(8) $[gD_iD_j,hD_k]=g\frac{\partial h}{\partial x_j}D_iD_k+g\frac{\partial h}{\partial x_i}D_jD_k+gh\omega_{kj}D_i+gh\omega_{ki}D_j+g\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}D_k+gh\frac{\partial \omega_{kj}}{\partial x_i}-h\frac{\partial g}{\partial x_k}D_iD_j$.

性质1.2[32] 记$E=\langle L_0,h_1,\cdots,h_m\rangle_{L.A.}$, $\hat{E}=\langle 1,L_0,h_1,\cdots,h_m\rangle_{L.A.}$. 那么, E是有限维估计代数的充分必要条件是$\hat{E}$是有限维估计代数.

性质1.3[32] 设$F(x_1,\cdots,x_n)$是R^n上的光滑函数. $c(t)=(c_1(t),\cdots,c_n(t))$是一个多项式向量, 即$c_i(t)'s$ 是关于t的多项式, $\epsilon=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$. 那么$F(c(t)+\epsilon)$也是一个关于$t$的多项式, 即$F(c(t)+\epsilon)=\sum_{i=0}^d a_j(\epsilon)t^j$, 其中$a_j(\epsilon)'s$是关于$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$的多项式. 如果存在一个$c(t)$使得$F(c(t)+\epsilon)$关于$t$最高次项的系数$a_d(\epsilon)$是一个负常数,且$d\geq 1$, 那么不存在$R^n$上光滑函数$f_1,\cdots,f_n$满足等式:

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n f_i^2=F.$$

性质1.4[33] 如果E是最大秩有限维估计代数, 那么Ω矩阵是一个常数矩阵.

性质1.5[32] 如果E是最大秩有限维估计代数, 那么:

(1) $h_1,\cdots,h_m$是关于x的仿射函数;

(2) η是一个二次多项式,且函数$\eta-\sum_{i=1}^m h_i^2$的二次项是半正定的.

性质1.6[7] 系统(1.2)所对应的Ω矩阵是常数矩阵. 那么

(1) 如果η是次数至多为2的多项式, $h_i(x)$, $i=1,\cdots,m$是关于$x_1,\cdots,x_n$的一次多项式, 那么E是有限维估计代数, 且估计代数有如下的一组基:

$$L_0, E_1, \cdots, E_p, E_{p+1}, \cdots, E_q, 1$$

微分算子$E_1,\cdots,E_p$具有形式:

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}D_j+\beta_j,\ \ 1\le i\le p$$

其中$a_{ij}'s$是常数, β_j是关于x的仿射函数, 且微分算子$E_{p+1},\cdots,E_q$是关于x的仿射.此外$\eta-\sum_{j=1}^{m}$的二次项是半正定的.

(2) 如果E是有限维估计代数, 那么$h_i(x)$, $i=1,\cdots,m$是关于x的仿射函数. 也即观测矩阵$H=[\bigtriangledown h_1,\cdots,\bigtriangledown h_m]$是常数矩阵. 此外, 如果观测矩阵的秩为$n$, 那么$\eta$是次数至多为2的多项式, 且$E$的维数为$2n+2$, 具有如下的一组基:

$$1,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ D_1,\ \cdots,\ D_n,\ L_0.$$

性质1.7[32] 假设$m\in Z$是一个整数, ζ是R^n上的一个光滑函数. $l\le n$, $E_l(\zeta)+m\zeta=\varphi$, 其中$\varphi$是一个关于$x_{l+1},\cdots,x_n$的$k$次多项式.

(1) 如果$m>0$, 那么$\zeta=\frac{1}{m}\varphi$.

(2) 如果$m=0$, $\varphi=0$, 那么ζ是一个关于$x_{l+1},\cdots,x_n$的光滑函数.

(3) 如果$m\le -1$, 那么$\zeta=\varepsilon+\frac{1}{m}\varphi$, 其中$\varepsilon$是关于变量$x_1,\cdots,x_l$的0次或$m$次的齐次多项式, 且系数是关于$x_{l+1},\cdots,x_n$的函数.

1.3 关键定理

黑塞矩阵非分解定理: 记η_4是关于$x_1,\cdots,x_n$的四次齐次多项式. $H(\eta_4)$是η_4的黑塞矩阵, 即

$$H(\eta_4)=(\frac{\partial^2\eta_4}{\partial x_i\partial x_j})_{1\le i,j\le n},$$

那么$H(\eta_4)$不能分解为

$$\Delta(x)\Delta'(x),$$

其中$\Delta(x)=(\beta_{ij})_{1\le i,j\le n}$是一个反对称矩阵, β_{ij}是关于$x_1,\cdots,x_n$的线性函数. 除非η_4和$\Delta(x)$是平凡函数, 从而$H(\eta_4)=\Delta(x)\Delta'(x)$可以推出$\eta_4=0$和$\Delta(x)=0$.

庞加莱引理： *若λ为一外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏导数，则*

$$d(d\lambda) = 0.$$

庞加莱引理之逆： *设λ是一个p阶外微分形式，且$d\lambda = 0$. 则存在一个$p-1$阶外微分形式α，使得*

$$\lambda = d\alpha.$$

1.4 本文的主要工作

本文主要利用代数的方法，对非线性滤波系统的具有非最大秩的有限维估计代数进行系统的研究，所研究的对象是目前很少涉及的工作，得到了一些新的理论结果. 各章的主要内容和结果如下:

第一章介绍了非线性滤波系统的有限维估计代数结构课题背景、系统模型、理论来源、研究状况以及基本概念和基本性质. 总结了研究此类问题的几种思路.

第二章简要介绍了状态空间维数为 2 的有限维估计代数的分类，并且针对状态空间维数为 3 的非线性滤波系统，研究了与其对应的有限维估计代数结构. 采用比较微分算子大小的方法，研究了一阶微分算子和零阶微分算子在有限维估计代数中的结构形式.

第三章是对非线性滤波中低维估计代数进行研究. 首先介绍了五维以下的估计代数结构，然后研究了六维估计代数中一次多项式和二次多项式的关系，以及它们的结构.

第四章对论文取得的成果作了总结，并提出了一些有待进一步研究的问题.

第二章 低维状态空间中有限维估计代数分类

2.1 问题描述

在本章中, 研究对象是低维状态空间中有限维估计代数分类. 也就是状态变量的维数 n 是很小值. 首先介绍状态空间维数为 2 有限维估计代数分类. 然后针对状态空间维数为 3 的信号观测模型(1.2), 即只有三个状态变量x_1, x_2, x_3. 研究与此系统相对应的估计代数为:

$$E = \langle L_0, h_1, \cdots, h_m \rangle_{L.A.}$$

其中,

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 - \eta), \\ D_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} - f_i, i = 1, 2, 3, \\ \eta &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} f_i^3 + \sum_{i=1}^{m} h_i^2. \end{aligned}$$

m被假设为一个正整数, 否则 E 显然是1维估计代数. Ω矩阵也是一个 3×3 的反对称矩阵, 其中$\omega_{ii} = 0, i = 1, 2, 3$.

以下引理对于问题的研究起着非常重要的作用:

引理2.1[32] 令E是一个有限维估计代数, 如果

$$A = \sum_{|(i_1, \cdots, i_n)| = l} a_{i_1, \cdots, i_n} D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} \quad \mod U_{l-1}$$

属于E, 其中$l \geq 0, D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \cdots, n$. 那么$a_{i_1, \cdots, i_n}$'s是关于$x_1, \cdots, x_n$的多项式.

引理2.2[32] 令$g, h \in C^\infty(R^n)$, $i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n$为非负整数, $\Sigma_{l=1}^n i_l = r, \Sigma_{l=1}^n j_l = s$, $r + s \geq 2$, δ_{ij}是克氏符号, 即如果$i \neq j$, 则$\delta_{ij} = 0$; 如果$i = j$, 则$\delta_{ij} = 1$. 那么

$$\begin{aligned} & [g D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n}, h D_1^{j_1} \cdots D_n^{j_n}] \\ = & \sum_{l=1}^{n} (i_l g \frac{\partial h}{\partial x_l} - j_l h \frac{\partial g}{\partial x_l}) D_1^{i_1 + j_1 - \delta_{1l}} \cdots D_n^{i_n + j_n - \delta_{nl}} \quad \mod U_{r+s-2}. \end{aligned}$$

引理2.3[32] 如果E是最大秩有限维估计代数, 那么Ω是常数矩阵, 且在此条件下, Mitter 猜想是成立的.

2.2 状态空间维数为2的有限维估计代数

状态空间维数为2的有限维估计代数分类已经在文献[32]被完全解决:

(1) 如果估计代数E的线性秩为0, 则$h_i's$是常数, $E =< L_0 >_{L.A.}$或者$E =< L_0, 1 >_{L.A.}$;

(2) 如果估计代数E的线性秩为1, 则$h_i's$是关于x_1次数至多为一次的多项式, $\omega_{1,2}$是常数.

如果$\omega_{1,2} = 0$, 那么η是关于x_1的次数为2的多项式与关于x_2的光滑函数的和, $E =< L_0, x_1, D_1, 1 >_{L.A.}$.

如果$\omega_{1,2} \neq 0$, 那么η是次数为2的多项式与, $E =< L_0, x_1, D_1, D_2+cx_2, 1 >_{L.A.}$.

(3) 如果估计代数E的线性秩为2, 那么E是最大秩估计代数, Ω是常数矩阵, $E =< L_0, x_1, x_2, D_1, D_2, 1 >_{L.A.}$.

2.3 状态空间维数为3的有限维估计代数

2.3.1 一阶微分算子结构

定理2.1 如果$Y = p(x)D_2 \mod U_0 \in E$, 其中$p(x)$的最高次项系数为非负数. 那么$p(x)$是关于$x_1, x_2, x_3$的次数至多为1的多项式.

证明 根据引理2.1, 可以知道$p(x)$是关于x_1, x_2, x_3的多项式. 不妨设$deg\, p = l$, 用$p^{(l)}$表示$p(x)$中l次齐次多项式. 则$p^{(l)}$具有形式$\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{i} b_{ij}x_1^j x_2^{i-j} x_3^{l-i}$, 其中$b_{ij}$'s是常数.

记$Y_k = Ad_{L_0}^k Y$, 那么

$$\begin{aligned} Y_k &= Ad_{L_0}^k Y \\ &= \sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}\sum_{j=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\frac{\partial^k p}{\partial x_1^j \partial x_2^{i-j}\partial x_3^{k-i}} D_1^j D_2^{i-j+1} D_3^{k-i} \mod U_k. \end{aligned}$$

当$k = l$时, 那么

$$Y_l = l! \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{i} b_{ij} D_1^j D_2^{i-j+1} D_3^{l-i} \mod U_l;$$

当$k=l-1$时,

$$
\begin{aligned}
Y_{l-1} &= Ad_{L_0}^{l-1}Y \\
&= (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}((l-i)b_{ij}x_3+(i-j+1)b_{i+1\,j}x_2)D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}(j+1)b_{i+1\,j+1}x_1D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1} \quad \mod U_{l-1}.
\end{aligned}
$$

为证明的需要, 我们根据Y_l中含D_3,D_2,D_1的阶数由大到小顺序排列系数, 可得序列

$$b_{00}\,,\ b_{10}\,,b_{11}\,,b_{20}\,,\cdots,b_{l\,l-1}\,,b_{l\,l}.$$

不妨设$(s\,v)$是序列$b_{00}\,,\ b_{10}\,,b_{11}\,,b_{20}\,,\cdots,b_{l\,l-1}\,,b_{l\,l}$ 中第一个不为零的元素的下标, 显然$s\geq v$. 问题的证明可以分以下几种情况进行:

(1) 当$v\geq 2$时

因为$s\geq v$, 所以$s\geq 2$. 把A_0定义为Y_{l-1}, A_1定义为Y_l, A_{r+1}定义为$[A_r,A_0]$, 那么

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (l-1)!vb_{sv}x_1D_1^{v-1}D_2^{s-v+1}D_3^{l-s} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}+L(D_3^{l-s}D_2^{s-v+1}D_1^{v-1}) \\
&= d_0x_1D_1^{v-1}D_2^{s-v+1}D_3^{l-s} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}+L(D_3^{l-s-1}D_2^{s-v+1}D_1^{v-1}) \\
A_1 &= l!\sum_{j=0}^{s}b_{sj}D_1^jD_2^{s-j+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s}) \\
&= l!b_{sv}D_1^vD_2^{s-v+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s}D_2^{s-v+1}D_1^v) \\
&= d_1D_1^vD_2^{s-v+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s}D_2^{s-v+1}D_1^v) \\
A_2 &= [A_1,A_0] \\
&= d_2D_1^{2v-2}D_2^{2(s-v+1)}D_3^{2(l-s)}+L(D_3^{2(l-s)}D_2^{2(s-v+1)}D_1^{2v-2}) \\
&\ \vdots \\
A_{r+1} &= [A_r,A_0] \\
&= d_{r+1}D_1^{r(v-2)+v}D_2^{(r+1)(s-v+1)}D_3^{(r+1)(l-s)}
\end{aligned}
$$

$$+ \quad L(D_3^{(r+1)(l-s)} D_2^{(r+1)(s-v+1)} D_1^{r(v-2)+v})$$

其中$d_{r+1} = d_r d_0 \neq 0$.

由上式可知A_{r+1}阶数为

$$\begin{aligned} & r(v-2) + v + (r+1)(s-v+1) + (r+1)(l-s) \\ = \; & lr - r + l + 1 \\ = \; & (l-1)r + l + 1, \end{aligned}$$

当$l \geq 2$, 随着r变大, A_{r+1}的阶数也变大, 估计代数E则为无限维估计代数, 显然此与E是有限维估计代数矛盾. 所以$l = 1$, A_{r+1}阶数为2.

(2) 当$v = 1$时, 且$s \geq 2$时

把A_0定义为Y_{l-1}, A_1定义为Y_l, A_{r+1}定义为$[A_r, A_0]$, 那么

$$\begin{aligned} A_0 &= (l-1)! b_{s1} x_1 D_2^s D_3^{l-s} \\ &+ (l-1)!((l-s) b_{s1} x_3 + s b_{s+1\,1} x_2 + 2 b_{s+1\,2} x_1) D_1 D_2^s D_3^{l-s-1} \\ &+ (l-1)!((s-1) b_{s1} x_2 + 2 b_{s2} x_1) D_1 D_2^{s-1} D_3^{l-s} \\ &+ (l-1)! \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{i} B_{ij} D_1^j D_2^{i-j+1} D_3^{l-i-1} + L(D_3^{l-s-1} D_2^s D_1) \\ &= d_0 x_1 D_2^s D_3^{l-s} \\ &+ (l-1)!((l-s) b_{s1} x_3 + s b_{s+1\,1} x_2 + 2 b_{s+1\,2} x_1) D_1 D_2^s D_3^{l-s-1} \\ &+ d_0' x_2 D_1 D_2^{s-1} D_3^{l-s} + (l-1)! 2 b_{s2} x_1 D_1 D_2^{s-1} D_3^{l-s} \\ &+ (l-1)! \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{i} B_{ij} D_1^j D_2^{i-j+1} D_3^{l-i-1} + L(D_3^{l-s-1} D_2^s D_1) \\ A_1 &= l! \sum_{j=0}^{s} b_{sj} D_1^j D_2^{s-j+1} D_3^{l-s} + L(D_3^{l-s}) \\ &= l! b_{s1} D_1 D_2^s D_3^{l-s} + L(D_3^{l-s} D_2^s D_1) \\ &= d_1 D_1 D_2^s D_3^{l-s} + L(D_3^{l-s} D_2^s D_1) \\ A_2 &= [A_1, A_0] = d_2 D_2^{2s} D_3^{2(l-s)} + L(D_3^{2(l-s)} D_2^{2s}) \\ A_3 &= [A_2, A_0] \\ &\geq d_3 D_1 D_2^{3s-2} D_3^{3(l-s)} + L(D_3^{3(l-s)} D_2^{3s-2}) \\ &\vdots \\ A_{2r} &= [A_{2r-1}, A_0] \\ &\geq d_{2r} D_2^{2rs-2r+2} D_3^{2r(l-s)} + L(D_3^{2r(l-s)} D_2^{2rs-2r+2}) \\ A_{2r+1} &= [A_{2r}, A_0] \\ &\geq d_{2r+1} D_1 D_2^{2rs+s-2r} D_3^{(2r+1)(l-s)} + L(D_3^{(2r+1)(l-s)} D_2^{2rs+s-2r} D_1) \end{aligned}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
d_0 &= (l-1)!b_{s1}, \\
d_0' &= (l-1)!(s-1)b_{s1}, \\
d_{2r} &= d_{2r-1}d_0, \\
d_{2r+1} &= d_{2r}d_0'.
\end{aligned}
$$

A_{2r}的阶数为

$$
\begin{aligned}
& 2rs-2r+2+2r(l-s) \\
= & 2rl-2r+2 \\
= & 2r(l-1)+2,
\end{aligned}
$$

A_{2r+1}的阶数为

$$
\begin{aligned}
& 1+2rs+s-2r+(2r+1)(l-s) \\
= & 2rl-2r+l+1 \\
= & 2r(l-1)+l+1,
\end{aligned}
$$

当$l \geq 2$, 随着r变大, A_{2r}与A_{2r+1}的阶数也变大, 显然此与E是有限维估计代数矛盾. 所以$l=1$, A_r的阶数为2.

(3) 当$v=1$, $s=1$时, 且$b_{21}\neq 0$时

把A_0定义为Y_{l-1}, A_1定义为Y_l, A_{r+1}定义为$[A_r, A_0]$, 那么

$$
\begin{aligned}
A_0 &= d_0x_1D_2D_3^{l-1}+(l-1)!((l-1)b_{11}x_3+b_{21}x_2+2b_{22}x_1)D_1D_2D_3^{l-2} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}+L(D_3^{l-2}D_2D_1) \\
A_1 &= l!\sum_{j=0}^{s}b_{sj}D_1^jD_2^{s-j+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s}) \\
&= l!b_{11}D_1D_2D_3^{l-1}+L(D_3^{l-1}D_2D_1) \\
&= d_1D_1D_2D_3^{l-1}+L(D_3^{l-1}D_2D_1) \\
A_2 &= [A_1, A_0] \\
&= d_2D_2^2D_3^{2(l-1)}+L(D_3^{2(l-1)}D_2^2) \\
A_3 &= [A_2, A_0] \\
&\geq d_3D_1D_2^2D_3^{3l-4}+L(D_3^{3l-4}D_2^2D_1) \\
&\vdots \\
A_{2r} &= [A_{2r-1}, A_0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq d_{2r}D_2^{r+1}D_3^{(r+1)(l-1)+(r-1)(l-2)}+L(D_3^{(r+1)(l-1)+(r-1)(l-2)}D_2^{r+1}) \\
A_{2r+1} &= [A_{2r},A_0] \\
&\geq d_{2r+1}D_1D_2^{r+1}D_3^{(r+1)(l-1)+r(l-2)}+L(D_3^{(r+1)(l-1)+r(l-2)}D_2^{r+1}D_1)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
d_0 &= (l-1)!b_{11}, \\
d_0' &= (l-1)!b_{21}, \\
d_{2r} &= d_{2r-1}d_0, \\
d_{2r+1} &= d_{2r}d_0'
\end{aligned}
$$

A_{2r}的阶数为$2rl-2r+2$, A_{2r+1}的阶数为$2rl-2r+l+1$, 当$l\geq 2$, 随着r变大, A_{2r}与A_{2r+1}的阶数也变大, 显然此与E是有限维估计代数矛盾. 所以$l=1$, A_r的阶数为2.

(4) 当$v=1$, $s=1$, $b_{21}=0$

证明方法同上.

(5) 当$v=0$, $s\neq 0$, 则$b_{s0}\neq 0$, A_0定义为Y_{l-1}, A_1定义为Y_l, A_{r+1}定义为$[A_r,A_0]$,那么

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (l-1)!(sb_{s0}x_2+b_{s1}x_1)D_2^sD_3^{l-s} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}+L(D_3^{l-s}D_2^s) \\
&= d_0x_2D_2^sD_3^{l-s}+(l-1)!b_{s1}x_1D_2^sD_3^{l-s} \\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}+L(D_3^{l-s}D_2^s) \\
A_1 &= l!b_{s0}D_2^{s+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s}D_2^{s+1}) \\
&= d_1D_2^{s+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s}D_2^{s+1}) \\
A_2 &= [A_1,A_0] \\
&\geq [d_1D_2^{s+1}D_3^{l-s},d_0x_2D_2^sD_3^{l-s}]+L(D_3^{2(l-s)}D_2^{2s}) \\
&= d_2D_2^{2s}D_3^{2(l-s)}+L(D_3^{2(l-s)}D_2^{2s}) \\
&\vdots \\
A_{r+1} &= [A_r,A_0] \\
&\geq d_{r+1}D_2^{(r+1)s-(r-1)}D_3^{(r+1)(l-s)}+L(D_3^{(r+1)(l-s)}D_2^{(r+1)s-(r-1)})
\end{aligned}
$$

其中$d_{r+1}=d_rd_0$.由上式可知, A_{r+1}阶数为$(r+1)s-(r-1)+(r+1)(l-s)=lr-r+l+1$, 当$l\geq 2$, 随着$r$变大, A_{r+1}的阶数也变大, 显然此与E是有限维估计代数矛盾, 所以$l=1$.

(6) 当$v=0$, $s=0$时

把A_0定义为Y_{l-1}, A_1定义为Y_l, A_{r+1}定义为$[A_r, A_0]$, 如果$b_{10}\neq 0$

$$\begin{aligned}
A_0 &= (l-1)!(lb_{00}x_3+b_{1,\,0}x_2+b_{1,\,1}x_1)D_2D_3^{l-1}\\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}\\
&+ L(D_3^{l-1}D_2)\\
A_1 &= l!\sum_{j=0}^{s}b_{sj}D_1^jD_2^{s-j+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s})\\
&= l!b_{00}D_2D_3^l+L(D_3^lD_2)\\
&= d_1D_2D_3^l+L(D_3^lD_2)\\
A_2 &= [A_1,A_0]\geq[d_1D_2D_3^{l-1}, d_0x_2D_2D_3^l]+L(D_3^{2l-1}D_2)\\
&= d_3D_2D_3^{2l-1}+L(D_3^{2l-1}D_2)\\
&\vdots\\
A_{r+1} &= [A_r,A_0]\geq d_{r+1}D_2D_3^{r(l-1)+l}+L(D_3^{r(l-1)+l}D_2)
\end{aligned}$$

其中$d_0=b_{10}$, $d_{r+1}=d_rd_0$. 由上式可知, A_{r+1}阶数为$lr-r+l+1$, 当$l\geq 2$, 随着r变大, A_{r+1}的阶数也变大, 显然此与E是有限维估计代数矛盾, 所以$l=1$.

如果$b_{10}=0$, 那么

$$\begin{aligned}
A_0 &= Y_{l-1}=(l-1)!(lb_{00}x_3+b_{1,\,1}x_1)D_2D_3^{l-1}\\
&+ (l-1)!\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}D_1^jD_2^{i-j+1}D_3^{l-i-1}\\
&+ L(D_3^{l-1}D_2)\\
A_1 &= Y_l=l!\sum_{j=0}^{s}b_{sj}D_1^jD_2^{s-j+1}D_3^{l-s}+L(D_3^{l-s})\\
&= l!b_{00}D_2D_3^l+L(D_3^lD_2)\\
A_2 &= [A_1,A_0]\\
&\geq d_1d_0D_2^2D_3^{2(l-1)}+L(D_3^{2(l-1)}D_2^2)\\
&\vdots\\
A_{r+1} &= [A_r,A_0]\\
&\geq d_{r+1}D_2^rD_3^{(r+1)(l-1)-(r-2)}+L(D_3^{(r+1)(l-1)-(r-2)}D_2^r)
\end{aligned}$$

其中$d_0=l!b_{00}$, $d_1=l!b_{00}$, $d_{r+1}=d_rd_0$. 由上式可知, A_{r+1}的阶数为$lr-r+l+1$, 当$l\geq 2$, 随着r变大, A_{r+1}的阶数也变大, 显然此与E是有限维估计代数矛盾, 所以$l=1$.

综上, 结论成立.

定理2.2 假设$Y \in E$, 且$Y = p_2(x)D_2 + p_3(x)D_3 \mod U_0$, 其中$\deg p_2 \le 2, \deg p_3 \le 2$, $p_2(x)$和$p_3(x)$的最高次项都含有公因子x_1, 且二次项系数都大于或等于0. 则$p_2(x)$和$p_3(x)$是关于x_1, x_2, x_3的次数至多为1的多项式.

证明 问题的解决, 可以按照$p_2(x)$和$p_3(x)$的次数是否相同, 分别证明.

(1) 当$p_2(x)$和$p_3(x)$次数不同时, 证明过程类似于定理2.1;

(2) 当$p_2(x)$和$p_3(x)$次数相同,

如果$\deg p_2 = \deg p_3 = 2$, 因为

$$
\begin{aligned}
p_2^{(l)} &= \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{i} b_{ij} x_1^j x_2^{i-j} x_3^{l-i}, \\
p_3^{(l)} &= \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{i} c_{ij} x_1^j x_2^{i-j} x_3^{l-i},
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
p_2^{(2)} &= b_{1,1}x_1x_3 + b_{2,1}x_1x_2 + b_{2,2}x_1^2, \\
p_3^{(2)} &= c_{1,1}x_1x_3 + c_{2,1}x_1x_2 + c_{2,2}x_1^2
\end{aligned}
$$

所以可以求出Y_1, Y_2的表达式:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= b_{1,1}x_1D_2D_3 + b_{2,1}x_1D_2^2 + b_{1,1}x_3D_1D_2 + b_{2,1}x_2D_1D_2 + 2b_{2,2}x_1D_1D_2 \\
&+ c_{1,1}x_1D_3^2 + c_{2,1}x_1D_2D_3 + c_{1,1}x_3D_1D_3 + c_{2,1}x_2D_1D_3 + 2c_{2,2}x_2D_1D_3 \\
&= c_{1,1}x_1D_3^2 + (b_{1,1} + c_{2,1})x_1D_2D_3 + b_{2,1}x_1D_2^2 \\
&+ (c_{2,1} + 2c_{2,2})x_2D_1D_3 + b_{2,1}x_2D_1D_2 \\
&+ c_{1,1}x_3D_1D_3 + b_{1,1}x_3D_1D_2 + 2b_{2,2}x_1D_1D_2 \\
Y_2 &= 2(b_{1,1}D_1D_2D_3 + b_{2,1}D_1D_2^2 + b_{2,2}D_1^2D_2) \\
&+ 2(c_{1,1}D_1D_3^2 + c_{2,1}D_1D_2D_3 + c_{2,2}D_1^2D_3) \\
&= 2c_{1,1}D_1D_3^2 + 2(b_{1,1} + c_{2,1})D_1D_2D_3 \\
&+ 2c_{2,2}D_1^2D_3 + 2b_{2,1}D_1D_2^2 + 2b_{2,2}D_1^2D_2
\end{aligned}
$$

问题的解决可以分以下几种情况证明:

(i) 当$c_{1,1} \ne 0$时,

记

$$
\begin{aligned}
A_0 &= Y_1 = c_{1,1}x_1D_3^2 + L(D_3^2), \\
A_1 &= Y_2 = 2c_{1,1}D_1D_3^2 + L(D_3^2)
\end{aligned}
$$

则

$$\begin{aligned}
A_2 &= [A_1, A_0] = 2c_{1,1}^2 D_3^4 + L(D_3^4) \\
A_3 &= [A_2, A_0] \geq [2c_{1,1}^2 D_3^4, c_{1,1}x_3 D_1 D_3] = 8c_{1,1}^3 D_1 D_3^4 + L(D_3^4) \\
A_4 &= [A_3, A_0] \geq [8c_{1,1}^3 D_1 D_3^4, c_{1,1}x_3 D_1 D_3] \geq c_{1,1}^4 D_1^2 D_3^4 \\
&\vdots \\
A_r &= [A_{r-1}, A_0] \geq c_{1,1}^r D_1^{r-2} D_3^4
\end{aligned}$$

随着r的变大, A_r的阶数也在变大, 此与E是有限维估计代数矛盾, 所以$c_{1,1} = 0$.

(ii) 当$c_{1,1} = 0$时

如果$b_{1,1} + c_{2,1} \neq 0$, 那么$b_{1,1}$和$c_{2,1}$至少有一个不为0, 则

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (b_{1,1} + c_{2,1})x_1 D_2 D_3 + b_{2,1}x_1 D_2^2 \\
&+ (c_{2,1} + 2c_{2,2})x_2 D_1 D_3 + b_{2,1}x_2 D_1 D_2 \\
&+ b_{1,1}x_3 D_1 D_2 + 2b_{2,2}x_1 D_1 D_2 \\
Y_2 &= 2(b_{1,1} + c_{2,1}) D_1 D_2 D_3 \\
&+ 2c_{2,2} D_1^2 D_3 + 2b_{2,1} D_1 D_2^2 + 2b_{2,2} D_1^2 D_2
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
A_0 &= Y_1 = (b_{1,1} + c_{2,1})x_1 D_2 D_3 + L(D_3 D_2), \\
A_1 &= Y_2 = 2(b_{1,1} + c_{2,1}) D_1 D_2 D_3 + L(D_3 D_2 D_1)
\end{aligned}$$

不妨先假设$c_{2,1} \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}
A_2 &= [A_1, A_0] \\
&= 2(b_{1,1} + c_{2,1})^2 D_2^2 D_3^2 + L(D_3^2 D_2^2) \\
&\geq c_{2,1}^2 D_2^2 D_3^2 + L(D_3^2 D_2^2) \\
A_3 &= [A_2, A_0] \\
&\geq [2(b_{1,1} + c_{2,1})^2 D_2^2 D_3^2,\ (c_{2,1} + 2c_{2,2})x_2 D_1 D_3] \\
&\geq [c_{2,1}^2 D_2^2 D_3^2,\ (c_{2,1} + 2c_{2,2})x_2 D_1 D_3] \\
&\geq c_{2,1}^3 D_1 D_2 D_3^3 \\
A_4 &= [A_3, A_0] \\
&\geq [c_{2,1}^3 D_1 D_2 D_3^3, c_{2,1}x_1 D_2 D_3] \geq c_{2,1}^4 D_2^2 D_3^4 \\
&\vdots \\
A_{2r} &= [A_{2r-1}, A_0] \geq c_{2,1}^{2r} D_2^2 D_3^{2r} \\
A_{2r+1} &= [A_{2r}, A_0] \geq c_{2,1}^{2r+1} D_1 D_2 D_3^{2r+1}
\end{aligned}$$

随着r的变大, A_{2r}和A_{2r+1}的阶数也在变大, 此与E是有限维估计代数矛盾, 所以$c_{2,1}=0$.

考虑$b_{1,1}\neq 0$时, 那么

$$\begin{aligned} A_0 &= b_{1,1}x_1D_2D_3+b_{2,1}x_1D_2^2+2c_{2,2}x_2D_1D_3 \\ &+ b_{2,1}x_2D_1D_2+b_{1,1}x_3D_1D_2+2b_{2,2}x_1D_1D_2 \\ A_1 &= 2b_{1,1}D_1D_2D_3+2c_{2,2}D_1^2D_3+2b_{2,1}D_1D_2^2+2b_{2,2}D_1^2D_2 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} A_2 &= [A_1,A_0]=2b_{1,1}^2D_2^2D_3^2+L(D_3^2D_2^2) \\ A_3 &= [A_2,A_0]\geq[2(b_{1,1}^2D_2^2D_3^2,\ b_{1,1}x_3D_1D_2]\geq b_{1,1}^3D_1D_2^3D_3 \\ A_4 &= [A_3,A_0]\geq[b_{1,1}^3D_1D_2^3D_3,\ b_{1,1}x_1D_2D_3]\geq b_{1,1}^4D_2^4D_3^2 \\ &\vdots \\ A_{2r} &= [A_{2r-1},A_0]\geq b_{1,1}^{2r}D_2^{2r}D_3^2 \\ A_{2r+1} &= [A_{2r},A_0]\geq b_{1,1}^{2r+1}D_1D_2^{2r+1}D_3 \end{aligned}$$

随着r的变大, A_{2r}和A_{2r+1}的阶数也在变大, 此与E是有限维估计代数矛盾, 所以$b_{1,1}=0$.

依此类推, $c_{2,2}=0, b_{2,1}=0, b_{2,2}=0$. 综上, 结论成立.

2.3.2 零阶微分算子结构

定理2.3 在有限维估计代数E中, 如果$x_2+c_2\in E$, $x_3+c_3\in E$, 且ω_{ij} $(i\neq j)$为一次多项式, 且一次项系数大于或等于0, 常数项不为0. 那么x_1^2+c不属于E.

证明 因为$x_2+c_2\in E$, $x_3+c_3\in E$, $L_0\in E$, 所以

$$\begin{aligned} [L_0,x_2+c_2] &= D_2\in E, \\ [L_0,x_3+c_3] &= D_3\in E, \\ [D_2,x_2+c_2] &= 1\in E, \\ x_2\in E, x_3 &\in E, \\ [D_3,D_2] &= \omega_{23}\in E, \\ K_0 &= [L_0,\frac{1}{2}(x_1^2+c)]-\frac{1}{2}=x_1D_1\in E. \end{aligned}$$

经过计算, 可以得到K_1, K_2, Z_0,

$$K_1 = [L_0,K_0]$$

$$\begin{aligned}
&= D_1^2 - x_1\omega_{21}D_2 - x_1\omega_{31}D_3 - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial\omega_{21}}{\partial x_2} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial\omega_{31}}{\partial x_3} + \frac{1}{2}E_1(\eta) \\
&= D_1^2 - x_1\omega_{21}D_2 - x_1\omega_{31}D_3 + \Theta_1 \\
K_2 &= [K_1, K_0] \\
&= [D_1^2 - x_1\omega_{21}D_2 - x_1\omega_{31}D_3 + \Theta_1, x_1D_1] \\
&= 2D_1^2 + x_1\frac{\partial x_1\omega_{21}}{\partial x_1}D_2 + (x_1\omega_{21})^2 + x_1\frac{\partial x_1\omega_{31}}{\partial x_1}D_3 + (x_1\omega_{31})^2 - x_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1} \\
&= 2D_1^2 + x_1\frac{\partial x_1\omega_{21}}{\partial x_1}D_2 + x_1\frac{\partial x_1\omega_{31}}{\partial x_1}D_3 + \Theta_2 \\
Z_0 &= K_2 - 2K_1 \\
&= (x_1\frac{\partial(x_1\omega_{21})}{\partial x_1} + 2x_1\omega_{21})D_2 + (x_1\frac{\partial(x_1\omega_{31})}{\partial x_1} + 2x_1\omega_{31})D_3 + \Theta_2 - 2\Theta_1
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= -\frac{1}{2}x_1\frac{\partial\omega_{21}}{\partial x_2} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial\omega_{31}}{\partial x_3} + \frac{1}{2}E_1(\eta), \\
\Theta_2 &= (x_1\omega_{21})^2 + (x_1\omega_{31})^2 - x_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

因为$Z_0 \in E$, 根据定理2.2可知, $x_1\frac{\partial(x_1\omega_{21})}{\partial x_1} + 2x_1\omega_{31}$ 和$x_1\frac{\partial(x_1\omega_{31})}{\partial x_1} + 2x_1\omega_{31}$是关于次数为1的多项式. 也即$\frac{\partial(x_1\omega_{21})}{\partial x_1} + 2\omega_{21}$ 和$\frac{\partial(x_1\omega_{31})}{\partial x_1} + 2\omega_{31}$为常数. 不妨设$\omega_{21} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$, 其中$a, b, c, d$为常数且, $d \neq 0$, 则$\frac{\partial(x_1\omega_{21})}{\partial x_1} + 2\omega_{21} = 3ax_1 + 2bx_2 + 2cx_3 + 2d$为常数, 所以$a = b = c = 0$, ω_{21}是不为0的常数. 同理, ω_{31}亦是不为0的常数. 经计算可得

$$\begin{aligned}
H_0 &= [L_0, D_3] \\
&= -\omega_{13}D_1 - \omega_{23}D_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_{13}}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_{23}}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\eta}{\partial x_3} \in E, \\
[H_0, x_1^2 + c] &= -\omega_{13} \times 2x_1 = -2\omega_{13}x_1 \in E.
\end{aligned}$$

因为ω_{31}是不为0的常数, 所以$x_1 \in E$. 由定义可知, 估计代数E为最大秩估计代数. 根据引理2.3可知, $x_1^2 + c$不属于E.

2.4 小结

本章介绍了状态空间维数为 2 中的有限维估计代数分类, 针对状态空间维数为 3 的非线性滤波系统, 研究了与其对应的有限维非最大秩估计代数结构.

先采用比较微分算子大小的方法, 研究了一阶微分算子在估计代数中的结构形式. 然后考虑当 Ω 矩阵的元素是一次多项式时, 给出了有限维估计代数不具有的一些二次多项式. 如果要对状态空间维数为 3 有限维非最大秩估计代数进行完全分类, 下一步工作就要完全解决其它二次多项式在估计代数中的结构形式.

第三章　任意维状态空间中低维估计代数分类

3.1　问题描述

估计代数和滤波系统是相关的, 由于估计代数结构分类的难度, 本章将对任意维状态空间中低维估计代数分类进行研究. 首先, 将要介绍五维以下估计代数结构分类, 然后将研究非线性滤波中六维估计代数的性质.

定义一个正交矩阵T, 则与其对应的正交变换为$\hat{x} = Tx$. 那么滤波系统(1.2)可以转化为

$$\begin{cases} d\hat{x(t)} = Tf(T'\hat{x}(t))dt + Tg(T'\hat{x}(t))dv(t), & \hat{x(0)} = Tx_0, \\ dy(t) = h(T'\hat{x(t)}))dt + dw(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

因为T和g是正交的, 所以Tg也是正交的. 因此与上式滤波系统相对应的估计代数是$\hat{E} = \langle \hat{L_0}, \hat{h_1}, \cdots, \hat{h_m} \rangle_{L.A.}$. 其中,

$$\begin{aligned} \hat{L_0} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_i{}^2} - \sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{x}_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \hat{h_i}^2, \\ \hat{f}(\hat{x}) &= Tf(T'\hat{x}(t)), \\ \hat{h}(\hat{x}) &= h(T'\hat{x(t)})). \end{aligned}$$

文献[4, 24]给出, 如果存在映射:

$$\mu : L_0 \mapsto \hat{L_0},\ \ \mu : h \mapsto h \circ T',$$

那么E和$\hat{E}$是同构的. 因此, 我们可以通过正交变换, 不改变E的结构的前提下, 改变E中元素的具体形式. 同样, 仿射变换$x \mapsto \hat{x} = x + c$, 其中$c$是常向量, 那么$E$和$\hat{E}$也是同构的.

以下引理对于问题的研究起着非常重要的作用:

引理3.1[15]　有限维估计代数中的任何函数都是次数至多为2的多项式.

引理3.2[32]　如果$F(x_1, \cdots, x_n)$是R^n上的次数d大于或等于1的多项式, 记F的d次项为$F_d = \sum_{|i|=d} a_i x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, 其中, $i = (i_1, \cdots, i_n)$. 如果存在n个数$b_1, \cdots, b_n$, 使得$F_d(b_1, \cdots, b_n) < 0$, 则不存在光滑函数$f_1, \cdots, f_n$ 使得下式成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = F.$$

引理3.3[32] 如果$Y=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i D_i\ modU_0$是有限维估计代数中的一个元素，那么$\gamma_i$是关于$x_1,\cdots,x_n$的多项式.

引理3.4[17] 假设$m\in Z$是一个整数，ζ是R^n上的一个光滑函数. $l\le n$, $E_l(\zeta)+m\zeta$是一个关于$x_1,\cdots,x_l$的k次多项式.

(1) 如果$k+m\ge 0$, 那么ζ是一个关于$x_1,\cdots,x_l$的k次多项式.

(2) 如果$m=0$, 那么ζ是一个关于$x_1,\cdots,x_n$的k次多项式和关于$x_{l+1},\cdots,x_n$的多项式的和.

引理3.5[32] 假设$m\in Z$是一个整数，ζ是R^n上的一个光滑函数. $l\le n$, $E_l(\zeta)+m\zeta$是一个关于$x_1,\cdots,x_n$的k次多项式，其中$k\ge 0$.

(1) 如果$m\ge 0$, 那么ζ是一个关于$x_1,\cdots,x_n$的k次多项式.

(2) 如果$k+m<0$, 那么ζ是一个关于$x_1,\cdots,x_l$的$-m$次多项式.

3.2 五维以下估计代数

五维以下估计代数的分类已经在文献[36, 37, 48]被解决. 分类如下:

(1) 如果估计代数是1维的，那么$E=\langle L_0\rangle_{L.A.}$;

(2) 如果估计代数是2维的，那么$E=<L_0,1>_{L.A.}$;

(3) 估计代数是3维的是不存在的;

(4) 如果估计代数是4维的，那么$E=<L_0,x_1,D_1,1>_{L.A.}$;

(5) 如果估计代数是5维的，那么$E=<L_0,x_1,D_1,[L_0,D_1],1>_{L.A.}$.

3.3 六维估计代数

引理3.6[32] 假设m是一个正整数，ζ是R^n上的一个光滑函数. $l\le n$, $E_l(\zeta)+m\zeta=0$, 那么$\zeta=0$.

引理3.7[32] 假设m是一个正整数，ζ是R^n上的一个光滑函数, $l\le n$, 如果

$$E_l(\zeta)-m\zeta=0,$$

那么ζ为关于$x_1,\cdots,x_l$的0次或一次多项式，而且带有系数是关于$x_{l+1},\cdots,x_n$的多项式.

引理3.8[37] 对于任意的$1 \le l \le n$, 如果$\gamma_i, i = 1, \cdots, l$,是关于$x_1, \cdots, x_l$的多项式. 且满足$\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} = 0, 1 \le i, j \le l$, 那么$\gamma_i$具有下列形式:

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{l} c_i^j(x_{l+1}, \cdots, x_n)x_j + d_i(x_{l+1}, \cdots, x_n),$$

其中$c_i^j(x_{l+1}, \cdots, x_n)$和$d_i(x_{l+1}, \cdots, x_n)$是光滑函数且$c_i^j = -c_j^i$.

3.3.1 具有一次多项式的估计代数

对此问题的研究, 用到了矩阵理论中的一些性质:

性质3.1 对于任意一个n阶实对称矩阵A, 都存在一个n阶正交矩阵T, 使得$T'AT = T^{-1}AT$成对角形.

性质3.2 对于任意一个秩为l的n阶对角矩阵A, 都存在一个n阶正交矩阵T, 使得$B = T'AT = T^{-1}AT$成对角形, 且对角矩阵上的元素$B_{ii} \neq 0$, $i = 1, \cdots, l$, 其余元素都为0.

性质3.3 对于两个n阶正交矩阵A, B, 那么AB也是正交矩阵.

定理3.1 如果E是状态空间为n的滤波系统模型(1.2)的有限维估计代数, 且$dimE = 6$, 那么:

(1) n至少为2;

(2) 如果E包含一个二次多项式, 那么存在一个与系统(1.2)等价的滤波系统(1.3), 使得等价系统(1.3)相对应的估计代数$\hat{E}$包含一个形如$\hat{p} = \sum_{i=1}^{l} \hat{x}_i^2$的多项式.

证明 (1) 如果$n = 1$, 那么估计代数满足Mitter猜想, 也就是估计代数最多包含$x_1, 1, L_0, D_1$这四个元素, 估计代数的维数最多为3. 所以$n \neq 1$. n至少为2.

(2) 如果E包含一个二次多项式, 不妨记为$p(x)$, 很显然, 由$L_0, p(x)$生成的李代数$\langle L_0, p(x)\rangle_{L.A.}$是估计代数$E = \langle L_0, h_1, \cdots, h_m\rangle_{L.A.}$的子集. 不妨记$p(x)$的二次项为$p(x)^{(2)}$, 一次项为$p(x)^{(1)}$, 常数为$p(x)^{(0)}$, 也即$p(x) = p(x)^{(2)} + p(x)^{(1)} + p(x)^{(0)}$. 对于二次项$p(x)^{(2)}$, 则存在一个对称矩阵$A$, 使得$p(x)^{(2)} = x'Ax$, 其中$A$的秩为正整数$k$. 根据性质3.1、3.2、3.3可知, 存在正交矩阵T和对角矩阵B使得$A = T'BT$, 其中对角矩阵B中的元素$B_{ii} \neq 0$, $i = 1, \cdots, k$其余元素都为0, 且$B_{11} = \cdots = B_{ll}$, 对于任意$l < s < k$, 有$B_{ss} \neq B_{11}$. 也即$p^{(2)} = x'T'BTx = (Tx)'B(Tx)$. 所以存在一个变换$\hat{x} = Tx + d$, 其中$T$为正交矩阵, d为列向量. 通

过该变换,可以得到一个与原系统等价的滤波系统, 且等价的滤波系统的估计代数$\hat{E}$包含形如下式的多项式:

$$\sum_{i=1}^{k} B_{ii}\hat{x}_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{x}_i + c.$$

记

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{i=1}^{k} B_{ii}\hat{x}_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{x}_i + c, \\ H(i) &= [[\hat{L}_0, H_0], H_{i-1}] \end{aligned}$$

其中$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\hat{D}_i^2 - \hat{\eta})$, 很容易可以算出

$$\begin{aligned} H_1 &= [[\hat{L}_0, H_0], H_0] \\ &= [[\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\hat{D}_i^2 - \hat{\eta}), \sum_{i=1}^{k} B_{ii}\hat{x}_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{x}_i + c], H_0] \\ &= \frac{1}{2}[[\sum_{i=1}^{n}\hat{D}_i^2, \sum_{i=1}^{k} B_{ii}\hat{x}_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{x}_i], H_0] \\ &= \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{k}[\hat{D}_i^2, B_{ii}\hat{x}_i^2] + \sum_{i=k+1}^{n}[\hat{D}_i^2, b_i\hat{x}_i], H_0] \\ &= \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{k}(4B_{ii}\hat{x}_i\hat{D}_i + 2B_{ii}) + 2\sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{D}_i, H_0] \\ &= [2\sum_{i=1}^{k} B_{ii}\hat{x}_i\hat{D}_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{D}_i, \sum_{i=1}^{k} B_{ii}\hat{x}_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i\hat{x}_i] \\ &= 2\sum_{i=1}^{k}[B_{ii}\hat{x}_i\hat{D}_i, B_{ii}\hat{x}_i^2] + \sum_{i=k+1}^{n}[b_i\hat{D}_i, b_i\hat{x}_i] \\ &= 4\sum_{i=1}^{k} B_{ii}^2\hat{x}_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i^2 \\ H_j &= 4^j\sum_{i=1}^{k} B_{ii}^{j+1}\hat{x}_i^2 \end{aligned}$$

又因为$B_{11} = \cdots = B_{ll}$, 对于任意$l < s < k$, 有$B_{ss} \neq B_{11}$, 所以$H_j = 4^j B_{ii}^{j+1}\sum_{i=1}^{l}\hat{x}_i^2 + 4^j\sum_{i=l+1}^{k} B_{ii}^{j+1}\hat{x}_i^2$, 把$4^j\sum_{i=l+1}^{k} B_{ii}^{j+1}\hat{x}_i^2$中$\hat{x}_i^2$系数相等的合在一起, 根据范德蒙德行列式的性质可知: $\hat{E}$包含一个形如$\hat{p} = \sum_{i=1}^{l}\hat{x}_i^2$的多项式.

定理3.2 如果$dimE = 6$, 那么E不能包含三个线性无关的一次多项式.

证明 如果当$dimE=6$, 估计代数E可以包含三个线性无关的一次多项式. 那么不妨假设三个线性无关的一次多项式分别为

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \\ p_2(x) &= b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n \\ p_3(x) &= c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} [L_0,p_1(x)] &= a_1D_1+a_2D_2+\cdots+a_nD_n \\ [L_0,p_2(x)] &= b_1D_1+b_2D_2+\cdots+b_nD_n \\ [L_0,p_3(x)] &= c_1D_1+c_2D_2+\cdots+c_nD_n \end{aligned}$$

记矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

因为$p_1(x),p_2(x),p_3(x)$线性无关, 所以A秩为3. 从而$[L_0,p_1(x)],[L_0,p_2(x)],[L_0,p_3(x)]$也是线性无关的.

所以$L_0,p_1(x),p_2(x),p_3(x),[L_0,p_1(x)],[L_0,p_2(x)],[L_0,p_3(x)]$ 是线性无关的, 且都属于估计代数E, 则估计代数的维数$dimE\geq 7$, 这与已知$dimE=6$矛盾, 假设不成立. 综上, 如果$dimE=6$, 那么E不能包含三个线性无关的一次多项式.

3.3.2 具有二次多项式的估计代数

定理3.3 *如果$dimE=6$, 那么E不能包含一次多项式和一个二次多项式.*

证明 根据定理3.1的结论, 不妨设二次次多项式和一次多项式分别为

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}x_i^2 \\ q(x) &= a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \end{aligned}$$

其中$\sum_1^n a_i^2\neq 0$, 那么

$$\begin{aligned} [L_0,p(x)] &= x_1D_1+x_2D_2+\cdots+x_lD_l+\frac{l}{2} \\ [L_0,q(x)] &= a_1D_1+a_2D_2+\cdots+a_nD_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[[L_0, q(x)], q(x)] &= \sum_1^n a_i^2 \neq 0 \\ [[L_0, q(x)], p(x)] &= a_1 x_1 D_1 + a_2 x_2 D_2 + \cdots + a_n x_n D_n\end{aligned}$$

因为$dimE = 6$, 且

$$L_0,\ p(x),\ q(x),\ [L_0, p(x)],\ [L_0, q(x)],\ [[L_0, q(x)], q(x)],\ [[L_0, q(x)], p(x)]$$

是估计代数E的元素. 所以上面7个元素是线性相关的. 从而可得

$$[L_0, p(x)],\ [[L_0, q(x)], q(x)],\ [[L_0, q(x)], p(x)]$$

是线性相关的, 易得

$$\begin{cases} a_i = a_1 \neq 0, i = 2, \cdots, l \\ a_i = 0, i = l+1, \cdots, n \end{cases}$$

又因为

$$[L_0, [L_0, p(x)]] = \sum_{i=1}^{l} D_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i - \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}E_l(\eta)$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \sum_{j=1}^{l} x_j \omega_{ij}, \\ \beta_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} x_j (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i}).\end{aligned}$$

如果$l \neq n$, 那么显然

$$L_0,\ p(x),\ q(x),\ [L_0, p(x)],\ [L_0, q(x)],\ [[L_0, q(x)],\ q(x)],\ [L_0, [L_0, p(x)]]$$

是线性无关的, 此与$dimE = 6$矛盾. 所以$l = n$.

因为$l = n$, 所以

$$2L_0 - [L_0, [L_0, p(x)]] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i + \frac{1}{2}\beta_n - \frac{1}{2}E_l(\eta) - \eta.$$

其中

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \omega_{ij},$$

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i}).$$

根据引理3.3和α_i的定义可知，$\alpha_i, 1 \le i \le n$是不含有常数项的多项式. 因为$dimE=6$, 所以$2L_0-[L_0,[L_0,p(x)]]$和$[L_0,p(x)]$, $p(x)$, $q(x)$, 1是线性相关的. 即$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i D_i$和$x_1D_1+x_2D_2+\cdots+x_nD_n$线性相关, $\frac{1}{2}\beta_n-\frac{1}{2}E_n(\eta)-\eta$和$p(x)$, $q(x)$, 1线性相关.

如果存在一个$\alpha_i\neq 0$, $1\le i\le n$, 那么存在一个常数$c\neq 0$使得

$$cx_i=\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}x_j\omega_{ij}.$$

因为$\omega_{ii}=0$, 所以

$$cx_i-\sum_{j=1}^{i}x_j\omega_{ij}-\sum_{j=i+1}^{n}x_j\omega_{ij}=0.$$

由上式可得$c=0$, 从而$\alpha_i=0$. 那么$\alpha_i=0$, $i=1,\cdots,n$, 因而$\beta_n=0$, $-(\frac{1}{2}\beta_n-\frac{1}{2}E_n(\eta)-\eta)=\frac{1}{2}E_n(\eta)+\eta$. 又因为$\frac{1}{2}E_n(\eta)+\eta$和$p(x)$, $q(x)$, 1线性相关, 所以存在常数c_1, c_2, c_3, 使得下式成立:

$$E_n(\eta)+2\eta=c_1p(x)+c_2q(x)+c_3.$$

根据引理3.4得η是关于$x_1,\cdots,x_n$的次数至多为2的多项式. 不妨把$p(x)$, $q(x)$当做另外一个系统的$\hat{h}(x)$的元素,此系统$m=2$, f和g不变. 所以估计该系统的估计代数是原系统估计代数的子集. 又因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}f_i^2=-p^2(x)-q^2(x)+\eta$$

根据引理3.2可知, 不存在光滑函数$f_1,\cdots,f_n$, 使得上式成立. 所以$dim\hat{E}\ge 7$, 从而$dimE>6$.

综上, 如果$dimE=6$, 那么E不能包含一次多项式和一个二次多项式.

定理3.4 *滤波系统(1.2)中$h_i(x)$, $i=1,\cdots,m$是关于$x_1,\cdots,x_n$一次多项式, 那么:*

(1) $[h_l(x), [L_0, [L_0, h_k(x)]]]+[h_k(x), [L_0, [L_0, h_l(x)]]]=0$;

(2) $m=1$, $h_1=x_1$, *η是次数至多为2的多项式*, $\Omega=Cx+d$, *且估计代数中不含有两个线性无关的一次多项式, 其中*$\omega_{1i}=0, i=1,\cdots,n$, *则与其系统相对应的有限维估计代数$E$中不含有二次多项式.*

证明 (1) 因为$h_i(x)$, $i=1,\cdots,m$是关于$x_1,\cdots,x_n$的一次多项式. 所以不妨设$h(x)=Ax+b$.其中

$$\begin{aligned}
h(x) &= (h_1(x),\cdots,h_m(x)) \\
x &= (x_1,\cdots,x_n) \\
b &= (b_1,\cdots,b_n) \\
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

经计算可得:

$$\begin{aligned}
[L_0,h_1(x)] &= a_{11}D_1+a_{12}D_2+\cdots+a_{1n}D_n \\
[L_0,h_2(x)] &= a_{21}D_1+a_{22}D_2+\cdots+a_{2n}D_n \\
\cdots \\
[L_0,h_m(x)] &= a_{m1}D_1+a_{m2}D_2+\cdots+a_{mn}D_n \\
[[L_0,h_1(x)],\ h_1(x)] &= a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 \\
[[L_0,h_2(x)],\ h_2(x)] &= a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 \\
\cdots \\
[[L_0,h_m(x)],\ h_m(x)] &= a_{m1}^2+a_{m2}^2+\cdots+a_{mn}^2 \\
[L_0,\ [L_0,h_k(x)]] &= [\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}D_i^2-\eta),\ a_{k1}D_1+a_{k2}D_2+\cdots+a_{kn}D_n] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[D_i^2,\ a_{kj}D_j]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[a_{kj}D_j,\ \eta] \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\omega_{ij}D_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\frac{\partial\eta}{\partial x_j} \\
[h_k(x),\ [L_0,\ [L_0,h_k(x)]]] &= [h_k(x),\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\omega_{ij}D_i] \\
&= [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\omega_{ij}D_i,\ h_k(x)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\omega_{ij}[D_i,\ h_k(x)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{ki}\omega_{ij}
\end{aligned}$$

因为$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$, 所以$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{ki}\omega_{ij}=0$, 也即

$$[h_k(x),\ [L_0,\ [L_0,h_k(x)]]]=0$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
[h_l(x),\ [L_0,\ [L_0, h_k(x)]]] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}a_{ki}\omega_{ij} \\
&= \sum_{i<j}(a_{lj}a_{ki} - a_{li}a_{kj})\omega_{ij} \\
[h_k(x),\ [L_0,\ [L_0, h_l(x)]]] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}a_{li}\omega_{ij} \\
&= \sum_{i<j}(a_{kj}a_{li} - a_{ki}a_{lj})\omega_{ij}
\end{aligned}
$$

所以

$$
[h_l(x),\ [L_0,\ [L_0, h_k(x)]]] + [h_k(x),\ [L_0,\ [L_0, h_l(x)]]] = 0
$$

(2) 由于

$$
\begin{aligned}
& [[L_0, h_s(x)],\ [L_0,\ [L_0, h_k(x)]]] \\
= & [\sum_{l=1}^{n} a_{sl}D_l,\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\omega_{ij}D_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}] \\
= & \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}[D_l,\ -\omega_{ij}D_i] + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}[D_l,\ -\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i}] \\
+ & \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}[D_l,\ \frac{\partial\eta}{\partial x_j}] \\
= & \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}(\omega_{ij}\omega_{li} - \frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_l}D_i) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial x_l\partial x_i} \\
+ & \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_j\partial x_l} \\
= & -\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_l}D_i + \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}\omega_{ij}\omega_{li} \\
- & \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial x_l\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{sl}a_{kj}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_j\partial x_l},
\end{aligned}
$$

又因为$\Omega = Cx+b$, η是次数至多为2的多项式, 所以$[[L_0, h_s(x)],\ [L_0,\ [L_0, h_k(x)]]]$具有如下形式:

$$
\sum_{i=1}^{n}(a_iD_i) + p(x),
$$

其中, 对于任意的i, a_i为常数, $p(x)$是次数至多为2的多项式.

因为$m=1$, 所以$s=k$,

$$
\begin{aligned}
&[[L_0,h_k(x)],\,[L_0,\,[L_0,h_k(x)]]]\\
=\;&[\sum_{l=1}^n a_{kl}D_l,\,-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kj}\omega_{ij}D_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kj}\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_{kj}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}]\\
=\;&\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}[D_l,\,-\omega_{ij}D_i]+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}[D_l,\,-\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i}]\\
+\;&\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}[D_l,\,\frac{\partial\eta}{\partial x_j}]\\
=\;&\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}(\omega_{ij}\omega_{li}-\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_l}D_i)-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial x_l\partial x_i}\\
+\;&\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_j\partial x_l}\\
=\;&-\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_l}D_i+\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}\omega_{ij}\omega_{li}\\
-\;&\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}\frac{\partial^2\omega_{ij}}{\partial x_l\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n\sum_{j=1}^n a_{kl}a_{kj}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_j\partial x_l}
\end{aligned}
$$

因为$h_1=x_1$, η是次数至多为2的多项式, 所以有

$$
\begin{aligned}
&[[L_0,h_k(x)],\,[L_0,\,[L_0,h_k(x)]]]\\
=\;&[[L_0,h_1(x)],\,[L_0,\,[L_0,h_1(x)]]]\\
=\;&[[L_0,x_1],\,[L_0,\,[L_0,x_1]]]\\
=\;&\sum_{i=2}^n\frac{\partial\omega_{i1}}{\partial x_1}D_i+\sum_{i=2}^n\omega_{1i}^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}
\end{aligned}
$$

因为$\omega_{1i}=0, i=1,\cdots,n$, 所以$[[L_0,x_1],\,[L_0,\,[L_0,x_1]]]=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}$.
因为估计代数中不含有两个线性无关的一次多项式, 由(i)可知

$$
\begin{aligned}
[L_0,x_1] &= D_1,\\
[L_0,\,[L_0,x_1]] &= \sum_{i=2}^n\omega_{1i}D_i+q(x)=q(x)=\gamma x_1,\\
[[L_0,x_1],x_1] &= 1,\\
[L_0,[L_0,\,[L_0,x_1]]] &= \gamma D_1,\\
[[L_0,x_1],\,[L_0,\,[L_0,x_1]]] &= \gamma,
\end{aligned}
$$

其中$q(x)$为一次多项式, γ为常数.

因为$[[L_0,x_1],[L_0,[L_0,x_1]]]=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}$, 所以$\gamma=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}$. 因此, 估计代数的一组基是$L_0,x_1,D_1,1$. 估计代数里面不含有二次多项式.

综上, 结论成立.

定理3.5 *如果$dimE=6$, η是次数至多为4的多项式. 且估计代数二次项秩小于n, 那么E不能包含两个线性无关的二次多项式.*

证明 根据定理3.1, 可设两个二次多项式分别为

$$\begin{aligned}h_1&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}x_i^2,\\ h_2&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c\end{aligned}$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$, $\sum_1^n b_i^2\neq 0$, $l<n$. 如果$\sum_{i=1}^{l}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$. 那么估计代数$E$包含一个二次多项式和一个一次多项式. 根据定理3.3, 结论显然成立.

如果$\sum_{i=1}^{l}x_i^2\neq d\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, 其中$d$为常数. 则

$$\begin{aligned}Y_1&=[L_0,h_1]=\sum_{i=1}^{l}x_iD_i+\frac{l}{2},\\ Y_2&=[L_0,h_2]\\ &=\frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n}D_k^2,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i]\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[D_k^2,\,x_ix_j]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_i[D_k^2,\,x_i]\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(2\frac{\partial(x_ix_j)}{\partial x_k}D_k+\frac{\partial^2(x_ix_j)}{\partial x_k^2})+\sum_{i=1}^{n}b_iD_i\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial(x_ix_j)}{\partial x_k}D_k+\sum_{i=1}^{n}b_iD_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k}D_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_k}D_k+\sum_{i=1}^{n}b_iD_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_iD_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_jD_k+\sum_{i=1}^{n}b_iD_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\end{aligned}$$

如果L_0,h_1,h_2,Y_1,Y_2是线性相关的. 那么$\sum_{i=1}^{l}x_iD_i$, $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_iD_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_jD_k$线性相关. 易得

$$a_{ii}=d_1,1\leq i\leq l;$$

$$
\begin{aligned}
a_{ii} &= 0, l \le i \le n; \\
a_{ij} &= 0, i \neq j;
\end{aligned}
$$

显然与$\sum_{i=1}^{l} x_i^2 \neq d \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$矛盾. 所以$L_0, h_1, h_2, Y_1, Y_2$是线性无关的.

因为

$$
\begin{aligned}
[L_0, Y_1] &= \sum_{i=1}^{l} D_i^2 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{l} x_i \omega_{ji} D_j \\
&- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{l} x_i \frac{\partial \omega_{ji}}{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} x_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{l} D_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i - \frac{1}{2} \beta_n + \frac{1}{2} E_l(\eta),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &= \sum_{j=1}^{l} x_j \omega_{ij}, \\
\beta_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} x_j (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i}).
\end{aligned}
$$

因为$l \le n-1$, 所以$L_0, h_1, h_2, Y_1, Y_2, [L_0, Y_1]$线性无关.

记

$$
\begin{aligned}
H &= [[L_0, Y_1], Y_1] \\
&= 2 \sum_{i=1}^{l} D_i^2 + \sum_{i=1}^{n} E_l(\alpha_i) D_i - 3 \sum_{i=1}^{l} \alpha_i D_i - \beta_l \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \frac{1}{2} E_l(\beta_n) - \frac{1}{2} E_l(E_l(\eta)),
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
\beta_l &= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} x_j (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i}) \\
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{l} x_j x_k \omega_{ij} \omega_{ik}.
\end{aligned}
$$

则有

$$
\Delta = H - 2[L_0, Y_1]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{l}(E_l(\alpha_i)-\alpha_i)D_i + \sum_{i=l+1}^{n}(E_l(\alpha_i)+2\alpha_i)D_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \beta_l + \frac{1}{2}(E_l(\beta_n)+2\beta_n) - \frac{1}{2}E_l((E_l(\eta))+2\eta).
\end{aligned}
$$

如果$L_0, h_1, h_2, Y_1, Y_2, [L_0, Y_1], \Delta$线性线性相关. 则存在常数$\lambda$, γ, λ_1, γ_2, 使得$\Delta = \lambda Y_1 + \gamma Y_2 + \lambda_1 h_1 + \gamma_2 h_2$. 从而可得:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l}(E_l(\alpha_i)-\alpha_i)D_i + \sum_{i=l+1}^{n}(E_l(\alpha_i)+2\alpha_i)D_i \\
&= \lambda\sum_{i=1}^{l}x_iD_i + \gamma(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_iD_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_jD_k) \\
&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \beta_l + \frac{1}{2}(E_l(\beta_n)+2\beta_n) - \frac{1}{2}E_l((E_l(\eta))+2\eta) \\
&= \frac{l\lambda}{2} + \frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{n}a_{ii} + \frac{\lambda_1}{2}\sum_{i=1}^{l}x_i^2 + \gamma_2(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n}b_ix_i + c)
\end{aligned}
$$

对于$1 \le i \le l$, 有$E_l(\alpha_i) - \alpha_i = \lambda x_i + \gamma\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})x_k$;

对于$l+1 \le i \le n$, 有$E_l(\alpha_i) + 2\alpha_i = \gamma\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})x_k$.

如果$\gamma = 0$, 那么

$$
\begin{aligned}
E_l(\alpha_i) + 2\alpha_i &= 0, \quad i = l+1, \cdots, n; \\
E_l(\alpha_i) - \alpha_i &= \lambda x_i, \; i = 1, \cdots, l.
\end{aligned}
$$

考虑$i = 1$, 则$E_l(\alpha_1) - \alpha_1 = \lambda x_1$, 即

$$E_l(\sum_{j=1}^{l}x_1\omega_{1j}) - \sum_{j=1}^{l}x_1\omega_{1j} = \lambda x_1.$$

由上可知:

$$\sum_{j=1}^{l}x_jE_l(\omega_{1j}) = \lambda x_1.$$

因为$x_1E_l(\omega_{11}) = 0$, 所以,

$$\sum_{j=2}^{l}x_jE_l(\omega_{1j}) = \lambda x_1.$$

由上式得$\lambda=0$. 那么,

$$E_l(\alpha_i)-\alpha_i=0,\quad i=1,\cdots,l.$$

由引理3.4得:

对于$i=l+1,\cdots,n$, $\alpha_i=\alpha_i(x_{l+1},\cdots,x_n)$是不含有$x_1,\cdots,x_l$的多项式;

对于$i=1,\cdots,l$, $\alpha_i=\sum_{i=1}^{l}x_i\psi_i(x_{l+1},\cdots,x_n)$.

把$\alpha_i=\alpha_i(x_{l+1},\cdots,x_n)$代入$E_l(\alpha_i)+2\alpha_i=0$得:

$$\alpha_i=0, i=l+1,\cdots,n.$$

因此,

$$\begin{aligned}\beta_n &= \beta_l,\\ E_l(\beta_n) &= E_l(\beta_l)\\ &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}x_i\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x_k x_i}=0.\end{aligned}$$

所以,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2-\frac{1}{2}E_l((E_l(\eta))+2\eta)=\frac{l\lambda}{2}+\frac{\lambda_1}{2}\sum_{i=1}^{l}x_i^2+\gamma_2(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c).$$

根据定理3.4, 可知η是关于$x_1,\cdots,x_l$的二次多项式. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}f_i^2=-\sum_{i=1}^{m}h_i^2+\eta.$$

所以根据定理3.2知, 不存在光滑函数$f_1,\cdots,f_n$使得上式成立. 显然$dimE>6$, 与已知矛盾. 原命题成立.

如果$\gamma\neq0$, 对于任意i, $l+1\leq i\leq n$, 都有$a_{ik}+a_{ki}=0$, 那么根据引理3.5知道: α_i是常数.

如果$\gamma\neq0$, 对于$l+1\leq i\leq n$, 存在一个$1\leq k\leq n$, 使得$a_{ik}+a_{ki}\neq0$, 那么根据引理3.5知道: α_i是关于x_1, $\cdots$, x_n的一次多项式.

对于$1\leq i\leq l$, 根据引理3.4, 可得: α_i是关于$x_1,\cdots,x_l$的1 次多项式, 且系数是含有$x_{l+1},\cdots,x_n$的多项式. 所以$E_l((E_l(\eta))+2\eta)$是关于$x_1,\cdots,x_l$的2 次多项式. 根据引理3.4, 2η是关于$x_1,\cdots,x_l$的2 次多项式和关于$x_{l+1},\cdots$, x_n的多项式的和.

因为η是次数至多为4的多项式, 所以存在n个数$b_1, \cdots, b_n$, 使得$F_4(b_1, \cdots, b_n) < 0$, 根据引理3.2, 则不存在光滑函数$f_1, \cdots, f_n$, 使得下式成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = -\sum_{i=1}^{m} h_i^2 + \eta.$$

所以$L_0, h_1, h_2, Y_1, Y_2, [L_0, Y_1], \Delta$线性线性无关.

定理3.6 *如果$dimE < 7$, 且估计代数E的二次秩l小于n, 存在$i > l, j > l, k > l$ 使得$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_j \partial x_k} \neq 0$, 其中$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} x_j \omega_{ij}$. 那么$E$中的多项式都是次数至多为1的多项式.*

证明 因为估计代数E的二次秩l小于n, 根据定理3.1, 不妨设:

$$h_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{l} x_i^2, \quad l \leq n-1.$$

那么

$$\begin{aligned}
[L_0, h_1] &= \sum_{i=1}^{l} x_i D_i + \frac{l}{2}, \\
[L_0, [L_0, h_1]] &= \sum_{i=1}^{l} D_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i - \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2} E_l(\eta)
\end{aligned}$$

其中$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} x_j (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i})$. 显然$L_0, h_1, [L_0, h_1], [L_0, [L_0, h_1]]$是线性无关的.

$$\begin{aligned}
[[L_0, [L_0, h_1]], [L_0, h_1]] &= 2\sum_{i=1}^{l} D_i^2 + \sum_{i=1}^{n} E_l(\alpha_i) D_i - 3\sum_{i=1}^{l} \alpha_i D_i - \beta_l \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \frac{1}{2} E_l(\beta_n) - \frac{1}{2} E_l(E_l(\eta)),
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\beta_l &= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} x_j (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_i}), \\
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{l} x_j x_k \omega_{ij} \omega_{ik}.
\end{aligned}$$

则

$$[[L_0, [L_0, h_1]], [L_0, h_1]] - 2[L_0, [L_0, h_1]]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{l}(E_l(\alpha_i)-\alpha_i)D_i+\sum_{i=l+1}^{n}(E_l(\alpha_i)+2\alpha_i)D_i \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2-\beta_l+\frac{1}{2}(E_l(\beta_n)+2\beta_n)-\frac{1}{2}E_l((E_l(\eta))+2\eta). \end{aligned}$$

不妨记$\Delta=[[L_0,[L_0,h_1]],[L_0,h_1]]-2[L_0,[L_0,h_1]]$, 如果$L_0,h_1,[L_0,h_1],[L_0,[L_0,h_1]]$, Δ线性相关, 则存在常数λ, γ, 使得$\Delta=\lambda[L_0,h_1]+\gamma h_1(x)$. 从而可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{l}(E_l(\alpha_i)-\alpha_i)D_i+\sum_{i=l+1}^{n}(E_l(\alpha_i)+2\alpha_i)D_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{l}x_iD_i \\ & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2-\beta_l+\frac{1}{2}(E_l(\beta_n)+2\beta_n)-\frac{1}{2}E_l((E_l(\eta))+2\eta) \\ &= \frac{\lambda l}{2}+\frac{\gamma}{2}\sum_{1}^{l}x_i^2 \end{aligned}$$

由上面两个公式可知:

$$\begin{aligned} E_l(\alpha_i)+2\alpha_i &= 0, \quad i=l+1,\cdots,n; \\ E_l(\alpha_i)-\alpha_i &= \lambda x_i,\ i=1,\cdots,l. \end{aligned}$$

考虑$i=1$, 则$E_l(\alpha_1)-\alpha_1=\lambda x_1$, 也即

$$E_l(\sum_{j=1}^{l}x_1\omega_{1j})-\sum_{j=1}^{l}x_1\omega_{1j}=\lambda x_1.$$

由上可知:

$$\sum_{j=1}^{l}x_jE_l(\omega_{1j})=\lambda x_1.$$

因为$x_1E_l(\omega_{11})=0$, 所以,

$$\sum_{j=2}^{l}x_jE_l(\omega_{1j})=\lambda x_1.$$

由上式得$\lambda=0$. 那么,

$$E_l(\alpha_i)-\alpha_i=0,\quad i=1,\cdots,l.$$

由引理3.4得:

对于$i=l+1,\cdots,n$, $\alpha_i=\alpha_i(x_{l+1},\cdots,x_n)$是不含有$x_1,\cdots,x_l$的多项式;

对于$i=1,\cdots,l$, $\alpha_i=\sum_{i=1}^{l}x_i\psi_i(x_{l+1},\cdots,x_n)$.

把$\alpha_i=\alpha_i(x_{l+1},\cdots,x_n)$代入$E_l(\alpha_i)+2\alpha_i=0$得:

$$\alpha_i=0, i=l+1,\cdots,n.$$

因此,

$$\begin{aligned}\beta_n &= \beta_l,\\ E_l(\beta_n) &= E_l(\beta_l)\\ &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}x_i\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x_k x_i}=0.\end{aligned}$$

所以,

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2-\frac{1}{2}E_l((E_l(\eta))+2\eta)=\frac{\gamma}{2}\sum_{1}^{l}x_i^2.$$

根据定理3.4, 可知η是关于$x_1,\cdots,x_l$的二次多项式. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}f_i^2=-\sum_{i=1}^{m}h_i^2+\eta.$$

所以根据定理3.2知, 不存在光滑函数$f_1,\cdots,f_n$使得上式成立.

因此$L_0, h_1, [L_0,h_1], [L_0,[L_0,h_1]], \Delta$也是线性无关的.

考虑

$$\begin{aligned}&[L_0,\ [L_0,\ [L_0,\ h_1]]]\\ =\ & [\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}D_i^2-\eta),\sum_{i=1}^{l}D_i^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iD_i-\frac{1}{2}\beta_n+\frac{1}{2}E_l(\eta)]\\ =\ & \frac{1}{2}[(\sum_{i=1}^{n}D_i^2-\eta),\sum_{i=1}^{l}D_i^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iD_i-\frac{1}{2}\beta_n+\frac{1}{2}E_l(\eta)]\\ =\ & \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}D_i^2,\sum_{i=1}^{l}D_i^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iD_i]\\ =\ & \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}D_i^2,\sum_{i=1}^{l}D_i^2]-\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}D_i^2,\sum_{i=1}^{n}\alpha_iD_i]\\ =\ & \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}D_i^2,\sum_{j=1}^{l}D_j^2]-\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}D_i^2,\sum_{j=1}^{n}\alpha_jD_j]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(4\omega_{ji}D_jD_i + 2\frac{\partial\omega_{ji}}{\partial x_j}D_i + 2\frac{\partial\omega_{ji}}{\partial x_i}D_j + \frac{\partial^2\omega_{ji}}{\partial x_i\partial x_j} + 2\omega_{ji}^2)\\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}D_iD_j - 2\alpha_j\omega_{ij}D_i + \frac{\partial^2\alpha_j}{\partial x_i^2}D_j - \alpha_j\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_i})\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\omega_{ji}D_jD_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}D_jD_i \ modU_1
\end{aligned}
$$

不妨记$\Delta_1 = [L_0,\ [L_0,\ [L_0,\ h_1]]]$, 由[37]对5维估计代数结构研究可得得:

$$L_0, h_1, [L_0, h_1], [L_0, [L_0, h_1]], \Delta, \Delta_1$$

也是线性无关的.

考虑

$$
\begin{aligned}
&[L_0, \Delta_1]\\
&= [\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}D_i^2 - \eta), 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\omega_{ji}D_jD_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}D_jD_i]\\
&= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n}D_k^2, 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\omega_{ji}D_jD_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}D_jD_i]\\
&= [\sum_{k=1}^{n}D_k^2, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\omega_{ji}D_jD_i] - \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n}D_k^2, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}D_jD_i]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}[D_k^2, \omega_{ji}D_jD_i] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[D_k^2, \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}D_jD_i]\\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial\omega_{ji}}{\partial x_k}D_kD_jD_i - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}}{\partial x_k}D_kD_jD_i \ modU_2
\end{aligned}
$$

如果$L_0, h_1, [L_0, h_1], [L_0, [L_0, h_1]], \Delta, \Delta_1, [L_0, \Delta_1]$ 是线性相关的.则存在$\lambda_i, i = 1, \cdots, 6$ 使得

$$[L_0, \Delta_1] = \lambda_1L_0 + \lambda_2h_1 + \lambda_3[L_0, h_1] + \lambda_4[L_0, [L_0, h_1]] + \lambda_5\Delta + \lambda_6\Delta_1,$$

所以

$$2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial\omega_{ji}}{\partial x_k}D_kD_jD_i - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}}{\partial x_k}D_kD_jD_i = 0.$$

因为存在$i > l, j > l, k > l$ 使得$\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial x_j\partial x_k} \neq 0$. 所以与上式矛盾. 因此$L_0, h_1, [L_0, h_1], [L_0, [L_0, h_1]], \Delta, \Delta_1, [L_0, \Delta_1]$ 是线性无关的. 所以$dim(E) \geq 7$, 显然与已知矛盾. 也即原命题成立.

3.4 小结

本章对非线性滤波的低维估计代数进行研究. 介绍了五维以下的估计代数分类, 然后研究了六维估计代数中一次多项式和二次多项式之间关系. 并在估计代数的二次秩小于状态空间维数的前提下, 给出了带有某些条件的六维估计代数不含有某些二次多项式的形式. 然而如果要对六维估计代数完全分类, 我们必须要研究当估计代数二次秩等于状态空间维数时, 估计代数中的二次多项式所具有的性质. 这也是下一步工作所要研究的内容.

第四章　总结与展望

自从Kalman-Bucy滤波产生以来, 滤波器设计的研究有了巨大的发展. 但是它的局限性使得对非线性滤波理论的研究成为了控制科学中受人关注的课题. 随着估计代数概念的提出, 这个概念使估计代数理论成为了非线性滤波器设计的一个重要工具. 本文综述了非线性滤波中估计代数的课题意义与发展现状. 对非线性滤波中的非最大秩估计代数进行了研究, 给出了一些新的结论.

一、本文的主要结果及创新点

1. 研究了低维状态空间中有限维估计代数分类. 针对状态空间维数为 3 的非线性滤波系统, 研究了与其对应的非最大秩有限维估计代数结构. 给出了有限维估计代数中分别带有一个微分算子和两个微分算子时, 微分算子的系数所具有的多项式形式. 在某些条件下, 最后给出了有限维估计代数不具有的一些二次多项式形式. 主要创新点: 状态空间维数为 3 的非线性滤波系统中非最大秩有限维估计代数分类还是先前未被研究问题, 本文采用比较微分算子大小的方法对估计代数进行研究.

2. 研究了低维估计代数. 针对六维估计代数进行研究, 得到如下结论: 六维估计代数所在滤波系统状态空间维数不能小于或等于 2. 六维估计代数不含有三个线性无关的一次多项式、不同时含有一个一次多项式和一个二次多项式. 在估计代数的二次秩小于状态空间维数时, 六维估计代数不含有两个线性无关的二次多项式. 最后证明了带有某些条件的六维估计代数不含有某些二次多项式的形式. 主要创新点: 六维估计代数分类还是先前未被研究的问题, 本文对六维估计代数的结构进行了深入探索, 并得到了以上的结论.

二、进一步工作展望

本文的研究结构只是阶段性的, 还有许多问题需要完善. 由于非线性滤波固有的复杂性, 我们需要先解决一些比较特殊的估计代数. 在完成本论文的过程中, 作者意识到今后有待进一步研究的问题如下:

1. 当 Ω 矩阵中的元素是 n 次多项式时, 状态空间为 3 的有限维估计代数结构分类.

2. 当估计代数的二次秩等于状态空间维数时, 六维估计代数结构分类.

3. 高维估计代数结构分类.

总之, 对有限维估计代数的研究确实取得了一些重要的结论, 然后本文结论对于完全解决非线性滤波中有限维数估计代数结构问题, 仍存在非常大的难度! 这些都需要进一步的研究.

参考文献

[1] R. W. Brockett and J. M. C. Clark. The geometry of the conditional density functions[M]. In Analysis and Optimization of Stochastic Systems, eds. O.L.R. Jacobs et al., New York: Academic Press, 1980: 299-309.

[2] S. K. Mitter. Geometric theory of nonlinear filtering[M]. Paris: Centre National de la Recherche Scientific, 1983: 37-60.

[3] M. Hazewinkel, S. I. Marcus and H. J. Sussmann. Nonexistence of finite dimensional filetrs for conditional statistics of the cubic sensor problem[J]. Systems and Control Letters, 1983, Vol. 3(6): 331-340.

[4] S. I. Marcus. Algebraic and geometric methods in nonlinear filtering[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1984, Vol. 22(6): 817-844.

[5] M. Hazewinkel. Lectures on linear and nonlinear filtering[M]. Analysisand Estimation of Stochastic Mechanical Systems, eds. W. Schiehlen and W. Wedig. New York: Springer Verlag, 1988: 103-135.

[6] R. J. Elliott and R. Glowinski. Approximations to solutions of the zakai filtering equation[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1989, Vol. 7(2): 145-168.

[7] S. S. T. Yau. Finite dimensional filters with nonlinear drift I: a class of filters including both Kalman-Bucy filters and Benes filters[J]. Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control, 1994, Vol. 4(2): 181-203.

[8] L. F. Tam, W. W. Wong and S. S. T. Yau. On a necessary and sufficient condition for finite dimensionality of estimation algebras[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1990, Vol. 28(1): 173-185.

[9] A. Bensoussan, R. Glowinski and A. Rascanu. Approximation of the Zakai equation by splitting up method[M]. In Stochastic Systems and Optimization(warsaw, 1988) (J. Zabczyk, ed.), Springer Verlag, 1989: 255-265.

[10] S. S. T. Yau, L. F. Tam and W. S. Wong. Recent results on finite dimensional exact estimation algebra[C]. Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control at Tampa, Florida, 1989: 2574-2575.

[11] S. S. T. Yau. Recent results on nonlinear filtering: new class of finite dimensional filters[C]. Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, 1990: 231-233.

[12] P. Florchinger and F. Legland. Time-discretization of the Zakai equation for diffusion processes observed in correlated noise[M]. Analysis and Optimization of Systems (A. Bensoussan and J. J. Lions, eds.), Springer Verlag, 144(4), 1990: 228-237.

[13] S. S. T. Yau and W. L. Chiou. Recent results on classification of finite dimensional estimation algebras: dimension of state space 2[C]. Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, 1991: 2758-2760.

[14] V. E. Benes. Exact finite dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift[J]. Stochastics, 1981, Vol.5(1): 65-92.

[15] D. Ocone. Topics in nonlinear filtering theory[D]. Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1980.

[16] W. S. Wong. New classes of finite dimensional nonlinear filters[J]. Systems and Control Letters, 1983, Vol. 3(3): 155-164.

[17] W. S. Wong. On a new class of finite dimensional estimation algebras[J]. Systems and Control Letters, 1987, Vol. 9(1): 79-83.

[18] R. W. Brockett. Nonlinear control theory and differential geometry[C]. Proceedings of the International Congress of Methematics, August 16-24, Warsaw, 1983: 1357-1368.

[19] J. Levine. Finite dimensional realizations of stochastic p.d.e.'s and application to filtering [J]. Stochastics, 1991, Vol.37(1): 75-103.

[20] D. Ocone. Finite dimensional estimation algebras in nonlinear filtering[M]. Stochastic Systems: The Mathematics of Filtering and Identification and

Applications, M. Hazewinkel and J. S. Willems, eds., Reidel, Dordrecht, 1981: 629-636.

[21] W. S. Wong. Theorems on the structure of finite dimensional estimation algebras[J]. Systems and Control Letters, 1987, Vol. 9(2): 117-124.

[22] R. T. Dong, L.F. Tam, W.S. Wong and S.S.-T. Yau. Structure and classification theorems of finite dimensional exact estimation algebras[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1991, Vol. 29(4): 866-877.

[23] S. S. T. Yau and G. Q. Hu. Classification of finite dimensional filters with nonlinear drift XIV: classification of finite dimensional estimation algebras of maximal rank with arbitrary state apace dimension and Mitter conjecture[J]. International Journal of Control, 2005, Vol. 78(10): 689-705.

[24] W. L. Chiou and S. S. T. Yau. Finite-Dimensional Filters with Nonlinear Drift II: Brockett's Problem on Classification of Finite-Dimensional Estimation Algebras[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1994, Vol. 32(1): 297-310.

[25] J. Chen, S. S. T. Yau, C. W. Leung. Finite dimensional filters with nonlinear drift IV: classification of finite dimensional estimation algebras of maximal rank with state space dimension 3[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1996, Vol. 34(1): 179-198.

[26] J. Chen, S. S. T. Yau, C. W. Leung. Finite dimensional filters with nonlinear drift VIII: classification of finite dimensional estimation algebras of maximal rank with state space dimension 4[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1997, Vol. 35(4): 1132-1141.

[27] J. Chen, S. S. T. Yau. Finite-dimensional filters with nonlinear drift VI: linear structure of Ω[J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems , 1996, Vol. 9(4): 370-385.

[28] J. Chen, S. S. T. Yau. Finite-dimensional filters with nonlinear drift VIII: Mitter conjecture and structure of Ω[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1997, Vol. 35(4): 1116-1131.

[29] G. Q. Hu, S.S. T. Yau, W. L. Chiou. Finite-dimensional filters with nonlinear drift XIII: classification of finite-dimensional estimation algebras of maximal rank with state space dimension five[J]. Asian Journal of Mathematics, 2000, Vol. 4(4): 905-932.

[30] X. Wu, S. S. T. Yau, G. Q. Hu. Finite dimensional filters with nonlinear drift XII: linear and constant structure of Ω [M]. in: B. Pasik-Duncan(Eds.), Stochastic Theory and Control, Berlin: Springer, 2002: 507-518.

[31] S. S. T. Yau, H. Wu, W. S. Wong. Hessian matrix non-decomposition theorem[J]. Mathematical Research Letters, 1999, Vol. 6(6): 1-11.

[32] Xi Wu. Topics in the nonlinear filtering theory[D]. Ph.D. Thesis, University of Illinois at Chicago, 2000.

[33] S. S.-T. Yau. Complete classification of finite-dimensional estimation algebras of maximal rank[J]. International Journal of Control, 2003, Vol. 76(7): 657-677.

[34] Stephen S. T. Yau, Xi Wu, Lixing Jia and Amid Rasoulian. Classification of all finite-dimensional nonlinear filters from Lie algebraic point of view: State dimension 2[C]. Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007.

[35] A. Rasoulian and S. S. T. Yau. Finite Dimensional Filters with Nonlinear Drift IX: Construction of Finite Dimensional Estimation Algebras of Nonmaximal Rank[J]. Systems and Control Letters, 1997, Vol. 30(2): 109-118.

[36] Wen-Lin Chiou, Woei-Ren Chiueh and Stephen S.-T. Yau. Structure theorem for five-dimensional estimation algebras[J]. Systems and Control Letters, 2006, Vol. 55(4): 275-281.

[37] Stephen S. T. Yau, Wen-Lin Chiou and Woei-Ren Chiueh. Mitter conjecture for low dimensional estimation algebras in nonlinear filtering[J]. International Journal of Control, 2008, Vol. 81(11): 1793-1805.

[38] S. S. T. Yau and Chi-Wah Leung. Recent results on classification of finite dimensional maximal rank estimation algebras with state space dimension

3[C]. Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, 1992: 2247-2250.

[39] S. S. T. Yau. Classification of finite dimensional filters from lie algebraic point of view [J]. Transaction of the Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing, 1992: 459-466.

[40] R. Mikulevicious and B. L. Rozovskii. Separation of observations and parameters in nonlinear filtering [C]. Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonia, Texas, 1993: 1564-1559.

[41] S. S. T. Yau and S. T. Yau. New direct method for kalman-bucy filtering system with arbitrary initial condition [C]. Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, 1994: 1221-1225.

[42] Jie Chen, Stephen S. T. Yau and Chi-Wah Leung. Explicit construction of finite-dimensional nonlinear filters with state space dimension 3 [C]. Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision Control New Orleans, LA-December 1995.

[43] W. L. Chiou. A note on estimation algebras on nonlinear filtering theory [J]. Systems and Control Letters, 1996, Vol. 28(1): 55-63.

[44] S. S. T. Yau and S. T. Yau. Explicit solution to a kolmogorov equation[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1996, Vol. 34(3): 231-266.

[45] S. T. Yau and G. Q. Hu. Direct method without riccati equation for kalman-bucy filtering system with arbitrary initial conditions[C]. IFAC the 13th World Congress, 1996: 469-474.

[46] S.S.-T. Yau and S.-T. Yau. Finite dimensional filters with nonlinear drift III: Duncan-Mortensen-Zakai equation with arbitrary initial condition for linear filtering system and the benes filtering system [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1997, Vol. 33(4): 1277-1294, 1997.

[47] W. S. Wong and S. S. T. Yau. The estimation algebra of nonlinear filtering systems [M]. Mathematical Control Theory, Special Volume Dedicated to the 60th Birthday of Brockett, Springer Verlag, 1998: 33-65.

[48] S. S. T. Yau and A. Rasoulian. Classification of four-dimensional estimation algebras [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, Vol. 44(12): 2312-2318.

[49] S. T. Yau and S. S. T. Yau. Real time solution of nonlinear filtering problem without memory I [J]. Mathematical Research Letter, 2000, Vol. 7(6): 671-693.

[50] S. S. T. Yau and G. Q. Hu. Finite dimensional filters with nonlinear drift x: explicit solution of dmz equation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, Vol. 46(1): 142-148.

[51] Stephen S. T. Yau and Lixing Jia . Filtering problem with nonlinear observations and drift terms equal to gradient vector field plus affine vector field [C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and control, and the European Control Conference 2005. Seville, Spain, December 2005: 12-15.

攻读硕士学位期间撰写的论文和参加的科研项目

论文撰写

对一类非线性滤波中状态空间维数为3的有限维估计代数结构的研究

科研项目

1. 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-07-0513), 2007.1–2009.12.
2. 国家自然科学基金(60674036), 2007.1–2009.12.

致　谢

值此论文完成之际，我要感谢我的导师、同学、朋友及家人．由于他们的关心和帮助，才使得我能克服困难，完成学业．

首先，我要感谢我的导师——刘允刚教授．多年来，导师无论在生活上，还是在学业上，都对我亲切关怀和精心指导．本文从资料收集、论文选题、问题分析以及撰写工作上，无不凝聚着导师的汗水和心血．在此过程中，深深地感受到导师严谨的治学态度，渊博的知识，深邃敏锐的思维以及无私奉献的精神，这些让我终身难忘，是我永远学习的榜样．在尊敬的导师身上，我不仅学到扎实的专业知识，更学到了做人的道理，这些让我终身受益．在此，学生谨向敬爱的导师致以崇高的敬意和最衷心的感谢!

其次，我要感谢钟麦英教授．感谢她对我学业的帮助和关心．还要感谢丁强师兄、董全超师兄、赵辉宏师兄、李岳炀师兄、刘云霞师姐、袁帅师姐、霍泽云师姐、张兆杰同学对我学习和生活上的照顾!

感谢山东大学控制科学与工程学院给我提供了这样一个学习的机会．在课题研究过程中，与本实验室同学进行了广泛的讨论，在学习和生活中他们给了我很多关怀和帮助，从他们身上我学会很多东西，在此对闫雪华师姐、张健师兄、尚芳师姐、李健师兄、何涛师兄、马诺诺同学、王兵同学、武腾腾同学、满永超师弟、王飞飞师妹、陈卫彬师弟表示真诚的感谢!

感谢所有给予我支持和帮助的朋友们! 谢谢你们!

感谢我的父母，姐姐和弟弟．本人今天能够顺利完成学业，与他们无私的关爱是分不开的!

最后，衷心感谢各位在百忙之中为论文审阅付出辛勤劳动的专家学者．

学位论文评阅及答辩情况表

<table>
<tr><td rowspan="6">论文评阅人</td><td colspan="2">姓　名</td><td>专业技术职　务</td><td>是否博导（硕导）</td><td colspan="2">所 在 单 位</td><td>总体评价※</td></tr>
<tr><td colspan="2">邱书波</td><td>教授</td><td>是</td><td colspan="2">山东轻工业学院</td><td>A</td></tr>
<tr><td colspan="2">张承进</td><td>教授</td><td>是</td><td colspan="2">山东大学</td><td>A</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="12">答辩委员会成员</td><td colspan="2">姓　名</td><td>专业技术职　务</td><td>是否博导（硕导）</td><td colspan="3">所 在 单 位</td></tr>
<tr><td>主席</td><td>邱书波</td><td>教授</td><td>是</td><td colspan="3">山东轻工业学院</td></tr>
<tr><td rowspan="10">委
员</td><td>张承进</td><td>教授</td><td>是</td><td colspan="3">山东大学</td></tr>
<tr><td>张焕水</td><td>教授</td><td>是</td><td colspan="3">山东大学</td></tr>
<tr><td>李晓磊</td><td>副教授</td><td>是</td><td colspan="3">山东大学</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">答辩委员会对论文的总体评价※</td><td>A</td><td>答辩秘书</td><td>崔鹏</td><td>答辩日期</td><td>2010.5.22</td></tr>
<tr><td colspan="2">备注</td><td colspan="6"></td></tr>
</table>

※优秀为“A”；良好为“B”；合格为“C”；不合格为“D”。