微积分-考研题参考答案

第二章 极限与连续

一．选择题：

1．（98）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（　　）

（A）不存在间断点．　　（B）存在间断点 $x=1$．

（C）存在间断点 $x=0$．　　（D）存在间断点 $x=-1$．

解：当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，有 $f(x)=1+x$；

当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$，有 $f(x)=0$；

当 $x=1$ 时，有 $f(x)=\dfrac{1+1}{1+1}=1$；当 $x=-1$ 时，有 $f(x)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$．

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 1+x, & -1<x<1;\\ 1, & x=1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

显然 $x=-1$ 处连续，$x=1$ 处间断，

选择：（B）．

2．（00）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（　　）

（A）存在且等于零．　　（B）存在但不一定等于零．

（C）一定不存在．　　（D）不一定存在．

解：有可能 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 都不存在，如 $\varphi(x)=x, f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}, g(x)=x+\dfrac{2}{x^2}$，

则有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，

选择：（D）．

3．（04）函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界，（　　）

（A）$(-1,0)$．　　（B）$(0,1)$．　　（C）$(1,2)$．　　（D）$(2,3)$．

解：间断点有 $x=0,1,2$，其中 $x=0$ 是可去间断点，$x=1,2$ 是无穷间断点，故有界区间不能包含 $x=1,2$，

选择：（A）．

4．（04）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\ne 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则（　　）

（A）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点．　　（B）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点．

（C）$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点．　　（D）$g(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性与 a 的取值有关．

解：$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=a$．当 $a=0$ 时，$g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，当 $a\ne0$ 时，间断，

选择：（D）．

5．（07）当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　　）

（A）$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$．　　（B）$\ln(1+\sqrt{x})$．　　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$．　　（D）$1-\cos\sqrt{x}$．

解：当 $x \to 0^+$ 时，$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$，$\ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$，

选择：（B）．

6．（08）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$（　　　）

（A）a．　　（B）a^{-1}．　　（C）b．　　（D）b^{-1}．

解：因 $0<a<b$，有 $\dfrac{b}{a}>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{-1}\left[1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}\right]^{\frac{1}{n}}=a^{-1}\cdot 1^0=a^{-1}$，

选择：（B）．

7．（09）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为（　　　）

（A）1．　　（B）2．　　（C）3．　　（D）无穷多个．

解：因 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的间断点处有 $\sin\pi x=0$，即 x 取任何整数 n，

当整数 $n\neq 0,\pm 1$ 时，$n-n^3\neq 0$，$\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty$，即 $x=n$ 为 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的无穷间断点，

且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，

故 $x=0,\pm 1$ 都是 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点，

选择：（C）．

二．填空题：

1．（95）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ __________．

解：当 $x\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\dfrac{2}{x}=\dfrac{6}{5}$，

填空：$\dfrac{6}{5}$．

2．（95）$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ __________．

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+\cdots+n)-[1+2+\cdots+(n-1)]}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\dfrac{1}{2}n(n+1)}+\sqrt{\dfrac{1}{2}n(n-1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

填空：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

3．（99）设函数 $f(x)=a^x\quad(a>0,\ a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ __________．

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(a^1\cdot a^2\cdots a^n)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+\cdots+n)\ln a}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)\ln a}{n^2}=\dfrac{1}{2}\ln a$，

填空：$\dfrac{1}{2}\ln a$．

4．（02）设常数$a\neq\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$__________．

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\dfrac{1}{1-2a}$，

填空：$\dfrac{1}{1-2a}$．

5．（05）极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$__________．

解：当$x\to\infty$时，$\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}$，有$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$，

填空：2．

6．（06）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$__________．

解：当n为偶数时，$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\dfrac{n+1}{n}\to1\quad(n\to\infty)$；当$n$为奇数时，$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\dfrac{n}{n+1}\to1\quad(n\to\infty)$；

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$，

填空：1．

7．（08）设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leq c;\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c.\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，则$c=$__________．

解：因$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}(x^2+1)=c^2+1$，$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{2}{|x|}=\dfrac{2}{c}$，且$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$时$f(x)$连续，

则$c^2+1=\dfrac{2}{c}$，得$c=1$或$c=-2$，但显然有$c\geq0$，即$c=1$，

填空：1．

第三章 导数与微分

一．选择题：

1． （95）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　　）

（A）极限不存在．　　　　　　　　（B）极限存在但不连续．

（C）连续但不可导．　　　　　　　（D）可导．

解：因 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导，

选择：（C）．

2． （96）设 $f(x)$ 处处可导，则（　　　）

（A）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$．

（B）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$．

（C）当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$．

（D）当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$．

解：如取 $f(x)=x$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，但 $f'(x)=1$，排除（B)、(D)，

又取 $f(x)=x^2$，有 $f'(x)=2x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，但 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，排除（C)，

选择：（A）．

3． （97）若 $f(-x)=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　　　）

（A）$f'(x)>0,\ f''(x)<0$．　　　　（B）$f'(x)>0,\ f''(x)>0$．

（C）$f'(x)<0,\ f''(x)<0$．　　　　（D）$f'(x)<0,\ f''(x)>0$．

解：因 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数，$f''(x)$ 是偶函数，

选择：（C）．

4． （98）设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为（　　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$．　　（B）0．　　（C）-1．　　（D）-2．

解：因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[1+(-x)]-f(1)}{2\cdot(-x)}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$，得 $f'(1)=-2$，

又由于 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，$f'(5)=f'(1)=-2$，即 $x=5$ 时的切线斜率为 -2，

选择：（D）.

5. （00）设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是（　　）

（A） $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　（B） $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$.

（C） $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　（D） $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

解：假设 $f(a)>0$，则在 a 的某邻域内 $f(x)>0$，$|f(x)|=f(x)$，$|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处可导，矛盾；
假设 $f(a)<0$，则在 a 的某邻域内 $f(x)<0$，$|f(x)|=-f(x)$，$|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处可导，矛盾；
故 $f(a)=0$.

因 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，有 $f'_+(a)=f'_-(a)$；$|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导，有 $f'_+(a)\neq -f'_-(a)$；

故 $f'(a)\neq 0$.

选择：（B）.

6. （03）设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的（　　）

（A）充分必要条件.　　（B）必要但非充分条件.

（C）充分但非必要条件.　　（D）既非充分也非必要条件.

解：$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x^3-1|}{x-1}\varphi(x)=3\varphi(1)$，$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-3\varphi(1)$，
选择：（A）.

7. （03）设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）

（A）在 $x=0$ 处左极限不存在.　　（B）有跳跃间断点 $x=0$.

（C）在 $x=0$ 处右极限不存在.　　（D）有可去间断点 $x=0$.

解：首先 $x=0$ 处 $g(x)$ 无定义，是 $g(x)$ 的间断点.

因 $f'(0)$ 存在，即 $f(0)$ 有定义，而 $f(x)$ 为奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$，

则取 $x=0$，得 $f(0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(0)$，在 $x=0$ 处 $g(x)$ 极限存在，

选择：（D）.

8. （05）以下四个命题中，正确的是（　　）

（A）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

（B）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

（C）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

（D）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解：在开区间内连续，不能说明有界，排除（A）、（B），

如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，有 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

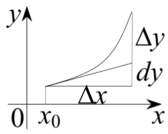
又如 $f(x)=\sqrt{x}$，有 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，排除（D），

选择：（C）.

9．（06）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）

（A）$0<dy<\Delta y$.　（B）$0<\Delta y<dy$.　（C）$\Delta y<dy<0$.　（D）$dy<\Delta y<0$.

解：因 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，由导数几何意义知函数 $y=f(x)$ 单调增加且上凹，



图形上 Δy 是函数曲线上的增量，dy 是切线上的增量，可知 $0<dy<\Delta y$，

也可根据 $dy=f'(x)\Delta y>0$，

且 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\dfrac{f''(x)}{2}\Delta x^2+o(\Delta x^2)>f'(x)\Delta x=dy$，可知 $0<dy<\Delta y$，

选择：（A）.

10．（06）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=1$，则（　　）

（A）$f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在.　　（B）$f(0)=1$ 且 $f'(0)$ 存在.

（C）$f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　（D）$f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解：因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}\cdot x^2=1\times 0=0$，

且 $x\to 0$ 时，$x^2\to 0^+$，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x^2\to 0^+}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=f'_+(0)=1$，

选择：（C）.

11．（07）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　　（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

解：因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，排除（A）、（C）；

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，有 $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=0$，排除（B）；

而若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则不一定有 $f'(0)$ 存在，

如 $f(x)=|x|$，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$，但 $f'(0)$ 不存在，

选择：（D）.

12．（07）设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$，其中 Q,p 分别表示需求量和价格，如果该商品的需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是（　　）

（A）10.　　（B）20.　　（C）30.　　（D）40.

解：因该商品的需求弹性 $\frac{EQ}{Ep}=\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}=\frac{p}{160-2p}\cdot(-2)=\frac{-2p}{160-2p}$，有 $\left|\frac{EQ}{Ep}\right|=\frac{2p}{160-2p}=1$，得 $p=4$，

选择：（D）.

13．（11）已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）

（A）$-2f'(0)$.　　（B）$-f'(0)$.　　（C）$f'(0)$.　　（D）0.

解：因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\frac{2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$，

选择：（B）.

14．（12）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　（B）$(-1)^n(n-1)!$.　　（C）$(-1)^{n-1}n!$.　　（D）$(-1)^n n!$.

解：因 $f'(x)=e^x\cdot(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)\cdot2e^{2x}\cdots(e^{nx}-n)+\cdots+(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots ne^{nx}$，

则 $f'(0)=1\cdot(1-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$，

选择：（A）.

二．填空题：

1．（95）已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\frac{dy}{dx}=$__________.

解：$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)=\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$，

填空：$\frac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2$.

2．（96）设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $dy=$__________.

解：两边取对数，得 $\ln x=y\ln y$，两边关于 x 求导，得 $\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}y'$，$y'=\frac{1}{x(1+\ln y)}$，

填空：$\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$.

3．（96）设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''\big|_{x=\sqrt3}=$__________.

解：因 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot2x\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$；$y'''=-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=(2x^2-1)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$；

则 $y'''\big|_{x=\sqrt{3}}=5\cdot 4^{-\frac{5}{2}}=\frac{5}{32}$，

填空：$\frac{5}{32}$.

4．（97）设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$__________.

解：$y'=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)$，

填空：$\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\right]dx$.

5．（98）设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$__________.

解：因切点为 $(1,1)$，切线斜率 $k=f'(1)=n$，切线方程为 $y-1=n(x-1)$，即 $-1=n(\xi_n-1)$，

则 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n\cdot(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$，

填空：e^{-1}.

6．（01）设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为__________.

解：$K=Q^{\frac{1}{\beta}}A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}$，则 $\frac{EK}{EL}=\frac{dK}{dL}\cdot\frac{L}{K}=Q^{-\frac{1}{\beta}}A^{-\frac{1}{\beta}}\cdot(-\frac{\alpha}{\beta})L^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\cdot\frac{L}{Q^{-\frac{1}{\beta}}A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}}=-\frac{\alpha}{\beta}$，

填空：$-\frac{\alpha}{\beta}$.

7．（03）设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & 若x\neq 0;\\ 0, & 若x=0.\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是__________.

解：因 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}-x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}$，即 $\lambda>2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，

又 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}$，即 $\lambda>1$ 时，$f'(0)=0$，

填空：$(2,+\infty)$.

8．（03）已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$__________.

解：设在 $x=x_0$ 处相切，则 $x_0^3-3a^2x_0+b=3x_0^2-3a^2=0$，有 $x_0=\pm a,\ b=\pm 2a^3$，

填空：$4a^6$.

9．（04）设 $y=\arctan\mathrm{e}^x-\ln\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$，则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}=$__________.

解：$y=\arctan e^{x}-\frac{1}{2}[\ln(e^{2x})-\ln(e^{2x}+1)]=\arctan e^{x}-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$，$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{e^{x}-1}{1+e^{2x}}$，

填空：$\frac{e-1}{e^{2}+1}$．

10．（06）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$__________．

解：$f''(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}=e^{2f(x)}$，$f'''(x)=e^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=e^{2f(x)}\cdot 2e^{f(x)}=2e^{3f(x)}$，

则 $f'''(2)=2e^{3f(2)}=2e^{3}$，

填空：$2e^{3}$．

11．（07）设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$__________．

解：$y'=-\frac{1}{(2x+3)^{2}}\cdot 2=\frac{-2}{(2x+3)^{2}}$，$y''=-2\frac{-2}{(2x+3)^{3}}\cdot 2=\frac{2\times 4}{(2x+3)^{3}}$，$y'''=-3\frac{2\times 4}{(2x+3)^{4}}\cdot 2=\frac{-6\times 8}{(2x+3)^{4}}$，

依次类推，$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n}\times n!\times 2^{n}}{(2x+3)^{n+1}}$，即 $y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n}\times n!\times 2^{n}}{3^{n+1}}$，

填空：$\frac{(-1)^{n}\times n!\times 2^{n}}{3^{n+1}}$．

12．（08）已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处切线方程为__________．

解：因 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=2\times 0=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，

则 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，即 $y-0=2(x-0)$，$y=2x$，

填空：$y=2x$．

13．（09）设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，其对应价格 P 的弹性 $\xi_{P}=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加__________元．

解：因 $\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}=0.2$，有 $\frac{dQ}{Q}=0.2\frac{dP}{P}$，两边积分得 $\ln Q=0.2\ln P+\ln C$，即 $Q=CP^{0.2}$，

则收益 $R(P)=PQ=CP^{1.2}$，有 $\frac{dR}{dP}=1.2CP^{0.2}=1.2Q$，即 $\left.\frac{dR}{dP}\right|_{Q=10000}=12000$，

故价格增加 1 元会使产品收益增加 12000 元，
填空：12000．

14．（10）设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^{3}$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$______．

解：因收益弹性 $\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}=1+p^{3}$，有 $\frac{dR}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^{2}\right)dp$，

两边积分，得 $\ln R=\ln p+\frac{p^{3}}{3}+\ln C$，即 $R(p)=Cp\,e^{\frac{p^{3}}{3}}$，

因 $R(1)=1$，有 $1=C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$，$C=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，即 $R(p)=p\,\mathrm{e}^{\frac{p^3-1}{3}}$，

填空：$p\,\mathrm{e}^{\frac{p^3-1}{3}}$.

15．（11）设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$__________.

解：因 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}\cdot 3x}=x\mathrm{e}^{3x}$，有 $f'(x)=\mathrm{e}^{3x}+x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot 3=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$，

填空：$(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$.

16．（11）曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

解：方程两边关于 x 求导，得 $\sec^2\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=\mathrm{e}^y\cdot y'$，

则 $y'=\dfrac{\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^y-\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)}$，即 $y'\big|_{x=0}=\dfrac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^0-\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{1-2}=-2$，

可得点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y-0=(-2)\cdot(x-0)$，即 $y=-2x$，
填空：$y=-2x$.

17．（12）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1,\\ 2x-1, & x<1.\end{cases}$ $y=f[f(x)]$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$__________.

解：因 $\dfrac{dy}{dx}=f'[f(x)]\cdot f'(x)$，有 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f'[f(0)]\cdot f'(0)$，

又因 $x<1$ 时，$f(x)=2x-1$，有 $f(0)=-1$ 且 $f'(x)=2$，可得 $f'(0)=f'(-1)=2$，

则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f'[f(0)]\cdot f'(0)=f'(-1)\cdot f'(0)=4$，

填空：4.

三．解答题：

1．（02）设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数：$Q=Q(p)$，其需求弹性 $\eta=\dfrac{2p^2}{192-p^2}>0$，

（1）设 R 为总收益函数，证明 $\dfrac{dR}{dp}=Q(1-\eta)$；

（2）求 $p=6$ 时，总收益对价格的弹性，并说明其经济意义.

解：（1）因 $\eta=-\dfrac{EQ}{Ep}=-\dfrac{dQ}{dp}\cdot\dfrac{p}{Q}$，即 $\dfrac{dQ}{dp}=-\dfrac{Q}{p}\eta$，

故 $\frac{dR}{dp}=\frac{d}{dp}(pQ)=Q+p\frac{dQ}{dp}=Q-Q\eta=Q(1-\eta)$.

（2）因 $\frac{ER}{Ep}=\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}=Q(1-\eta)\cdot\frac{p}{pQ}=1-\eta=1-\frac{2p^2}{192-p^2}=\frac{192-3p^2}{192-p^2}$,

故 $p=6$ 时， $\frac{ER}{Ep}=\frac{84}{156}\doteq 0.5385$ ，即价格上涨 1%，收益大约增加 0.5385%.

第四章 微分中值定理及导数应用

一．选择题：

1． （96）设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$， $f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是（　　　）

（A） $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值．

（B） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值．

（C） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值．

（D） $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

解：设 $g(x)=f'(x)$，即 $g'(x_0)=0,\ g''(x_0)>0$，

则 $g(x_0)$ 是 $g(x)$ 的极小值，即 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值，排除（A），

在 x_0 的某邻域内 x_0 两侧都有 $f'(x)>f'(x_0)=0$，即 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，排除（B）、（C），

选择：（D）．

2． （01）设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　　　）

（A） $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点．
（B） $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点．
（C） $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．
（D） $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

解：因 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\cdot\dfrac{f'(x)}{x-a}=0\cdot(-1)=0$，

又因 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1<0$，即在 a 的某邻域内 $\dfrac{f'(x)}{x-a}<0$，

在该邻域内，当 $x<a$ 时， $f'(x)>0$；当 $x>a$ 时， $f'(x)<0$，即 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，

选择：（B）．

3． （02）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则（　　　）

（A）当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$．

（B）对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$．

（C）当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$．

（D）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$．

解：当 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续时，（A）、（C）、（D）才成立．
选择：（B）．

4． （03）曲线 $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$ （　　　）

（A）仅有水平渐近线．
（B）仅有铅直渐近线．
（C）既有铅直又有水平渐近线．
（D）既有铅直又有斜渐近线．

解：因 $\lim\limits_{x\to\infty}x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\infty$，没有水平渐近线，排除（A）、（C），

$$\lim_{x\to0} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\infty$$，有铅直渐近线 $x=0$，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{x}=1\neq0,\quad \lim_{x\to\infty}(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=0$$，有斜渐近线 $y=x$，

选择：（D）.

5. （04）设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（　　　）

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解：当 $x<0$ 时，$f(x)=-x(1-x)=-x+x^2$，$f'(x)=-1+2x<0$，$f''(x)=2>0$；

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x(1-x)=x-x^2$，$f'(x)=1-2x>0$，$f''(x)=-2<0$；

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 都在 $x=0$ 两侧异号，

选择：（C）.

6. （04）设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0,\ f'(b)<0$，则下列结论中错误的是（　　　）

（A）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

（B）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

（C）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

（D）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$.

解：因 $f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+o(\Delta x)$，若 $f'(a)>0$，当 $\Delta x>0$ 且很小时，$f(a+\Delta x)>f(a)$，

$f(b+\Delta x)=f(b)+f'(b)\Delta x+o(\Delta x)$，若 $f'(b)<0$，当 $\Delta x<0$ 且很小时，$f(b+\Delta x)>f(b)$，

又因 $f'(a)>0,\ f'(b)<0$，对 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用介值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$，

故（A）、（B）、（C）都正确，

选择：（D）.

7. （05）当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点（　　　）

（A）2.　　　　（B）4.　　　　（C）6.　　　　（D）8.

解：设 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$，令 $f'(x)=6x^2-18x+12=0$，得 $x=1$ 与 $x=2$，有两个极值点，

当 $f(1)$ 与 $f(2)$ 异号时，在 $(-\infty,1),\ (1,2),\ (2,+\infty)$ 内各有一个零点，即三个不同零点；

当 $f(1)$ 与 $f(2)$ 同号时，将只有一个零点.

要使得 $f(x)$ 恰有两个不同的零点，应有 $f(1)=5-a=0$ 或 $f(2)=4-a=0$，即 $a=5$ 或 $a=4$，

选择：(B).

8. （05）设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是（　　　）

（A）$f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值.　　（B）$f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.

（C）$f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值.　　（D）$f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值.

解：$f'(x)=x\cos x$，有 $f'(0)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，且 $f''(x)=\cos x-x\sin x$，有 $f''(0)=1>0,\ f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0$，

选择：(B).

9. （07）曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线的条数为（　　　）

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

解：因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0+\ln 1=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty$，有一条水平渐近线 $y=0$，

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty，有一条铅直渐近线 x=0，$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}=1\neq0，$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)\right]=0，$$

有一条斜渐近线 $y=x$，

选择：(D).

10. （09）当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　　）

（A）$a=1,\ b=-\dfrac{1}{6}$.　　（B）$a=1,\ b=\dfrac{1}{6}$.　　（C）$a=-1,\ b=-\dfrac{1}{6}$.　　（D）$a=-1,\ b=\dfrac{1}{6}$.

解：因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin ax}{-bx^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$，

当 $a\neq1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\infty\neq1$，

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{-3bx^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{-6bx}=-\dfrac{1}{6b}=1$，

故 $a=1,\ b=-\dfrac{1}{6}$，

选择：(A).

11．（10）若 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$，则 a 等于（　　）

（A）0．　　（B）1．　　（C）2．　　（D）3．

解：因 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-ax)\mathrm{e}^{x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0-(-a)\mathrm{e}^{x}-(1-ax)\mathrm{e}^{x}}{1}=\lim_{x\to 0}(a-1+ax)\mathrm{e}^{x}=a-1=1$，

则 $a=2$，

选择：(C).

12．（10）设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)$ 小于零，$g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f(g(x))$ 在 x_0 取得极大值的一个充分条件是（　　）

（A）$f'(a)<0$.　　（B）$f'(a)>0$.　　（C）$f''(a)<0$.　　（D）$f''(a)>0$.

解：设 $y=f(g(x))$，有 $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$，$y''=f''(g(x))\cdot[g'(x)]^2+f'(g(x))\cdot g''(x)$，

因 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，有 $g'(x_0)=0$，

则 $y'\big|_{x=x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)=0$，$y''\big|_{x=x_0}=f''(g(x_0))\cdot[g'(x_0)]^2+f'(g(x_0))\cdot g''(x_0)=f'(a)g''(x_0)$，

因 $g''(x)<0$，

则当 $f'(a)>0$ 时，$y'\big|_{x=x_0}=0$ 且 $y''\big|_{x=x_0}=f'(a)g''(x_0)<0$，即 $y=f(g(x))$ 在 x_0 取得极大值，

选择（B).

13．（10）设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（　　）

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$.　　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$.

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$.　　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$.

解：因 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{10\ln^{9}x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10\ln^{9}x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{90\ln^{8}x}{x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{10!}{x}=0$，

$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}\cdot\frac{1}{10}}{1}=\infty$，

则当 x 充分大时，有 $g(x)>f(x)$ 且 $g(x)<h(x)$，

选择：(C).

14．（11）已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）

（A）$k=1,\ c=4$.　　（B）$k=1,\ c=-4$.　　（C）$k=3,\ c=4$.　　（D）$k=3,\ c=-4$.

解：因 $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1(k-2)x^{k-3}}$，

当 $k=3$ 时，$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1(k-2)}=\frac{-3+27}{6c}=\frac{4}{c}$，

则$k=3,\ c=4$，

选择：（C）.

15．（12）曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$渐近线的条数为（　　　　）

（A）0.　　　　　　（B）1.　　　　　　（C）2.　　　　　　（D）3.

解：因$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}\neq\infty$，

则$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$有一条水平渐近线$y=1$和一条铅垂渐近线$x=1$，

选择：（C）.

二．填空题：

1．（00）若$a>0,\ b>0$均为常数，则$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a^x+b^x}{2}\right]^{\frac{3}{x}}=$__________.

解：因$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a^x+b^x}{2}\right]^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{a^x+b^x-2}{2}\right]^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\cdot\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{3(a^x\ln a+b^x\ln b)}{2}=\frac{3(\ln a+\ln b)}{2}=\frac{3}{2}\ln(ab),$$

故$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a^x+b^x}{2}\right]^{\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln(ab)}=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

填空：$(ab)^{\frac{3}{2}}$.

2．（03）极限$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$__________.

解：$\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{2\ln(1+x)}{x}}$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{1+x}=2$，

填空：e^2.

3．（04）若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，则$a=$__________，$b=$__________.

解：因分子极限$\lim\limits_{x\to0}\sin x(\cos x-b)=0$，要使得原极限等于 5，必须有分母极限$\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x-a)=1-a=0$，

则$a=1$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x}(\cos x-b)=1\cdot(1-b)=5$，得$b=-4$，

填空：1，-4.

4．（07）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$__________.

解：因$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x}{2^x\ln2+3x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+2}{2^x(\ln2)^2+6x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln2)^3+6}=0$，且$\sin x+\cos x$有界，

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$，

填空：0.

5．（09）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$__________.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e(e^{\cos x-1}-1)}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2}=3e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}3e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{3}{2}e$，

填空：$\dfrac{3}{2}e$.

6．（10）若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$__________.

解：因曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 过点 $(-1,0)$，有 $0=-1+a-b+1$，即 $a=b$，

又因 $y''=6x+2a$，且点 $(-1,0)$ 是拐点，有 $y''\big|_{x=-1}=-6+2a=0$，即 $a=3$，

则 $b=3$，

填空：3.

7．（12）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$__________.

解：设 $y=(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$，有 $\ln y=\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)=\dfrac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}$，

则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}=\dfrac{1\cdot(\sqrt{2})^2}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}y=e^{-\sqrt{2}}$，

填空：$e^{-\sqrt{2}}$.

三．解答题：

1．（95）假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

解：因 C 在直线 AB 上，斜率 $k_{AC}=k_{BC}$，即 $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}$，

由已知条件，$f(x)$ 在 $[0,c]$、$[c,1]$ 上连续，在 $(0,c)$、$(c,1)$ 内可导，根据拉格朗日定理知：

存在 $\xi_1\in(0,c)$ 和 $\xi_2\in(c,1)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\xi_2)$ 成立，

因 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导，故 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，

故由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$.

2．（95）设 p,q 是大于 1 的常数，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明：对于任意 $x>0$，有 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geq x$.

解：设 $f(x)=\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}-x$，有 $f'(x)=x^{p-1}-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，因 $f''(x)=(p-1)x^{p-2}>0$，

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，由于 $x=1$ 是唯一驻点，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1)=0$，

故 $x>0$ 时，$f(x)\ge f(1)=0$，即 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\ge x$．

3．（95）运用导数的知识作函数 $y=(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的图形．

解：定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．因 $y'=1\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，

令 $y'=0$，得 $x=-2$ 或 $x=3$，

又因 $y''=\dfrac{(2x-1)\cdot x^2-2x(x^2-x-6)}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{x^2-x-6}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{13x+6}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，

令 $y''=0$，得 $x=-\dfrac{6}{13}$，

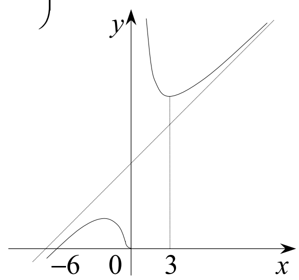
列表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-6/13)$	$-6/13$	$(-6/13,0)$	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+	+
y	↗∩	极大	↘∩	拐点	↘∪	↘∪	极小	↗∪

则在 $(-\infty,-2)$ 与 $(3,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-2,0)$ 与 $(0,3)$ 内单调减少，

极大值 $y\big|_{x=-2}=4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，极小值 $y\big|_{x=3}=9\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$；

且在 $\left(-\infty,-\dfrac{6}{13}\right)$ 内下凹，在 $\left(-\dfrac{6}{13},0\right)$ 与 $(0,+\infty)$ 内上凹，拐点为 $\left(-\dfrac{6}{13},\dfrac{72}{13}\mathrm{e}^{-\frac{13}{6}}\right)$．



因 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$，即没有水平渐近线；

又因 $\lim\limits_{x\to0^+}(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，即存在铅直渐近线 $x=0$，

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+6}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1\ne0$，

且 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}[x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)+6\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+6\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}+6=7$，

则 $y=x+7$ 是一条斜渐近线．

取特殊点 $(-6,0)$, $(-1,5\mathrm{e}^{-1})$ 等，作图：（见右上方）

4．（95）已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25000+200x+\dfrac{1}{40}x^2$（元），问

（1）要使平均成本最小，应生产多少件产品？

（2）若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？

解：（1）平均成本 $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{25000}{x}+200+\dfrac{1}{40}x$，令 $\overline{C}'(x)=-\dfrac{25000}{x^2}+\dfrac{1}{40}=0$，

得 $x=\pm1000$（负值舍去），即 $x=1000$ 是唯一驻点，且 $\overline{C}''(x)=\dfrac{50000}{x^3}>0$，

故生产 1000 件产品时，平均成本最小为 $\overline{C}(1000)=250$（元）.

（2）产品以每件 500 元售出，收益 $R(x)=500x$，利润 $L(x)=R(x)-C(x)=-25000+300x-\frac{1}{40}x^2$，

令 $L'(x)=300-\frac{1}{20}x$，得 $x=6000$，唯一驻点，且 $L''(x)=-\frac{1}{20}<0$，

故生产 6000 件产品时，利润最大为 $L(6000)=875000$（元）.

5．（95）设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量（即产量），p 为单价；a, b, c, d, e 都是正的常数，且 $d>b$，求：

（1）利润最大时的产量及最大利润；

（2）需求对价格的弹性；

（3）需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

解：（1）收益 $R(q)=pq=-eq^2+dq$，利润 $L(q)=R(q)-C(q)=-(a+e)q^2+(d-b)q-c$，

令 $L'(q)=-2(a+e)q+(d-b)=0$，得 $q=\frac{d-b}{2(a+e)}$，唯一驻点，且 $L''(q)=-2(a+e)<0$，

故产量 $q=\frac{d-b}{2(a+e)}$ 时，利润最大为 $L=\frac{(d-b)^2}{4(a+e)}-c$.

（2）需求对价格的弹性 $\frac{\mathrm{E}q}{\mathrm{E}p}=\frac{p}{q}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\frac{ep}{d-p}\cdot(-\frac{1}{e})=\frac{-p}{d-p}$.

（3）令 $\left|\frac{\mathrm{E}q}{\mathrm{E}p}\right|=\frac{p}{d-p}=1$，有 $p=\frac{d}{2}$，

故 $q=\frac{d}{2e}$.

6．（96）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & 若x\neq 0,\\ 0, & 若x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1$，

（1）求 $f'(x)$；

（2）讨论 $f'(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上的连续性.

解：（1）当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left[\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right]'=\frac{x[g'(x)+\mathrm{e}^{-x}]-[g(x)-\mathrm{e}^{-x}]}{x^2}$，

且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$，

故 $f'(x)=\begin{cases}\frac{x[g'(x)+\mathrm{e}^{-x}]-[g(x)-\mathrm{e}^{-x}]}{x^2}, & x\neq 0,\\ \frac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$

（2）当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)$ 连续，

且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[g'(x)+\mathrm{e}^{-x}]-[g(x)-\mathrm{e}^{-x}]}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[g''(x)-\mathrm{e}^{-x}]}{2x}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$，

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续．$f'(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续．

7．（96）设某种商品单价为 p 时，售出商品数量 Q 可以表示成 $Q=\dfrac{a}{p+b}-c$，其中 a,b,c 均为正数，且 $a>bc$，

（1）p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少；

（2）要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额是多少？

解：（1）销售额 $R(p)=pQ=\dfrac{ap}{p+b}-cp$，令 $R'(p)=\dfrac{a(p+b)-ap}{(p+b)^2}-c=\dfrac{ab}{(p+b)^2}-c=0$，得 $p=\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$，

当 $0<p<\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$ 时，$R'(p)>0$；当 $p>\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$ 时，$R'(p)<0$；

故当 $0<p<\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$ 时，销售额增加；当 $p>\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$ 时，销售额减少．

（2）$p=\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$ 是唯一驻点，且 $R''(p)=-\dfrac{2ab}{(p+b)^3}<0$，

故 $p=\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-b$ 时，销售额最大为 $R=a+bc-2\sqrt{abc}$．

8．（97）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\quad(a\neq0)$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+2a^2x\ln(1+ax)-(1-a^2x^2)\cdot\dfrac{a}{1+ax}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+2a^2x\ln(1+ax)-a(1-ax)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2a^2x\ln(1+ax)+a^2x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2a^2\ln(1+ax)+a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$．

9．（97）在经济学中，称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数，而称函数 $Q=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数（简称 C-D 生产函数）．试证明：当 $x\to0$ 时固定替代弹性生产函数变为 C-D 生产函数，即有 $\lim\limits_{x\to0}Q(x)=Q$．

证：$\ln Q(x)=\ln A-\dfrac{1}{x}\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\ln Q(x)=\ln A-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\ln A-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$

$=\ln A+\delta\ln K+(1-\delta)\ln L$，

故 $\lim\limits_{x\to0}Q(x)=\mathrm{e}^{\ln A+\delta\ln K+(1-\delta)\ln L}=AK^{\delta}L^{1-\delta}=Q$．

10．（97）一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$（万元/吨），x 为销售量（单位：吨），商品的成本函数是 $C=3x+1$（万元）．

（1）每销售一吨商品，政府要征税 t（万元），求该商家获最大利润时的销售量；

（2）t 为何值时，政府税收总额最大．

解：（1）收益 $R(x)=xp=7x-0.2x^2$，税后利润 $L(x)=R(x)-C(x)-tx=-0.2x^2+(4-t)x-1$，

令 $L'(x)=-0.4x+(4-t)=0$，得 $x=10-2.5t$，唯一驻点，且 $L''(x)=-0.4<0$，

故当 $x = 10 - 2.5\,t$ 时，商家获得最大利润 $L = 19 - 10\,t + 1.25\,t^2$.

（2）政府税收 $A(t) = tx = 10\,t - 2.5\,t^2$，令 $A'(t) = 10 - 5\,t = 0$，得 $t = 2$，唯一驻点，且 $A''(t) = -5 < 0$，

故当 $t = 2$ 时，政府税收总额最大为 $A(2) = 10$.

11．（97）假设某种商品需求量 Q 是单价 p（单位：元）的函数：$Q = 12000 - 80\,p$；商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数：$C = 25000 + 50Q$；每单位商品需要纳税 2 元．试求使销售利润最大的商品单价和最大利润额．

解：收益 $R(p) = pQ = 12000\,p - 80\,p^2$，成本 $C(p) = 625000 - 4000\,p$，

税后利润 $L(p) = R(p) - C(p) - 2\,Q(p) = -80\,p^2 + 16160\,p - 649000$，令 $L'(p) = -160\,p + 16160 = 0$，

得 $p = 101$，唯一驻点，且 $L''(p) = -160 < 0$，

故商品单价 $p = 101$ 时销售利润最大，最大利润额为 $L(101) = 167080$．

12．（98）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\tan\dfrac{1}{n}\right]^{n^2}$ （n 为自然数）．

解：设 $y = \left[n\tan\dfrac{1}{n}\right]^{n^2}$，有 $\ln y = n^2\ln\left[n\tan\dfrac{1}{n}\right]$，令 $x = \dfrac{1}{n}$，

$$\text{则}\lim_{n\to\infty}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[\frac{1}{x}\tan x\right]}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sec^2 x - \tan x}{2x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2\sec x\cdot\sec x\tan x + \sec^2 x - \sec^2 x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x\tan x}{3x} = \frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\tan\dfrac{1}{n}\right]^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}$.

13．（98）设函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，且 $f'(x) \neq 0$，试证存在ξ，$\eta \in (a, b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}e^{-\eta}$.

证：因 $g(x) = e^x$ 在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，根据拉格朗日定理知：

存在$\eta \in (a, b)$，使得 $g'(\eta) = e^\eta = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$，即 $\dfrac{e^b - e^a}{b - a}e^{-\eta} = 1$，取$\xi = \eta$，有 $f'(\xi) = f'(\eta) \neq 0$，

故 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}e^{-\eta}$.

14．（98）设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，(a, b)内可导，$f(a) = f(b) = 1$，试证存在ξ，$\eta \in (a, b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.

证：设 $F(x) = e^x f(x)$，$F(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，根据拉格朗日定理知：

存在$\eta \in (a, b)$，使得 $F'(\eta) = \dfrac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a}$，即 $e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)] = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$，

因 e^x 在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，根据拉格朗日定理知：

存在$\xi \in (a, b)$，使得 $e^\xi = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$，即 $e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi$，

故 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.

15．（98）设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在（假定 $t = 0$）就售出，总收入为 R_0（元），如果窖藏起

来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大，并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

解：以连续复利计息，t 年末总收入 R 的现值为 $y(t)=R\mathrm{e}^{-rt}=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}$，令 $y'(t)=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}(\dfrac{1}{5\sqrt{t}}-r)=0$，

得 $t=\dfrac{1}{25r^2}$，唯一驻点，当 $0<t<\dfrac{1}{25r^2}$ 时，$y'(t)>0$；当 $t>\dfrac{1}{25r^2}$ 时，$y'(t)<0$；

故 $t=\dfrac{1}{25r^2}$ 时，总收入的现值最大为 $y=R_0\mathrm{e}^{\frac{1}{25r}}$. 当 $r=0.06$ 时，$t=\dfrac{1}{0.09}\approx 11$.

16. （99）设函数 $f(x)$在区间[0, 1]上连续，在(0, 1)内可导，且 $f(0)=f(1)=0,\quad f(\dfrac{1}{2})=1$. 试证：

（1）存在 $\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$，使 $f(\eta)=\eta$；

（2）对任意实数λ，必存在$\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

证：（1）设 $g(x)=f(x)-x$，有 $g(x)$在区间$[\dfrac{1}{2},1]$上连续，$g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}>0$，$g(1)=-1<0$，

故根据零点存在定理知：存在$\eta\in(1/2,1)$，使 $g(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

（2）设 $F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f(x)-x]$，$F(x)$在区间$[0,\eta]$上连续，在$(0,\eta)$内可导，且 $F(0)=0=F(\eta)$，

根据拉格朗日定理知：存在$\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0$，

故 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

17. （99）证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

证：设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\pi}$，有 $f(0)=f(\pi)=0$. 且 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\pi}$，

当 $0<x<2\arccos\dfrac{2}{\pi}$ 时，$f'(x)>0$，得 $f(x)>f(0)=0$；

当 $2\arccos\dfrac{2}{\pi}<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$，得 $f(x)>f(\pi)=0$；

故当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

18. （00）求函数 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

解：因 $y'=1\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x+x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$，令 $y'=0$，得 $x=-1$ 或 $x=0$.

且没有不可导的点，列表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	极大	↘	极小	↗

故 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 在$(-\infty,-1)$与$(0,+\infty)$内单调增加，在$(-1,0)$内单调减少，

极大值为 $y\big|_{x=-1}=-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$，极小值为 $y\big|_{x=0}=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\infty$，且 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 没有间断点，则没有水平与铅直渐近线.

因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=1\neq 0$，

且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[x(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1)-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1}{\frac{1}{x}}-1$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}-1=-2,$$

故 $y=x-2$ 是一条斜渐近线.

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\mathrm{e}^{\pi}$，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi})-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}}{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\pi}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-\mathrm{e}^{\pi}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}-\mathrm{e}^{\pi}=-2\mathrm{e}^{\pi},$$

故 $y=\mathrm{e}^{\pi}(x-2)$ 也是一条斜渐近线.

19．（01）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 c 的值.

解：因 $f(x)$ 在 $[x-1,x]$ 内连续，在 $(x-1,x)$ 内可导，根据拉格朗日定理知：存在 $\xi\in(x-1,x)$，

使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f(x)-f(x-1)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}$，

且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^{\frac{x}{c}\cdot c}}{\left(1+\frac{-c}{x}\right)^{\frac{x}{-c}\cdot(-c)}}=\dfrac{\mathrm{e}^{c}}{\mathrm{e}^{-c}}=\mathrm{e}^{2c}$，即 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，

故 $c=\dfrac{1}{2}$.

20．（01）某商品进价为 a（元/件），根据以往经验，当销售价为 b（元/件）时，销售量为 c 件（a, b, c 均为正常数，且 $b\geq\frac{4}{3}a$），市场调查表明，销售价每下降 10%，销售量可增加 40%，现决定一次性降价．试问，当销售价定为多少时，可获得最大利润？并求出最大利润.

解：当销售价为 $b(1-0.1x)$（元/件）时，销售量为 $c(1+0.4x)$件.

利润 $L(x)=[b(1-0.1x)-a]\cdot c(1+0.4x)=c(b-a)+c(0.3b-0.4a)x-0.04bcx^2$，

令 $L'(x)=c(0.3b-0.4a)-0.08bcx=0$，得 $x=\dfrac{5(3b-4a)}{4b}$，唯一驻点且 $L''(x)=-0.08bc<0$，利润最大，

此时价格 $p=b(1-0.1x)=b-\dfrac{3b-4a}{8}=\dfrac{5b+4a}{8}$，利润 $L=c(b-a)+\dfrac{c(3b-4a)^2}{16b}=\dfrac{c(5b-4a)^2}{16b}$，

故价格销售价定为 $\dfrac{5b+4a}{8}$ 时，利润最大为 $\dfrac{c(5b-4a)^2}{16b}$.

21．（03）设函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$．试证必存在$\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

解：因 $f(x)$在$[0,3]$上连续，有 $f(x)$在$[0,2]$上连续，$f(x)$在$[0,2]$上存在最小值 m 与最大值 M，

则 $m\le f(0),f(1),f(2)\le M$，有 $m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\le M$，

根据介值定理，存在$\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=1=f(3)$，

由于 $f(x)$在$[\eta,3]$上连续，在$(\eta,3)$内可导，

故根据罗尔定理，存在$\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

22．（03）设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in[\dfrac{1}{2},1)$，试补充定义 $f(1)$，使得 $f(x)$在$[\dfrac{1}{2},1]$上连续.

解：$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{-\pi\sin\pi x+\pi^2(1-x)\cos\pi x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1}\frac{-\pi^2\sin\pi x}{-2\pi^2\cos\pi x-\pi^3(1-x)\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}$$，且 $f(x)$在$[\dfrac{1}{2},1)$内连续，

故补充定义 $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{\pi}$，可使 $f(x)$在$[\dfrac{1}{2},1]$上连续.

23．（03）设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为 $t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$最小？并求出最小值.

解：令 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$，有 $a^t=\dfrac{a}{\ln a}$，得驻点 $t(a)=\dfrac{\ln a-\ln(\ln a)}{\ln a}=1-\dfrac{\ln(\ln a)}{\ln a}$，

令 $t'(a)=-\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}=0$，得 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$，唯一驻点．当 $1<a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$t'(a)<0$；当 $a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$t'(a)>0$，

故 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$t(a)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 为最小值.

24．（04）求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

解：原式$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin4x}{4x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos4x}{12x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{8\sin4x}{24x}=\frac{4}{3}.$$

25．（04）设某商品的需求函数为 $Q=100-5p$，其中价格 $p\in(0,20)$，Q 为需求量.

（1）求需求量对价格的弹性 $\mathrm{E_d}$（$\mathrm{E_d}>0$）；

（2）推导 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-\mathrm{E_d})$（其中 R 为收益），并用弹性 $\mathrm{E_d}$说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

解：（1）需求量对价格的弹性 $\mathrm{E_d}=\left|\frac{p}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right|=\left|\frac{p}{100-5p}\cdot(-5)\right|=\frac{p}{20-p}$.

（2）收益 $R=pQ=100p-5p^2$，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=100-10p$，而 $Q(1-\mathrm{E_d})=(100-5p)\cdot(1-\frac{p}{20-p})=100-10p$，

则 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-\mathrm{E_d})$，当 $\mathrm{E_d}=\frac{p}{20-p}>1$ 时，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}<0$，

故价格 p 满足 $10<p<20$ 时，降低价格反而使收益增加.

26. （05）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}}=\frac{3}{2}$.

27. （06）设 $f(x,y)=\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0,y>0$，求

（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

解：（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\frac{1-y\cdot\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{\pi x}{\arctan x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x\arctan x}+\pi=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x^2}+\pi$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x}+\pi=\lim_{x\to0^+}\frac{1-(1+x^2)}{2x(1+x^2)}+\pi=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{2(1+x^2)}+\pi=\pi .$$

28. （06）确定常数 A,B,C 的值，使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解：因 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax=o(x^3)$，有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]-A}{3x^2}=0$，

得 $\lim\limits_{x\to0}\{\mathrm{e}^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]-A\}=1+B-A=0$；

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]-A}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2]}{6x}=0$，

得 $\lim\limits_{x\to 0}e^x[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2]=1+2B+2C=0$；

且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2]}{6x}=\dfrac{B+4C}{6}=0$.

故 $A=\dfrac{1}{3}$，$B=-\dfrac{2}{3}$，$C=\dfrac{1}{6}$.

29．（06）证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

证：设 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，有 $f'(x)=x\cos x-\sin x+\pi$ ，$f''(x)=-x\sin x$，

当 $0<x<\pi$ 时，$f''(x)<0$，即 $f'(x)$ 单调减少，

则 $0<x<\pi$ 时，$f'(x)>f'(\pi)=\pi\cos\pi-\sin\pi+\pi=0$，即 $f(x)$单调增加，

故当 $0<a<b<\pi$ 时，$f(b)>f(a)$，即 $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

30．（07）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

解：方程两边关于 x 求导，得 $y'\cdot\ln y+y\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'-1+y'=0$ ，即 $y'=\dfrac{1}{2+\ln y}$ ，

则 $y''=-\dfrac{1}{(2+\ln y)^2}\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'=-\dfrac{1}{y(2+\ln y)^3}$ ，有 $y''\big|_{(x,y)=(1,1)}=-\dfrac{1}{8}<0$ 且 $y''(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近连续，

故 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近上凸.

31．（07）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$．证明：

（1）存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；

（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证：（1）设 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=M$ 是 $f(x)$、$g(x)$ 在 (a,b) 内的最大值，

若 $x_1=x_2$ ，则取 $\eta=x_1=x_2\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)=M$，

若 $x_1\neq x_2$ ，不妨设 $x_1<x_2$ ，设 $F(x)=f(x)-g(x)$，有 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，

且 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=M-g(x_1)\geq 0$，$F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-M\leq 0$，

故由零值定理知，存在 $\eta\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$；

（2）因 $F(x)$ 在 $[a,\eta]$ 与 $[\eta,b]$ 上连续，在 (a,η) 与 (η,b) 内可导，且 $F(a)=F(\eta)=F(b)=0$，

由罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$，

又因 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，

故再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

32．（08）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\sin x-x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$.

33．（08）设 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|\,dt,\quad 0<x<1$，求 $f(x)$ 的极值、单调区间和凹凸区间.

解：因 $0<x<1$，有 $f(x)=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt=(\dfrac{1}{2}t^2x-\dfrac{1}{3}t^3)\Big|_0^x-(\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t^2x)\Big|_x^1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}x^3$ ，

令 $f'(x)=-\dfrac{1}{2}+x^2=0$ ，得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（负值 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 舍去），

且当$0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$f'(x)<0$；当$\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1$时，$f'(x)>0$，

故$f(x)$在$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$时取得极小值$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}$，在区间$(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$内单调下降，$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$内单调增加；

又令$f''(x)=2x=0$，得$x=0$，且当$0<x<1$时，$f''(x)>0$，

故$f(x)$在$(0, 1)$内上凹.

34．（09）（1）证明拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（2）证明：若函数$f(x)$在$x=0$处连续，在$(0,\delta)\quad(\delta>0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则$f'_+(0)$存在，

且$f'_+(0)=A$.

证：（1）作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，

因$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，

则由罗尔中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，

故$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（2）任取$x\in(0,\delta)$，有$f(x)$在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$内可导，

则由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(0,x)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$，有$x\to0^+$时，$\xi\to0^+$，

故$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to0^+}f'(\xi)=A$.

35．（10）求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解：设$u=x^{\frac{1}{x}}$，有$\ln u=\frac{1}{x}\ln x=\frac{\ln x}{x}$，

则$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$，得$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}u=\mathrm{e}^0=1$，

设$y=(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$，有$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)=\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}$，

则$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)}{1-x^{-\frac{1}{x}}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}(1-\ln x)-\frac{1}{x^2}}{-x^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\ln x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\ln x}{x^{-\frac{1}{x}}(1-\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{\ln x}+1}{\frac{1}{\ln x}-1}=-1,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}y=\mathrm{e}^{-1}$.

36．（11）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

解：$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\sqrt{1+2\sin x}}+\cos x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin x)^{-\frac{3}{2}}\cdot2\cos x}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}$$

$$=\frac{0-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

37．（11）证明 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 实根.

证：设 $f(x)=4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，有 $f'(x)=\dfrac{4}{1+x^2}-1=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$，可得 $x=\pm\sqrt{3}$，

当 $x<-\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$；当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(-\sqrt{3})=4\arctan(-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 为极小值，

$f(\sqrt{3})=4\arctan\sqrt{3}-\sqrt{3}+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$ 为极大值，

当 $x<-\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，有 $f(x)>f(-\sqrt{3})=0$；

当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，$f'(x)>0$，有 $f(x)>f(-\sqrt{3})=0$；

可得在 $(-\infty,\sqrt{3})$ 内 $x=-\sqrt{3}$ 是唯一实根，

因 $f(\sqrt{3})=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，不妨取 $f(100)=4\arctan100-100+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}<0$，

由介值定理知存在 $\xi\in(\sqrt{3},100)$，使得 $f(\xi)=0$，

当 $x>\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调下降，可得在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内 $x=\xi$ 是唯一实根，

故 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 实根 $x=-\sqrt{3}$ 与 $x=\xi$.

38．（12）计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

解：$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{2-2\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}\cdot(2x-2\sin x)}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{x^2-2+2\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{24x}=\frac{1}{12}.$$

39．（12）证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$， $-1<x<1$．

证：设 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，有 $f(0)=0$，

因 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-0-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$，有 $f'(0)=0$，

则 $f''(x)=\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$

$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$，

可得当 $-1<x<1$ 时，$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\ge 2>0$，$f'(x)$ 单调增加，

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$，$f(x)$ 单调减少，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$ 单调增加，

则当 $-1<x<1$ 时，$f(0)=0$ 为极小值，有 $f(x)>f(0)=0$，

故 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}$， $-1<x<1$．

第五章 不定积分

一．选择题：

1． （99）设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　　　　）

（A）当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必为偶函数．　　　　（B）当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必为奇函数．

（C）当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必为周期函数．（D）当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必为单调增函数．

解：如取$f(x) = 3x^2$是偶函数，$F(x) = x^3 + 1$不是奇函数，排除（B），

又如$f(x) = 1 + \cos x$是周期函数，$F(x) = x + \sin x$不是周期函数，排除（C），

当$f(x) < 0$时，即使$f(x)$是单调增函数，都有$F(x)$是单调减函数，排除（D），

选择：（A）．

二．填空题：

1． （95）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解：令$t = \sqrt{1-x}$，有$x = 1 - t^2$，$\mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t$，

原式$= \int \frac{-2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)\cdot t} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -2\arctan t + C = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$，

填空：$-2\arctan\sqrt{1-x} + C$．

2． （96）设$\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，则$\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解：因$xf(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，有$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$，

则$\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$，

填空：$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$．

3． （98）$\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\mathrm{d}x =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解：原式$= \int (\ln x - 1)(-\mathrm{d}\frac{1}{x}) = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x}{x} + C$，

填空：$-\frac{\ln x}{x} + C$．

4． （00）$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解：令$t = \arcsin\sqrt{x}$，有$x = (\sin t)^2$，$\mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$，

原式$= \int \frac{t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos t\mathrm{d}t = 2\int t\cos t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}\sin t = 2t\sin t - 2\int \sin t\mathrm{d}t = 2t\sin t + 2\cos t + C$，

由于 $t=\arcsin\sqrt{x}$，有 $\sin t=\sqrt{x}$， $\cos t=\sqrt{1-x}$，原式 $=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$，

填空： $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

5． （02）已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$__________.

解：由于 $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln^2 x+C_1$，有 $f(x)=(\ln^2 x)'=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$，

原式 $=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln^2 x+C$，

填空：$2\ln x-\ln^2 x+C$.

三．解答题：

1． （99）设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$．已知 $F(0)=1, F(x)>0$，试求 $f(x)$.

解：由已知条件得 $\dfrac{1}{2}[F^2(x)]'=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$，

有 $F^2(x)=\int\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^x(-\mathrm{d}\dfrac{1}{1+x})=-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+x}+\int\dfrac{1}{1+x}\cdot(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+x}+\mathrm{e}^x+C=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C$，

由于 $F(0)=1$，有 $C=0$，得 $F^2(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$，又因 $F(x)>0$，有 $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+x}}$，

故 $f(x)=F'(x)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1+x}}\right)'=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\dfrac{x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.

2． （02）设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解：由于 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，有 $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，则 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$，

令 $t=\arcsin\sqrt{x}$，有 $x=(\sin t)^2$，$\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$，

原式 $=\int\dfrac{t}{\cos t}\cdot 2\sin t\cos t\mathrm{d}t=2\int t\sin t\mathrm{d}t=2\int t(-\mathrm{d}\cos t)=-2t\cos t+2\int\cos t\mathrm{d}t=-2t\cos t+2\sin t+C$，

由于 $t=\arcsin\sqrt{x}$，有 $\sin t=\sqrt{x}$， $\cos t=\sqrt{1-x}$，

故原式 $=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

3． （09）计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx\quad(x>0)$.

解：令 $t=\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)$，有 $\mathrm{e}^{t}=1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$， $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}$，

则 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx=\int td\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}\right)=\dfrac{t}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}-\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}dt=\dfrac{t}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}-\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^{t}-2}\mathrm{e}^{-t}\,dt$

$$=\frac{t}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}-\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-2\mathrm{e}^{-t}}(-d\,\mathrm{e}^{-t})=\frac{t}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}+\int\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{1-2\mathrm{e}^{-t}}\right)d\,\mathrm{e}^{-t}$$

$$=\frac{t}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2\mathrm{e}^{-t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d(1-2\mathrm{e}^{-t})=\frac{t}{\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{t}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\ln(1-2\mathrm{e}^{-t})+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}}-\frac{1}{4}\ln(1-\frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}})+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}-\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C\quad(x>0).$$

4. （11）求 $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

解：令 $t=\arcsin\sqrt{x}$，有 $\sqrt{x}=\sin t$， $x=\sin^{2}t$， $dx=2\sin t\cos tdt$，

故 $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\dfrac{t+\ln\sin^{2}t}{\sin t}\cdot2\sin t\cos tdt=2\int t\cos tdt+4\int\ln\sin t\cdot\cos tdt$

$$=2\int td\sin t+4\int\ln\sin td\sin t=2t\sin t-2\int\sin tdt+4\sin t\ln\sin t-4\int\sin t\cdot\frac{1}{\sin t}\cdot\cos tdt$$
$$=2t\sin t+2\cos t+4\sin t\ln\sin t-4\sin t+C$$
$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+4\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-4\sqrt{x}+C.$$

第六章 定积分

一．选择题：

1．（95）设$f(x)$为连续函数，且$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$，则$F'(x)$等于（　　　　）

（A）$\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$．（B）$f(\ln x)+f(\frac{1}{x})$．（C）$\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$．（D）$f(\ln x)-f(\frac{1}{x})$．

解：$F'(x)=f(\ln x)\cdot(\ln x)'-f(\frac{1}{x})\cdot(\frac{1}{x})'=\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$，

选择：（A）．

2．（97）设$f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t,\ g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（　　　　）

（A）低阶无穷小．　（B）高阶无穷小．　（C）等价无穷小．　（D）同阶但不等价的无穷小．

解：当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sin x^2\sim x^2$，有$f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{24}x^6$，

且当$x\to 0$时，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\sim\frac{x^5}{5}$，

选择：（B）．

3．（97）设$f(x),\ \varphi(x)$在点$x=0$的某邻域内连续，且当$x\to 0$时，$f(x)$是$\varphi(x)$的高阶无穷小，则当$x\to 0$时，$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$是$\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$的（　　　　）

（A）低阶无穷小．　（B）高阶无穷小．　（C）同阶但不等价的无穷小．　（D）等价无穷小．

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{x\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$，

选择：（B）．

4．（01）设$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & 若0\le x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 若1\le x\le 2,\end{cases}$则$g(x)$在区间$(0,2)$内（　　　　）

（A）无界．　（B）递减．　（C）不连续．　（D）连续．

解：当$0<x<1$时，$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x\frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\frac{u^3}{3}+u)\Big|_0^x=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}$，

当$1\le x<2$时，$g(x)=\int_0^1\frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u+\int_1^x\frac{1}{3}(u-1)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\frac{u^3}{3}+u)\Big|_0^1+\frac{1}{3}(\frac{u^2}{2}-u)\Big|_0^x=\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{5}{6}$，

有$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=g(1)=\frac{2}{3}$，连续，

选择：（D）．

5．（02）设函数$f(x)$连续，则在下列变上限定积分定义的函数中，必为偶函数的是（　　　　）

（A）$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$．　（B）$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$．　（C）$\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$．　（D）$\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$．

解：可以证明：若$g(x)$是偶函数，则$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$是奇函数；若$g(x)$是奇函数，则$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$是偶函数．

所有选项的被积函数中只有$t[f(t)+f(-t)]$是奇函数，

选择：（A）．

6. （04）设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）

（A）$F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.　　（B）$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 点不可导.

（C）$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$.

（D）$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.

解：当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x(-1)\mathrm{d}t=-x$；当 $x\geq 0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x 1\mathrm{d}t=x$；

有 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)=0$，且 $F'_-(0)=-1\neq F'_+(0)=1$，

选择：（B）.

7. （05）下列结论正确的是（　　）

（A）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都收敛.　　（B）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都发散.

（C）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛.　　（D）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散.

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$，收敛，

$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\ln\frac{x}{x+1}\Big|_\varepsilon^1=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1})=\infty$，发散，

选择：（D）.

8. （06）设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(x)\leq g(x)$，则对任何 $c\in(0, 1)$，有（　　）

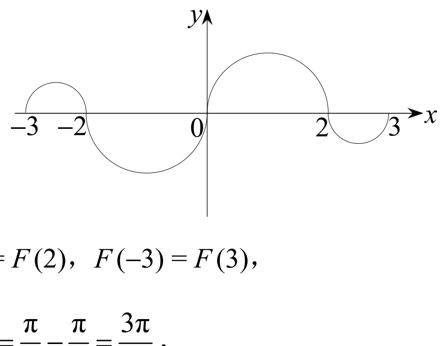
（A）$\int_{\frac{1}{2}}^c f(t)\mathrm{d}t\geq\int_{\frac{1}{2}}^c g(t)\mathrm{d}t$.　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^c f(t)\mathrm{d}t\leq\int_{\frac{1}{2}}^c g(t)\mathrm{d}t$.

（C）$\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t\geq\int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$.　　（D）$\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t\leq\int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$.

解：由定积分性质可知（D）成立，而选项（B）在 $c<\frac{1}{2}$ 时不成立，

选择：（D）.

9. （07）如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2, 0]$，$[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（　　）



（A）$F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.（B）$F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

（C）$F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.　（D）$F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

解：由于 $f(x)$ 是奇函数，可知 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数，有 $F(-2)=F(2)$，$F(-3)=F(3)$，

再由定积分几何意义知 $F(2)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi$，$F(3)=\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$，

选择：（C）.

10. （08）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的（　　　）

（A）跳跃间断点.　　　（B）可去间断点.　　　（C）无穷间断点.　　　（D）振荡间断点.

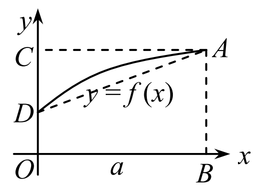
解：因 $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$，有 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点，

选择：（B）.

11. （08）曲线方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为（　　　）

（A）曲边梯形 $ABOD$ 面积.　　　（B）梯形 $ABOD$ 面积.

（C）曲边三角形 ACD 面积.　　　（D）三角形 ACD 面积.



解：因 $\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=xf(x)\big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx$，

有 $af(a)$ 是矩形面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 面积，即 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形 ACD 面积，

选择：（C）.

12. （09）使不等式 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt>\ln x$ 成立的 x 的范围是（　　　）

（A）$(0,1)$.　　　（B）$(1,\dfrac{\pi}{2})$.　　　（C）$(\dfrac{\pi}{2},\pi)$.　　　（D）$(\pi,+\infty)$.

解：设 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt-\ln x\quad(x>0)$，有 $f(1)=0$，

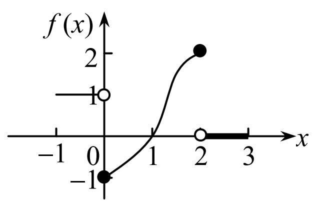
因 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin x-1}{x}\le 0$，有 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调减少，

故当 $0<x<1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，即 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt>\ln x$，

当 $x>1$ 时，$f(x)<f(1)=0$，即 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt<\ln x$，

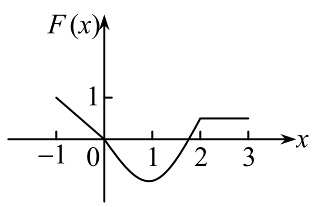
选择：（A）.

13. （09）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为

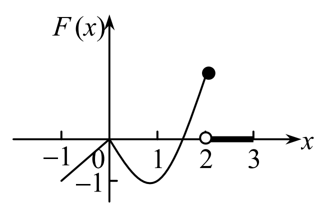


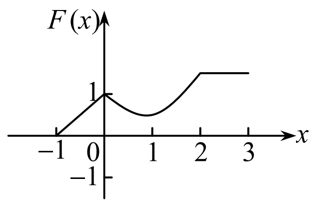
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　　　）

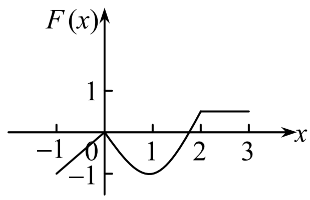
（A）　　　　　　.



（B）　　　　　　.



（C）  .

（D）  .

解：因 $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$，排除（C）；$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 连续，排除（B）；

又因 $-1<x<0$ 时，$f(x)>0$，有 $F(x)=\int_0^x f(t)dt=-\int_x^0 f(t)dt<0$，排除（A）；

选择：（D）.

14．（11）设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$，则 I,J,K 的大小关系是（　　　　）

（A）$I<J<K$.　　（B）$I<K<J$.　　（C）$J<I<K$.　　（D）$K<J<I$.

解：当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1<\cot x$，有 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$，

则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx<K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx<J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx$，

选择：（B）.

二．填空题：

1．（97）若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$__________.

解：设 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，有 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}$，

则 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1+A\cdot\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}+A\cdot\dfrac{\pi}{4}$，

填空：$\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

2．（97）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$__________.

解：设 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，有 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+Ax^3$，

则 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+A\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1+A\cdot\dfrac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}+A\cdot\dfrac{1}{4}$，

填空：$\dfrac{\pi}{3}$.

3．（99）设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=$__________.

解：$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(\pi)-\dfrac{\pi}{2}f(\dfrac{\pi}{2})-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$，

由于 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，即 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\dfrac{2}{\pi}$ 且 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

故 $f(\pi)=\dfrac{\pi\cos\pi-\sin\pi}{\pi^2}=-\dfrac{1}{\pi}$，$f(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{4}{\pi^2}$，即 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=-1+\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{4}{\pi}-1$，

填空：$\dfrac{4}{\pi}-1$．

4．（00）$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x=$__________．

解：$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x-2}+1}\cdot\mathrm{e}^{x-2}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{(\mathrm{e}^{x-1})^{2}+1}\cdot\mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1}=\mathrm{e}^{-1}\arctan\mathrm{e}^{x-1}\Big|_{1}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\dfrac{\pi}{4}$，

填空：$\dfrac{\pi}{4\mathrm{e}}$．

5．（03）$\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$__________．

解：$\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}0\cdot\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0+(-2x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x})\Big|_{0}^{1}=-4\mathrm{e}^{-1}+2$，

填空：$2-4\mathrm{e}^{-1}$．

6．（04）设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{x^{2}}, & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\ge\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x=$__________．

解：令 $t=x-1$，得 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(t^{2})\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}t\mathrm{e}^{t^{2}}\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t^{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+(-t)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$，

填空：$-\dfrac{1}{2}$．

7．（08）函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^{3}}{1+x^{4}}$，求积分 $\int_{2}^{2\sqrt{2}}f(x)dx=$__________．

解：因 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^{3}}{1+x^{4}}=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\dfrac{1}{x^{2}}+x^{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\left(\dfrac{1}{x}+x\right)^{2}-2}$，即 $f(x)=\dfrac{x}{x^{2}-2}$，

则 $\int_{2}^{2\sqrt{2}}f(x)dx=\int_{2}^{2\sqrt{2}}\dfrac{x}{x^{2}-2}dx=\int_{2}^{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{x^{2}-2}\cdot\dfrac{1}{2}d(x^{2}-2)=\dfrac{1}{2}\ln(x^{2}-2)\Big|_{2}^{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\ln 6-\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 3$，

填空：$\dfrac{1}{2}\ln 3$．

8．（10）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_{0}^{x+y}\mathrm{e}^{-u}\,du=\int_{0}^{x}u\sin^{2}u\,du$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$__________．

解：两边关于 x 求导，得 $\mathrm{e}^{-(x+y)}\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=x\sin^{2}x$，

令 $x=0$，得 $\mathrm{e}^{-y(0)}\cdot\left(1+\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}\right)=0$，即 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1$，

填空：-1．

9．（10）设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^{2}x)}}$ $(\mathrm{e}\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转

一周所得空间区域的体积是__________.

解：$V_x=\pi\int_{e}^{+\infty}y^2(x)dx=\pi\int_{e}^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx=\pi\int_{e}^{+\infty}\dfrac{1}{1+\ln^2 x}d(\ln x)=\pi\arctan(\ln x)\Big|_{e}^{+\infty}=\pi\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}$，

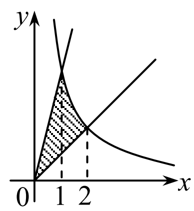
填空：$\dfrac{\pi^2}{4}$.

10．（11）曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为__________.

解：$V_x=\pi\int_1^2(\sqrt{x^2-1})^2dx=\pi\int_1^2(x^2-1)dx=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\pi\left(\dfrac{8}{3}-2\right)-\pi\left(\dfrac{1}{3}-1\right)=\dfrac{4\pi}{3}$，

填空：$\dfrac{4\pi}{3}$.

11．（12）由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中所围成图形的面积为__________.



解：$S=\int_0^1(4x-x)dx+\int_1^2\left(\dfrac{4}{x}-x\right)dx=\dfrac{3}{2}x^2\Big|_0^1+\left(4\ln x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$

$$=\frac{3}{2}+(4\ln 2-2)-\left(0-\frac{1}{2}\right)=4\ln 2,$$

填空：$4\ln 2$.

三．解答题：

1．（95）已知：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$，求常数 a 的值.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{a}{x}}{1+\dfrac{a}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{-a}{x}\right)^{\frac{x}{-a}\cdot(-a)}}{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}}=\dfrac{e^{-a}}{e^{a}}=e^{-2a}$，

$\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx=2\int_a^{+\infty}x^2(-de^{-2x})=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}\cdot 2xdx=2a^2e^{-2a}+2\int_a^{+\infty}x(-de^{-2x})$

$$=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}-e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a},$$

则 $e^{-2a}=(2a^2+2a+1)e^{-2a}$，有 $1=2a^2+2a+1$，

故 $a=0$ 或 $a=-1$.

2．（96）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(b)$，求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

证：根据积分中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\eta)$，即 $f(b)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\eta)$，

因 $f(x)$ 在 $[\eta,b]$ 上连续，在 (η,b) 内可导，

故根据罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

3．（96）计算$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}dx$．

解：$\int\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}dx=\int\frac{x}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}(-d\,\mathrm{e}^{-x})=\int xd\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}dx=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}dx$

$$=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}d\,\mathrm{e}^x=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C,$$

原式$=\left[\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]_0^{+\infty}=\left\{\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\ln[\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})]\right\}\Big|_0^{+\infty}=\left[\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}-x-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]_0^{+\infty}$

$$=\left[\frac{-x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{\mathrm{e}^x+1}-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]-(0-\ln2)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\mathrm{e}^x}-\ln1\right]+\ln2=\ln2.$$

注：此题若直接作定积分，将出现$\infty-\infty$的情形．

4．（96）已知一抛物线通过x轴上的两点$A(1,0)$，$B(3,0)$，

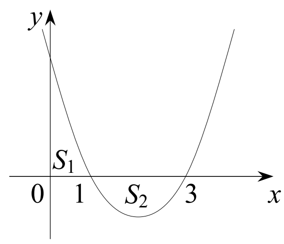
（1）求证：两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于x轴与该抛物线所围图形的面积；

（2）计算上述两个平面图形绕x轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比．

解：（1）抛物线通过x轴上的两点$A(1,0)$，$B(3,0)$，有抛物线方程为$y=a(x-1)(x-3)=a(x^2-4x+3)$，

则$S_1=\left|\int_0^1 a(x^2-4x+3)\mathrm{d}x\right|=\left|a(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x)\Big|_0^1\right|=\frac{4}{3}|a|$，

$S_2=\left|\int_1^3 a(x^2-4x+3)\mathrm{d}x\right|=\left|a(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x)\Big|_1^3\right|=\left|a(0-\frac{4}{3})\right|=\frac{4}{3}|a|$，



故$S_1=S_2$．

（2）$V_1=\pi\int_0^1[a(x^2-4x+3)]^2\mathrm{d}x=\pi a^2\int_0^1(x^4-8x^3+22x^2-24x+9)\mathrm{d}x$

$$=\pi a^2(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{22x^3}{3}-12x^2+9x)\Big|_0^1=\frac{38}{15}\pi a^2,$$

$V_2=\pi\int_1^3[a(x^2-4x+3)]^2\mathrm{d}x=\pi a^2(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{22x^3}{3}-12x^2+9x)\Big|_1^3=\frac{16}{15}\pi a^2$，

故$V_1∶V_2=19∶8$．

5．（97）设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续、单调不减且$f(0)\ge0$，试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t, & 若x>0,\\ 0, & 若x=0,\end{cases}$$

在$[0,+\infty)$上连续且单调不减（其中$n>0$）．

证：由于积分上限函数$\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$在$(0,+\infty)$内连续，知$F(x)$在$(0,+\infty)$内连续，

且$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n f(x)}{1}=0=F(0)$，可得$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续；

当$x>0$时，$F'(x)=[\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t]'=-\frac{1}{x^2}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\cdot x^n f(x)=\frac{1}{x}[x^n f(x)-\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t]$，

根据积分中值定理，存在$\xi \in (0, x)$，使得$\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t = \xi^n f(\xi)\cdot(x-0)$，

由于$0<\xi<x$且$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调不减，则$F'(x)=\dfrac{1}{x}[x^n f(x)-\xi^n f(\xi)]\ge 0$，

故$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调不减.

6. （97）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

（1）若$f(x)$为偶函数，则$F(x)$也是偶函数；

（2）若$f(x)$单调不增，则$F(x)$单调不减.

证：（1）$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，令$t=-u$，有$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，且$t=0$时$u=0$，$t=-x$时$u=x$，

则$F(-x)=\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x(x-2u)f(-u)\mathrm{d}u$，

若$f(x)$为偶函数，有$F(-x)=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x)$，

故$F(x)$是偶函数；

（2）$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$，

则$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$，

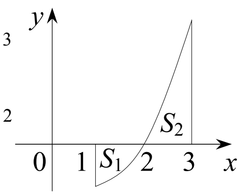
根据积分中值定理，存在$\xi\in(0,x)$，使得$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\cdot(x-0)$，即$F'(x)=x[f(\xi)-f(x)]$，

若$f(x)$单调不增，有$\xi\in(0,x)$时，$f(\xi)-f(x)\ge 0$，即$F'(x)\ge 0$，

故$F(x)$单调不减.

7. （97）求曲线$y=x^2-2x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$所围成的平面图形的面积S，并求该平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积V.

解：$S=\int_1^2[-(x^2-2x)]\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-2x)\mathrm{d}x=(-\dfrac{x^3}{3}+x^2)\Big|_1^2+(\dfrac{x^3}{3}-x^2)\Big|_2^3=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}+0-(-\dfrac{4}{3})=2$，



$V_y=2\pi\int_1^2 x[-(x^2-2x)]\mathrm{d}x+2\pi\int_2^3 x(x^2-2x)\mathrm{d}x=2\pi(-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3})\Big|_1^2+2\pi(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3})\Big|_2^3$

$=2\pi(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{12})+2\pi[\dfrac{9}{4}-(-\dfrac{4}{3})]=9\pi$.

8. （98）设直线$y=ax$与抛物线$y=x^2$所围成图形的面积为S_1，它们与直线$x=1$所围成的图形面积为S_2，并且$a<1$.

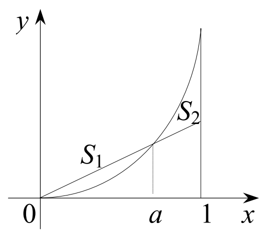
（1）试确定a的值，使S_1+S_2达到最小，并求出最小值；

（2）求该最小值所对应的平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1）$S_1=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x=(\dfrac{ax^2}{2}-\dfrac{x^3}{3})\Big|_0^a=\dfrac{a^3}{6}$，$S_2=\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{ax^2}{2})\Big|_a^1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a^3}{6}$，

故$S(a)=S_1+S_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a^3}{3}$，令$S'(a)=-\dfrac{1}{2}+a^2=0$，得$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（负值舍去），

即$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$是唯一驻点，且$S''(a)=2a>0$，



故当$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，S_1+S_2达到最小，最小值为$S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}$；

（2）$V_1=\pi\int_0^a[(ax)^2-x^4]\mathrm{d}x=\pi(\frac{ax^3}{3}-\frac{x^5}{5})\Big|_0^a=\frac{2\pi a^5}{15}$，

$V_2=\pi\int_a^1[x^4-(ax)^2]\mathrm{d}x=\pi(\frac{x^5}{5}-\frac{ax^3}{3})\Big|_a^1=\pi(\frac{1}{5}-\frac{a^2}{3}+\frac{2a^5}{15})$，故$V(a)=V_1+V_2=\pi(\frac{1}{5}-\frac{a^2}{3}+\frac{4a^5}{15})$，

故当$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，旋转体体积$V(\frac{1}{\sqrt{2}})=\pi(\frac{1}{30}+\frac{1}{15\sqrt{2}})$．

9．（99）设函数$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$．已知$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$的值.

解：令$u=2x-t$，有$t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，且$t=0$时，$u=2x$；$t=x$时，$u=x$；

则$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\int_{2x}^x(2x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan x^2$，

两边求导，得：$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[f(2x)\cdot 2-f(x)]-[2xf(2x)\cdot 2-xf(x)]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x$，

有$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$，即$\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}xf(x)+\frac{x}{2(1+x^4)}$，令$x=1$，

则$\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{4}$．因$f(1)=1$，

故$\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{3}{4}$．

10．（99）已知$f(x)$连续，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$的值.

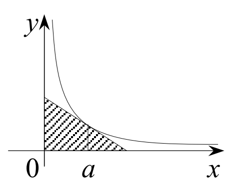
解：令$u=x-t$，有$t=x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，且$t=0$时，$u=x$；$t=x$时，$u=0$；

则$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=1-\cos x$，

两边求导，得：$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=\sin x$，即$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin x$，

故$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\sin\frac{\pi}{2}=1$．

11．（99）曲线$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$的切线与x轴和y轴围成一个图形，记切点的横坐标为a，试求切线方程和这个图形的面积，当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？



解：由于切点为$(a,\frac{1}{\sqrt{a}})$，切线斜率为$y'\big|_{x=a}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}$，

故切线方程为$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$，即$y=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}x+\frac{3}{2\sqrt{a}}$．

可得切线在x轴上的横截距为$x\,|_{y=0}=3a$，在y轴上的纵截距为$y\big|_{x=0}=\frac{3}{2\sqrt{a}}$，

故三角形面积 $S(a)=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4}\sqrt{a}$.

切点沿曲线趋于无穷远有两种情形：$a\to 0^+$ 或 $a\to+\infty$，
当 $a\to 0^+$ 时，$S(a)\to 0$；当 $a\to+\infty$ 时，$S(a)\to+\infty$.

12．（00）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0,\ \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.

试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证：根据积分中值定理，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使得 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_1)(\pi-0)=0$ ，即 $f(\xi_1)=0$，

假设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内不存在不同于 ξ_1 的零点，即 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内都没有零点，

则 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号，（否则 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\xi_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^\pi f(x)\mathrm{d}x\neq 0$ ），

不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)<0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)>0$.

由于 $\int_0^\pi f(x)(\cos\xi_1-\cos x)\mathrm{d}x=\cos\xi_1\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x-\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\cos\xi_1\cdot 0-0=0$ ，

且在 $(0,\xi_1)$ 内 $\cos x>\cos\xi_1$，$f(x)(\cos\xi_1-\cos x)>0$，

在 (ξ_1,π) 内 $\cos x<\cos\xi_1$，$f(x)(\cos\xi_1-\cos x)>0$，这与 $\int_0^\pi f(x)(\cos\xi_1-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，

故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内存在不同于 ξ_1 的零点 ξ_2，得证.

注：此题可改为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$.

试证明：在 (a,b) 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

13．（00）计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x-2}+1}\mathrm{e}^{x-3}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^{x-1})^2+1}\mathrm{e}^{-2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1}=\mathrm{e}^{-2}\arctan\mathrm{e}^{x-1}\Big|_1^{+\infty}=\mathrm{e}^{-2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}$.

14．（01）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\quad(k>1)$ ，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

证：根据积分中值定理，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{k})$ ，使得 $\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=\eta\mathrm{e}^{1-\eta}f(\eta)\cdot(\frac{1}{k}-0)$ ，

设辅助函数 $F(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，有 $F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=\eta\mathrm{e}^{1-\eta}f(\eta)=F(\eta)$ ，

由于 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，
而 $F'(x)=[x\mathrm{e}^{1-x}f(x)]'=\mathrm{e}^{1-x}f(x)-x\mathrm{e}^{1-x}f(x)+x\mathrm{e}^{1-x}f'(x)=\mathrm{e}^{1-x}[(1-x)f(x)+xf'(x)]$，
故 $(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，　　即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

15．（01）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$ ，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证：根据积分中值定理，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{3})$ ，使得 $\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\eta^2}f(\eta)\cdot(\frac{1}{3}-0)$ ，

设辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)$ ，有 $F(1)=f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\eta^2}f(\eta)=F(\eta)$ ，

由于 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

而 $F'(x)=[\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)]'=-2x\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)+\mathrm{e}^{1-x^2}f'(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}[-2xf(x)+f'(x)]$，

故 $-2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$，　　即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

16．（01）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=\dfrac{5}{2}$，且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$，满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u\text{，　求 } f(x).$$

解：两边关于 t 求导，得：$f(xt)\cdot x=\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+xf(t)$，令 $t=1$，有 $xf(x)=\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+\dfrac{5}{2}x$，（*）

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，有 $\int_1^x f(u)\mathrm{d}u$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，则 $f(x)=\dfrac{1}{x}\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+\dfrac{5}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，

对（*）式两边关于 x 求导，得 $f(x)+xf'(x)=f(x)+\dfrac{5}{2}$，即 $f'(x)=\dfrac{5}{2x}$，$f(x)=\dfrac{5}{2}\ln x+C$，

由于 $f(1)=\dfrac{5}{2}$，有 $\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}\ln 1+C$，$C=\dfrac{5}{2}$，

故 $f(x)=\dfrac{5}{2}\ln x+\dfrac{5}{2}$.

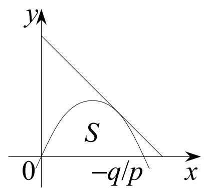
注：在（*）式也可令 $y=\int_1^x f(u)\mathrm{d}u$，变为微分方程 $xy'=y+\dfrac{5}{2}x$，$y|_{x=1}=0$，再用第十章的方法求解.

17．（01）已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0$，$q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

（1）问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？

（2）求出此最大值.

解：要与直线 $x+y=5$ 相切，切线斜率应为 -1，令 $y'=2px+q=-1$，得 $x=\dfrac{q+1}{-2p}$，



且切点 $(\dfrac{q+1}{-2p},\dfrac{q^2-1}{-4p})$ 满足 $\dfrac{q+1}{-2p}+\dfrac{q^2-1}{-4p}=5$，即 $p=-\dfrac{(q+1)^2}{20}$，

由于 $S(q)=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)\mathrm{d}x=(\dfrac{px^3}{3}+\dfrac{qx^2}{2})\Big|_0^{-\frac{q}{p}}=\dfrac{q^3}{6p^2}=\dfrac{200q^3}{3(q+1)^4}$，

令 $S'(q)=\dfrac{200\cdot 3q^2(q+1)^4-200q^3\cdot 4(q+1)^3}{3(q+1)^8}=\dfrac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0$，得 $q=3$，唯一驻点（$q>0$），

且 $0<q<3$ 时，$S'(q)>0$；$q>3$ 时，$S'(q)<0$；即 $q=3$ 为极大值点，此时 $p=-\dfrac{16}{20}=-\dfrac{4}{5}$，

故当 $p=-\dfrac{4}{5}$，$q=3$ 时，S 达到最大值，最大值为 $S(3)=\dfrac{225}{32}$.

18．（02）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，利用闭区间上连续函数的性质，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最小值 m 与最大值 M，即 $m\le f(x)\le M$，
而 $g(x)>0$，有 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$，

即 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M$，因 $f(x)$在$[a, b]$上连续，

故根据介值定理，存在$\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$，得证.

19．（02）求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解：原式$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u\}'}{[x(1-\cos x)]'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)+x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{\sin x+\sin x+x\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\arctan(1+x^2)}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x} = \frac{2\arctan 1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

20．（02）设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$.

（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

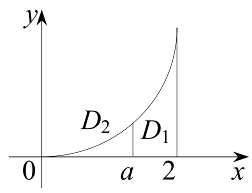
（2）问当 a 为何值时，$V_1 + V_2$ 取得最大值？试求此最大值.

解：（1）$V_1 = \pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x = \pi\cdot\left.\dfrac{4x^5}{5}\right|_a^2 = \dfrac{128\pi}{5} - \dfrac{4\pi a^5}{5}$，$V_2 = 2\pi\int_0^a x\cdot 2x^2\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\left.\dfrac{2x^4}{4}\right|_0^a = \pi a^4$.

（2）设$V(a) = V_1 + V_2 = \dfrac{128\pi}{5} - \dfrac{4\pi a^5}{5} + \pi a^4$，令 $V'(a) = -4\pi a^4 + 4\pi a^3 = 0$，

得 $a = 1$，唯一驻点，且 $V''(a) = -16\pi a^3 + 12\pi a^2$，$V''(1) = -4\pi < 0$，

故当 $a = 1$ 时，$V_1 + V_2$ 取得最大值为$V(1) = \dfrac{129\pi}{5}$.



21．（03）设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t) = kt$,　$t \in [0, T]$,　$(k > 0)$．欲在 T 时，将数量为 A 的该商品销售完，试求：

（1）t 时该商品的剩余量，并确定 k 的值；

（2）在时间段$[0, T]$上的平均剩余量.

解：（1）由于 $x(T) = kT = A$，

故 $k = \dfrac{A}{T}$，且 t 时刻该商品的剩余量为 $r(t) = A - x(t) = A - \dfrac{At}{T}$.

（2）在时间段$[0, T]$上的平均剩余量 $\bar{r} = \dfrac{1}{T}\int_0^T r(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\int_0^T(A - \dfrac{At}{T})\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\left.(At - \dfrac{At^2}{2T})\right|_0^T = \dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{AT}{2} = \dfrac{A}{2}$.

22．（04）设 $f(x), g(x)$ 在$[a, b]$上连续，且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \ge \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x \in [a, b)$，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，证明：

$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

证：设 $F(x) = \int_a^x[f(t) - g(t)]\mathrm{d}t$，有 $x \in [a, b]$时，$F(x) \ge 0$，且 $F(a) = F(b) = 0$，

则$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}F(x)=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\le 0$，

故$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

23．（04）设$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}, & x\le 0,\\ \mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\end{cases}$ S表示夹在x轴与直线$y=F(x)$之间的面积．对任何t，$S_1(t)$表示矩形$-t\le x\le t, 0\le y\le F(t)$的面积，求：

（1）$S(t)=S-S_1(t)$的表达式；

（2）$S(t)$的最小值．

解：（1）$S=\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-\infty}^0-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1$，$S_1(t)=2tF(t)=2t\mathrm{e}^{-2t}\quad(t>0)$，

故$S(t)=S-S_1(t)=1-2t\mathrm{e}^{-2t}\quad(t>0)$.

（2）令$S'(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t}\cdot(-2)=(4t-2)\mathrm{e}^{-2t}=0$，得$t=\frac{1}{2}$，唯一驻点，

且当$0<t<\frac{1}{2}$时$S'(t)<0$；当$t>\frac{1}{2}$时$S'(t)>0$；

故$t=\frac{1}{2}$时，$S(t)$最小，最小值为$S(\frac{1}{2})=1-\mathrm{e}^{-1}$.

24．（05）设$f(x), g(x)$在[0, 1]上的导数连续，且$f(0)=0$，$f'(x)\ge 0$，$g'(x)\ge 0$，证明：对任何$a\in[0, 1]$，有$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\ge f(a)g(1)$.

证：$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^a[g(x)f'(x)+f(x)g'(x)]\mathrm{d}x+\int_a^1 f(a)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^1[f(x)-f(a)]g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(x)g(x)\Big|_0^a+f(a)\cdot g(x)\Big|_a^1+\int_a^1[f(x)-f(a)]g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)g(a)-f(0)g(0)+f(a)[g(1)-g(a)]+\int_a^1[f(x)-f(a)]g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)g(1)+\int_a^1[f(x)-f(a)]g'(x)\mathrm{d}x$$

由于$f'(x)\ge 0$，$g'(x)\ge 0$，有$x\in[a, 1]$时，$f(x)-f(a)>0$，即$\int_a^1[f(x)-f(a)]g'(x)\mathrm{d}x>0$，

故$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\ge f(a)g(1)$.

25．（08）设$f(x)$是周期为 2 的连续函数，

（1）证明对任意实数都有$\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$；

（2）证明$G(x)=\int_0^x[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds]dt$是周期为 2 的周期函数.

证：（1）因$\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_t^2 f(x)dx+\int_2^{t+2}f(x)dx$，对$\int_2^{t+2}f(x)dx$换元，

令$x=u+2$，有$f(x)=f(u+2)=f(u)$，$dx=du$，且$x=2$时，$u=0$；$x=t+2$时，$u=t$，

则$\int_2^{t+2}f(x)dx=\int_0^t f(u)du=\int_0^t f(x)dx$，

故$\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_t^2 f(x)dx + \int_2^{t+2} f(x)dx = \int_t^2 f(x)dx + \int_0^t f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$；

（2）因$\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$是与$t$无关的常数，记$\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = A$，

则$G(x+2) = \int_0^{x+2}[2f(t)-A]dt = \int_0^x[2f(t)-A]dt + \int_x^{x+2}[2f(t)-A]dt = G(x) + 2\int_x^{x+2} f(t)dt - At\Big|_x^{x+2}$

$$= G(x) + 2\int_0^2 f(t)dt - 2A = G(x) + 2A - 2A = G(x),$$

故$G(x)$是周期为 2 的周期函数.

26. （10）（1）比较$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n |\ln t| dt \quad (n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由；

（2）设$u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \quad (n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解：（1）设$f(t) = \ln(1+t) - t$，有$f(0)=0$，$f'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t}$，当$t>0$时，$f'(t)<0$，

则当$t>0$时，$f(t)$单调减少，有$f(t) < f(0) = 0$，即$\ln(1+t) < t$，

故当$t>0$时，$0 < |\ln t|[\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$，即$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt \quad (n=1,2,\cdots)$；

（2）因$\int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = -\int_0^1 \ln t \cdot \dfrac{1}{n+1} d(t^{n+1}) = -\ln t \cdot \dfrac{1}{n+1} t^{n+1}\Big|_0^1 + \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} \cdot \dfrac{1}{t} dt$

$$= 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2},$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n |\ln t| dt = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$，

因$0 < u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$，

故由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt = 0$.

27. （10）设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内存在二阶导数，且$2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$，

（1）证明：存在$\eta \in (0,2)$，使$f(\eta) = f(0)$；

（2）证明：存在$\xi \in (0,3)$，使$f''(\xi) = 0$.

证：（1）因$f(x)$在$[0,2]$上连续，由积分中值定理知，存在$\eta \in (0,2)$，使得$\int_0^2 f(x)dx = 2f(\eta)$，

故$\int_0^2 f(x)dx = 2f(\eta) = 2f(0)$，即$f(\eta) = f(0)$；

（2）因$f(x)$在$[2,3]$上连续，设$f(x)$在$[2,3]$上的最大值为M，最小值为m，

则$m \le f(2) \le M$，$m \le f(3) \le M$，有$m \le \dfrac{f(2)+f(3)}{2} = f(0) \le M$，

由介值定理知，存在$\eta^* \in [2,3]$，使得$f(\eta^*) = \dfrac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$，

因$f(x)$在$[0,\eta]$、$[\eta,\eta^*]$上连续，在$(0,\eta)$、(η,η^*)内可导，且$f(0) = f(\eta) = f(\eta^*)$，

则由罗尔定理知，存在$x_1 \in (0,\eta)$，$x_2 \in (\eta,\eta^*)$，使得$f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$，

又因 $f'(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，在 (x_1, x_2) 内可导，且 $f'(x_1) = f'(x_2)$，

故存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 3)$，使得 $f''(\xi) = 0$.

第七章 无穷级数

一．选择题：

1．（02）设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$\frac{\sqrt{5}}{3}$与$\frac{1}{3}$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$的收敛半径为（　　）

（A）5．　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{3}$．　　（C）$\frac{1}{3}$．　　（D）$\frac{1}{5}$．

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 3$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}^2/b_{n+1}^2}{a_n^2/b_n^2}\right| = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{5}$，收敛半径为 5，

选择：（A）．

2．（03）设$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$，$q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$，则下列命题正确的是（　　　　）

（A）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛．（B）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛．

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$敛散性都不定．

（D）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$敛散性都不定．

解：由于$0 \le p_n \le |a_n|$，$0 \le q_n \le |a_n|$，若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，有$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛，

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$发散，有$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都发散，

选择：（B）．

3．（04）设有以下命题：

① 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；　　② 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$收敛；

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；　　④ 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛；

则以上命题中正确的是（　　　　）

（A）①②．　　（B）②③．　　（C）③④．　　（D）①④．

解：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$每两项加括号后的级数．加括号后的级数收敛，原级数不一定收敛，①错误；

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$去掉前 1000 项后的级数．级数去掉或增加有限项，敛散性不变，②正确；

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，由达朗贝尔比值判别法可知③正确；

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n^2}$ 都发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1-n}{n^2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，④错误；

选择：（B）.

4. （05）设 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散.　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 每两项加括号后的级数，收敛的级数加括号后仍然收敛，

选择：（D）.

5. （06）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

解：当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不是正项级数时，（A）、（B）、（C）都不成立．如 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 都发散.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛，

选择：（D）.

6. （11）设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　　（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　　（D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

解：若一个级数收敛，则对其加括号后的级数也收敛，

因$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$就是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$每两项加括号后所成的级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，

选择：（A）.

7. （12）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛，则$\alpha$范围为（　　　）

（A）$0<\alpha<\frac{1}{2}$.　　（B）$\frac{1}{2}<\alpha<1$.　　（C）$1<\alpha<\frac{3}{2}$.　　（D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$.

解：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，当$p>1$时，绝对收敛；当$0<p\le 1$时，条件收敛，

因$n\to+\infty$时，$\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}$，即当$\alpha>\frac{3}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}$绝对收敛，

且当$1\le\alpha<2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛，

则$\frac{3}{2}<\alpha<2$

选择：（D）.

二．填空题：

1. （95）级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$的和为 ________.

解：这是公比为$q=\frac{\ln 3}{2}<1$的等比级数，其和为$S=\frac{1}{1-\frac{\ln 3}{2}}=\frac{2}{2-\ln 3}$，

填空：$\frac{2}{2-\ln 3}$.

2. （99）$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$________.

解：设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，有$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad x\in(-1,1)$，

则$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S(\frac{1}{2})=4$，

填空：4.

3. （09）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为________.

解：因$l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\mathrm{e}^n-(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n+1}-(-1)^{n+1}}{\mathrm{e}^n-(-1)^n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$

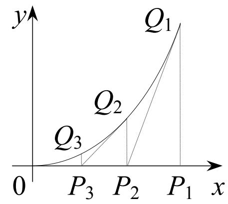
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}-(-1)\cdot\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}=\mathrm{e},$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{l}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

填空：$\frac{1}{\mathrm{e}}$.

三．解答题：

1．（97）从点 $P_1(1,0)$作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$；再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2，然后又从 P_2 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 Q_2，依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\cdots;P_n,Q_n$.



（1）求 OP_n；

（2）求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$的和.

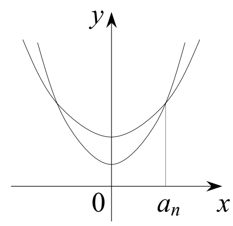
其中 $n\quad(n\ge1)$为自然数，而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离.

解：设 $\overline{OP_n}=a$，切点 $Q_n(a,a^2)$，切线斜率 $y'|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$，

则横截距为 $x\big|_{y=0}=\frac{a}{2}$，$\overline{OP_{n+1}}=\frac{a}{2}$，即 $\overline{OP_1}=1$, $\overline{OP_2}=\frac{1}{2}$, $\overline{OP_3}=\frac{1}{4},\cdots$，

故 $\overline{OP_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$，且 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\overline{OP_n})^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.

2．（98）两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点横坐标的绝对值为 a_n，



（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；

（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

解：由 $y=nx^2+\frac{1}{n}$和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 联立解得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，即 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，

$$故\ S_n=\int_{-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}]\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x}{n(n+1)}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}=\frac{4}{3n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$且\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n(n+1)}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]$$

$$=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{n+1}]=\frac{4}{3}.$$

3．（00）设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

解：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\,\mathrm{d}\sin x=\left.\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{(n+1)(\sqrt{2})^{n+1}}$，设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，有 $S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sum_{n=0}^{\infty}I_n$，

收敛区间为 $x\in[-1,1)$，且 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)$，

则 $S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=0-\ln|1-t|\,\|_0^x=-\ln(1-x)$，即 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1)$，

故 $\sum_{n=0}^{\infty}I_n=S(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

4．（03）求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}\quad(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

解：$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$，收敛区间为 $x\in[-1,1]$，有 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\frac{-x}{1+x^2},\quad x\in(-1,1)$，

故 $f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{-t}{1+t^2}\mathrm{d}t=1-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(t^2)=1-\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\,\|_0^x=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1]$.

令 $f'(x)=\frac{-x}{1+x^2}=0$，得 $x=0$，且 $f''(x)=\frac{-1\cdot(1+x^2)+x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$，有 $f''(0)=-1<0$，

故当 $x=0$ 时，取得极大值 $f(0)=1$.

5．（05）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

解：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$，

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，收敛区间为 $x\in(-1,1)$，有 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad x\in(-1,1)$，

则 $f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=0+\int_0^x(\frac{\frac{1}{2}}{1+t}+\frac{\frac{1}{2}}{1-t}-1)\mathrm{d}t=[\frac{1}{2}(\ln|1+t|-\ln|1-t|)-t]\|_0^x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-1$，$x\in(-1,1)$ 且 $x\neq 0$，又有 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad x\in(-1,1)$，

即 $S(x)=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-1-\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$ 且 $x\neq 0$，而 $S(0)=0$，

故 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6．（06）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$的收敛域及和函数$S(x)$.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{n(2n-1)}{x^{2n+1}}\right|=x^2$，当$x^2<1$时，即$x\in(-1,1)$时，级数收敛，

当$x=\pm1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$收敛，

故收敛域为$x\in[-1,1]$；

因$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)},\quad x\in[-1,1]$，令$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)},\quad x\in[-1,1]$，

则$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2nx^{2n-1}}{n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in(-1,1)$，

且$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2},\quad x\in(-1,1)$，

得$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_0^x=2\arctan x,\quad x\in(-1,1)$，

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x 2\arctan t\mathrm{d}t=2t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x t\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+t^2)\Big|_0^x=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in(-1,1),$$

故根据和函数的连续性，可得$S(x)=xf(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1]$.

7．（07）将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$展开成$x-1$的幂级数，并指出其收敛区间.

解：$f(x)=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+1}$，

$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n$，$\frac{x-1}{3}\in(-1,1)$，即$x\in(-2,4)$，

$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-1+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$，$\frac{x-1}{2}\in(-1,1)$，即$x\in(-1,3)$，

故$f(x)=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}(-\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})(x-1)^n,\quad x\in(-1,3)$.

8．（08）设银行存款的年利率$r=0.05$，并依年复利计算．某基金会希望通过存款A万元实现第一年取出19万元，第二年取出28万元，…，第n年取出$(10+9n)$万元，并能按此规律一直提取下去，问A至少为多少万元？

解：年利率 $r=0.05$，并依年复利计算，第 t 年取出的资金 a 万元，其现值为 $a\mathrm{e}^{-rt}$，而 A 至少为其总现值，

则总现值 $19\mathrm{e}^{-0.05}+28\mathrm{e}^{-0.1}+\cdots+(10+9n)\mathrm{e}^{-0.05n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(10+9n)\mathrm{e}^{-0.05n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-0.05n}+9\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-0.05n}$，

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，即 $\dfrac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，有 $\int_0^x\dfrac{f(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=f(x)=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1)$，

因等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-0.05n}=\dfrac{\mathrm{e}^{-0.05}}{1-\mathrm{e}^{-0.05}}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-0.05n}=f(\mathrm{e}^{-0.05})=\dfrac{\mathrm{e}^{-0.05}}{(1-\mathrm{e}^{-0.05})^2}$，

故 $A\ge 10\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-0.05n}+9\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-0.05n}=\dfrac{10\mathrm{e}^{-0.05}}{1-\mathrm{e}^{-0.05}}+\dfrac{9\mathrm{e}^{-0.05}}{(1-\mathrm{e}^{-0.05})^2}=\dfrac{19\mathrm{e}^{-0.05}-10\mathrm{e}^{-0.1}}{(1-\mathrm{e}^{-0.05})^2}\approx 3794.29$ 万元.

第八章 多元函数微分

一．选择题：

1． （03）设可微函数 $f(x, y)$在点(x_0, y_0)处取得极小值，则下列结论正确的是（　　　　）

（A）$f(x_0, y)$在 $y = y_0$ 处导数等于零． （B）$f(x_0, y)$在 $y = y_0$ 处导数大于零．

（C）$f(x_0, y)$在 $y = y_0$ 处导数小于零． （D）$f(x_0, y)$在 $y = y_0$ 处导数不存在．

解：$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处取得极小值，则 $f_x'(x_0, y_0)$与都等于 0 或不存在，

且 $f(x, y)$是可微函数，有 $f_x'(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y_0) = 0$，

选择：（A）．

2． （06）设 $f(x, y)$与$\varphi(x, y)$均为可微函数，且$\varphi_y'(x_0, y_0) \neq 0$，已知$(x_0, y_0)$是 $f(x, y)$在约束条件$\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　　　）

（A）若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$． （B）若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$．

（C）若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$． （D）若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$．

解：拉格朗日函数 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$，条件极值点$(x_0, y_0)$应满足 $F_x'(x_0, y_0) = F_y'(x_0, y_0) = 0$，

即 $f_x'(x_0, y_0) + \lambda\varphi_x'(x_0, y_0) = 0$，$f_y'(x_0, y_0) + \lambda\varphi_y'(x_0, y_0) = 0$，

若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，有$\lambda \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = -\lambda\varphi_y'(x_0, y_0) \neq 0$，

而 $f_x'(x_0, y_0) = 0$ 时，λ 不一定等于 0，（A）、（B）都不一定成立，

选择：（D）．

3． （08）设 $f(x, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则函数在原点偏导数存在的情况是（　　　　）

（A）$f_x'(0, 0)$，$f_y'(0, 0)$ 都存在． （B）$f_x'(0, 0)$ 不存在，$f_y'(0, 0)$存在．

（C）$f_x'(0, 0)$存在，$f_y'(0, 0)$ 不存在． （D）$f_x'(0, 0)$，$f_y'(0, 0)$ 都不存在．

解：因 $f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}$，

且 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1} = -1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1} = 1$，

则 $f_x'(0, 0)$ 不存在，

因 $f_y'(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{0^2+y^4}}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2y\mathrm{e}^{y^2}}{1} = 0$，

则 $f_y'(0, 0)$ 存在，

选择：（B）．

二．填空题：

1． （99）设 $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z = z(x, y)$是由 $x + y + z + xyz = 0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0, 1, -1) =$ ____．

解：设 $F(x, y, z) = x + y + z + xyz$，有 $F_x' = 1 + yz$，$F_z' = 1 + xy$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x'}{F_z'} = -\dfrac{1+yz}{1+xy}$，

则 $f_x'(x,y,z) = \mathrm{e}^x yz^2 + \mathrm{e}^x y\cdot 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^x yz^2 - 2\mathrm{e}^x yz\dfrac{1+yz}{1+xy}$，故 $f_x'(0, 1, -1) = 1 - 2\cdot(-1)\cdot 0 = 1$，

填空：1．

2． （00）设 $z = f(xy, \dfrac{x}{y}) + g(\dfrac{y}{x})$，其中 f, g 均可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ __________．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'(\dfrac{y}{x})\cdot(-\dfrac{y}{x^2})$，

填空：$yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'-\dfrac{y}{x^2}g'(\dfrac{y}{x})$．

3．（01）设 $z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________．

解：令 $y=0$，有 $x^2=\mathrm{e}^{-x}-f(x)$，即 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-x^2$，有 $z=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x+2y}+(x-2y)^2$，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x+2y}+2(x-2y)$，

填空：$-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x+2y}+2(x-2y)$.

4．（04）函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$____．

解：设 $u=xg(y)$，$v=y$，解得 $x=\dfrac{u}{g(v)}$，$y=v$，有 $f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$，

则 $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{g(v)}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$，

填空：$-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$．

5．（05）设二元函数 $z=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,0)}=$ __________．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x+y}+x\mathrm{e}^{x+y}+\ln(1+y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\cdot\dfrac{1}{1+y}$，

则 $\mathrm{d}z=[(1+x)\mathrm{e}^{x+y}+\ln(1+y)]\mathrm{d}x+[x\mathrm{e}^{x+y}+\dfrac{x+1}{1+y}]\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z|_{(1,0)}=2\mathrm{e}\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\,\mathrm{d}y$，

填空：$2\mathrm{e}\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\,\mathrm{d}y$.

6．（06）设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z|_{(1,2)}=$ __________．

解：因 $\mathrm{d}z=f'(4x^2-y^2)\cdot\mathrm{d}(4x^2-y^2)=f'(4x^2-y^2)\cdot(8x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y)$，

则 $\mathrm{d}z|_{(1,2)}=f'(0)\cdot(8\mathrm{d}x-4\mathrm{d}y)=4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$，

填空：$4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

7．（07）设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________．

解：因 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\dfrac{1}{x}+f_2'\cdot(-\dfrac{x}{y^2})$，故 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y}{x}f_1'+\dfrac{2x}{y}f_2'$，

填空：$-\dfrac{2y}{x}f_1'+\dfrac{2x}{y}f_2'$．

8. （09）设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$__________.

解：设 $z=u^v$，$u=x+\mathrm{e}^y$，$v=x$，

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot 1+u^v\ln u\cdot 1=x(x+\mathrm{e}^y)^{x-1}+(x+\mathrm{e}^y)^x\ln(x+\mathrm{e}^y)$，

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=2^0+2^1\ln 2=1+2\ln 2$，

填空：$1+2\ln 2$.

9. （11）设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz|_{(1,1)}=$__________.

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}-1}\cdot\frac{1}{y}+\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$，有 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1+2\ln 2$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}-1}\cdot\left(-\frac{x^2}{y}\right)+\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{y}\right)$，有 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=-1-2\ln 2$，

则 $dz|_{(1,1)}=(1+2\ln 2)dx+(-1-2\ln 2)dy$.

填空：$(1+2\ln 2)dx+(-1-2\ln 2)dy$.

10. （12）函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz|_{(0,1)}=$__________.

解：因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，有 $x\to 0, y\to 1$ 时，$f(x,y)=2x-y+2+o\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)$,

因 $f(0,1)=1$，并设 $x=0+\Delta x$，$y=1+\Delta y$，

则 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$\Delta z=f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)=2\Delta x-\Delta y+o\left(\sqrt{\Lambda x^2+\Delta y^2}\right)$,

根据二元函数微分的定义可得 $dz|_{(0,1)}=2dx-dy$，

填空：$2dx-dy$.

三．解答题：

1. （95）设 $z=f(x,y)$是由方程 $z-x-y+x\mathrm{e}^{z-x-y}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$.

解：设 $F(x,y,z)=z-x-y+x\mathrm{e}^{z-x-y}$，有 $F_x'=-1+\mathrm{e}^{z-x-y}-x\mathrm{e}^{z-x-y}$，$F_y'=-1-x\mathrm{e}^{z-x-y}$，$F_z'=1+x\mathrm{e}^{z-x-y}$,

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-x-y}}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=1$，

故 $\mathrm{d}z=\frac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-x-y}}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

2. （96）设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot y$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(-2xy^3)$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(-2x^2y)\cdot y+\mathrm{e}^{-x^2y^2}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(1-2x^2y^2)$，

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot x$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(-2x^3y)$，

故 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(-2x^2y^2)-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(1-2x^2y^2)+\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cdot(-2x^2y^2)=-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}$.

3． （97）设 $u=f(x,y,z)$有连续偏导数，$y=y(x)$和 $z=z(x)$分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^{z}-xz=0$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解：设 $F(x,y)=\mathrm{e}^{xy}-y$，有 $F_x'=y\mathrm{e}^{xy}$，$F_y'=x\mathrm{e}^{xy}-1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}=-\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-1}$，

又设 $G(x,y)=\mathrm{e}^{z}-xz$，有 $G_x'=-z$，$G_z'=\mathrm{e}^{z}-x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{G_x'}{G_z'}=\dfrac{z}{\mathrm{e}^{z}-x}$，

故 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x'\cdot 1+f_y'\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_z'\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x'-\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy}-1}f_y'+\dfrac{z}{\mathrm{e}^{z}-x}f_z'$.

4． （98）设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\cdot\dfrac{1}{x}=(2y-x)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，

故 $\mathrm{d}z=(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$，

且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1\cdot\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}+(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

5． （99）设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中$\alpha,\beta$ 为正常数，且$\alpha+\beta=1$．假设两种要素的价格为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小？

解：投入总费用 $y(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$，设拉格朗日函数 $F(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-12)$，

令$\begin{cases} F'_{x_1}=p_1+2\lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}=0, \\ F'_{x_2}=p_2+2\lambda\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}=0, \\ F'_{\lambda}=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-12=0, \end{cases}$ 解得 $x_1=6\left(\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}$，$x_2=6\left(\dfrac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\alpha}$，此实际问题中最小值存在，

故两要素各投入 $x_1=6\left(\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}$，$x_2=6\left(\dfrac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\alpha}$ 可以使得投入总费用最小.

6． （00）已知 $z=u^v$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+y^2}+u^v\ln u\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=v\cdot u^{v-1}\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}-u^v\ln u\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=v\cdot u^{v-1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2y}{x^2+y^2}+u^v\ln u\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{x}=v\cdot u^{v-1}\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}+u^v\ln u\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

故 $\mathrm{d}z=\dfrac{v\cdot u^{v-1}\cdot x-u^v\ln u\cdot y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{v\cdot u^{v-1}\cdot y+u^v\ln u\cdot x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

7． (00)假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是 $p_1=18-2Q_1$，$p_2=12-Q_2$，其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格（单位：万元/吨），Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量（即需求量，单位：吨），并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$.

（1）如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品销售量和价格，使该企业获得最大利润；

（2）如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

解：收益 $R(Q_1,Q_2)=p_1Q_1+p_2Q_2=18Q_1-2Q_1^2+12Q_2-Q_2^2$，成本 $C(Q_1,Q_2)=2Q+5=2Q_1+2Q_2+5$，

利润 $L(Q_1,Q_2)=R(Q_1,Q_2)-C(Q_1,Q_2)=16Q_1-2Q_1^2+10Q_2-Q_2^2-5$，

（1）令 $\begin{cases} L'_{Q_1}=16-4Q_1=0, \\ L'_{Q_2}=10-2Q_1=0, \end{cases}$，解得 $Q_1=4$，$Q_2=5$，且 $L''_{Q_1Q_1}=-4,\ L''_{Q_1Q_2}=0,\ L''_{Q_2Q_2}=-2$，

则 $\Delta=(L''_{Q_1Q_2})^2-L''_{Q_1Q_1}L''_{Q_2Q_2}=-8<0$ 且 $L''_{Q_1Q_1}=-4<0$，

故 $Q_1=4$，$Q_2=5$ 是极大值点，此时 $p_1=18-8=10$，$p_2=12-5=7$，

故两个市场上该产品销售量 $Q_1=4$，$Q_2=5$，价格 $p_1=10$，$p_2=7$ 时，获得最大利润 $L=52$.

（2）价格无差别，即 $p_1=p_2$，有 $18-2Q_1=12-Q_2$，即 $2Q_1-Q_2-6=0$，

设拉格朗日函数 $F(Q_1,Q_2,\lambda)=16Q_1-2Q_1^2+10Q_2-Q_2^2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6)$，

令 $\begin{cases} F'_{Q_1}=16-4Q_1+2\lambda=0, \\ F'_{Q_2}=10-2Q_1-\lambda=0, \\ F'_{\lambda}=2Q_1-Q_2-6=0, \end{cases}$ 解得 $Q_1=5$，$Q_2=4$，此时 $p_1=p_2=8$ 且实际问题中最小值存在，

故两个市场上该产品销售量 $Q_1=5$，$Q_2=4$，统一价格 $p_1=p_2=8$ 时，获得最大利润 $L=49$.

可见企业实行价格差别策略时总利润更大.

8． （01）设 $u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$及 $z=z(x)$分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$

和 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解：设 $F(x,y)=e^{xy}-xy-2$，有 $F_x'=ye^{xy}-y=y(e^{xy}-1)$，$F_y'=xe^{xy}-x=x(e^{xy}-1)$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{y}{x}$，

设 $G(x,z)=e^x-\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，有 $G_x'=e^x-\frac{\sin(x-z)}{x-z}$，$G_z'=\frac{\sin(x-z)}{x-z}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=1-\frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)}$，

故 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x'\cdot 1+f_y'\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_z'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x'-\frac{y}{x}f_y'+[1-\frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)}]f_z'$.

9. （02）设函数 $u=f(x,y,z)$有连续的偏导数，且 $z=z(x,y)$由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$所确定，求 $\mathrm{d}u$.

解：设 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，有 $F_x'=e^{xy}+xe^x=(x+1)e^x$，$F_y'=-(y+1)e^y$，$F_z'=-(z+1)e^z$，

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$，

有 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'\cdot 1+f_y'\cdot 0+f_z'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'+\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}f_z'$，$\frac{\partial u}{\partial y}=f_x'\cdot 0+f_y'\cdot 1+f_z'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}f_z'$

故 $\mathrm{d}u=(f_x'+\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}f_z')\mathrm{d}x+(f_y'-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}f_z')\mathrm{d}y$.

10. （03）设 $f(u,v)$具有二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，$g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解：设 $u=xy$，$v=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$，有 $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x$，$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-y)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x-\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$，

则 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot y+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot x)\cdot y+(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot y+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$，

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot x-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot y)\cdot x-(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot x-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y)\cdot y-\frac{\partial f}{\partial v}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}$，

故 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})=x^2+y^2$.

11. （05）设 $f(u)$具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解：$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+f'(\frac{x}{y})$，$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})+f(\frac{x}{y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y})$，

则 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})$，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y})=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y}),$$

故 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x})+\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})-\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})$.

12．（05）求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

解：令 $\begin{cases} f_x'=2x=0, \\ f_y'=-2y=0, \end{cases}$ 得 $x=0$，$y=0$，即在椭圆域内有驻点 $(0,0)$.

再考虑 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域边界 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的极值，

设拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1)$，

令 $\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x=0, \\ F_y'=-2y-\frac{1}{2}\lambda y=0, \\ F_\lambda'=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0, \end{cases}$ 解得 $x=0$，$y=\pm 2$ 或 $x=\pm 1$，$y=0$，此实际问题中最大值和最小值存在，

由于 $f(\pm 1,0)=3$，$f(0,\pm 2)=-2$ 且驻点处 $f(0,0)=2$，

故最大值为 $f(\pm 1,0)=3$，最小值为 $f(0,\pm 2)=-2$.

13．（08）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\ne -1$.

（1）求 dz；

（2）记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解：（1）设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2x-\varphi'}{-1-\varphi'}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{2y-\varphi'}{-1-\varphi'}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$，

故 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$；

（2）因 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}-\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\right)=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{2x-2y}{1+\varphi'}=\frac{2}{1+\varphi'}$，

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\cdot\frac{\partial\varphi'}{\partial x}}{(1+\varphi')^2}=\frac{-2\cdot\varphi''\cdot\left(1+0+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1+\varphi')^2}=\frac{-2\varphi''\cdot\left(1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\right)}{(1+\varphi')^2}=\frac{-2\varphi''\cdot(1+2x)}{(1+\varphi')^3}$.

14．（08）求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

解：设拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-4)$，

令 $\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda_1(-2x) + \lambda_2 = 0, \\ F'_y = 2y + \lambda_1(-2y) + \lambda_2 = 0, \\ F'_z = 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ F'_{\lambda_1} = z - x^2 - y^2 = 0, \\ F'_{\lambda_2} = x + y + z - 4 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2, \\ y = -2, \\ z = 8, \end{cases}$

当 $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ 时，$u = x^2 + y^2 + z^2 = 6$；当 $(x, y, z) = (-2, -2, 8)$ 时，$u = x^2 + y^2 + z^2 = 72$，
故最大值为 $u(-2, -2, 8) = 72$，最小值为 $u(1, 1, 2) = 6$.

15．（09）求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y\ln y$ 的极值.

解：令 $\begin{cases} f'_x = 2x(2 + y^2) = 0, \\ f'_y = x^2 \cdot 2y + \ln y + 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $x = 0,\ y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

因 $f''_{xx} = 2(2 + y^2)$，$f''_{xy} = 4xy$，$f''_{yy} = 2x^2 + \dfrac{1}{y}$，

则 $(f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy} = (4xy)^2 - (4 + 2y^2)(2x^2 + \dfrac{1}{y}) = 12x^2y^2 - 8x^2 - \dfrac{4}{y} - 2y$，

即 $P(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}) = [(f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy}]\Big|_{(0, \frac{1}{\mathrm{e}})} = -4\,\mathrm{e} - \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 0$，且 $f''_{xx}(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}) = 4 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} > 0$，

故点 $(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 处取得极小值 $f(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

16．（10）求函数 $M = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

解：拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$，

令 $\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$

解得：$(x, y, z, \lambda) = (1, \sqrt{5}, 2, -\dfrac{\sqrt{5}}{2})$，$(1, -\sqrt{5}, 2, \dfrac{\sqrt{5}}{2})$，$(-1, \sqrt{5}, -2, -\dfrac{\sqrt{5}}{2})$，$(-1, -\sqrt{5}, -2, \dfrac{\sqrt{5}}{2})$

或 $(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, 0)$，$(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$，

因 $M(1, \sqrt{5}, 2) = M(-1, -\sqrt{5}, -2) = 5\sqrt{5}$，$M(1, -\sqrt{5}, 2) = M(-1, \sqrt{5}, -2) = -5\sqrt{5}$，

$M(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = M(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 0$，

故 $M(1, \sqrt{5}, 2) = M(-1, -\sqrt{5}, -2) = 5\sqrt{5}$ 为最大值，$M(1, -\sqrt{5}, 2) = M(-1, \sqrt{5}, -2) = -5\sqrt{5}$ 为最小值.

17．（11）已知函数 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值，$z = f[(x + y), f(x, y)]$．求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1, 1)}$.

解：因 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'[(x+y),f(x,y)]+f_2'[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1'(x,y)$，

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''[(x+y),f(x,y)]+f_{12}''[(x+y),f(x,y)]\cdot f_2'(x,y)+f_{21}''[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1'(x,y)$

$+f_{22}''[(x+y),f(x,y)]\cdot f_2'(x,y)\cdot f_1'(x,y)+f_2'[(x+y),f(x,y)]\cdot f_{12}''(x,y)$，

因 $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，有 $f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=0$，

故 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f_{11}''(2,2)+f_{12}''(2,2)\cdot f_2'(1,1)+f_{21}''(2,2)\cdot f_1'(1,1)$

$+f_{22}''(2,2)\cdot f_2'(1,1)\cdot f_1'(1,1)+f_2'(2,2)\cdot f_{12}''(1,1)$，

$=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)\cdot f_{12}''(1,1)$．

18．（12）某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）．

（1）求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（2）当总产量为 50 件时，甲乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

（3）当总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义．

解：（1）因 $\dfrac{\partial C}{\partial y}=6+y$，有 $C(x,y)=C_0(x)+\int_0^y(6+t)dt=C_0(x)+\left.\left(6t+\dfrac{t^2}{2}\right)\right|_0^y=C_0(x)+6y+\dfrac{y^2}{2}$，

则 $\dfrac{\partial C}{\partial x}=C_0'(x)=20+\dfrac{x}{2}$，有 $C_0(x)=C_0+\int_0^x\left(20+\dfrac{s}{2}\right)ds=C_0+\left.\left(20s+\dfrac{s^2}{4}\right)\right|_0^x=C_0+20x+\dfrac{x^2}{4}$，

可得 $C(x,y)=C_0+20x+\dfrac{x^2}{4}+6y+\dfrac{y^2}{2}$，且 $C(0,0)=C_0=10000$，

故 $C(x,y)=10000+20x+\dfrac{x^2}{4}+6y+\dfrac{y^2}{2}$；

（2）设拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=C(x,y)+\lambda(x+y-50)=10000+20x+\dfrac{x^2}{4}+6y+\dfrac{y^2}{2}+\lambda(x+y-50)$，

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=20+\dfrac{x}{2}+\lambda=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=6+y+\lambda=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial x}=x+y-50=0.\end{cases}$

解得 $x=24,\ y=26$，

故甲产品产量为 24 件，乙产品产量为 26 件时，可使总成本最小为 $C(24,26)=11118$（万元）；

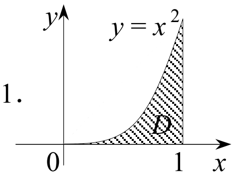
（3）因 $\dfrac{\partial C}{\partial x}=20+\dfrac{x}{2}$，有 $\left.\dfrac{\partial C}{\partial x}\right|_{\substack{x=24\\y=26}}=32$，

故总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本为 32（万元/件），其经济意义为每增加生产一件甲产品，总成本将增加 32（万元）.

第九章 二重积分

一．选择题：

1． （99）设$f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$等于（　　　）



（A）xy． （B）$2xy$． （C） $xy+\dfrac{1}{8}$． （D）$xy+1$．

解：设$\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$，有$f(x,y)=xy+A$，且↑：$D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$，

则 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(xy+A)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot(x\dfrac{y^2}{2}+Ay)\Big|_0^{x^2}=\int_0^1(\dfrac{x^5}{2}+Ax^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{12}+\dfrac{A}{3}$，

故$\dfrac{2A}{3}=\dfrac{1}{12}$，即 $A=\dfrac{1}{8}$，有 $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$，

选择：（C）．

2． （05）设$I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,\ I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$，则（　　　）

（A）$I_3>I_2>I_1$． （B）$I_1>I_2>I_3$． （C）$I_2>I_1>I_3$． （D）$I_3>I_1>I_2$．

解：当$(x,y)\in D$时，$0\le x^2+y^2\le 1$，有$0\le(x^2+y^2)^2\le x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 1$，

由于 $\cos u$ 在 $u\in[0,\pi]$时单调下降，有$\cos(x^2+y^2)^2\ge\cos(x^2+y^2)\ge\cos\sqrt{x^2+y^2}$，

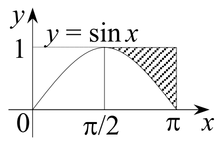
选择：（A）．

3． （07）设函数$f(x,y)$ 连续，则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于（　　　）

（A） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$． （B） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$．

（C） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$． （D） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$．

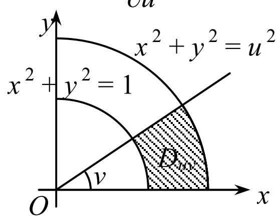
解：作图：区域$D=\{(x,y)\,|\,\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi, \sin x\le y\le 1\}$，



改为水平向右观察→：$D=\{(x,y)|\,0\le y\le 1, \pi-\arcsin y\le x\le\pi\}$，

选择：（B）．

4． （08）设函数$f(x)$ 连续，$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域$D_{uv}$为图中阴影部分，则$\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　　)



（A）$vf(u^2)$． （B） $\dfrac{v}{u}f(u^2)$．

（C）$vf(u)$． （D） $\dfrac{v}{u}f(u)$．

解：因$F(u,v)=\int_0^v d\theta\int_1^u\dfrac{f(r^2)}{r}\cdot rdr=\int_0^v d\theta\int_1^u f(r^2)dr=v\int_1^u f(r^2)dr$，有$\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$，

选择：（A）．

5． （08）设$f(x)$ 是连续奇函数，$g(x)$ 是连续偶函数，区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$，则(　　　)

（A）$\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$.　　　　（B）$\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0$.

（C）$\iint\limits_D [f(x)+g(y)]dxdy=0$.　　　　（D）$\iint\limits_D [f(y)+g(x)]dxdy=0$.

解：如果被积函数关于 x（或 y）为连续奇函数，且积分区域关于 y（或 x）轴对称，即有二重积分等于 0，因这里积分区域 D 关于 x 轴对称，且 $f(x)$ 是连续奇函数，$g(x)$ 是连续偶函数，

则仅有选项（A）中被积函数 $f(y)g(x)$ 关于 y 为连续奇函数，即 $\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$ ，

选择：（A）.

6．（12）设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)\cdot rdr=$（　　　　）

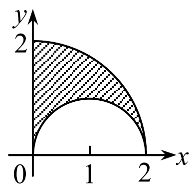
（A）$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$.　　　　（B）$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$.

（C）$\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$.　　　　（D）$\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$.

解：因面积元素 $dxdy=rdrd\theta$ ，即极坐标系下二重积分被积函数中的 r 是由面积元素产生的，

则（A）与（C）错误，

因 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 是第一象限， $r=2$ 就是圆 $x^2+y^2=4$ ，



且 $r=2\cos\theta$ 就是圆 $x^2+y^2=2x$ 即 $(x-1)^2+y^2=1$ ，

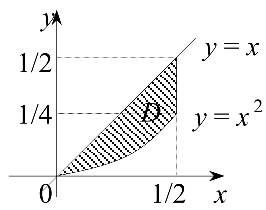
作图，竖直向上观察↑，可得： $0\le x\le 2,\ \sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$ ，

选择：（B）.

二．填空题：

1．（02）交换积分次序： $\int_0^{\frac14}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_y^{\frac12}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________.

解：作图：区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\dfrac14,\ y\le x\le\sqrt{y}\}\cup\{(x,y)\,|\,\dfrac14\le y\le\dfrac12,\ y\le x\le\dfrac12\}$ ，



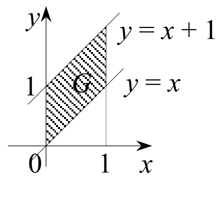
改为竖直向上观察↑： $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\dfrac12,\ x^2\le y\le x\}$ ，

填空： $\int_0^{\frac12}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x$.

2．（03）设 $a>0$， $f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 若0\le x\le1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ D 表示全平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______.

解：$f(x)g(y-x)$仅在 $0\le x\le1$ 且 $0\le y-x\le1$ 时不等于 0，即区域↑：$G=\{(x,y)|\,0\le x\le1,\ x\le y\le x+1\}$，

则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}a^2\mathrm{d}y=\int_0^1 a^2\mathrm{d}x=a^2$ ，



填空：a^2.

3．（08）$\iint\limits_D(x^2-y)dxdy=$__________．其中 D：$x^2+y^2\le1$.

解：方法一：$\iint\limits_D(x^2-y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2\cos^2\theta-r\sin\theta)rdr=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\left[\dfrac{r^4}{4}\cos^2\theta-\dfrac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\frac{1}{3}\sin\theta\right)d\theta=\left[\frac{1}{8}\theta+\frac{1}{16}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4};$$

方法二：由对称性知

$$\iint_D (x^2-y)dxdy=\iint_D x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

填空：$\frac{\pi}{4}$.

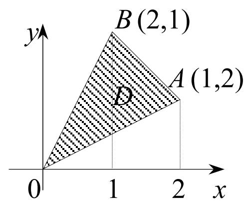
4．（08）$\int_1^2 dx\int_0^1 x^y\ln xdy=$__________.

解：$\int_1^2 dx\int_0^1 x^y\ln xdy=\int_1^2 dx\cdot x^y\Big|_0^1=\int_1^2(x-1)dx=(\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_1^2=\frac{1}{2}$,

填空：$\frac{1}{2}$.

三．解答题：

1．（97）设 D 是以点 $O(0,0)$，$A(1,2)$和 $B(2,1)$为顶点的三角形区域，求$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

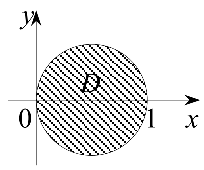


解：↑：$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\frac{x}{2}\le y\le 2x\}\cup\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\frac{x}{2}\le y\le 3-x\}$,

故$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{x}x\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(3x-\frac{3}{2}x^2)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^3\Big|_0^1+(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3)\Big|_1^2=\frac{1}{2}-0+(6-4)-(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}.$$

2．（98）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x\}$，求$\iint_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



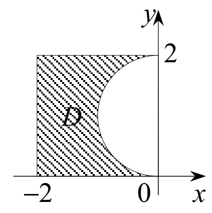
解：↑：$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,-\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{x-x^2}\}$,

则$\iint_D\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$,

令 $t=\sqrt{1-x}$，有 $x=1-t^2$，$\mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t$，且 $x=0$ 时，$t=1$；$x=1$ 时，$t=0$；

故$\iint_D\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_1^0(1-t^2)t\cdot(-2t\mathrm{d}t)=4\int_0^1(t^2-t^4)\mathrm{d}t=4(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5)\Big|_0^1=\frac{8}{15}$.

3．（99）计算二重积分$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2,y=0,y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.



解：→：$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2,-2\le x\le-\sqrt{2y-y^2}\}$,

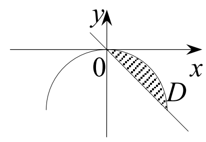
则$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}y\mathrm{d}x=\int_0^2 y(2-\sqrt{2y-y^2})\mathrm{d}y=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y$,

令 $y-1=\sin t$，有 $\mathrm{d}y=\cos t\,\mathrm{d}t$，且 $y=0$ 时，$t=-\dfrac{\pi}{2}$；$y=2$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$；

故 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t=4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$

$$=4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(-\mathrm{d}\cos t)=4-(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\cos^3 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4-\frac{\pi}{2}.$$

4. （00）计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\ \ (a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.



解：曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$，即 $x^2+y^2+2ay=0$，极坐标方程 $r=-2a\sin\theta$，

有 $D=\{(r,\theta)\,|-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le 0, 0\le r\le -2a\sin\theta\}$，则 $\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\sin\theta}\dfrac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\mathrm{d}r$，

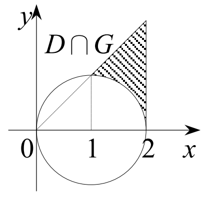
令 $r=2a\sin t$，有 $\mathrm{d}r=2a\cos t\,\mathrm{d}t$，且 $r=0$ 时，$t=0$；$r=-2a\sin\theta$ 时，$t=-\theta$，

故 $\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\theta}\dfrac{4a^2\sin^2 t}{2a\cos t}2a\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\cdot a^2(2t-\sin 2t)\Big|_0^{-\theta}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(-2\theta+\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta=a^2(-\theta^2-\frac{1}{2}\cos 2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=a^2(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}).$$

5. （00）设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & 若1\le x\le 2, 0\le y\le x,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 求 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 2x\}$.

解：设 $G=\{(x,y)|\ 1\le x\le 2, 0\le y\le x\}$，↑：$D\cap G=\{(x,y)\,|1\le x\le 2,\sqrt{2x-x^2}\le y\le x\}$，

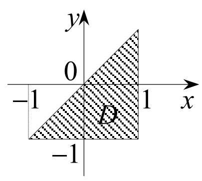


故 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D\cap G}x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}x^2y\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\cdot\dfrac{1}{2}x^2y^2\Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}$

$$=\int_1^2(\frac{x^4}{2}-\frac{2x^3-x^4}{2})\mathrm{d}x=\int_1^2(x^4-x^3)\mathrm{d}x=(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4)\Big|_1^2=(\frac{32}{5}-4)-(\frac{1}{5}-\frac{1}{4})=\frac{49}{20}.$$

6. （01）求二重积分 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 值，其中 D 是由直线 $y=x, y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

解：↑：$D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-1\le y\le x\}$，



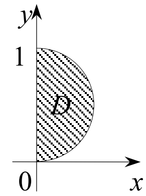
故 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}[y+xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\cdot[\dfrac{1}{2}y^2+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\Big|_{-1}^{x}$

$$=\int_{-1}^{1}[\frac{1}{2}x^2+xe^{x^2}-\frac{1}{2}-xe^{\frac{1}{2}(x^2+1)}]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2})\mathrm{d}x+0=(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}.$$

7. （02）设闭区域 D：$x^2+y^2\le y$，$x\ge 0$，$f(x,y)$为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \text{，求} f(x,y).$$

解：设 $\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$，有 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$，



曲线 $x^2+y^2\le y$，极坐标方程 $r=\sin\theta$， $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le\sin\theta\}$，

则 $A=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r-\frac{8A}{\pi}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^{\sin\theta}-\frac{8A}{\pi}\cdot\sigma_D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(-\cos^3\theta+1)\mathrm{d}\theta-\frac{8A}{\pi}\cdot\frac{\pi}{8}$$

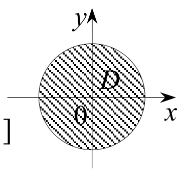
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}[(\sin^2\theta-1)\cos\theta+1]\mathrm{d}\theta-A=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}\sin^3\theta-\sin\theta+\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-A=-\frac{2}{9}+\frac{\pi}{6}-A,$$

移项，得 $2A=-\frac{2}{9}+\frac{\pi}{6}$，即 $A=-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{12}$，

故 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}(-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{12})=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$.

8. （03）计算二重积分 $I=\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\pi\}$.

解：极坐标 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\sqrt{\pi}\}$，



则 $I=\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2+\pi}\sin r^2\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin r^2\cdot(-\frac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-r^2+\pi})=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2+\pi}\sin r^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2+\pi}\cos r^2\mathrm{d}r^2]$$

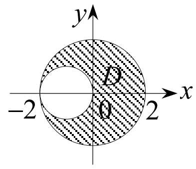
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot[0+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos r^2(-\mathrm{d}\mathrm{e}^{-r^2+\pi})]=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2+\pi}\cos r^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2+\pi}(-\sin r^2)2r\mathrm{d}r]$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^0\cdot(-1)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi}\cdot 1]-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2+\pi}\sin r^2\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{2}-I=\pi(1+\mathrm{e}^{\pi})-I$$

故 $2I=\pi(1+\mathrm{e}^{\pi})$，即 $I=\frac{\pi}{2}(1+\mathrm{e}^{\pi})$.

9. （04）求 $\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

解：圆 $(x+1)^2+y^2=1$，即 $x^2+y^2+2x=0$，极坐标方程 $r=-2\cos\theta$，



有 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 2\}-\{(r,\theta)\,|\,\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2},0\le r\le -2\cos\theta\}$，

故 $\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r+r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}(r+r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1+\sin\theta}{3}r^3\Big|_0^2-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1+\sin\theta}{3}r^3\Big|_0^{-2\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}(1+\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-8\cos^3\theta}{3}(1+\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

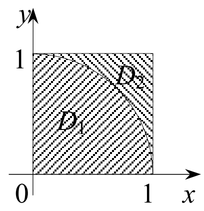
$$=\frac{8}{3}(\theta-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}+\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)\mathrm{d}\sin\theta$$

$$=\frac{16\pi}{3}+\frac{8}{3}(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta-\frac{1}{4}\sin^4\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}.$$

10．（05）计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$.

解：设 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$， $D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\sqrt{1-x^2}\le y\le 1\}$，

则 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma$



$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot(y-x^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^1\mathrm{d}x\cdot(x^2y+\frac{1}{3}y^3-y)\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1$$

$$=\int_0^1\frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3\mathrm{d}x+\int_0^1[x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1(\sqrt{1-x^2})^3\mathrm{d}x+(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x)\Big|_0^1=\frac{4}{3}\int_0^1(\sqrt{1-x^2})^3\mathrm{d}x-\frac{1}{3},$$

令 $x=\sin t$，有 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，且 $x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时， $t=\frac{\pi}{2}$；

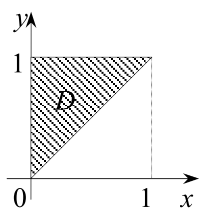
故 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos t\mathrm{d}t-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\mathrm{d}t-\frac{1}{3}$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2})\mathrm{d}t-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(t+\sin 2t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

11．（06）计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域.

解：→：$D=\{(x,y)|\,0\le y\le 1,\,0\le x\le y\}$，

故 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y\sqrt{y^2-xy}dx=\int_0^1 dy\cdot\sqrt{y}\cdot(-\frac{2}{3})(y-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y=\int_0^1\frac{2}{3}y^2dy$



$$=\frac{2}{9}y^3\Big|_0^1=\frac{2}{9}.$$

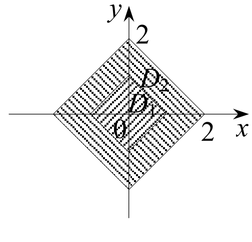
12．（07）设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\le 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2,\end{cases}$ 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中

$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 2\}$.

解：由对称性知只须考虑第一象限，$D_1=\{(x,y)|\,x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$，$D_2=\{(x,y)|\,1<x+y\le 2,x\ge 0,y\ge 0\}$，

对于 D_1 竖直向上观察↑：$D_1=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1-x\}$，

对于 D_2 用极坐标观察： $D_2=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le r\le\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}\}$，



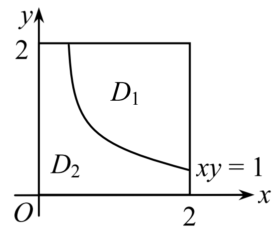
故 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 4\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}\sigma + 4\iint\limits_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\mathrm{d}y + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r$

$$= 4\int_0^1(x^2-x^3)\mathrm{d}x + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 4(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\cdot\frac{1}{12} + 2\sqrt{2}\ln|\sec(\theta-\frac{\pi}{4})+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\ln|\sqrt{2}+1| - 2\sqrt{2}\ln|\sqrt{2}-1|$$

$$= \frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

13．（08）求二重积分 $\iint\limits_{D}\max(xy,1)dxdy$．其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$．



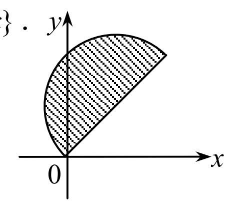
解：因 $\iint\limits_{D}\max(xy,1)dxdy = \iint\limits_{D_1}xydxdy + \iint\limits_{D_2}dxdy$，且 D_1： $\frac{1}{2}\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le 2$，

则 $\iint\limits_{D_1}xydxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}xydy = \int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\cdot\frac{1}{2}xy^2\Big|_{\frac{1}{x}}^{2} = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(2x-\frac{1}{2x})dx = (x^2-\frac{1}{2}\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{4}-\ln 2$，

且 $\iint\limits_{D_2}dxdy = D_2\text{的面积} = 4-\iint\limits_{D_1}dxdy = 4-\int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}dy = 4-\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-\frac{1}{x})dx = 4-(2x-\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = 1+2\ln 2$，

故 $\iint\limits_{D}\max(xy,1)dxdy = \iint\limits_{D_1}xydxdy + \iint\limits_{D_2}dxdy = \frac{19}{4}+\ln 2$．

14．（09）计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2,\ y\ge x\}$．



解：因 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$，即 $x^2+y^2-2x-2y\le 0$，在极坐标系下为

$r^2-2r\cos\theta-2r\sin\theta\le 0$，即 $r\le 2(\cos\theta+\sin\theta)$，

则区域 D 为 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$， $0\le r\le 2(\cos\theta+\sin\theta)$，

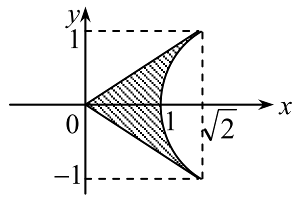
故 $\iint\limits_{D}(x-y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)\cdot rdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\cdot(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}$

$$= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)^3d\theta = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3d(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}(\cos\theta+\sin\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2}{3}\cdot[0-(\sqrt{2})^4] = -\frac{8}{3}.$$

15．（10）计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成．

解：曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 的交点为 $(\sqrt{2},-1)$，



曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x-\sqrt{2}y=0$ 的交点为 $(\sqrt{2},1)$，

方法一：

区域 D 为 $\{(x,y)\mid -1\le y\le 1, \sqrt{2}\,|y|\le x\le\sqrt{1+y^2}\}$，且区域 D 关于 x 轴对称，

故 $\iint\limits_D (x+y)^3\,dxdy=\iint\limits_D (x^3+3xy^2)dy+\iint\limits_D (3x^2y+y^3)dy=\iint\limits_D (x^3+3xy^2)dy+0$

$$=2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}|y|}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)dy=2\int_0^1 dy\cdot\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}|y|}^{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=2\int_0^1\left[\frac{1}{4}(1+y^2)^2+\frac{3}{2}(1+y^2)y^2-\frac{1}{4}\cdot 4y^4-\frac{3}{2}\cdot 2y^2\cdot y^2\right]dy=2\int_0^1\left(\frac{1}{4}+2y^2-\frac{9}{4}y^4\right)dy$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{4}y+\frac{2}{3}y^3-\frac{9}{20}y^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{14}{15}.$$

方法二：

区域 D 为 $\{(x,y)\mid 0\le x\le\sqrt{2}, -\frac{x}{\sqrt{2}}\le y\le\frac{x}{\sqrt{2}}\}$ 扣除 $\{(x,y)\mid 1\le x\le\sqrt{2}, -\sqrt{x^2-1}\le y\le\sqrt{x^2-1}\}$ 的区域，

则 $\iint\limits_D (x+y)^3\,dxdy=\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_{-\frac{x}{\sqrt{2}}}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}(x+y)^3\,dy-\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}}(x+y)^3\,dy$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}dx\cdot\frac{1}{4}(x+y)^4\Bigg|_{-\frac{x}{\sqrt{2}}}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}-\int_1^{\sqrt{2}}dx\cdot\frac{1}{4}(x+y)^4\Bigg|_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}}\left[\left(x+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^4-\left(x-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^4\right]dx-\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^4\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}}\left[8x^3\frac{x}{\sqrt{2}}+8x\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3\right]dx-\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}}\left[8x^3\sqrt{x^2-1}+8x\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3\right]dx$$

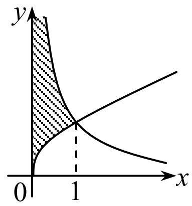
$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}}x^4dx-2\int_1^{\sqrt{2}}(2x^3-x)\sqrt{x^2-1}dx=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}-2\int_1^{\sqrt{2}}(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{2}d(x^2-1),$$

令 $u=x^2-1$，有 $2x^2-1=2u+1$，且当 $x=\sqrt{2}$ 时，$u=1$，当 $x=1$ 时，$u=0$，

故 $\iint\limits_D (x+y)^3\,dxdy=\frac{12}{5}-\int_0^1(2u+1)\sqrt{u}\cdot du=\frac{12}{5}-\left(\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{14}{15}$.

16．（12）计算二重积分 $\iint\limits_D e^x\,xy\,dxdy$，其中 D 为由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 所围区域.

解：$\iint\limits_D e^x xydxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xydy=\int_0^1 dx\cdot e^x x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-x^2)dx$



$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)d\,e^x=\frac{1}{2}\left[(1-x^2)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\cdot(-2x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[0-1+\int_0^1 2xd\,e^x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-1+2xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[-1+2e-0-2e^x\Big|_0^1\right]=\frac{1}{2}[-1+2e-2e+2]=\frac{1}{2}\,.$$

第十章 微分方程

一．选择题：

1．（06）设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程通解是（　　　）

（A）$C[y_1(x) - y_2(x)]$.　　　　（B）$y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

（C）$C[y_1(x) + y_2(x)]$.　　　　（D）$y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$.

解：代入验证可得：（B）$y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$满足方程 $y' + P(x)y = Q(x)$，

而（A）$C[y_1(x) - y_2(x)]$满足 $y' + P(x)y = 0$，（C）$C[y_1(x) + y_2(x)]$满足 $y' + P(x)y = 2CQ(x)$，

（D）$y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$满足 $y' + P(x)y = (1 + 2C)Q(x)$，

选择：（B）.

2．（10）设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　　　）

（A）$\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.　（B）$\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.　（C）$\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$.　（D）$\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

解：因 $y_1' + p(x)y_1 = q(x)$，$y_2' + p(x)y_2 = q(x)$，

则 $(\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda[y_1' + p(x)y_1] + \mu[y_2' + p(x)y_2] = (\lambda + \mu)q(x)$，

且 $(\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = \lambda[y_1' + p(x)y_1] - \mu[y_2' + p(x)y_2] = (\lambda - \mu)q(x)$，

因 $(\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x)$，$(\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0$，

则 $\lambda + \mu = 1$，$\lambda - \mu = 0$，即 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$，

选择：（A）.

二．填空题：

1．（05）微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为__________.

解：方程为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$，分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分 $\ln y = -\ln x + \ln C = \ln\frac{C}{x}$，即 $y = \frac{C}{x}$，

由于 $y(1) = 2$，即 $C = 2$，

填空：$xy = 2$.

2．（07）微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$ __________.

解：令 $u = \frac{y}{x}$，有 $y = xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程，得 $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u - \frac{1}{2}u^3$，分离变量 $-2\frac{\mathrm{d}u}{u^3} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$，

两边积分 $\frac{1}{u^2} = \ln|x| + C$，有 $\frac{x^2}{y^2} = \ln|x| + C$，即 $y^2 = \frac{x^2}{\ln|x| + C}$，$y = \pm\frac{x}{\sqrt{\ln|x| + C}}$，

由于 $y|_{x=1} = 1$，即 $C = 1$，且初始条件满足 $x > 0$，$y > 0$，

填空：$\frac{x}{\sqrt{\ln|x| + C}}$.

3． （08）微分方程 $xy'+y=0$，$y(1)=1$．求方程的特解 $y=$ ＿＿＿＿＿．

解：因 $x\dfrac{dy}{dx}=-y$，有 $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$，$\int\dfrac{dy}{y}=-\int\dfrac{dx}{x}+\ln C$，$\ln y=-\ln x+\ln C=\ln\dfrac{C}{x}$，即 $y=\dfrac{C}{x}$，

因 $y(1)=1$，得 $C=1$，即 $y=\dfrac{1}{x}$，

填空：$\dfrac{1}{x}$.

4． （08）微分方程 $(y+x^2\mathrm{e}^{-x})\,dx-x\,dy=0$ 的通解是 $y=$ ＿＿＿＿＿．

解：因可将其改写为 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=x\mathrm{e}^{-x}$，

则 $y=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}[\int x\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx+C]=x(\int x\mathrm{e}^{-x}\cdot\dfrac{1}{x}dx+C)=x(-\mathrm{e}^{-x}+C)$，

填空：$x(-\mathrm{e}^{-x}+C)$.

三．解答题：

1． （95）假设：

（1）函数 $y=f(x)$ $(0\le x<+\infty)$满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\le f(x)\le \mathrm{e}^x-1$；

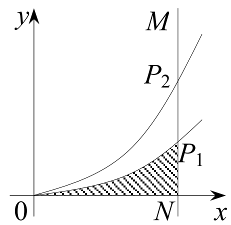
（2）平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x-1$ 分别相交于点 P_1 和 P_2；

（3）曲线 $y=f(x)$、直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度；

求函数 $y=f(x)$的表达式．

解：$S=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$\overline{P_1P_2}=\mathrm{e}^x-1-f(x)$，有 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x-1-f(x)$，即 $S=\mathrm{e}^x-1-\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$，

可得一阶线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+S=\mathrm{e}^x-1$，且 $S|_{x=0}=0$，



有 $S=\mathrm{e}^{-\int 1\cdot\mathrm{d}x}[\int(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^{\int 1\cdot\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{-x}(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+C)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-1+C\mathrm{e}^{-x}$，

因 $S|_{x=0}=0$，有 $0=\dfrac{1}{2}-1+C$，$C=\dfrac{1}{2}$，即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=S=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-1$，

故 $f(x)=[\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-1]'=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

2． （97）设函数 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2}f(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(t)$.

解：极坐标系下 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2}f(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f(\dfrac{1}{2}r)\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}f(\dfrac{1}{2}r)\cdot r\mathrm{d}r$，

即 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}f(\dfrac{1}{2}r)\cdot r\mathrm{d}r$，因 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，则 $\int_0^{2t}f(\dfrac{1}{2}r)\cdot r\mathrm{d}r$ 与 $f(t)$在$(0,+\infty)$内可导，

两边求导，$f'(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}\cdot 8\pi t+2\pi f(t)\cdot 2t\cdot 2$，得一阶线性微分方程 $y'-8\pi t\,y=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}$，且 $y|_{t=0}=1$，

有 $y=\mathrm{e}^{-\int(-8\pi t)\mathrm{d}t}[\int 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}\cdot\mathrm{e}^{\int(-8\pi t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C]=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(\int 8\pi t\mathrm{d}t+C)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+C)$，

由于 $y|_{t=0}=1$，有 $C=1$，

故 $y=f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1)$.

3．（98）设函数$f(x)$在$[1, +\infty)$上连续，若由曲线$y=f(x)$，直线$x=1, x=t\quad(t>1)$与x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周所成的旋转体体积为$V(t)=\dfrac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)]$，试求$y=f(x)$所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件$y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$的解.

解：$V(t)=\pi\int_1^t [f(x)]^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)]$，$f(x)$在$[1, +\infty)$上连续，知$\int_1^t [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$与$f(t)$在$(1, +\infty)$内可导，

两边求导，得$\pi[f(x)]^2=\dfrac{\pi}{3}[2tf(t)+t^2 f'(t)]$，

故可得$y=f(x)$所满足的齐次微分方程$3y^2=2xy+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\dfrac{y^2}{x^2}-2\dfrac{y}{x}$，且$y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$，

令$u=\dfrac{y}{x}$，有$y=xu$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程，得$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2-2u$，即$\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=3\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，

两边积分$\int(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u})\mathrm{d}u=3\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}+\ln C$，即$\ln(u-1)-\ln u=3\ln x+\ln C$，得：$\dfrac{u-1}{u}=Cx^3$，

则$u=\dfrac{1}{1-Cx^3}$，$y=\dfrac{x}{1-Cx^3}$，因$y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$，有$\dfrac{2}{9}=\dfrac{2}{1-8C}$，$C=-1$，

故$y=\dfrac{x}{1+x^3}$.

4．（99）设有微分方程$y'-2y=\varphi(x)$，其中$\varphi(x)=\begin{cases}2, & 若x<1,\\ 0, & 若x>1,\end{cases}$试求在$(-\infty, +\infty)$内的连续函数$y=y(x)$，使之在$(-\infty, 1)$和$(1, +\infty)$内都满足所给方程，且满足条件$y(0)=0$.

解：一阶线性微分方程，有$y=\mathrm{e}^{-\int(-2)\mathrm{d}x}[\int\varphi(x)\mathrm{e}^{\int(-2)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{2x}[\int\varphi(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C]$，

若$x<1$，有$\mathrm{e}^{2x}[\int\varphi(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{2x}(\int 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{2x}(-\mathrm{e}^{-2x}+C_1)=-1+C_1\mathrm{e}^{-2x}$，

若$x>1$，有$\mathrm{e}^{2x}[\int\varphi(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{2x}(\int 0\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{2x}(0+C_2)=C_2\mathrm{e}^{2x}$，

则微分方程的解为$y=\begin{cases}-1+C_1\mathrm{e}^{2x}, & x<1,\\ C_2\mathrm{e}^{2x}, & x>1,\end{cases}$由于$y(0)=0$，有$C_1=1$，

又因$\lim\limits_{x\to1^-}y(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-1+\mathrm{e}^{2x})=-1+\mathrm{e}^2$，$\lim\limits_{x\to1^+}y(x)=\lim\limits_{x\to1^+}C_2\mathrm{e}^{2x}=C_2\mathrm{e}^2$，

且$y=y(x)$连续，则$-1+\mathrm{e}^2=C_2\mathrm{e}^2$，$C_2=1-\mathrm{e}^{-2}$，

故$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1, & x<1,\\ (1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{2x}, & x>1.\end{cases}$

5．（00）求微分方程$y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$满足条件$y(0)=1, y'(0)=1$的解.

解：设$p=y'$，有$p'-2p=\mathrm{e}^{2x}$，且$p|_{x=0}=1$，一阶线性微分方程，

则$p=\mathrm{e}^{-\int(-2)\mathrm{d}x}[\int\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int(-2)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1]=\mathrm{e}^{2x}(x+C_1)$，由于$p|_{x=0}=1$，得$C_1=1$，即$p=y'=(x+1)\mathrm{e}^{2x}$，

有$y=\int(x+1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int(x+1)\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\dfrac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C$，

由于 $y(0)=1$，得$1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+C$， $C=\frac{3}{4}$，

故 $y=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{3}{4}$.

6. （01）已知$f_n(x)$满足$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$（$n$ 为正整数），且 $f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$之和.

解：设 $y=f_n(x)$，得一阶线性微分方程 $y'-y=x^{n-1}\mathrm{e}^x$，且 $y\big|_{x=1}=\frac{\mathrm{e}}{n}$，

则 $y=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^x(\int x^{n-1}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^x(\frac{x^n}{n}+C)$，

由于 $y\big|_{x=1}=\frac{\mathrm{e}}{n}$，得 $\frac{\mathrm{e}}{n}=\mathrm{e}(\frac{1}{n}+C)$，$C=0$，即 $y=f_n(x)=\frac{x^n}{n}\mathrm{e}^x$，

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\mathrm{e}^x$，收敛区间 $x\in[-1,1)$，有 $S(x)\mathrm{e}^{-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$x\in[-1,1)$，

则$[S(x)\mathrm{e}^{-x}]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$x\in(-1,1)$，有 $S(x)\mathrm{e}^{-x}=S(0)\mathrm{e}^0+\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln|1-t|\big\|_0^x=-\ln(1-x)$，

故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$.

7. （02）

（1）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$；

（2）利用（1）的结果求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数.

解：（1）因 $y=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$，

$$y'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

$$y''=x+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

则 $y''+y'+y=1+(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})+(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!})+\cdots+[\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}]+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,$$

故可得二阶常系数线性微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$，且 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$.

（2）先解齐次情形，$y''+y'+y=0$，特征方程$\lambda^2+\lambda+1=0$，得特征根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$，

即 $y''+y'+y=0$ 的通解为 $y^*=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2})$，

设 $\tilde{y}=A\mathrm{e}^x$ 是 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的一个特解，代入得 $3A\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$，即 $A=\dfrac{1}{3}$，$\tilde{y}=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$，

则 $y=\tilde{y}+y^*=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2})$，

且 $y'=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2})+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_1\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2})$，

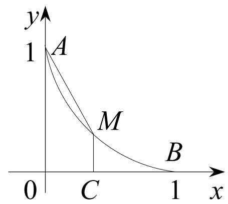
代入 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$，则$1=\dfrac{1}{3}+C_1$，$0=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2$，得 $C_1=\dfrac{2}{3}$，$C_2=0$，

故幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数是 $y(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

8．（03）设 $y=f(x)$是第一象限内连接点 $A(0,1)$，$B(1,0)$的一段连续曲线，$M(x,y)$是曲线上一点，C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点．若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，求 $f(x)$的表达式．

解：由于 $S_{OCMA}=\dfrac{1}{2}x[1+f(x)]$，$S_{CBM}=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，有 $\dfrac{1}{2}x[1+f(x)]+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，

令 $u=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，得一阶线性微分方程 $\dfrac{1}{2}x(1+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x})-u=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，且 $u|_{x=1}=0$，



即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}u=\dfrac{x^2}{3}-1+\dfrac{2}{3x}$，有 $u=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}[\int(\dfrac{x^2}{3}-1+\dfrac{2}{3x})\mathrm{e}^{\int(-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$，

则 $u=x^2[\int(\dfrac{x^2}{3}-1+\dfrac{2}{3x})\cdot\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x+C]=x^2[\int(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{3x^3})\mathrm{d}x+C]=x^2(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3x^2}+C)$，

代入 $u|_{x=1}=0$，得 $0=\dfrac{1}{3}+1-\dfrac{1}{3}+C$，$C=-1$，即 $u=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}+x-\dfrac{1}{3}-x^2$，

故 $f(x)=(\dfrac{x^3}{3}+x-\dfrac{1}{3}-x^2)'=x^2+1-2x=(x-1)^2$．

9．（03）设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x), g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$，

（1）求 $F(x)$所满足的一阶微分方程；

（2）求出 $F(x)$的表达式．

解：（1）因 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=[g(x)]^2+[f(x)]^2$，且 $F(0)=f(0)g(0)=0$，

则 $F'(x)+2F(x)=[g(x)]^2+[f(x)]^2+2f(x)g(x)=[f(x)+g(x)]^2=4\mathrm{e}^{2x}$，令 $y=F(x)$，

故 $F(x)$满足一阶线性微分方程 $y'+2y=4\mathrm{e}^{2x}$，且 $y|_{x=0}=0$．

（2）有 $y=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}(\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{-2x}(\int 4\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{4x}+C)=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}$，

代入，得 $0=1+C$，$C=-1$，

故 $y = F(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}$.

10．（04）设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$ 的和函数为 $S(x)$．求：

（1）$S(x)$所满足的一阶微分方程；

（2）$S(x)$的表达式．

解：（1）$S(x) = \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots$，收敛区间 $x \in (-\infty, +\infty)$，

有 $S'(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{2\cdot 4} + \dfrac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = \dfrac{x^3}{2} + x(\dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots) = \dfrac{x^3}{2} + xS(x)$，

故 $S(x)$满足一阶线性微分方程 $y' - xy = \dfrac{x^3}{2}$，且 $y|_{x=0} = 0$．

（2）$y = \mathrm{e}^{-\int(-x)\mathrm{d}x}(\int \dfrac{x^3}{2}\mathrm{e}^{\int(-x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(\int \dfrac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x + C) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}[\int \dfrac{x^2}{2}(-\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) + C]$

$$= \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\frac{x^2}{2} + C) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + C) = -\frac{x^2}{2} - 1 + C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},$$

代入 $y|_{x=0} = 0$，得 $0 = -1 + C$，$C = 1$，

故 $y = S(x) = -\dfrac{x^2}{2} - 1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

11．（04）设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u'(u, v) + f_v'(u, v) = uv$．求 $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}f(x, x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解．

解：$y'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}f(x, x) + \mathrm{e}^{-2x}[f_1'(x, x) + f_2'(x, x)] = -2y + \mathrm{e}^{-2x}\cdot x^2$，

故 $y(x)$满足一阶线性微分方程 $y' + 2y = x^2\mathrm{e}^{-2x}$，

且通解为 $y = \mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}(\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\cdot \mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C) = \mathrm{e}^{-2x}(\int x^2\mathrm{d}x + C) = \mathrm{e}^{-2x}(\dfrac{x^3}{3} + C)$．

12．（06）在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$，其上任意点 $P(x, y)$（$x \ne 0$）处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a > 0$），

（1）求 L 的方程；

（2）当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值．

解：（1）切线斜率为 y'，直线 OP 的斜率为 $\dfrac{y}{x}$，有 $y' - \dfrac{y}{x} = ax$，且 $y|_{x=1} = 0$，

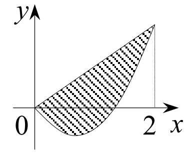
有 $y = \mathrm{e}^{-\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}[\int ax\cdot \mathrm{e}^{\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C] = x(\int ax\cdot \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x + C) = x(ax + C) = ax^2 + Cx$，

代入 $y|_{x=1} = 0$，得 $0 = a + C$，$C = -a$，

故 L 的方程为 $y = ax^2 - ax$；

（2）由 $y = ax^2 - ax$ 与 $y = ax$ 联立求解得 L 与直线 $y = ax$ 的交点为 $x = 0$ 和 $x = 2$，

故 $\dfrac{8}{3} = \int_0^2[ax - (ax^2 - ax)]dx = (ax^2 - \dfrac{1}{3}ax^3)\Big|_0^2 = 4a - \dfrac{8}{3}a = \dfrac{4}{3}a$，得 $a = 2$.



13．（07）设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f'(t)\mathrm{d}t + x^2$．求 $f(x)$ 的表达式．

解：$f(x) = x^2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t^2 f'(t)\mathrm{d}t + x^2 = x^2[f(x) - f(0)] - \int_0^x t^2 f'(t)\mathrm{d}t + x^2$，且有 $f(0) = 0$，

两边求导，得$f'(x)=2x[f(x)-f(0)]+x^2f'(x)-x^2f'(x)+2x=2xf(x)+2x$，

即$f(x)$满足一阶线性微分方程$y'-2xy=2x$，且$y|_{x=0}=0$，

则$y=\mathrm{e}^{-\int(-2x)\mathrm{d}x}[\int 2x\cdot\mathrm{e}^{\int(-2x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\mathrm{e}^{x^2}(\int 2x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{x^2}(-\mathrm{e}^{x^2}+C)=-1+C\mathrm{e}^{x^2}$，

代入$y|_{x=0}=0$，得$0=-1+C$，$C=1$，

故$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}-1$.

14．（09）设曲线$y=f(x)$，其中$y=f(x)$是可导函数，且$f(x)>0$．已知曲线$y=f(x)$与直线$y=0,x=1$及$x=t\quad(t>1)$所围成的曲边梯形，绕x轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的πt倍，求该曲线方程.

解：因旋转体体积$V_x=\pi\int_1^t[f(x)]^2dx$，曲边梯形面积$S=\int_1^t f(x)dx$，

则$\pi\int_1^t[f(x)]^2dx=\pi t\cdot\int_1^t f(x)dx$，即$\int_1^t[f(x)]^2dx=t\int_1^t f(x)dx$，两边求导得$[f(t)]^2=tf(t)+\int_1^t f(x)dx$，

两边再求导得$2f(t)f'(t)=tf'(t)+f(t)+f(t)$，即$2y\dfrac{dy}{dt}=t\dfrac{dy}{dt}+2y$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2y}{2y-t}$，

再对$[f(t)]^2=tf(t)+\int_1^t f(x)dx$，令$t=1$，得$[f(1)]^2=f(1)$，由$f(x)>0$知，$f(1)=1$，即$y\big|_{t=1}=1$，

求解微分方程$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2y}{2y-t}$，$y\big|_{t=1}=1$，齐次微分方程，令$u=\dfrac{y}{t}$，有$y=tu$，$\dfrac{dy}{dt}=u+t\dfrac{du}{dt}$，

则$u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2u}{2u-1}$，$t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2u}{2u-1}-u=-\dfrac{2u^2-3u}{2u-1}$，$\dfrac{2u-1}{2u^2-3u}du=\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{u}-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{3-2u}\right)du=-\dfrac{dt}{t}$，

两边积分得$\dfrac{1}{3}\ln u+\dfrac{2}{3}\ln(3-2u)=-\ln t+\dfrac{1}{3}\ln C$，即$\ln u+2\ln(3-2u)+3\ln t=\ln C$，

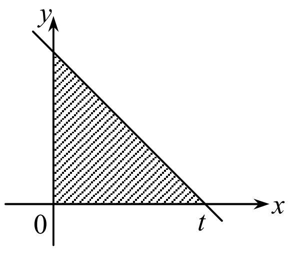
则$u(3-2u)^2t^3=C$，$\dfrac{y}{t}\left(3-2\dfrac{y}{t}\right)^2t^3=C$，即$y(3t-2y)^2=C$，

代入$y\big|_{t=1}=1$，可得$C=1$，有$y(3t-2y)^2=1$，

故该曲线方程为$y(3x-2y)^2=1$.

17．（11）$f(x)$在$[0,1]$有连续的导数，$f(0)=1$，且$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy$，

$D_t=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le t\}\quad(0<t\le 1)$，求$f(x)$的表达式.



解：因$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x}f'(x+y)dy=\int_0^t dx\cdot f(x+y)\big|_0^{t-x}$

$$=\int_0^t[f(t)-f(x)]dx=tf(t)-\int_0^t f(x)dx，$$

且$\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy=f(t)\iint\limits_{D_t}dxdy=\dfrac{1}{2}t^2f(t)$，即$tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\dfrac{1}{2}t^2f(t)$，

则两边关于 t 求导，可得 $f(t)+tf'(t)-f(t)=tf(t)+\frac{1}{2}t^2f'(t)$，即 $(t-2)f'(t)+2f(t)=0$，

转化为求解微分方程 $(t-2)y'+2y=0$， $y\big|_{t=0}=1$，

分离变量，得 $\frac{dy}{y}=-\frac{2dt}{t-2}$，两边积分，得 $\ln y=-2\ln(t-2)+\ln C$，即 $y=\frac{C}{(t-2)^2}$，

因 $y\big|_{t=0}=1$，得 $1=\frac{C}{4}$，有 $C=4$，即 $y=f(t)=\frac{4}{(t-2)^2}$，

故 $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$.

18．（12）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，

（1）求表达式 $f(x)$；

（2）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点.

解：（1）因 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，有 $f''(x)+f'(x)=(2\mathrm{e}^x)'=2\mathrm{e}^x$，代入 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$，

可得 $f(x)=\mathrm{e}^x$，且 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 与 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，

故 $f(x)=\mathrm{e}^x$；

（2）因 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$，

则 $y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+\mathrm{e}^{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+1$，

$y''=2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+2x\cdot 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+2x\mathrm{e}^{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}=(2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+2x$，

当 $x=0$ 时，有 $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt=0$，可得 $y''=0$ 且 $y=0$，

当 $x<0$ 时，有 $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt<0$，可得 $y''=(2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+2x<0$，

当 $x>0$ 时，有 $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt>0$，可得 $y''=(2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt+2x>0$，

故点 $(0,0)$ 是 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点.

第十一章 差分方程

一．填空题：

1．（97）差分方程 $y_{t+1}+y_t=t2^t$ 的通解为__________.

解：先解线性齐次方程 $y_{t+1}+y_t=0$，特征方程为 $\lambda+1=0$，特征根 $\lambda=-1$，则通解为 $y_t^*=C\cdot(-1)^t$，

再设线性非齐次方程特解为 $\tilde{y}_t=(A_1t+A_0)2^t$，代入原方程，得 $[A_1(t+1)+A_0]2^{t+1}+(A_1t+A_0)2^t=t2^t$，

即 $3A_1t+2A_1+3A_0=t$，可得 $A_1=\dfrac{1}{3}, A_0=-\dfrac{2}{9}$，有 $\tilde{y}_t=(\dfrac{1}{3}t-\dfrac{2}{9})2^t$，

填空：$y_t=(\dfrac{1}{3}t-\dfrac{2}{9})2^t+C\cdot(-1)^t$.

2．（98）差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为__________.

解：先解线性齐次方程 $2y_{t+1}+10y_t=0$，特征方程 $2\lambda+10=0$，特征根 $\lambda=-5$，则通解为 $y_t^*=C\cdot(-5)^t$，

再设线性非齐次方程特解为 $\tilde{y}_t=A_1t+A_0$，代入原方程，得 $2[A_1(t+1)+A_0]+10(A_1t+A_0)-5t=0$，

即 $12A_1t-5t+2A_1+12A_0=0$，可得 $A_1=\dfrac{5}{12}, A_0=-\dfrac{5}{72}$，有 $\tilde{y}_t=\dfrac{5}{12}t-\dfrac{5}{72}$，

填空：$y_t=\dfrac{5}{12}t-\dfrac{5}{72}+C\cdot(-5)^t$.

3．（01）某公司每年的工资总额在比上一年增加 20%的基础上在追加 2 百万元．若以 W_t 表示第 t 年的工资总额（单位：百万元），则 W_t 满足的差分方程是__________.

解：第 t 年的工资总额应为 $(1+0.2)W_t+2$，

填空：$W_{t+1}=1.2W_t+2$.