





Y1909201

**Dissertation Submitted to Hangzhou Dianzi University
for the Degree of Master**

**Analysis and Design for T-S Model Based
Nonlinear Systems With Time-Delays**

Candidate: Zhou Lei

Supervisor: Prof. Zhou Shaosheng

November, 2010



杭州电子科技大学
学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

论文作者签名：周磊

日期：2011年1月12日

学位论文使用授权说明

本人完全了解杭州电子科技大学关于保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属杭州电子科技大学。本人保证毕业离校后，发表论文或使用论文工作成果时署名单位仍然为杭州电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：周磊

日期：2011年1月12日

指导教师签名：

周磊

日期：2011年1月12日

摘 要

本论文主要研究一类基于 Takagi-Sugeno (T-S) 模型的非线性时滞系统的稳定性和滤波器 (及控制器) 的设计问题。研究的主要内容包括以下三个部分:

第一部分: 考虑一类基于T-S模型的非线性中立型时滞系统, 研究其 β -指数稳定性和控制器设计问题。首先, 利用时滞分解方法并在积分项中引入指数函数, 构造新型李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 根据这个函数并运用矩阵不等式处理技巧, 寻求使系统 β -指数稳定的充分条件; 其次, 利用得到的这个条件, 设计一个保证系统 β -指数稳定的控制器。最后, 给出数值实例, 验证所得结果的可行性和有效性。

第二部分: 对一类基于T-S模型的、带有时变时滞的非线性系统, 研究其 H_∞ 滤波问题。在这部分里, 时滞要求在一个给定的区间里变化, 其变化规律不做限制。对这类系统构造一个新型的模糊基依赖的滤波器, 设计这种滤波器需要的模糊基信息较之非模糊基依赖的滤波器而言, 相对较多, 但是所得滤波器的保守性较小。构造这个滤波器的过程是: 首先寻求一个依赖于时滞变化区间上下界的新颖李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 对所得滤波误差系统进行稳定性分析, 再利用所得结果结合矩阵处理技巧求出滤波器的参数。数值仿真对构造的滤波器进行了验证。

第三部分: 研究基于 T-S 模型的带有随机扰动的时滞系统的稳定性问题和控制器设计问题。通过时滞分解方法, 建立新的二次李雅普诺夫-克朗索夫斯基泛函, 结合伊藤微分公式、等距定理等, 寻求判断系统渐近稳定的时滞依赖的充分条件, 以线性矩阵不等式的形式表示, 并设计了控制器镇定系统, 最后给出了数值例子来验证这种方法的有效性。

关键词: 时滞系统, T-S模型, 时滞分解, H_∞ 滤波器, 指数稳定, 随机系统



ABSTRACT

This paper deals with the stability analysis, filter and controller design problems for a class of nonlinear systems with time-delays. This kind of nonlinear systems is represented by Takagi-Sugeno (T-S) model fuzzy systems. Specifically, the result mainly contains the following three parts:

In the first part, the β -exponential stability and stabilization problems for a class of T-S model based neutral systems has been investigated. To solve these problems, new Lyapunov-Krasovskii functional candidates for this class of systems can be chosen by using delay decomposition approach and introducing some exponential functions into corresponding integrands. β -exponential stability conditions of the T-S model based neutral systems are established by using the Lyapunov-Krasovskii functional and a modification integral inequality. An LMI-based state feedback controller design strategy for this class of systems is proposed based on one of the β -exponential stability conditions. Two numerical examples are also provided to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

The second part focuses on fuzzy rule dependent H_∞ filter design for discrete time nonlinear fuzzy systems with time-varying delay. New delay-dependent Lyapunov-Krasovskii functional is used in which different weighted matrices are corresponding to different intervals. The intervals depend on the time-varying delay and its lower and upper bounds. Based on this Lyapunov-Krasovskii functional, some new sufficient conditions guaranteeing stability of the system and satisfying a prescribed H_∞ performance level are derived. To reduce conservatism, a fuzzy rule dependent filter is designed by using the resulted criteria. Numerical example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

The third part is concerned with the stability and stabilization problems of stochastic systems with time delays. By using a delay decomposition approach, a novel Lyapunov-Krasovskii functional is proposed. Combining with the Itô formula and isometry property, a new delay-dependent stability criterion for nonlinear delayed stochastic systems is derived in terms of linear matrix inequalities. Employing the obtained result, a state feedback controller is constructed to ensure the stability in mean square of the corresponding closed-loop system. A numerical example is given to verify the effectiveness of the design method.



Keywords: time-delay system, T-S model, delay-decomposition approach, H_∞ filter, exponential stability, stochastic system



目 录

摘 要	I
ABSTRACT	II
第 1 章 绪论	1
1.1 时滞系统概述	1
1.2 模糊控制的发展概况	3
1.3 本文解决的主要问题	4
第 2 章 基于T-S模型非线性中立型时滞系统的指数稳定性分析和控制器设计	6
2.1 引言	6
2.2 问题的提出	7
2.3 β -指数稳定性分析	8
2.4 控制器设计	18
2.5 仿真算例	20
2.6 小结	22
第 3 章 带有时变时滞的非线性系统的模糊基依赖滤波器设计	23
3.1 引言	23
3.2 问题的提出	24
3.3 稳定性和 H_∞ 性能分析	26
3.4 模糊基依赖的 H_∞ 滤波器设计	32
3.5 仿真算例	34
3.6 小结	37
第 4 章 带有随机干扰的时滞系统的稳定性分析和控制器设计	39
4.1 引言	39
4.2 问题的提出及初步	39
4.3 稳定性分析	41
4.4 控制器设计	47
4.5 数值仿真	50
4.6 小结	52
第 5 章 总结与展望	53
5.1 总结	53



5.2 展望	53
致 谢	55
参考文献	56
附 录	62



第 1 章 绪 论

1.1 时滞系统概述

时滞是客观世界与科学技术领域及工程实际中存在的普遍现象，如系统变量的测量、网络传输、化学反应等过程都会产生时滞。所以对时滞的处理在物理系统、生物系统、机械系统、网络控制中等有着广泛的应用背景。然而滞后的存在常常会导致很多不便，如使系统出现震荡甚至不稳定。在数学上，对这类系统的描述多用泛函微分方程。与常微分方程不同的是，泛函微分方程突破了欧式空间，在函数空间考虑系统；其生成的是无穷维上的动力系统，特征方程一般为超越型方程，这为分析和设计时滞系统造成了极大的困难。鉴于时滞系统的应用领域、自身性质和理论处理上的难度，对时滞系统的研究成为了国际上的热门领域。

研究时滞系统，最早使用的方法是频域法，通过讨论系统特征方程的根是否具有负实部来判定系统的稳定性。频域方法主要包括解析法、图解法以及两者相结合的方法来判断系统的特征根实部的符号，以确定系统的稳定性问题。通过适当的变换，化超越型特征方程为非超越型形式，再运用劳斯-赫尔维兹判据，即可得到系统稳定性的条件，并且得到的条件是充分必要的。但是，当系统维数增加时，变换系统超越型方程是非常困难甚至不可能的，当系统存在时变时滞、参数不确定、随机扰动等，还有中立型系统，判断其特征方程根的实部的符号问题是非常复杂的。因此，用频域法判断系统稳定性的局限性很大。鉴于这个原因，时域方法受到了普遍的重视。目前，国内外在处理复杂时滞系统时，主要采用的方法是李雅普诺夫泛函方法和 Razumikhin 函数方法，这两种方法分别是李雅普诺夫和 Razumikhin 在上个世纪五十年代提出，是时滞系统稳定性分析的一般方法。其主要思想是构造一个合适的能量函数，（这个函数的物理意义类似表示系统的能量），根据这个函数的正定性以及其导数的负定性，得到判断系统稳定性的充分条件。然而这得到的只是充分非必要条件，并且没有通用的选取系统能量函数的方法。尽管如此，这种方法在处理各类时滞系统时的通用性，加之 Matlab 控制工具箱的应用，使这类方法得到了广泛的应用，引起了很多学者的兴趣，也得到了大量的成果。

本文主要考虑在时域中处理时滞系统，故我们偏重叙述时域法在处理时滞系统的相关研究。模型变换法是处理时滞系统的重要方法，在一个阶段内，曾是研究时滞系统的主流方法，主要包括一阶模型变换、中立型模型变换、广义系统模型变换和基于 Park 和 Moon 不等式模型变换。模型变换方法可能导致变换后的系统与原来系统的不等价，产生附加特

征值，因而产生的条件不可避免的具有保守性。本文也用到一些不等式放缩的技巧，故对Park和Moon不等式稍加论述。对不等式

$$-2a^T b \leq a^T X a - b^T X^{-1} b$$

其中 $a, b \in R^n$, $X = X^T > 0$ 。这个等式是很保守的，运用这个不等式处理系统时，会产生不必要的保守性。Park通过引入自由矩阵的方式改进了这个不等式，即为Park不等式。

对任意的 $a, b \in R^n$, $X = X^T > 0$ $M \in R^{n \times n}$, 我们有

$$-2a^T b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & XM \\ M^T X & (M^T X + I)X^{-1}(XM + I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Moon在Park不等式的启发下，于2001年，进一步改进了Park不等式，既是Moon不等式。

$$-2a^T b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - I \\ Y^T - I & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} > 0$$

其中 $a, b \in R^n$, X, Y, Z 是任意合适维数的矩阵， I 是合适维数的单位矩阵。基于这两个矩阵不等式进行的系统变换不会出现不等价的问题，但同样也增加了结果的保守性。自由权矩阵方法 [1] 也是处理时滞系统的常用方法，是对模型变换方法的推广，其主要思想是对状态变量相关项的权矩阵采用自由权矩阵，通过牛顿-莱布尼兹公式和系统方程构造一个恒等于零的式子，并加到构造的李雅普诺夫泛函的导数中，以抵消不便于处理的项，化为线性矩阵不等式，得到判断系统稳定性充分条件。引入自由权矩阵并没有增加保守性，因此，这种方法得到了广泛的应用和推广。但是这种方法增大计算量，表达形式也较复杂，尤其涉及时变时滞、多时滞时，实现多个矩阵不等式求解时很困难。时滞分解方法，是一种新型的处理时滞系统的方法，采用时滞分解的方法构造李雅普诺夫函数，具有保守性小、通用性较强的特点 [2]。是目前处理时滞系统的较好的方法，但计算量也比较大。

目前，对时滞系统的分析、研究，已经取得了丰富的成果，也有学者对这类系统的研究方法、研究成果做了总结和评价，并对未来发展做了自己的展望。[3] 对时滞系统的稳定性、鲁棒稳定性及控制技术在当时的研究现状做了总结，关键论述了时滞对闭环控制的分析和设计产生的影响。[4] 研究了带有参数不确定性的线性时滞系统的鲁棒控制问题的发展情况，对这类系统的处理技巧做了一个概述，对得到的鲁棒稳定性条件做了一个总结。[5] 也对当时时滞系统的发展做了论述，重点强调了当时的最新成果及在工程中的应用，并以实际

例子, 进行数学描述, 稳定性分析和控制器设计。同时, 法国学者 Richard 基于对时滞系统研究的动机 [6], 讨论了时滞系统的控制方式, 并重点描述了滑膜控制方式, 提出四个研究时滞系统的公开问题, 为以后对时滞系统的研究指出的方向。另外, 南京理工大学徐胜元教授针对目前处理时滞系统常用的线性矩阵不等式技术做了深入的研究 [7], 对用这种技术处理时滞系统得到的结果进行分析、比较和总结。

1.2 模糊控制的发展概况

1965年, 美国加利福尼亚大学电气工程系教授 L.A. Zadeh 在他的开创性的文章《Fuzzy Sets》提出模糊集的概念, 创立了模糊理论。又鉴于他认为经典控制理论过于强调精确性, 无法处理复杂系统。因此, 在1973年, Zadeh 教授提出了模糊逻辑控制的定义和相关定理, 这些理论研究给模糊控制理论提供了数学依据, 为模糊推理打下了理论基础。1975年, E.H.Mamdani 和 S.Assilian 第一次将模糊集理论和模糊推理应用到了锅炉和蒸汽机的控制, 宣告了模糊控制的诞生。1978年, Holmbald 和 Ostergaard 为整个工业过程开发出了第一个模糊控制器-模糊水泥窑控制器。到了20世纪80年代, 模糊控制理论的研究与应用在日本得到了极大的发展。Sugeno 开创了日本的首次模糊应用, 随后又开始研究模糊机器人。日立公司的 Yasunobu 和 Miyamoto 给仙台地铁站开发模糊控制系统, 创造了世界上最先进的地铁系统。此后, 支持模糊理论的理论 and 工程得到迅速的发展。进入90年代, 市场上已经出现了大量的模糊产品。1992年, 首届模糊系统国际会议的召开, 标志着模糊系统已被 IEEE 接受, 并与次年创建了模糊控制会刊, 从理论角度看, 模糊系统的控制已经取得了不菲的成果。

常见的模糊系统有三类, 1, 纯模糊系统; 2, T-S 模糊系统; 3, 具有模糊器和解模糊器的模糊系统。本文主要是基于 T-S 模糊模型的系统分析, 故我们详细描述这类模糊系统。1985年, 两位日本科学家 Takaqi 和 Sugeno 在其论文 [8] 中首次提出了 T-S 模糊系统, T-S 模型基于系统局部线性化, 将输入空间分成很多模糊子空间, 并且在相应的每个子空间建立一个局部模型, 再利用隶属度函数将各个局部模型光滑地连接起来, 用来拟合受控对象的非线性特性。T-S 模型具有逼近能力强和结构简单等特点, 成为复杂受控系统建模的有效方法。同时因其结论部分采用线性多项式来描述, 因而便于采用线性系统的工具对这类系统进行稳定性等性能分析和相关的控制器 (滤波器) 设计。

目前, 基于 T-S 模型的模糊控制技术已发展成为非线性动态系统建模与控制的一种重要方法。它利用人们对被控对象直观的和定性的知识信息建立数学模型, 有效的表征非线性系统, 因而对非线性系统的研究有着重要的现实意义。关于这类模糊控制系统的分析和设计的

研究已得到了很好的发展,阶段性的研究成果时有发表([9-15])。

[14]给出了关于 T-S 模糊控制系统的一些基本的分析和设计结果,作者针对离散系统采用各局部控制加权组合的方式提出了一种模糊控制器,并且基于一种能量函数,利用李雅普诺夫方法对模糊控制系统进行了稳定性分析。随后,[10]提出了模糊状态方程,基于李雅普诺夫稳定性分析方法给出了这种模糊控制系统的全局渐近稳定性条件。[13]通过将模糊子系统间的关联包含在一个矩阵中,得到了基于 T-S 模型的模糊控制系统的保守性较小的稳定性条件。[12]利用一种依赖于模糊基的非二次李雅普诺夫函数研究了基于 T-S 模型非线性系统的镇定问题,以线性矩阵不等式的形式给出了这类问题保守性较小的解。

当模糊系统出现不确定性时,[16]研究了一类基于 T-S 模型的带有时变时滞的系统的鲁棒控制问题,在这里,时滞要求是在一个区间内连续变化的,也就是有上下界限,对时滞的变化率不作要求,利用李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数方法,得到系统在 H_∞ 意义下渐近稳定的条件,并设计了 H_∞ 控制器,仿真验证结果的可行性。[15]运用模糊基依赖李亚普诺夫方法和矩阵不等式处理技巧,研究这类系统的状态反馈 H_∞ 控制问题,得到了状态反馈 H_∞ 控制器存在的保守性较小的条件,给出控制器设计方法。另外,[17-20]也分别研究带有不确定性的基于 T-S 模糊模型的系统分析和设计问题。

对于模糊系统的滤波问题,[21]利用模糊基李雅普诺夫函数方法,将模糊子系统的信息用一个关联矩阵表示,结合系统矩阵和引入一些新的矩阵变量,建立判断系统渐近稳定的保守性较小的充分条件,得到了较好的 H_∞ 滤波器的设计结果;在这篇文章的基础上,[22]研究了带有时变延迟的连续系统的 H_∞ 滤波问题,通过分步补偿技术,设计保证滤波误差系统渐近稳定且满足给定 H_∞ 性能指标的滤波器,滤波器的参数可通过解一组线性矩阵不等式求得。仿真算例验证了结果的有效性与可行性。

对基于 T-S 模型的模糊系统的控制器设计问题,[23]通过将模糊子系统的信息用一个关联矩阵表示,利用这个矩阵以及引入新的矩阵变量,建立了系统非二次稳定且满足给定 H_∞ 性能指标的保守性较小的条件,进一步改进了基于 T-S 模型的离散非线性系统的状态反馈 H_∞ 控制器的设计结果。对带有时变延迟和不确定性的离散模糊系统,[24]研究了时滞依赖的 H_∞ 控制器设计问题。

1.3 本文解决的主要问题

本文主要研究以下三个问题:

(1) 对一类基于 T-S 模糊模型的中立型时滞系统,研究其 β -指数稳定性及镇定问题。运用时滞分解方法并在相应的积分项中引入指数项,构造新型的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函

数，以得到检验这类系统指数稳定性的充分条件。根据这个条件，设计一个基于线性矩阵不等式的控制器，镇定这类系统。最后给出两个仿真算例，分别验证所得稳定性条件和控制器的有效性。

(2) 对带有时变时滞的基于T-S模型的非线性系统，设计一模糊规则依赖的滤波器。与非模糊规则依赖的滤波器相比，我们设计的这个滤波器运用了较多的模糊基的信息，构造较复杂，计算量较大；却具有较小的保守性。

(3) 研究带有随机扰动的基于 T-S 模型时滞系统的稳定性及控制器设计问题。用时滞分解的方法来构造李雅普诺夫-克朗索夫斯基泛函，结合伊藤微分公式、等距定理等处理方法，得到判断这类系统渐近稳定性的保守性较小的充分条件，并基于这个条件设计控制器。

第 2 章 基于T-S模型的中立型时滞系统的指数稳定性分析及控制器设计

2.1 引言

中立型时滞系统是指在系统的状态和状态的变化率中都存在滞后的系统，其数学模型是中立型微分方程。近几十年间，很多学者致力于这方面的研究，取得了丰硕的成果([25-29])。一般情况下，研究这类系统选取的李雅普诺夫函数有两类，一类是完全的李雅普诺夫函数，另一类是简单的李雅普诺夫函数；与完全的李雅普诺夫函数相比，简单的李雅普诺夫函数更便于控制器和滤波器的设计，因此，目前多采取这种李雅普诺夫函数对中立型时滞系统进行分析和设计。因而寻求新型简单李雅普诺夫函数以得到保守性更小的结果是非常有意义的工作。最近，通过运用时滞分解方法，[2]构造了一种新型李雅普诺夫函数，事实证明，运用这种函数可以标志性地减小所得结果的保守性，且适合控制器设计。

注意到目前对非线性时滞系统研究，多是考虑系统的稳定性([21], [30-32])，而对系统指数稳定的研究成果却相对较少。实际上，在工程应用中，指数稳定性也是非常重要的，所以研究时滞系统的指数稳定性问题也是比较有意义的事情。这方面的研究也取得了一定进展；[33]研究了一类带有不确定性的线性时滞系统，得到了判断系统指数稳定性的条件和镇定系统的方法。[27]给出一个时滞依赖的判断中立型时滞系统指数稳定性的方法。

对非线性系统的研究一直是控制理论中的难点，自1985年，[8]提出可以用T-S模型近似表示非线性之后，就引起了广泛的关注。在过去20多年间，不少科研人员对这类模型进行了深入的研究，得到了丰富的成果。对基于T-S模型的时滞系统，[16]和[32]都以线性矩阵不等式的形式给出判断系统稳定性的充分条件，以及镇定相应系统的方法。对模糊系统的滤波问题，[34]和[35]也分别进行了研究，给出滤波器的设计方法。基于模糊基依赖的李雅普诺夫泛函，[23]和[21]分别研究了基于T-S模型的非线性系统的 H_∞ 控制器和 H_∞ 滤波器的设计问题。然而，对基于T-S模型的中立型时滞系统的研究，成果却相对较少。

在这部分里，我们主要研究一类基于T-S模型的非线性中立型时滞系统的指数稳定性和控制器设计的问题。在[2]的基础上，利用时滞分解方法，并在积分项里引入指数函数，构造新型李雅普诺夫函数，得到一个保守性小的可用于判断系统指数稳定性的充分条件。根据所得条件，运用矩阵处理技巧、不等式放缩等手段设计控制器。最后进行数值仿真，验证结果的可行性和有效性。

本部分的结构如下，第二节将描述我们所要研究的基于T-S模型非线性中立型时滞系统。第三节对系统进行指数稳定性分析，寻求使系统指数稳定的充分条件。控制器的设计在第四节；第五节会给出一个数值仿真算例来验证所提方法的有效性；最后，第六节是本章的一个小结。

本章用到记号声明：上标 T 表示矩阵的转置，对一个实矩阵 $P > (\geq) 0$ 表示 P 是正定（半正定）矩阵， $A > (\geq) B$ 表示 $A - B > (\geq) 0$ 。 $diag\{\dots\}$ 表示一个对角阵。对给定的矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 B ， A 和 B 的克朗尼克积如下表示：

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

I 是适当维数的单位阵， $|\cdot|$ 是欧式空间中向量的范数。

2.2 问题的提出

考虑如下由 IF-THEN 规则描述的基于T-S模型的非线性中立型时滞系统：

模糊规则 i : If $x_1(t)$ 是 F_1^i , ..., $x_n(t)$ 是 F_n^i , 则

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = A_i x(t) + A_{id} x(t - r) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

这里 $x(t) \in R^n$ 是状态变量， $u(t) \in R^q$ 是控制信号。 τ 和 r 是给定常数。 F_1^i, \dots, F_n^i 是模糊集，且 $A_i, A_{id}, C \in R^{n \times n}$ ， $B_i \in R^{n \times p}$ 是已知的矩阵。模糊基函数用下式给出

$$h_i(x(t)) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{ij}(x_j(t))}{\sum_{l=1}^s \prod_{j=1}^n \mu_{lj}(x_j(t))} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

其中 $\mu_{ij}(x_j(t))$ 是 $x_j(t)$ 在 F_j^i 中的隶属度函数。令 $\alpha = \max\{r, \tau\}$ 。对这类基于 T-S 模糊模型的非线性中立型时滞系统的更一般的表达方式如下：

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = A(x)x(t) + A_d(x)x(t - r) + B(x)u(t) \quad (2.2.1)$$

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\alpha, 0] \quad (2.2.2)$$

其中

$$A(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x(t))A_i \quad A_d(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x(t))A_{id} \quad B(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x(t))B_i \quad (2.2.3)$$

我们设计一个如下形式的状态反馈控制器:

$$u(t) = K(x)x(t) + K_d(x)x(t - \tau) \quad (2.2.4)$$

其中

$$K(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x(t))K_i, \quad K_d(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x(t))K_{id} \quad (2.2.5)$$

把 (2.2.4) 代入 (2.2.1), 则得到闭环控制系统如下:

$$\dot{x}(t) = (A(x) + B(x)K(x))x(t) + (A_d(x) + B(x)K_d(x))x(t - \tau) + C\dot{x}(t - \tau) \quad (2.2.6)$$

为了叙述方便, 我们把 $x(t)$ 和 $h_i(x(t))$ 简写为 x 和 $h_i(x)$. 有模糊基函数的定义可知:

$$h_i(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^s h_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, s.$$

因此, 在控制信号 $u(t) = 0$ 的情况下, (2.2.1) 和 (2.2.2) 描述的系统, 就变成了如下形式

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - \tau) = A(x)x(t) + A_d(x)x(t - \tau) \quad (2.2.7)$$

$$x(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\alpha, 0] \quad (2.2.8)$$

在巴拿赫空间上, 令 $C_n = C([-\alpha, 0], R^n)$ 表示 $[-\alpha, 0]$ 到 R^n 的连续可微的映射. 我们引入以下定义和假设:

定义 2.1 给定一个常数 $\beta > 0$. 系统 (2.2.7) 是 β -指数稳定的, 如果存在一个正数 $M > 0$ 使得对任意 $\phi \in C_n$, 在初始条件 (2.2.8) 下的每个解 $x(t, \phi)$ 满足下面条件:

$$|x(t, \phi)| \leq M e^{-\beta t} \sqrt{\|\phi\|^2 + \|\varphi\|^2} \quad \forall t \in R^+$$

这里

$$\|\phi\| := \max_{-\alpha \leq s \leq 0} |\phi(s)|, \quad \|\varphi\| := \max_{-\alpha \leq s \leq 0} |\dot{\phi}(s)|$$

假设 2.1 $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(C)| < 1$, 这里 $\lambda_i(C)$ 是矩阵 C 的特征值.

这一部分的主要工作是设计一个形式为 (2.2.4) 的状态反馈控制器, 使得闭环系统 (2.2.6) 在初始条件 (2.2.8) 下是 β -指数稳定.

2.3 β -指数稳定性分析

在这一小节中, 我们将在初始条件 (2.2.8) 下, 分析系统 (2.2.7), 在控制信号 $u(t) = 0$ 时的指数稳定性问题, 并给出判断这类中立型时滞系统 β -指数稳定的一个充分条件.

定理 2.1 给定一个常数 $\beta > 0$ 和一个正整数 N , 如果存在矩阵 $P > 0$, $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $Q_i > 0$, $R_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ 使得下面矩阵不等式成立, 则由(2.2.7)和(2.2.8)描述的中立型时滞系统是 β -指数稳定的。

$$\Phi = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & -A^T(x)PC - 2\beta PC & 0 & A^T(x)(h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_i + S_2) \\ * & (2,2) & (2,3) & 0 & (2,5) \\ * & * & 2\beta C^T PC - e^{-2\beta\tau} S_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -e^{-2\beta\tau} S_2 & C^T(h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_i + S_2) \\ * & * & * & * & -(h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_i + S_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3.1)$$

这里 $h = N^{-1}\tau$,

$$(1,1) = A^T(x)P + PA(x) + Q_1 + S_1 + 2\beta P - R_1$$

$$(1,2) = [R_1, 0, \dots, 0, PA_d(x)]$$

$$(2,2) = \begin{bmatrix} [1,1] & e^{-2\beta h} R_2 & \dots & 0 & 0 \\ * & [2,2] & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & [3,4] & 0 \\ * & * & * & [4,4] & e^{2\beta(1-N)h} R_N \\ * & * & * & * & [5,5] \end{bmatrix}$$

$$(2,3) = [0, 0, \dots, 0, -C^T PA_d(x)]^T$$

$$(2,5) = [0, 0, \dots, 0, (h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_i^T + S_2^T) A_d(x)]^T$$

$$[1,1] = e^{-2\beta h}(Q_2 - Q_1) - (e^{-2\beta h} R_2 + R_1)$$

$$[2,2] = e^{-2\beta 2h}(Q_3 - Q_2) - (e^{-2\beta h} R_2 + e^{-2\beta 2h} R_3)$$

$$[3,4] = [0, \dots, 0, e^{2\beta(2-N)h} R_{N-1}^T]^T$$

$$[4,4] = e^{-2\beta(N-1)h}(Q_N - Q_{N-1}) - (e^{2\beta(2-N)h} R_{N-1} + e^{2\beta(1-N)h} R_N)$$

$$[5,5] = -e^{-2\beta\tau} Q_N - e^{2\beta(1-N)h} R_N$$

证明. 假设存在 $P > 0$, $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $Q_i > 0$, $R_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ 使不等式 (2.3.1) 成立, 考虑下面的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数:

$$V(t, x_t) = V_1(t, x_t) + V_2(t, x_t) + V_3(t, x_t) + V_4(t, x_t) + V_5(t, x_t) \quad (2.3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t, x_t) &= D^T(t)PD(t) \\ V_2(t, x_t) &= \sum_{i=1}^N \int_{t-ih}^{t-(i-1)h} x^T(\xi)e^{2\beta(\xi-t)}Q_i x(\xi)d\xi \\ V_3(t, x_t) &= \sum_{i=1}^N \int_{-ih}^{-(i-1)h} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\xi)e^{2\beta(\xi-t+h)}hR_i \dot{x}(\xi)d\xi d\theta \\ V_4(t, x_t) &= \int_{t-\tau}^t x^T(\xi)e^{2\beta(\xi-t)}S_1 x(\xi)d\xi \\ V_5(t, x_t) &= \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(\xi)e^{2\beta(\xi-t)}S_2 \dot{x}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

这里

$$D(t) := x(t) - Cx(t-\tau), \quad x_t := x(t+\theta), \quad \theta \in [-\alpha, 0]$$

$\beta > 0$ 是一个给定的常数.

沿着轨线 (2.2.7), 对选取的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数 $V(t, x_t)$ 关于 t 求导数, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, x_t) &= \dot{D}^T(t)PD(t) + D^T(t)P\dot{D}^T(t) \\ &= (\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau))^T P(x(t) - Cx(t-\tau)) + (x(t) - Cx(t-\tau))^T P(\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau)) \\ &= (A(x)x(t) + A_d(x)x(t-\tau))^T P(x(t) - Cx(t-\tau)) \\ &\quad + (x(t) - Cx(t-\tau))^T P(A(x)x(t) + A_d(x)x(t-\tau)), \\ \dot{V}_2(t, x_t) &= -2\beta V_2(t, x_t) + \sum_{i=1}^N e^{-2\beta t} [x^T(t - (i-1)h)e^{2\beta[t-(i-1)h]}Q_i x(t - (i-1)h) \\ &\quad - x^T(t - ih)e^{2\beta(t-ih)}Q_i x(t - ih)] \\ &= -2\beta V_2(t, x_t) + \sum_{i=1}^N [x^T(t - (i-1)h)e^{-2\beta(i-1)h}Q_i x(t - (i-1)h) \\ &\quad - x^T(t - ih)e^{-2\beta ih}Q_i x(t - ih)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3(t, x_t) &= -2\beta V_3(t, x_t) + \sum_{i=1}^N \int_{-ih}^{-(i-1)h} e^{-2\beta t} (\dot{x}^T(t) e^{2\beta(h+t)} h R_i \dot{x}(t) \\
 &\quad - \dot{x}^T(t+\theta) e^{2\beta(h+t+\theta)} h R_i \dot{x}(t+\theta)) d\theta \\
 &= -2\beta V_3(t, x_t) + \sum_{i=1}^N \dot{x}^T(t) e^{2\beta h} h^2 R_i \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^N \int_{t-ih}^{t-(i-1)h} \dot{x}^T(\xi) e^{2\beta(h-t+\xi)} h R_i \dot{x}(\xi) d\xi, \\
 \dot{V}_4(t, x_t) &= -2\beta V_4(t, x_t) + e^{-2\beta t} (x^T e^{2\beta t} S_1 x(t) - x^T(t-\tau) e^{2\beta(t-\tau)} S_1 x(t-\tau)) \\
 &= -2\beta V_4(t, x_t) + x^T(t) S_1 x(t) - x^T(t-\tau) e^{-2\beta\tau} S_1 x(t-\tau), \\
 \dot{V}_5(t, x_t) &= -2\beta V_5(t, x_t) + e^{-2\beta t} (\dot{x}^T e^{2\beta t} S_2 \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-\tau) e^{2\beta(t-\tau)} S_2 \dot{x}(t-\tau)) \\
 &= -2\beta V_5(t, x_t) + \dot{x}^T(t) S_2 \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-\tau) e^{-2\beta\tau} S_2 \dot{x}(t-\tau).
 \end{aligned}$$

根据 $\dot{V}_i(t, x_t)$ ($i = 1, \dots, 5$) 和 (2.3.2) 可知

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, x_t) + 2\beta V(t, x_t) &= \\
 &2\beta D^T(t) P D(t) + [A(x)x(t) + A_d(x)x(t-\tau)]^T P [x(t) - Cx(t-\tau)] \\
 &+ [x(t) - Cx(t-\tau)]^T P [A(x)x(t) + A_d(x)x(t-\tau)] + \sum_{i=1}^N [x^T(t - (i-1)h) \\
 &\quad \times e^{-2\beta(i-1)h} Q_i x(t - (i-1)h) - x^T(t-ih) e^{-2\beta ih} Q_i x(t-ih)] + \sum_{i=1}^N \dot{x}^T(t) \\
 &\quad \times e^{2\beta h} h^2 R_i \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^N \int_{t-ih}^{t-(i-1)h} \dot{x}^T(\xi) e^{2\beta(h-t+\xi)} h R_i \dot{x}(\xi) d\xi + x^T(t) S_1 x(t) \\
 &\quad - x^T(t-\tau) e^{-2\beta\tau} S_1 x(t-\tau) + \dot{x}^T(t) S_2 \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-\tau) e^{-2\beta\tau} S_2 \dot{x}(t-\tau) \quad (2.3.3)
 \end{aligned}$$

令

$$\eta(t) = [x^T(t), x^T(t-h), \dots, x^T(t-(N-1)h), x^T(t-\tau), x^T(t-\tau), \dot{x}^T(t-\tau)]^T \quad (2.3.4)$$

利用不等式 [59], 可知

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-ih}^{t-(i-1)h} \dot{x}^T(\xi) e^{2\beta(h-t+\xi)} h R_i \dot{x}(\xi) d\xi \\
 & \leq e^{2\beta(1-i)h} \begin{bmatrix} x(t-(i-1)h) \\ x(t-ih) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_i & R_i \\ R_i & -R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-(i-1)h) \\ x(t-ih) \end{bmatrix} \quad (2.3.5)
 \end{aligned}$$

因此, 根据 (2.3.3) 和 (2.3.5), 我们可得到如下结果

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\beta V(t, x_t) \leq \eta^T(t) \Phi \eta(t) \quad (2.3.6)$$

利用 (2.3.1) 和上面的不等式, 可得:

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\beta V(t, x_t) < 0$$

也就是

$$V(t, x_t) < V(\phi)e^{-2\beta t}, \quad t \geq 0 \quad (2.3.7)$$

其中

$$V(\phi) := V(0, \phi)$$

从李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数的定义和初始条件可知:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= D^T(0)PD(0) + \sum_{i=1}^N \int_{-ih}^{-(i-1)h} x^T(\xi)e^{2\beta\xi}Q_i x(\xi)d\xi \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{-ih}^{-(i-1)h} \int_{\theta}^0 \dot{x}^T(\xi)e^{2\beta(\xi+h)}hR_i \dot{x}(\xi)d\xi d\theta \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 x^T(\xi)e^{2\beta\xi}S_1 x(\xi)d\xi + \int_{-\tau}^0 \dot{x}^T(\xi)e^{2\beta\xi}S_2 \dot{x}(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

对上式进行整理:

$$\begin{aligned} V(\phi) &\leq [4\lambda_{\max}(P) + \sum_{i=1}^N e^{2\beta(i-1)h}\lambda_{\max}(Q_i) + \lambda_{\max}(S_1)]\|\phi\|^2 \\ &\quad + [\sum_{i=1}^N h^2 e^{2\beta h}\lambda_{\max}(R_i) + \lambda_{\max}(S_2)]\|\varphi\|^2 \\ &\leq [4\lambda_{\max}(P) + \sum_{i=1}^N e^{2\beta(i-1)h}\lambda_{\max}(Q_i) + \lambda_{\max}(S_1)]\|\phi\|^2 \\ &\quad + [\sum_{i=1}^N h^2 e^{2\beta h}\lambda_{\max}(R_i) + \lambda_{\max}(S_2)]\|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

令

$$\gamma = \max \left\{ 4\lambda_{\max}(P) + \sum_{i=1}^N e^{2\beta(i-1)h}\lambda_{\max}(Q_i) + \lambda_{\max}(S_1), \sum_{i=1}^N h^2 e^{2\beta h}\lambda_{\max}(R_i) + \lambda_{\max}(S_2) \right\}$$

则有:

$$V(\phi) \leq \gamma(\|\phi\|^2 + \|\varphi\|^2) \quad (2.3.9)$$

注意(2.3.2), (2.3.7) 和 (2.3.9), 我们可以说存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\lambda \|x(t, \phi)\|^2 \leq V(t, x_t) < V(\phi)e^{-2\beta t} \leq \gamma e^{-2\beta t}(\|\phi\|^2 + \|\varphi\|^2)$$

设 $M = (\frac{\gamma}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$, 则上式变为:

$$|x(t, \phi)| \leq (\frac{\gamma}{\lambda})^{\frac{1}{2}} e^{-\beta t} \sqrt{\|\phi\|^2 + \|\varphi\|^2} = M e^{-\beta t} \sqrt{\|\phi\|^2 + \|\varphi\|^2}$$

根据定义 2.1, 由 (2.2.7) 和 (2.2.8) 描述的中立型时滞系统是 β -指数稳定的。□

注 2.1 在构造李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数时, 时滞区间 $[-\tau, 0]$ 被划分为 N 个片段 (见 $V_2(t, x_t)$ 和 $V_3(t, x_t)$), 每个片段选取相应权重的矩阵。这种基于时滞分解方式构造的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 可以得到保守性较小的稳定性分析结果 [2]。

注 2.2 需要指出的是, 当 $\beta = 0$ 时, 定理 2.1 就变成了 [2] 中的命题 2; 当 $C = 0$ 时, 定理 2.1 可以用来判定时滞系统的指数稳定性问题。因此, 这个定理可以用在时滞系统、中立型时滞系统的稳定性和指数稳定性的判定, 更具有一般性。

注 2.3 在 2.3.2 中定义的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数 $V(t, x_t)$, 共有五项组成, 分别是 $\{V_i(t, x_t)\}_{i=1}^5$, 其中三项 $V_1(t, x_t), V_4(t, x_t)$ 和 $V_5(t, x_t)$ 的引入时为了处理基于 T-S 模型的中立型时滞系统中中立项 $\dot{x}(t - \tau)$ 里的时滞 τ 。 $V_2(t, x_t)$ 项的引入是为了处理状态中的时滞 r , $V_3(t, x_t)$ 项确保得到的结果是时滞依赖的。 $V_2(t, x_t)$ 和 $V_3(t, x_t)$ 中都包含所有的状态时滞区间片段 $\{[t - ih, t - (i - 1)h]\}_{i=1}^N$ 。引入指数函数的作用是得到这类系统的指数稳定性结果。

对这类基于 T-S 模型的中立型时滞系统进行控制器设计时, 需要对 (2.3.1) 中矩阵 Φ 进行变换处理, 然而, 项 $A^T(x)PC$ 和 $A_d^T(x)PC$ 的存在使这个过程变得非常困难, 因此, 通过运用时滞分解方法, 我们选取下面的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数 $\bar{V}(t, x_t)$, 来产生一个更适合控制器设计的判定基于 T-S 模型的中立型时滞系统 β -稳定性的结果。

把系统 (2.2.7) 写成如下形式:

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + A_d(x)x(t - h) + C\dot{x}(t - \tau) \quad (2.3.10)$$

选择李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数如下

$$\bar{V}(t, x_t) = V_6(t, x_t) + V_7(t, x_t) + V_8(t, x_t) + V_9(t, x_t) \quad (2.3.11)$$

其中

$$\begin{aligned} V_6(t, x_t) &= x^T(t)Px(t) \\ V_7(t, x_t) &= \sum_{i=1}^N \int_{t-ih}^{t-(i-1)h} x^T(\xi)e^{2\beta(\xi-t)}Q_i x(\xi)d\xi \\ V_8(t, x_t) &= \sum_{i=1}^N \int_{-ih}^{-(i-1)h} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\xi)e^{2\beta(\xi-t+h)}hR_i \dot{x}(\xi)d\xi d\theta \end{aligned}$$

$$V_9(t, x_t) = \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(\xi) e^{2\beta(\xi-t)} S \dot{x}(\xi) d\xi$$

根据李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数 $\bar{V}(t, x_t)$, 可以得到如下命题:

命题 2.1 对给定的常数 $\beta > 0$ 和正整数 N , 基于 T-S 模型的非线性中立型时滞系统 (2.3.10) 和 (2.2.8) 是 β -指数稳定的, 如果存在矩阵 $P > 0, S > 0, Q_i > 0, R_i > 0, i = 1, \dots, N$ 使得下面的不等式成立

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & PC & \Lambda_{14} \\ * & \Lambda_{22} & 0 & \Lambda_{24} \\ * & * & -e^{-2\beta\tau} S & \Lambda_{34} \\ * & * & * & -\Lambda_{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3.12)$$

这里 $h = N^{-1}\tau$,

$$\Lambda_{11} = A^T(x)P + PA(x) + Q_1 + 2\beta P - R_1$$

$$\Lambda_{12} = [R_1, 0, \dots, 0, PA_d(x)]$$

$$\Lambda_{14} = A^T(x)[he^{\beta h} R_1, \dots, he^{\beta h} R_N, S]$$

$$\Lambda_{22} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & e^{-2\beta h} R_2 & \dots & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & \Psi_{34} & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & e^{2\beta(1-N)h} R_N \\ * & * & * & * & \Psi_{55} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{24} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ he^{\beta h} A_d^T(x)R_1 & \dots & he^{\beta h} A_d^T(x)R_N & A_d^T(x)S \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{34} = C^T[he^{\beta h} R_1, \dots, he^{\beta h} R_N, S]$$

$$\Lambda_{44} = \text{diag}\{R_1, \dots, R_N, S\}$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= e^{-2\beta h}(Q_2 - Q_1) - (e^{-2\beta h}R_2 + R_1) \\ \Psi_{22} &= e^{-2\beta 2h}(Q_3 - Q_2) - (e^{-2\beta h}R_2 + e^{-2\beta 2h}R_3) \\ \Psi_{34} &= [0, \dots, 0, e^{2\beta(2-N)h}R_{N-1}^T]^T \\ \Psi_{44} &= e^{-2\beta(N-1)h}(Q_N - Q_{N-1}) - (e^{2\beta(2-N)h}R_{N-1} + e^{2\beta(1-N)h}R_N) \\ \Psi_{55} &= -e^{-2\beta r}Q_N - e^{2\beta(1-N)h}R_N\end{aligned}$$

证明: 这个命题的证明过程与定理 2.1 的证明过程非常相似, 这里不再详细写出。 □

由于 (2.2.3) 中的 $A(x)$ 和 $A_d(x)$ 依赖于模糊基函数 $h_i(x)$, 故定理 2.1 和命题 2.1 不能直接用于判定这类系统的指数稳定性。因此, 下面将给出不依赖于模糊基函数 $h_i(x)$ 的, 更便于运用的定理和命题。

定理 2.2 对给定常数 $\beta > 0$ 和正整数 N , 如果存在矩阵 $P > 0$, $Q_{ij} > 0$, $R_{ij} > 0$, $S_{1j} > 0$, $S_{2j} > 0$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, s$ 使得下面不等式成立, 则系统 (2.2.7) 和 (2.2.8) 是 β -指数稳定的。

$$\Phi_{ll} < 0 \quad l = 1, \dots, s \quad (2.3.13)$$

$$\Phi_{lm} + \Phi_{ml} < 0 \quad 0 < l < m \leq s \quad (2.3.14)$$

这里

$$\Phi_{lm} = \begin{bmatrix} (1,1)' & (1,2)' & -A_i^T PC - 2\beta PC & 0 & A_i^T (h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_{im} + S_{2m}) \\ * & (2,2)' & (2,3)' & 0 & (2,5)' \\ * & * & 2\beta C^T PC - e^{-2\beta r} S_{1l} & 0 & 0 \\ * & * & * & -e^{-2\beta r} S_{2l} & C^T (h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_{il} + S_{2l}) \\ * & * & * & * & -(h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_{im} + S_{2m}) \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

其中

$$(1,1)' = A_i^T P + P A_i + Q_{1l} + S_{1l} + 2\beta P - R_{1l}$$

$$(1,2)' = [R_{1l}, 0, \dots, 0, P A_{ld}]$$

$$(2,2)' = \begin{bmatrix} [1,1]' & e^{-2\beta h} R_{2m} & \dots & 0 & 0 \\ * & [2,2]' & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & [3,4]' & 0 \\ * & * & * & [4,4]' & e^{2\beta(1-N)h} R_{Nl} \\ * & * & * & * & [5,5]' \end{bmatrix}$$

$$(2,3)' = [0, 0, \dots, 0, -C^T P A_{ld}]^T$$

$$(2,5)' = [0, 0, \dots, 0, (h^2 e^{2\beta h} \sum_{i=1}^N R_{il}^T + S_{2l}^T) A_{md}]^T$$

$$[1,1]' = e^{-2\beta h} (Q_{2l} - Q_{1l}) - (e^{-2\beta h} R_{2l} + R_{1l})$$

$$[2,2]' = e^{-2\beta 2h} (Q_{3l} - Q_{2l}) - (e^{-2\beta h} R_{2l} + e^{-2\beta 2h} R_{3l})$$

$$[3,4]' = [0, \dots, 0, e^{2\beta(2-N)h} R_{N-1,l}^T]^T$$

$$[4,4]' = e^{-2\beta(N-1)h} (Q_{Nl} - Q_{N-1,l}) - (e^{2\beta(2-N)h} R_{N-1,l} + e^{2\beta(1-N)h} R_{Nl})$$

$$[5,5]' = -e^{-2\beta r} Q_{Nl} - e^{2\beta(1-N)h} R_{Nl}$$

证明： 因为

$$\Phi = \sum_{l=1}^s h_l^2 \Phi_{ll} + \sum_{l=1}^s \sum_{m=l+1}^s h_l h_m (\Phi_{lm} + \Phi_{ml})$$

由 (2.3.13) 和 (2.3.14) 可知 $\Phi < 0$ 。根据定理 2.1，我们可得系统 (2.2.7) 和 (2.2.8) 是 β -指数稳定的。 \square

注 2.5 定理 2.2 给出了检验一类基于 T-S 模型的非线性中立型时滞系统 ((2.2.7) 和 (2.2.8)) β -指数稳定性的分析结果，但是，(2.3.15) 中耦合项 $A_i^T P C$ 和 $A_{id}^T P C$ 的出现，使控制器设计的过程非常复杂，因此，基于命题 2.1，我们给出下面的命题，较之定理 2.2，更适合控制器的设计。

命题 2.2 对一个给定常数 $\beta > 0$ 和一个正整数 N ，系统 (2.3.10) 在初始条件为 (2.2.8) 下是 β -指数稳定的，如果存在矩阵 $P > 0$ ， $Q_{ij} > 0$ ， $R_{ij} > 0$ ， $S_j > 0$ ， $i = 1, \dots, N$ ， $j = 1, \dots, s$ ，使得下面不等式成立。

$$\Lambda^{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (2.3.16)$$

$$\Lambda^{ij} + \Lambda^{ji} < 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = i, \dots, s \quad (2.3.17)$$

这里 $h = N^{-1}\tau$,

$$\Lambda^{ij} = \begin{bmatrix} \Lambda'_{11} & \Lambda'_{12} & PC & \Lambda'_{14} \\ * & \Lambda'_{22} & 0 & \Lambda'_{24} \\ * & * & -e^{-2\beta\tau}S_i & \Lambda'_{34} \\ * & * & * & -\Lambda'_{44} \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

其中

$$\Lambda'_{11} = A_i^T P + P A_i + Q_{1i} + 2\beta P - R_{1i}$$

$$\Lambda'_{12} = [R_{1i}, 0, \dots, 0, P A_{id}]$$

$$\Lambda'_{14} = A_i^T [h e^{\beta h} R_{1j}, \dots, h e^{\beta h} R_{Nj}, S_j]$$

$$\Lambda'_{22} = \begin{bmatrix} \Psi'_{11} & e^{-2\beta h} R_{2i} & \dots & 0 & 0 \\ * & \Psi'_{22} & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \dots & \Psi'_{34} & 0 \\ * & * & * & \Psi'_{44} & e^{2\beta(1-N)h} R_{Ni} \\ * & * & * & * & \Psi'_{55} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda'_{24} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ h e^{\beta h} A_{id}^T R_{1j} & \dots & h e^{\beta h} A_{id}^T R_{Nj} & A_{id}^T S_j \end{bmatrix}$$

$$\Lambda'_{34} = C^T [h e^{\beta h} R_{1i}, \dots, h e^{\beta h} R_{Ni}, S_i]$$

$$\Lambda'_{44} = \text{diag}\{R_{1i}, \dots, R_{Ni}, S_i\}$$

$$\Psi'_{11} = e^{-2\beta h}(Q_{2i} - Q_{1i}) - (e^{-2\beta h} R_{2i} + R_{1i})$$

$$\Psi'_{22} = e^{-2\beta 2h}(Q_{3i} - Q_{2i}) - (e^{-2\beta h} R_{2i} + e^{-2\beta 2h} R_{3i})$$

$$\Psi'_{34} = [0, \dots, 0, e^{2\beta(2-N)h} R_{N-1,i}^T]^T$$

$$\Psi'_{44} = e^{-2\beta(N-1)h}(Q_{Ni} - Q_{N-1,i}) - (e^{2\beta(2-N)h} R_{N-1,i} + e^{2\beta(1-N)h} R_{Ni})$$

$$\Psi'_{55} = -e^{-2\beta\tau} Q_{Ni} - e^{2\beta(1-N)h} R_{Ni}$$

注 2.6 注意上式中的 Λ'_{kl} 和 Ψ'_{pq} 都是依赖于 i 和/或者 j 的, 为书写方便, 我们省略了 i 和/或者 j 。

2.4 控制器设计

在这一小节中, 我们将基于命题 2.2, 设计一个模糊状态反馈控制器, 使得闭环系统 (2.2.6) 是 β -指数稳定的。

定理 2.3 给定一个常数 $\beta > 0$ 和一个正整数 N , 如果存在矩阵 $P > 0$, $M_j, N_j, Q_{kj} > 0$, $R_{kj} > 0$, $S_j > 0$, $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, s$, 使得下列矩阵不等式

$$\Omega^{ii} < 0, \quad i = 1 \dots s \quad (2.4.1)$$

$$\Omega^{ij} + \Omega^{ji} < 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = i + 1, \dots, s \quad (2.4.2)$$

这里 $h = N^{-1}\tau$,

$$\Omega^{ij} = \begin{bmatrix} \Omega'_{11} & \Omega'_{12} & C & \Omega'_{14} \\ * & \Omega'_{22} & 0 & \Omega'_{24} \\ * & * & -e^{-2\beta\tau} S_i & \Omega'_{34} \\ * & * & * & \Omega'_{44} \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

其中

$$\Omega'_{11} = PA_i^T + A_i P + B_j M_i + M_i^T B_j^T + Q_{1i} + 2\beta P - R_{1i}$$

$$\Omega'_{12} = [R_{1i}, 0, \dots, 0, A_{id} P + B_j N_i]$$

$$\Omega'_{14} = PA_i^T [he^{\beta h}, \dots, he^{\beta h}, 1] + M_j^T B_i^T [he^{\beta h}, \dots, he^{\beta h}, 1]$$

$$\Omega'_{24} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ he^{\beta h}(PA_{id}^T + N_j^T B_i^T) & \dots & he^{\beta h}(PA_{id}^T + N_j^T B_i^T) & PA_{id}^T + N_j^T B_i^T \end{bmatrix}$$

$$\Omega'_{34} = C^T [he^{\beta h}, \dots, he^{\beta h}, 1]$$

$$\Omega'_{44} = \text{diag}\{-2P + R_{1i}, \dots, -2P + R_{Ni}, -2P + S\}$$

成立, 则存在一个控制器使得闭环系统 (2.2.6) 是 β -指数稳定的, 且控制器 (2.2.4) 可用下面的方法获得:

$$K_i = M_i P^{-1}, K_{id} = N_i P^{-1}, i = 1, 2, \dots, s \quad (2.4.4)$$

这里 Λ'_{22} 的定义在命题 2.2 中; 为声明方便, 在符号 Ω'_{kl} 中, 我们省略了 i 和/或 j 。

证明: 假设存在矩阵 $P > 0, M_j, N_j, Q_{ij} > 0, R_{ij} > 0, S_j > 0, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, s$ 使得不等式 (2.4.1) 和 (2.4.2) 成立. 把 (2.4.4) 代入到 (2.4.3) 中, 则可得下式

$$H^{ij} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & C & H_{14} \\ * & \Lambda'_{22} & 0 & H_{24} \\ * & * & -e^{-2\beta\tau} S_i & \Omega'_{34} \\ * & * & * & \Omega'_{44} \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

其中

$$H_{11} = PA_i^T + A_i P + B_j K_i P + PK_i^T B_j^T + Q_{1i} + 2\beta P - R_{1i}$$

$$H_{12} = [R_{1i}, 0, \dots, 0, A_{id} P + B_j K_{id} P]$$

$$H_{14} = PA_i^T [he^{\beta h}, \dots, he^{\beta h}, 1] + PK_j^T B_i^T [he^{\beta h}, \dots, he^{\beta h}, 1]$$

$$H_{24} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ he^{\beta h}(PA_{id}^T + PK_{jd}^T B_i^T) & \dots & he^{\beta h}(PA_{id}^T + PK_{jd}^T B_i^T) & PA_{id}^T + PK_{jd}^T B_i^T \end{bmatrix}$$

注意到 $R_{ji} > 0$ 和 $S_i > 0$, 则有

$$-PR_{ji}^{-1}P < -2P + R_{ji}, -PS_i^{-1}P < -2P + S_i \quad (2.4.6)$$

运用 (2.4.5), (2.4.6), 结合 Ω'_{44} 的定义, 我们有

$$\Upsilon^{ij} \leq H^{ij} \quad (2.4.7)$$

这里

$$\Upsilon^{ij} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & C & H_{14} \\ * & \Lambda'_{22} & 0 & H_{24} \\ * & * & -e^{-2\beta\tau} S_i & \Omega'_{34} \\ * & * & * & -\Upsilon_{44} \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

其中

$$\Upsilon_{44} = \text{diag}\{PR_{1i}^{-1}P, \dots, PR_{Ni}^{-1}P, PS_i^{-1}P\}$$

在 (2.4.8) 的前面和后面分别依次乘以对角阵 $\text{diag}\{P^{-1}, I \otimes P^{-1}, I, I\}$, 根据 (2.4.1), (2.4.2) 还有 (2.4.7), 我们可知定理二中的条件 (2.3.16) 和 (2.3.17) 得到了满足, 因此, 有定理 2.2 可证得本定理。□

注 2.7 对于控制器设计的过程, 我们做如下概述: 首先, 运用 Matlab 的线性矩阵不等式工具箱, 解线性矩阵不等式 (2.4.1) 和 (2.4.2), 求得矩阵 $P, M_i, N_i, i = 1, \dots, s$ 的值。其次, 运用上面的定理和求得的矩阵, 计算出 K_i 和 K_{id} , 再根据 (2.2.4) 和 (2.2.5), 在线获得 $x(t), x(t-r)$ 和 $h_i(x)$ 就得到了控制信号 $u(t)$ 。

2.5 仿真算例

在这一小节里, 我们给出两个仿真算例, 第一个用来验证定理 2.2 中分析结果的有效性; 第二个根据定理 2.3, 设计一控制器, 镇定给定系统。

例 1: 考虑中立型时滞系统 (2.2.7) 和 (2.2.8), 系数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_{1d} = \begin{bmatrix} -0.9 & -1.5 \\ -0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_{2d} = \begin{bmatrix} -1.1 & -0 \\ -0.1 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\tau = 0.1, \quad h = 0.3, \quad s = 2, \quad N = 2, \quad \beta = 0.5$$

运用 MATLAB 的线性矩阵不等式工具箱, 我们可知该系统是稳定的, 定理 2.2 是有效的, 求得相应的矩阵如下:

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 1.3148 & 0.7401 \\ 0.7401 & 2.0959 \end{bmatrix}, & Q_{11} &= \begin{bmatrix} 0.4452 & 0.6283 \\ 0.6283 & 0.9083 \end{bmatrix}, & Q_{12} &= \begin{bmatrix} -0.0303 & -0.0869 \\ -0.0869 & 0.7091 \end{bmatrix} \\
 Q_{21} &= \begin{bmatrix} 1.2471 & 1.6403 \\ 1.6403 & 2.3469 \end{bmatrix}, & Q_{22} &= \begin{bmatrix} 0.9083 & 0.7361 \\ 0.7361 & 3.0598 \end{bmatrix}, & R_{11} &= \begin{bmatrix} 1.0615 & 1.0427 \\ 1.0427 & 2.3138 \end{bmatrix} \\
 R_{12} &= \begin{bmatrix} 1.6137 & 1.2661 \\ 1.2661 & 3.1364 \end{bmatrix}, & R_{21} &= \begin{bmatrix} 1.1006 & 1.1078 \\ 1.1078 & 2.6364 \end{bmatrix}, & R_{22} &= \begin{bmatrix} 1.6756 & 1.2534 \\ 1.2534 & 3.1465 \end{bmatrix} \\
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0.4397 & 0.1066 \\ 0.1066 & 0.4013 \end{bmatrix}, & S_{12} &= \begin{bmatrix} 0.7768 & 0.3395 \\ 0.3395 & 0.4311 \end{bmatrix} \\
 S_{21} &= \begin{bmatrix} 0.1923 & 0.0036 \\ 0.0036 & 0.1362 \end{bmatrix}, & S_{22} &= \begin{bmatrix} 0.1584 & 0.0642 \\ 0.0642 & 0.0849 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

例 2: 考虑参数为如下值的中立型时滞系统 (2.2.1) 和 (2.2.2)

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \\
 A_{1d} &= \begin{bmatrix} -0.9 & -1.5 \\ -0.3 & -0.5 \end{bmatrix}, & A_{2d} &= \begin{bmatrix} -1.1 & -0 \\ -0.1 & -1.5 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \tau &= 0.1, & h &= 0.3, & s &= 2, & N &= 2, & \beta &= 0.5
 \end{aligned}$$

本例的目标是设计一状态反馈控制器, 使得相应的闭环系统 β -指数稳定。通过计算机求解, 定理 2.3 是可行的, 相应的可行解如下:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1895 & 0.2345 \\ 0.2345 & -0.3902 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 2.6359 & 0.1998 \\ 0.1998 & 2.1404 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 2.6410 & 0.1974 \\ 0.1974 & 2.1536 \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 0.5569 & -1.9381 \\ -1.9381 & 5.3273 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{bmatrix} -0.3504 & -0.5902 \\ -0.5902 & 4.9629 \end{bmatrix}$$

$$Q_{21} = \begin{bmatrix} 0.5014 & -1.1744 \\ -1.1744 & 3.5829 \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} -0.0572 & -0.3785 \\ -0.3785 & 3.2822 \end{bmatrix}$$

$$R_{11} = \begin{bmatrix} 1.7601 & 0.4339 \\ 0.4339 & 0.7760 \end{bmatrix}, \quad R_{12} = \begin{bmatrix} 1.8128 & 0.3086 \\ 0.3086 & 0.7810 \end{bmatrix}$$

$$R_{21} = \begin{bmatrix} 2.1327 & 0.4110 \\ 0.4110 & 0.9229 \end{bmatrix}, \quad R_{22} = \begin{bmatrix} 2.1470 & 0.3484 \\ 0.3484 & 0.9950 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.9573 & -3.7158 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.9955 & -3.5772 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.0676 & -0.1144 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0.3932 & -0.7316 \end{bmatrix}$$

根据 (2.4.4), 我们可以求得状态反馈控制器的增益为:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3.8613 & 7.2034 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -3.4934 & 7.0690 \end{bmatrix}$$

$$K_{1d} = \begin{bmatrix} -0.4127 & 0.0451 \end{bmatrix}, \quad K_{2d} = \begin{bmatrix} -0.1408 & 1.7906 \end{bmatrix}.$$

2.6 小结

本章主要研究了一类基于 T-S 模型的中立型时滞系统的稳定性和镇定问题。通过运用时滞分解的方法, 我们产生一种新型李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 并得到用于检验系统指数稳定性的充分条件, 鉴于在处理线性系统时, 时滞分解方法显著的提高了现有的结果 [2], 我们期望这种基于时滞分解方法产生的用于判断基于 T-S 模型中立型时滞系统指数稳定性的结果有更好的通用性。进一步, 本章给出了镇定系统的方法。仿真算例验证了本章理论结果的可行性。

第 3 章 带有时变时滞的非线性系统的模糊基依赖滤波器设计

3.1 引言

基于 T-S 模型模糊动态系统被证明能够有效地表征一大类非线性系统并可应用至工业过程中 [8], 国内外许多学者围绕 T-S 模型非线性系统进行着广泛的研究, 得到了很多稳定性分析、控制器设计及滤波器设计的结果([19], [21], [36-38]); 通过运用新型分段的李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, [34] 研究了一类带有时变时滞的离散模糊系统的滤波器设计问题, 得到了时滞依赖的全维和降阶的滤波器设计方法。在 [21], 采用基依赖的李雅普诺夫函数, 给出一个稳定滤波器的设计方法, 这个滤波器能在 H_∞ 意义下达到干扰抑制水平。

由于测量、传输、计算等的延迟, 时滞在各类系统中是经常遇到的。它经常使系统产生很多差的性能, 甚至不稳定。很多研究对时滞系统进行了深入的分析([39-43]), [2] 提出的时滞分解方法, 在处理时滞系统、中立型时滞系统方面, 相对于其他方法, 有着显著的提高。这种方式得到的分析结果保守性小、通用性强。另外, 对一类带有随机变化时滞的系统, [43] 给出检验系统稳定性的一些充分条件。

对基于 T-S 模型的时滞系统, 同样有许多文章对其分析和设计问题进行了深入研究([18], [20], [22], [36], [38], [44])。对带有时变时滞的非线性模糊时滞系统, [45] 研究了其滤波问题, 给出了模糊基依赖和非模糊基依赖的滤波器设计方式。另一方面, 对带有时变延迟、不确定性的离散模糊系统, [24] 研究了鲁棒 H_∞ 控制问题。

最近, 对时滞系统的 H_∞ 滤波问题得到了广泛的研究, 大量成果在各类刊物上发表。但是, 大多论文中滤波器设计采用的是非模糊规则依赖的方式, 这种方式需要的模糊基信息较少, 计算相对简单, 但是结果的保守性较大; 用模糊规则依赖方式设计滤波器, 需要较多的模糊基信息, 计算量较大, 但可以获得保守性较小的结果。

在 [21], [24] 和 [45] 的启发下, 对一类带有时变时滞的基于 T-S 模型的模糊系统, 我们利用模糊规则依赖方式, 设计一滤波器。首先, 利用时变时滞及其上下界信息, 构造新型李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 并由此产生一个时滞依赖的用于检验系统稳定性的充分条件。其次, 根据得到的这个充分条件, 对这类系统, 设计一模糊规则依赖的滤波器。我们可以看到, 在处理带有时变时滞的基于 T-S 模型的模糊系统时, 模糊规则依赖的滤波器具有较小的保守性。数值仿真验证了设计方式的有效性。

本章的结构安排是: 第二节描述系统的模糊规则依赖的 H_∞ 滤波问题。第三节对给定 H_∞ 性能的滤波误差系统进行稳定性分析, 给出一判断系统稳定性的充分条件, 并在第四节

中运用这个条件设计模糊基依赖的滤波器。接下来的第五节中，用一仿真算例解释这种方式的有效性。最后的第六节是本章的小结。

本章的符号声明：上标 τ 表示矩阵的转置，对于一个实矩阵 $P > (\geq) 0$ 表示 P 是正定（半正定）矩阵， $A > (\geq) B$ 表示 $A - B > (\geq) 0$ 。 $diag\{\dots\}$ 表示一个对角阵。 I 是适当维数的单位阵， $|\cdot|$ 是欧式空间的向量的范数。 $l_2[0, \infty)$ 表示平方可和的向量空间。

3.2 问题的提出

许多非线性系统都可以表征为一组在局部区域工作的线性系统。考虑如下的具有 s 个模糊规则的带有时变时滞的基于 T-S 模型的模糊控制系统：

模糊规则 i : If $\xi_1(k)$ 是 F_1^i , 和 \dots , $\xi_s(k)$ 是 F_s^i , Then

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + A_{di} x(k-d(k)) + B_i \omega(k) \\ y(k) &= C_i x(k) + C_{di} x(k-d(k)) + D_i \omega(k) \\ z(k) &= G_i x(k) + G_{di} x(k-d(k)) \\ x(k) &= \phi(k) \quad k = -d_M, \dots, 0 \end{aligned}$$

这里 F_j^i 是一个模糊集， $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量， $\omega(k) \in \mathbb{R}^p$ 是任意的属于 $l_2[0, \infty)$ 的噪声信号， $z(k) \in \mathbb{R}^q$ 待估计的信号， $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 是可量测的输出， $A_i, A_{di}, B_i, C_i, C_{di}, D_i, G_i$ 和 G_{di} 适当维数的系统矩阵。 $\phi(k)$ 是给定的初始条件。 $d(k)$ 是满足 $0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M$ 的时变延迟，其中 d_m 和 d_M 是给定的非负常数。 ξ_1, \dots, ξ_s 是基变量。模糊基函数以下式给出：

$$h_i(\xi(k)) = \frac{\prod_{j=1}^s \mu_{ij}[\xi_j(k)]}{\sum_{l=1}^r \prod_{j=1}^s \mu_{lj}[\xi_j(k)]}, \quad i = 1, \dots, r$$

其中 $\mu_{ij}(x_j(t))$ 是 $x_j(t)$ 在 F_j^i 中的隶属度函数。 $\xi(k) := (\xi_1, \dots, \xi_s)$ 。下面，为了书写方便，我们把 $h_i(\xi_j(k))$ 简写为 h_i ，有定义可知，模糊基函数满足：

$$h_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i = 1, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.2.1)$$

把满足 (3.2.1) 的模糊基函数记作 Ξ 。一个更一般的描述带有时变时滞的离散 T-S 模糊模型的方式如下 Σ 给出：

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i [A_i x(k) + A_{di} x(k-d(k)) + B_i \omega(k)] \quad (3.2.2)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^r h_i [C_i x(k) + C_{di} x(k-d(k)) + D_i \omega(k)] \quad (3.2.3)$$

$$z(k) = \sum_{i=1}^r h_i [G_i x(k) + G_{di} x(k-d(k))] \quad (3.2.4)$$

$$x(k) = \phi(k) \quad k = -d_M, \dots, 0 \quad (3.2.5)$$

让我们考虑如下模糊基依赖的滤波器，来估计 z_k ：

$$\hat{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i [A_{fi} \hat{x}(k) + B_{fi} y(k)] \quad (3.2.6)$$

$$\hat{z}(k) = \sum_{i=1}^r h_i G_{fi} \hat{x}(k) \quad (3.2.7)$$

其中 $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ ， $\hat{z}(k) \in \mathbb{R}^q$ ，矩阵 A_{fi} ， B_{fi} 和 G_{fi} 是待定的且 h_i 是可以在线量测的。结合 (3.2.2)–(3.2.7)，可以得到如下滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ ：

$$\zeta(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_{ij} \zeta(k) + A_{dij} K \zeta(k-d(k)) + B_{ij} \omega(k)] \quad (3.2.8)$$

$$e(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [G_{ij} \zeta(k) + G_{di} K \zeta(k-d(k))] \quad (3.2.9)$$

$$\zeta(k) = [\phi^T(k) \ 0]^T \quad k = -d_M, \dots, 0 \quad (3.2.10)$$

其中

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad e(k) = z(k) - \hat{z}(k)$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fj} C_i & A_{fj} \end{bmatrix}, \quad A_{dij} = \begin{bmatrix} A_{di} \\ B_{fj} C_{di} \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} B_i \\ B_{fj} D_i \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} G_i & -G_{fj} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

引理 3.1 对任意常数矩阵 $R = R^T > 0$ ，常数因子 $d > 0$ 和向量 $\eta(k) = x(k+1) - x(k)$ ，下面不等式：

$$d \sum_{i=k-d}^{k-1} \eta^T(i) R \eta(i) \geq [x(k) - x(k-d)]^T R [x(k) - x(k-d)]$$

总是成立的.

本章的主要目的是设计一 (3.2.6) 和 (3.2.7) 形式的稳定的滤波器, 使得滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ (3.2.8)–(3.2.12) 满足下面的条件:

- (I): 当 $\omega(k) \equiv 0$, 对任意模糊基函数 $h \in \Xi$, 滤波误差系统是全局渐近稳定的;
- (II): 噪声信号 $\omega(k)$ 到闭环系统被控输出的 L_2 增益小于一个给定指标 γ . 也就是, 在零初始条件下, 对任意非零的 $\omega(k) \in l_2[0, \infty)$, $\|z_k\|_2 < \gamma \|\omega(k)\|_2$.

接下来, 我们称满足条件 (I) 和 (II) 的系统稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ .

3.3 稳定性和 H_∞ 性能分析

在这一小节中, 通过运用新型李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 得到一个检验滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ 稳定性且满足给定 H_∞ 性能 γ 的充分条件.

定理 3.1 给定一个常数 $\gamma > 0$ 和满足 $d_m \leq d(k) \leq d_M$ 的时变延迟, 其中 d_m 和 d_M 是非负正整数. 则滤波误差系统稳定且满足给定 H_∞ 性能指标 γ , 如果存在矩阵 $P > 0, S > 0, W > 0$ 和 $Q_i > 0, i = 1, 2, 3$. 使得下列不等式成立:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.1)$$

其中

$$\Phi_{11} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} (1,1) & K^T S & P A_{dij} & K^T W & P B_{ij} \\ * & -Q_2 - S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 - W & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{12} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} (A_{ij} - I)^T P & d_m (A_{ij} - I)^T K^T S & d_M (A_{ij} - I)^T K^T W & G_{ij}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{dij}^T P & d_m A_{dij}^T K^T S & d_M A_{dij}^T K^T W & G_{di}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{ij}^T P & d_m B_{ij}^T K^T S & d_M B_{ij}^T K^T W & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{22} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ * & -S & 0 & 0 \\ * & * & -W & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

这里

$$(1, 1) = PA_{ij} + A_{ij}^T P - 2P + K^T [(d_M - d_m + 1)Q_1 + Q_2 + Q_3 - S - W]K$$

证明: 令

$$\begin{aligned} \eta(k) &= \zeta(k+1) - \zeta(k) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [(A_{ij} - I)\zeta(k) + A_{dij} K \zeta(k - d(k)) + B_{ij} \omega(k)] \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

选择如下李雅普诺夫函数,

$$V(k) = \sum_{i=1}^7 V_i(k) \quad (3.3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(k) &= \zeta^T(k) P \zeta(k) \\ V_2(k) &= \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i) \\ V_3(k) &= \sum_{i=k-d_m}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_2 K \zeta(i) \\ V_4(k) &= \sum_{i=k-d_M}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_3 K \zeta(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_5(k) &= \sum_{i=-d_M+1}^{-d_m} \sum_{j=k+i}^{k-1} \zeta^T(j) K^T Q_1 K \zeta(j) \\
 V_6(k) &= d_m \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \eta^T(j) K^T S K \eta(j) \\
 V_7(k) &= d_M \sum_{i=-d_M}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \eta^T(j) K^T W K \eta(j)
 \end{aligned}$$

沿轨线 (3.2.8), 计算 $V_i(k) (i = 1, \dots, 7)$ 的增量如下:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_1(k) &= \zeta^T(k+1) P \zeta(k+1) - \zeta^T(k) P \zeta(k) \\
 &= [\zeta(k) + \eta(k)]^T P [\zeta(k) + \eta(k)] - \zeta^T(k) P \zeta(k) \\
 &= 2\zeta^T(k) P \eta(k) + \eta^T(k) P \eta(k) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [\zeta^T(k) (P A_{ij} + A_{ij}^T P - 2P) \zeta(k) + 2\zeta^T(k) P A_{dij} K \zeta(k-d(k)) \\
 &\quad + 2\zeta^T(k) P B_{ij} \omega(k)] + \eta^T(k) P \eta(k) \\
 \Delta V_2(k) &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^k \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i) \\
 &= \zeta^T(k) K^T Q_1 K \zeta(k) - \zeta^T(k-d(k)) K^T Q_1 K \zeta(k-d(k)) \\
 &\quad + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i) - \sum_{i=k-d(k)+1}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i) \\
 &\leq \zeta^T(k) K^T Q_1 K \zeta(k) - \zeta^T(k-d(k)) K^T Q_1 K \zeta(k-d(k)) + \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i) \\
 \Delta V_3(k) &= \sum_{i=k+1-d_m}^k \zeta^T(i) K^T Q_2 K \zeta(i) - \sum_{i=k-d_m}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_2 K \zeta(i) \\
 &= \zeta^T(k) K^T Q_2 K \zeta(k) - \zeta^T(k-d_m) K^T Q_2 K \zeta(k-d_m) \\
 \Delta V_4(k) &= \sum_{i=k-d_M+1}^k \zeta^T(i) K^T Q_3 K \zeta(i) - \sum_{i=k-d_M}^{k-1} \zeta^T(i) K^T Q_3 K \zeta(i) \\
 &= \zeta^T(k) K^T Q_3 K \zeta(k) - \zeta^T(k-d_M) K^T Q_3 K \zeta(k-d_M) \\
 \Delta V_5(k) &= \sum_{i=-d_M+1}^{-d_m} \left[\sum_{j=k+i+1}^k \zeta^T(j) K^T Q_1 K \zeta(j) - \sum_{j=k+i}^{k-1} \zeta^T(j) K^T Q_1 K \zeta(j) \right] \\
 &= \sum_{i=-d_M+1}^{-d_m} [\zeta^T(k) K^T Q_1 K \zeta(k) - \zeta^T(k+i) K^T Q_1 K \zeta(k+i)] \\
 &= (d_M - d_m) \zeta^T(k) K^T Q_1 K \zeta(k) - \sum_{i=k-d_M+1}^{k-d_m} \zeta^T(i) K^T Q_1 K \zeta(i)
 \end{aligned}$$

根据引理 3.1, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_6(k) &= d_m \sum_{i=-d_m}^{-1} \left[\sum_{j=k+i+1}^k \eta^\tau(j) K^\tau S K \eta(j) - \sum_{j=k+i}^{k-1} \eta^\tau(j) K^\tau S K \eta(j) \right] \\
 &= d_m \sum_{i=-d_m}^{-1} [\eta^\tau(k) K^\tau S K \eta(k) - \eta^\tau(k+i) K^\tau S K \eta(k+i)] \\
 &= d_m^2 \eta^\tau(k) K^\tau S K \eta(k) - d_m \sum_{i=k-d_m}^{k-1} \eta^\tau(i) K^\tau S K \eta(i) \\
 &\leq d_m^2 \eta^\tau(k) K^\tau S K \eta(k) - [\zeta(k) - \zeta(k-d_m)]^\tau K^\tau S K [\zeta(k) - \zeta(k-d_m)] \\
 \Delta V_7(k) &= d_M \sum_{i=-d_M}^{-1} \left[\sum_{j=k+i+1}^k \eta^\tau(j) K^\tau W K \eta(j) - \sum_{j=k+i}^{k-1} \eta^\tau(j) K^\tau W K \eta(j) \right] \\
 &= d_M \sum_{i=-d_M}^{-1} [\eta^\tau(k) K^\tau W K \eta(k) - \eta^\tau(k+i) K^\tau W K \eta(k+i)] \\
 &= d_M^2 \eta^\tau(k) K^\tau W K \eta(k) - d_M \sum_{i=k-d_M}^{k-1} \eta^\tau(i) K^\tau W K \eta(i) \\
 &\leq d_M^2 \eta^\tau(k) K^\tau W K \eta(k) - [\zeta(k) - \zeta(k-d_M)]^\tau K^\tau W K [\zeta(k) - \zeta(k-d_M)]
 \end{aligned}$$

因此

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k) + \Delta V_5(k) + \Delta V_6(k) + \Delta V_7(k) \quad (3.3.4)$$

令

$$\psi(k) = [\zeta^\tau(k) \quad \zeta^\tau(k-d_m) K^\tau \quad \zeta^\tau(k-d(k)) K^\tau \quad \zeta^\tau(k-d_M) K^\tau \quad \omega^\tau(k)]^\tau$$

根据 (3.3.2) 和 (3.3.4), 我们可以得到

$$\Delta V(k) + e^\tau(k) e(k) - \gamma^2 \omega^\tau(k) \omega(k) = \psi^\tau(k) (\Phi_{11} + \Phi'_{11}) \psi(k)$$

其中

$$\Phi'_{11} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{n=1}^r h_i h_j h_l h_n \begin{bmatrix} (1,1)' & 0 & (1,3)' & 0 & (1,5)' \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (3,3)' & 0 & (3,5)' \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & (5,5)' \end{bmatrix}$$

这里

$$(1,1)' = (A_{ij} - I)^\tau (P + d_m K^\tau S K + d_M K^\tau W K) (A_{ln} - I) + G_{ij}^\tau G_{ln}$$

$$(1,3)' = A_{ij}^\tau (P + d_m K^\tau S K + d_M K^\tau W K) A_{dn} + G_{ij}^\tau G_{dl}$$

$$(1,5)' = A_{ij}^\tau (P + d_m K^\tau S K + d_M K^\tau W K) B_{ln}$$

$$(3,3)' = A_{dij}^\tau (P + d_m K^\tau S K + d_M K^\tau W K) A_{dn} + G_{di}^\tau G_{dl}$$

$$(3,5)' = A_{dij}^\tau (P + d_m K^\tau S K + d_M K^\tau W K) B_{ln}$$

$$(5,5)' = B_{ij}^\tau (P + d_m K^\tau S K + d_M K^\tau W K) B_{ln}$$

利用 Schur 补定理, 由 (3.3.1) 可得:

$$\Phi_{11} + \Phi'_{11} < 0$$

故有:

$$\Delta V(k) + e^\tau(k)e(k) - \gamma^2 \omega^\tau(k)\omega(k) < 0$$

当 $\omega(k) = 0$, 我们有

$$\Delta V(k) < -e^\tau(k)e(k)$$

所以我们可以说滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ (3.2.8)-(3.2.12) 是全局渐近稳定的.

当 $\omega(k) \neq 0$, 在零初始条件下, 对任意正整数 N , 我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N [e^\tau(k)e(k) - \gamma^2 \omega^\tau(k)\omega(k)] &= \sum_{k=0}^N [e^\tau(k)e(k) - \gamma^2 \omega^\tau(k)\omega(k) + \Delta V(k)] - V(N+1) \\ &\leq \sum_{k=0}^N [e^\tau(k)e(k) - \gamma^2 \omega^\tau(k)\omega(k) + \Delta V(k)] < 0 \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 可以得到:

$$\|e(k)\|_2 < \gamma \|\omega(k)\|_2$$

因此两个条件得到了满足, 定理得到了证明. \square

注 3.1 在构造李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数时, 考虑到时变时滞及其上下界, 我们把时滞区间分成了几个小区间; 在 $\Delta V_1(k)$, $\Delta V_2(k)$, $\Delta V_3(k)$ 中, 不同的小区间对应不同权重的矩阵 Q_1 , Q_2 , Q_3 . 注意到 (3.3.4) 中的 $\Delta V_5(k)$, $\Delta V_6(k)$, $\Delta V_7(k)$, 这将得到的条件依赖于 d_m 和/或 d_M ; 这种思想将减少得到的充分条件的保守性.

在定理 3.1 中, 得到的条件是依赖于参数的矩阵不等式, 这不能直接运用于稳定性分析和控制器设计, 因此, 下面我们将给出不依赖于参数的更适合应用的充分条件。

令

$$\Phi_{11}^{ij} = \begin{bmatrix} (1,1) & K^T S & P A_{dij} & K^T W & P B_{ij} \\ * & -Q_2 - S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 - W & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

$$\Phi_{12}^{ij} = \begin{bmatrix} (A_{ij} - I)^T P & d_m (A_{ij} - I)^T K^T S & d_M (A_{ij} - I)^T K^T W & G_{ij}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{dij}^T P & d_m A_{dij}^T K^T S & d_M A_{dij}^T K^T W & G_{di}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{ij}^T P & d_m B_{ij}^T K^T S & d_M B_{ij}^T K^T W & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

我们可以得到下面的定理

定理 3.2 给定常数 $\gamma > 0$ 和非负正整数 d_m 和 d_M , 时变时滞 $d(k)$ 满足 $d_m \leq d(k) \leq d_M$, 则滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ 稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ , 如果存在 $P > 0, S > 0, W > 0$ 和 $Q_i > 0, i = 1, 2, 3$. 使得下面矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}^{ii} & \Phi_{12}^{ii} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.3.7)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}^{ij} & \Phi_{12}^{ij} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{ji} & \Phi_{12}^{ji} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad 0 < i < j \leq r \quad (3.3.8)$$

这里 Φ_{22} 在定理 3.1 中定义, $\Phi_{11}^{ij}, \Phi_{12}^{ij}$ 的定义分别在 (3.3.5) 和 (3.3.6) 中.

证明: 注意

$$\Phi = \sum_{i=1}^r h_i^2 \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{ii} & \Phi_{12}^{ii} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r h_i h_j \left(\begin{bmatrix} \Phi_{11}^{ij} & \Phi_{12}^{ij} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{ji} & \Phi_{12}^{ji} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (3.3.9)$$

根据 (3.3.7) 和 (3.3.8) 可知 $\Phi < 0$. 通过定理 3.1, 我们可以得到滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ 是稳定的且满足 H_∞ 性能指标 γ . \square

3.4 模糊规则依赖的 H_∞ 滤波器设计

与非模糊规则依赖滤波器设计相比较, 设计模糊规则依赖的滤波器需要更多的模糊基信息, 更大的计算量。但是得到的条件却具有更小的保守性。在这一部分里, 我们将给出形如 (3.2.6) 和 (3.2.7) 的模糊规则依赖的 H_∞ 滤波器存在的条件, 并基于定理 3.2 设计这种滤波器。

定理 3.3 对系统 (3.2.2)–(3.2.5), 给定一个常数 $\gamma > 0$ 和一个满足 $d_m \leq d(k) \leq d_M$ 的时变时滞 $d(k)$, 如果存在矩阵 $P > 0, R > 0, S > 0, W > 0, Q_i > 0, i = 1, 2, 3$, 和 $A_j, B_j, G_j, j = 1, \dots, r$ 使得下面不等式:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}^{ii} & \Upsilon_{12}^{ii} \\ * & \Upsilon_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}^{ij} & \Upsilon_{12}^{ij} \\ * & \Upsilon_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Upsilon_{11}^{ji} & \Upsilon_{12}^{ji} \\ * & \Upsilon_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad 0 < i < j \leq r \quad (3.4.2)$$

其中

$$\Upsilon_{11}^{ij} = \begin{bmatrix} [1, 1] & [1, 2] & S & PA_{di} + B_j C_{di} & W & PB_i + B_j D_i \\ * & [2, 2] & 0 & RA_{di} + B_j C_{di} & 0 & RB_i + B_j D_i \\ * & * & -Q_2 - S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_3 - W & 0 \\ * & * & * & * & * & -r^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{12}^{ij} = \begin{bmatrix} [1,7] & [1,8] & [1,9] & [1,10] & G_i^r \\ \mathcal{A}_j^r - R & \mathcal{A}_j^r - R & 0 & 0 & -G_j^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{di}^r P + C_{di}^r B_j^r & A_{di}^r R + C_{di}^r B_j^r & d_m A_{di}^r S & d_M A_{di}^r W & G_{di}^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_i^r P + D_i^r B_j^r & B_i^r R + D_i^r B_j^r & d_m B_i^r S & d_M B_i^r W & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{22} = \begin{bmatrix} -P & -R & 0 & 0 & 0 \\ * & -R & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -S & 0 & 0 \\ * & * & * & -W & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

这里

$$[1,1] = PA_i + A_i^r P + B_j C_i + C_i^r B_j^r - 2P + (d_M - d_m + 1)Q_1 + Q_2 + Q_3 - S - W$$

$$[1,2] = \mathcal{A}_j + A_i^r R + C_i^r B_j^r - 2R$$

$$[2,2] = \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j^r - 2R$$

$$[1,7] = A_i^r P + C_i^r B_j^r - P$$

$$[1,8] = A_i^r R + C_i^r B_j^r - R$$

$$[1,9] = d_m (A_i - I)^r S$$

$$[1,10] = d_M (A_i - I)^r W$$

成立, 则存在形式为 (3.2.6)-(3.2.7) 的滤波器, 使得滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ 是稳定的且满足给定 H_∞ 性能指标 γ . 并且, 这个滤波器的参数可以有以下式子得到:

$$A_{fi} = R^{-1} \mathcal{A}_i, B_{fi} = R^{-1} B_i, G_{fi} = G_i \quad (3.4.3)$$

证明: 如果定理 3.2 的条件都满足, 我们把 P 做如下分解:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.4.4)$$

因此, P_{22} 是正定矩阵。假设 P_{12} 非奇异且满足式子 (3.3.7) 和 (3.3.8)。我们定义如下矩阵:

$$J_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{22}^{-1}P_{12}^T \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

$$J_2 = \text{diag}\{J_1, I, I, I, I, J_1, I, I, I\} \quad (3.4.6)$$

对 (3.3.7) 和 (3.3.8) 左右分别乘以矩阵 J_2 和 J_2^T , 既是合同变换, 并引入下面变量。

$$R = P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T, \quad \mathcal{A}_i = P_{12}A_{fi}P_{22}^{-1}P_{12}^T \quad (3.4.7)$$

$$\mathcal{B}_i = P_{12}B_{fi}, \quad \mathcal{G}_i = G_{fi}P_{22}^{-1}P_{12}^T \quad (3.4.8)$$

由此可知: (3.4.1) 和 (3.4.2) 是等价于 (3.3.7) 和 (3.3.8) 的, 因此存在形式为 (3.2.6) 和 (3.2.7) 的滤波器, 使得滤波误差系统 $\tilde{\Sigma}$ 是稳定的且满足给定 H_∞ 性能指标。另外, 有 (3.4.7) 和 (3.4.8) 可知, 下面的式子是成立的:

$$\begin{bmatrix} A_{fi} & B_{fi} \\ G_{fi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ \mathcal{G}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12}^{-T}P_{22} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.4.9)$$

注意到:

$$P_{12}^{-1} = (P_{12}^{-T}P_{22})^{-1}R^{-1}$$

因此, P_{12} 和 P_{22} 可以通过解 (3.4.1) 和 (3.4.2) 得到。不失一般性, 令 $P_{12}^{-T}P_{22} = I$, 可以得到 (3.4.3)。 \square

注 3.2 在这个定理中, 我们给出了一个用于检测滤波器存在与否的充分条件, 并给出了滤波器参数的得到方式, 下面的仿真算例将解释这个滤波器的有效性。

3.5 仿真算例

我们将在本节给出一个数值仿真例子来验证之前提出的 H_∞ 滤波器设计方法的有效性。考虑如下有两条模糊规则的非线性离散时滞系统:

模糊规则: 定义 $x(k) = \begin{bmatrix} x^1(k) & x^2(k) \end{bmatrix}^T$

$$\text{If } x^1(k) \text{ is } M_1, \text{ then } \quad x(k+1) = A_1x(k) + A_{d1}x(k-d(k)) + B_1\omega(k)$$

$$y(k) = C_1x(k) + C_{d1}x(k-d(k)) + D_1\omega(k)$$

$$z(k) = G_1x(k) + G_{d1}x(k-d(k))$$

$$\text{If } x^1(k) \text{ is } M_2, \text{ then } \quad x(k+1) = A_2x(k) + A_{d2}x(k-d(k)) + B_2\omega(k)$$

$$y(k) = C_2x(k) + C_{d2}x(k-d(k)) + D_2\omega(k)$$

$$z(k) = G_2x(k) + G_{d2}x(k-d(k))$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.6 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.2 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.1 \\ 0 & -0.05 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = 0.1$$

$$C_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix}, C_{d2} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.04 \end{bmatrix}, D_2 = 0.1$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.3 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$G_{d1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, G_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

M_1 和 M_2 , 分别如下给出:

$$M_1(x^1(k)) = \frac{1 + \sin(x^1(k))}{2}$$

和

$$M_2(x^1(k)) = 1 - M_1(x^1(k))$$

对时变时滞, 作如下假设:

$$d(k) = \begin{cases} 3 & k = 2i + 1 \\ 2 & k = 2i \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

我们的目的是设计一个滤波器，使得相应的滤波误差系统稳定且满足给定 H_∞ 性能指标 γ 。这里，我们假设 $\gamma = 1$ 。通过 Matlab LMI 控制工具箱，可以解 LMIs (3.4.1) 和 (3.4.2)，来获得可行解。由定理 3.3，可得：

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 2.1037 & -1.7597 \\ -1.7597 & 59.0075 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.0649 & 0.2496 \\ 0.2496 & 1.3796 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0.0026 & 0.0098 \\ 0.0098 & 0.0540 \end{bmatrix} \\
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 0.0444 & -0.0348 \\ -0.0348 & 0.6547 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0257 & -0.0073 \\ -0.0073 & 0.2622 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0.0357 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.3970 \end{bmatrix} \\
 R &= \begin{bmatrix} 0.7627 & -1.2996 \\ -1.2996 & 42.1526 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.0398 & 1.0823 \\ 1.7508 & 8.6541 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.4909 & -2.0309 \\ 2.8766 & -6.2642 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0.7796 \\ -25.3332 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} -2.9389 \\ 21.6847 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.0289 \\ 0.5561 \end{bmatrix}^T, \quad \mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} 0.0899 \\ -0.2547 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

注意到 (3.4.3)，我们得到滤波器 (3.2.6) 和 (3.2.7) 的参数如下：

$$\begin{aligned}
 A_{f1} &= \begin{bmatrix} 0.1298 & 1.8670 \\ 0.0455 & 0.2629 \end{bmatrix}, \quad A_{f2} = \begin{bmatrix} -0.5566 & -3.0779 \\ 0.0511 & -0.2435 \end{bmatrix} \\
 B_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0019 \\ -0.6010 \end{bmatrix}, \quad B_{f2} = \begin{bmatrix} -3.1419 \\ 0.4176 \end{bmatrix}, \quad G_{f1} = \begin{bmatrix} 0.0289 \\ 0.5561 \end{bmatrix}^T, \quad G_{f2} = \begin{bmatrix} 0.0899 \\ -0.2547 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

在初始条件

$$\phi(-4, -3, -2, -1, 0) = 0_{2 \times 5}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

噪声信号 $\omega(k) = e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}} \cos(k)$ 属于 $l_2[0, \infty)$ 。下，仿真结果如图 1, 2, 3, 4，误差为 $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ 。显然，我们设计的滤波器达到了要求。

3.6 小结

本章主要研究了带有时变时滞的非线性模糊系统的 H_∞ 滤波器设计问题。运用时变时滞的上下限信息，构造一个新型的李雅普诺夫函数，通过这个函数得到一个检验滤波误

差系统稳定性且满足给定 H_∞ 性能指标的充分条件。接着为这类系统设计一模糊规则依赖 H_∞ 滤波器。虽然设计这种滤波器需要更多的模糊基信息，设计时计算量也比较大，但是，相对于非模糊规则依赖的滤波器，本章提出的方法构造的滤波器具有较小的保守性。最后给出的数值例子验证了设计方法的有效性。

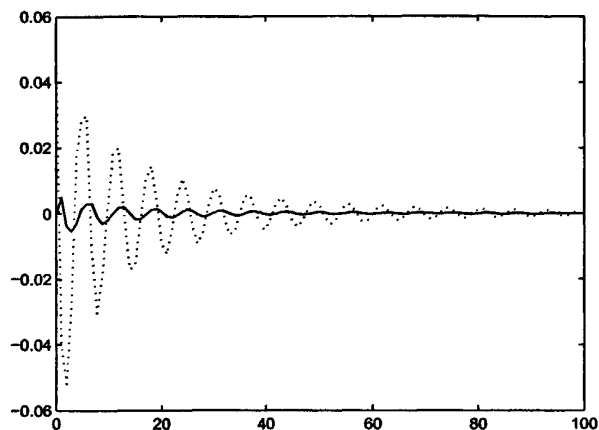


图 3.1 系统中 $x_1(k)$ (\cdots) 和 $x_2(k)$ ($-$) 的状态响应

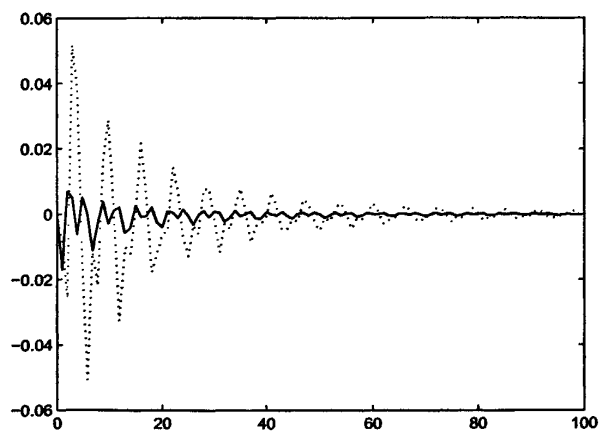


图 3.2 系统中 $\hat{x}_1(k)$ (\cdots) 和 $\hat{x}_2(k)$ ($-$) 的状态响应

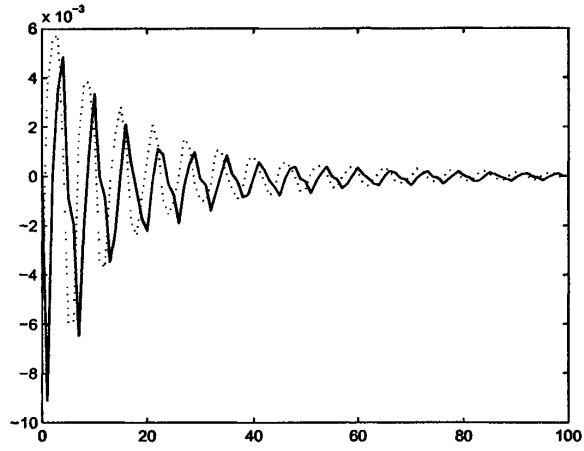


图 3.3 系统中 $z(k)(\dots)$ 和 $\hat{z}(k)(-)$ 的响应

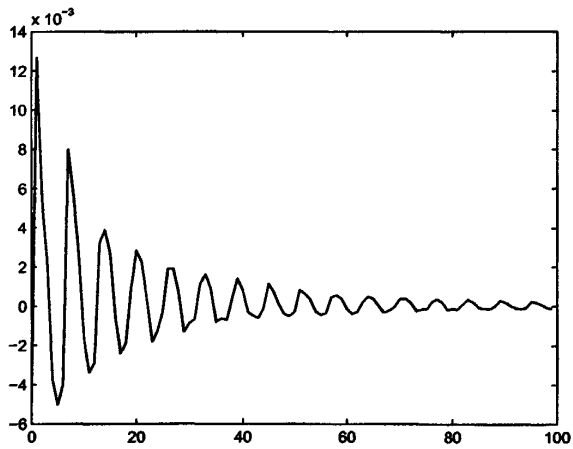


图 3.4 误差 $e(k) = z(k) - \hat{z}_k$ 的状态响应

第 4 章 带有随机干扰的时滞系统的稳定性分析和控制器设计

4.1 引言

目前, 在各类工程应用中, 时滞是经常出现的; 然而, 时滞的出现会使系统性能变差, 甚至导致系统不稳定。因此对时滞系统的稳定性和镇定问题的研究引起了不少研究者的兴趣, 也取得了不少的成果和进步([19], [26], [28], [35], [46])。在 [26] 中, 对线性时滞系统和线性中立型时滞系统进行了深入的研究, 通过运用二次李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数和时滞分解方法, 给出了保守性小、通用性强的用于判别系统稳定性的充分条件。基于一种不同于上述时滞分解的方法, [32] 也对时滞进行分解, 研究了一类非线性模糊系统的稳定性和镇定问题。

另一方面, 在自然科学和工程应用中, 随机系统在很多领域也扮演着越来越重要的角色。因此, 对随机系统的研究也备受重视了([47-54])。对带有不确定的随机系统, [55] 设计了一延迟的状态反馈控制器, 指数镇定了这类系统。对带有时滞的随机模糊系统, [56] 研究了这类系统的时滞依赖的镇定问题。[57] 研究了一类带有不确定性的中立型随机时滞系统, 对其稳定性问题、镇定问题及 H_∞ 控制问题进行深入的讨论。在 [58] 中, 为带有随机传感器延迟的离散系统设计了 H_∞ 滤波器。

在以上成果的启发下, 本章研究带有时滞的随机系统, 对其时滞依赖的稳定性问题, 状态反馈控制器设计问题进行分析。运用时滞分解方法, 构造新型李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 并由此产生判断系统稳定性的充分条件。产生的这个条件涵盖了一些现存的结果, 较之现有的结果具有较小的保守性。基于这个稳定性条件, 我们进一步研究了这类系统的镇定问题, 构造一状态反馈控制器, 在均方意义下镇定这类时滞系统。数值仿真实验验证了方法的可行性。

本章的结构是: 第二部分是系统的描述及将要用到的一些基本概念, 第三部分运用时滞分解方法, 给出时滞依赖的判断系统均方稳定的条件, 系统的镇定问题在第四部分研究, 接下来的第五部分是仿真算例, 最后一部分是本章的一个小结。

4.2 问题的提出及初步

考虑如下带有随机扰动的基于 T-S 模糊模型的时滞系统:

$$\begin{aligned} dx(t) = & [A(x)x(t) + A_d(x)x(t-h) + B(x)u(t)]dt \\ & + [L(x)x(t) + L_d(x)x(t-h)]d\omega(t) \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$x(t) = \phi(t) \quad t \in [-h, 0] \quad (4.2.2)$$

这里 $x(t) \in R^n$ 是系统的状态变量; $u(t) \in R^m$ 是输入控制信号; $h > 0$ 是时滞; $\omega(t)$ 是定义在具有非降 σ 代数 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一维标准实维纳过程; $\phi(t)$ 给定的在 $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_0}^2([-h, 0]; R^n)$ 上的初始条件. A, A_d, B, L 和 L_d 如下:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{i=1}^s h_i(x(t))A_i & A_d(x) &= \sum_{i=1}^s h_i(x(t))A_{id} & B(x) &= \sum_{i=1}^s h_i(x)B_i \\ L(x) &= \sum_{i=1}^s h_i(x(t))L_i & L_d(x) &= \sum_{i=1}^s h_i(x(t))L_{id} \end{aligned}$$

其中 $\sum_{i=1}^s h_i(x(t)) = 1, h_i(x(t)) > 0, A_i, A_{id}, B_i, L_i$ 和 L_{id} 是已知常数矩阵.

我们要确定一个如下形式的控制器:

$$u(t) = K(x)x(t) \quad (4.2.3)$$

其中 $K(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x(t))K_i$, 把 (4.2.3) 代入 (4.2.1), 得到如下的闭环系统:

$$\begin{aligned} dx(t) = & [(A(x) + B(x)K(x))x(t) + A_d(x)x(t-h)]dt \\ & + [L(x)x(t) + L_d(x)x(t-h)]d\omega(t) \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

下面我们引入一个定义和一个引理, 以便于我们得到下面的结果:

定义 4.1 带有随机扰动的时滞系统 (4.2.1) 和 (4.2.2) 在 $u(t) = 0$ 的情况下, 如果存在一个正常数 λ 使得

$$E \int_0^t x^\tau(s)x(s)ds \leq \lambda \sup_{s \in [-h, 0]} E|\phi(s)|^2 \quad t > 0$$

成立, 则我们说这个系统是均方稳定的或在均方意义下是稳定的.

引理 4.1 [59] 对任意正定的矩阵 $S \in R^{l \times l}$ 和常数 $h > 0$, 如果存在向量函数 $\nu: [0, h] \rightarrow R^l$ 使得积分 $\int_0^h \nu^\tau(s)S\nu(s)ds$ 和 $\int_0^h \nu(s)ds$ 有定义, 则下面的不等式成立:

$$h \int_0^h \nu^\tau(s)S\nu(s) \geq \left(\int_0^h \nu(s)ds \right)^\tau S \left(\int_0^h \nu(s)ds \right)$$

本章的目的是设计一闭环状态反馈控制器, 使得系统 (4.2.4) 和 (4.2.2) 在均方意义下, 是稳定的.

4.3 稳定性分析

在这一章节中，我们将给出一个充分条件，用于判断带有时滞的随机系统(4.2.1)和(4.2.2)的稳定性问题。

定理 4.1 考虑在输入信号 $u(t) = 0$ 时，带有随机扰动的时滞系统 (4.2.1) 和 (4.2.2)，如果存在实矩阵 $P > 0, Q > 0, S_1 > 0, S_2 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$ 和 $W_1 > 0, W_3 > 0, W_2$ 使得下面不等式成立，

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ * & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.3.1)$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ * & W_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.3.2)$$

其中

$$\Phi_{11} = \begin{bmatrix} (1,1) & W_2 + \frac{2}{h}R_1 & PA_d(x) + \frac{1}{h}S_1 & \frac{2}{h}R_1 & \frac{1}{h}S_1 \\ * & W_3 - W_1 - \frac{2}{h}R_1 & -W_2 & -\frac{2}{h}R_1 & 0 \\ * & * & -Q - W_3 - \frac{1}{h}S_1 & 0 & -\frac{1}{h}S_1 \\ * & * & * & -\frac{2}{h}R_1 - R_2 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{h}S_1 - S_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{12} = \begin{bmatrix} hA^T(x)S_1 & \frac{h}{2}A^T(x)R_1 & hL^T(x)S_2 & \frac{h}{2}L^T(x)R_2 & L^T(x)P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ hA_d^T(x)S_1 & \frac{h}{2}A_d^T(x)R_1 & hL_d^T(x)S_2 & \frac{h}{2}L_d^T(x)R_2 & L_d^T(x)P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{22} = \text{diag}\{-hS_1, -\frac{h}{2}R_1, -hS_2, -\frac{h}{2}R_2, -P\}$$

这里

$$(1,1) = A^T(x)P + PA(x) + Q + W_1 - \frac{1}{h}S_1 - \frac{2}{h}R_1$$

则系统 (4.2.1) 和 (4.2.2) 在 $u(t) = 0$ 时, 在均方意义下是稳定的。

证明: 令

$$f(t) = A(x)x(t) + A_d(x)x(t-h) \quad (4.3.3)$$

$$g(t) = L(x)x(t) + L_d(x)x(t-h) \quad (4.3.4)$$

系统 (4.2.1) 在 $u(t) = 0$ 化为了

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)d\omega(t) \quad (4.3.5)$$

选择如下李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) + V_6(t) + V_7(t) \quad (4.3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t) &= x^T(t)Px(t) \\ V_2(t) &= \int_{t-h}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \\ V_3(t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t f^T(\xi)S_1f(\xi)d\xi d\theta \\ V_4(t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t g^T(\xi)S_2g(\xi)d\xi d\theta \\ V_5(t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^0 \int_{t+\theta}^t f^T(\xi)R_1f(\xi)d\xi d\theta \\ V_6(t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^0 \int_{t+\theta}^t g^T(\xi)R_2g(\xi)d\xi d\theta \\ V_7(t) &= \int_{t-\frac{h}{2}}^t \eta^T(\theta)W\eta(\theta)d\theta \end{aligned}$$

这里

$$\eta(\theta) = [x^T(\theta) \quad x^T(\theta - \frac{h}{2})]^T$$

根据伊藤微分公式, 我们可以获得下面的随机微分方程:

$$dV(t) = \mathcal{L}V(t)dt + \sigma(t)d\omega(t) \quad (4.3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t) &= 2x^T(t)Pf(t) + g^T(t)Pg(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \\ &\quad + \dot{V}_4(t) + \dot{V}_5(t) + \dot{V}_6(t) + \dot{V}_7(t) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\sigma(t) = 2x^T(t)Pg(t) \quad (4.3.9)$$

这里

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h) \\ \dot{V}_3(t) &= \int_{-h}^0 [f^T(t)S_1f(t) - f^T(t+\theta)S_1f(t+\theta)]d\theta \\ &= f^T(t)hS_1f(t) - \int_{t-h}^t f^T(\theta)S_1f(\theta)d\theta \\ \dot{V}_4(t) &= \int_{-h}^0 [g^T(t)S_2g(t) - g^T(t+\theta)S_2g(t+\theta)]d\theta \\ &= g^T(t)hS_2g(t) - \int_{t-h}^t g^T(\theta)S_2g(\theta)d\theta \\ \dot{V}_5(t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^0 [f^T(t)R_1f(t) - f^T(t+\theta)R_1f(t+\theta)]d\theta \\ &= f^T(t)\frac{h}{2}R_1f(t) - \int_{t-\frac{h}{2}}^t f^T(\theta)R_1f(\theta)d\theta \\ \dot{V}_6(t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^0 [g^T(t)R_2g(t) - g^T(t+\theta)R_2g(t+\theta)]d\theta \\ &= g^T(t)\frac{h}{2}R_2g(t) - \int_{t-\frac{h}{2}}^t g^T(\theta)R_2g(\theta)d\theta \\ \dot{V}_7(t) &= \eta^T(t)W\eta(t) - \eta^T(t-\frac{h}{2})W\eta(t-\frac{h}{2}) \end{aligned}$$

由引理 4.1, 我们可以得到下面不等式:

$$-\frac{h}{2} \int_{t-\frac{h}{2}}^t f^T(\theta)R_1f(\theta)d\theta \leq -\left(\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta\right)^T R_1 \left(\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta\right) \quad (4.3.10)$$

$$-h \int_{t-h}^t f^T(\theta)S_1f(\theta)d\theta \leq -\left(\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta\right)^T S_1 \left(\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta\right) \quad (4.3.11)$$

对式子 (4.3.5) 两边分别从 $t-h$ 和 $t-\frac{h}{2}$ 到 t 进行积分, 则有:

$$\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta = x(t) - x(t-h) - \int_{t-h}^t g(\theta)d\omega(\theta) \quad (4.3.12)$$

$$\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta = x(t) - x(t-\frac{h}{2}) - \int_{t-\frac{h}{2}}^t g(\theta)d\omega(\theta) \quad (4.3.13)$$

综合 (4.3.10),(4.3.11),(4.3.12) 和(4.3.13), 可得:

$$\begin{aligned}
 LV \leq & 2x^{\tau}(t)Pf(t) + g^{\tau}(t)Pg(t) + x^{\tau}(t)Qx(t) \\
 & -x^{\tau}(t-h)Qx(t-h) + f^{\tau}(t)hS_1f(t) \\
 & -\frac{1}{h}\left(\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta\right)^{\tau}S_1\left(\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta\right) \\
 & +g^{\tau}(t)hS_2g(t) - \int_{t-h}^t g^{\tau}(\theta)S_2g(\theta)d\theta \\
 & +f^{\tau}(t)\frac{h}{2}R_1f(t) - \frac{2}{h}\left(\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta\right)^{\tau}R_1 \\
 & \times\left(\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta\right) + g^{\tau}(t)\frac{h}{2}R_2g(t) \\
 & - \int_{t-\frac{h}{2}}^t g^{\tau}(\theta)R_2g(\theta)d\theta + \eta^{\tau}(t)W\eta(t) \\
 & -\eta^{\tau}\left(t-\frac{h}{2}\right)W\eta\left(t-\frac{h}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

根据等距的性质, 可知

$$E \int_{t-h}^t g^{\tau}(\theta)S_2g(\theta)d\theta = E \int_{t-h}^t g^{\tau}(\theta)d\omega(\theta)S_2 \int_{t-h}^t g(\theta)d\omega(\theta) \tag{4.3.15}$$

$$E \int_{t-\frac{h}{2}}^t g^{\tau}(\theta)R_2g(\theta)d\theta = E \int_{t-\frac{h}{2}}^t g^{\tau}(\theta)d\omega(\theta)R_2 \int_{t-\frac{h}{2}}^t g(\theta)d\omega(\theta) \tag{4.3.16}$$

根据 (4.3.14),(4.3.15) 和 (4.3.16) 可知

$$\begin{aligned}
 E LV \leq & E[2x^{\tau}(t)Pf(t) + g^{\tau}(t)Pg(t) + x^{\tau}(t)Qx(t) \\
 & -x^{\tau}(t-h)Qx(t-h) + f^{\tau}(t)hS_1f(t) - \frac{1}{h}\left(\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta\right)^{\tau}S_1\left(\int_{t-h}^t f(\theta)d\theta\right) \\
 & +g^{\tau}(t)hS_2g(t) - \int_{t-h}^t g^{\tau}(\theta)d\omega(\theta)S_2 \times \int_{t-h}^t g(\theta)d\omega(\theta) + f^{\tau}(t)\frac{h}{2}R_1f(t) \\
 & -\frac{2}{h}\left(\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta\right)^{\tau}R_1\left(\int_{t-\frac{h}{2}}^t f(\theta)d\theta\right) + g^{\tau}(t)\frac{h}{2}R_2g(t) - \int_{t-\frac{h}{2}}^t g^{\tau}(\theta)d\omega(\theta)R_2 \\
 & \times \int_{t-\frac{h}{2}}^t g(\theta)d\omega(\theta) + \eta^{\tau}(t)W\eta(t) - \eta^{\tau}\left(t-\frac{h}{2}\right)W\eta\left(t-\frac{h}{2}\right)]
 \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

令

$$\xi(t) = [x^{\tau}(t), x^{\tau}\left(t-\frac{h}{2}\right), x^{\tau}(t-h), \int_{t-\frac{h}{2}}^t g^{\tau}(\theta)d\omega(\theta), \int_{t-h}^t g^{\tau}(\theta)d\omega(\theta)]^{\tau}$$

可以证明:

$$E\mathcal{L}V \leq E\xi^T(t)(\Phi_{11} + \Phi'_{11})\xi(t) \quad (4.3.18)$$

其中 Φ_{11} 在 (4.3.1) 中定义,

$$\Phi'_{11} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & \Theta_2 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Theta_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

这里

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= L^T(x)PL(x) + hA^T(x)S_1A(x) + hL^T(x)S_2L(x) + \frac{h}{2}A^T(x)R_1A(x) + \frac{h}{2}L^T(x)R_2L(x) \\ \Theta_2 &= L^T(x)PL_d(x) + hA^T(x)S_1A_d(x) + hL^T(x)S_2L_d(x) + \frac{h}{2}A^T(x)R_1A_d(x) + \frac{h}{2}L^T(x)R_2L_d(x) \\ \Theta_3 &= L_d^T(x)PL_d(x) + hA_d^T(x)S_1A_d(x) + hL_d^T(x)S_2L_d(x) + \frac{h}{2}A_d^T(x)R_1A_d(x) + \frac{h}{2}L_d^T(x)R_2L_d(x) \end{aligned}$$

运用 Schur 补公式, 容易从 (4.3.1) 得知存在一常数 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\Phi_{11} - \Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{12}^T = \Phi_{11} + \Phi'_{11} < \text{diag}\{-\varepsilon I, 0, 0, 0, 0\}$$

有 (4.3.18) 和上面的不等式, 可得到:

$$E\mathcal{L}V dt < -\varepsilon E x^T(t)x(t)dt \quad (4.3.19)$$

对 (4.3.19) 从 0 到 t 两边同时进行积分

$$EV(t) - EV(0) < -\varepsilon E \int_0^t x^T(s)x(s)ds \quad t > 0$$

即:

$$E \int_0^t x^T(s)x(s)ds < \frac{1}{\varepsilon} EV(0) \quad (4.3.20)$$

注意 (4.3.6) 和 (4.3.20), 我们可知存在一正常数 λ 使得下面不等式成立:

$$E \int_0^t x^T(s)x(s)ds < \lambda \sup_{s \in [-h, 0]} E|\phi(s)|^2$$

根据定义 4.1, 我们可以说带有随机扰动的时滞系统 (4.2.1) 和 (4.2.2) 当 $u(t) = 0$ 在均方意义下是稳定的. \square

注 4.1 注意李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数 (4.3.6) 可以发现在 $V_5(t)$, $V_6(t)$, $V_7(t)$ 中, 时滞区间 $[-h, 0]$ 被分解为两个子区间, $[-\frac{h}{2}, 0]$ 和 $[-h, -\frac{h}{2}]$, 在每个子区间上, 我们选择不同权重的矩阵。在 $V_7(t)$ 中, 我们可以看到, 交叉项 $2 \int_{t-\frac{h}{2}}^t x^T(s) W_2 x(s - \frac{h}{2}) ds$ 对应了两个子区间 $[-\frac{h}{2}, 0]$ 和 $[-h, -\frac{h}{2}]$, W_2 也并不要求是正定的。这两方面的因素在减小结果的保守性上, 扮演者重要角色。

注 4.2 在处理 $\dot{V}_3(t)$ 中的 $\int_{t-h}^t f^T(\theta) S_1 f(\theta) d\theta$ 和 $\dot{V}_5(t)$ 中的 $\int_{t-\frac{h}{2}}^t f^T(\theta) R_1 f(\theta) d\theta$ 时, 我们运用了琴森不等式和变量替换技术, 相比于 [57], 没有引入过多的自由权矩阵, 这样也简化了计算过程。

在定理 4.1 中, $A(x)$ 、 $A_d(x)$ 、 $L(x)$ 、 $L_d(x)$ 依赖于模糊基函数 $h_i(x)$, 故不便于直接用于判定这类系统的指数稳定性。因此, 我们给出如下的定理, 便于运用, 却增加了保守性。

定理 4.2 在输入信号 $u(t) = 0$ 时, 带有随机扰动的时滞系统 (4.2.1) 和 (4.2.2), 如果存在实矩阵 $P > 0$, $Q^i > 0$, $S_1^i > 0$, $S_2^i > 0$, $R_1^i > 0$, $R_2^i > 0$ 和 $W_1^i > 0$, $W_3^i > 0$, W_2^i , $i = 1 \dots s$. 使得下面不等式成立,

$$\Phi^{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, s \tag{4.3.21}$$

$$\Phi^{ij} + \Phi^{ji} < 0 \quad 0 < i < j \leq s \tag{4.3.22}$$

$$\begin{bmatrix} W_1^i & W_2^i \\ * & W_3^i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots s \tag{4.3.23}$$

其中

$$\Phi^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} \\ * & \bar{\Phi}_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \begin{bmatrix} \overline{(1,1)} & W_2^i + \frac{2}{h}R_1^i & PA_{id} + \frac{1}{h}S_1^i & \frac{2}{h}R_1^i & \frac{1}{h}S_1^i \\ * & W_3^i - W_1^i - \frac{2}{h}R_1^i & -W_2^i & -\frac{2}{h}R_1^i & 0 \\ * & * & -Q^i - W_3^i - \frac{1}{h}S_1^i & 0 & -\frac{1}{h}S_1^i \\ * & * & * & -\frac{2}{h}R_1^i - R_2^i & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{h}S_1^i - S_2^i \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi}_{12} = \begin{bmatrix} hA_i^T S_1^j & \frac{h}{2}A_i^T R_1^j & hL_i^T S_2^j & \frac{h}{2}L_i^T R_2^j & L_i^T P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ hA_{id}^T S_1^j & \frac{h}{2}A_{id}^T R_1^j & hL_{id}^T S_2^j & \frac{h}{2}L_{id}^T R_2^j & L_{id}^T P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi}_{22} = \text{diag}\{-hS_1^i, -\frac{h}{2}R_1^i, -hS_2^i, -\frac{h}{2}R_2^i, -P\}$$

这里

$$\overline{(1,1)} = A_i^T P + PA_i + Q^i + W_1^i - \frac{1}{h}S_1^i - \frac{2}{h}R_1^i$$

则系统 (4.2.1) 和 (4.2.2) 在 $u(t) = 0$ 时, 在均方意义下是稳定的。

证明: 本定理的证明可以参照第二章的定理 2.2 的证明思路, 此处不再详细写出。 □

4.4 控制器设计

在这一部分里, 我们将会设计一状态反馈控制器 (4.2.3), 使得闭环系统 (4.2.4) 在初始条件 (4.2.2) 下是均方意义下随机稳定的。

定理 4.3 给定常数时滞 $h > 0$, 闭环系统 (4.2.4) 在初始条件 (4.2.2) 下, 是均方稳定的, 如果存在矩阵 $P > 0$, $Q^i > 0$, $S_1^i > 0$, $S_2^i > 0$, $R_1^i > 0$, $R_2^i > 0$ 和 $W_1^i > 0$, $W_3^i > 0$, W_2^i , M_i , $i = 1 \dots s$. 使得:

$$\Psi^{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, s \quad (4.4.1)$$

$$\Psi^{ij} + \Psi^{ji} < 0 \quad 0 < i < j \leq s \quad (4.4.2)$$

$$\begin{bmatrix} W_1^i & W_2^i \\ * & W_3^i \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1 \dots s \quad (4.4.3)$$

其中

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \Theta & W_2^i + \frac{2}{h}R_1^i & A_{id}P + \frac{1}{h}S_1^i & \frac{2}{h}R_1^i & \frac{1}{h}S_1^i \\ * & W_3^i - W_1^i - \frac{2}{h}R_1^i & -W_2^i & -\frac{2}{h}R_1^i & 0 \\ * & * & -Q^i - W_3^i - \frac{1}{h}S_1^i & 0 & -\frac{1}{h}S_1^i \\ * & * & * & -\frac{2}{h}R_1^i - R_2^i & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{h}S_1^i - S_2^i \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} hPA_i^T + h(B_iM^j)^T & \frac{h}{2}PA_i^T + \frac{h}{2}(B_iM^j)^T & hPL_i^T & \frac{h}{2}PL_i^T & PL_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ hPA_{id}^T & \frac{h}{2}PA_{id}^T & hPL_{id}^T & \frac{h}{2}PL_{id}^T & PL_{id}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{22} = \text{diag}\{-h(2P - S_1^i), -\frac{h}{2}(2P - R_1^i), -h(2P - S_2^i), -\frac{h}{2}(2P - R_2^i), -P\}$$

这里

$$\Theta = PA_i^T + A_iP + Q^i + W_1^i - \frac{1}{h}S_1^i - \frac{2}{h}R_1^i + B_iM^j + (B_iM^j)^T$$

增益 K_i 可通过下式获得:

$$K_i = M_iP^{-1} \quad i = 1, \dots, s \quad (4.4.4)$$

证明: 对给定的常数时滞 $h > 0$, 若存在矩阵 $P > 0$, $Q^i > 0$, $S_1^i > 0$, $S_2^i > 0$, $R_1^i > 0$, $R_2^i > 0$ 和 $W_1^i > 0$, $W_3^i > 0$, W_2^i , M_i , $i = 1 \dots s$. 使得 (4.4.1)、(4.4.2) 和 4.4.3) 成立, 以下我们约定 $i, j = 1 \dots s$, 注意下面不等式:

$$\begin{aligned} -PS_1^{-1}P &< -2P + S_1, & -PR_1^{-1}P &< -2P + R_1 \\ -PS_2^{-1}P &< -2P + S_2, & -PR_2^{-1}P &< -2P + R_2 \end{aligned}$$

我们可知:

$$\Psi_{22} < \Psi'_{22} \quad (4.4.5)$$

其中

$$\Psi'_{22} = \text{diag}\{-hP(S_1^i)^{-1}P, -\frac{h}{2}P(R_1^i)^{-1}P, -hP(S_2^i)^{-1}P, -\frac{h}{2}P(R_2^i)^{-1}P, -P\}$$

故用 Ψ'_{22} 代替系统 (4.4.1) 和 (4.4.2) 中的 Ψ_{22} 后, 不等式依然成立。再先后对替换后得到的不等式左边乘以对角阵 $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, I, I\}$, 并分别以 $S_1^i, S_2^i, R_1^i, R_2^i, Q^i, W_1^i, W_2^i, W_3^i$ 替换 $P^{-1}S_1^iP^{-1}, P^{-1}S_2^iP^{-1}, P^{-1}R_1^iP^{-1}, P^{-1}R_2^iP^{-1}, P^{-1}Q^iP^{-1}, P^{-1}W_1^iP^{-1}, P^{-1}W_2^iP^{-1}, P^{-1}W_3^iP^{-1}$, 可得:

$$\begin{bmatrix} \Psi'_{11} & \Psi'_{12} \\ * & \Phi'_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.4.6)$$

其中

$$\Psi'_{11} = \begin{bmatrix} \Theta' & W_2^i + \frac{2}{h}R_1^i & P^{-1}A_{id} + \frac{1}{h}S_1^i & \frac{2}{h}R_1^i & \frac{1}{h}S_1^i \\ * & W_3^i - W_1^i - \frac{2}{h}R_1^i & -W_2^i & -\frac{2}{h}R_1^i & 0 \\ * & * & -Q^i - W_3^i - \frac{1}{h}S_1^i & 0 & -\frac{1}{h}S_1^i \\ * & * & * & -\frac{2}{h}R_1^i - R_2^i & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{h}S_1^i - S_2^i \end{bmatrix}$$

$$\Psi'_{12} = \begin{bmatrix} hA_i^\tau + hP^{-1}(B_iM_j)^\tau & \frac{h}{2}A_i^\tau + \frac{h}{2}P^{-1}(B_iM_j)^\tau & hL_i^\tau & \frac{h}{2}L_i^\tau & L_i^\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ hA_{id}^\tau & \frac{h}{2}A_{id}^\tau & hL_{id}^\tau & \frac{h}{2}L_{id}^\tau & L_{id}^\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi'_{22} = \text{diag}\{-h(S_1^i)^{-1}, -\frac{h}{2}(R_1^i)^{-1}, -h(S_2^i)^{-1}, -\frac{h}{2}(R_2^i)^{-1}, -P\}$$

且

$$\Theta' = A_i^\tau P^{-1} + P^{-1}A_i + Q^i + W_1^i - \frac{1}{h}S_1^i - \frac{2}{h}R_1^i + P^{-1}B_iM_jP^{-1} + P^{-1}M_j^\tau B_i^\tau P^{-1}$$

注意 (4.4.4) 可知 $M_i = K_i P$, 代入 (4.4.6), 并用 P 代换 P^{-1} , 可得:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.4.7)$$

其中

$$\Omega_{11} = \begin{bmatrix} \Delta & W_2^i + \frac{2}{h}R_1^i & PA_{id} + \frac{1}{h}S_1^i & \frac{2}{h}R_1^i & \frac{1}{h}S_1^i \\ * & W_3^i - W_1^i - \frac{2}{h}R_1^i & -W_2^i & -\frac{2}{h}R_1^i & 0 \\ * & * & -Q^i - W_3^i - \frac{1}{h}S_1^i & 0 & -\frac{1}{h}S_1^i \\ * & * & * & -\frac{2}{h}R_1^i - R_2^i & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{h}S_1^i - S_2^i \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{12} = \begin{bmatrix} h(A_i + B_i K_j)^T & \frac{h}{2}(A_i + B_i K_j)^T & hL_i^T & \frac{h}{2}L_i^T & L_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ hA_{id}^T & \frac{h}{2}A_{id}^T & hL_{id}^T & \frac{h}{2}L_{id}^T & L_{id}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{22} = \text{diag}\{-h(S_1^i)^{-1}, -\frac{h}{2}(R_1^i)^{-1}, -h(S_2^i)^{-1}, -\frac{h}{2}(R_2^i)^{-1}, -P^{-1}\}$$

这里

$$\Delta = (A_i + B_i K_j)^T P + P(A_i + B_i K_j) + Q^i + W_1^i - \frac{1}{h}S_1^i - \frac{2}{h}R_1^i$$

用 A 替换 $A_i + B_i K_j$, 对 (4.4.7) 前后分别乘以 $\{I, I, I, I, I, S_1^i, R_1^i, S_2^i, R_2^i, P^i\}$, 我们可以看到, 定理 4.2 中的线性矩阵不等式 (4.3.1) 是成立的. 因此当存在矩阵 $P > 0$, $Q^i > 0$, $S_1^i > 0$, $S_2^i > 0$, $R_1^i > 0$, $R_2^i > 0$, $W_1^i > 0$, $W_3^i > 0$ 和 W_2^i , M_i , 使得 (4.4.1)、(4.4.2) 和 (4.4.3) 成立时, 闭环系统 (4.2.4) 在初始条件 (4.2.2) 下, 在均方意义下是稳定的, 且增益有 (4.4.4) 求得. \square

4.5 数值仿真

在这一节, 我们将给出一个数值算例来验证上节所出的方法的有效性. 考虑如下的基于 T-S 模型的时滞模糊系统

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_{1d} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} \\
 L_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad L_{1d} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad h = 0.5 \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad A_{2d} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \\
 L_2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad L_{2d} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

可以验证, 在没有控制输入信号时, 这个系统是不稳定的。根据定理 4.3, 可以使这个闭环随机系统在均方意义下稳定, 用MATLAB求得对应的各个矩阵如下:

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 19.4338 & -3.5167 \\ -3.5167 & 37.6647 \end{bmatrix}, \quad Q^1 = \begin{bmatrix} -8.0852 & -6.2750 \\ -6.2750 & -2.0392 \end{bmatrix} \\
 R_2^1 &= \begin{bmatrix} 13.7613 & -0.4886 \\ -0.4886 & 20.0599 \end{bmatrix}, \quad W_1^1 = \begin{bmatrix} 41.5997 & -3.5760 \\ -3.5760 & 44.2870 \end{bmatrix} \\
 W_2^1 &= \begin{bmatrix} -2.1428 & -1.0587 \\ -0.4032 & -1.9795 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} -24.1136 & -11.0324 \\ -11.0324 & 2.9075 \end{bmatrix} \\
 S_1^1 &= \begin{bmatrix} 5.3580 & 3.5557 \\ 3.5557 & 7.5545 \end{bmatrix}, \quad S_2^1 = \begin{bmatrix} 18.3874 & 3.9503 \\ 3.9503 & 31.1566 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1^1 &= \begin{bmatrix} 1.7194 & 0.6721 \\ 0.6721 & 1.3847 \end{bmatrix}, & W_3^1 &= \begin{bmatrix} 33.2174 & 2.1676 \\ 2.1676 & 31.6697 \end{bmatrix} \\
 R_2^2 &= \begin{bmatrix} 15.5124 & 0.4932 \\ 0.4932 & 20.3369 \end{bmatrix}, & W_1^2 &= \begin{bmatrix} 38.9463 & -3.1820 \\ -3.1820 & 43.6791 \end{bmatrix} \\
 W_3^2 &= \begin{bmatrix} 35.3043 & 2.3776 \\ 2.3776 & 32.0878 \end{bmatrix}, & S_1^2 &= \begin{bmatrix} 9.8061 & 4.9428 \\ 4.9428 & 7.7190 \end{bmatrix} \\
 S_2^2 &= \begin{bmatrix} 23.6034 & 5.4984 \\ 5.4984 & 29.3730 \end{bmatrix}, & R_1^2 &= \begin{bmatrix} 2.4860 & 0.8360 \\ 0.8360 & 1.5214 \end{bmatrix} \\
 W_2^2 &= \begin{bmatrix} -2.6956 & -1.7114 \\ -0.5545 & -2.3133 \end{bmatrix}, & M_1 &= [-237.4851 \quad 5.2357] \\
 M_2 &= [-304.2816 \quad 67.5981]
 \end{aligned}$$

相应的增益为：

$$K_1 = [-12.4046 \quad -1.0192], \quad K_2 = [-15.5961 \quad 0.3386]$$

4.6 小结

本章中，我们研究了一类带有随机扰动的基于T-S模糊模型的非线性时滞系统，通过时滞分解方法，构造新型李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数，结合伊藤微分，等距定理等，产生一判断这类系统均方稳定性的一个充分条件；并基于这个条件，设计了状态反馈控制器。数值仿真验证了方法的有效性。

第五章 总结与展望

5.1 总结

本文主要研究了一类基于T-S模型的非线性时滞系统的稳定性、控制器设计和滤波器设计问题。稳定性分析主要采用李雅普诺夫-克朗索夫斯基泛函的方法。时滞主要考虑了常数时滞和在一个区间内随机变化的时滞，通过对时滞进行分解或者利用时滞的上下限，构造新型的李雅普诺夫-克朗索夫斯基泛函，运用矩阵不等式的放缩等各种数学工具，处理构造的这些泛函的微分或差分，得到判断系统稳定性的充分条件，并用线性矩阵不等式表示出来，便于计算机求解。再根据得到稳定性分析结果，构造相应的控制器或者滤波器，完成对系统的控制或滤波的过程。

具体的说，文章的第二部分，针对基于T-S模型的中立型时滞系统，研究其指数稳定性及镇定问题。中立型系统是一类较特殊的时滞系统，不少学者研究了线性中立型系统，得到了丰富的成果，而非线性中立系统的研究却相对较少；第一部分正是考虑到这种情况，采用时滞分解的方法，研究这类非线性中立型时滞系统的指数稳定问题和镇定问题。以期得到一些结果，为这方面的研究提供参考。得到的结论也可用于现有的时滞系统的稳定性、指数稳定性问题和镇定问题。仿真算例证明方法的可行性。

第三部分，研究基于T-S模型的带有时变时滞的非线性系统的滤波器设计问题。这个滤波器是依赖于模糊规则的，相对于不依赖于模糊规则的滤波器，本章所设计滤波器需要的较多的模糊基信息，且具有较大的计算量。然而却具有较小的保守性。且时滞可以是在一个区间内随机变化的，系统模型相对一般；因此，本章结果通用性相对较强。仿真算例也验证了所提出方法的有效性。

第四章考虑的是带有随机扰动的时滞系统的稳定性问题和镇定问题，利用时滞分解构造李雅普诺夫-克朗索夫斯基泛函，结合伊藤微分公式，等距定理等工具，对结果进行处理，得到系统稳定的一个充分条件，并以线性矩阵不等式形式表示，便于计算。再通过合同变换等代数工具，结合稳定性条件，给出镇定这类系统的方法。最后，数值仿真显示了方法的可行性。

5.2 展望

在完成本论文的过程中，受益于国内外许多学者研究结果的启发，我们对这一研究领域的相关方向也有了一些断断续续的思考，认为在未来的几年里，还有一些如下的研究问题值

得关注:

(1) 本文我们主要使用的是时滞分解的方法, 构造李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 得到了保守性较小的条件, 然而, 这些条件也只是充分条件, 其得到这些条件的计算量较大, 为了便于计算, 把条件化为线性矩阵不等式形式, 对部分式子进行了放缩, 一定程度上增加了结果的保守性。所以, 寻找更好的方法构造李雅普诺夫-克朗索夫斯基函数, 寻找新的方法处理矩阵不等式, 依然是很有意义的工作。

(2) 对基于 T-S 模型的模糊系统, 离散系统的研究已经取得了很大的突破, 理论相对成熟。然而对连续系统, 由于牵涉到对模糊基函数的求导, 目前得到结果依然存在较大的保守性。故对基于 T-S 模型的连续系统的研究仍然是非常重要的。

(3) 对于 T-S 模型的带有时变时滞、随机干扰、不确定性的复杂时滞系统、广义时滞系统, 目前的研究成果依然不够, 研究方法也存在较大的保守性, 这也是需要进一步深入探索的。

致 谢

本论文是在导师周绍生教授的悉心指导下完成的。在论文即将完成之际，我要深深的感谢我的导师周绍生教授，并向他致以崇高的敬意！感谢周老师给我提供了这个学习的机会，是他带我进入了控制理论与控制工程这个充满奥妙的领域，感谢周老师两年多来对我的培养和教育，我的每一点进步都凝聚了他的心血。周老师渊博的知识，严谨的治学态度，敏锐的思维，勤于钻研、勇于创新的精神深深的影响了我，必将使我终生受益。

感谢学院的各位老师对我的培养、教育和学业上的引导。感谢同实验室的师弟师妹们的热情帮助。

最后，我还要特别感谢我的家人和一直关心、支持我的亲人们、同学们和朋友们，他们的理解和鼓励是我不断前进的精神动力。也正是由于他们一如既往的帮助和支持，我才能顺利完成此文。

参考文献

- [1] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制-自由权矩阵方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [2] Han Q.-L.. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 517-524.
- [3] Kolmanovskii V. B., Niculescu S.-I., Gu K.. Delay Effects on Stability: A Survey [C]. Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control Phoenix, Arizona USA, 1999: 1993-1998.
- [4] Kharitonov V. L.. Robust Stability Analysis Of Time Delay Systems: A Survey [J]. *Automatica*, 1999, 23: 185-196.
- [5] Gu K.. Survey on Recent Results in the Stability and Control of Time-Delay Systems [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2003, 125: 158-165.
- [6] Richard G.-P.. Time-delay systems:an overview of some recent advances and open problems [J]. *Automatica*, 2003, 39: 1667-1694.
- [7] Xu S., Lam J.. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 2008, 39(12): 1095-1113.
- [8] Takagi T., Sugeno M.: Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control [J]. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern*, 1985, 15(1): 116-132.
- [9] Choi D., Park P.. H_∞ state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions [J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2003, 11: 271-278.
- [10] Cao S.G., Rees N.W., Feng G.. Stability analysis of fuzzy control systems [J]. *IEEE Trans. Fuzzy Sys.*, 1996, 26: 201-204.
- [11] Feng G.. Stability analysis of discrete-time fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions [J]. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 2005, 12: 22-28.
- [12] Guerra T., Vermeiren L.. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for non-linear systems in the Takagi-Sugeno's form [J]. *Automatica*, 2004, 40: 823-829.

- [13] Kim E., Lee H.. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2000, 8: 523-534.
- [14] Tanaka K., Sugeno M.. Stability analysis and design of fuzzy control system [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45: 135-156.
- [15] Zhou S., Feng G., Lam J., Xu S.. Robust H_∞ control for discrete fuzzy systems via fuzzy basis-dependent Lyapunov functions [J]. Information Sciences, 2005, 174: 197-217.
- [16] Jiang X.F., Han Q.-L.. Robust H_∞ Control for Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Interval Time-Varying Delay [J] IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2007, 15(2): 321-331.
- [17] Jun Y.. New robust stability conditions and design of robust stabilizing controllers for takagi-sugeno fuzzy time-delay systems [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2007, 15(5): 828-839.
- [18] Li L., Liu X.. New results on delay-dependent robust stability criteria of uncertain fuzzy systems with state and input delays [J]. Information Science, 2009, 179(8): 1134-1148.
- [19] Peng C., Tian Y.-C., Tian E.. Improved delay-dependent robust stabilization conditions of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159: 2713-2729.
- [20] Xie L., Lu L., Zhang D., Zhang H.. Improved delay-dependent robust stabilization conditions of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay [J]. Automatica, 2004, 40(5): 873-880.
- [21] Zhou S.S., Lam J., Xue A.K.. H_∞ filtering of discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov function approach [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(2): 180-193.
- [22] Zhang J., Xia Y., Tao R.. New results on H_∞ filtering for fuzzy time-delay systems [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2009, 17(1): 128-137.
- [23] Zhou S.S., Lam J., Zheng W.X.. Control Design for Fuzzy Systems Based on Relaxed Nonquadratic Stability and H_∞ Performance Conditions [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2007, 15(2): 188-199.

- [24] Zhang B., Xu S.. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain discrete-time fuzzy systems with time-varying delays [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2009, 17(4), 809-823.
- [25] Han Q.-L.. A new delay-dependent stability criterion for linear neutral systems with norm-bounded uncertainties in all system matrices [J]. International Journal of Systems Science, 2005, 36(8): 469-475.
- [26] Han Q.-L.. Improved stability criteria and controller design for linear neutral systems [J]. Automatica, 2009, 45(8): 1948-1952.
- [27] Huang L.R., Mao X.R.. Delay-dependent exponential stability of neutral stochastic delay systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2009, 54(1): 147-152.
- [28] He Y., Wu M., She J.-H.. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain neutral systems [J]. Asian Journal of Control, 2008, 10(3): 376-383.
- [29] Kwon O.M., Park J.H.. Exponential stability of uncertain dynamic systems including state delay [J]. Appl. Math. Lett, 2006, 19: 901-907.
- [30] Chen Y., Xue, A., Zhao X., Zhou S.. Improved delay-dependent stability analysis for uncertain stochastic Hopfield neural networks with time-varying delays [J]. IET Control Theory and Applications, 2009, 3(1): 88-97.
- [31] Zhang B.Y., Zhou S.S., Xu S.Y.. Delay-dependent H_∞ controller design for linear neutral systems with discrete and distributed delays [J]. International Journal of Systems Science, 2007, 38(8): 611-621.
- [32] Zhao Y., Gao H.J., Lam J., Du B.. Stability and Stabilization of Delayed T-S Fuzzy Systems: A delay Partitioning Approach [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 2009, 17(4): 750-762.
- [33] Hien L.V., Phat V.N.. Exponential stability and stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems [J]. Journal of The Franklin Institute, 2009, 346: 611-625.
- [34] Chen M., Feng G., Ma H.B., Chen G.. Delay-Dependent H_∞ Filter Design for Discrete-Time Fuzzy Systems With Time-Varying delays [J]. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2009, 17(3): 604-616.

- [35] Gao H., Meng X., Chen T.. A Parameter-Dependent Approach to Robust H_∞ Filtering for Time-Delay Systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2008, 53(10): 2420-2425.
- [36] Gao H., Liu X., Lam J.. Stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with time-varying delay [J]. IEEE Trans. Syst. Man and Cyber., Part B, 2009, 9(2): 306-317.
- [37] Li H., Chen B., Lin C., Zhou Q.. Mean square exponential stability of stochastic fuzzy Hopfield neural networks with discrete and distributed time-varying delays [J]. Neurocomputing, 2009, 72: 2017-2023.
- [38] Wu H.-N.. Delay-dependent stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with state delay: A fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional approach [J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. Part B, 2006, 36(4): 954-962.
- [39] Fridman E., Shaked U., Liu K.. New conditions for delay-derivative-dependent stability [J]. Automatica, 2009, 45(11): 2723-2727.
- [40] He Y., Liu G.-P., Rees D., Wu M.. H_∞ filtering for discrete-time systems with time-varying delay [J]. Signal Processing, 2009, 89: 275-282.
- [41] Huang H., Feng G., Cao J.. An LMI approach to delay-dependent state estimation for delayed neural networks [J]. Neurocomputing, 2008, 71: 2857-2867.
- [42] Jiang X.F., Han Q.-L.. New stability criteria for linear systems with interval time-varying delay [J]. Automatica, 2008, 44: 2680-2685.
- [43] Verriest E. I., Michiels W.. Stability analysis of systems with stochastically varying delays [J]. Systems & Control Letters, 2009, 58: 783-791.
- [44] Xu S., Lam J.. Exponential H_∞ filter design for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2004, 17(6): 645-659.
- [45] Wu L., Wang Z.. Fuzzy filtering of nonlinear fuzzy stochastic systems with time-varying delay [J]. Signal Processing, 2009, 89: 1739-1753.

- [46] Lin C., Wang Q.-G., Lee T., He Y., Chen B.. Observer-based H_∞ control for T-S fuzzy systems with time delay: Delay-dependent design method [J]. IEEE Trans. Sys., Man, and Cyb. —Part B, 2007, 37(4): 1030-1038.
- [47] Chen Y., Xue A., Zhou S., Lu R.. Delay-Dependent Robust Control for Uncertain Stochastic Time-Delay Systems [J]. Circuits Syst Signal Process. 2008, 27: 447-460.
- [48] Li H., Chen B., Zhou Q., Lin C.. A delay-dependent approach to robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state and input delays [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2009, 28(1): 169-183.
- [49] Luo Q., Mao X., Shen Y.. New criteria on exponential stability of neutral stochastic differential delay equations [J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(10): 826-834.
- [50] Niu Y., D. W C Ho, Lam J.. Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay [J]. Automatica, 2005, 41: 873-880.
- [51] Song B., Xu S., Zou Y.. Delay-Dependent Robust H_∞ Filtering for Uncertain Neutral Stochastic Time-Delay Systems [J]. Circuits Syst Signal Process, 2009, 28: 241-256.
- [52] Wei G., Wang Z., Shu H., Fang J.. Delay-dependent stabilization of stochastic interval delay systems with nonlinear disturbances [J]. Systems and Control Letters, 2007, 56(9-10): 623-633.
- [53] Yang R., Shi P., Gao H.. New delay-dependent stability criterion for stochastic systems with time delays [J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(11): 966-973.
- [54] Yue D., Han Q.-L.. Delay-Dependent Exponential Stability of Stochastic Systems With Time-Varying Delay, Nonlinearity, and Markovian Switching [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2005, 50(2): 217-222.
- [55] Huang L., Mao X.. Robust delayed-state-feedback stabilization of uncertain stochastic systems [J]. Automatic, 2009, 45(5): 1332-1339.
- [56] Zhang B., Xu S., Zong G., Zou Y.. Delay-dependent stabilization for stochastic fuzzy systems with time delays [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(20): 2238-2250.

- [57] Chen W., Zheng W.X., Shen Y.. Delay-dependent stochastic stability and H_∞ -control of uncertain neutral stochastic systems with time delay [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2009, 54(7): 1660-1667.
- [58] Zhou S., Feng G.. H_∞ filtering for discrete-time systems with randomly varying sensor delays [J]. Automatica, 2008, 44: 1918-1922.
- [59] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.. Stability of Time-Delay Systems [M]. Boston: Birkhäuser, 2003: 322.

附录:

作者在读期间发表的学术论文及参加的科研项目

1. 已完成的学术论文

- [1] Shaosheng Zhou and Lei Zhou. Improved Exponential Stability Criteria and Stabilization of T-S Model Based Neutral Systems [J]. IET Control Theory and Application, 已录用。
- [2] Lei Zhou and Shaosheng Zhou. Improved Delay-Dependent Stability Criterion and Controller Design For Stochastic Systems With Time Delays [C]. Proceedings of the 29th Chinese Control Conference July 29-31, 2010, Beijing, China.

2. 参加的科研项目

- 1. 基于 T-S 模型的连续非线性系统和随机系统的分析和设计. 国家自然科学基金. 2010. 01—2012. 12。