摘要

古代中国与印度数理天文学之间的交流与比较是近年来国内外科学史界普遍关注的研究课题之一。本文拟对古代中国和印度在天文学领域中的某些数理方法进行比较研究，以探讨中印两国古代科学的特色，并试图揭示这两国古代科技交流与影响的内部因素。

中国古代的历算工作者在确定冬至时刻时，往往要对晷影长度进行计算，因此晷影测算成为中国古代天文学中最基本的问题之一。从最初简单的勾股测量到宋元时期复杂的晷影计算，中国历代畴人构造了各种不同的计算方法，完成了晷影长度从测量到计算的转变。同样，在古代印度的历法编制中，天文学家也非常重视晷影的计算。印度古代数学和天文学文献中，记载了大量的勾股测影与晷影计算内容。

本文在前人研究的基础上，整理出古代中印晷影测量方法演变的历史发展脉络，进一步对两国的晷影测量方法进行深入的分析和系统的比较。全文共分四个部分：

1.通过对古代中印两国主要数学著作与天文学著作中的勾股测量（影）内容进行解读，研究其方法实质和理论体系。认为古代中印两国的勾股测望术虽然存在很多的共性，但都是在各自的本土文化中发展起来的，没有受到外来文化的影响。

2.通过对中国古代不同历史时期具有代表性的、有关晷影算法的历史文献的解读，认为中国古代晷影计算方法的演变大致可划分为三个历史阶段：汉代至隋代这一历史时期主要是比例算法的阶段；隋末至唐末这一历史时期主要是利用二次插值算法的阶段；宋元时期主要是多项式函数逼近算法的阶段。文章中对各阶段的晷影算法特点进行了分析。

3.依据美国学者 David Pingree 对印度天文学的分期，对印度晷影长度计算法进行了系统分析，总结了其计算方法的特点，并讨论了外来文化对印度晷影长度计算的影响。

4.在第二、三部分的分析基础上，对古代中印的晷影算法特点和算法精度进行了比较，并就宇宙观对两国晷影测算方法的影响问题进行初步讨论。认为两国古代晷影计算传统不同，中国晷影算法采用数值方式为提高精度而不断改进算法公式，而受希腊传统影响后的印度晷影计算方法更加科学，而且宇宙观对两国古代晷影测算方法也产生一定的影响。

关键词: 历法 勾股测量 重差 晷影

Abstract

In recent years, the studies on the intercommunion and comparison of mathematical astronomy between ancient China and India have been generally paid close attention in the circles, either domestic or overseas, history of science. This paper intends to compare some mathematical methods in the field of astronomy in ancient China and India, so as to explore the characteristics of the sciences in ancient China and India, and to attempt to reveal the internal factors of the intercommunion and mutual influence of science and technology in the two countries.

When determined the moment of the Winter Solstice, ancient Chinese mathematicians and astronomers often calculate the length of solar shadow, therefore, measuring and calculating the length of solar shadow becomes one of the most fundamental problems in ancient Chinese astronomy. From the initial simple measurement via Pythagorean theorem to the complex calculation in the Song and Yuan Dynasties, Chinese *Chouren* (mathematicians and astronomers) construct many different methods of calculation, and complete the change from measurement to calculation of the length of solar shadow. Similarly, in ancient Indian calendars , the astronomers also attach great importance to the calculation of the length of solar shadow. In many ancient Indian literatures of mathematics and astronomy, a large number of materials about the length of solar shadow, gain by both measuring via Pythagorean theorem and calculating have been recorded.

On the basis of previous researches, this paper straightens out the evolution of the methods of measurement and calculation about the length of solar shadow in both ancient China and India, and analyzes thoroughly and compares systematically those methods. The paper consists of four parts.

1. The author of the paper goes over some main Ancient Chinese and Indian mathematical and astronomical books that contain problems about measurement via Pythagorean theorem and studys the essence of their methods and theoretical system. The author thinks that although there are much common ground in the methods of measurements in ancient China and India, they develop from their native land and have not been influenced by external cultures.

2. The author of the paper interprets some representative ancient Chinese literatures, which contain the algorithms about the solar shadow, in different historical periods, and divides the evolution of calculation on the length of solar shadow into three stages. The first historical period is from the Han Dynasty to the Sui Dynasty, in which the main method is the proportional algorithm; the second historical period is from the end of the Sui Dynasty to the end of the Tang Dynasty, in which the main method is the quadratic interpolation algorithm; and the third period is from Song to Yuan Dynasties, in which the main method is approximation algorithm of polynomial function. The paper analyzes the characteristics of the algorithm on solar shadow in different stages.

3. Based on the historical periods of Indian astronomy that made by David Pingree, an American scholar, the paper deeply analyzes the Indian method on

calculating the length of solar shadow, sums up its characteristics, and discusses the effect of foreign culture on it.

4. Finally, the paper compares the characteristics and accuracy of the algorithm on solar shadow in ancient China and India and discusses the effect of cosmology on the method of measurement and calculation on the length of solar shadow in the two countries. The author of the paper holds that two countries' algorithms are different, Chinese algorithms, which are numerical methods, are gradually improved, but Indian calculating method is scientific after affected by Greek tradition, and the cosmology has exerted influence on the measurement and calculation about the length of solar shadow.

Key words: Calendar, Measurement via Pythagorean theorem, Chongcha, Solar shadow

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得天津师范大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签 名：刘雨芳 日 期：2008年3月

学位论文版权使用授权书

本人完全了解天津师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，并采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编以供查阅和借阅。同意学校向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘。

签 名：刘雨芳 导师签名：徐泽林 日 期：2008年3月

引　　言

0.1 问题的提出

0.1.1. 背景

从公元前后到公元 14 世纪，中国数学先后经历了两汉时期、魏晋南北朝时期和宋元时期三次发展高潮。其解决实际问题的方法，不仅表现在算术和代数方面，同样也反应在几何研究上。测量是传统几何学研究的中心问题之一。秦汉时期就出现了测求太阳高度的问题，三国时期著名的数学家刘徽将此问题一般化，并创立了“重差”法。

中国古代的历法即中国古代数理天文学。许多重要的计算方法，是因为天文学研究和推算被创造发明的。要制定历法，必须首先知道一年季节变化的周期日数，根据日数预报农耕季节。历法上以相邻两个冬至日或两个夏至日之间的天数作为一年的长度。所以要推算一年的长度，必须确定冬至日或夏至日。根据冬至日影最长，夏至日影最短确定冬至或夏至，首先要观测正午日影(即中影)长度变化。中国古代历法学家十分注重晷影的测量，文献中保存了丰富的二至晷影测量的记录，并且在二分二至基础上进一步测算二十四节气时的晷影长度。而对于每日午中晷影长度的测算，更是我国古代历法的重要内容之一。

从东汉《四分历》(85 年）到唐《宣明历》(822 年)，中国古代历法一般是先列出二十四节气晷影长，然后利用插值法建立一次或二次插值公式求出每日午中晷影长。一行（公元 683~727 年）还构造了世界上第一个类似正切函数表的晷影数表。随着测量工具和测算方法的改善，晷影计算方法也得到相应地改进。到唐末边冈的《崇玄历》(892 年)，每日午中晷影计算使用的是相减相乘的列式计算方法，改变了隋唐时期插值算法的模式，开创了宋元历法的多项式函数算法的新格局。

与中国接壤的印度是南亚次大陆上一个历史悠久的文明古国。古代印度包括今天的印度、巴基斯坦和孟加拉国，面积约 410 余万平方公里，是世界文明的发祥地之一，与中国一同厕身于世界四大文明古国之列。印度文明中数学和天文学领域的辉煌成就在整个世界文明中占有十分重要的地位，为人类社会的不断进步做出了卓越贡献。

印度数学的发展可划分为三个重要时期 [1]，河谷文化时期(约公元前 3000~前 1400 年，即雅利安入侵以前的达罗毗荼人时期)、吠陀时期(约公元前 1000~前 400 年）和悉檀多时期（5~12 世纪）。

河谷文化时期，在青铜器和陶器上画有规则线纹、相交圆、方形、三角形等几何图案。可惜刻写在器皿上的象形文字至今未能被解读，故对该时期的数学发展情况也无从了解。

吠陀时期，印度人在设计祭坛形状时曾运用了几何法则，产生于这个时期的绳法经中也包含有大量的数学知识。为了确定农耕和祭祀的日期，这个时期的印度人已经开始有意识地进行天文观察和对日月运行进行研究。佛教、耆那教[①]的一些宗教人士，特别是祭司对宇宙的由来和结构作出了大胆的推测。耆那教天文

①耆那教产生于公元前 6 世纪。“耆那”(Jaina)一词原意为“胜利者”或“修行完成的人”，指那些战胜了情欲而得道的人。信奉此教者都自称“耆那”，故他们信奉的宗教也被称为“耆那教”。目前在印度一些地区仍有人信仰耆那教。

学家在公元前1000多年时就已形成了独特的宇宙观。

从五世纪初开始，印度数学在天文上的应用远比对宗教的作用大。印度数学家首先把自己看成是天文学家，因此印度数学常被当作天文学的“侍女”。

产生于悉檀多时期的《苏利亚历法书》(Sūrya-siddhānta，一般认为成书时间不早于公元490年，不迟于公元1091年）涉及行星的运行和位置、日月食、宇宙论、时间等测算，以及子午线及方向的测定等内容，它是印度古代历书中最重要的一部。

印度数学家和天文学家阿耶波多（公元476~550年）所著的《阿耶波多历法书》(Āryabhaṭṭīya，或译作《圣使历数书》，著于公元499年)，是印度第一部系统化的天文历算学著作。阿耶波多是印度第一个提出大地为球形的天文学家，并认为这个球形的大地围绕自己的轴而旋转。他还提到日食和月食，并认为月食是由于地球的阴影遮住了月亮。他提出的以数学作为天文学研究基础的科学思想，对印度后世天文学的发展产生了深远影响。波什迦罗二世（Bhaskara Ⅱ，公元1113或1114~1193年）就是在他的科学思想基础上进行天文研究的。

由于多次受境外文明的侵占，人们对印度历史的分期尚不统一，对印度天文学的分期也没能达成一致。目前，学者们普遍接受的是美国学者David Pingree于1978年出版的《印度数理天文学史》[2]中对印度天文学的分期。该书清楚概括了印度天文发展的全貌，将印度天文学分为五个时期：

(1) 吠陀时期(约公元前1000~前400年)。这个时期没有历法体系，没有专门、独立的天文历法著作，有些材料散落在吠陀文献中，出现了印度27宿（后来采用28宿）体系的全部名称。

(2) 巴比伦影响时期(约公元前400~公元200年)。这个时期的显著特点是大量的巴比伦天文学知识，天文单位、天文仪器及计算日长、晷影长度的折线函数[①]传入印度。

(3) 希腊、巴比伦天文影响并存时期(约公元200~400年)。这个时期的印度数理天文学中混杂着希腊、巴比伦的天文学知识。如回归年的长度和希腊的一样，而对行星运动的描述和巴比伦天文理论及其一致。

(4) 希腊天文影响时期(约公元400~1600年)。这个时期长达1000年以上，一般认为是印度古典天文学的全盛时期。该时期传入了真正的希腊天文学，出现了许多数学天文学家、天文著作和不同的天文学派。其中最有影响的五个学派是：阿耶学派（Arya-paksa，公元500年后)、夜半学派（Ardharatrika-paksa，公元500年后)、梵摩学派(Brahma-paksa，公元500年)、太阳学派（Saura-paksa，约公元800年）和象头学派（Ganesa-paksa，约公元1500年)。

(5) 伊斯兰影响时期(约公元1600~1800年)。这个时期的印度天文学受到伊斯兰文化的影响，出现了若干从伊斯兰人那里学习托勒密天文体系的印度人。

在印度天文学中，测量法也十分发达。晷影测算是印度历法的一个重要组成部分，也是印度数学的一个重要分支。印度古代数理天文学受外来文化影响较深，这在晷影测量法上表现的尤为明显：一方面保持着东方的特色，一方面也带有希腊天文学的痕迹。

古代中印的文化交流源远流长，西汉汉武帝时已有确切的中印贸易交通的史料记载。两国当时的交流对于我国汉民族和西北各民族及西亚、东亚、南亚各国的经济文化交流具有极大的促进作用。在孔雀王朝阿育王统治时，国家大力提倡

---

① 折线函数（linear zigzag function）是一种线性周期函数，在塞琉古王朝时期的巴比伦数理天文学中大放异彩，几乎被用来处理一切课题，而且能达到非常精确的程度。

和扶持佛教，促使佛教向印度各地以及周边国家传播，从中国西北地区传入中国内地。从现有的史料分析，佛教在西汉末年已传入中国内地，到东汉以后逐渐在民间流行。印度天文学知识也随佛教传入中国。《隋书·经籍志》中已经有印度天文、历算类书名的记载，唐朝是印度天文学传入中国的鼎盛时期。

0.1.2. 研究的必要性

天文学是一门观测科学，在古代中国与印度的传统文化、社会生活、政治制度中都占有非常重要的地位。天文学史是研究人类认识宇宙的历史、探索天文学发生和发展规律的天文学分支学科，是科学技术史的组成部分。

天文观测包括观察、测定和量算，是几何学的主要起源之一，古代勾股测量问题随着天文观测的发展而产生。天文测算是天文学的基础，古代天文学随着天文测算的进步而不断地发展。

生活在地球上的人们，看到太阳的位置变化，自然会产生测量太阳高度、探索太阳运行规律等想法。为了确定冬至或夏至日，要观测正午日影(即中影)长度变化。但由于天文观测工具的限制，早期人们只能借助简单的晷表和人眼对太阳高度进行测量，勾股测量法随之产生。随着天文观测资料的积累、测量工具和仪器的出现，及人们思维的发展，晷影测量法逐渐改进，人们开始通过构造数学方法计算晷影的长度变化，天文学理论与方法也随之形成体系，并且逐渐得到完善。

中国传统历法的制定是把晷影测量和历法基本数据的确定与校核直接联系起来，并把晷影测量视为历法真伪优劣的最主要标准。相应地，古代印度天文学家也一直关注晷影长度的计算，在外来文化的影响下形成了一定的体系。这些共同之处促使国内外科学史家们对中国与印度数理天文学之间的交流与影响问题的关注。通过对中印两国在天文学史方面的比较研究，寻找两国古代科学发展的异同点，为其文化交流史研究提供一定的依据。其中对中印晷影测算方法的分析比较，可从一个侧面了解东方古代数理天文学的特色。

近年来，虽然我国学者对古代中印数理天文学的比较研究成果逐渐增多，但从天文测量法以及晷影测量的数学处理方法的角度进行比较的研究还未见到。所以本文拟以此为中心进行比较研究。本文所涉内容的时间主要限定在“古代”，即13~14世纪以前，也即中国的宋元时期以前，印度的希腊天文影响时期以前。因为这段时期以前，我国的数理天文学主要是在自己的土地上独立发展的，受外来天文学影响较少。

0.2 国内外相关研究情况

关于我国古代天文测量中的勾股测量法，《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《数书九章》等著作中都有详细的记载。从三国时代赵爽、刘徽，到隋、唐、宋元时期的李淳风、甄鸾、秦九韶、朱世杰、杨辉等人的研究成果在中国古代测量史上都是十分珍贵的资料。冯立升[①]的《中国古代测量学史》全面介绍了我们古代测量科学在各个时期的发展情况，其中包括对上述文献中勾股测量问题的论述。以严敦杰[②]、陈遵妫[③]、陈美东[④]及曲安京[⑤]等为代表的学者对古代数理天文学研究做了大量工作，并取得了丰硕成果。其中包括陈美东的《崇玄、仪天、

[①] 冯立升. 中国古代测量学史[M]. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1995

[②] 严敦杰. 中国古代数理天文学的特点. 科技史文集[M](第1辑) 上海：上海科学技术出版社，1978

[③] 陈遵妫. 中国天文学史[M]. 上海：上海人民出版社， 1984

[④] 陈美东. 古历新探[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1995

[⑤] 曲安京，纪志刚，王荣彬. 中国古代数理天文学探析[M]. 西安：西北大学出版社，1994

崇天三历晷长计算及三次内插法的应用》[1]、曲安京的《中国古代历法中的三次内插法》[2]、《<大衍历>晷影差分表的重构》[3]、纪志刚的《麟德历晷影计算方法研究》[4]等。

在古代印度数理天文学史方面，美国学者 David Pingree 的著作《History of Mathematical Astronomy in India》对印度天文学史论述和评价的比较详尽。日本学者矢野道雄[5][6][7][8]、大桥由纪夫[9]对印度天文学史有许多系统研究。我国学者对古代印度数理天文学的研究并不多，主要有，胡铁珠[10]对《苏利亚历》和《大衍历》中行星运动理论进行了比较研究。袁敏在其博士论文《古代中印数理天文学比较研究》[11]中对印度正弦表及其对中国的影响、中印岁差认识进行比较研究，并对中国古代历法中的九服晷影算法、中国古代漏刻算法等一些专题进行了研究。唐泉在其博士论文《希腊、印度与中国传统视差理论研究》[12]中系统而全面地分析了古代印度和中国的视差算法的原理及精度和历史沿革，对正确理解不同民族的日食算法以及日食预报精度起了重要的理论和现实意义。江晓原和钮卫星等人在中印天文学的交流和传播方面有过研究。江晓原的《天学真原》[13]、江晓原、纽卫星的《天文西学东渐集》[14]、纽卫星的《西望梵天——汉译佛经中的天文学源流》[15]等著作中都有这方面的论述。

在关于中印天文测量方法中的勾股测量问题的比较上，只有燕学敏在其博士论文《中印古代几何学的比较研究》[16]中有简单叙述。我国的学者在古代印度数理天文学中的晷影测量，特别是中印晷影测量法比较的问题上很少涉及。而以晷影的勾股测量、历法中的晷影计算为线索，对中印天文测量法进行系统比较的研究至今还未见到。

0.3 本文的研究目标

前人的研究对我们进一步全面考察、分析印度和中国文明的天文测量方法奠定了坚实的基础。在前人研究的基础上，笔者通过系统解读中印数学文献与历法资料，对中印数学、天文历法著作中晷影测算方法进行整理和分析，讨论古代中国和印度从晷影测量发展起来的勾股测量、晷影长度数学处理方法的历史发展、文化来源、方法特征，分析它们之间的联系，为今后全面开展中印数理天文学比

---

[1] 陈美东.崇玄、仪天、崇天三历晷长计算及三次内插法的应用.自然科学史研究[J],第 4 卷 1985(3), 218-228

[2] 曲安京．中国古代历法中的三次内插法．自然科学史研究[J]，第 15 卷 1996 (2)， 131-143

[3] 曲安京．《大衍历》晷影差分表的重构．自然科学史研究[J]，第 16 卷 1997 (3) ，233-244

[4] 纪志刚．麟德历晷影计算方法研究．自然科学史研究[J]，第 13 卷 1994 (4) ，316-325

[5] 矢野道雄．インドの天文学と宇宙論．Asian Cultural Studies 13[J]，Special Issue, 2004，7-14

[6] 矢野道雄．インド古典天文学書の研究と伝統暦プログラムの改良.文部省科学研究費補助金特定領域研究(A).古典学の再構築第I期公募研究論文集[C]，2001(8)，165-173

[7] 矢野道雄．'Sulbasutra とGan. ita'sastra との関係.印度学仏教学研究[J]，第28巻 1980(3)，892-895

[8] 矢野道雄．古代インドの暦法.科学史研究[J]，第15 巻，1976 (6)，93-98.

[9] 大橋由紀夫.インドの伝統天文学 -特に観測天文学史について(I)(II)(III),《天文月報》[J], 91(8) (9) (10), 358-364

[10] 胡铁珠．大衍历与苏利亚历的五星运动计算．自然科学史研究[J]，第 9 卷，1990(3)，219-231

[11] 袁敏．古代中印数理天文学比较研究．西北大学博士学位论文[D]，2001

[12] 唐泉．希腊、印度与中国传统视差理论研究．西北大学博士学位论文[D]，2006

[13] 江晓原．天学真原[M]．沈阳：辽宁教育出版社，1991

[14] 江晓原，纽卫星．天文西学东渐集[M]．上海：上海书店出版社，2001

[15] 纽卫星．西望梵天——汉译佛经中的天文学源流[M]．上海：上海交通大学出版社，2004

[16] 燕学敏．中印古代几何学的比较研究．西北大学博士毕业论文[D]，2006

较研究打下必要的基础，这也是笔者对中印天文测量方法进行比较研究的主要目的。

0.4 本文的研究方法

本文主要采用比较法，从分析和解读中印两国原始文献资料入手，以具体的史料内容作为比较研究的基础，以古代天文测量体系为比较研究的分类依据，来探讨古代中国和印度在天文测量方法上的异同。本文还将充分利用二次文献或三次文献进行逻辑分析、归纳总结，尽量避免只是对文献资料进行简单的罗列和整理。由于古印度使用梵文，作者尚无法直接阅读梵文原典，所以只能借助英译本和日译本。

另外，本文还遵循刘洁民[3]提出的中外古代比较数学史研究的可比性、古今区分、甲乙区分、横向比较和互为参照系等比较原则，对有关主题在不同体系中的发展水平做出尽可能客观的评价。

本文也借助现代天文学知识与天文学软件，对古代中印晷影测算方法的科学背景与科学性进行深入分析。

第一章 古代中印勾股测望术之比较

古代中国和印度的数学都重视解决实际问题，因此测量在几何学研究中成为一个中心问题。量天测地是两国古代文明中最基本的科学和社会活动。勾股测量是勾股定理实际应用的体现，最早的勾股术就是量天测地术。“量天”主要是对太阳高度和晷影长度的测量。古代中印的许多数学著作中都有利用勾股定理“量天”的问题，中国还将“量天”发展到了一般的勾股测量。

随着天文观测、工程建筑等实际问题的需要，两国的勾股测量水平不断提高并逐渐形成了自己独特的测量方法与理论体系。本章概述两国由测日高、晷影等“量天”问题发展起来的勾股测量术，并就其方法特点及演变历史进行比较。

1.1 中国古代勾股测望术的演变——从勾股比例论到重差术

中国古代测量术的起源可追溯到考古时代的天文、土地丈量等活动，其中天文活动主要是测日，包括测量日高和晷影长度。在此基础上发展起来的中国古代几何学没有涉及角的概念与运算，而只考虑线段之间的关系。测望时通常要借助“矩”、“表”等测量工具。对那些不能直接量测的距离，往往通过可量测的量将其推求出来。

矩为直角曲尺，不但可以画直角、方形和圆形，还可以用来进行高、深、远的直接或间接测量。《周髀算经》卷上商高答周公问时讲到的“用矩之道”称：“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。”意思是说，让矩水平放置可以测定铅垂方向，让矩仰立可以测望高度，让矩覆立可以测望深度，让矩平卧可以测量远近距离，让矩环绕可以画圆，让两矩相合可构成方形[4]（如图1.1.1）。

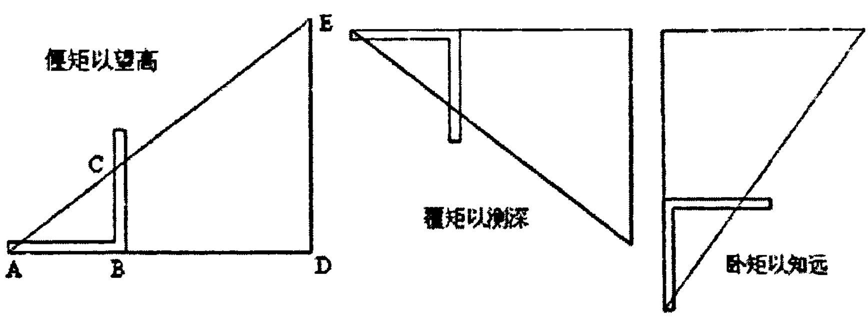


图 1.1.1

以“偃矩以望高”为例说明用矩测量的方法（其它情况类似）：

如图1.1.1，设AB、BC分别为矩的一边，AD为可测量的距离，求E点到D点的距离，即DE的值。由相似勾股形对应边成比例的性质可知$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$，从而求得$E$点的高度$DE=\frac{BC}{AB}AD$。

“表”又称为“髀（bì）”、“竿”、“臬（niè）”、“槷（niè）”或“椑（bēi）”等，都是标杆的意思，可用来测量高、远。我国古代的“表”一般取

八尺长[①]，常用它测日影，即通常说的“立杆测影”。《周髀算经》卷上荣方与陈子的对话提到了用“周髀”测日问题：

荣方曰：“周髀者何？”陈子曰：“古时天子治周，此数望之从周，故曰周髀。髀者，表也。……周髀长八尺，髀者，股也，正晷者，勾也。”[5]

上面的“周髀”测日即单表进行勾股测量问题。如图1.1.2所示，在已知太阳高度ST 的情况下，再知髀AB、晷影长BC，便可根据相似三角形对应边成比例推求髀与太阳的距离TB。

中国古代的许多数学著作中都涉及勾股测量问题，且渐趋复杂，由“单表测量”发展到“双表测量”，即由简单的勾股比例论发展到后来的重差术。

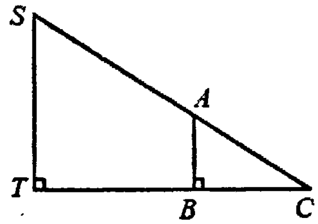


图1.1.2

《九章算术》“勾股”章中有三问为用“表”进行勾股测望的问题，受测量工具和测量目的的限制，这些测量都是在勾股形内借助相似勾股形对应边成比例完成的。

《周髀算经》的测日之高远是利用重差法的勾股测量问题。刘徽的《海岛算经》在测日之高远的基础上将重差法发展为对海岛、山谷等一般高深物体的测量，把重差法发展成著名的重差术。《海岛算经》展示了中国古代勾股测望术从勾股比例论到重差术的演变过程。

唐代李淳风通过相似形的性质把斜面转化为平面，解决了在斜面上测高、深、广、远问题，使刘徽的重差理论得到进一步推广。

南宋秦九韶《数书九章》中的测望类问题依旧借助“表”、“矩”，但在题目设计上更加复杂，并广泛涉及勾股比例论和重差术，将《九章算术》和《海岛算经》的勾股测望术发扬广大。

1.1.1 《九章算术》中的勾股测量问题

《九章算术》成书于西汉末或东汉初期，是我国流传至今最早、最重要的一部数学经典著作。全书包括方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程 、勾股，其中的“勾股”章是中国古代最早的系统的勾股理论。全章二十四问中，第21至23问分别为立四表测远、立木测高和立木测深的勾股测量问题，用到了勾股比例论。

勾股比例论即不失本率原则，出自《九章算术》“勾股章”第15问后的刘徽注：“幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，而其相与之势不失本率也”。如图1.1.3所示，即$OE:DE:DO=BG:OG:OB=BA:DA:DB$。

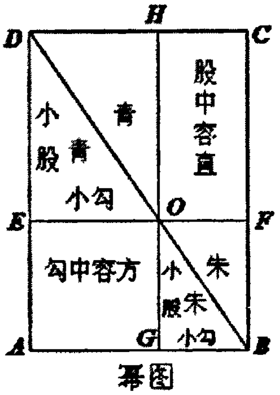
宋代数学家杨辉在《续古摘奇算法》（1275年）中绘制了与刘徽的幂图[②]类似的 “源图”，并用等积原理解释了刘徽的勾股比例论的理论来源：

直田之长名股，其阔名勾，于两隅角斜界一线，其名弦。弦之内外分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同。[6]

---

① 不同朝代“尺”的长度不同，如：夏朝的一尺合 24.88 厘米，商、唐、五代和明朝一尺都合 31.10 厘米，周朝一尺合 19.91 厘米，秦、汉一尺合 27.65 厘米，魏晋时期一尺合 24.12 厘米，宋、元时期一尺合 30.72 厘米，明朝一尺合 32.00 厘米等。详见吴承洛．中国度量衡史．北京：商务印书馆，1990，64-66

② “幂图”即以勾股为边的长方形图，是刘徽勾股比例理论的推算依据，原图已失传。



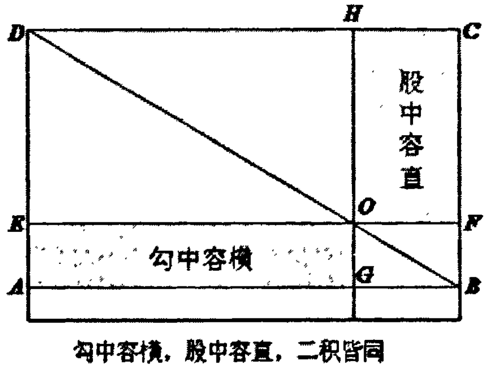


图 1.1.3　　　　图 1.1.4

如图1.1.4所示，“勾中容横”、“股中容直”分别指矩形$ABCD$对角线划分的矩形$AGOE$和矩形$OFCH$。“二积皆同”即：$\triangle DAB$和$\triangle BCD$分别为矩形$ABCD$对角线划分的大勾股形，其面积相等，从中分别减去$\triangle OGB$、$\triangle DEO$和$\triangle OFB$、$\triangle DHO$，剩下的矩形$AGOE$和矩形$OFCH$的面积仍相等，

即：$DE \times GB = OG \times EO$；

所以$\dfrac{DE}{EO} = \dfrac{OG}{GB}$。

由　$DA=GO+DE$，$AB=EO+GB$

得　$EO:DE:DO=GB:OG:OB=AB:DA:DB$，即勾股比例论。

勾股比例论与等积原理显然是等价的。

《九章算术》第21问为立表测远的问题，术文如下：

今有木去人不知远近。立四表相去各一丈，令左两表与所望参相直。从后右表望之入前右表三寸。问木去人几何。

答曰：三十三丈三尺三寸、少半寸。

术曰：令一丈自乘为实，以三寸为法，实如法而一。

刘徽注：此以入前右表三寸为句率，右两表相去一丈为股率，左右两表相去一丈为见句，所问木去人者，见句之于右行。股率当乘见句，此二率俱一丈，故曰自乘之。以三寸为法，实如法得一。[7]

立四表望木可以确定如图 1.1.5 的“股中容直”，从而由勾股比例论，有：

$$\frac{\text{入表}}{\text{前后表间}} = \frac{\text{左右表间}}{\text{人去木}}$$

得　$$\text{人去木} = \frac{\text{左右表间} \times \text{前后表间}}{\text{入表}}。$$

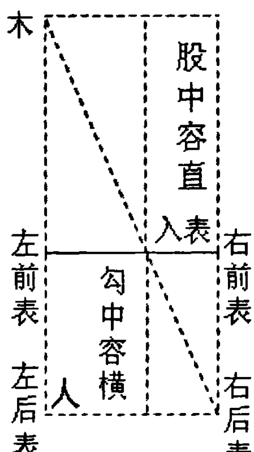


图1.1.5

“勾股”章第 22 问为立木测山高问题，术文如下：

今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木东三里，望木末适与山峰斜平。人目高七尺。问山高几何。

答曰：一百六十四丈九尺六寸太半寸。

术曰：置木高，减人目高七尺，余以乘五十三里为实。以人去木三里为法。实如法而一，所得加木高，即山高。

刘徽注：此以木高减人目高七尺，余有八丈八尺为句率，去人目三里为股率，山去木五十三里为见股。以木高为见股，求句加人目之高，故为山高也。[8]

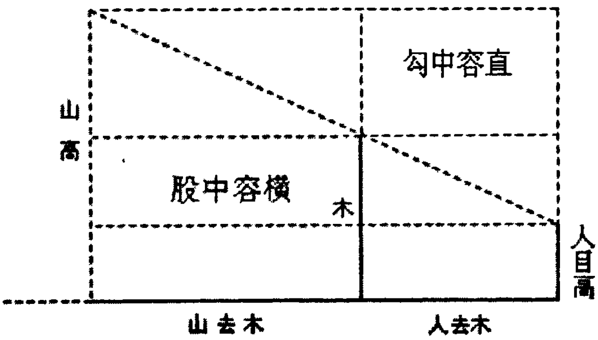


图 1.1.6

此题与《周髀算经》中的"周髀"测日一样，也是利用单表的测量问题。题中的"木"相当于"表"，如图 1.1.6 形成了"股中容横"，从而得到：

$$\frac{山高-木高}{山去木}=\frac{木高-人目高}{人去木}$$

$$山高=\frac{山去木\times(木高-人目高)}{人去木}+木高$$

"勾股"章第 23 问为立木测深度的问题，术文如下：

今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四尺。问井深几何。

答曰：五丈七尺五寸。

术曰：置井径五尺，以入径四寸减之，余以乘立木五尺为实，以入径四寸为法，实如法得一。

刘徽注：此以入径四寸为句率，立木五尺为股率，井径四尺六寸为见句，问井深者，见句之股也。[9]

此问为立表测井深问题。立木井上，便在以井径长和木末至水岸的距离为边的矩形中，形成了如图 1.1.7 的"股中容直"，从而得到：

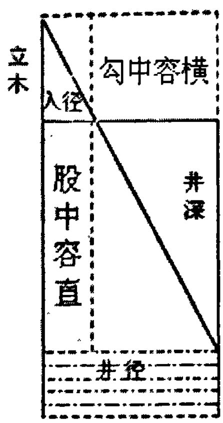


图 1.1.7

$$\frac{立木}{入径}=\frac{井深}{井径-入径},$$

得 $$井深=\frac{立木\times(井径-入径)}{入径}。$$

《九章算术》中的勾股测量问题是为了构造"股中容直"、"股中容横"而设计的，其方法在实际测量中不可能使用。人、木之间的距离可以直接测量，没必要采用第 21 问"立四表"的方法，那样不但使问题变得繁琐，还会增加测量误差。现实中"木高"与"山高"相差悬殊、通过在井上立木测井深，比直接测量难度大很多，所以《九章算术》构造"股中容直"、"股中容横"推导测量结果，

是一种理论方法，其实际应用性不强。

1.1.2 从日高术到重差术

“重差”一词，初见于《周礼·地官保氏》“九数”之郑玄注，张衡在《灵宪》中也曾提到。但现在所谓的重差术，是指刘徽《海岛算经》中利用多重勾股关系以求高远的方法。[10]重差法是利用两根等高的晷表计算日之高远的勾股测量方法，因计算公式中通常出现两个差式而得名。重差法常用于测量不可到达的极远距离，对于复杂情况还需要“重表”、“累矩”等多次测量。

《淮南子•天文训》记载了西周时期利用物体的影长间接测量太阳高度的方法，其原理为：影与表相等时，高与远也相等。进而通过立表测影求得太阳高度，应用的是相似勾股形对应边成比例，没有反映出重差思想。

同样记述西周天文测量方法的《周髀算经》“日高术”已经有了“重差”的思想。赵爽注《周髀算经》曾绘“日高图”（已失传），由此可以推测赵爽已经掌握了重差法。

（1）《周髀算经》中的日高术

《周髀算经》在假定天地平行的前提下给出了求太阳高度（距周地垂直距离）的测量方法——日高术：

此皆算术之所及。……此亦望远起高之术。……

日中立竿无景。此一者天道之数。周髀长八尺夏至之日晷一尺六寸。髀者股也。正晷者勾也。正南千里勾一尺五寸。正北千里勾一尺七寸。日益表南晷日益长。……故以勾为首。以髀为股。从髀至日下六万里。而髀无景。从此以上至日则八万里。……[11]

这段文字反映的是用两表测日影以求日高、日远的问题。如图1.1.8所示，DE、FG为两等高的表，其高为 h，表间距 $EG=\rho$，影差 $GI-EH=d$。术文相当于给出了公式：

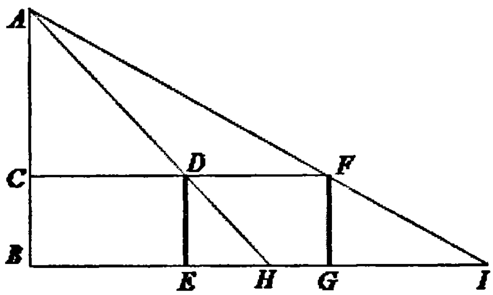


图 1.1.8

$$日高\ AB=AC+h=\frac{h\cdot\rho}{d}+h$$

文中虽未出现“重差”二字，但用到了重差法。《周髀算经》日高术应该是最早的重差术。

赵爽注《周髀算经》时绘“日高图”还附有“日高图注”：

黄甲与黄乙其实正等。以表高乘两表相去为黄甲之实，以景差为黄乙之广，而一所得则变得黄乙之袤，上与日齐。按图当加表高。今言八万里者，从表以上复加之。青丙与青己其实亦等；黄甲与青丙相连，黄乙与青己相连，其实亦等，皆以景差为广。[12]

“日高图注”是对“日高图”的证明，采用的也是杨辉的等积原理。原日高图已经失传，现传本“日高图”是戴震补绘的，但该图与“日高图注”不相符。后来徐光启、三上义夫、李俨、钱宝琮、吴文俊等都曾试图将其复原。现在比较被大家接受的，是吴文俊的复原图[13]（见图 1.1.9）。其中 A 点为太阳，DE、FG 为两等高的表。依注文有：

$$日高=\frac{表高\times表间}{影差}+表高$$

即 $$AB=\frac{DE\times EG}{GI-EH}+DE$$

$$日去表远=\frac{前去表\times表间}{影差}$$

即 $$BE=\frac{EH\times EG}{GI-EH}$$

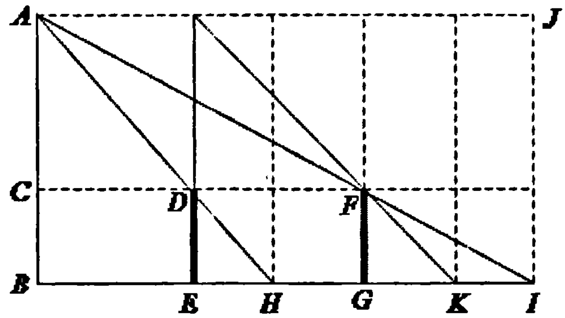


图 1.1.9

为求太阳高度，先假定大地为平面，然后立两表，从而产生影差与表间距，这可以说是重差术最早的应用。因此早期的人们常常把重差术称为日高术，今天的学者则喜欢将重差术中最基本的一组公式称为日高术。[14]但是实际测量中明显的影差是不可能测出的，因为表间相对于表去日的距离小得近乎于零，所以《周髀算经》日高术也只是一种理论方法。

（2）《海岛算经》中的重差理论

《周髀算经》日高术虽然用到了重差法，但术文并没有提及“重差”。首先明确提出重差术的是三国时期的刘徽。刘徽在总结了前人使用重差法的基础上给出了重差术的定义和方法，这在他的《九章算术注序》中有明确说明：

周官•大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中。说云：南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。按九章，立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术，犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣，乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差句股，则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺，南北各尽平地，同日度其正中之景，以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景，乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为勾、股，为之求弦，即日去人也。[15]

刘徽进一步指出，重差术不仅用于测日高，而且还可以用于其它测量问题：

虽夫圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美，辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下。度高者，重表；测深者，累矩；孤离者，三望；离而又旁求者，四望。[16]

“缀于句股之下”的“重差”章，在唐以后被单列出来，因第一题是测海岛问题而得名《海岛算经》。现传本《海岛算经》共九问，都是利用重差术来解决间接的测量问题，包括三种基本形式：重表法（立两个等高的表）、累矩法（用两个矩代替“表”）和连索法（用绳和“表”），问题有“一望”、“二望”、“三望”和“四望”四类。

《海岛算经》第一问、第二问、和第四问代表了古代用矩进行勾股测量的三个基本公式，其余六问可从这三个基本公式得出。第一问为重表两望问题，术文如下[17]：

今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直，从前

表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何？

答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。

术曰：以表高乘表间为实。相多为法除之。所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之。所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法，除之，得岛去表里数。

若把题目中的“海岛”换成“日”、“岛高”换成“日高”，则与《周髀算经》中的日高术问题一样，且用了“重表”和“重差法”，所以二者实质是一样的。

得 $$岛高=\frac{表高\times表间}{相多}+表高；$$

$$前表去岛=\frac{表间\times前表行}{相多}。$$

按照“事类相推各有攸归，故枝条虽分，而同本干者，知发其一端而已”[18]的思想，刘徽在《海岛算经》第一问首先阐明了重差基本公式，然后以此为发端，结合等积原理及勾股比例论求出其后各问的答数。

《海岛算经》第二问为重表三望问题。术文如下：

今有望松生山上，不知高下。立两表齐，高二丈，前后相去五十步，令后表与前表参相直。从前表却行七步四尺，薄地遥望松末，与表端参合。又望松本，入表二尺八寸。复从后表却行八步五尺，薄地遥望松末，亦与表端参合。问松高及山去表各几何？

答曰：松高一十二丈二尺八寸；山去表一里二十八步、七分步之四。

术曰：以入表乘表间为实，相多为法，除之，加入表即得松高。求表去山远近者，置表间以前表却行乘之为实，相多为法，除之，得山去表。[19]

如图 1.1.10：AB 为松高（A 为松末，B 为松本），BC 为山高，DE 为前表（D 为表端），FG 为后表（F 为表端），EH 为前表却行，GI 为后表却行，H 为薄地，DJ 为入表，CE 为山去表 ，EG 为表间，$GI\text{-}EH$ 为相多，从后表却行点 I 薄地望松本入后表于 K 点。该问可由第一问推导得出。利用勾股比例论可以导出：

$$\frac{KG}{BC}=\frac{IG}{IC}=\frac{FG}{AC}=\frac{DE}{AC}=\frac{EH}{CH}=\frac{JE}{BC}$$

故 $KG=JE$

由 DE、FG 两表用重差公式可得

$$AC=\frac{EG\times DE}{GI-EH}+DE$$

由 JE、KG 两表用重差公式可得

$$BC=\frac{EG\times JE}{GI-EH}+JE$$

两式相减得

$$松高=\frac{表间\times入表}{相多}+入表，$$

即

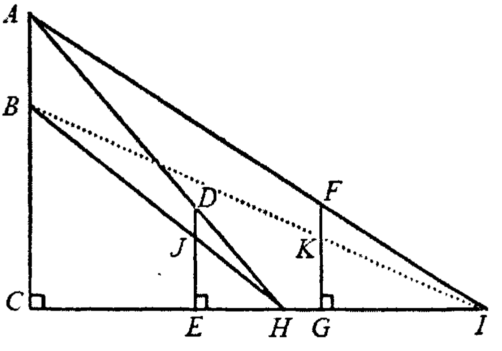


图 1.1.10

$$AB = AC - BC = \frac{EG \times DJ}{GI - EH} + DJ;$$

$$表去山 = \frac{表间 \times 前表却行}{相多},$$

即 $$CE = \frac{EG \times EH}{GI - EH}。$$

《海岛算经》第四问为累矩两望问题，术文如下：

今有望深谷，偃矩岸上，令勾高六尺。从勾端望谷底，入下股九尺一寸。又设重矩于上，其矩间相去三丈。更从勺端望谷底，入上股八尺五寸。问谷深几何？

答曰：四十一丈九尺。

术曰：置矩间以上股乘之为实，上、下股相减余为法，除之，所得以勾高减之，即得谷深。[20]

术文根据等积原理，证明如下。

如图 1.1.11 所示，*FG* 为谷底，*AE* 为谷深，*ABD* 为“偃矩岸上”之矩（*B* 为勾端 *AB* 为下勾 *AD* 为下股），*A'B'C'* 为重矩（*B'*为勾端，*A'B'* 为上勾 *A'D'* 为上股），*AA'*=*BB'*为矩间。

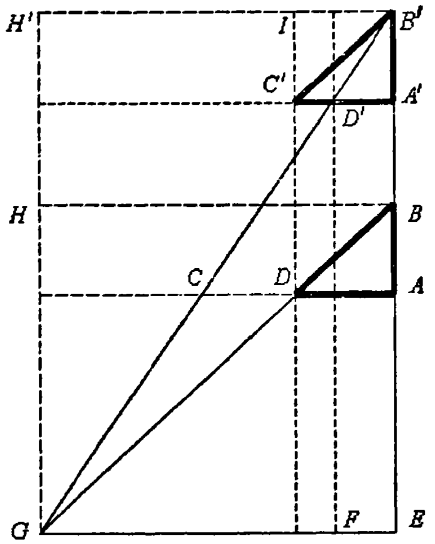


图 1.1.11

按等积原理，

从□*B'G* 与 *D'* 得□*D'H'*= □*D'E*。

从□*BG* 与 *D* 得□*DH*=□*DE*

两式相减得　□*D'I*=□*D'A*– □*DF*

□*D'I*=□*A'I*–□*B'D'*= □*BD*–□*B'D'*

=勾高×(下股–上股)

□*D'A*=矩间×上股

□*DF*= □*DE*–□*AF*=谷深×(下股–上股)

所以　谷深×(下股–上股)

=矩间×上股–勾高×(下股–上股)

$$谷深 = \frac{矩间 \times 上股}{下股 - 上股} - 勾高$$

即 $$AE = \frac{A'A \times D'A'}{DA - D'A'} - AB$$

《海岛算经》第三问为连索两望问题，可从第一问推衍来；第五问的累矩三望可由第二问和第四问推衍来；第六问的连索三望可由第二问和第三问推来；第七问累矩四望可由第三问推来；第八问和第九问分别为累矩三望、四望问题都可由第二问推来。[21]

关于《海岛算经》各公式的造术原理，李继闵[22]认为，刘徽重差术的理论依据应该是勾股比例论，并通过引入表间、影差，用到了现在的差比定理：$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，则$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$。按吴文俊[23]的观点，《海岛算经》复原的依据是等积原理和勾股比例论的反复运用，但通过比例关系式的某些运算变换，得出最后公式的方法在我国古代文献中很少出现。所以“等积定理”等运算应尽量避免使用。

除了表、矩，《海岛算经》中的测量还用到了绳索，进行测量的范围比以前

增加了。刘徽把测量日之高远的重差术应用到其它高、远量的测量，是对重差术的继承和发展。

1.1.3 李淳风的斜面重差术

前面提到的“重差”问题都是在以基准面为水平面的前提下进行测算的。唐代李淳风在对《周髀算经》“日高术”给出注释的同时，指出了传统地平观念的错误，他认为“然则天无别体，用日以为高下，术既随平而迁，高下从何而出？语术相违，是为大失。[24]”于是由“地有高下表望不同”，造了“后六术乃穷其实”，其中第五术为平面重差问题，第六术指出外衡不合地平，从而例证了传统地平观的错误。前四术（前下术、后下术、邪下术、邪上术）是李淳风针对斜面大地设计的斜面重差法。

前下术为前表低于后表、由上而下的测望，后下术为后表低于前表、由下而上的测望。其术文如下：

第一后高前下术。高为勾表间为弦。后复景为所求率，表为所有率，以勾为所有数。所得益股为定间。第二后下术。以其所下为勾表间为弦。置其所下以景乘表除所得减股余为定间。[25]

如图 1.1.12 和图 1.1.13，A 为太阳，EF、$G'H'$为不同高度立的两表，其水平高度差为 $H'J$（图 1.1.13 为 FJ），FC、$H'D'$分别为水平影长，两表在斜面的间距为 FH'（即弦），在$\triangle FJH'$ 中，FJ 为股，傅大为首先指出定间即“把斜面上的‘表间’变换成平面上的新表间的量”[26]，即图中的 FH。

如图 1.1.12 所示，李淳风将表 $G'H'$ 移至 GH，通过相似勾股形 $G'JD$ 和 $G'H'D'$（图 1.1.13 中为 GND'和 $G'H'D'$）、全等勾股形 $G'H'D'$ 和 GHD 对应边的比例关系，求出 $FH=FJ+JH$(图 1.1.13 中为 $FH=JH'-NH'$)的值，把斜面重差转化为了平面重差问题，再由重差基本公式求得日高 AB 和表距日的距离 BC：

$$AB=\frac{EF\times FH}{H'D'-FC}+EF\,,\quad BC=\frac{FC\times FH}{H'D'-FC}+EF$$

其中“前下术”求得的 $FH=FJ+\dfrac{H'J\cdot H'D'}{G'H'}$，“后下术”求得的 $FH=JH'-\dfrac{FJ\cdot H'D'}{G'H'}$。

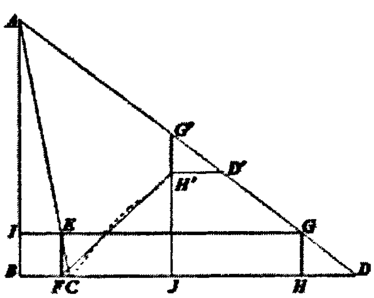


图 1.1.12 前下术

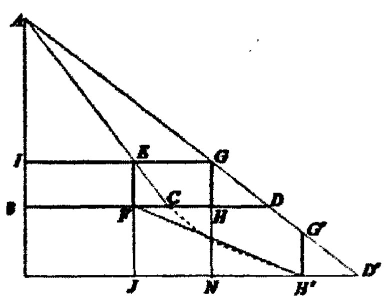


图 1.1.13 前上术

李淳风的“邪下术”和“邪上术”适用于坡度不变的斜面。自上而下的测望用邪下术，自下而上的测望用邪上术。术文如下：

第三，邪下术。依其北高之率，高其勾景，令与地势隆杀相似，余同平法。

假令髀邪下而南，其邪亦同，不须别望。但弦短与勾股不得相应。其南里数亦随地势不得校平。平则促，若用此术，但得南望。若北望者，即用勾景南下之术，当北高之地。第四邪上术。依其后下之率，下其勾景，此谓回望北极，以为高远者，望去取差，亦同南望。此术弦长亦与勾股不得相应。唯得北望，不得南望。若南望者，即用勾景北高之术。[27]

术文字数虽然较多，但除斜面影长代替了原来的平面影长外，其余均同前面的重差基本公式。[28]如图 1. 1. 14 的邪下术，A 为太阳，LK 为斜面，LO 为绝对水平面，等长的两表 DF 与 HJ 垂直于 LO，表间为 FJ，影差为 $JK-FG$ 。

日高 $AC=\dfrac{(FJ\times DF)}{(JK-FG)}+DF$，日远 $CF=\dfrac{(FJ\times FG)}{(JK-FG)}$。

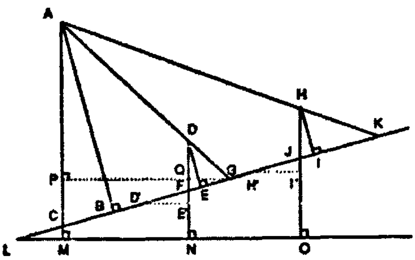


图 1.1.14 邪下术

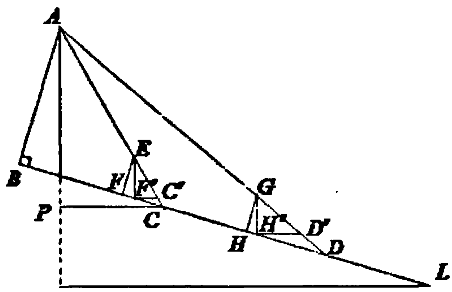


图 1.1.15 邪上术

李淳风将重差理论应用到斜面的勾股测量问题中，是对重差术的发展。为了确保得到水平影长，“前下术”和“后下术”都要求两个测点的一端应有一小块平地，因此它们适于梯状地形的勾股测量。[29]而“邪下术”和“邪上术”适于斜面坡度始终不变的测量，所以“前下术”和“后下术”在实际测量中的应用与推广价值要大于“邪下术”和“邪上术”。

在李淳风的斜面重差术问题上，许多学者都进行过研究。傅大为①首先给出了“定间”的正确解释，从而开启了人们研究斜面重差术的大门。中国古代数学中的许多法、术都是一些程序化的算法，它们的应用被概括成相应的正则化模型。刘钝②认为斜面重差术是正则化模型的一个出色范例。曲安京③认为李淳风等人发展了刘徽的重差理论，在理论上，接近完善了盖天说宇宙观的数学模型。

1.1.4 《数书九章》中的测望术

秦九韶的《数书九章》（1247 年，原名《数术大略》）出现在《九章算术》之后约 1200 年间，是一部综合了当时数学成就的经典著作，是中国数学发展中的一个高峰。该书分为九类：大衍类、天时类、田域类、测望类、赋役类、钱谷类、营建类、军旅类、市易类。其中测望类的“望山高远”、“临台测水”、“徒岸测水”、“表望方城”、“望敌远近”、“表望浮图”六个问题和军旅类 “望知敌众”都是勾股测量问题，仍然用的是勾股比例论和重差术，但方法与前人有所不同，

①傅大为. 论〈周髀〉研究传统的历史发展与转折. 清华学报[J]，1988(1)，1-40

②刘钝.关于李淳风斜面重差术的几个问题. 自然科学史研究[J]，第 12 卷 1993(2)，101-111

③曲安京.李淳风等人盖天说日高公式修正案研究. 自然科学史研究[J]，第 12 卷 1993(1)，45-51

问题设计也更加多样，《数书九章》是继《海岛算经》之后的又一部系统涉及勾股测量问题的著作。

下面通过《数书九章》中的典型问题，分析秦九韶解答勾股测望问题的具体方法。

“望山高远”术文如下：

问名山去城不知高远。城外平地有木一株，高二丈三尺，假为前表。乃立后表与木齐高，相去一百六十四步。先退前表三丈九寸，次退后表三丈一尺三寸，斜望山峰，各与其表之端参合。人目高五尺，里法三百六十步，步法五尺，欲知山高及远各几何。[30]

此题与《海岛算经》第一问类似，为直接应用重差基本公式的问题。与望海岛不同的是测量方法由“人目著地”变为了“人目高五尺”，选取的表间数更合理。遗憾的是，在计算中秦九韶没有加上“人目高五尺”而导致了错误的计算结果。

如图 1.1.16，木高 h，相去 d 先退前表为 b，次退后表为 a，人目高 k，山高 x，山远 y，由重差术基本公式应有山高：

$$x=\frac{(h-k)(d+a-b)}{a-b}+k,$$

山远 $y=\dfrac{a(d+a-b)}{a-b}$。秦九韶误将人目之上的 $x-k$ 当作山高，误将 $h-k$、$x-k$ 当作 h、x，而得出：

$$y=\frac{a(h-k)(d+a-b)}{h(a-b)}。$$

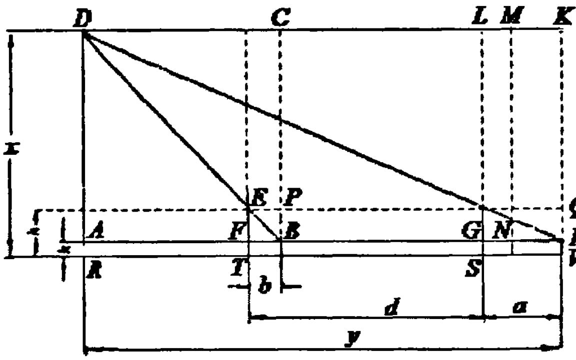


图 1.1.16

“陡岸测水”术文如下：

问行师遇水，须计篾缆，搭造浮桥。今垂绳量陡岸，高三丈，人立其上，欲测水面之阔。以六尺竿为矩，平持去目下五寸。今矩本抵颐，遥望水彼岸，与矩端参相合。又望水此岸沙际，入矩端三尺四寸。人目高五尺，其水面阔几何。[31]

如图 1.1.17，CE 为人高，AE 为陡岸高，DG 为矩长，CD 长矩本去目，AH 为岸沙际入矩端数，FG 为入矩端数，HB 为所求水阔。由相似勾股形有：

$$\frac{CD}{DG}=\frac{AC}{AB},\quad \frac{CD}{DF}=\frac{AC}{AH}$$

即 $CD\cdot AB=AC\cdot DG$，

$CD\cdot AH=AC\cdot DF$，

两式相减得 $HB=\dfrac{AC\cdot FG}{CD}$。

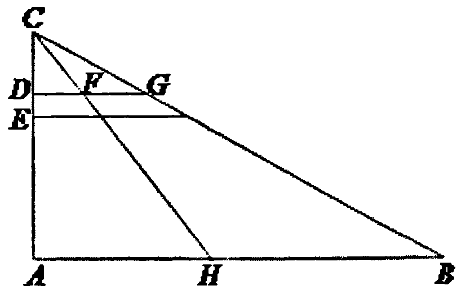


图 1.1.17

可能误取了相似勾股形对应边的原因，依秦九韶术文，得出的水阔为 $HB=\dfrac{(AC-CD)FG}{CD}$。但从他的方法可以发现，其术文“以勾股重差求之”中的“重差”并不是刘徽定义的重差。

“陡岸测水”与造浮桥有关，采取“垂绳”的方法测河岸高度，用篾缆造浮

桥，反应了南宋的技术水平，秦九韶通过勾股比例论直接对其进行了解答。这种方法也是其在《数书九章》勾股测望类问题采用的主要方法。

“表望方城”与《九章算术》“勾股”章第 21 问立四表是同一类型，通过城东北隅去木距离与城东南隅去木距离差，即可求得城广。但由于对相似三角形对应边的混淆，秦九韶又求出了错误的计算公式。“临台测水”与《海岛算经》第四问的“累矩望谷深”是同一个类型，秦氏通过相似勾股形的比例关系求出了正确的结果，但计算过程非常繁琐，使问题显得更加复杂。“表望浮图”为用相似勾股形原理测量塔高的问题，方法与《九章算术》“勾股章”第 22 问类似，所取数据更加符合实际测量情况，因而大大降低了计算误差。“望敌远近”可由相似勾股形的比例关系直接求得结果，秦九韶的做法完全正确，但提及解答方法时他仍说是“以勾股求之，重差入之”。

《数书九章》勾股测望类问题从“望山”到“测水”，从造桥材料的多少到军队中的望敌城大小、远近和敌军人数，涉及的范围更加广泛，所取数据也基本与实际相符，这些问题反映了南宋工程建筑和军事方面的水平。它的“以勾股求之重差入之”应该是由两组相似勾股形推出对应边的比例式相减得到所求数，这是与传统重差术的区别所在。[32]从编写体例、所反映的各种制度、题目类型、术名、解题方法等方面考察，《数书九章》是对《九章算术》的继承和发展 。由于秦九韶混淆了某些概念而导致了计算上的一些错误，但这不能掩盖《数书九章》的辉煌成就。

此外，杨辉在《续古摘奇算法》中以等积原理为解题依据，对标准重差术问题进行了研究，并借助等积原理给出了重差基本公式的严格证明，至此我国古代勾股测望理论基本完备，并形成了自身完整的体系。

从明代到清初是我国数学发展缓慢的阶段，勾股测量只是继承前人的成果而很少有创新，除《九章算法比类大全》和《算法统宗》中保留了一些传统的勾股测量方法外，其它著作对该问题都很少研究。文艺复兴之后迅速发展起来的西方测量技术、测量书籍、测量工具在明末之后陆续传入我国，结束了我国古代测量数学在封闭条件下自我发展的历史。从此我国的测量形成了东西方法并用的局面，并开始了向近代测算技术转变的历程。

1.2 古代印度勾股测影术

古代印度的勾股测量主要体现在影的实用算上。影的测量和计算是古代印度数学和天文学的一个重要部分，在许多数学、天文学著作中都涉及该问题，如阿耶波多的《阿耶波多历法书》 (Āryabhaṭṭīya)、婆罗摩笈多的《婆罗摩笈多修正体系》(Brāhmasphuṭa-siddhānta)、波什迦罗二世（Bhaskara II）的《莉拉沃蒂》（Līlāvatī）等。这些计算多以相似三角形理论为基础，以三率法①为计算原则，

① 三率法即我国的“今有术”，是通过比例关系式求未知量的计算方法。在问题已知的情况下，若期望值（d）随着要求（c）的增加（减少）而增加（减少），精于此道的古代印度数学家就会使用三率法。《莉拉沃蒂》第 73 诗节给出了三率法的法则：基准值与所求值是同一种（单位），[置各]最初与最后，其果（基准量结果）是[与它们]异种者，[被置]于中间，其（基准量结果）乘所求值，以最初（基准值）除得者，为所求值之果．逆[三率法]场合，演算规则相逆．即 (1)假设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为正变分，(2) $ab=cd$ 为逆变分，第一种情形下，$d=\frac{b\times c}{a}$，第二种情形下 $d=\frac{a\times b}{c}$。

形成了古代印度的测望理论。

1.2.1 《阿耶波多历法书》中影的计算

公元 5~6 世纪的印度数学家和天文学家阿耶波多（公元 476~550 年），是迄今印度最有声望的自然科学家。他所著的《阿耶波多历法书》(Āryabhaṭṭīya，或译《圣使历数书》)包括天文常数、数学、时间、天球四部分内容，是印度第一部系统化的天文历算学著作，其中的“数学之章”讨论了用一根或两根晷表测量影长的问题。

《阿耶波多历法书》数学章第 15 诗节是单表测影问题，方法如下：

(晷表)与腕之间的距离，乘以晷表高，以晷表高与腕高差去除可知所得(高)是自晷针根底的影长。[33]

印度数学著作中的“腕”和“端”分别指直角三角形的股和勾。

如图 1.2.1 所示，光（太阳）S 所在的圆与晷表 AB 的顶点 A 所在的圆是同心圆，AC 为晷表 AB 的顶点 A 所在圆的半径 ，SD 、DC 分别为腕和端。

由 ΔSDC 与 ΔABC 相似有：$\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{AB}{SD}$

$$\frac{BC}{DC-BC}=\frac{AB}{SD-AB}$$

得 $$BC=\frac{AB(DC-BC)}{SD-AB}=\frac{AB\cdot DB}{SD-AB}$$

影长 $$BC=\frac{DB\cdot AB}{SD-AB}。$$

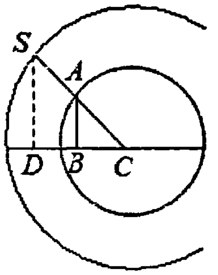


图 1.2.1

第 16 诗节为借助两根晷表测影问题，可以用来计算光源的高和它与观测者的水平距离，术文如下：

影两端之间隔，乘（其中一方的）影长，以影长差除，可得各自的（端）；各自的端乘晷表高，再以各自的影长除，得腕（灯高）。[34]

如图 1.2.2：S 点为光源，AB 和 A_1B_1 为两个相等的晷表，BC 和 B_1C_1 分别为它们的影。

$$\frac{DC}{BC}=\frac{SD}{AB}=\frac{SD}{A_1B_1}=\frac{DC_1}{B_1C_1}$$

$$=\frac{DC_1-DC}{B_1C_1-BC}=\frac{C_1C}{B_1C_1-BC}$$

所以 $$DC=\frac{CC_1\cdot BC}{B_1C_1-BC},$$

同样地 $$DC_1=\frac{CC_1\cdot B_1C_1}{B_1C_1-BC},$$

$$SD=\frac{AB\cdot DC}{BC}=\frac{A_1B_1\cdot DC_1}{B_1C_1}。$$

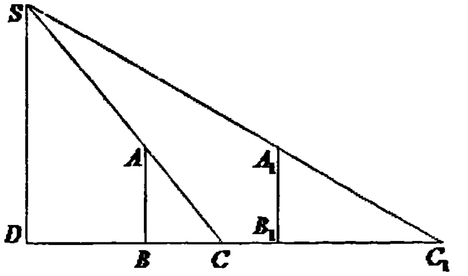


图 1.2.2

即 $$端DC(或DC_1)=\frac{两影端之距离\times影长}{两影差}=\frac{CC_1\cdot BC(或B_1C_1)}{B_1C_1-BC}$$

灯高 $$SD=\frac{端\times表}{影}。$$

本题求得的灯高公式与我国的重差术基本公式是等价的。因为将 $DC=\dfrac{CC_1\cdot BC}{B_1C_1-BC}$ 带入 $SD=\dfrac{AB\cdot DC}{BC}$ 得：

$$SD=\frac{AB\cdot CC_1}{B_1C_1-BC}=\frac{AB\cdot(BC_1-BC)}{B_1C_1-BC}=\frac{AB\cdot(BB_1+B_1C_1-BC)}{B_1C_1-BC}$$

$$=\frac{AB\cdot BB_1+AB\cdot(B_1C_1-BC)}{B_1C_1-BC}=\frac{AB\cdot BB_1}{B_1C_1-BC}+AB,$$

即 $$灯高=\frac{表高\times表间}{影差}+表高。$$

1.2.2 《婆罗摩笈多修正体系》中的测量术

婆罗摩笈多（Brahmagupta，公元 598~665 年）是七世纪印度天文学家和数学家，公元 628 年著《婆罗摩笈多修正体系》(Brāhmasphuṭa-siddhānta，或译为《由 Brāhma 神启事的正确的天文学》)。该书有 5 章内容与数学有关（即第 12、18、19、20、21 章），其中第 19 章是关于影与表的测量问题，给出了与阿耶波多相同的晷影公式，是对前人方法的继承，其中有特色的是通过水中倒影与折射点求观察物高度：

当折射点距人眼的距离，等于房子和人之间的距离除以房高和人高之和，再乘以人眼高度时，可以看到房子的倒影，即求得房子的高。[35]

本题通过选取倒影使其与折射点和人眼在一条直线上，构造出相似勾股形。得到比例关系式后，再进行和比运算，从而求出物体的高度。

如图 1.2.3：AB 为房子（被观测物）高度，CD 为人眼高度，E 是折射点，由 ΔABE 与 $\Delta A'BE$ 全等，与 ΔCDE 相似，

有：$$\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}$$

$$\frac{CD}{AB+CD}=\frac{DE}{BE+DE}=\frac{DE}{BD}$$

即 $$DE=\frac{BD\cdot CD}{AB+CD}$$

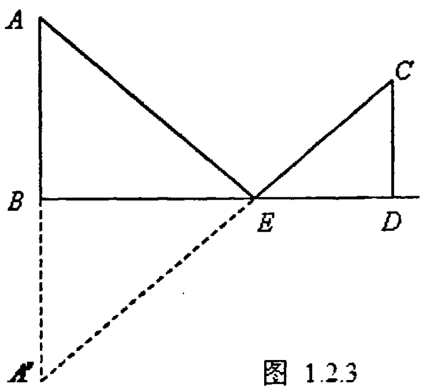


图 1.2.3

从而得房子高：$$AB=\frac{BE\cdot CD}{DE}。$$

婆罗摩笈多还给出了通过两个不同折射点，测量被观测物高度和折射点与被

测物距离的公式：

两个折射点的距离除以人离两个折射点的距离差，再乘以人眼高度等于被测物的高。两个折射点的距离除以人距离折射点的差，乘以人与（第一个）折射点的距离，等于被测物到第一个折射点的距离。[36]

本题借助两个折射点构造出不同的相似勾股形，从而得到一组比例关系式，再由该比例关系式间的差比运算求出物体高度及物体距折射点的距离。

如图 1.2.4：AB 是被观测物，C_1D_1 和 C_2D_2 为观测者的两个不同位置，E_1、E_2 为两个折射点。

因为 $\dfrac{AB}{C_1D_1}=\dfrac{BE_1}{D_1E_1}=\dfrac{AB}{C_2D_2}=\dfrac{BE_2}{D_2E_2}=\dfrac{BE_2-BE_1}{D_2E_2-D_1E_1}=\dfrac{E_1E_2}{D_2E_2-D_1E_1}$

所以 $AB=\dfrac{C_1D_1\cdot E_1E_2}{E_2D_2-E_1D_1}$，

$BE_1=\dfrac{D_1E_1\cdot E_1E_2}{D_2E_2-D_1E_1}$。

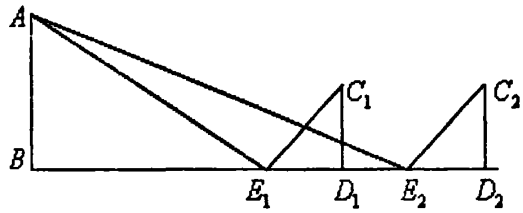


图 1.2.4

对于一个折射点的情况，要求物体在水中的倒影、折射点和人眼在同一直线上，再由相似三角形对应边成比例的性质求得物体的高度；两个折射点的情况，要求不同位置的人眼分别与两个折射点和物体在水中的两个倒影在同一直线上，再由相似三角形理论求得物体高度与物体距折射点的距离。

依据相似三角形理论，通过水中倒影与折射点求观察物高度的方法在婆罗摩笈多以前的著作中未曾见到。该方法要求被测物体和观测者必须在水面上，两者距离不能很远，对被测物体高度也有限制，且光在水面上会发生折射而使测量结果产生误差，所以这种方法在实际测量中不是非常有效的。

1.2.3 《莉拉沃蒂》中关于影的实用算

波什迦罗 II（Bhāskarā Ⅱ，公元 1113 或 1114～1193 年）是印度数学鼎盛时期——悉檀多时代的著名数学家。他于公元 1150 年著《天文系统之冠》(Siddhāntasiromani) 一书，该书由《莉拉沃蒂》(Līlāvatī)、《算法本源》(Bījaganita，又译作“代数学”)、《行星运动》(Grahaganitādhyāya)、《天球》(Golādhyāya) 四部分组成。其中的《莉拉沃蒂》是古印度最典型、最有影响力的算术著作，它被作为教科书使用了好几个世纪。

《莉拉沃蒂》将“影之实用算”列为一章，比较全面地论述了立表测影的问题，共有四种类型，兹分述如下：

（1）关于影实用算之法则

《莉拉沃蒂》第 232 诗节为已知晷表高度，求影长问题。如图，已知一根垂直的表高 r，在不同地点它的影长是 t，$t+q$，相应的斜边是 c，$c+p$。已知 r、p、q，当 $q>p$ 时，求 t。

诗文给出了求影的法则：

以两影与两耳之[各]差之平方差除五百七十六，其商加一者之平方根乘两耳差，以两影差减加，半之，即为两影。[37]

印度数学中，“耳”指直角三角形的斜边或四边形的对角线。

如图 1.2.5，ΔACB 和 ΔACD 都为直角三角形，有

$(c+p)^2 = r^2 + (q+t)^2$，和 $c^2 = r^2 + t^2$

则 $2cp = 2qt + m$，其中 $m = q^2 - p^2$

则 $4c^2p^2 = (2qt+m)^2$，

即 $4(r^2+t^2)p^2 = 4q^2t^2 + 4qtm + m^2$

$$4t^2(q^2-p^2) + 4qmt + m^2 - 4p^2r^2 = 0$$

令 $r=12$，解这个二次方程，取正根得影长

$$t = \frac{1}{2}\left(-q + p\cdot\sqrt{1+\frac{576}{q^2-p^2}}\right)$$

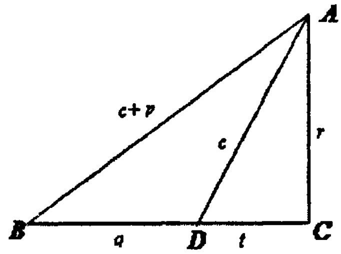


图1.2.5

另一个影长 $t + q = \frac{1}{2}\left(q + p\cdot\sqrt{1+\frac{576}{q^2-p^2}}\right)$。(其中 $576 = 4r^2$)。

本诗节即对于同一个晷表(长 r=12 añgula [①])的两影长分别为 x_1，x_2，自表顶端至各影前端的距离（即两耳）分别是 y_1，y_2。已知影差 $x = |x_1 - x_2|$，耳差 $y = |y_1 - y_2|$,求 x_1 与 x_2 的计算方法。若 $x_1 < x_2$，则

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(y\cdot\sqrt{1+\frac{576}{y^2-x^2}} - x\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(y\cdot\sqrt{1+\frac{576}{y^2-x^2}} + x\right)$$

上面的法则没有用到相似三角形理论，而是由勾股定理推导得出，这一公式在印度首次出现。

（2）关于其他影之法则

《莉拉沃蒂》第 234 诗节通过相似三角形对应边的关系，给出了已知灯高、表高、灯表的垂直距离，求影长的法则：

表[长]乘以灯底与表根之距离，除以灯上端高度减去表[长]者，即影[长]。[38]

该诗节与前面介绍的《阿耶波多历法书》第 15 诗节一样，为通过相似三角形对应边的比例关系，单表测影问题。

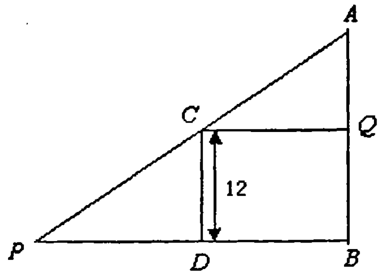


图1.2.6

如图 1.2.6，已知灯高 AB，表高 CD，灯表的垂直距离 BD，求影长 PD。

[①] añgula 是印度的长度单位，1 añgula 等于八粒谷物紧排在一起所形成的长度，即手指指骨的长度(digit)。24 añgula 等于 1 hasta。若假定男子的身高是 3.5 hasta(前臂)，则 1hasta=20 英寸，1 英寸=2.5400 厘米。这样的话，1 añgula 约等于 2.1167 厘米，12 añgula 约等于 25.4 厘米。古代印度没有标准的度量单位，整个国家长度单位不统一，许多王国和候国都有自己的度量衡。整个印度只是在大不列颠统治期间才开始使用标准的长度单位，这些单位现在已被淘汰不用。

$$PD=\frac{CD\times DB}{AB-CD}=\frac{12DB}{AB-CD}$$

即 $$影长=\frac{表高\times 灯底与表底距}{灯高-表高}$$

（3）求灯高及灯表间距之法则

《莉拉沃蒂》第236诗节为第234诗节的逆运算，即已知表高、影长和表灯间距，求灯高的问题，依然通过相似三角形对应边的比例关系求解。诗文给出的法则为：

以影除表，乘以表灯底间距离，加上表，实为灯高。[39]

如图1.2.6所示，$AB=\frac{BD\times CD}{PD}+CD$，

在相似三角形 PCD，CAQ 中

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{PD}{CD},\qquad AQ=\frac{CQ\times CD}{PD}=\frac{BD\times CD}{PD}$$

故 $AB=BQ+AQ=CD+\frac{BD\times CD}{PD}$。

（4）求影灯距离及灯高之法则

《莉拉沃蒂》第239诗节为求影灯距离和灯高的问题，诗节术文如下：

两影前端之距离乘[任一]影，以影长差除，为[其影前端至灯底之]底。以影除底与表积，产生灯高。[40]

如图1.2.7所示，AB 为灯，杆 CD、$C'D'$ 分别立于 D、D' 两点，QD 和 PD' 分别为影长，已知两影前端之距离 $PB-QB=PQ$，影长差 $PD'-QD$，则影前端至灯底之底：

$$QB=\frac{PQ}{PD'-QD}\times QD,\quad PB=\frac{PQ}{PD'-QD}\times PD',$$

灯高： $$AB=\frac{QB\times CD}{QD}$$

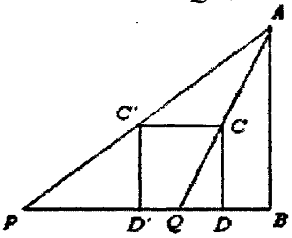


图1.2.7

本题与《阿耶波多历法书》数学章第16诗节的内容和方法相同，因此也与我国的重差基本公式等价。

除上面提到的著作外，公元8世纪后 Śridhara 的《三百颂》(Trisatikā)、《算法数学》(Pātigaṇita)（影的诗节已缺失）、9世纪中期 Mahavira 的梵文著作《数学精髓集成》(Gaṇitasārasamgraha)、天文学家 Śripati 的《Siddānyashēkara》（时间不详）及12世纪后的许多著作中也都有立表测影问题，涉及的内容和方法基本都包括在前面论述的类型中。

勾股测量是古代印度测量学的主要内容，表现在影的实用算上，涉及求物体高度、影与物体间的距离、影长等问题。测量用到了单矩、复矩，有时还通过水面折射影求物体高度。计算方法除了相似三角形对应边的比例关系、重差理论外，有时还直接用到勾股定理的推导。

1.3 古代中印勾股测望术之比较

勾股测量法作为勾股定理的实际应用，在古代各文明中都曾出现过。由于社会经济生活、生产需求的一致，中印两国数学发展的许多问题都很相似。从测日影、日高发展起来的勾股测量是中印古代几何学研究的中心问题之一，在长期的社会实践中，形成了各自的方法。

由于步测或目测的局限性，在远距离的测量中必须借助测量工具。工具是决定测量准确性的主要因素之一。工具的不同，也是造成中印两国的勾股测望内容、方法及丰富性不尽相同的一个原因。

“表”是两国勾股测量都使用的工具，常通过立表测影去测量其它物体的高度。中国的表多为八尺长（秦汉时期合 221.2 厘米，唐朝合 248.8 厘米，宋元时期合 245.76 厘米），而印度的表常为 12añgula（约等于 25.4 厘米）。由此看来，我国古代的“表”要比印度的“表”高出许多。两国都是从单表测量发展到了双表测量。如《九章算术》“勾股”章第 22 问、“周髀”测日法，《阿耶波多历法书》数学章第 15 诗节和《莉拉沃蒂》第 239 诗节一样，都是单表测量问题，计算原理也相同。《周髀算经》的日高术、《海岛算经》第一问和第二问、《数书九章》的“望山高远”与《阿耶波多历法书》第 16 诗节、《莉拉沃蒂》第 239 诗节的内容都是双表测量问题。虽然两国使用相同的计算方法，但在时间上我国要早于印度。另外，《九章算术》“勾股”章第 21 问通过立四表测量，第 23 问还将一根表立于了被测物体之上。

印度未见有其它测量工具的记载，而我国古代的测量工具除“表”外，还有矩、绳索等。如除上面提到的《海岛算经》的其它各题、《数书九章》中的“陡岸测水”等都是矩、索一起使用的测量问题。

从测量内容看，古代中印两国都有通过表影测量物体高度的问题。《九章算术》“勾股”章第 21 问测山高与《莉拉沃蒂》第 236 诗节测灯高属同一类问题，《周髀算经》测日高、《海岛算经》第一问测岛高、《数书九章》的“望山高远”与《阿耶波多历法书》第 16 诗节测光源的高、《莉拉沃蒂》第 239 诗节测灯高问题也可归为同一个类型。

我国的勾股测量还涉及求深、广、远的问题，测量的应用范围非常之广是印度数学所不可比拟的。如《海岛算经》第四问、第七问的测谷深和水深问题，第八问测河广问题，《数书九章》的“望敌远近”、“望知敌众”将广、远的测量问题应用到军事中，“陡岸测水”通过测河岸宽去计算造桥材料的多少。

中国的勾股测量从“一望”发展到二望、三望、四望等多次测量，而印度最多只是两次测量。特别值得一提的是，李淳风还在斜面上进行了太阳高度的测量，而印度到波什迦罗II，仍停留在水平地面的立表测量。不过，《婆罗摩笈多修正体系》中通过水中倒影求物体高度的方法，在我国古代的数学著作中也未曾见到。

两国勾股测量内容有相同之处，又各有独到之处，但总体来看，中国勾股测量涉及的范围要比印度丰富。

数学方法在古代测量中占有重要的地位，是测量工具之外影响测量发展的又一因素。两国勾股测量用到的数学原理基本一致，具体方法略有不同。

中国和印度在单表测量时，都用到了相似三角形对应边成比例的性质。通过前面的具体问题不难发现，它们都不涉及角度之间的关系。中印的双表测量都得到了重差公式。从《阿耶波多历法书》和《莉拉沃蒂》的具体问题可以看到，印

度的重差公式是利用两组相似勾股形推出对应边的比例式，再通过和比、差比等比例性质计算得到的。而中国最基本的依据应该是"等积原理"，通过面积的关系推导出重差公式。秦九韶还利用两组相似勾股形推出对应边的比例式，再将其相减得到所求数。

《婆罗摩笈多修正体系》中通过选取物体水中倒影，使其与人眼和折射点在同一直线去构造出相似勾股形，再借助比例关系式的和比运算求物体高度的方法，及两个折射点构造出不同的相似勾股形，由比例关系式间的差比运算求出物体高度的方法，我国测量中未见使用。《莉拉沃蒂》第 232 诗节，已知不同地点的影长和相应的斜边后，直接利用勾股定理求影的问题，我国勾股测量中也没见使用。

印度勾股测量内容与三率法相结合，是根据相似句股形性质列出比例关系式的。如《莉拉沃蒂》[41]第 240 诗节所说："人世间一切数量关系都可归结为'三率法'，因此'三率法'就像世主创造世界的种子，数学中的全部方法都由'三率法'产生。"这种思想与我国古代对"率"的认识是一致的。刘徽在《九章算术注》中对"今有术"（即三率法）的意义与作用注释道："此都术也。凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。"[42]隋书律历志中也认为："事物糅见，御之以率，则不乖其本。故幽隐之情，精微之变，可得而综也。"[43]

总之，从方法与理论体系等方面看，两国古代数学著作中，由测日高、日影发展起来的勾股测望问题都形成了自己的理论体系和算法。两国在勾股测望问题上虽有许多平行之处，但找不出各自交流的证据。两国的勾股测量都没有用到三角函数和角度的关系，而是原始的勾股比例算法。就古代中印的数学发展水平来看，两国的勾股测量问题应该是在各自土地上发展起来的，而没有受到巴比伦、希腊等外来文化系统的影响。且古代中国的勾股测望要比印度丰富、发达。

第二章 古代中国的晷影计算

由于农业生产、政治统治以及日常生活的需要，中国古代的天文历学一直十分发达。据统计，中国历史上正式颁用过的历法约有 50 种，而史籍有明确记载的历法达百余种。中国天文历学推算最显著的特点是不借助于几何模型，而是在实测基础上通过代数方法去实现的。在制定历法的过程中，历算家不断对算法进行改进，以提高天文预测的准确性，这是中国历史上历法不断改革的一个最主要原因，而气差①的改进是历家追求精度过程中最重视的因素之一。由于推求气差（或冬至点测定）的需要，晷影测算便成为中国历法中一项最基本的内容，晷影测量亦即节气的确定被视作历法优劣的最主要标准。

第一章提到的“日高术”测量的是某特定时刻（午中）的晷影长度，并不能处理晷影连续变化问题。要得到任意时刻的晷影长度，需构造特殊公式，通过计算得到。

现代天文学中，对于高度为 g 的表，其晷影长度 b 是太阳视天顶距的正切函数，而太阳天顶距由太阳赤纬决定，其计算公式[44]如下：

$$\begin{cases} b = g \cdot \tan z_{视} \\ z_{视} = z_{真} - \rho - r + p_0 \sin z_{视} \\ z_{真} = \left|\varphi - \delta_{日}\right| \\ \sin\delta_{日} = \sin l_{日} \sin\varepsilon \end{cases}$$

其中表高为 g，$Z_{视}$为太阳视天顶距，$Z_{真}$为太阳真天顶距，ρ为太阳蒙气差，r 为太阳视半径，p_0 为太阳的地平视差，φ为观测地点纬度，$\delta_{日}$为太阳赤纬，$l_{日}$为太阳黄经，ε为黄赤道交角。ε 变化很小时，ρ、r、p_0、$\sin Z_{视}$ 变化也不大，所以每日午中晷影长近似等于天顶距正切值乘以晷表高。

中国天文学没有使用几何模型和三角函数，主要通过数值方法以解决晷影长度的计算问题。数学方法的改进导致中国历法中晷影算法也随之不断演进。早期历法中晷影记录与漏影算法相分离，其算法比较简单，主要是依靠实测来确定晷影的长度。一直至唐初，晷影计算也没有成为历法体系中独立的部分，如《麟德历》将晷影算法列入“步日躔”。到唐中叶一行的《大衍历》，才将晷影计算纳入“步轨漏”章，从而确立了晷影计算成为中国古代历法中重要组成部分的编写模式，自此之后的中国古代历法基本上都沿用这种形式[45]。随着插值法以及多项式函数方法在中国古代历法计算中的普遍使用，它们也成为晷影计算的最主要的数学工具。本章考察中国晷影计算法的历史演进与算法特征。其发展历史大致可分为以下三个阶段。

2.1 汉代至唐初历法中的晷影算法——等差数列算法

唐初以前的历法中仅有二十四节气午中影长的记录，并未给出求任意时刻晷影长度的算法。最早出现二十四节气晷影长度记录的历史文献有《周髀算经》、《易纬》、东汉《四分历》、魏《景初历》、刘宋何承天的《元嘉历》等。现据《历代天文律历等志汇编》中的记载，将上述历法中的晷影数据列于表 2.1.1[46]。

① 气差指由实测晷影而推算得到的冬至时刻与历推冬至时刻之差。

表2.1.1　　　汉至南北朝时期二十四节气晷影数值表（单位：寸）

节气	《周髀算经》	《易纬》	《四分历》	《景初历》	《元嘉历》
冬至	135．0	130.0	130.0	130.0	130.0
小寒（大雪）	125 $\frac{5}{6}$	120.4	123.0	123.0	124.8
大寒（小雪）	115 .1$\frac{4}{6}$	110.8	110.0	110.0	113.4
立春（立冬）	105 .2$\frac{3}{6}$	101.2	96.0	96.0	99.1
雨水（霜降）	95 .3$\frac{2}{6}$	91.6	79.5	79.5	82.2
惊蛰（寒露）	85 .4$\frac{1}{6}$	82.0	65.0	65.0	67.2
春分（秋分）	75.5	72.4	52.5	52.5	53.9
清明（白露）	66 .5$\frac{5}{6}$	62.8	41.5	41.5	42.5
谷雨（处暑）	55 .6$\frac{4}{6}$	52.2	32.0	32.0	32.5
立夏（立秋）	45 .7$\frac{3}{6}$	43.6	25.2	25.2	25.0
小满（大暑）	35 .8$\frac{2}{6}$	34.0	19.8	19.8	19.7
芒种（小暑）	25 .9$\frac{1}{6}$	24.4	16.8	16.8	16.9
夏至	16.0	14.8	15.0	15.0	15.0

中国历法推算遵循以测为辅、以算为主的原则，二十四节气晷影长并非全来自于实测，而是在实测二至日影长的基础上，根据一定的算法规则计算出其他节气日晷影长。《周髀算经》和《易纬》给出了求二十四节气晷影长的方法。

《周髀算经》关于二十四气晷影的算法如下：

凡八节二十四气，气损益九寸九分六分分之一；冬至晷长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸，问次节损益寸数长短各几何？……冬至、夏至为损益之始。术曰：置冬至晷，以夏至晷减之，余为实，以十二为法，实如法得一寸，不满法者十之，以法除之，得一分，不满法者，以法命之。[47]

《周髀算经》把各节气日的影长变化视为一个常数，即各影长构成等差数列。首先测出冬夏二至日晷影，然后按一阶等差数列算出各节气晷影长之公差：

$d=$（冬至影长－夏至影长）/12，

求得各节气影长公差 $d=9$ 寸 $9\frac{1}{6}$ 分。

《易纬》也给出同样的算法，其所测冬至晷长一丈三尺，夏至晷长一尺四寸八分，故其公差为 $d=9$ 寸 6 分。

由此可见，《周髀算经》和《易纬》中，除冬夏二至晷影长为实测外，其余各气数据应是理论推算值。至于其他时日或时刻的晷影长，也可根据一阶等差数列推算出来。《周髀算经》在晷影计算时，取半年约为 182.5 日，故每日影差为

$\frac{135-16}{182.5}=\frac{476}{730}$寸/日。

这种算法是建立在宇宙为平行平面的基础之上的，与当时人们对宇宙的认识密切相关。

东汉《四分历》所载晷影长没有构成等差数列，它应该是出自实测的数值。《景初历》完全沿用《四分历》的数值，而南北朝刘宋时期何承天的《元嘉历》的冬夏至的影长也与《四分历》相同，其余节气的数值只是在《四分历》的基础上进行了某些修正。

这一时期的历法所记载的晷影长度变化较小，计算方法也比较简单。究其原因，主要是因为当时的天文学家在晷影测量问题上持有崇古思想，习惯沿用前人的测量数据。由于晷影测量和推算方法没有什么进展，冬至时刻测算误差也逐渐增大，久之误差甚至多达二、三日，所以晷影测算方法的改进自然势在必行。

2.2 隋唐历法中的晷影算法——二次插值法的应用

南北朝天文学家张子信（公元 399~410 年）为躲避葛荣叛乱，隐居海岛中，坚持三十多年的天文观测。他用浑仪观测日月五星的运行，大约在公元 565 年前后，发现了太阳运动不均匀性、五星运动不均匀性和月亮视差对日食的影响等现象。张子信的这一重大天文发现，为隋代历算家刘焯（公元 542~608 年）等采纳，创造了二次等间距内插法以精确测算太阳、月亮及五星运行的每日中心差，并在刘焯的《皇极历》中首次应用。这样不仅大大提高了对二十四节气、朔日、日食和行星运动的推算精度，而且使中国历法推算模式在隋唐时期发生重要转变，内插法被广泛应用于历法各类问题的推算中，晷影推算也不例外，从而开创了中国古代历法晷影计算的新局面[48]。

等间距二次内差法推求晷影的一般原理如下：

以 n 表示一个平气的长度，$f(x)$ 表示某时刻影长，时刻 $x\in[kn,\ (k+1)n]$ 时（不妨设 $x=kn+t$），求 $f(x)$。首先根据实测的二十四节气午中晷影数据，建立差分表：

l_i 为恒气日中影长，Δ_i 为 l_i 的一阶差分（称作"陟降率"，其中 i=1,2,…k）：

$$\begin{cases} f(n)=l_1 \\ f(2n)=f(n)+\Delta_1=l_2 \\ f(3n)=f(2n)+\Delta_2=l_3 \\ \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \\ f(kn)=f[(k-1)n]+\Delta_{k-1}=l_k \end{cases}$$

由晷影表给出。

首先由晷影表查出 $f(kn)$，再求 $f(x)=f(kn)\pm l_t$，（l_t 为影长修正值），所以问题的关键是求 l_t。隋唐历算家建立的 l_t 是关于 t 的二次函数。

在求 l_t 时，历算家们把一平气内的晷影变化看成是匀加速的，气初率为初始速度，气末率为末速度。历算家以二十四节气晷影长为基础，将插值法应用到了其余时日、时刻的晷影计算中。

现存隋唐时期历法中，《皇极历》的内容并不完整，未见晷影计算部分。唐初李淳风所制定的《麟德历》（665 年）中的晷影计算基本上沿用了刘焯的二次等间距内插算法，并给出了计算一年中每日日中影长的算法。唐中叶一行的《大衍历》在历法体系和算法上做了进一步改进，创立不等间距二次插值法以更加精

确地处理日、月、五星的运动问题，使用类似正切函数表的差分表进行晷影计算，并且设置了所谓“九服晷影”，以处理不同地点的晷影计算问题，这一算法模式为后世所承袭。《大衍历》的晷影计算内容由《宣明历》所继承。

2.2.1《麟德历》推求各日午中晷影之算法

唐朝289年中，历法十易，但《旧唐书·历志》仅取《戊寅历》、《麟德历》、《大衍历》三部历法，这表明三部历法是非常重要而有价值的历法。

《戊寅历》为道士傅仁均所造，于武德二年颁行。中国古代历家推步合朔有二法：一是平朔，自前朔至后朔，中积二十九日五十三刻有奇；二为定朔，用日、月的实际运行，来确定合朔的日期。如日行盈，月行迟，则日月相合必在平朔之后；日行缩，月行疾，则日月相合必在平朔之前。求得平朔，用盈、缩、迟、疾之差数来加减。定朔比平朔精密。唐朝以前的历法，均用平朔，大抵一大月一小月相间。《戊寅历》始废平朔而用定朔。然而，导致贞观十九年九月以后，出现连续四个大月，故而反对用定朔的历家认为此非正常，于是又改用平朔。高宗时，李淳风造新历，于麟德二年颁行，名曰《麟德历》。《麟德历》再用定朔，但立进朔法以迁就折中，即改变当时小数点进位法，以避免连续四个大月的现象。《麟德历》废章（以十九年七闰月为一章）、蔀（四章为一蔀）、纪（二十蔀为一纪）、元（三纪为一元），立总法以为推算基础。这样可运算省约，胜于古人。后世历家遵从，一直沿及宋元。

在晷影计算部分，《麟德历》首先给出二十四节气晷影表（见表2.2.1）。

表2.2.1　　麟德历二十四节气晷影表　（单位：尺）

中气	日中影	陟降率	中气	日中影	陟降率
冬至	12.75	陟[0.47]	夏至	1.49	降 0.15
小寒	12.28	陟[1.13]	小暑	1.64	降 0.34
大寒	11.15	陟[1.53]	大暑	1.98	降 0.51
立春	9.62	陟 1.55	立秋	2.49	降 0.81
雨水	[8.07]	陟 1.53	处暑	[3.30]	降 0.94
惊蛰	6.54	陟[1.21]	白露	[4.24]	降 1.09
春分	5.33	陟 1.09	秋分	5.33	降 1.21
清明	[4.24]	陟 0.94	寒露	6.54	降 1.53
谷雨	3.30	陟 0.81	霜降	8.07	降 1.55
立夏	[2.49]	陟 0.51	立冬	9.62	降 1.53
小满	1.98	陟 0.34	小雪	11.15	降 1.13
芒种	1.64	陟 0.15	大雪	12.28	降 0.47

此表乃一阶差分表，据此求各日午中影长。《麟德历》晷影计算分五个部分：

（1）先求恒气初日影泛差；

（2）再求恒气初日影定差；

（3）次日影差；

（4）恒气日中影定数；

（5）最后得出次日中影。

以下逐一解说：

（1）恒气初日影泛差：见所求气陟降率，并后气率，半之，十五而一，为泛末率。又二率相减，余，十五而一，为总差。前少，以总差减泛末率；前多，

以总差加泛末率。加减泛末率讫，即为泛初率。其后气无同率，因前末率即为泛初率。以总差减初率，余为泛末率 。[49]

令Δ_i即为 24 节气晷影长的一阶差分，所求气陟降率为Δ_1，后气率为Δ_2，每气长约为 15 日，则

$$泛末率=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}；总差=\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}$$

$$泛初率=泛末率\pm总差=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}$$

$$(\Delta_1>\Delta_2时“+”；\Delta_1<\Delta_2时“-”)$$

（2）求恒气初日影定差术：十五除总差，为别差。[半之]，为限[差]①。前少者，以限差加泛初末率；前多者，以限差减泛初末率。加减泛初末率讫，即为定初末率，即恒气初日影定差。[50]

$$别差=\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}；限差=\frac{1}{2}\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}$$

$$初日影定差=泛初率\mp限差=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}\mp\frac{1}{2}\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}$$

（3）求次日影差术：以别（定）差，前少者加初日影定差，前多者减初日影定差。加减初日影定差讫，即为次日影定差。以次积累（岁），即各得所求。每气皆十五日为限。其有皆以十六除取泛末率及总差别差。[51]

次日影定差=初日影定差∓别差

$$=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}\mp\frac{1}{2}\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}\mp\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}$$

在此基础上累加减“别差”，即得逐日影定差，于是第k日影定差为：

$$第k日影定差（d(k)）=初日影定差\mp\sum_{i=1}^{k}别差$$

$$=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}\mp\frac{1}{2}\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}\mp\sum_{i=1}^{k}\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{15}\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\dfrac{\Delta_1-\Delta_2}{15}-\dfrac{1}{2}(2k-1)\dfrac{\Delta_1-\Delta_2}{15^2}; & (\Delta_1>\Delta_2)\\ \dfrac{1}{15}\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\dfrac{\Delta_2-\Delta_1}{15}+\dfrac{1}{2}(2k-1)\dfrac{\Delta_2-\Delta_1}{15^2}; & (\Delta_2>\Delta_1)\end{cases}$$

（4）求恒气日中影定数术：置其恒气小余，以半总减之，余为中后分。不足减者反减半总，余为中前分。置前后分，影定差乘之，总法而一，为变差。冬至后，午前以变差（减）[加]气影，午后以变差（加）[减]气影。夏至后，午前

① “[ ]”为文中脱误；“( )”为衍文，下同。

以变差（加）[减]气影，午后以变差（减）[加]气影。冬至一日，有减无加。夏至一日，有加无减。加减讫，各其恒气日中定影。[52]

晷影表所列影长乃恒气日午中影长，而恒气时刻不一定在午中，“恒气小余”即平气时刻不足一日的部分(t)，“半总”即总法的一半（总法为 1340）。因恒气时刻不在日中，所以李淳风对恒气时刻的影长做如下修正：

$$恒气日中定影=历载影长\pm\frac{|恒气小余-670|}{1340}\times 初日影定差$$

（5）求次日中影术：迭以定差陟减降加恒气日中定影，各得次日中影。后汉及魏宋历，冬至日中影一丈二尺，夏至一尺五寸，于今并短。各须随时影校其陟降，及气日中影应二至率。[53]

$$次日中影=恒气日中定影\pm\sum定差；（陟“-”；降“+”）$$

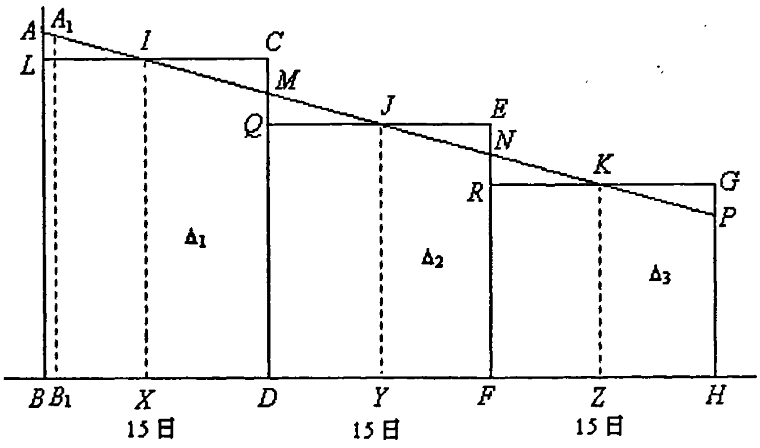
记恒气日中定影为$f(a)$，由上述“恒气日中影定数”求得的定差$d(t)$，得

$$\sum_{k=1}^{t}d(k)=\frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t(\Delta_1-\Delta_2)}{15}-\frac{t^2}{2}\frac{\Delta_1-\Delta_2}{15^2}；（\Delta_1>\Delta_2）$$

或 $$\sum_{k=1}^{t}d(k)=\frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{t(\Delta_2-\Delta_1)}{15}+\frac{t^2}{2}\frac{\Delta_2-\Delta_1}{15^2}；（\Delta_1<\Delta_2）$$

$$f(t)=f(a)\pm\left[\frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t(\Delta_1-\Delta_2)}{15}-\frac{t^2}{2}\frac{\Delta_1-\Delta_2}{15^2}\right]（陟“-”；降“+”）$$

上式正是刘焯二次内插法的应用。其原理如下图：



B、D、F、H、…等点为恒气发生时刻。

$$IX=\frac{\Delta_1}{15}，JY=\frac{\Delta_2}{15}，MD=泛末率=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2},CQ=总差=\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15},$$

$$AL=CM=\frac{CQ}{2}，故 AB=MD+CQ=泛初率=泛末率\pm总差$$

$$=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}$$

“别差”为“总差”在 15 日内的变化率，即每日减少（增加）$\frac{CQ}{15}$，限差乃其一半。

B 点为恒气时刻，AB 为恒气时刻晷影改变量，恒气初日影定差即恒气 B 点所在日午中晷影改变量，它是在 AB 的基础上减少（增加）半日的影长变化量（限差 $\frac{1}{2}\times\frac{CQ}{15}$），即

$$A_0B_0=AB-\frac{1}{2}\times\frac{CQ}{15}\text{（即 初日影定差＝泛初率}\mp\text{限差）}$$

这里是把 B 点近似地视为夜半子时。

那么，次日午中影长变化量 $A_1B_1=A_0B_0-\frac{CQ}{15}=AB-\frac{1}{2}\times\frac{CQ}{15}-\frac{CQ}{15}$

次 k 日午中影长变化量 $A_KB_K=A_0B_0-\frac{CQ}{15}\times K=AB-\frac{1}{2}\times\frac{CQ}{15}-\frac{CQ}{15}\times k$

$$=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15}-\frac{1}{2}(2k-1)\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{15^2}$$

实际上恒气 B 未必发生于夜半，一般存在“恒气小余”（即恒气发生时刻到夜半的时间差，r 分）。李淳风把恒气 B 所在这一日的晷影变化看成是均匀变化的，这一日（1340 分）的影差变化量为“初日影定差”，故不足一日的“恒气小余 r”时间的影差变化量为 $\frac{r}{1340}\times$ 初日影定差，恒气时刻至午中这段时间的影差变化量为 $\frac{|r-670|}{1340}\times$ 初日影定差，所以

$$\text{恒气日中定影}=\text{历载影长}\pm\frac{|r-670|}{1340}\times\text{初日影定差}=f(a)$$

若求恒气 B 后 t 日午中影长 $f(t)$，则 $f(t)=f(a)\pm\sum_{k=1}^{t}d(k)$，于是得上述公式。

2.2.2 一行《大衍历》的晷影差分表

开元九年（公元 722 年），因《麟德历》所推日食不效，唐玄宗命一行（俗名张遂，公元 683~727 年）重造新历。一行在传统历法基础上，参考天竺历法中的某些精华内容，进行革新，于开元十五年（728 年）编成《大衍历》。《大衍历》共分七篇：

一、步中朔（计算平朔望、平气）；
二、步发敛术（计算七十二候）；
三、步日躔术（计算每天太阳的位置和运动）；
四、步月离术（计算月亮的位置和运动）；
五、步晷漏（计算每天见到的天空星象和昼夜时刻）；

六、步交会术（计算日月食）;

七、步五星术（计算五大行星的位置和运动）。

一行以前，历家编写历法格式不一，自《大衍历》后，历家均遵循其格式，直至明末采用西洋法编历时，开始有所改变。

一行为制定《大衍历》，于开元年间主持了大规模的南北天文测量，纠正了中国古代长期流行的“日影千里差一寸”的影差原理，并在《大衍历》“步晷漏”中给出了阳城二十四节气之日晷[54]，以及推戴日之北每度晷数之算法，还首次给出“九服晷影”算法，即计算阳城以外各地某日正午时刻的晷影长。在其影响下，为后世历法所宗，如《崇天历》、《明天历》、《纪元历》等历，也都给出九服晷影的计算。

（1）《大衍历》的晷影差分表

一行改变了《麟德历》的晷影算法，编制了天顶距 z 从 0 度到 81 度的每隔一度晷影表，其构造方法乃差分形式，通过分段差分求得晷影长度。当 $z \geq 73°$ 时，采用五次差分表。根据三角学知识可知，每日午中晷影长度等于表高 h 与太阳天顶距 z 正切值的乘积，即 $h \cdot \tan z$。取表高为八尺，则一行给出的晷影表相当于函数值扩大了 8 倍的正切函数表，学界普遍认为，一行的晷影表是世界数学史上最早的正切函数表。

《大衍历》晷影计算的术文过于简略，今人解读差异很大。曲安京从《高丽历》中找到《宣明历》的完整记录，发现《大衍历》与《宣明历》构造的是同一个差分表，二者术文虽都有缺失，但可互为补充，它们刚好构成一个完整的差分表[55]。

《宣明历》（822 年）是唐中期由徐昂制定的一部历法，中国现存二十四史律历志的《宣明历》部分，没有每度晷数的记录。这部历法曾于唐朝传入朝鲜和日本，并在这两国施行多年（在日本施行 823 年，公元 862~1684 年）。

《大衍历》与《宣明历》构造晷影差分表之术文对照如下：

《大衍历》推戴日之北每度晷数术	《宣明历》推求戴日之北每度晷数
南方戴日之下，正中无晷。自戴日之北一度，乃初数一千三百七十九。从此起差，每度增一，终于二十五度。又每度增二，终于四十度。又每度增六，终于四十四度，增六十八。每度增二，终于五十五度。又每度增十九，终于六十度，度增一百六十。又每度增三十三，终于六十五度。又每度增三十六，终于七十度。又每度增三十九，终于七十二度，增二百六十。又度增四百四十，又度增一千六十，又度增一千八百六十，又度增二千八百四十，	南方戴日之下，正中无晷。自戴日之北一度乃初数一千三百七十九。从此起差每度增一终于二十五度，（每）度加所增二终于四十度。增五十四分起四十一度。每（度）加所增六终于四十四度增八十分。又起四十五度增一百四十八自终。【从】每度加所增二终于五十度①增一百五十八分。起五十一度每度加所增七终于五十五度增一百九十三分。起五十六度每度加所增九十终于六十度增二百八十分②。起六十一度增四百四十自终每度加所增三十三终于六十五度增五百八十分。起于六十六度每度加所增三十六终于七十度增七百六十分。起七十一度每度加所增三十九终于七十二度，增八百四十八分③。又七十三度，增一百九十八分七十四度增一千五百三十八分

① 《高丽史》旧书在此后有注“增二十六分起二十六度每”。

② 《高丽史》旧书为“二百八十八分”，与曲安京文章一致。

③ 《高丽史》旧书为“八百三十八，与曲安京文章一致。

又度增四千，又度增五千三百四十，而各为每度差。因累其差以递加初数，满百为分，分满十为寸，各为每度晷差。又每度晷差数[56]。	七十五度增两千五百九十八分七十六增四千四百五十八分七十七度增七千二百九十八分七十八度增五万四千三百九十八分七十九度增一万六千六百三十八分。至于八十度各为每度差。因累其差加初数，满一百为分分满十为寸。各为每度晷差。又累晷差各得戴日之北度数[57]。

《大衍历》“推戴日之北每度晷数”解读如下[58]：

	《大衍历》推戴日之北每度晷数术文①	今　释
0	南方戴日之下，正中无晷。	天顶距为0度时，影长为0
1	自戴日之北一度，乃初数一千三百七十九。从此起差，每度增一，终于二十五度，计增二十六分。	天顶距 $z=1$ 度时，影长 $l=0.1379$ 尺。“每度增一”即0到25度影长的三次差分 $\Delta^3=1$，“计增二十六”即到25度时二次差分 $\Delta^2=26$。
26	（起二十六度，）又每度增二，（每度加所增二）终于四十度，（增五十六分）。	从26到40度 $\Delta^3=2$，$z=40$ 度时 $\Delta^2=56$
41	（起四十一度，）又每度增六，（每度加所增六）终于四十四度。增八十分。	从41到44度 $\Delta^3=6$，$z=44$ 度时 $\Delta^2=80$
45	（又起四十五度，）增六十八，（增一百四十八）。每度增二，（自从每度加所增二，）终于五十度，（增一百五十八分。）	从45到50度 $\Delta^3=2$，$z=50$ 度时 $\Delta^2=158$
51	（起五十一度，）又每度增七，（每度加所增七，）终于五十五度，（增一百九十三分）。	从51到55度 $\Delta^3=7$，$z=55$ 度时 $\Delta^2=193$
56	（起五十六度，）又每度增十九，（每度加所增十九，）终于六十度，（增二百八十八分。）	从56到60度 $\Delta^3=19$，$z=60$ 度时 $\Delta^2=288$
61	（又起六十一度，）增百六十，（增四百四十八。）	$z=61$ 度 $\Delta^3=160$，$\Delta^2=448$
62	又每度增三十三，（自终每度加所增三十三，）终于六十五度，（增五百八十分。）	从62到65度 $\Delta^3=33$，$z=65$ 度时 $\Delta^2=580$
66	（起于六十六度，）又每度增三十六，（每度加所增三十六，）终于七十度，（增七百六十分。）	从66到70度 $\Delta^3=36$，$z=70$ 度时 $\Delta^2=760$
71	（起七十一度，）又每度增三十九，（每度加所增三十九，）终于七十二度，（增八百三十八分。）	从71到72度 $\Delta^3=39$，$z=72$ 度时 $\Delta^2=838$
73	（又七十三度，）增二百六十，（增一	$z=73$ 度 $\Delta^3=260$，$\Delta^2=1098$

① 注：黑体为《大衍历》和《宣明历》共有术文，“（）”内为《宣明历》术文，其余为《大衍历》术文。
② 《大衍历》为“以递加初数”，《宣明历》为“用加初数”

	千九十八分）。	
74	（七十四度，）又度增四百四十，（增一千五百三十八分。）	z=74 度 $\Delta^3=440$，　$\Delta^2=1538$
75	（七十五度，）又度增千六十，（增两千五百九十八分。）	z=75 度 $\Delta^3=1060$，　$\Delta^2=2598$
76	（七十六度，）又度增千八百六十，（增四千四百五十八分。）	z=76 度 $\Delta^3=1860$，　$\Delta^2=4458$
77	（七十七度，）又度增二千八百四十，（增七千二百九十八分。）	z=77 度 $\Delta^3=2840$，　$\Delta^2=7298$
78	（七十八度，）又度增四千，（增一万一千二百九十八分。）	z=78 度 $\Delta^3=4000$，　$\Delta^2=11298$
79	（七十九度，）又度增五千三百四十，（增一万六千六百三十八分。）	z=79 度 $\Delta^3=5340$，　$\Delta^2=16638$
80	（至于八十度，）各为每度差。因累其差以递加初数[②]，满百为分，分满十为寸，各为每度晷差。又累其晷差，得戴日之北每度晷数。	

由此差分表可求出 z=0 至 81 度的影长。

表 2.2.2　　《宣明历》中二十四气晷长（尺）

定气	曲安京重构之数值	定气	《高丽史·宣明历》中之数值
冬至	12.7033	冬至	13.7032
小寒	12.3911	小寒	12.3119
大寒	11.3830	大寒	11.3130
立春	9.9478	立春	9.9478
雨水	8.3781	雨水	8.3781
惊蛰	6.8874	惊蛰	6.8874
春分	5.4470	春分	5.4470
清明	4.1959	清明	4.1959
谷雨	3.2069	谷雨	3.2069
立夏	2.4451	立夏	2.5451
小满	1.8989	小满	1.8919
芒种	1.5714	芒种	1.5714
夏至	1.4780	夏至	1.4780
小暑	1.5714	小暑	1.5714
大暑	1.8989	大暑	1.8989
立秋	2.4451	立秋	2.4851
处暑	3.2069	处暑	3.2069
白露	4.1959	白露	4.1959
秋分	5.4470	秋分	5.4470
寒露	6.8874	寒露	6.8874
霜降	8.3781	霜降	8.3781
立冬	9.9478	立冬	9.9478
小雪	11.3830	小雪	11.3812（旧书为 11.3820）

大雪	12.3911	大雪	12.3912

表 2.2.3 《宣明历》二十四节气晷影长度

定气	黄道去极度[①]	天顶距(尺)	《宣明历》中晷长(尺)	用一行差分法的验证值
冬至	115.20	58.375	12.7033	12.7033
小寒（大雪）	114.55	57.725	12.3911	12.3911
大寒（小雪）	112.30	55.475	11.3830	11.3830
立春（立冬）	108.65	51.825	9.9478	9.9478
雨水（霜降）	103.80	46.975	8.3781	8.3781
惊蛰（寒露）	97.95	41.125	6.8874	6.8874
春分（秋分）	91.30	34.475	5.4470	5.446975
清明（白露）	84.65	27.825	4.1959	4.195935
谷雨（处暑）	78.80	21.975	3.2069	3.206875
立夏（立秋）	73.95	17.125	2.4451	2.44505
小满（大暑）	70.30	13.475	1.8989	1.898925
芒种（小暑）	68.05	11.225	1.5714	1.5714125
夏至	67.40	10.575	1.4780	1.477955

一行的晷影差分表对唐代天文数据的获得产生了深远影响，后来的一些天文数据已经不再局限于实际观测，而开始通过计算推求，中国古代历法的制定方法开始呈现明显的程序化算法的特点。

（2）《大衍历》求阳城每日晷影的算法

求阳城日晷每日中常数：各置其气去极度，以极去戴日下度五十六，盈分八十二减半之，各得戴日之北度数及分。各以其消息定衰戴日北所直度分之晷差，满百为分，分满十为寸，各为每日晷差。乃递以息减消加其气初晷数，得每日中晷常数。

求每日中晷定数：各置其日所在气定小余，以爻统减之，余为中后分。置前后分，以其日晷差乘之，如大衍通法而一，为变差。乃以变差加减其日晷常数（冬至后，中前以差减，中后以差加。夏至后，中前以差加，中后以差减。冬至一日有减无加，夏至一日有加无减），各得每日中晷定数。[59]

一行的每度晷影差分表在 73 度之后最高达到五次，根据此差分表与一阶等间距插值方法就可以求出阳城每日的晷影长。

令太阳的天顶距 $z = x_k = k$（$k = 1,2,3,\cdots 81$），影长 $l = f(x_k)$，

影差 $\Delta = \Delta f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$，

由一行的差分表可知，只要确定了 x=1° 时的晷影长度，晷影表中其余各值均可计算出来。对于非整度的天顶距对应的影长可由线性插值法求得，方法即一阶等间距的插值公式：

$$f(x_k + x) = f(x_k) + x\Delta^1 = f(x_k) + x[f(x_k + 1) - f(x_k)]$$

[①]该栏数据是将《宣明历》中数值四舍五入的结果，术文中指出“刻法八十四，度母同刻法”即所给数值度一下的下分以 84 为分母。该表参见：曲安京.《大衍历》晷影差分表的重构. 自然科学史研究，第 16 卷 1997 (3)，241。

例如，推算天顶距 58.375° 的晷影，即求 $f(x_k+x)=f(58.375)$ 的值。此时 $x_k=k=58$，$x=0.375$，可查一行晷影表中 x_0=58 时晷影的长为 12.5195 尺(1 唐尺=24.75cm)，该行的一阶差分为 0.4900 尺，故所求晷影=12.5195+0.4900×0.375=12.70325 尺。

（3）《大衍历》的九服晷影算法

一行知道，随去极度变化的影长，又因地方而异，但同太阳的天顶距有固定的对应关系。一行在《大衍历》中发明了求任何地方每日影长和去极度的计算方法，叫做“九服晷影”。术文如下：

凡九服所在，每气初日中晷常数不齐。使每气去极度数相减，各为其气消息定数。因测其地二至日晷[测一至可矣，不必兼要冬夏]，于其戴日之北每度晷数中，较取长短同者，以为其地戴日之北度数及分。每气各以消息定数加减之[因冬至后者，每气以减；因夏至后者，每气以加]，得每气戴日北度数。各因所直度分之晷数，为其地每定气初日中晷常数[其测晷有在表南者，亦据其晷尺寸长短与戴日北每度晷数同者，因取其所直之度，去戴日北度数；反之，为去戴日南度。然后以消息定数加减之。[60]

若 N_P 为阳城的北极高度，S_1、S_2、S_3、…为阳城夏至、小暑、大暑等日的太阳上中天位置，则 z_1、z_2、z_3、…为阳城夏至、小暑、大暑、…各气太阳的去极度，取 $a_1=z_2-z_1$、$a_2=z_3-z_2$、…，则 a_1、a_2 分别为阳城夏至到小暑、小暑到大暑的去极度差数，也是太阳天顶距的差数。且这个差数对任何地点的相应季节都是相等的。

设有某地北极高度为 N_P'，则夏至、小暑、大暑等日的太阳上中天位置为 S'_1、S'_2、S'_3、…。显然，有 $a_1=z'_2-z'_1$，$a_2=z'_3-z'_2$，…。

历法中已给出阳城各气初日的太阳去极度，则各气的去极度差即为已知，同样各气的太阳天顶距差亦为已知，而这个差数对于任一地点都是相等的。这样一来，对于任一地方，只要知道某一节气（如夏至）的太阳天顶距，其它各气的太阳天顶距都可以通过加减这个差数求出。剩下还要解决以下两个问题：

其一，如何求某地夏至（或冬至）的太阳天顶距；

其二，已知天顶距如何换算出晷影长。这两个问题都可以通过建立一个影长与太阳天顶距的对应数表来解决。

如果列出一张以天顶距为引数，每隔一度的影长的数值表，则以上两个问题都可以解决：先在所测地测出（冬）夏至晷影长度（在一行的大地测量中，在每处都进行了这样的测量），由影长查表得出太阳天顶距，再加减一个如前所述的差数 a_i，即可求出该地各气的天顶距，返回再查表得影长。

《大衍历》“步晷漏术”中就建立了这样一个从 0 度到 80 度的每度影长与太阳天顶距对应数表。

根据上述《大衍历》“九服晷影”的术文，求九服之地各气内各日午中晷影的算法步骤如下：

首先由九服之地各气太阳的去极度 p_i，算出本气的消息定数 $q_i=p_{i+1}-p_i$，然后测量所在地冬至（或夏至）午中晷影 l_w（或 l_s），只测一至的晷影即可。由《大衍历》晷影差分表查得九服之地冬至（或夏至）午中时太阳的天顶距 z_w（或 z_s），由此推算该地各气午中时太阳的天顶距 $z_i= z_w-\sum_{k=1}^{i} q_k$，(夏至后为 $z_i=$

$z_w+\sum_{k=1}^{i}q_k$)。九服之地每气初日太阳的天顶距，称做“戴日北度数”，可由《大衍历》中的晷影差分表查得本气初日中晷常数。

由天顶距 z_i 查晷影差分表，即可得九服之地每气初日太阳的晷影长度 $l(z_i)$。求出九服之地各气初日的晷影 $l(z_i)$后，按照《大衍历》晷影计算法，即可求得各气内每日午中之晷影。

2.3 唐末至宋元时期的晷影算法——相减相乘法

中国古代的晷影计算在历法家追求精度的过程中，继续向前发展。唐末边冈制定《崇玄历》，一改过去差分表格计算方法，首创相减相乘法，开唐宋历家以公式算法制作天文表之先河。他所创立的晷影公式，是中国历法史上的第一例三次函数，至于其构造原理，并未交代。陈美东[61]等一些学者认为边冈的算法是三次插内差法的应用，曲安京[62]则认为边冈的相减相乘算法与三次内差法无关，采用的是一种特殊逼近方法。在这一时期的历法中，任意时刻的晷影长可根据相减相乘公式求出，程序化算法的特点更为明显。

宋辽金夏时期是我国历法史上最重要的一个时期，从公元 961 年立国到 1278 年南宋灭亡，宋朝先后有 20 多部历法。北宋就创制了 12 种历法，颁行的有 9 家。如王朴的《钦天历》(公元 956~963 年)，王处讷的《应天历》(公元 964~982 年)，吴昭素的《乾元历》(公元 983~1000 年)，王睿的《至道历》(未用)，史序的《仪天历》(1001~1023 年)，张奎的《乾兴历》(未用)，宋行古《崇天历》(1024~1064 年，1068~1074 年)，周琮的《明天历》(1065~1067 年)，卫朴的《奉元历》(1075~1093 年)，姚舜辅的《占天历》(1103~1105 年)和《纪元历》(1106~1127 年，1133~1135 年)。南宋的天文学家创制了 11 种历法，有陈德一的《统元历》(公元 1136~1167 年)，刘孝荣的《乾道历》(公元 1168~1176 年)和《淳熙历》(公元 1177~1190 年)，石万的《五星再聚历》(未用)，刘孝荣的《会元历》(公元 1191~1198 年)，杨忠辅的《统天历》(公元 1199~1207 年)，鲍澣之的《开禧历》(公元 1208~1251 年)，李德卿的《淳佑历》(1252 年)，谭玉的《会天历》(公元 1253~1270 年)，陈鼎的《成天历》(公元 1271~1276 年)。

构造相减相乘形式的多项式函数，以计算各天体在固定周期内的非均匀运动位置，是这一时期历法计算的主体。晷影计算也采用同样的方式，具有代表性的历法有《崇玄历》、《崇天历》、《纪元历》等，现逐一讨论这三部历法中的晷影计算问题。

2.3.1 边冈《崇玄历》的晷影计算

边冈发现冬至前后晷影变换率比夏至前后要快的特点，根据这一特点，在《崇玄历》(892 年)中制定了一种新的晷影长度计算公式。边冈分别以冬、夏至为起点，用两个不同的三次多项式去构造不同阶段的影长公式。北宋史序的《仪天历》(1001 年)和宋行古的《崇天历》都是在沿用边冈算法的基础上去进行适当修正的，《明天历》(1064 年)和《纪元历》(1106 年)的公式也是受其启发而构造的。

曲安京根据明末清初黄鼎编辑的《天文大成管窥辑要》(1653 年)(下简称《天文大成》)第三卷“论中晷差”的文字材料，对《崇玄历》晷影计算法进行了分析。《天文大成管窥辑要》[63]记载：

边冈作崇玄，以去冬夏（以）[两]至日辰多寡立为初末限，以立方相减相乘之法求之：

置冬至晷影，以限日除之，[退两位]，得差法。又以冬至晷影减雨水晷影，余以限自而除之，得减差法，余为泛差。又以限除之，得日泛差。

置雨水晷影八尺二寸，减夏至晷影，余以限日自而除之，（得差法），又以限日自而除之，退一等，[并之，得差法。又以限日自而除之]，以减差法，余为泛差。又以限除之，得日泛差。

故求法以所入限副之，以乘[日泛差]，得减差法，余为定差。再乘其副，得晷影差。冬至后减，夏至后加，得所求限晷影定数。

宋仪天、崇天皆仍其法，崇天惟以限自而除影余，并限为差，法之稍异耳。

设冬至、雨水、夏至晷影长度分别为w、r、s。

$f_1(x)$表示冬至前后$x< d_1$日的影长，d_1表示冬至到雨水的日数，即冬至后初限；

$f_2(x)$表示夏至前后$x< d_2$日的影长，d_2表示雨水到夏至的日数，即冬至后末限(等于夏至后初限)

当冬至前后$x<d_1$时，有

$$f_1(x)=w-[\frac{w}{100d_1}-(\frac{w}{100d_1^2}-\frac{w-r}{d_1^3})\cdot x]\cdot x^2 \qquad (B_1)$$

其中$\frac{w}{100d_1}$为差法，$\frac{w}{100d_1}-\frac{w-r}{d_1^2}$为泛差积，$\frac{w}{100d_1^2}-\frac{w-r}{d_1^3}$为日泛差。

假设差法$=a$，日泛差$=b$，定差$=a-bx$，由（B_1）得

$$\frac{w-f_1(x)}{x^2}=a-bx$$

所以$f_1(x)$可由“定差”确定。当x以日为单位连续变换时，问题转化为了构造等差数列$a-bx$，其中a为首项，b为公差。因为$f_1(d_1)=r$，所以差法a选定后，日差b可由（B_2）求得$b=(a-\frac{w-r}{d_1^2})\cdot\frac{1}{d_1}$＝泛差积÷限＝日泛差

当夏至前后$x<d_2$时，有

$$f_2(x)=s+[(\frac{r-s}{d_2^2}+\frac{r-s}{10d_2^2})-\frac{r-s}{10d_2^3}x]\cdot x^2 \qquad (B_2)$$

其中$\frac{r-s}{d_2^2}+\frac{r-s}{10d_2^2}$为差法，$\frac{r-s}{10d_2^3}$为日泛差。

$f_2(x)$也类似，可通过下式求得

$$\frac{f_2(x)-s}{x^2}=a-bx$$

其中等差数列首项$a=\frac{11}{10}\cdot\frac{r-s}{d_2^2}$为差法，公差$b=\frac{r-s}{10d_2^3}$为日差。

因为$f_2(d_2)=r$，所以差法a选定后，日差b可出（B_2）求得

$$b=(a-\frac{r-s}{d_2^2})\cdot\frac{1}{d_2}=\text{泛差积}\div\text{限}=\text{日泛差}$$

公式（B_1）、（B_2）即为边冈晷影公式创立的立方相减相乘算法。

对于岳台以外的九服晷影计算，边冈也设计了新的公式，其术文如下：

九服中晷，各于其地立表候之。在阳城北，冬至前候晷景与阳城冬至同者，为差日之始；在阳城南，夏至前候晷景与阳城夏至同者，为差日之始。自差日之始，至二至日，为距差日数也。在至前者，计距前已来日数；至后者，计入至后已来日数。反减距差日，余为距后日准。求初、末限晷差，各冬至前后以加、夏至前后以减冬夏至阳城中晷，得其地其日中晷。若不足减，减去夏至阳城中晷，即其日南倒中晷也。自余之日，各计冬夏至后所求日数。减去距冬夏至差日，余准初、末限入之。[64]

若九服之地在岳台以北，则该地冬至时午中晷影比阳城冬至时午中晷影长，则必有一天该地午中晷影长等于岳台冬至午中晷影。若九服之地在岳台以南，则该地夏至时午中晷影比阳城夏至时午中晷影长，则必有一天该地午中晷影长等于岳台夏至午中晷影。设该日距冬至（夏至）时刻的时间间隔为d日（即所谓的“距差日”）。边冈求出距差日之后，根据岳台二至晷影：

冬至前后 $f_1(x)=w-[\frac{w}{100d_1}-(\frac{w}{100d_1^2}-\frac{w-r}{d_1^3})\cdot x]\cdot x^2$

夏至前后 $f_2(x)=s+[(\frac{r-s}{d_2^2}+\frac{r-s}{10d_2^2})-\frac{r-s}{10d_2^3}x]\cdot x^2$

来构造九服之地冬至（或夏至）前后第x日太阳的晷影函数$l(x)$，其公式如下：

若九服之地在岳台之北，

当冬至前后$x<d$日时，

$$l(x)=w+[\frac{w}{100d_1}-(\frac{w}{100d_1^2}-\frac{w-r}{d_1^3})(d-x)](d-x)^2$$

当冬至前后$x>d$日时，

$$l(x)=f_1(x-d)=w-[\frac{w}{100d_1}-(\frac{w}{100d_1^2}-\frac{w-r}{d_1^3})(x-d)](x-d)^2;$$

若九服之地在岳台之南，

当夏至前后$x<d$日时，

$$l(x)=s-[(\frac{r-s}{d_2^2}+\frac{r-s}{10d_2^2})-\frac{r-s}{10d_2^3}(d-x)]\cdot(d-x)^2$$

当夏至前后$x>d$日时，

$$l(x)=f_2(x-d)=s+[(\frac{r-s}{d_2^2}+\frac{r-s}{10d_2^2})-\frac{r-s}{10d_2^3}(x-d)]\cdot(x-d)^2$$

2.3.2 《崇天历》的晷影公式

两宋历法推算均承袭《崇玄历》的算法模式，晷影计算也是如此，几乎全部都使用相减相乘法。下以《崇天历》为例，介绍其晷影计算方法。

《崇天历》(1024 年)“步晷漏”中，首先给出基本天文数据：

二至限：一百八十二、六十二分。

一象：九十一、三十二分。

消息法：七千八百七十三。

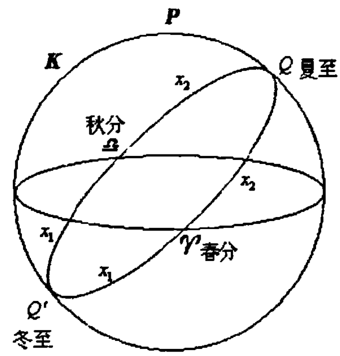
辰法：八百八十二半，八刻三百五十三。

昏明刻：一百二十九半。

昏明余数：二百六十四太。

冬至阳城晷景：一丈二尺七寸一分半；初限六十二，末限一百二十，六十二分。

夏至阳城晷景：一尺四寸七分，小分八十；初限一百二十，六十二分，末限六十二。[65]



回归年长 365.24 日，半年 182.62 日，冬至阳城晷影长 12.7150 尺，夏至阳城晷影长 1.4780。

至后初限 62 日，末限 120.62。即以冬至时刻为起算点，所求某日午中时刻的积日为 x（称作中积），

若 $x\in[0,\ 62]$，则为入冬至后初限，入限数 $x_1=x$；

若 $x\in[62,\ 182.62]$，则为入冬至后末限，入限数 $x_2=182.62-x$；

若 $x\in[182.62,\ 244.62]$，则为入夏至后初限，入限数 $x_2=x-182.62$；

若 $x\in[244.62,\ 365.24]$，则为入夏至后末限，入限数 $x_1=365.24-x$。

确定 x_1、x_2 的方法如下：

求阳城晷景入二至后日数：各计入二至后日数，乃如半日之分五十，又以二至约分减之，即入二至后来午中日数及分。

求阳城晷景入初末限定日及分：置其日中入二至后求日数及分，以其日午中入气盈缩分盈加缩减之，各如初限已下为在初限；已上，覆减二至限，余为入末限定日及分。

求盈缩分：置入二至后来午中日数及分，以气策及约分除之为气数，不尽，为入气以来日数及分；加其气数，命以冬、夏至，算外，即其日午中所入气日及分。置所入气日约分，如出朏朒术入之，即得所求。[66]

先确定所求日到二至时刻（气约分 r 刻）间的整日数 k，加上半日之分（50 刻），再减二至约分，即 $100k+50-r=t$ 为所求日午中至二至时刻的时间间隔．然后查日躔表，以确定日躔盈缩改正 Δt，则 $x=t+\Delta t$ 。

阳城每日午中晷影的计算方法如下[67]：

求阳城每日中晷定数：置入二至初、末限定日及分，如冬至后初限、夏至后末限者，以初、末限日及分减一百四十六，余退一等，为定差；又以初、末限日及分自相乘，以乘定差，满六千六百四十五为尺，不满，退除为寸分，命曰晷差；以晷差减冬至晷数，即其日阳城午中晷景定数。如冬至后末限、夏至后初限者，以初、末限日及分减一千二百一十七，余再退，为定差；亦以初末限日及分自相

乘，以乘定差，满二万四千九百三十，余为尺，不满，退除为寸分，命曰晷差；以晷差加夏至晷数，即其日阳城中晷定数。若以中积求之，即得每日晷影常数。

当其日入冬至后初限、夏至后末限时，即 $x=x_1$ 时，以

$$f(x)=12.7150-\frac{(146-x)x^2}{66450}\approx 12.7150-10^{-6}\times(2197.14-15.05x)x^2 \qquad (\mathrm{A_1})$$

计算晷影长；

当其日入夏至后初限、冬至后末限时，即 $x=x_2$ 时，以

$$f(x)=1.4780-\frac{(1217-x)x^2}{2493000}\approx 1.4780-10^{-7}\times(4881.67-4.01x)x^2 \qquad (\mathrm{A_2})$$

计算晷影长。

《崇天历》的公式（$\mathrm{A_1}$）与（$\mathrm{A_2}$），类似于《崇玄历》的三次函数，但多项式系数比《崇玄历》简单。

宋代的《崇天历》、《明天历》、《观天历》等历法，均因循边冈《崇玄历》的算法形式，构造求岳台晷影的多项式函数，至于阳城以外其他地方的晷影计算，也构造“九服晷影术”，如《崇天历》的九服晷影术文如下：

求九服距差日：各于所在立表候之，若地在阳城北，测冬至后与阳城冬至晷景同者，累冬至后至其日，为距差日；若地在阳城南，测夏至后与阳城夏至晷景同者，累夏至后至其日，为距差日。

求九服晷景：若地在阳城北冬至前后者，置冬至前后日数，用减距差日，为余日；以余日减一百四十六，余退一等，为定差；以余日自相乘而乘之，满六千六百四十五除之为尺，不满，退除为寸分，加阳城冬至晷景，为其地其日中晷常数。若冬至前后日多于距差日，即减去距差日，余依阳城法求之，各其地其日中晷常数。若地在阳城南夏至前后者，以夏至前后日数减距差日，为余日，以减一千二百一十七，余再退，为定差；以余日自相乘而乘之，满二万四千九百三十为尺，不满，退除为寸分，以减阳城夏至晷数，即其地其日中晷常数；如不及减，乃减去阳城夏至日晷景，余即晷在表南也。若夏至前后日多于距差日，即减去距差日，余依阳城法求之，各其地其日中晷常数。若求中晷定数，先以盈缩分加减之，乃用法求之，即各得其地其日中晷定数。[68]

设岳台冬至晷影为 w，夏至晷影为 s，九服之地在岳台以北（南），则该地冬至（夏至）时午中晷影比阳城冬至（夏至）时午中晷影长，则必有一天该地午中晷影长等于岳台冬至（夏至）午中晷影，该日距冬至（夏至）时刻的时间间隔为 d 日（即“距差日”）。

当九服之地所求日午中时刻 x 入冬至后初限、或夏至后末限时，其日午中晷影与冬至晷影差为

$$|l(x)-w|=\frac{(146-|x-d|)(x-d)^2}{66450};$$

当九服之地所求日午中时刻 x 入夏至后初限、或冬至后末限时，其日午中晷影与夏至晷影差为

$$|l(x)-s|=\frac{(1217-|x-d|)(x-d)^2}{2493000}。$$

显然，《崇天历》的九服晷影公式是对《崇玄历》公式的简化。

2.3.3 《纪元历》的晷影公式

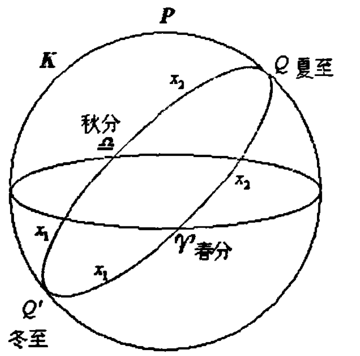
北宋姚瞬辅的《纪元历》（1106 年）是两宋时期数学水平最高的一部历法，该历法广泛使用相减相乘的计算公式以处理天文计算问题，这些公式的精度较之于以前的历法有很大的提高，晷影计算公式也具代表性，它基本上代表着两宋时期晷影计算的一般模式。其晷影算法分两类，一是求岳台[①]各日午中晷影，二是求九服晷影。前者是后者计算的基础。

与《崇玄历》一样，《纪元历》也是分别以冬至和夏至为起点，将一个回归年的晷影计算分成两种情况。所不同的是，它采用了有理多项式函数，在夏至前后的公式的后半部分，又补充了一个修正值。

《纪元历》求岳台晷影午中定数术文如下：

冬至后初限、夏至后末限，以百通日内分，自相乘为实，置之。以七百二十五除之，所得加一十万六百一十七。并入限分，折半为法，实如法而一为分，不满退除为小分；其分满十为寸，寸满十为尺。用减冬至岳台晷影常数，即得所求日午中晷影定数。夏至后初限、冬至后末限，以百通日内分，自相为实乘。乃置入限分，九因，再折，加一十九万八千七十五为法［其夏至前后日，如在半限以上者，减去半限，余置于上，列半限于下，以上减下，余以乘上，进二位，七十七除之，所得加法为定发，然后除之］；实如法而一为分，不满退除为小分，其分满十为寸，寸满十为尺，以加夏至晷影常数，即得所求日午中晷影定数。[69]

《纪元历》给出二至限即冬至 Q' 到夏至 Q（或夏至 Q 到冬至 Q'）的时间间距，或这两个点的赤道度数，等于 182.6218。冬至后初限 $Q'\Upsilon$=夏至后末限♎ Q'=62.20 日；夏至后初限 Q♎ = 冬至后末限 ΥQ =120.42 日。冬至岳台晷影常数 w =1283 寸，夏至岳台晷影常数 s =156 寸。



以冬至时刻为起算点，所求某日午中时刻的积日为 x（称作中积），

若 $x\in[0,62.20]$，则为入冬至后初限，入限数 $x_1=x$；

若 $x\in[62.20,182.6218]$，则为入冬至后末限，入限数 $x_2=120.42-(x-62.20)$；

若 $x\in[182.6218,303.0418]$，则为入夏至后初限，入限数 $x_2=x-182.6218$；

若 $x\in[303.0418,365.2436]$，则为入夏至后末限，入限数 $x_1=62.20-(x-182.6218-120.42)$。

姚瞬辅采用对称函数求每日午中晷影，冬至后初限、夏至后末限计算公式相同；冬至后末限、夏至后初限则采用另外的相同公式。

所求某日午中入冬至后初限或夏至后末限时，入限数为 x_1，则所求日午中晷影长为

$$f(x_1)=w-\frac{(100x_1)^2}{\frac{1}{4}[\frac{(100x_1)^2}{725}+100617+100x_1]}$$

① 在北宋都城，即今河南开封。

$$=1283-\frac{(100x_1)^2}{\frac{1}{4}[\frac{(100x_1)^2}{725}+100617+100x_1]} \qquad (\mathrm{L}_1)$$

其中$(100x_1)^2$称作实，$\frac{1}{4}(\frac{(100x_1)^2}{725}+100617+100x_1)$称作法。

所求某日午中入夏至后初限或冬至后末限，入限数为x_2，则所求日午中晷影长为

$$f(x_2)=s+\frac{(100x_2)^2}{\frac{9\times100x_2}{4}+198075+\Delta} \qquad (\mathrm{L}_2)$$ ①

其中Δ为修正值。

当$x_2<\frac{1}{2}$夏至初限=60.21日时，$\Delta=0$，即

$$f(x_2)=s+\frac{(100x_2)^2}{\frac{9\times100x_2}{4}+198075}=156+\frac{(100x_2)^2}{\frac{9\times100x_2}{4}+198075};$$

当$60.21\le x_2<120.42$日时，$\Delta=\frac{(12042-100x_2)(100x_2-6021)}{7700}$，即

$$f(x_2)=s+\frac{(100x_2)^2}{\frac{9\times100x_2}{4}+198075+\frac{(12042-100x_2)(x_2-6021)}{7700}}。$$

《纪元历》晷影计算公式是如何获得的，其构建原理至今是个谜。《纪元历》的晷影公式与《崇玄历》晷影算法有相似之处。曲安京[70]认为《崇玄历》是令$\frac{f_2(x)-s}{x^2}=a-bx$为递减的等差数列而构建的，《纪元历》可能与之相反，取$\frac{x_2^{\ 2}}{f(x)-s}=a+bx$为递增的等差数列来构建。

对于（L_1），如果设 $\frac{x^2}{w-f(x_1)}=Ax_1^{\ 2}+Bx_1+C$

（$A=\frac{1}{2\times725}$，$B=\frac{100617}{2}$，$C=\frac{1}{2}$）

为递增的等差数列，则可解释《纪元历》晷影公式的由来。

---

① 薄树人解读为$f(x_2)=s+\dfrac{x_2^{\ 2}}{\frac{9x_2}{2}+198075+\Delta}$。

《纪元历》求九服晷影的术文如下：

各于所在测冬夏二至晷数，乃相减之，余为二至差数。如地在岳台南测夏至晷景在表南者，并冬夏二至晷数为二至差数。其所求日在冬至后初限、夏至后末限者，置岳台冬至晷景常数，以所求日岳台午中晷景定数减之，余以其处二至差数乘之，如岳台二至差数一丈一尺二寸七分而一，所得，以减其处冬至晷数，即其地其日中晷定数。所求日在夏至后初限、冬至后末限者，置所求日岳台午中晷景定数，以岳台夏至晷景常数减之，余以其处二至差数乘之，如岳台二至差数而一，所得，以加其处夏至晷数，即其地其日中晷定数。如其处夏至景在表南者，以所得之数减其处夏至晷数，余为其地其日中晷定数，亦在表南也。其所得之数多于其处夏至晷数，即减去夏至晷数，余为其地其日中晷定数，在表北也。[71]

设 A 地冬至晷影为 w_A，夏至晷影为 s_A，A 地二至晷影差为 $\Delta_A = w_A - s_A$ 。

若所求某日午中入冬至后初限（或夏至后末限），该日岳台午中晷影定数为 $f(x)$，则该日午中 A 地中晷定数为

$$l_A = w_A - \frac{[1283 - f(x)]\cdot\Delta_A}{1283-156} \qquad (A_1)$$

若所求某日午中入夏至后初限（或冬至后末限），该日岳台午中晷影定数为 $f(x)$，则该日午中 A 地中晷定数为

$$l_A = s_A + \frac{[f(x) - 156]\cdot\Delta_A}{1283-156} \qquad (A_2)$$

（A_1）式等价于 $\dfrac{w_A - l_A}{w_A - s_A} = \dfrac{1283 - f(x)}{1283-156}$；

（A_2）式等价于 $\dfrac{l_A - s_A}{w_A - s_A} = \dfrac{f(x) - 156}{1283-156}$。

它表明，姚舜辅认为 A 地各日相对于二至的晷影差与岳台各日相对于二至的晷影差是成比例的，也就是说 $\dfrac{l_A - s_A}{w_A - s_A}$ 与 $\dfrac{w_A - l_A}{w_A - s_A}$ 都是与地点无关的常数。其实这是近似的，各地午中的晷影。

2.4 小结

以上我们通过对中国历史上具有代表性的几部历法中晷影计算方法的分析与介绍，概述了中国古代天文学家在晷影测算方面的工作。中国的天文历算学家善于对一些基本的实测数据进行数学处理，构造多项式函数以近似代替晷影长的正切函数。晷影计算方法先后经历了从简单的一阶等差数列、二次插值法、构造每度晷影的正切差分表，再到相减相乘公式算法的发展历程，从开始的实际测量，到后来的公式计算，完成了从测到算的转变，而且精度日益提高。在晷影计算方法的历史发展中，一行的工作最为突出：首先他明确揭示了晷影与太阳天顶距的关系，其次他构造了世界数学史上第一个正切函数表，再次创立“九服晷影”算法，解决了不同地点的晷影测算问题。一行的晷影算法与《麟德历》算法有着内在的联系，由此可以认为它与印度的算法没有关系。边冈计算晷影的三次多项式

函数算法，改变了隋唐时期插值算法的模式，开创了宋元历法的多项式函数算法的新格局。尽管其造术原理今日尚不清楚，但有很高的数值精度，其在实际应用中的作用却是不可小视的。这表明，唐末以来随代数学在中国的进步，晷影计算方法也获得了显著进步。

第三章 古代印度的晷影计算

印度天文学家们通常希望尽可能保留自己的传统，而不愿接受天文理论的革新，因此他们常不去关注数理天文学的逻辑基础，而把精力集中于计算方法的构造上，不管构造的方法是对原来的简化或近似。同时，由于多次遭受外来入侵，印度天文学也并不是一成不变的，它在保留传统的同时，又与一些外来的理论相结合，从而形成了独特的理论体系。本章将分析古代印度天文学在晷影计算方面的算法及其特点。

本章将按美国学者 David Pingree 对印度天文学的分期[72]，对伊斯兰影响时期前的印度晷影计算方法进行讨论①。印度天文学开始的吠陀时期，因没有历法体系和独立的天文历法著作，而散落在吠陀文献中的材料没有见到关于晷影的记载，所以无法讨论。下面将从巴比伦影响时期(约公元前 400~公元 200 年)、希腊、巴比伦天文影响并存时期(约公元 200~400 年)和希腊天文影响时期(约公元 400~1600 年)分析印度天文学中的晷影计算方法。

3.1 巴比伦影响时期(约公元前 400~公元 200 年)的晷影计算

至迟在公元前 5 世纪，阿契美尼德王朝（Achaemenids，公元前 559~前 330 年）统治印度西北部，使得美索不达米亚的知识传到了印度。《Sārdūlakarṇāvadāna》(公元 148 年以前的作品)和《Arthaśāstra》(Kauṭilyad 著，该书在 2 世纪就有了现在的形式)保存了起源于美索不达米亚的晷针等测量工具的材料。

从此时起，印度晷针长度一般都采用 12 añgula②。规定当时的天文研究中心乌贾因地方的夏至日午中影长为 0 añgula（这表明乌贾因可能与巨蟹座所在的回归线很近），冬至日午中影长为 12 añgula，每个黄道带影长差为 2 añgula。影长相关数值如表 3.1.1：

表 3.1.1

M（=最大值）	12 añgula
m（=最小值）	0 añgula
μ（=平均值）	6 añgula
d(=相邻节气差)	2 añgula
Δ（=最大值与最小值之差）	12 añgula
P（=周期）	12 个月

《Artha-śāstra》第 II 部分 20 章 39 至 40 诗节给出了晷影的每日变化情况。晷影随时间变化的满足公式 3.1.1：

$$\frac{d}{2t}=\frac{s}{g}+1 \qquad (3.1.1)$$

其中 $\frac{t}{d}$ 是日出后逝去（或日落前剩余）的时间占昼长的比例，g 为晷针长度（取 12 añgula），s 为晷影长[73]。由 3.1.1 式可以知，公元前 300 年夏至时北回归线（北纬 23.7°）处一天内的晷影变化情况，如图 3.1.1[74]。

① 本文涉及的印度“古代”限定在 13~14 世纪以前，即伊斯兰天文学影响以前的时期，也即中国的宋元及以前时期。

② añgula，见本文第 21 页脚注 。

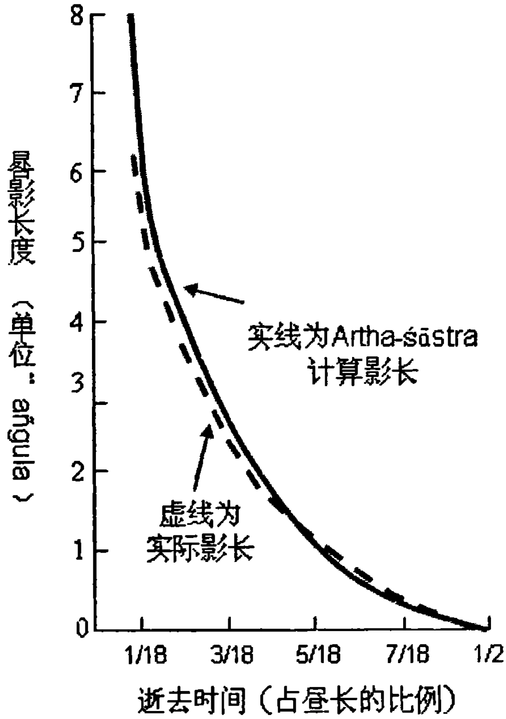


图 3.1.1

《Artha-śāstra》第II部分20章41至42诗节，给出了晷影每年变化的折线函数。下面通过两个具体纬度一年内晷影的实际变化情况，分析《Artha-śāstra》构造的折线函数（见图3.1.2[75]）。

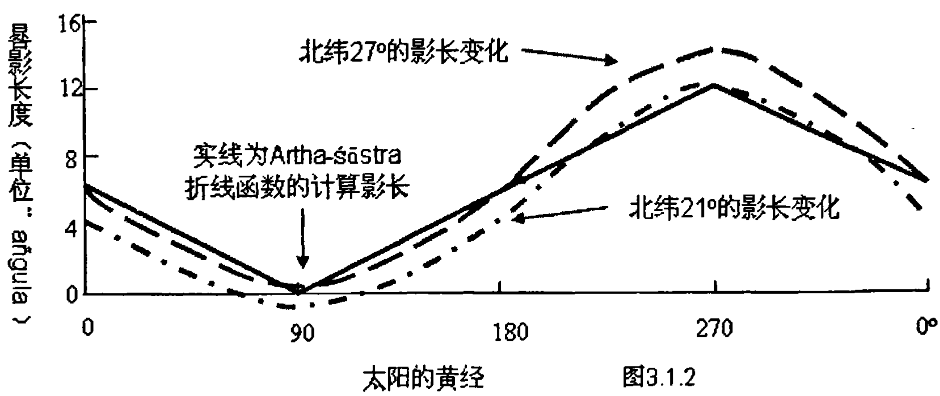


图3.1.2

由图3.1.2可知，北纬27°和北纬21°每年的晷影变化与《Artha-śāstra》第II部分20章41至42诗节的折线函数构造的每年晷影变化图形非常相似，可见，该折线函数中的数据应该是在印度北部观察的基础上得出的，其精确度是比较高的。

巴比伦影响时期的印度天文著作中，给出了冬夏二至午中晷影长和相邻黄道带的影长差。其它时间午中晷影长，应该可通过相邻节气的影长差去求得的。可见，该时期印度天文学家把太阳看成是匀速运动的，各黄道带的晷影长成等差数

列。该时期的印度天文著作，还通过折线函数给出了昼长变化和每天、每年的晷影变化情况。折线函数的数据，应该是天文学家对印度具体地点的实际观测后给出的。昼长的折线函数将在下一节进行讨论。

3.2 希腊、巴比伦天文影响并存时期(约公元200~400年)的晷影计算

希腊、巴比伦天文影响并存时期涉及晷影计算的天文著作，目前可见者仅有《Yavanajātaka》和《五大历算全书》两部。《Yavanajātaka》把影长与白昼长结合起来，利用巴比伦的折线函数构造出各太阳在黄道各宫时的昼长值，给出了晷影计算公式。《五天文学纲要》将希腊的球面三角知识应用到晷影计算，奠定了后来(希腊天文影响时期)印度晷影计算的基础。

3.2.1《Yavanajātaka》中的晷影公式

公元149或150年，Yavaneśvara将一部希腊天文著作翻译成梵文，其中大部分内容被保存在Sphujidhvaja的《Yavanajātaka》（公元269或270年）的第79章中。该章数理天文学的内容混杂着巴比伦和印度的天文学知识，或者说是希腊传入印度时夹杂的巴比伦的因素。

《Yavanajātaka》第79章32诗节根据昼长给出了每日日出后时间与晷针(12 añgula)长及影长的关系式[76]：

$$t=\frac{6C}{s-s_n+12} \qquad (3.2.2)$$

其中t为日出后时间，$12C$为白昼长，s为该时刻的影长，s_n为该日午中影长。

根据上式，可以得出日出t小时后的影长公式：

$$s=s_n-12+\frac{6C}{t} \qquad (3.2.3)$$

《Yavanajātaka》79章第31诗节给出了3.2.2式中的昼长值（$12C$），它是借助于巴比伦数理天文学中常使用的折线函数给出的。该诗节给出太阳在黄道十二宫时的昼长值如表3.2.1：

表3.2.1

摩羯宫	12 牟呼粟多①	
水平宫	13 牟呼粟多	射手宫
双鱼宫	14 牟呼粟多	天蟹宫
白羊宫	15 牟呼粟多	天秤宫
金牛宫	16 牟呼粟多	室女宫
双子宫	17 牟呼粟多	狮子宫
巨蟹宫	18 牟呼粟多	

巴比伦影响时期的印度天文学家，习惯利用巴比伦数理天文学中常使用的折线函数给出某日的昼长值（以牟呼粟多为单位）。如该时期的印度天文著作《吠陀支天文学》（Vedāṅga-jyotiṣa）②给出的昼长公式：

① 牟呼粟多 (Muhūrta)：把一天30等分，1/30天称为1牟呼粟多。

② 即吠陀辅助天文学，现存有两种文本。本来由农业等生产活动发展起来的天文学至此演变成了为祭祀服务的辅助学，此书的目的也主要用来安排祭祀的日期。

$$T = d(x) = 12 + \frac{6x}{183} = 12 + \frac{2x}{61}。\qquad (3.2.4)$$

其中 x 为冬至前（后）的天数，$d(x)$是以牟呼粟多为单位、距冬至 x 天的昼长值。

由 3.2.4 式的昼长公式可得，一年中最长与最短昼长差为 6 牟呼粟多（半年的天数取 183），相关数值如表 3.2.2：

表 3.2.2

M（=最大值）	18 牟呼粟多
m（=最小值）	12 牟呼粟多
μ（=平均值）	15 牟呼粟多
d(=相邻节气差)	2/61 牟呼粟多
Δ（=最大至与最小值之差）	6 牟呼粟多
P（=周期）	366 天

由表 3.2.2 可以看出，一年中最长、最短的昼长比值为 3:2，与当时巴比伦长短昼长比值一致。David Pingree 认为该比值是从巴比伦天文学借鉴来的，该阶段的印度天文学也是在巴比伦天文影响下形成的[77]。日本学者大桥由纪夫（Yukio Ôhashi）[78]则有不同的看法。他认为北纬 35°左右的最长、最短的昼长比值为 3:2，而这正是印度克什米尔（Kashmir）的地理纬度，所以该比值及 3.2.4 式不是来自巴比伦天文学，而是来自印度天文学家在印度北部的实际观测，David Pingree 的观点是错误的。大桥由纪夫还指出对春（秋）分点外插构造出的 3.2.4 式适用于北纬 35°的情况，而对（冬）至点内插时构造出的 3.2.4 式适用于北纬 27°（每月昼长差为 1 牟呼粟多时）和北纬 29°（每月昼长差为 2 牟呼粟多时）的情况，所以该时期的印度天文学没有受到巴比伦天文的影响。

通过大桥由纪夫的分析可以看出，巴比伦影响时期印度天文著作中的折线函数应该是在对本地观测后形成的，而非照搬巴比伦天文中的数据。但就其使用方法来看，应该受到了巴比伦的影响。因为最迟至公元前 5 世纪，阿契美尼德王朝统治印度西北部时，美索不达米亚（古巴比伦所在地）的知识就传到了印度。由于折线函数能达到比较高的精确程度，巴比伦几乎将其用来处理一切数理天文学问题。这个时期印度天文学家用折线函数处理天文内容的方法绝非巧合，而应该与巴比伦天文学有着千丝万缕的联系。

3.2.2《五大历算全书》中的晷影计算法

印度天文学家、数学家伐罗诃密希拉（Varāhamihira，公元 505~587 年)将《Saura-siddhāntas》（中译名《太阳悉檀多》）①、《毗坦摩诃悉檀多》（Paitāmaha-siddhāntas）、《婆薮施悉檀多》（Vāsiṣtha-siddhāntas）、《保利莎悉檀多》（Pauliśa-siddhāntas）和《罗马伽悉檀多》（Romaka-siddhāntas）五部天文著作进行改写，完成了《五大历算全书》（Pañca-siddhāntikā，下简称《五书》）。

《五书》第 3、4、5、14 章大部分内容来源于希腊、巴比伦天文影响并存时期的天文学著作，一般认为来源于《婆薮施悉檀多》、《保利莎悉檀多》和《罗马伽悉檀多》。其中第 4 章包含利用希腊三角函数进行晷影计算的内容。

① “悉檀多”（siddhānta）原是佛教因明（相当于现代的逻辑学和认识论）的术语。因明由“因”（推理依据、理由、原因）、“宗”（论题）、“喻”（例证）三部分组成，“宗”就是悉檀多，有时根据它的内容意译为“历数书”。详见任继愈的《宗教词典》，上海：上海辞书出版社，1981，404 页。

《五书》第 4 章第 44 诗节给出了通过太阳高度正弦值 (śaṅuk)求相应时刻晷影长度的方法：

太阳高度正弦值的平方去减 14400(《五书》中半径 R=120，14400 即 R 的平方)，其差的平方根乘以 12（即晷针长)，再被太阳高度正弦值去除结果即为晷影长。[79]

古代印度天文著作中的三角函数并非现代意义下的三角函数，而是现代三角函数的 R（半径）倍，所以上文中的“正弦”为现代正弦值的 R 倍。上文即：

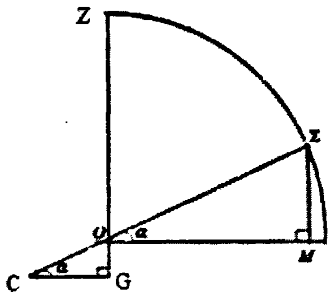
R（半径）倍太阳高度正弦值（$\sin h$）的平方去减半径的平方，其差的平方根乘以晷针长(g)，再被太阳高度正弦值的 R 倍去除，结果为晷影长 s，

即
$$s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\frac{g}{R\sin h} \qquad (3.2.5)$$

将 3.2.5 式整理后为 $s=\cot\alpha\cdot g$。

如图 3.2.1 所示，晷针 $OG=g$，晷影 $CG=s$，半径 $OZ=R$，$\Sigma M=R\sin h$。由相似三角形对应关系容易得到：

$$s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\frac{g}{R\sin h}$$
$$=\cot\alpha\cdot g$$



在太阳高度圆(altitude circle)平面的投影

图3.2.1

现代晷影计算公式中，每日午中晷影长近似等于天顶距正切值乘以晷表高，即

$$b=g\cdot\tan z_{真} \qquad (3.2.6)$$

而太阳高度（角距 h）和太阳天顶距（角 $Z_{真}$）互为余角，所以 3.2.5 式与 3.2.6 式是等价的，即《五书》用太阳高度正弦值求相应时刻晷影长度的方法，与现在计算晷影长度的近似公式是等价的。

David Pingree 根据印度天文学经典著作的术文归纳出晷影计算公式为[80]：

$$s=\sqrt{R^2-\sin^2 h}\cdot\frac{g}{\sin h}\text{①} \qquad (3.2.7)$$

《五书》41 至 43 诗节给出了求太阳高度正弦值的方法[81]：

任意时间太阳高度的正弦值（$HO=R\sin h$），等于从昼夜圈上的地平线到太阳角距离的正弦值（图 3.2.2 中的 HE），乘以观测者余纬度的正弦值($\sin\bar{\varphi}$)，再除以半径(R)。

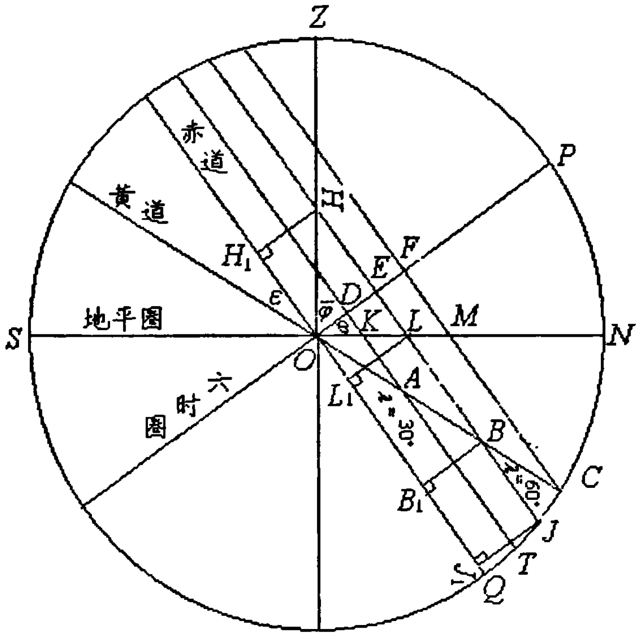
即
$$HO=R\sin h=HE\cdot\sin\bar{\varphi} \qquad (3.2.8)$$

如图 3.2.2 所示，设 t'' 为太阳从日出到日落逝去的 nādis（一日 1/60 的时间单位)，ω为昼长之一半，r 为当天太阳周日视运动圆的半径，λ为黄经。λ=60°，

①这里的“sin$h$”应为现在的 R sin$h$。

太阳在主垂线（prime vertical）时，$H_1L_1=\sin 6t''$，$L_1O=\sin\omega$ ，从昼夜圈上的地平线到太阳的正弦值$HE=(\sin t'-\sin\omega)\cdot\dfrac{r}{R}$，（其中$t'=6t''\mp\omega$）。

所以 $HO=R\sin h=HE\cdot\sin\overline{\varphi}=\dfrac{r\cdot\sin\overline{\varphi}}{R}\cdot(\sin t'\pm\sin\omega)$，其中（$\delta<0$ 时“+”，$\delta>0$“－” ），且



$JJ_1=EO=\sin\delta(60°)$
$NE=\cos\delta(60°)$
$J_1Q=\mathrm{vers}\,\delta(60°)$
$OL_1=\sin\omega(60°)$
$OJ=OQ=R$
$FO=\sin\varepsilon$
$FC=\cos\varepsilon$

图 3.2.2 在子午圈平面的投影

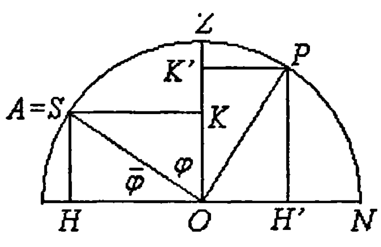


图 3.2.3

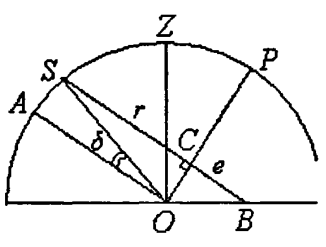


图 3.2.4

春（秋）分时，如图 3.2.3，SZN 为子午线，S 为春秋分那天南中天的太阳，P 为北极，R=3438′。太阳的天顶距为φ，于是

$$\sin\varphi=SK(PH')$$

此为观测地地理纬度的正弦值，φ 的余角为$\overline{\varphi}$，于是

$$\sin\overline{\varphi}=SH(PK')$$

是太阳高度的正弦值。

对于春秋分以外时间，如图 3.2.4，太阳赤纬为 δ，其日太阳周日视运动圈（昼夜圈）的半径为 $r=SC$，则

$$r=\sqrt{R^2-R^2\sin^2\delta}$$

再利用这个圆，把黄经λ变换为赤经α。黄经λ时的昼夜圈半径为 r，黄经 90° 时的昼夜圈半径为 r_0，则有

$$\sin\alpha=\frac{r_0}{r}\sin\lambda$$

该式可以由下图 3.2.5 得到证明。

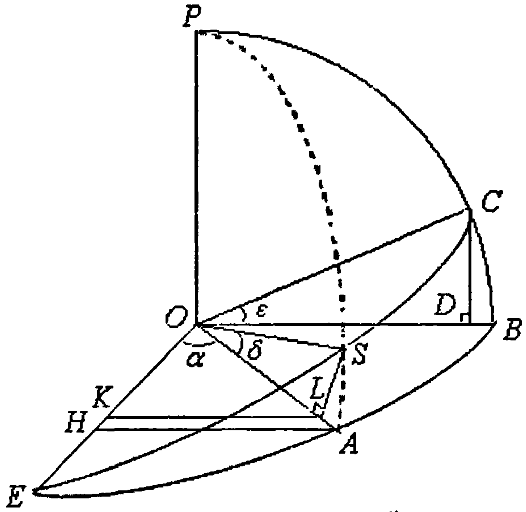


图 3.2.5

在图 3.2.5 中，E 为春分点，ESC 为黄道，EAB 为赤道，与黄经为 λ 的黄道点 S 相对应的赤道点 A 的赤经为 μ，赤纬 S 的正弦为 $SL=\sin\delta$，黄经 90° 的点 C 的赤纬正弦为 $CD=\sin\varepsilon$，过 A 与 L 向 OE 作垂线 AH 和 LK，则有下列关系成立：

$$\frac{AH}{LK}=\frac{AO}{LO}\frac{R}{\cos\delta}=\frac{R}{r},\qquad \frac{LK}{SK}=\frac{OD}{CO}=\frac{r_0}{R}。$$

两式相乘，得

$$\frac{AH}{SK}=\frac{r_0}{r}$$

这里因为 AH 是赤经α 的正弦，SK 是黄经 λ 的正弦，所以有

$$\sin\alpha=\frac{r_0}{r}\sin\lambda \quad 。$$

印度天文学中，赤道坐标系一般只用于特殊场合，其“赤经”概念一般称作“在 Lańko 上上升”（Lańkodaya），语源来自于托勒密的《天文大成》[82]。

下面是《五书》求 r、ω和 $\sin t'$ 的具体方法。由图 3.2.2 得

$$r=JE=\cos\delta=\sqrt{R^2-R^2\sin^2\delta}\qquad（\delta\ 为赤纬）\qquad (3.2.9)$$

ω 为昼长修正值的一半，亦即黄道与赤道的“上升差”。有

$$\sin\omega = e \times \frac{R}{r} \qquad (3.2.10)$$

其中e为地正弦（kṣitijyā），是印度天文学经常使用的一个概念。由图 3.2.2、图 3.2.6、图 3.2.7 可知：$e = \sin\delta \cdot \frac{s_0}{g}$，$s_0$为春（秋）分点午中影长。

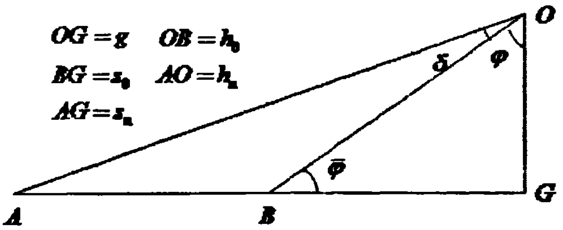
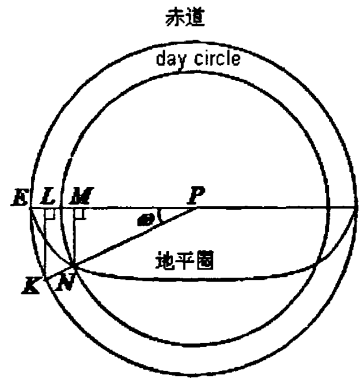


图3.2.6



在赤道平面的投影

图 3.2.7

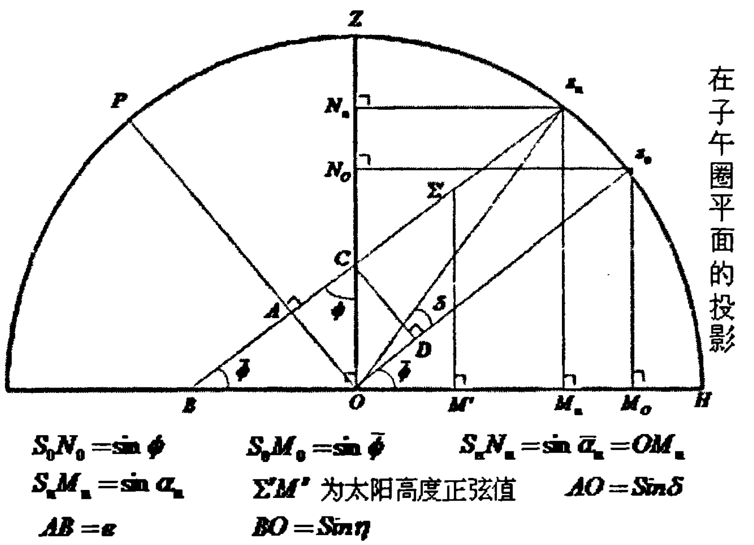


图3.2.8

因为$t' = 6t'' \mp \omega$，t''为太阳从日出到日落逝去的时间($n\bar{a}dis$)，所以时间确定后，再由 3.2.10 式可求得ω，即可得到$\sin t'$的值。

《五书》利用了希腊三角函数、通过太阳高度正弦值求任意时刻晷影长度，计算涉及了半昼长、地正弦、太阳上升振幅等概念。其中晷针长g、半径R、春（秋）分午中影长s_0为定值，观测地选定后，该地地理纬度的正弦值也为定值，所以任意时刻晷影长主要是随赤经δ 的变化而改变的。

这种方法对印度的晷影计算产生了深远的影响，$s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\dfrac{g}{R\sin h}$ 成为利用太阳高度正弦值求晷影长度的基本公式。希腊天文影响时期的印度天文学家就是在该公式的基础上，改造与重构晷影长度公式的。

3.3 希腊天文影响时期(约公元 400～1600 年)

希腊天文影响时期长达 1000 年以上，一般认为是印度古典天文学的全盛时期，是印度天文学史研究的中心部分。该时期出现了许多数学家、天文学家、天文著作和不同的天文学派。其中最有影响的五个学派是：阿耶学派（Arya-paksa，公元 500 年后）、夜半学派（Ardharatrika-paksa，公元 500 年后）、梵摩学派（Brōhma-paksa，公元 500 年）、太阳学派（Saura-paksa，约公元 800 年）和象头学派（Ganeṣa-paksa，约公元 1500 年）。下面分析这几个学派的天文学著作中的晷影计算。

与阿耶学派一样，夜半学派的创始人也是阿耶波多。象头学派最著名的著作《Grahalāghava》在吸收了其它学派的诸多天文知识的基础上，对梵摩学派天文著作进行了修正。由于手头资料不足，本文对夜半学派和象头学派的晷影理论不作过多涉及。

3.3.1《阿耶波多历法书》中的晷影计算

阿耶波多(Āryabhaṭa)是阿耶学派的创始人，他的《阿耶波多历法书》（Āryabhaṭīya，以下简称《阿书》）是印度第一部留下作者名字的天文著作，也是阿耶学派最基本的资料。

《阿书》“天球章”（讨论地平坐标系下球面天文学问题）第 28 至 32 诗节是利用三角函数（analema）的方法求太阳高度与晷影等问题，采用的方法多是《五书》中一些三角函数公式的重复。

第 28 诗节求任意时间太阳高度的正弦值求法，与《五书》第四章 41 至 44 诗节给出的方法相同：

任意时间太阳高度的正弦值：以从昼夜圈上的地平线到太阳的正弦值，乘[观测者]纬度的余正弦值，用[大圆的]半径除，[其商]是对应于日出后经过的[上午的]或者到日没前剩下的[下午]时间的[太阳]高度[的正弦值]。[83]

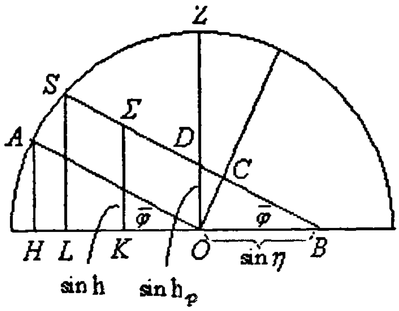


图3.3.1

如图 3.3.1 所示：BΣ 为从昼夜圈上的地平线到太阳的正弦值，观测者余纬度的正弦值等于 $\sin\overline{\varphi}$，大圆的半径为 R（阿耶波多取 R= 3438′）。日出后经过的上午的或者到日没前剩下的下午时间（相当于$\omega\pm t'=t$的t，t'为某时刻距离午中的时间。因为这是时角，所以用 6 除，以 nāḍī 为单位，即一日 1/60 的时间单位）的太阳高度的正弦值 $\Sigma K=R\sin h$。

$$\Sigma K=R\sin h=B\Sigma\times\sin\overline{\varphi}\text{。}$$

按照《毗坦摩诃悉檀多》第六章第一节中给出的算法：

$$B\Sigma = \Sigma C \pm CB \quad (\delta<0\text{ 时 “+”},\ \delta>0\text{ “−”})$$
$$= \frac{r}{R}\sin t' \pm e \quad (t'\text{ 为六时圈通过后的时角})$$
$$= \frac{r}{R}(\sin t' \pm \sin\omega)$$

所以 $$\Sigma K = R\sin h = \frac{r(\sin t' \pm \sin\omega)\times\sin\overline{\varphi}}{R}$$

其中ω 为“昼长之补正半分”（caradala 补正，即前面提到的《五书》中昼长的一半），即黄道与赤道的“上升差”，可由下面几个公式推导得到：

太阳赤纬为δ，观测点地理纬度为φ，太阳周日视运动的圆的半径为 r（$=SC$）$r=\sqrt{R^2-R^2\sin^2\delta}$。“地正弦”（ksitijya）即昼夜圈与地平相夹部分的正弦值

$e=\sin\delta\times\dfrac{\sin\varphi}{\sin\overline{\varphi}}$，又$e\times\dfrac{R}{r}=\sin\omega$，所以 $\sin\omega=\sin\delta\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\sin\overline{\varphi}}\cdot\dfrac{R}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2\delta}}$。

第 30 诗节求地平线的太阳离东西线的振幅：

[太阳]最大赤纬之正弦值，乘以任意的[太阳黄经之]正弦值，再以[地方]纬度之余正弦值除即可，所得正弦值是东西地平线上的[自东西点的]太阳之振幅。[84]

如图 3.3.1 所示， $\sin\lambda$ 为黄经正弦值，$\sin\varepsilon$ 为太阳最大赤纬正弦值，由

$\sin\eta=\dfrac{R\sin\delta}{\sin\overline{\varphi}}$ 与赤纬与黄经的关系 $\sin\delta=\dfrac{\sin\varepsilon\times\sin\lambda}{R}$ 可以导出东西线与太阳出没点之间的振幅($\sin\eta$)：

$$BO=\sin\eta=\frac{\sin\varepsilon\times\sin\lambda}{\sin\overline{\varphi}}$$

第 31 诗节求东西圆上的太阳高度：

[太阳]在赤道以北，[且]它（太阳在东西地平线上的振幅正弦值）若比地方纬度之余正弦值小，则它乘以地方纬度之余正弦值，以地方纬度正弦值除，所得商是东西圆上的[太阳]高度。[85]

图 3.3.1 中的东西圆上的太阳高度

$$DO=\sin h_p=\frac{\sin\eta\times\sin\overline{\varphi}}{\sin\varphi},$$

阿耶波多给出上式的可能条件，即太阳通过东西线条件为，（1）$\delta>0$，（2）$\sin\eta\le\sin\varphi$。而婆罗摩笈多认为（2）应该改为 $\sin\delta\le\sin\varphi$。

如图 3.3.2 所示，$\delta=\varphi$，表示太阳通过东西圆的界限。因为 $R=AO=ZO<ZB$，所以 $\sin\varphi<\sin\eta$。

又若 $\delta>\varphi$，则太阳向天顶以北运行，所以不过东西圆。所以婆罗摩笈多的批判是正确的，

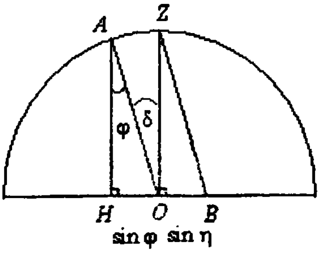


图3.3.2

$$DO=\sin h_p=\frac{\sin\eta\times\sin\overline{\varphi}}{\sin\varphi}\text{ 在 }\sin\delta\le\sin\varphi<\sin\eta\text{成立。}$$

第 32 诗节求太阳最大高度和它的影：

[子午线上太阳的]地平线以上的部分的正弦值，是[太阳的]最大高度，另一

方[天之]中央以下部分之正弦值，是对应于其高度的影。[86]

如图3.3.1，太阳的最大高度即 SL。LO 为太阳高度 SL 的影长，也称做“大影”，也是天顶距 ζ 的正弦值（如图3.3.3）。

此处只是指出了太阳的最大高度和其对应影的位置，而没有给出影长具体的算法。

《阿书》没有过多涉及晷影长度的计算问题，但其给出的求任意时间太阳高度正弦值的方法与《五书》中的公式完全一致。由此可以推断，《阿书》的晷影计算应该也与《五书》方法一致，即先求出太阳高度正弦值，然后利用

$$s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\frac{g}{R\sin h}$$

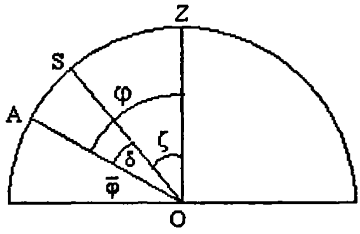


图3.3.3

计算晷影长度。除给出了东西圆上的太阳高度及太阳最大高度和它的影外，《阿书》在晷影计算上没有其它创新之处。

3.3.2 梵摩学派著作中的晷影计算

梵摩（Brōhma）是印度的神，梵摩学派最基本的经典著作，是被收入《五书》的《毗坦摩诃悉檀多》（Paitāmaha siddhāntas）和婆罗摩笈多的《婆罗摩笈多修正体系》。

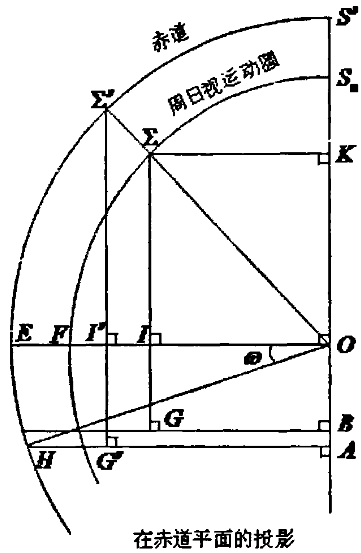
《毗坦摩诃悉檀多》出现于5世纪初，其中的晷影计算理论与前面介绍的《五书》采用的方法一致，也是先求出太阳高度正弦值，再根据 $s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\frac{g}{R\sin h}$ 计算任意时刻的晷影长。《毗坦摩诃悉檀多》第6章1诗节，通过如下方法构造 $\sin h$ 公式的：

如图 3.3.4，$FO=r$，$OB=e$（地正弦），$OA=\sin\omega$，$D=KB=\Sigma G$，即图3.2.6中的$\Sigma'B$。$\Sigma'H$ 为图3.2.6中日出后的时间，6时（o'clock）后的时间为$\Sigma'E=\Sigma'H-\omega$，$D=\Sigma G=\Sigma I+e$，

$\Sigma I=\Sigma'I'\cdot\frac{r}{R}=\sin\Sigma'E\cdot\frac{r}{R}$，

求出 D 后，可得太阳高度的正弦值：

$$\sin\alpha=\sin\bar{\varphi}\cdot\frac{D}{R}$$



在赤道平面的投影

图 3.3.4

从而出 $s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2\alpha}\cdot\frac{g}{R\sin\alpha}$ 求出任意时刻晷影。

公元628年婆罗摩笈多的《婆罗摩笈多修正体系》（Brāhmasphuṭa siddhānta，以下简称 *BSS*），是梵摩学派中已知作者和年代的最古老著作。《BSS》也是根据 $s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\frac{g}{R\sin h}$ 计算晷影长。婆罗摩笈多在该书中沿用了《阿耶波多

历法书》中的太阳高度正弦值算法的同时，并引入了一个求太阳高度正弦值的复杂公式。

《BSS》第三章4诗节首先给出了利用春（秋）分点影长求晷影的方法：

春（秋）分点晷影长与太阳振幅的和（太阳在南半球时）或差（太阳在北半球时），为任意时刻晷影长。[87]

如图3.3.5所示，$O\Sigma'$为半径（与图3.3.4中$O\Sigma'$相同），S_0为春（秋）分点太阳的位置，相应的晷影长$AG=s_0$。太阳振幅正弦值$AB=\sin_h\eta$，春（秋）分影长的斜边$OB=h_s$，$HO=\sin\eta$。

由相似三角形对应边的关系，有：

$$\sin_h \eta = \sin\eta \cdot \frac{h_s}{R}$$

所以 $$BG = AG \pm AB = s_0 \pm Sin_h\eta = s_0 \pm \sin\eta \cdot \frac{h_s}{R}$$

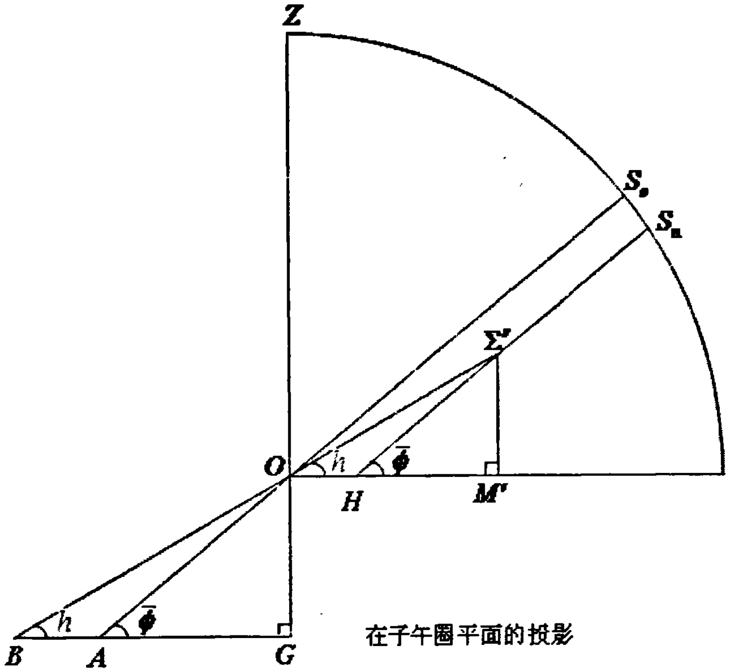


图3.3.5

《BBS》第三章54－56给出了一个复杂的太阳高度正弦值计算公式：

$$R\sin h = \sqrt{\frac{(\frac{R^2}{2} - R^2\sin^2\eta)\cdot g^2}{\frac{1}{2}g^2 + s_0^2} + \left(\frac{g\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{\frac{1}{2}g^2 + s_0^2}\right)^2} + \frac{g\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{\frac{1}{2}g^2 + s_0^2}$$

即 $$R\sin h = \sqrt{\frac{(\frac{R^2}{2} - R^2\sin^2\eta)\cdot 12^2}{72 + s_0^2} + \left(\frac{12\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{72 + s_0^2}\right)^2} + \frac{12\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{72 + s_0^2} \qquad (3.3.1)$$

其中 s_0 为春（秋）分点影长，η为太阳振幅，晷针长 g=12，R 为半径（婆罗摩笈多取 R=3270）。该式只有当太阳在北半球且晷影与东西线成 45°度角时正确。

该公式证明如下[88]：

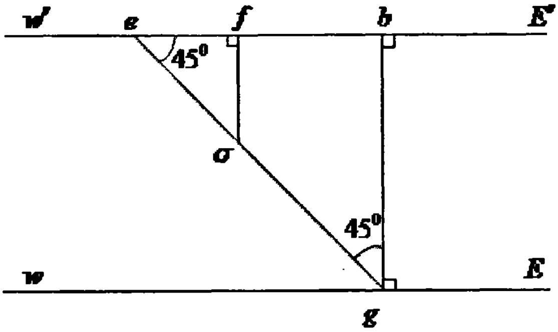


图 3.3.6

如图 3.3.6 所示，$gb=eb=s_0$, $eg=s$，$\sigma f=ef=\sin_h\eta$。可得：$s^2=2\cdot s_0^2$ 。

如果 $g\sigma$ 为时角等于 45^0 时太阳在赤道上的影，则

$$\sigma e^2=2\cdot\sin_h^2\eta$$

由图 3.3.7，有

$$\sin h=SJ+JF$$

下面由 $\sigma e^2=2\cdot\sin_h^2\eta$ 求 SJ：

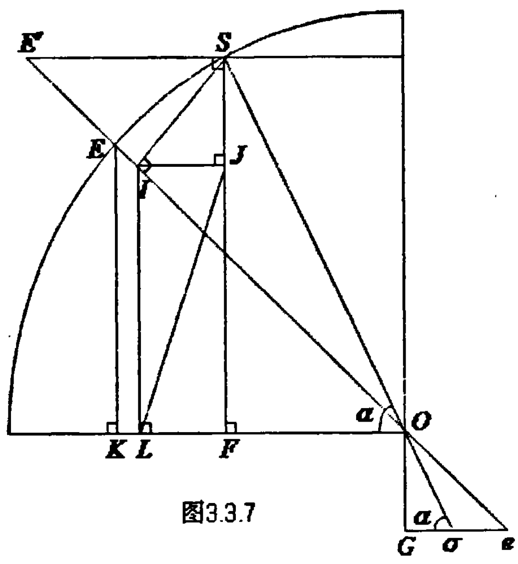


图3.3.7

$$\frac{SO}{h}=\frac{SE'}{\sigma e}=\frac{SE'}{2\sin_h\eta}=\frac{R}{h}$$

$$\frac{R^2}{R^2}=\frac{SE'^2}{2\sin^2\eta}$$

$$SE'^2=2\sin^2\eta$$

$$\frac{SI}{SJ}=\frac{h}{s}$$

$$\frac{SI}{SE'}=\frac{g}{h}$$

$$\frac{SJ}{SE'}=\frac{s\cdot g}{h^2}$$

由 $s^2=2\cdot s_0^2$ 和

$SE'^2=2R\sin^2\eta$ 有：$SJ=\dfrac{SE'\cdot s\cdot g}{g^2+s^2}=\dfrac{R\sin\eta\cdot s_0\cdot 12}{72+s_0^2}$。

下面求 $JF=IL$：

因为 $\dfrac{IJ^2}{SI^2}=\dfrac{EK^2}{SO^2}=\dfrac{IL^2}{IO^2}=\dfrac{IJ^2+IL^2}{SI^2+IO^2}=\dfrac{JL^2}{SO^2}$，所以 $JL^2=EK^2$

$$IL^2=JL^2-IJ^2=EK^2-IJ^2=EK^2-SI^2+SJ^2$$

又因为 $\dfrac{EO^2}{EK^2}=\dfrac{h^2}{g^2}$

由 $\dfrac{SI}{SE'}=\dfrac{g}{h}$和 $\dfrac{IJ^2}{SI^2}=\dfrac{EK^2}{SO^2}=\dfrac{IL^2}{IO^2}=\dfrac{IJ^2+IL^2}{SI^2+IO^2}=\dfrac{JL^2}{SO^2}$

得：$EK^2-SI^2=\dfrac{g^2\cdot EO^2-g^2\cdot SE'^2}{g^2+s^2}=\dfrac{\left(\dfrac{R^2}{2}-R^2\sin^2\eta\right)\cdot 12^2}{72+s_0^2}$

所以 $IL=\sqrt{\dfrac{(\dfrac{R^2}{2}-R^2\sin^2\eta)\cdot 12^2}{72+s_0^2}+\left(\dfrac{12\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{72+s_0^2}\right)^2}$

$$IL+SJ=R\sin h=\sqrt{\dfrac{(\dfrac{R^2}{2}-R^2\sin^2\eta)\cdot 12^2}{72+s_0^2}+\left(\dfrac{12\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{72+s_0^2}\right)^2}+\dfrac{12\cdot s_0\cdot R\sin\eta}{72+s_0^2}$$

梵摩学派著作以产生于希腊、巴比伦天文影响并存时期的《五大历算全书》的方法为基础，构造了其它的太阳高度正弦公式。但有些公式非常复杂，适用范围却非常有限。如 3.3.1 式，只适用于太阳在北半球，且晷影与东西线成 45°度角时的情况。所以这些工作对整个晷影计算的推进起的作用不大。该段时期的天文学家受早期计算方法的影响，将主要精力用在了太阳高度正弦公式的改造上。

3.3.3《苏利亚历法书》中的晷影计算

古代印度数理天文学著作分两类：一类是知道作者、时间清楚的，如阿耶波多的《阿耶波多历法书》、婆罗摩笈多的《婆罗摩笈多修正体系》等；另一类是隐藏了作者及其年代的宗教启事录，为了让人们接受书中的天文系统和计算方法，把该类著作说成是直接从神那里传播来的，如伐罗诃密希拉收于《五书》的太阳、毗坦摩诃、婆薮施、保利莎和罗马伽五种悉檀多、《苏利亚历法书》（Sūrya-siddhānta）等都属于这一类。

在印度广泛流传的《苏利亚历法书》（以下简称《苏》）是太阳学派最著名的教科书，一般认为该书出现年代不早于公元 490 年，不迟于公元 1091 年。1860 年被 Rev. Ebenezer Burgess 英译后，该书内容被欧洲人所了解。《苏》中的晷影计算已经与前面介绍方法的基础了发生了改变。

《苏》第三章涉及晷影计算问题，有春（秋）分点晷影长度、通过天顶距求午中晷影长、利用太阳振幅和春（秋）分点晷影长求任意时刻晷影长和利用太阳高度正弦值求晷影等问题。

第 17 诗节给出了春（秋）分影长计算方法，术文如下：

太阳纬度的正弦值乘以 12（晷针长），除以太阳余纬的正弦值，得到太阳在春（求）分的晷影长。[89]

如图 3.3.8 所示，ZS 是$\dfrac{1}{4}$子午线圆周，Z 为天顶，S 为南方的点，C 为中心，EC 为赤道平面的投影。Be 为春（秋）分晷影，Cb 为晷针长，BE 为春（秋）分纬度正弦值，BC 为春（秋）太阳余纬的正弦值(即纬度的余弦值)。

由 ΔCBE 与 ΔCbe 相似，有 $BC:BE=Cb:be$，

所以 $be = \dfrac{BE \times Cb}{BC}$

即　$春(秋)分晷影长 = \dfrac{春(秋)分纬度正弦值 \times 晷针长}{春(秋)分余纬正弦值}$。

《苏》第三章 20－22 为通过太阳赤纬和观测者地理纬度，计算午中晷影长度问题。方法如下：

观测点地理纬度与太阳赤纬的和（二者方向相同时）或差（二者方向相反时），为太阳的子午圈天顶距。从而得到天顶距的正弦、余弦值。天顶距正弦值乘以晷针长，再除以余弦值，结果即为晷影长。[90]

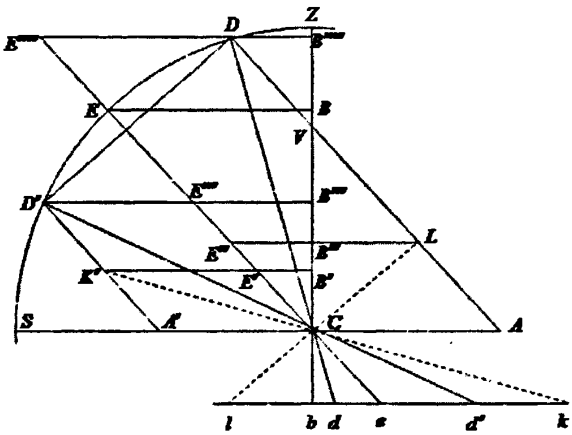


图 3.3.8

如图 3.3.8 所示，当太阳在 D'点时，ZD'为其天顶距（=观测者地理纬度±太阳赤纬），$D'B'''$为天顶距的正弦，CB'''为天顶距余弦。则

$CB''' : D'B''' = Cb : bd'$

所以　$bd' = \dfrac{D'B''' \times Cb}{CB'''}$

即

$$午中影长 = \frac{天顶距正弦值 \times 晷表高}{天顶距余弦值} = 天顶距正切值 \times 晷表高$$

《苏》第三章 20 至 22 诗节给出的公式与现代晷影计算的近似公式是一样的，即每日午中晷影长近似等于天顶距正切值乘以晷表高。

《苏》第三章 22 至 25 诗节给出了太阳振幅，然后利用太阳振幅和春（秋）分点晷影求任意时刻晷影长度的方法，具体如下：

太阳赤纬正弦值乘以春（秋）分影斜边，再除以晷针长等于太阳振幅。

春（秋）分点晷影长与太阳振幅的和（太阳在南半球时）或差（太阳在北半球时），为任意时刻晷影长。[91]

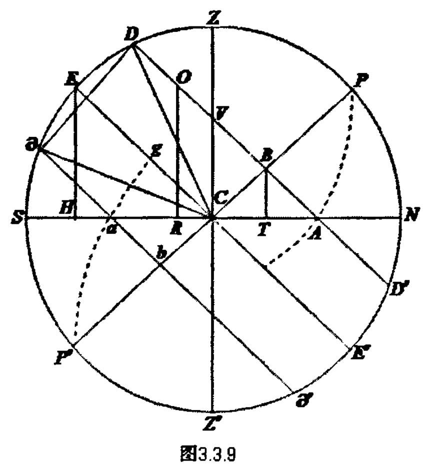


图3.3.9

如图 3.3.9 所示，先求太阳振幅。E 为春（秋）分点，AC 为太阳振幅正弦值，BC 为赤纬正弦值。

由于$\angle ACB = \angle CEH$=观测者地理纬度，

所以 ABC 与$\triangle CEH$ 相似，

所以 $EH : EC = BC : AC$。

又因为图 3.3.9 中的$\triangle CEH$ 与图 3.3.8 中的$\triangle Cbe$ 相似，

所以 $EH : EC = Cb : Ce$，

所以 $Cb : Ce = BC : AC$。

且得：太阳振幅正弦值 AC，等于赤纬正弦值 BC（等于 DE），乘以春（秋）分影长斜边 Ce，再除以晷针长 Cb。

下面求任意时刻的晷影长。

如图 3.3.8 所示，K'、L、D'、D 为太阳的不同位置。

当太阳在南半球时，如在 D'或 K'点，振幅为 ed'或 ek。振幅再加上春（秋）分点的影长 be，即得 D'或 K'点的晷影长。

当太阳在北半球时，如在 L 点，振幅为 el。振幅再减去春（秋）分点的影长 be，即得 L 点的晷影长。

《苏》第三章 28 至 34 诗节为利用太阳高度正弦值，求太阳通过东西和南北地平经圈时的晷影长度问题，具体方法如下：

从半径平方的一半里减去振幅正弦值的平方，剩下的部分乘以 12（晷针长），再乘以 12，再被春（秋）分点晷影长的平方与晷针长平方的一半的和去除，所得名为“不尽根”（surd）。

春（秋）分点晷影长乘以 12，再乘以振幅正弦值，再被春（秋）分点晷影长的平方与晷针长平方的一半的和去除，所得名为“果”（fruit）。

果的平方加上不尽根，其和的平方减去果（太阳在南半球时），或加上果（太阳在北半球时），得到的为太阳高度正弦值。

太阳高度正弦值的平方减半径的平方，其差的平方根乘以 12，再除以太阳高度正弦值，结果为此刻的晷影长。[92]

上面叙述的是当太阳通过东西和南北地平经圈时，利用太阳高度正弦值求晷影长度的方法，用公式表示为：

$$\text{不尽根}=\frac{\left[\frac{1}{2}(\text{半径})^2-\sin^2(\text{振幅})\right]\times\text{晷表长}^2}{\frac{1}{2}(\text{晷表长})^2+(\text{春(秋)分影长})^2}$$

$$\text{果}=\frac{\text{春（秋）分影长}\times\text{晷表长}\times\sin(\text{振幅})}{\frac{1}{2}(\text{晷表长})^2+(\text{春(秋)分影长})^2}$$

$$\sin(\text{太阳高度})=\sqrt{\text{不尽根}+\text{果}^2}\mp\text{果}\text{（南半球时为减，北半球时为加）}\qquad(3.3.2)$$

若取太阳高度角为 h，半径为 R（《苏》的作者取 R=3438），晷针长为 g=12，春（秋）分影长为 s_0，振幅正弦值为 $\sin\eta$，则 3.3.2 式为

$$\sin h=\sqrt{\frac{(\frac{R^2}{2}-\sin^2\eta)\cdot 12^2}{72+s_0^2}+\left(\frac{12\cdot s_0\cdot\sin\eta}{72+s_0^2}\right)^2}\mp\frac{12\cdot s_0\cdot\sin\eta}{72+s_0^2}\qquad\text{（南减，北加）}$$

$$\text{任意时刻晷影长 } s=\sqrt{R^2-R^2\sin^2 h}\cdot\frac{g}{R\sin h}$$

《苏》第三章 28 至 34 诗节给出的太阳在南（北）半球时，利用太阳高度正弦值求晷影长度的方法只适用于太阳通过东西和南北地平经圈时的情况，且公式非常繁琐。当太阳在北半球时，方法与前面提到的《婆罗摩笈多修正体系》第三章 54 至 56 诗节的晷影计算方法完全相同。只是在其基础上又给出了太阳在南半

球的晷影计算公式。可以看出，《苏》是受到了《婆罗摩笈多修正体系》的影响，只是在其基础上略有扩充而已。

《苏》第三章 34 至 36 诗节为已知太阳上升差和时角，求一天内任意给定时间的太阳高度正弦值 $\sin h$，再利用 $s=\sqrt{R^2-\sin^2 h}\cdot\frac{g}{\sin h}$ 求出该时刻晷影长度的问题。具体如下：

半径加上或减去上升差 (*cara*) 的正弦值（赤纬在北半球加，在南半球减），结果被时角 (*nata*) 的正矢减，再被周日运动半径 (day－radius) 乘，被半径除，结果记为“约数”。

约数乘以余纬正弦值，除以半径，即得太阳高度正弦值，从而得到晷影长。[93]

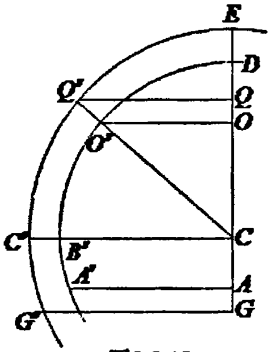


图3.3.10

如图 3.3.10 所示，赤纬在北半球，$GG'C'E$ 为部分赤道，C 为其中心，CE 为半径，GE 为其与子午圈平面的交点，$AA'B'D$ 为周日视运动平面，其与子午圈交点为 AD。CG 为上升差的正弦值，AC 为地正弦，O' 为太阳在给定时刻的位置，$Q'E$ 的弧度$=\angle O'CD=$时角（知道赤纬 declination 和黄纬 latitude 即可求出时角）。过 Q' 作 $Q'Q$ 垂直于 CE，则 $Q'Q$ 为时角正弦值，QE 为时角的正矢，CD 为周日运动半径，AO 为术文中的“约数”，EH 为纬度余弦值。则半径 CE 加上上升差的正弦值 CG，得 EG。EG 再减去时角的正矢 QE，得 GQ。其中图 3.3.10 与图 3.3.9 维数和字母一致。

由图 3.3.10，有　$CE : CD = GQ : AO$

又由图 3.3.9，有　$CE : EH = AO : OR$

太阳高度正弦值　$OR=\frac{EH\times AO}{CE}$。

《苏》第三章 34 至 36 诗节仍然是求太阳高度正弦值问题。但用到了时角，这是与前面介绍方法的不同之处。

《苏》中的晷影计算内容比较丰富，包括春（秋）分影长计算方法、已知太阳赤纬和观测者地理纬度，计算午中晷影长度问题、利用太阳振幅和春（秋）分点晷影求任意时刻晷影长度、当太阳通过东西和南北地平经圈时，利用太阳高度正弦值求晷影长度的方法、和已知太阳上升差和时角，求一天内任意给定时间的太阳高度正弦值等问题。其中已知太阳赤纬和观测者地理纬度，计算午中晷影长度的方法已经和现在晷影计算的近似公式完全一致。

3.4 小结

印度天文学开始的吠陀时期，没有历法体系和独立的天文历法著作。有些材料散落在吠陀文献中，但没有见到有关晷影的记载。

巴比伦影响时期，印度文献中有最长晷影与最短影比值的简单记载，后来在计算晷影长度依赖的每日昼长时，借助了巴比伦数理天文学中常使用的折线函数。该时期的天文著作《Artha-śāstra》也是通过折线函数给出的晷影每年的变化情况。

希腊、巴比伦天文影响并存早期，主要受巴比伦的影响，著作《Yavana-jātaka》中给出了影长随时间变化的公式，且指出了影长与白昼长短的变化关系。希腊、

巴比伦天文影响后期，印度天文学主要受希腊天文学的影响，其晷影计算中也可以看到希腊球面天文学的内容。《五大历算全书》首次给出了通过太阳高度求晷影长的方法，并将三角函数应用于太阳高度正弦值的计算公式，给出了：

$$晷影长=\sqrt{半径^2-太阳高度正弦值^2}\times\frac{晷针长}{太阳高度正弦值},$$

即 $$晷影长=太阳高度余切值\times晷针长。$$

因为太阳高度（角）与天顶距（角）互余，所以《五书》给出的晷影计算公式于与现在晷影计算的近似公式（晷影长=天顶距正切值×晷针长）是等价的。

此后，印度天文学家都采用《五书》的晷影计算公式求晷影长度，只是在太阳高度正弦值的方法上有些改进，因而《五书》奠定了希腊天文影响时期印度晷影计算的基础。

希腊天文影响时期的《阿耶波多历法书》，给出的太阳高度正弦值与《五书》中的方法一致。《婆罗摩笈多修正体系》沿用了《五书》的晷影计算方法，和《阿耶波多历法书》中的太阳高度正弦值的算法，同时，还给出了一个求太阳高度正弦值的复杂公式，及利用春（秋）分点影长求晷影的方法。《婆罗摩笈多修正体系》给出的求太阳高度正弦值的复杂公式，适用于太阳在北半球，且晷影与东西线成 45^0 度角时的情况该公式。《苏利亚历法书》在其基础上将复杂公式扩充到了太阳在南（北）半球、太阳通过东西和南北地平经圈时的情况。除此之外，《苏》中还有春（秋）分点晷影长度、通过天顶距求午中晷影长、利用太阳振幅和春（秋）分点晷影长求任意时刻晷影长和利用太阳高度正弦值求晷影等问题。

另外，印度不同的天文学家对半径的取值不同，如前面提到的阿耶波多和《苏利亚历法书》的作者都取 $R=3438'$，而伐罗诃密希拉取 $R=120$。因为印度半径选取分两种类型：一是采用与古希腊相同的方法，将直径等分成 2n，分半径值为 n，如半径为 120 表示将直径等分为 240 分作为单位，度量半径得 120 角度，仍用 60 进制。另一种是将圆周和直径用统一的单位度量，这样得到的半径即表示 1 弧度所对应的角度值，通常以分为单位，这种半径选取方法与当时所用的圆周率精度有关。如：圆周为 $360°\times60=21600'$，所以半径 $R=21600/2\pi$。若取 $R=3438'$，则 $\pi=\frac{21600}{2\times3438}=3.1416$。[94]在求太阳高度正弦值时，不同的半径取值不影响最后的结果，因为在计算过程中半径都可以消去，最后得到的太阳高度正弦值是与半径无关的。

第四章 若干比较的结论

通过第二、三章对古代中印晷影算法的整理与分析，本章将对这些算法特征及精度进行比较，同时分析中印古代宇宙观对晷影测量的影响。

4.1 古代中印晷影计算的相同之处

首先，中印两国的晷影计算都是建立在传统数学研究基础之上的，因此这种计算方法必然与各自的数学发展相互依存、相互促进。

中国古代科学中有“天算不分家”之说，古代的历法在今天看来就是中国古代的数理天文学。中国古代传统数学体系随着汉代《九章算术》的成书而形成，而天文中的晷影计算也从汉代开始不再以实测为主而采取数学计算的处理方式；隋代乃其晷影数理计算的起步阶段。隋唐时期，通过插值法构造的晷影计算进入了发展阶段，中国传统数学的发展也进入新的历史纪元。刘焯创立不等间距内插法，为李淳风等唐代历算家所沿用。唐末至宋元时代，随着中国代数学的发展，相减相乘法成为我国晷影计算的主流算法。此时出现了秦九韶、杨辉、郭守敬、朱世杰等卓越的数学家及其在代数学领域的优秀成果，中国古典数学也达到了顶峰。其中，元王恂、郭守敬等的《授时历》中使用的三次函数内插法就与朱世杰的招差法有着渊源关系。

古代印度的晷影计算也是如此。古代印度纯粹的数学家极少，数学家几乎都是天文学家。印度天文学早期也没有历法体系和独立的天文历法著作，其数学知识也夹杂于天文学著作之中，解决晷影测算问题主要依靠实测。悉檀多时期（5～12 世纪）是古代印度数学的繁荣时期，此时印度的天文正处在希腊天文影响时期，希腊系统的球面天文学和球面三角学成为印度基本的天文历学体系，在这种体系的影响下，印度的晷影计算也达到了鼎盛时期。该时期涌现出了一批杰出的数学家，如阿耶波多、婆罗摩笈多、婆什迦罗等。他们的著作中既涉及数学知识，同时也包含很多天文学内容，如用勾股法测量影长和用天文学知识计算影长问题，这些题目可参见本文第一章和第三章提到过的《阿耶波多历法书》、《婆罗摩笈多修正体系》等。

中印两国历学家对晷影计算的重视程度也是一样的。为了提高精度，中国历算学家们都十分重视对历法的改进。我国历史上正式颁用过的约 50 部历法中，因气差（即由实测晷影而推算得的冬至时刻与历推冬至时刻之差）改进而进行历法改革的历法就有十八部之多。后汉《四分历》首次出现了晷影表，唐初以前的晷影计算虽没有成为历法体系中独立的部分，但唐中叶一行的《大衍历》将晷影计算纳入“步轨漏”章后，晷影计算被独立出来，成为中国古代历法中的重要组成部分。

晷影计算是印度数学的一个重要分支，也是印度历法中的一个重要组成部分。巴比伦影响时期，印度的著作中就有了晷影测量工具和晷影长度的变化公式的记载。希腊天文影响时期，印度天文著作中的晷影计算内容已经非常丰富。除本文第三章提到的著作外，《T.S.Kuppanna Sastry》、《Bina Chatterjee》、《Vōkyakaraṇa》、Lalla（约 720～790 年）的《Sʹiṣyadhīvṛddhida》、《Kripa Shankar Shukla》、Deva 的《Kara ṇaratna》、Vaṭesʹvara 的《Vaṭesʹvarasiddhānta》等著作中也有许多关于晷影计算的内容。

4.2 古代中印晷影计算之不同

理论来源不同是古代中印晷影计算的一个显著区别。中国历法推算遵循以测为辅、以算为主的原则。中国天文学家通常以一些实测数据为基础通过构造多项式函数来计算晷影长。从插值法到公式算法，中国历法中的晷影计算一直是独立发展的，很难看出有外来文化影响的痕迹。而印度晷影计算方法并非本土独自发展，从折线函数到三角函数计算法，印度晷影计算先后受到了巴比伦和希腊天文学的影响。

中国古代晷影计算是根据若干实测数据来构造多项式函数以拟合晷影函数，这是一种数值方法，以代数方法为其核心。从简单的一阶等差数列、二次插值法、构造每度晷影的正切差分表，到相减相乘公式算法，中国古代历法中的晷影推算方法都是建立在代数公式计算基础之上的。因此，为了提高计算精度，历法学家们不断构造新的计算公式。这是中国历法中晷影公式十分丰富的主要原因。因气差而改革的中国十八部历法中，晷影计算都是集中于算法的改造，而没有接受外界传入的计算方法。隋唐历法家开始设计用于推算晷影长度的算法的时候，印度天文学传入中国。据史料记载，印度裔的瞿坛等家族已进入唐代的皇家天文台，由其主持制定的《九执历》中涉及的历算方法已为僧一行等唐代天文学家所知晓。但中国的历算家始终保持着自己的传统，他们似乎对外域的天文宇宙观与数理方法有一种无形的抵抗。隋唐历法家无一例外，都是采用插值公式、多项式函数的方法。甚至到了宋代仍然没有人考虑借鉴外来的理论和体系，而只是以相减相乘法取代了插值法。

古代印度晷影算法与中国相比要单纯一些。古代印度在遭受外族入侵的同时，也将外来天文知识融入到自身的晷影计算中，并对后来的发展产生了影响。巴比伦影响时期与巴比伦、希腊影响并存的早期，巴比伦天文学对印度天文起着主导作用。印度晷影计算主要是借助巴比伦的折线函数进行构造的。希腊天文影响占主导地位后，印度晷影的计算开始以球形大地宇宙模型为前提，利用三角函数构造晷影算法，利用太阳高度正弦值计算晷影长度。合理的宇宙几何模型的建立和先进的三角函数计算法的使用使印度在晷影计算方面形成了比较固定的、传承性很强的计算模式。后来的晷影计算方法基本上一直在沿用这种模式。如《五要》利用太阳高度正弦值求晷影的方法产生后，被印度天文学家广泛采用。《阿耶波多历法书》、《婆罗摩笈多修正体系》、《苏利亚历法书》等著作中的晷影计算都是在其方法上的重复、改进与完善。相当长的时期内，印度天文学家都把精力集中于对太阳高度求法的改进，完全创新的计算方法很少，这也是整个印度天文学发展的特点之一。

从算法体系上看，中印两国在晷影算法上似乎不存在交流和影响关系。

4.3 中印晷影计算精度之比较

前面分析了古代中印晷影算法的异同，下面将对其算法精度进行比较，为此我们将对其晷影长度分别与理论计算结果做比较，并作简单的数值分析。

4.3.1 中国历法晷影计算的精度分析

为使论题集中，并且考虑使中印对应历法在时间上大致一致，我们取比较具有代表性的唐代的《麟德历》、《大衍历》和《崇玄历》等三部历法来讨论中国古代晷影计算的精度。

纪志刚、陈美东曾计算过这些历法的二十四节气影长的精度。纪志刚利用《麟德历》的方法和现代天文学方法，计算了西安（地理纬度$\varphi = 34°.2833$）公元665年(《麟德历》制历年代)二十四节气影长的历测值与理论值，其中赤纬(δ)= (91.3−历载黄道去极度) × 0.9856；天顶距（z）=$|\varphi-\delta|$；理论值= 8 × tanz。陈美东计算了阳城（地理纬度$\varphi = 34°.4047$）公元892年（《崇玄历》制历年代）《崇玄历》计算方法的晷影历算值和现代天文学理论值，及公元728年（《大衍历》制历年代）《大衍历》方法得出的晷影历算值和现代天文学方法的理论值，其中理论值通过下面的公式求得：

$$\begin{cases} b = 8 \cdot \tan z_{视} \\ z_{视} = z_{真} - \rho - r + p_0 \sin z_{视} \\ z_{真} = |\varphi - \delta_{日}| \\ \sin\delta_{日} = \sin l_{日} \sin\varepsilon \end{cases}$$

（$Z_{视}$为太阳视天顶距，$Z_{真}$为太阳真天顶距，ρ为太阳蒙气差，r为太阳视半径，p_0为太阳的地平视差，φ为观测地点纬度，$\delta_{日}$为太阳赤纬，$l_{日}$为太阳黄经，ε为黄赤道交角）。

下面将这三部历法中二十四节气时刻晷影的历算值和理论值，以及误差的数据[①]列于表4.3.1，并画出相应的图形4.3.1、4.3.2、4.3.3以进行直观分析。

表4.3.1　中国历法晷影计算精度分析　　　　单位（尺）

序号	节气	麟德历			大衍历			崇玄历		
		历测值	理论值	误差	历算值	理论值	误差	历算值	理论值	误差
0	冬至	12.75	12.70	-0.02	12.715	12.662	-0.053	12.715	12.651	-0.064
1	小寒（大雪）	12.28	12.20	-0.08	12.228	12.255	0.027	12.302	12.246	-0.056
2	大寒（小雪）	11.15	11.17	0.02	11.218	11.175	-0.043	11.230	11.168	-0.062
3	立春（立冬）	9.62	9.75	0.13	9.735	9.727	-0.008	9.763	9.722	-0.041
4	雨水（霜降）	8.07	8.20	0.13	8.211	8.189	-0.022	8.185	8.186	0.001
5	惊蛰（寒露）	6.54	6.76	0.22	6.738	6.730	-0.008	6.748	6.729	-0.019
6	春分（秋分）	5.33	5.45	0.12	5.432	5.422	-0.010	5.437	5.422	-0.015
7	清明（白露）	4.24	4.32	0.08	4.321	4.286	-0.035	4.289	4.287	-0.002
8	谷雨（处暑）	3.30	3.37	0.07	3.305	3.327	0.022	3.317	3.329	0.012
9	立夏（立秋）	2.49	2.59	0.10	2.533	2.551	0.018	2.536	2.553	0.017
10	小满（大暑）	1.98	2.02	0.04	1.958	1.972	0.014	1.959	1.975	0.016
11	芒种（小暑）	1.64	1.68	0.04	1.600	1.611	0.011	1.601	1.614	0.013
12	夏至	1.49	1.50	0.01	1.478	1.488	0.010	1.478	1.491	0.013

[①]表4.3.1中，《麟德历》的数据直接引自纪志刚的《麟德历晷影计算方法研究》，《大衍历》和《崇玄历》中的数据直接引自陈美东的《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》。

图4.3.1 《麟德历》晷影计算精度分析

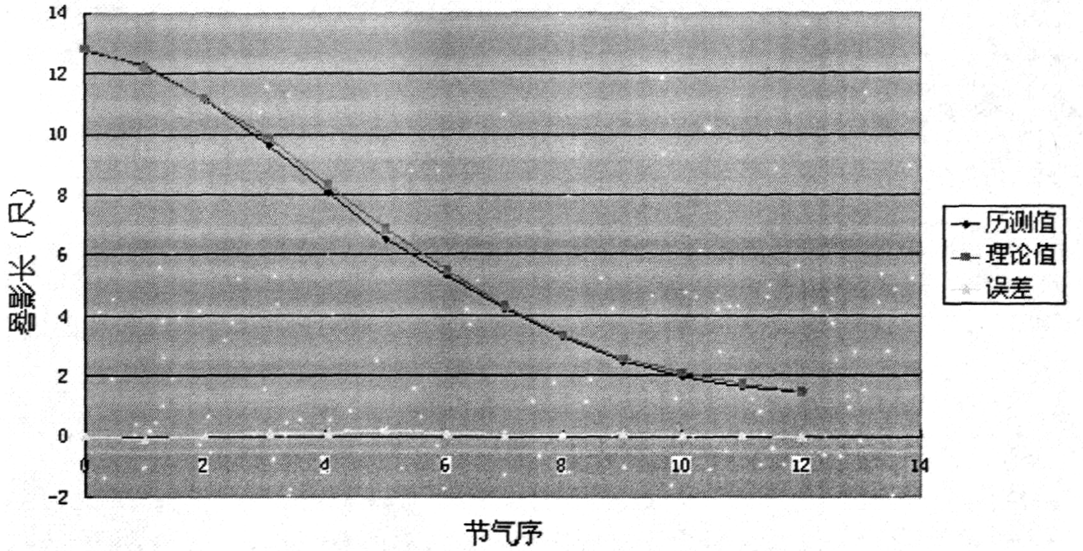


图4.3.2 《大衍历》晷影计算精度分析

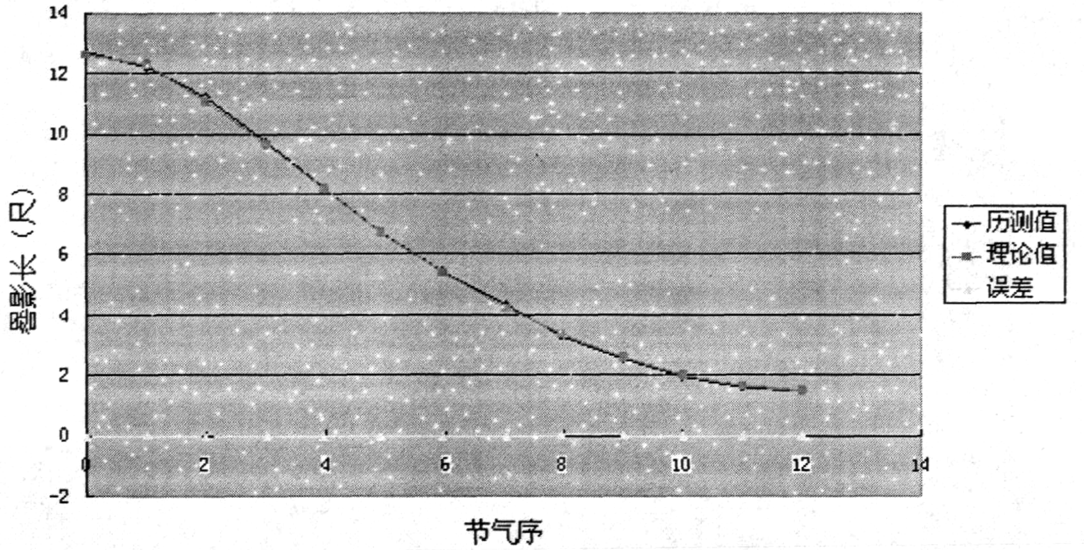
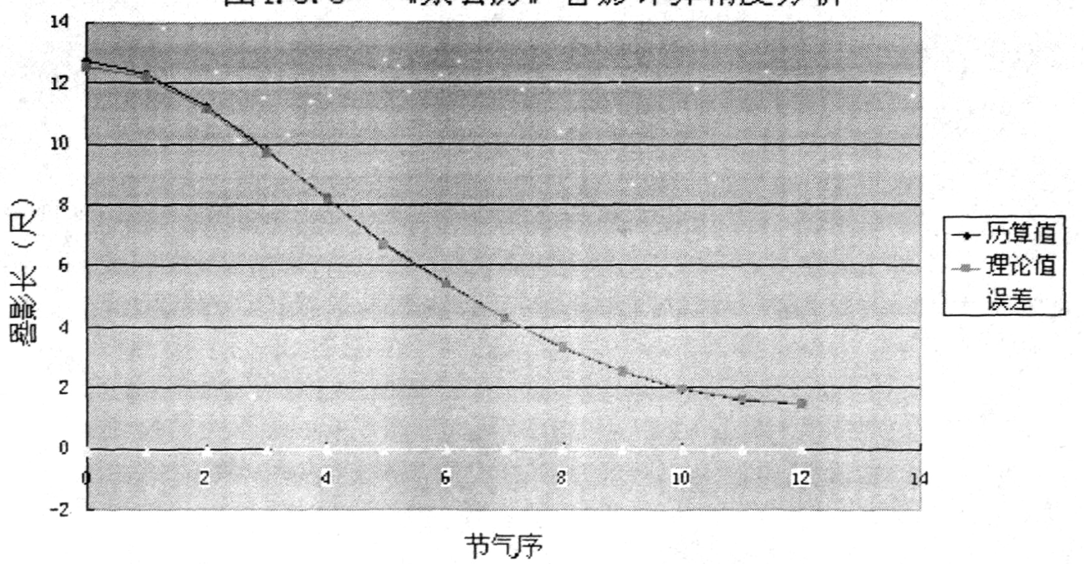


图4.3.3 《崇玄历》晷影计算精度分析



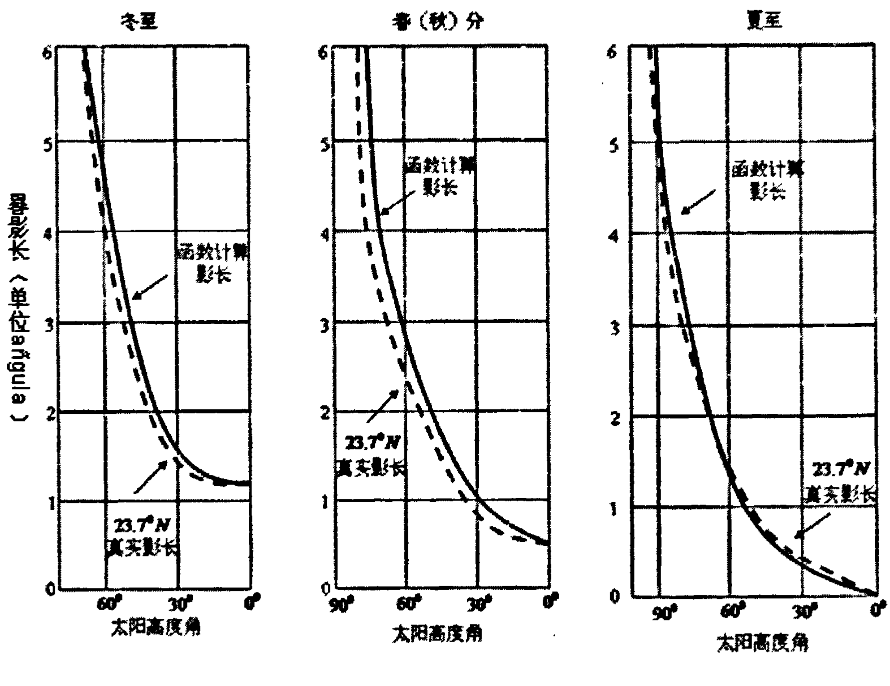
由图 4.3.1、4.3.2、4.3.3 可以看出，三条历算值曲线都非常逼近相应的理论值曲线，误差曲线都非常逼近 x 轴，而且逼近程度越来越高，《大衍历》以后，连接二十四节气影长值的历算值和理论值两条曲线几乎重合，相应的误差曲线也几乎与 x 轴重合。由此可见，即以实测为基础的中国古代计算晷影公式的精度是在日益提高的。

4.3.2 古代印度晷影计算的精度分析

以下分析古代印度天文著作中有代表性的晷影计算公式的精度问题。

日本学者大桥由纪夫曾由《Yavanajātaka》第 79 章公式 $t=\dfrac{6C}{s-s_n+12}$ 推导出，日出 t 小时后的影长公式 $s=s_n-12+\dfrac{6C}{t}$（其中 t 为日出后时间，$12C$ 为白昼长，s 为该时刻的影长，s_n 为该日午中影长），并分析其在二至、二分日内晷影长度的计算结果与实际结果的误差，将其绘制成图 4.3.4：

图4.3.4　　《Yavanajātaka》晷影计算公式精度分析[95]



从图 4.3.4 可以看出，由《Yavanajātaka》第 79 章 32 诗节得到的晷影计算公式，在春（秋）分日的计算值与实际值之间产生的误差稍大一些，但在冬至和夏至日的计算值与实际值间的误差是很小的。由此可见用折线函数计算晷影长度，在某些时刻的计算结果与实际值很接近。但总体来看，用折线函数去拟合三角函数所产生的误差是不可避免的。

第三章已经指出，印度《五大历算全书》利用太阳高度正弦值计算晷影长度的公式（$\text{晷影长}=\sqrt{\text{半径}^2-(\text{半径}\times\text{太阳高度正弦值})^2}\times\dfrac{\text{晷针长}}{\text{半径}\times\text{太阳高度正弦值}}$）与现

在的晷影计算近似公式（晷影长= 晷针长 × 天顶距的正切值）是一致的，该公式成为后来印度晷影计算的基本公式。《阿耶波多历法书》中给出的求太阳高度正弦值的方法也与其完全一致。下面验证由《五书》公式计算出的午中影长值的精度情况。为了与相应的中国历法精度作比较，我们将计算公元 892 年（《崇玄历》颁用时间）印度乌贾因[①]地方二十四节气日[②]午中影长的《五书》历算值和理论值。

第三章已介绍了《五大历算全书》中求解太阳高度正弦值（sin$h$）的方法：

以从昼夜圈上的地平线到太阳的正弦值，乘[观测者]纬度的余正弦值，用[大圆的]半径除，[其商]是对应于日出后经过的[上午的]或者到日没前剩下的[下午]时间的[太阳]高度[的正弦值]。

设 R 为天球半径，ω为半昼长，φ为观测点地理纬度，t' 为日出后某时刻距离午中的时间，δ 为相应时刻的赤纬，r 太阳为周日视运动半径，e 为地正弦，z 为天顶距。

根据《五书》术文，有 $\sin h = \dfrac{B\Sigma \times \sin\overline{\varphi}}{R}$（如图 3.3.1），

因为午中时刻太阳运行于子午圈，所以午中时刻太阳高度正弦值

$$\sin h = \frac{BS \times \sin\overline{\varphi}}{R}$$

由图 3.3.1 可得，

$$BS = AO + CB = r + e,$$

又

$$e = R\sin\delta \times \frac{\sin\varphi}{\sin\overline{\varphi}} = R\sin\delta \times \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$r = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\delta} = R\cos\delta,$$

从而求得

$$\sin h = \frac{(r+e) \times \sin\overline{\varphi}}{R}$$

再将上面的公式代入

$$s = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 h} \cdot \frac{g}{R\sin h}$$

即得到《五书》方法求得的午中影长公式。

将乌贾因的地理纬度 23°.70、公元 892 年二十四节气午中时刻该地的赤纬[③]代入上式，即可求得该时刻的历算影长值。该时刻的理论影长值由公式 $g \cdot \tan(\phi - \delta)$ 求得。下面将计算结果分别列于表 4.3.2。

---

① 乌贾因（Ujjain）是印度中西部城市，约在北纬 23°.70，东经 75°.83，古代印度的科学中心，在今印度印多尔（Indore）北偏西一点的地方，离昔日印度北部一公国瓜利尔 Gwalior 很近），古代印度的天文学家常在乌贾因附近活动。

② 《崇玄历》二十四节气的日期分别为：冬至：892 年 12 月 16 日，小寒：12 月 31，大寒：893 年 1 月 15 日，立春：1 月 30，雨水：2 月 14，惊蛰：3 月 1，春分：3 月 16 日，清明： 3 月 31 日，谷雨：4 月 16 日，立夏：5 月 1 日，小满：5 月 17 日，芒种：6 月 02 日，夏至：6 月 17 日，小暑：7 月 3 日，大暑：7 月 19 日，立秋： 893 年 8 月 3 日，处暑：8 月 19 日，白露： 9 月 3 日，秋分：9 月 18 日，寒露：10 月 4，霜降 10 月 19，立冬：11 月 2 日，小雪：11 月 17 日，大雪：12 月 2 日。

③ 赤纬通过天文软件SkyMap Pro10获得。SkyMap Pro10是由SkyMap 公司Chris Marriott 开发的软件，其数据的精度非常高，我国现代天文工作者都利用该软件获得历史上天文的数据。

表 4.3.2 印度《五书》晷影计算精度分析 单位（añgula）

序号	节气	赤纬 δ（度）	天顶距（度）	理论影长 (angula)	历算影长 (angula)	误差 (angula)
0	冬至	-23.5847	47.2847	12.9973	13.0004	-0.0031
1	小寒	-22.7032	46.4032	12.6027	12.6053	-0.0026
2	大寒	-20.1632	43.8632	11.5330	11.5355	-0.0025
3	立春	-16.2343	39.9343	10.0458	10.0480	-0.0022
4	雨水	-11.2841	34.9841	8.3975	8.3994	-0.0019
5	惊蛰	-5.6898	29.3898	6.7588	6.7605	-0.0017
6	春分	0.17920	23.5208	5.2229	5.2242	-0.0013
7	清明	5.9904	17.7096	3.8319	3.8333	-0.0014
8	谷雨	11.7630	11.9370	2.5369	2.5382	-0.0013
9	立夏	16.4548	7.2452	1.5256	1.5268	-0.0012
10	小满	20.3554	3.3446	0.7013	0.7025	-0.0012
11	芒种	22.8051	0.8949	0.1874	0.1887	-0.0013
12	夏至	23.5823	0.1177	0.0247	0.0259	-0.0012
13	小暑	22.7095	0.9905	0.2075	0.2087	-0.0012
14	大暑	20.1605	3.5395	0.7423	0.7435	-0.0012
15	立秋	16.4499	7.2501	1.5266	1.5279	-0.0013
16	处暑	11.3818	12.3182	2.6204	2.6218	-0.0014
17	白露	5.9080	17.7920	3.8509	3.8524	-0.0015
18	秋分	0.0509	23.6491	5.2549	5.2564	-0.0015
19	寒露	-6.2446	29.9446	6.9128	6.9144	-0.0016
20	霜降	-11.8282	35.5282	8.5684	8.5703	-0.0019
21	立冬	-16.4192	40.1192	10.1118	10.1140	-0.0022
22	小雪	-20.3108	44.0108	11.5927	11.5951	-0.0024
23	大雪	-22.7849	46.4849	12.6387	12.6414	-0.0027

由计算值可知，印度历算值与理论值的绝对误差在 0.0012 至 0.0031 之间，远低于中国晷影公式的误差值。它的误差非系统误差，而是近似值取舍时而产生的。可见《五书》等印度历法所给利用太阳高度正弦值求午中时刻影长的公式精度是极高的。

另外，《苏利亚历法书》第三章 20 至 22 诗节通过太阳赤纬和观测者地理纬度，计算午中晷影长度的思想与现代的晷影计算理论是完全一致的。按现代天文学理论，其晷影计算公式为：午中影长=晷表 × 真天顶距的正切值，即现代常使用的近似晷影计算公式。式中虽没有出现太阳视天顶距、真天顶距蒙气差、地平视差、黄赤交角等现代天文学概念，但当黄赤交角变化很小时，这些量的变化也不大，所以可以说，该公式已经达到了现代晷影计算的精度。

从古老的折线函数法到先进的三角函数法，再结合科学的宇宙模型，古代印度的晷影计算精度日益增加，到《苏利亚历法书》时代，已经达到了现代水平。中国古代的晷影计算精度虽在逐渐提高，但始终通过插值公式、多项式函数去逼

近正切函数，其方法、精度都要逊色于印度所采用的希腊传统方法。

4.4 宇宙观对中印晷影测量的影响

天文理论和天文测算方法受宇宙观的影响，古代中国与印度的晷影测算方法是在各自的宇宙观下形成的。天文学家对宇宙结构、大地形状的认识影响着晷影测算的方式。

古代中印在早期文明中都有各自的宇宙观，且各有丰富的内容。古代中国，关于宇宙结构的学说主要有三派，即盖天说、浑天说和宣夜说。此外还有昕天论、穹天论、安天论、平天说等，统称为“谈天七家”，其中平天说、盖天说中的大地形状理论对早期的勾股测影产生了直接的影响。

平天说来源于人们的直觉经验，认为天的高度不会随位置的改变而改变，地是平坦的，天地平行。东汉王充主张平天说，他在《论衡•说日篇》中认为：“天平正，与地无异”。《周髀算经》中的盖天说由平天说演变而来，认为“天象盖笠，地法覆盘。……极下者，其地高人所居六万里，滂沱四隤而下。天之中央，亦高四旁六万里……璇玑径二万三千里” [96]的宇宙模型，大地基本为一个平面，太阳等天体在与大地平行的平面上运行。

印度的一些《往世书》(Puranas) ①中保存了古代印度的宇宙模型。印度的《往世书》记载的宇宙模型与《周髀算经》中的宇宙模型在细节上几乎处处吻合：两者的天、地都是圆形的平行平面；迷卢山（即汉译佛经中的须弥山）与《周髀算经》中的“璇玑”一样，扮演了大地中央的“天柱”角色。江晓原[97]对《往世书》与《周髀算经》的宇宙模型进行比较，指出了其中的七处相同点。

相比之下，耆那教数学的起源可追溯到公元前300至公元前500年。在此期间，耆那教数学家们对祭坛的形状并不很感兴趣，而是将注意力集中在了对宇宙结构的研究上。耆那教的宇宙论与佛教和印度教的宇宙论有类似的地方：把太阳、月亮及其它的天体分别考虑成好几个，是极其数量化的。在耆那教中把空间分为世界空间和非世界空间。世界空间充满灵魂、运动条件、静止条件、空间、物质和时间等质料。周围是无限的非世界空间，即在世界空间之外，不存在实体。严格地说，世界空间和非世界空间有三层静止的风带。[98]

耆那教用三个碗状物将世界空间分成三界[99]：上界、中界和下界。第一个凸面朝下的碗状物（倒着的碗）在底部，表示下界；第二个凸面朝上的碗状物在第一个碗状物的上面，表示中界，最上面碗状物和最下面的碗状物形状相同，表示下界（见图4.4.1）。如果垂直地去看这个模型的横截面，从下到中心先变窄，再以相同的程度变宽。也有人认为宇宙是一个双腿站立、手在腰间的人。中界（见图4.4.2）由无数个大陆和海的同心圆构成，中央是*jumbū*大陆，南端是印度。*jumbū*大陆是须弥山，山的周围环绕着太阳、月亮和其它天体.周围的太阳有两个，它们在须弥山两边180^0的地方旋转，这样就有了昼夜，月亮也是如此。

上界的上边m_1=1 *rajja* ②，底s=5 *rajja*，高$u/2$=3.5 *rajja*；中界的上边s=5 *rajja*，底m_2=1 *rajja*，高$u/2$=3.5 *rajja*；下界的上边m_2=1 *rajja*，底t=7 *rajja*，高u=7 *rajja*，三界的体积是343 *rajju*^{3}，具体计算如下。

如图4.4.1：下界的体积 $V_{下}=\dfrac{m_2+t}{2}\cdot u\cdot v=4\times 7^2\ rajju^3$，

① 《往世书》是印度教的圣典，同时又是古代史籍，带有百科全书性质。它们的确切成书年代难以判定，但其中关于宇宙模式的一套概念，学者们相信可以追溯到吠陀时代----约公元前1000年之前。

② 1 *rajja* 等于六个月走的距离。

上界和中界的体积 $V_{上、中}=\dfrac{m_2 s+m_1}{2}\cdot u^2=3\times 7^2\,rajju^3$，

所以 三界的总体积 $V=7\times 7^2\,rajju^3=343\,rajju^3$.

耆那教提出了宇宙中心理论，即八点中心说（Eight Point Centre，简记为 *EPC*）：一头母牛的四个乳房在一个平面上，另一头母牛的四个乳房在一个低一点的平面上，每个点和另一平面上相应的点连接起来，这可能是个三维的立方体，八点中心存在于宇宙垂直层的中间（见图 4.4.3）。

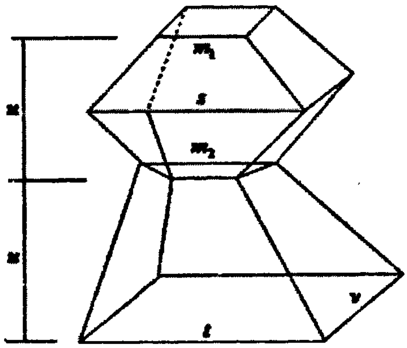


图 4.4.1

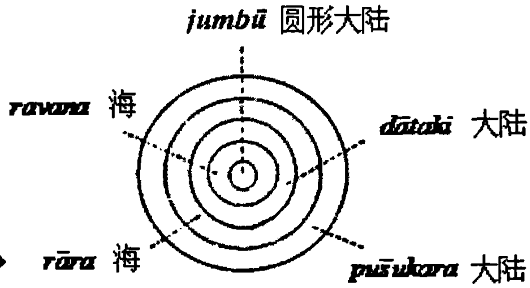
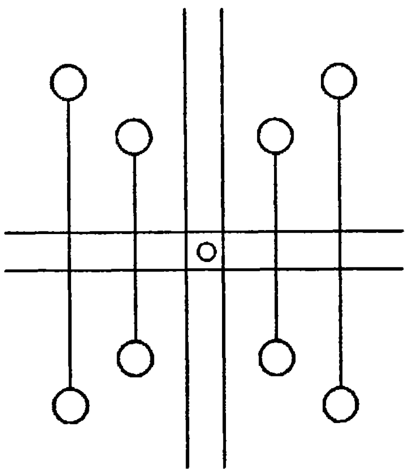
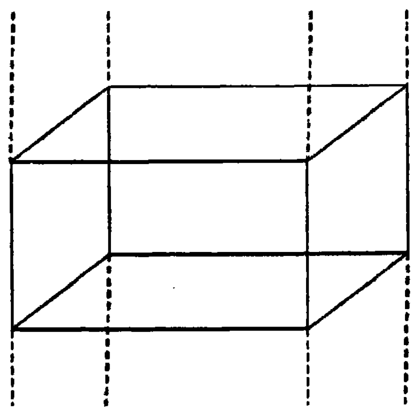


图 4.4.2



宇宙的八点中心说（EPC）



立方体形状

图 4.4.3

耆那教的宇宙几何模型与我国的宇宙观形成了鲜明的对照。我国的盖天说宇宙模型与其类似，即在数理基础上建立一个明确的几何宇宙模型，通过定量化和数学方法构建出天与地的宇宙结构。中国浑天说与宣夜说等宇宙模型中对宇宙结构的尺度却没有明确、真实地描述。同样，印度耆那教的宇宙模型不但有具体的几何形状，而且是非常数量化的，给出了确切的数值，进而可以计算出整个宇宙

的体积。印度耆那教的宇宙模型也认为大地为平面，这一点与中国的平天说应该是一致的。

在盖天说宇宙模型下，由日高、日影等量天问题发展起来的中国的重差术，是针对平面大地构造的。《周髀算经》、《易纬》给出的二十四节气午中晷影长成等差数列，与《周髀算经》的“句之损益，寸千里[1]”的影差原理一致，应该是建立在天地平行、太阳匀速运动的基础之上的，与《周髀算经》中的宇宙模型——盖天说理论是符合的。但按照《周髀算经》的方法计算出的冬至日与实际相差多达二、三天。唐代李淳风虽注意到传统地平观念的错误，指出“然则天无别体，用日以为高下，术既随平而迁，高下从何而出？语术相违，是为大失。”[100]于是由“地有高下表望不同”，创造了斜面重差术，以例证传统地平观的错误。但这只是例外。印度的勾股测影也是建立在大地为平面的基础之上的，这与印度《往世书》和耆那教的宇宙模型是一致的。

汉代以后，中国天文学家不太关注宇宙结构模型问题，除盖天说外，其他宇宙学说逐渐在中国失传，而盖天宇宙模型也没有在中国天文历学实践中发挥作用。此后，中国的晷影计算主要是建立在实测数据的基础之上，通过对特殊时刻的数据进行测量，然后进行代数处理。利用代数方法，历法家们只要通过实测选取若干数据，就可以构造一个函数去近似拟合天体的运动，而不必去考虑所设计算法的天文意义，这在一定程度上也影响了中国古代天文学家对宇宙模型的探索兴趣。公元 724 年一行领导和组织了大规模天文大地测量，其中一项重要工作就是二至、二分影长的测量。《大衍历》步晷漏术多沿用《麟德历》等的数据，并在实测基础上改进。通过对这次测量数据的分析和比较，一行发现影差和南北距离之比不是常数，太阳的进行是不等速运动。从而彻底推翻了影差原理和地平说，打破了传统的研究方法，创立了不等间距内差公式，并在其《大衍历》中给出了与前人不同的晷影算法。遗憾的是，一行并没有通过这次测量得出大地为球形的结论，因此他给出的晷影计算精度虽然很高，但仍然与现代方法相差甚远。

我国古代没有球形大地的概念，元朝时大地的球形概念才由波斯人从欧洲间接传入我国。虽然我国历法中的晷影计算内容相当丰富，误差也逐渐降低，但大地为平面的宇宙观给我国的晷影测算带来了不利的影响。而且日影长度也反映着观测点的地理纬度，没有球形大地的概念，则不可能有比较科学的地理纬度。

印度早期天文学虽有自己独特的宇宙观，但巴比伦和希腊天文学影响之后，其晷影计算主要受巴比伦和希腊的影响而采用球面三角学方法，所以当印度的晷影计算在采纳巴比伦和希腊的宇宙观后，形成了与中国截然不同的理论体系。公元前 5 世纪，希腊人已经认为天地都为球形的，并且很早就考虑和进行了经度和纬度的测量，并将其应用到晷影计算中。受其影响，印度的晷影计算方法也是在球面大地的基础上，通过三角函数去构造的。先进的宇宙模型和计算方法势必构造出科学的计算公式。

[1] 即通常说的影差原理：南北两地相距一千里，影长差一寸。

结语

印度早期的晷影测量方法与中国早期测量方法完全相同，主要是在本土宇宙观的影响下通过勾股测量法来测定晷影长度，并由此发展成一系列的勾股测量方法。两国古代文献中对此类问题的记载相当丰富，且形成了各自的理论体系。就具体内容而言，两国的勾股测量术都表现出本土化的特点，且中国比印度更丰富、完善。虽然两国在该问题上有平行之处，但尚无法找到彼此交流的证据。

随着数学知识的不断积累，两国晷影长度的确定开始脱离实测方式而采用计算方法加以处理。为了得到每日晷影长度以确定冬至时刻，中国古代的历法家在没有球形大地概念和宇宙几何模型的前提下，根据实测数据进行数据处理，以函数拟合的方式设计出晷影长度计算公式。中国古代历法家设计的晷影算法，是中国古代数理天文学领域内的一个精彩内容。印度在受到巴比伦和希腊天文测算的影响之后，不仅接受了希腊几何模型的宇宙观，同时采纳了希腊方式的晷影计算方法。

总体说来，印度古代的晷影计算法多采用几何方法，这些方法要依赖于具体的几何模型；中国古代的晷影算法则主要采用代数计算，这种方法依赖于实测数据，通过简洁的代数公式表达出来。印度和中国的晷影计算都达到了较高的精度，而印度的方法更加科学、有效。两国古代晷影计算虽然传统有别，但处理的都是同一个天文问题，这体现了两种传统的殊途同归。

必须承认，全面探讨、分析、比较与评价古代中印的晷影测算问题，是一项工作量较大的研究工作。由于笔者学识与能力有限，本课题的研究还存在着许多局限。就广度而言，理清古代中印晷影测算的脉络，需要掌握或发掘更多的中印古代天文学方面第一手资料，目前国内这方面的资料还十分有限，而且印度文献多为梵文，本人尚无法直接阅读梵文原典，只能借助英译本和日译本进行研究。同时还需要对宋元时代历法进行全面解读。其次，中国古代晷影算法公式的构造原理也需要进一步分析，只有确定了中国历学家构造历算公式的原理和方式，才能够科学地评价数学在天文测量中的意义和作用。最后，中印天文学交流问题也需要进行更加深入和全面的考察。这些问题，将是笔者今后努力的方向。

参考文献

[1] T.A.Sarasvati Amma, Geometry in Ancient and Medieval India[M], Motilal Banarsidass, Delhi, 1979, 4

[2] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India. Dictionary of Scientific Biography [M] .Vol.15,New York, 1978, 534

[3] 刘洁民. 论比较数学史的原则. 吴文俊主编: 数学史论文集 (4) [C], 济南: 山东教育出版社, 1988, 157-162

[4] 冯立升. 中国古代测量学史[M]. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1995, 24-28

[5] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 21

[6] 《续古摘奇算法》. 中国历代算学集成[M]. 济南: 山东人民出版社, 1994, 919

[7] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 201

[8] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社, 1993, 201

[9] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社, 1993, 201

[10] 李国伟. 从单表到双表——重差术的方法论研究. 中国科技史论文集[C], 台北: 联经出版事业公司, 1995, 85-105

[11] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 20

[12] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一) [M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 25

[13] 吴文俊.我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中的某些方法问题.吴文俊文集[M], 济南: 山东教育出版社, 1986 年, 12-29

[14] 曲安京.《周髀算经》新议[M]. 西安: 陕西人民出版社, 2002, 55

[15] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社, 1993, 96

[16] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 97

[17] 刘徽. 海岛算经. 《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一) [M]. 郑州: 河南教育出版社, 1993, 218

[18] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 96

[19] 刘徽. 海岛算经. 《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一) [M]. 郑州: 河南教育出版社, 1993, 218

[20] 刘徽. 海岛算经. 《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一) [M]. 郑州: 河南教育出版社, 1993, 218

[21] 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究[M]. 西安: 陕西人民教育出版社, 1990, 431

[22] 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究[M]. 西安: 陕西人民教育出版社, 1990, 418-422

[23] 吴文俊.《海岛算经》古证探源. 吴文俊主编,《九章算术》与刘徽[C], 北京: 北京师范大学出版社, 1982. 162-181

[24] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 22

[25] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993, 22

[26] 傅大为. 论〈周髀〉研究传统的历史发展与转折. 清华学报[J], 1988 (1), 1-40

[27] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M].郑州:河南教育出版社, 1993, 20

[28] 吴文俊. 我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中的某些方法问题.吴文俊文集[M], 济南: 山东教育出版社, 1986 年, 12-29

[29] 刘钝.关于李淳风斜面重差术的几个问题. 自然科学史研究[J], 第 12 卷 1993(2), 101-111

[30] 秦九韶. 数书九章. 《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一) [M]. 郑州: 河南教育出版社, 1993, 513

[31] 秦九韶. 数书九章. 《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一) [M]. 郑州: 河南教育出版社, 1993, 520

[32] 白尚恕. 秦九韶测望九问造术之探讨. 宋元数学史论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1966, 290-303

[33] [印]阿耶波多. Aryabhatiya. 矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译,《インド天文学· 数学

集》[M]，东京：朝日出版社，1980，102
[34] [印]阿耶波多. Aryabhatiya. 矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译，《インド天文学· 数学集》[M]，东京：朝日出版社，1980，102
[35] T.A.Sarasvati Amma, Geometry in Ancient and Medieval India[M]，Motilal Banarsidass , Delhi，1979，254
[36]T.A.Sarasvati Amma, Geometry in Ancient and Medieval India[M]，Motilal Banarsidass , Delhi，1979，255
[37] [印]婆什迦罗著. 徐泽林等译. 莉拉沃蒂[M]. 北京，科学出版社，2008，167-168
[38] [印]婆什迦罗著. 徐泽林等译. 莉拉沃蒂[M]. 北京，科学出版社，2008，169
[39] [印]婆什迦罗著. 徐泽林等译. 莉拉沃蒂[M]. 北京，科学出版社，2008，170
[40] [印]婆什迦罗著. 徐泽林等译. 莉拉沃蒂[M]. 北京，科学出版社，2008，171
[41] [印]婆什迦罗著. 徐泽林等译. 莉拉沃蒂[M]. 北京，科学出版社，2008，173
[42] 九章算术.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993，113
[43] 历代天文律历等志汇编（六）[M]. 北京：中华书局，2003，1859
[44] 陈美东. 古历新探[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1995，138-139
[45] 曲安京，王辉，袁敏. “消息定数”探析. 自然科学史研究[J]，第20卷 2001(4)，302-311
[46] 分别见《历代天文律历等志汇编》(五) [M]，p1533-1535、p1531-1533 和《历代天文律历等志汇编》(六) [M]，北京：中华书局，2003，1701-702、1734-1735
[47] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社, 1993，53
[48] 纪志刚. 麟德历晷影计算方法研究. 自然科学史研究[J]，第 13 卷 1994(4)，316-325
[49] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2003
[50] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2003-2004
[51] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2004
[52] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2004
[53] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2004
[54] 历代天文律历等志汇编（五）[M]. 北京：中华书局，2003，2075-2077
[55] 曲安京.《大衍历》晷影差分表的重构. 自然科学史研究[J]. 第 16 卷 1997(3). 233-244
[56] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2078
[57] [唐]《宣明历》. 见：神田 泰编著.《高麗史》历志の研究 付、宣明曆關係用語·事項解說[M]. 东京：大東文化大學東洋研究所. 2000，51
[58] 曲安京.《大衍历》晷影差分表的重构. 自然科学史研究[J]，第 16 卷 1997(3). 233-244
[59] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2078
[60] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2240
[61] 陈美东. 崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用. 自然科学史研究[J]，第 14 卷 1995（4)，131-143. 另见：陈美东，唐宋时期晷长测量及其计算法，《古历新探》[M]，沈阳：辽宁教育出版社，1995，126
[62] 曲安京. 中国古代历法中的三次内插法. 自然科学史研究[J]，第 15 卷 1996(2)，131-143
[63] [清]黄鼎. 天文大成管窥辑要（卷三）[M]. 顺治十年刊本. 云林阁刊本，影印再版. 台北：老古事业文化公司，1984，7-8
[64] 历代天文律历等志汇编（七）[M]. 北京：中华书局，2003，2354-2355
[65] 历代天文律历等志汇编（八）[M]. 北京：中华书局，2003，2594-2595
[66] 历代天文律历等志汇编（八）[M]. 北京：中华书局，2003，2594-2595
[67] 历代天文律历等志汇编（八）[M]. 北京：中华书局，2003，2594-2595
[68] 历代天文律历等志汇编（八）[M]. 北京：中华书局，2003，2597
[69] 历代天文律历等志汇编（八）[M]. 北京：中华书局，2003，2809-2810
[70] 曲安京. 中国古代历法中的三次内插法. 自然科学史研究[J]，第 15 卷 1996(2). 131-143
[71] 历代天文律历等志汇编（八）[M]. 北京：中华书局，2003，1812
[72] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India. Dictionary of Scientific Biography [M] .Vol.15,New York，1978，534
[73] Abraham, George.The Gnomon in Early Indian Astronomy.Indian Journal of History of

Science [J]. Vol.16(2), 1981, 215-218.
[74] Yukio Ôhashi.The Legends of Vasiṣṭha-A Note on the Vedāṅga Astronomy.History of Oriental Astronomy Edited by S.M.Razaullah Ansari[C], 1997, 75-82
[75] Yukio Ôhashi.The Legends of Vasiṣṭha-A Note on the Vedāṅga Astronomy.History of Oriental Astronomy Edited by S.M.Razaullah Ansari[C], 1997, 75-82
[76] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India. Dictionary of Scientific Biography [M].Vol.15,New York, 1978, 540
[77] David Pingree.The Mesopotamian Origin of Early India Mathematical Astronomy.Journal for the History of Astronomy[J] .vol.4.1973, 1-12
[78] Yukio Ôhashi.The Legends of Vasiṣṭha-A Note on the Vedāṅga Astronomy.History of Oriental Astronomy Edited by S.M.Razaullah Ansari[C], 1997, 75-82
[79] B V Subbaryappa and K V Sarma. Indian Astronomy A Source Book(Based Primarily on Sanskrit Texts)[M]. Bombay Nehru Centre, 1985, 189
[80] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India .Dictionary of Scientific Biography [M] Vol.15,New York, 1978, 552
[81] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India Dictionary of Scientific Biography [M].Vol.15,New York, 1978, 546-553
[82] 矢野道雄，Āryabhatīya 解说，矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译，《インド天文学· 数学集》[M]，朝日出版社，1980，67
[83] [印]阿耶波多. Aryabhatiya. 矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译，《インド天文学· 数学集》[M]，朝日出版社，1980，134-135
[84] [印]阿耶波多. Aryabhatiya. 矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译，《インド天文学· 数学集》[M]，朝日出版社，1980，130
[85] [印]阿耶波多. Aryabhatiya. 矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译，《インド天文学· 数学集》[M]，朝日出版社，1980，130
[86] [印]阿耶波多. Aryabhatiya. 矢野道雄、林隆夫、井狩弥介共译，《インド天文学· 数学集》[M]，朝日出版社，1980，130
[87] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India .Dictionary of Scientific Biography [M].Vol.15, New York, 1978, 570
[88] David Pingree.History of Mathematical Astronomy in India Dictionary of Scientific Biography [M].Vol.15,New York, 1978, 571-572
[89] The Sûrya Siddhânta(A Text-book of Hindu Astronomy) [M].Translated with Notes and Appendix by Burgess R E. Edited by Gangooly P. Delhi .Motilal Banarsidass Publishers .1997, 123
[90] The Sûrya Siddhânta(A Text-book of Hindu Astronomy) [M].Translated with Notes and Appendix by Burgess R E. Edited by Gangooly P. Delhi .Motilal Banarsidass Publishers .1997, 123-124
[91] The Sûrya Siddhânta(A Text-book of Hindu Astronomy) [M].Translated with Notes and Appendix by Burgess R E. Edited by Gangooly P. Delhi .Motilal Banarsidass Publishers .1997, 125
[92] The Sûrya Siddhânta(A Text-book of Hindu Astronomy) [M].Translated with Notes and Appendix by Burgess R E. Edited by Gangooly P. Delhi .Motilal Banarsidass Publishers .1997, 127-132
[93] The Sûrya Siddhânta(A Text-book of Hindu Astronomy) [M].Translated with Notes and Appendix by Burgess R E. Edited by Gangooly P. Delhi .Motilal Banarsidass Publishers .1997, 132
[94] 袁敏. 古代中印数理天文学比较. 西北大学博士毕业论文[D]，2001
[95] Yukio Ôhashi .Interpolation or Extrapolation –An interpretation of the zig-zag function used in Ancient Indian astronomy[R]. 22nd ICHS,S35,Oral presentation,Beijing, 2005
[96] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社, 1993, 69
[97] 江晓原、谢筠.《周髀算经译注》. 沈阳：辽宁教育出版社，1996，41-43

[98] 林隆夫. インドの数学[M]. 东京：中央公论社，1993，125-131
[99] M.R.Gelra. Concept Of The Eight Point Centre In Jain Cosmology，第五届汉字文化圈及近邻地区数学史与数学教育国际学术研讨会论文[D]，2002 年 8 月 20 日
[100] 周髀算经.《中国科学技术典籍通汇·数学卷》(一)[M]. 郑州:河南教育出版社,1993，22

致谢

时间如白驹过隙，三年的研究生生活即将结束。回首三年时光，心中感慨万千。

在河北廊坊武警学院任教四年后，我于 2005 年 9 月考入天津师范大学数学科学学院，师从徐泽林教授攻读科学技术史专业比较数学史方向的硕士研究生，从此又回到了校园，开始了在职脱产的学习生活。三年里，承蒙各位老师的指教和同学的帮助，即将完成硕士研究生学业。硕士论文完成之际，我想对那些曾经帮助、关心、支持过我的师长、同事、同学、朋友和家人致以衷心的感谢。

首先，我要特别感谢导师徐泽林教授。徐老师博学多识、治学严谨、执教醇笃。他的课程多采取读书汇报、专题讨论的形式，从而督促我翻阅了大量专业资料，使我在数学史领域逐渐成长。我的毕业论文从选题、收集资料、布局谋篇乃至修改定稿，徐老师都倾注了大量的心血。由于国内有关印度方面的资料较少，徐老师多次托中外学者帮助查找、复印。不仅如此，徐老师淡薄名利、忘我的工作精神和历史使命感时常鼓舞、感染着我，催我奋进。拜读于徐老师门下，实乃我人生一大幸事。

其次，我要感谢李兆华教授。在天津师范大学学习的三年时间里，李先生严谨治学的作风影响着我，其深厚的文字、英语功底令我钦佩。李先生讲课鞭辟入里，让我受益匪浅。李先生的课丰富了我的专业知识，为我的论文写作打下了坚实基础。

另外，感谢侯钢老师授课中的教导及对本论文英文摘要进行的细心润色和修改，感谢高红成老师在资料查找方面提出的宝贵意见。

我还要特别感谢武警学院的领导为我提供了这次学习、深造的机会，感谢同事们对我的支持。尤其要感谢我的同事段耀勇教授在专业资料上给予的热情帮助。

在学期间，师姐张娜、杨玲，同学李亚珍、闫春雨、徐永琳、李瑞娟，室友郑洁，师妹卫霞、李媛媛、杨楠、张艳敏、杨丽，师弟郭园园、刘泉在学习和生活上，给了我太多的帮助和支持，在此表示深深的感谢。

数学科学学院资料室的孙华和任荣芳老师，论文写作期间为我查阅资料提供了很多便利，本文的顺利完成也要感谢他们的支持。

最后，我要感谢我的丈夫马祥先生。在我复习考研的日子里，他一个人承担了所有家务，没有一句怨言。在我求学的三年时间里，他默默奉献与支持，为我的又一次学习生涯提供了后方保障，使我能得以专心读书、思考，顺利完成了这篇硕士论文。我愿把本文敬献给马祥先生，以此来表达我对他的感激之情。

在校的学习生活又将结束，心中很是不舍。三年的师大生活，将成为我人生的重要经历。在此所学知识也将成为不灭的灯塔伴我前行！

刘丽芳

2008 年 3 月 31 日