

摘 要

脉冲微分方程主要刻画系统的状态在瞬间发生了突变、系统不再连续的动力学行为,已广泛应用于物理、经济、药物动力学和航天技术等领域.近年来,具有脉冲效应的种群动力系统得到了深入地研究,如渔业养殖中的鱼苗投放和成鱼收获,植保研究中的种植和砍伐,农业生产中喷洒杀虫剂和投放天敌等,都是人类行为对生态环境进行影响、控制的有力证据,显示了脉冲效应在生态资源的开发、管理利用中具有较高的理论价值和广泛的应用前景.

基于害虫管理中的生物和化学脉冲控制策略,考虑到喷洒杀虫剂对天敌的影响,本文首先研究了一类害虫具有阶段结构、天敌具有Beddington-DeAngelis功能反应函数且在不同脉冲时刻喷洒杀虫剂和投放天敌的捕食-食饵系统.利用Floquet理论及比较定理分别得到了系统的害虫灭绝周期解全局渐近稳定和系统持续生存的充分条件,以Matlab数值模拟验证了所得理论结果的可靠性.所得结果可为害虫治理提供一定的理论指导.

其次,讨论了一类食饵具有阶段结构和时滞、连续收获成年食饵和脉冲收获捕食者的系统.根据时滞微分方程的理论及脉冲微分方程的比较定理,得到了系统的食饵灭绝周期解全局吸引和系统持续生存的充分条件,以数值模拟验证理论分析结果的正确性.

由于Leslie-Gower型捕食-食饵模型比传统的Lotka-Volterra模型更切合实际意义,且具有丰富的动力学性质,基于第三章的模型本文又研究了食饵具有阶段结构和时滞、连续收获成年食饵、在不同脉冲时刻投放和收获捕食者的Leslie-Gower模型.利用比较定理和时滞微分方程的理论得到了系统的食饵灭绝周期解全局吸引的充分条件,以及系统持续生存的充分条件.进一步,利用数值模拟验证了得到的理论结果.

鉴于气候、温度、食物供应、交配习性等物理环境因素的变化具有周期性,作为对第三章模型的改进,本文最后研究了食饵具有阶段结构和时滞、脉冲收获捕食者的非自治系统,基于比较定理和非自治脉冲时滞微分方程的理论分别得到了系统的捕食者灭绝周期解全局吸引和系统持续生存的充分条件.之后,利用Mawhin的延拓定理讨论了系统正周期解的存在性问题.

关键词: 捕食-食饵; 阶段结构; 时滞; 脉冲效应; 持续生存

Abstract

Impulsive differential equation mainly describes the states of the system changing very rapidly in a short time or instantaneously, which has been widely used in physics, economics, pharmacokinetics, and space technology and other fields. In recent years, population dynamical system with impulsive effect has been thoroughly studied such as releasing immature fish and harvesting mature fish in fisheries management, planting and harvesting in plant protection research and spraying pesticides and releasing natural enemies in agricultural production, which are strong evidence of human behavior impacting and controlling on the ecological environment and show that impulsive effect has a high theoretical value and broad application prospects in the development and management of the ecological resources.

Based on biological control and chemical control strategies on pest and considering the impact of spraying pesticides on natural enemies, firstly, a predator-prey system with stage-structured pest and natural enemy with Beddington-DeAngelis functional response and spraying pesticides and releasing predators at different impulsive times is studied. Using the Floquet theory and Comparison theorem, sufficient conditions of the globally asymptotically stable of pest-extinction periodic solution and the permanence of the system are derived. Finally, Matlab numerical simulations are presented to illustrate the feasibility of our theoretical results. The results provide a theoretical guide for the pest management.

Secondly, a delayed predator-prey system with stage-structured prey and continuous harvesting on mature prey and impulsive harvesting on predator is discussed. Applying the theory of delay differential equation and the comparison theorem of impulsive differential equation, we obtain the sufficient conditions of the global attractiveness of prey-extinction periodic solution and the permanence of the system. Finally, numerical simulations verify the theoretical results.

As the Leslie-Gower predator-prey model is more realistic than the traditional Lotka-Volterra predator-prey model and has rich dynamic natures, based on the model in the third chapter, a delayed predator-prey system with stage-structured prey and continuous harvesting on mature prey and impulsive releasing and harvesting on predator at different impulsive times is studied. Employing the comparison theorem and the theory of delay differential equation, sufficient conditions of the global attractiveness of prey-extinction periodic solution and the permanence of

the system are obtained. Furthermore, numerical simulations show the theoretical results obtained.

Owing to seasonal effects of weather, temperature, food supply, mating habits and other resource of physical environmental quantities, as an improved model of the third chapter, a predator-prey non-autonomous system with delayed stage-structured prey and impulsive harvesting on predator is investigated in the last chapter. Based on the comparison theorem and non-autonomous theory of impulsive delay differential equations, the sufficient conditions of the global attractiveness of predator-extinction periodic solution and the permanence of the system are obtained. In addition, we prove the existence of positive periodic solution by virtue of the Mawhin's continuation theorem.

Key words: Predator-prey; Stage structure; Time delay; Impulsive effect; Permanence

兰州理工大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名： 罗秀玲

日期：2010年5月30日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权兰州理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。

作者签名： 罗秀玲
导师签名： 苏庆云

日期：2010年5月30日

日期：2010年5月30日

第一章 绪论

§1.1 课题研究背景及本文主要工作

脉冲微分方程的研究始于20世纪60年代,自90年代以来,这一研究方向引起了众多微分学者们的重视与兴趣,研究的范围已渗透到信息科学,控制系统,生命科学等众多领域,逐渐形成非线性微分系统研究领域的国际新热点.

在种群生态系统中,由于人为收获、放养或自然灾害等原因都可能使种群密度发生瞬时突变,这种瞬时突变可用脉冲刻画^[1].如传染病动力学中的定期接种、癌细胞的放疗和化疗^[2, 3];药物动力学中的口服药物、静脉注射;种群动力学中的动物的繁殖,渔业养殖和森林管理中的投放、种植、收获;农业中的喷洒杀虫剂或定期投放天敌^[4-9];环境污染中毒素的排放、定期的治理等^[10, 11].用脉冲微分方程来描述种群动力系统这种瞬时突变,比相应的无脉冲的微分方程能更合理、更精确地反映现实世界中的许多生命现象和人类的开发行为.所以对这些脉冲种群系统的研究具有非常重要的理论意义和应用价值.

近几十年来,有许多文献都研究了捕食-食饵系统,并得到了很多非常好的结论^[4-15].基本的捕食-食饵模型为

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - \phi(x(t))y(t), \\ y'(t) = -by(t) + \gamma\phi(x(t))y(t), \end{cases}$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时的种群密度; a, b, γ 都是正常数; a 表示食饵的增长率; b 表示捕食者的死亡率; γ 表示捕食的转化率; $\phi(x(t))$ 是捕食者的功能反应函数.功能反应函数深刻地反映了捕食行为的内在规律.常见的功能反应函数主要有食饵依赖型和捕食者依赖型两种形式.其中食饵依赖型主要包括Holling-I型: $\phi(x) = ax$; Holling-II型: $\phi(x) = \frac{ax}{1+bx}$; Holling-III型^[6]: $\phi(x) = \frac{ax^2}{1+bx^2}$; Holling-IV型: $\phi(x) = \frac{ax}{b+cx^2}$.而捕食者依赖型主要包括Beddington-DeAngelis型^[8]、Hassell-Varley型^[16]和比例依赖型等^[17].其中 $\phi(x) = \frac{ax}{bx+cy+h}$ 是Beddington和DeAngelis等人在1975年提出的Beddington-DeAngelis功能反应函数; $\phi(x) = \frac{cx}{x+my}$ 是Michaelis-Menten功能反应函数^[17],即比例依赖型.

另一方面,阶段结构是客观世界中普遍存在的现象.自然界中有很多种群如一些昆虫、两栖类动物等,它们从出生到死亡要经历各种不同的生命阶段.比如青蛙要经历蝌蚪、成体蛙两个截然不同的生命阶段,再比如蝴蝶,它的一生具有四个明显不同的发育阶段:卵期(胚胎时期)、幼虫期(生长时期)、蛹期(转变时期)和成虫期(有性时期).这些生物个体在不同阶段都表现出不同的外形和生理特征,如蝴蝶在化蛹期便停止取食,到了成虫期才具有繁殖功能.许多食肉动物在幼年期不具有捕食的

能力, 而只有到了成年后才能独立捕食. Chen等^[18]提出了具有阶段结构和时滞的单种群模型

$$\begin{cases} N'_i(t) = B(t) - D_i(t) - W(t), \\ N'_m(t) = \alpha W(t) - D_m(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $N_i(t)$ 和 $N_m(t)$ 分别表示幼年种群和成年种群在 t 时的种群密度; $B(t)$ 为幼年种群在 t 时的出生率; $D_i(t)$ 和 $D_m(t)$ 分别表示幼年种群和成年种群在 t 时的死亡率; $W(t)$ 表示 t 时种群从幼年转化为成年的转化率; α 为 t 时种群从幼年成功转化到成年的概率.

考虑到害虫的阶段结构性, 以模型(1.1)为基础, 构建了一类害虫具有阶段结构、天敌对害虫的捕食遵循Beddington-DeAngelis功能反应且在不同脉冲时刻喷洒杀虫剂和投放天敌的系统. 利用Floquet理论及比较定理分别得到了系统的害虫灭绝周期解全局渐近稳定和系统持续生存的充分条件, 以Matlab数值模拟验证了所得理论结果的可靠性. 所得结果可为害虫治理提供一定的理论指导.

Aiello和Freedman提出的单种群时滞阶段结构的模型为

$$\begin{cases} x'_1(t) = \alpha x_2(t) - r x_1(t) - \alpha e^{-r\tau} x_2(t - \tau), \\ x'_2(t) = \alpha e^{-r\tau} x_2(t - \tau) - \beta x_2^2(t), \quad t > \tau, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中, $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别表示幼年种群和成年种群在 t 时的种群密度; α , r , β , τ 均为正常数; α 表示幼年种群在 t 时的出生率; r 表示幼年种群在 t 时的死亡率; β 表示成年种群在 t 时的密度制约; 时滞 τ 表示种群从幼年到成年所需的时间; $\alpha e^{-r\tau} x_2(t - \tau)$ 表示在时刻 $t - \tau$ 出生且在时刻 t 仍然存活的幼年个体到达成年的速率. Aiello和Freedman指出, 系统(1.2)的所有解在 $t > 0$ 时是正的有界的, 且系统(1.2)存在平凡平衡点 $(0, 0)$ 和唯一的正平衡点 $(\frac{\alpha^2}{r\beta} e^{-r\tau} (1 - e^{-r\tau}), \frac{\alpha}{\beta} e^{-r\tau})$, 并说明当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 系统的所有正解都趋向于唯一的正平衡点, 阶段结构的引入对种群的稳定性没有影响, 正平衡点依然是全局渐近稳定的.

在模型(1.1)和(1.2)的基础上, 很多学者研究了不同类型的阶段结构系统并得到了许多有意义的结论^[19-27]. 一些具有阶段结构的脉冲微分系统也得到了广泛地研究^[4, 5, 28]. 结合模型(1.2), 考虑到人类行为的离散型, 在固定脉冲时刻按比例收获捕食者, 捕食者对成年食饵的捕食遵循Michaelis-Menten功能反应, 并对成年食饵进行连续收获, 构建了一类食饵具有阶段结构和时滞、连续收获成年食饵和脉冲收获捕食者的系统. 根据时滞微分方程的理论及脉冲微分方程的比较定理, 得到了系统的食饵灭绝周期解全局吸引和系统持续生存的充分条件, 以数值模拟验证理论分析结果的正确性.

具有修正的Leslie-Gower型捕食-食饵的基本模型为

$$\begin{cases} x'(t) = r_1 x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + b x(t)}, \\ y'(t) = r_2 y(t) - \frac{c y^2(t)}{e + d x(t)}, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时的种群密度; $r_1, r_2, K, a, b, c, e, d$ 均为正常数; r_1 和 r_2 分别表示食饵和捕食者的内禀增长率; K 表示在没有捕食者存在时环境对食饵的承载能力; a 表示捕食者找寻食饵的效率, 即食饵的平均损耗率; b 表示半饱和常数; c 具有与 a 类似的生态学意义; 捕食者对食饵的捕食遵循Holling II型功能反应, $\frac{cy^2(t)}{e+dx(t)}$ 表示由于最偏好的食物 x 的严重短缺而使捕食者种群产生的损耗, 其中 e 表示在缺乏最喜好的食物 x 时捕食者中发生的剩余损耗, 而 d 则是食饵转化为捕食者的转化率.

模型(1.3)是对传统的Lotka-Volterra捕食-食饵模型的改进, 在描述涉及食物并不单一的捕食者与它更偏好的食用物种之间的关系时, 用这类模型要比传统的Lotka-Volterra模型更切合实际意义, 比如, 它不会出现Lotka-Volterra模型那种因为食饵的灭绝而导致捕食者指数式衰退的现象或因为捕食者灭绝而出现的食饵种群无限增长的现象, 因而这类模型有更合理的一面. 现有的研究表明, 这类模型具有丰富的动力学性质, 而且还具有其它捕食-食饵模型所没有的性质^[29, 30].

假设捕食者是有性生殖的物种, 考虑到捕食者种群的增长速度与雄性和雌性的数量有关, 而且可以假定捕食者种群的增长率直接与种群雄雌的数量成比例, 因此把模型(1.3)中的 $r_2y(t)$ 改成 $r_2y^2(t)$, 以合理表示繁殖速度与雄性和雌性的数量成比例的事实. 基于上述假设, 文献[31]和[32]提出了如下的Leslie-Gower模型

$$\begin{cases} x'(t) = r_1x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \frac{ax(t)y(t)}{1+bx(t)}, \\ y'(t) = r_2y^2(t) - \frac{cy^2(t)}{e+dx(t)}. \end{cases} \quad (1.4)$$

文献[31]对模型(1.4)的正平衡点的稳定性和其它动力学行为进行了深入地研究. 文献[32]提出了一类参数具季节性变化和修正的Leslie-Gower连续捕食-食饵模型, 通过数值模拟发现了系统的复杂动力学行为, 说明参数具季节性变化将使系统的动力学行为复杂化, 甚至出现分支和混沌.

结合模型(1.2)和(1.4), 以第三章的模型为基础, 得到了一类食饵具有阶段结构和时滞、连续收获成年食饵、在不同脉冲时刻投放和收获捕食者的Leslie-Gower系统. 利用比较定理和时滞微分方程的理论得到了系统的食饵灭绝周期解全局吸引的充分条件, 以及系统持续生存的充分条件. 进一步, 利用数值模拟验证了得到的理论结果. 将脉冲效应和阶段结构引入Leslie-Gower捕食-食饵模型中极大地丰富了生物模型的研究意义.

但目前研究的脉冲微分系统大多都是自治的^[33-39], 对非自治的即具有变系数的脉冲微分系统研究的很少. 由于气候、温度、食物供应、交配习性及其它物理环境因素的影响, 假设时空变化是周期的, 此时考虑到的都是非自治模型. 为了较全面的分析导致系统持续生存、吸引和稳定的原因, 一般有四种典型的建模方法:

(1)在模型中考虑较多的种群, 并且考虑多维系统;

- (2)假设种群的增长与时间有关;
- (3)在种群动态行为中考虑时滞的影响;
- (4)同时考虑时滞和环境变化的季节性影响.

方法(1)相当牵强,方法(2)和(3)只强调了现实中的一个方面,方法(4)比方法(2)和(3)合理且有意义.与上述四种方法比较起来,同时考虑脉冲效应、时滞和环境的季节性变化的方法将更合理、更有意义^[3, 40-42].文献[42]研究了如下非自治脉冲时滞微分系统

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(r(t) - a(t)x(t - \tau)), & t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, \\ x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

的正周期解的存在性.

具有阶段结构的非自治单种群模型如下

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - \alpha(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t r(s)ds}x_2(t - \tau), \\ x_2'(t) = \alpha(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t r(s)ds}x_2(t - \tau) - \beta(t)x_2^2(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

考虑非自治的脉冲微分系统将大大拓展生物种群的研究领域.

结合模型(1.5)和(1.6),作为对第三章模型的改进,建立了一类食饵具有阶段结构和时滞、脉冲收获捕食者的非自治系统.基于比较定理和非自治脉冲时滞微分方程的理论分别得到了系统的捕食者灭绝周期解全局吸引和系统持续生存的充分条件.之后,利用Mawhin的延拓定理讨论了系统正周期解的存在性问题.

在自然界中,比如在害虫管理中,随着科技的发展,农民有了多种控制害虫的方法如化学方法、生物方法、文化方法和物理方法.然而,化学方法的过度使用产生了许多经济方面和社会方面的问题.另一方面,如果害虫灭绝了,那么天敌也可能灭绝,进而影响生物的多样性,也影响整个食物链中的其他物种.而且在天敌灭绝后,害虫可能又会复现,甚至大量繁殖,破坏农业生产.例如,在我国的甘肃省曾出现过这样的现象,当地农民用灭鼠药杀死田鼠,结果未曾预料导致大量的鹰死亡.因此,让害虫彻底灭绝并不一定都是最好的结果.从保持生态平衡和节约资源的原则出发,只需将害虫的数量控制在一定范围内,让它既不会对农业造成大的损失,又不至于灭绝,即害虫和天敌达到共存.在渔业管理中,为了解决人类对食物的不断需求和保护生态系统这两个相对的情况,人们需寻求一个渔业开发的可持续发展策略,即让系统持续生存.

§1.2 预备知识

在这一小节里给出几个定义和引理.

考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \\ x(t^+) = x(t) + I_k(x), & t = t_k, \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geq 0, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

系统(1.7)满足下列条件:

- (i) $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$, 且当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $t_k \rightarrow +\infty$;
- (ii) f 在 $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ 上连续, 且对任意的 $x \in R^n$, $\lim_{(t, y) \rightarrow (t_k^+, x)} f(t, y) = f(t_k^+, x)$ 存在;
- (iii) $I_k : R^n \rightarrow R^n$.

定义1.2.1 如果

(i) V 在 $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ 上连续, 且对任意的 $x \in R^n$, $\lim_{(t, y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x)$ 存在;

(ii) V 关于 x 满足局部Lipschitz条件,

则称函数 $V : R^+ \times R^n \rightarrow R^+$ 属于集合 V_0 .

定义1.2.2 对 $(t, x) \in (t_{k-1}, t_k] \times R^n$, $V \in V_0$, V 关于脉冲系统(1.7)的上右导数定义为

$$D^+V(t, x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)).$$

定义1.2.3 若对任意初值 x_0 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

则称种群 x 是灭绝的.

定义1.2.4 若对任意初值 x_0 存在正常数 $0 < m < M$ (均和 x_0 无关), 使得当 t 充分大时,

$$m \leq x(t) \leq M,$$

则称系统(1.7)持续生存.

定理1.2.1^[43] 假设函数 $\omega \in PC^1(R_+, R)$ 满足不等式

$$\begin{aligned} \omega'(t) &\leq (\geq) p(t)\omega(t) + q(t), & t \neq t_k, \\ \omega(t_k^+) &\leq (\geq) d_k\omega(t_k) + b_k, & t = t_k, \end{aligned}$$

其中, $p(t), q(t) \in PC(R_+, R)$, $d_k \geq 0, b_k$ 是常数, 则当 $t \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \omega(t) &\leq (\geq) \omega(0) \prod_{0 < t_k < t} d_k \exp\left(\int_0^t p(s) ds\right) + \sum_{0 < t_k < t} \left(\prod_{t_k < t_j < t} d_j \exp\left(\int_{t_k}^t p(s) ds\right) \right) b_k \\ &\quad + \int_0^t \prod_{s < t_k < t} d_k \exp\left(\int_s^t p(\theta) d\theta\right) q(s) ds. \end{aligned}$$

定理1.2.2 (比较定理)^[43] 令 $V: R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ 且 $V \in V_0$. 假设

$$\begin{cases} D^+V(t, x(t)) \leq g(t, V(t, x(t))), & t \neq t_k, \\ V(t, x(t^+)) \leq \psi_n(V(t, x(t))), & t = t_k, \end{cases} \quad (1.8)$$

其中, $g: R_+ \times R_+ \rightarrow R_+$ 在 $(t_{k-1}, t_k]$ 上连续, 对任意的 $z \in R_+$, $\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, z)} g(t, y) = g(t_k^+, z)$ 存在; $\psi_n: R_+ \rightarrow R_+$ 非减. 令 $r(t) = r(t, 0, u_0)$ 为脉冲微分方程

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u), & t \neq t_k, \\ u(t^+) = \psi_n(u(t)), & t = t_k, \\ u(0^+) = u_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

在 $[0, +\infty)$ 上的最大解, 那么由 $V(0^+, x_0) \leq u_0$ 可得出 $V(t, x(t)) \leq r(t), t \geq 0$, 其中 $x(t) = x(t, 0, x_0)$ 是系统(1.7)在 $[0, +\infty)$ 上的任意解.

注. 若(1.8)的不等号反向, 则 $V(t, x(t)) \geq \rho(t), t \geq 0$, 其中 $\rho(t)$ 是(1.9)在 $[0, +\infty]$ 上的最小解.

引理1.2.1^[44] 考虑下面的时滞微分方程

$$x'(t) = ax(t - \tau) - bx(t) - cx^2(t),$$

其中, a, b, c 和 τ 都是正常数, $x(t) > 0, t \in [-\tau, 0]$, 有

- (i) 若 $a > b$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{a-b}{c}$;
- (ii) 若 $a < b$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

第二章 一类具有生物和化学两类脉冲控制的捕食-食饵系统 分析

§2.1 模型介绍及相关引理

害虫控制是关系到农业生产和经济发展的一个非常重要的问题, 控制害虫的方法主要有生物控制和化学控制, 实际情况表明将这两种控制方法结合起来对控制害虫非常有效. 文献[6]提出了一类具有脉冲效应和Holling-III类功能反应的捕食系统, 但该系统没有考虑喷洒杀虫剂对天敌的影响, 而且投放天敌和喷洒杀虫剂是不能同时进行的. 虽然有文献在 $t = (n + l - 1)T$ 时刻喷洒杀虫剂和 $t = nT$ 时刻投放天敌对文献[6]进行了改进, 但没有考虑害虫的阶段结构. 由于幼年害虫受到卵壳的保护, 所以只考虑生物和化学控制对成年害虫和天敌的影响.

受文献[6]的启发, 考虑具有阶段结构和Beddington-DeAngelis功能反应函数的系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_1'(t) = rx_2(t) - \mu x_1(t) - ax_1(t), \\ x_2'(t) = ax_1(t) - bx_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)+h}, \\ y'(t) = \left(\frac{kcx_2(t)}{my(t)+x_2(t)+h} - d \right) y(t), \end{array} \right\} t \neq (n+l-1)T, nT, \\ \left. \begin{array}{l} x_1(t^+) = x_1(t), \\ x_2(t^+) = (1-\delta)x_2(t), \\ y(t^+) = (1-\theta)y(t), \end{array} \right\} t = (n+l-1)T, \\ \left. \begin{array}{l} x_1(t^+) = x_1(t), \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = y(t) + q, \end{array} \right\} t = nT, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

其中, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$ 分别表示幼年害虫, 成年害虫和天敌在 t 时的种群密度; $r, \mu, a, b, c, m, h, k, d$ 均为正常数; r 表示幼年害虫的出生率; μ 表示幼年害虫的死亡率; a 表示幼年害虫转化为成年害虫的比例; b 表示成年害虫的密度制约; $\frac{cx_2(t)}{my(t)+x_2(t)+h}$ 表示单位天敌对成年害虫的捕食率; k 表示捕食的转化率; d 表示天敌的死亡率; $0 < \delta < 1, 0 < \theta < 1$ 分别为因喷洒杀虫剂而减少的成年害虫和天敌的比例; $q > 0$ 表示投放的天敌数量; $n \in N$ (N 表示非负整数集合); T 是脉冲周期, $0 < l < 1$.

令 $R_+ = [0, +\infty)$, $R_+^3 = \{(x_1, x_2, y) \in R^3 : x_1, x_2, y \in R_+\}$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ 表示系统(2.1)中前三个方程的右端. f 的光滑性保证了系统(2.1)解的全局存在性和唯一性.

定义2.1.1 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ 为系统(2.1)满足初始条件 $x_1(0^+) > 0, x_2(0^+) > 0, y(0^+) > 0$ 的解, 若存在正常数 m, M 和 T_0 , 使得当 $t \geq T_0$ 时, $m \leq x_1(t) \leq M$,

$m \leq x_2(t) \leq M, m \leq y(t) \leq M$, 则称系统(2.1)是持续生存的.

引理2.1.2^[6] 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ 为系统(2.1)满足 $x_1(0^+) > 0, x_2(0^+) > 0, y(0^+) > 0$ 的解, 则当 $t \geq 0$ 时, $x_1(t) > 0, x_2(t) > 0, y(t) > 0$.

引理2.1.3 存在常数 $M > 0$, 使得当 t 充分大时, 系统(2.1)的任意正解均满足 $x_1(t) \leq M, x_2(t) \leq M, y(t) \leq M$.

证明 令 $V(t) = x_1(t) + x_2(t) + y(t)$. 当 $t \neq (n+l-1)T, nT$ 时,

$$\begin{aligned} D^+V(t) &= rx_2(t) - \mu x_1(t) - bx_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)+h} + \left(\frac{kcx_2(t)}{my(t)+x_2(t)+h} - d \right) y(t) \\ &\leq (r+d)x_2(t) - bx_2^2(t) - dV(t) \leq \frac{(r+d)^2}{4b} - dV(t). \end{aligned}$$

当 $t = (n+l-1)T$ 时,

$$V(t^+) = x_1(t) + (1-\delta)x_2(t) + (1-\theta)y(t) \leq x_1(t) + x_2(t) + y(t) = V(t).$$

当 $t = nT$ 时, $V(t^+) = x_1(t) + x_2(t) + y(t) + q = V(t) + q$. 由定理1.2.1可得,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0^+) \exp(-dt) + \frac{(r+d)^2}{4bd} (1 - \exp(-dt)) + \frac{q \exp(-d(t-T))}{1 - \exp(dT)} + \frac{q \exp(dT)}{\exp(dT) - 1} \\ &\rightarrow \frac{(r+d)^2}{4bd} + \frac{q \exp(dT)}{\exp(dT) - 1} \quad (t \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

因此, 由 $V(t)$ 的定义可知, 存在一个正常数 $M = \frac{(r+d)^2}{4bd} + \frac{q \exp(dT)}{\exp(dT) - 1}$, 使得 $x_1(t) + x_2(t) + y(t) \leq M$. 证毕.

下面讨论系统(2.1)的害虫灭绝周期解的存在性.

当 $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0$ 时, 系统(2.1)变为

$$\begin{cases} y'(t) = -dy(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ y(t^+) = (1-\theta)y(t), & t = (n+l-1)T, \\ y(t^+) = y(t) + q, & t = nT. \end{cases} \quad (2.2)$$

显然, 系统(2.2)有唯一正周期解

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \frac{q \exp(-d(t-(n-1)T))}{1-(1-\theta) \exp(-dT)}, & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ \frac{q(1-\theta) \exp(-d(t-(n+l-1)T))}{1-(1-\theta) \exp(-dT)}, & (n+l-1)T < t \leq nT, \end{cases}$$

$$\tilde{y}(0^+) = \tilde{y}(nT^+) = \frac{q}{1-(1-\theta) \exp(-dT)}, \quad \tilde{y}((n+l-1)T^+) = \frac{q(1-\theta) \exp(-dT)}{1-(1-\theta) \exp(-dT)}.$$

初值为 $y(0^+)$ 时, 系统(2.2)的解为

$$y(t) = \begin{cases} (1-\theta)^{n-1} \left(y(0^+) - \frac{q}{1-(1-\theta) \exp(-dT)} \right) \exp(-dt) + \tilde{y}(t), & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ (1-\theta)^n \left(y(0^+) - \frac{q}{1-(1-\theta) \exp(-dT)} \right) \exp(-dt) + \tilde{y}(t), & (n+l-1)T < t \leq nT. \end{cases}$$

于是, 得到下述引理.

引理2.1.4 系统(2.2)有唯一正周期解 $\tilde{y}(t)$, 且对系统(2.2)的其它正解 $y(t)$ 均有

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

由引理2.1.4可知, 系统(2.1)有一个害虫灭绝周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$.

§2.2 主要结论

令 $G = \frac{arT}{(\mu+a)R}$, 其中 $R = -\frac{c}{dm} \ln \left(\frac{(mq \exp(-dT) + \Delta_1)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_1)}{(mq + \Delta_1)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_1)} \right)$, $\Delta_1 = h(1 - (1 - \theta) \exp(-dT))$.

定理2.2.1 若 $G < 1$, 则系统(2.1)的害虫灭绝周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局渐近稳定的.

证明 令 $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = v(t)$, $y(t) = \tilde{y}(t) + w(t)$, 则系统(2.1)线性化后的结果为

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = -(\mu + a)u(t) + rv(t), \\ v'(t) = au(t) - \frac{c\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t)+h}v(t), \\ w'(t) = \frac{kc\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t)+h}v(t) - dw(t), \end{array} \right\} \quad t \neq (n+l-1)T, nT,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t^+) = u(t), \\ v(t^+) = (1 - \delta)v(t), \\ w(t^+) = (1 - \theta)w(t), \end{array} \right\} \quad t = (n+l-1)T, \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t^+) = u(t), \\ v(t^+) = v(t), \\ w(t^+) = w(t), \end{array} \right\} \quad t = nT.$$

令 $\Phi(t)$ 为系统(2.3)中前三个方程的基解矩阵, 则 $\Phi(t)$ 满足

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} -(\mu + a) & r & 0 \\ a & -\frac{c\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t)+h} & 0 \\ 0 & \frac{kc\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t)+h} & -d \end{pmatrix} \Phi(t) := A\Phi(t), \quad (2.4)$$

且 $\Phi(0) = I$, I 是单位矩阵. 容易看出矩阵 A 的一个特征根为 $-d$, 另外两个特征根由矩阵

$$B = \begin{pmatrix} -(\mu + a) & r \\ a & -\frac{c\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t)+h} \end{pmatrix}$$

决定. 令 λ_1, λ_2 为矩阵 B 的特征根, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(\mu + a) - \frac{c\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t) + h} < 0,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(\mu + a) c \tilde{y}(t)}{m \tilde{y}(t) + h} - ar.$$

当 $G < 1$ 时, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. 从而, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, 由脉冲微分方程的Floquet理论可知, 害虫灭绝周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是局部渐近稳定的.

接下来证明 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的.

令 $V(t) = ax_1(t) + (\mu + a)x_2(t)$. 由系统(2.1)可得,

$$\begin{cases} V'(t) = \left(ra - b(\mu + a)x_2(t) - \frac{c(\mu+a)y(t)}{my(t)+x_2(t)+h} \right) x_2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ V(t^+) = ax_1(t) + (1-\delta)(\mu + a)x_2(t), & t = (n+l-1)T, \\ V(t^+) = ax_1(t) + (\mu + a)x_2(t), & t = nT. \end{cases}$$

由已知条件, 可选取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\eta = (ra + \varepsilon)T + \frac{c(\mu+a)}{dm} \ln \left(\frac{(mq \exp(-dT) + \Delta_2)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_2)}{(mq + \Delta_2)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_2)} \right) < 0,$$

其中 $\Delta_2 = \left(M + h - \frac{m\varepsilon}{c(\mu+a)} \right) (1 - (1-\theta) \exp(-dT))$, $M = \frac{(r+d)^2}{4bd} + \frac{q \exp(dT)}{\exp(dT)-1}$. 由系统(2.1)可知,

$$\begin{cases} y'(t) \geq -dy(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ y(t^+) = (1-\theta)y(t), & t = (n+l-1)T, \\ y(t^+) = y(t) + q, & t = nT, \end{cases}$$

利用比较定理和引理2.1.4可得,

$$y(t) \geq \tilde{y}(t) - \frac{\varepsilon}{c(\mu + a)}.$$

从而

$$\begin{cases} V'(t) \leq \left(ra + \varepsilon - (\mu + a) \frac{c\tilde{y}(t)}{m\tilde{y}(t)+M+h-\frac{m\varepsilon}{c(\mu+a)}} \right) x_2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ V(t^+) \leq V(t), & t = (n+l-1)T, \\ V(t^+) = V(t), & t = nT, \end{cases}$$

由 $\eta < 0$ 可知 $V'(t) < 0$. 所以当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(t) \rightarrow 0$, 从而 $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$. 注意到系统(2.1)的极限系统正好是系统(2.2), 结合引理2.1.4可知, 系统(2.1)的害虫灭绝周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的. 证毕.

定理2.2.2 若 $G > 1$, 则系统(2.1)持续生存.

证明 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ 为系统(2.1)满足初始条件 $X(0^+) > 0$ 的解. 由引理2.1.4可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 t 充分大时, $y(t) \geq \tilde{y}(t) - \varepsilon$. 因此当 t 充分大时, $y(t) \geq \frac{q(1-\theta) \exp(-dT)}{1-(1-\theta) \exp(-dT)} - \varepsilon := m_3$.

下面分两步证明存在一个正常数 m_1 , 使得当 t 充分大时, $x_1(t) + x_2(t) \geq m_1$.

(一)由已知条件, 选取 $m_2^* > 0$ 和充分小的 $\varepsilon_1 > 0$, 使得

$$\sigma = (ra - b(\mu + a)m_2^* - \varepsilon_1) + (\mu + a) \ln \left(\frac{(mq \exp(-dT) + \Delta_3)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_3)}{(mq + \Delta_3)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_3)} \right) > 0,$$

其中 $\Delta_3 = \left(h + \frac{m\varepsilon}{c(\mu+a)} \right) (1 - (1-\theta) \exp(-dT))$. 考虑泛函

$$V(t) = ax_1(t) + (\mu + a)x_2(t).$$

由系统(2.1)可知,

$$\begin{cases} V'(t) = \left(ra - b(\mu + a)x_2(t) - \frac{c(\mu+a)y(t)}{my(t)+x_2(t)+h} \right) x_2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ V(t^+) = ax_1(t) + (1-\delta)(\mu + a)x_2(t), & t = (n+l-1)T, \\ V(t^+) = ax_1(t) + (\mu + a)x_2(t), & t = nT. \end{cases}$$

可推断 $V(t) < (\mu + a)m_2^* = m_2$ 不能对所有的 $t \geq 0$ 都成立. 否则, 对所有的 $t \geq 0$ 都有 $x_2(t) < m_2^*$, 于是, 由系统(2.1)易得,

$$\begin{cases} y'(t) \leq y(t) \left(\frac{kc m_2^*}{h} - d \right), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ y(t^+) = (1-\theta)y(t), & t = (n+l-1)T, \\ y(t^+) = y(t) + q, & t = nT, \end{cases}$$

利用比较定理和引理2.1.4可知, 存在一点 $t_1 \geq 0$, 使得对所有的 $t \geq t_1$, 都有 $y(t) \leq z(t) \leq \tilde{z}(t) + \frac{\varepsilon_1}{c(\mu+a)}$, 其中 $z(t)$ 为系统

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) \left(\frac{kc m_2^*}{h} - d \right), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ z(t^+) = (1-\theta)z(t), & t = (n+l-1)T, \\ z(t^+) = z(t) + q, & t = nT, \\ z(0^+) = y(0^+) \end{cases} \quad (2.5)$$

的解, 且

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} \frac{q \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)(t - (n-1)T)\right)}{1 - (1-\theta) \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)T\right)}, & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ \frac{q(1-\theta) \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)(t - (n+l-1)T)\right)}{1 - (1-\theta) \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)T\right)}, & (n+l-1)T < t \leq nT. \end{cases}$$

因此, 对所有的 $t \geq t_1$, 都有

$$\begin{cases} V'(t) \geq \left(ra - b(\mu + a)m_2^* - \varepsilon_1 - \frac{c(\mu+a)\tilde{z}(t)}{m\tilde{z}(t)+h+\frac{m\varepsilon_1}{c(\mu+a)}} \right) x_2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ V(t^+) \geq (1-\delta)V(t), & t = (n+l-1)T, \\ V(t^+) = V(t), & t = nT \end{cases} \quad (2.6)$$

成立. 又由 $\sigma > 0$ 可知 $V'(t) > 0$. 从而, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(t) \rightarrow +\infty$, $x_2(t) \rightarrow +\infty$, 这与 $V(t)$ 最终有界矛盾. 故存在一点 $t_1 \geq 0$, 使得 $V(t_1) \geq m_2$.

(二)若对所有的 $t \geq t_1$, $V(t) \geq m_2$ 都成立, 则可选择 $m_1 = m_2^*$. 否则, 考虑那些离开后又再次进入区域

$$D = \{(x_1(t), x_2(t), y(t)) \in R_+^3 : V(t) = ax_1(t) + (\mu + a)x_2(t) < m_2\}$$

的解. 令 $t^* = \inf_{t > t_1} \{V(t) < m_2\}$, t^* 分为脉冲点和非脉冲点两种情况.

(i) t^* 为脉冲点. 令 $t^* = (n_1 + l - 1)T$, $n_1 \in N$, 则当 $t \in [t_1, t^*)$ 时, $V(t) \geq m_2$, $V(t^*) = m_2$. 选取 $n_2, n_3 \in N$, 使得

$$n_2 T > \frac{1}{\frac{kc m_2^*}{h} - d} \ln \left(\frac{\varepsilon_1}{M + q} \right),$$

$$\sigma_1 n_3 T + \sigma_2 (n_2 + 1) T > 0,$$

其中 $\sigma_1 = \left(ra - b(\mu + a)m_2^* - \varepsilon_1 - \frac{c(\mu+a)\tilde{z}(t)}{m\tilde{z}(t)+h+\frac{m\varepsilon_1}{c(\mu+a)}} \right) x_2((n_1 + n_2 - 1)T^+) > 0$, $\sigma_2 = \frac{ra}{\mu+a} - bM - \frac{cM}{h} < 0$. 令 $T^* = n_2 T + n_3 T$, 则一定存在一点 $t_2 \in (t^*, t^* + T^*]$, 使得 $V(t_2) \geq m_2$. 否则, 对所有的 $t \in (t^*, t^* + T^*]$, 都有 $V(t) < m_2$, $x_2(t) < m_2^*$. 考虑方程(2.5)满足初始条件 $z(t^{**}) = y(t^{**})$ 的解, 当 $t \in ((n-1)T, nT]$, $n_1 + 1 \leq n \leq n_1 + n_2 + n_3$ 时,

$$z(t) = \begin{cases} (1-\theta)^{n-(n_1+1)} \left(z(n_1 T^+) - \frac{q}{1-(1-\theta)\exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)T\right)} \right) \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)(t - n_1 T)\right) \\ + \tilde{z}(t), & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ (1-\theta)^{n-n_1} \left(z(n_1 T^+) - \frac{q}{1-(1-\theta)\exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)T\right)} \right) \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)(t - n_1 T)\right) \\ + \tilde{z}(t), & (n+l-1)T < t \leq nT. \end{cases}$$

于是 $|z(t) - \tilde{z}(t)| < (M + q) \exp\left(\left(\frac{kc m_2^*}{h} - d\right)(t - n_1 T)\right) < \varepsilon_1$. 从而, 当 $n_1 T + (n_2 - 1)T < t \leq t^* + T^*$ 时, $y(t) \leq z(t) \leq \tilde{z}(t) + \frac{\varepsilon_1}{c(\mu+a)}$. 于是

$$V'(t) \geq \left(ra - b(\mu + a)m_2^* - \varepsilon_1 - \frac{c(\mu+a)\tilde{z}(t)}{m\tilde{z}(t)+h+\frac{m\varepsilon_1}{c(\mu+a)}} \right) x_2((n_1 + n_2 - 1)T^+) = \sigma_1 > 0,$$

$$V(t^* + T^*) \geq V(t^* + n_2 T) \exp(\sigma_1 n_3 T). \quad (2.7)$$

当 $t \in [t^*, t^* + n_2 T]$ 时,

$$\begin{cases} V'(t) \geq \left(ra - b(\mu + a)M - \frac{c(\mu+a)M}{h} \right) x_2(t) \geq \sigma_2 V(t), & t \neq (n+l-1)T, \\ V(t^+) \geq (1-\delta)V(t), & t = (n+l-1)T \end{cases} \quad (2.8)$$

成立. 因此

$$V(t^* + n_2 T) \geq V(t^*) \exp(\sigma_2(n_2 + 1)T) > 0. \quad (2.9)$$

由(2.7)和(2.9)得到

$$V(t^* + T^*) \geq V(t^*) \exp(\sigma_1 n_3 T + \sigma_2(n_2 + 1)T) > m_2,$$

这是矛盾的. 故存在 $t_2 \in (t^*, t^* + T^*]$, 使得 $V(t_2) \geq m_2$.

令 $\bar{t} = \inf_{t > t^*} \{V(t) \geq m_2\}$, 则当 $t \in (t^*, \bar{t})$ 时, $V(t) < m_2$ 且 $V(\bar{t}) = m_2$. 设 $t \in (t^* + (n' - 1)T, t^* + n'T]$, $n' \in N$, $n' \leq n_2 + n_3$, 对(2.8)在 (t^*, \bar{t}) 上积分, 有

$$\begin{aligned} V(t) &\geq V(t^{*+}) (1 - \delta)^{n'-1} \exp(\sigma_2(n' - 1)T) \exp(\sigma_2(t - (t^* + (n' - 1)T))) \\ &\geq m_2 (1 - \delta)^{n'} \exp(\sigma_2 n' T) \\ &\geq m_2 (1 - \delta)^{n_2 + n_3} \exp(\sigma_2(n_2 + n_3)T) \\ &> m_2 (1 - \delta)^{n_2 + n_3} \exp(\sigma_2(1 + n_2 + n_3)T) := m'. \end{aligned}$$

故 $V(t) > m'$, $t \in (t^*, \bar{t})$. 同上述过程, 当 $t > \bar{t}$ 时, $V(t) > m'$.

(ii) t^* 为非脉冲点. 当 $t^* \neq (n + l - 1)T$, $n \in N$ 时, $V(t) \geq m_2$, $t \in [t_1, t^*]$ 且 $V(t^*) = m_2$. 设 $t^* \in ((n'_1 + l - 1)T, (n'_1 + l)T)$, $n'_1 \in N$, 当 $t \in (t^*, (n'_1 + l)T)$ 时, $V(t)$ 的取值有两种可能.

(iia) 若 $V(t) \leq m_2$, $t \in (t^*, (n'_1 + l)T)$, 则存在 $t'_2 \in [(n'_1 + l)T, (n'_1 + l + 1)T]$, 使得 $V(t'_2) > m_2$. 其余过程同步骤(一).

设 $\tilde{t} = \inf_{t > t^*} \{V(t) \geq m_2\}$, 则 $V(t) < m_2$, $t \in (t^*, \tilde{t})$ 且 $V(\tilde{t}) = m_2$. 当 $t \in (t^*, \tilde{t})$ 时, 式(2.8)成立. 令 $t \in ((n'_1 + l)T + (n'_2 - 1)T, (n'_1 + l)T + n'_2 T]$, $n'_2 \in N$, $n'_2 \leq n_2 + n_3$, 对式(2.8)在 (t^*, \tilde{t}) 上积分, 则

$$\begin{aligned} V(t) &\geq m_2 (1 - \delta)^{n'_2} \exp(\sigma_2(n'_2 + 1)T) \\ &\geq m_2 (1 - \delta)^{n_2 + n_3} \exp(\sigma_2(1 + n_2 + n_3)T) = m'. \end{aligned}$$

故 $V(t) \geq m'$, $t \in (t^*, \tilde{t})$. 同上述过程, 当 $t > \tilde{t}$ 时, $V(t) \geq m'$.

(iib) 存在 $t \in (t^*, (n'_1 + l)T)$, 使得 $V(t) > m_2$. 令 $\hat{t} = \inf_{t > t^*} \{V(t) \geq m_2\}$, 则 $V(t) < m_2$, $t \in (t^*, \hat{t})$ 且 $V(\hat{t}) = m_2$. 当 $t \in (t^*, \hat{t})$ 时, 式(2.8)成立, 对式(2.8)在 (t^*, \hat{t}) 上积分, 有

$$\begin{aligned} V(t) &\geq V(t^*) \exp(\sigma_2(t - t^*)) \geq m_2 \exp(\sigma_2 T) \\ &> m_2 \exp(\sigma_2(1 + n_2 + n_3)T) > m'. \end{aligned}$$

其余过程同(iia). 综上可得, 当 $t \geq t_1$ 时, $V(t) \geq m'$. 选择 $m_1 = \frac{m'}{\mu + a}$, 可知 $x_1(t) + x_2(t) \geq m_1$, $t \geq t_1$.

结合引理2.1.3可知, 当 t 充分大时, $m_1 \leq x_1(t) + x_2(t) \leq M, m_3 \leq y(t) \leq M$. 由定义2.1.1可知, 系统(2.1)持续生存. 证毕.

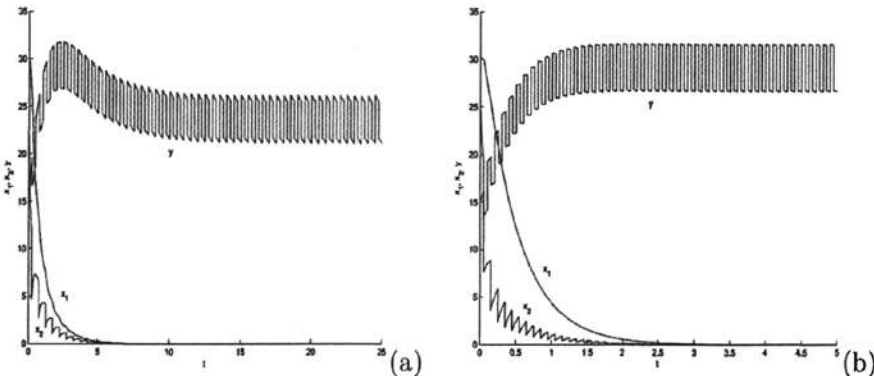
令 $g(T) = T - \frac{(\mu+a)R}{ar}$, 其中 $R = -\frac{c}{dm} \ln \left(\frac{(mq \exp(-dT) + \Delta_1)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_1)}{(mq + \Delta_1)(mq(1-\theta) \exp(-dT) + \Delta_1)} \right)$, $\Delta_1 = h(1 - (1 - \theta) \exp(-dT))$. 显然, $g(0) = -\infty < 0, g(T) \rightarrow +\infty (T \rightarrow +\infty)$, 且 $g''(T) > 0$. 因此 $g(T) = 0$ 有唯一的正根 $T_{\max} = \frac{(\mu+a)R}{ar}$. 由定理2.2.1和定理2.2.2可得如下推论.

推论2.2.3 当 $T < T_{\max}$ 时, 系统(2.1)的害虫灭绝周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局渐近稳定的; 当 $T > T_{\max}$ 时, 系统(2.1)持续生存.

§2.3 数值模拟

若在系统(2.1)中, 令 $T = 0.5, l = 0.5, q = 5.0, \delta = 0.6, \theta = 0.15, r = 3.8, \mu = 1.0, a = 1.8, b = 0.3, c = 3.7, m = 1.4, h = 0.5, k = 0.8, d = 0.1$, 初值 $X_0 = (30, 25, 15)$, 计算可得 $G = 0.9384 < 1$, 这说明定理2.2.1的条件满足, 则系统(2.1)的害虫灭绝周期解全局渐近稳定, 其数值模拟见图1(a). 当 $T = 0.1, q = 5.0, \delta = 0.6, \theta = 0.15$, 其余数据同上时, $G = 0.9358 < 1$, 系统(2.1)的数值模拟见图1(b). 当 $T = 0.1, q = 1.0, \delta = 0.04, \theta = 0.01$, 其余数据同上时, $G = 0.9309 < 1$, 系统(2.1)的数值模拟见图1(c).

若在系统(2.1)中, 令 $T = 3.0, l = 0.5, q = 1.0, \delta = 0.04, \theta = 0.01, r = 3.8, \mu = 1.0, a = 1.8, b = 0.3, c = 3.7, m = 1.4, h = 0.5, k = 0.8, d = 0.1$, 初值 $X_0 = (30, 25, 15)$, 计算 $G = 1.0274 > 1$, 说明定理2.2.2的条件满足, 则系统(2.1)是持续生存的, 其数值模拟见图2(a). 当 $T = 6.0, q = 1.0, \delta = 0.04, \theta = 0.015$, 其余数据同上时, $G = 0.1327 > 1$, 系统(2.1)的数值模拟见图2(b). 当 $T = 6.0, q = 3.0, \delta = 0.4, \theta = 0.1$, 其余数据同上时, $G = 1.0052 > 1$, 系统(2.1)的数值模拟见图2(c). 通过数值模拟发现, 当 $T \geq 1.5$ 时, 无论脉冲量 q, δ 和 θ 如何变化, 系统(2.1)都是持续生存的.



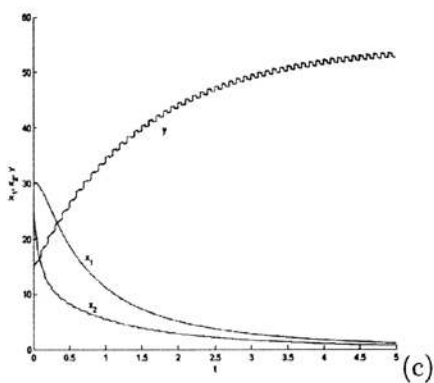


图 1 系统(2.1)的害虫灭绝时的种群时间序列图

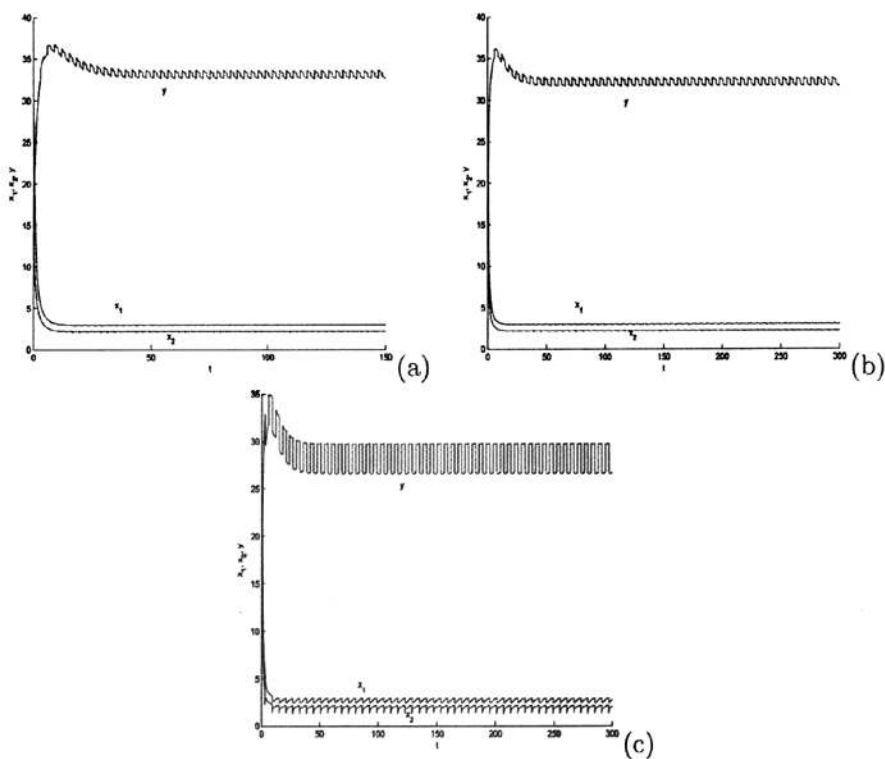


图 2 系统(2.1)持续生存的种群时间序列图

第三章 一类具有阶段结构和脉冲收获捕食者的时滞捕食-食 饵系统分析

§3.1 模型介绍及相关引理

文献[17]研究了具有阶段结构和时滞的捕食-食饵系统

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_2(t) - r x_1(t) - \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) = \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \frac{c x_2(t) y(t)}{m y(t) + x_2(t)} - E_1 x_2(t), \\ y'(t) = y(t) \left(-d - e y(t) + \frac{f x_2(t - \tau_2)}{m y(t - \tau_2) + x_2(t - \tau_2)} \right) - E_2 y(t), \\ x_1(t) = \varphi_1(t) \geq 0, x_2(t) = \varphi_2(t) \geq 0, -\max(\tau_1, \tau_2) \leq t \leq 0, \\ y(t) = \psi(t) \geq 0, -\tau_2 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

的稳定性和最优收获问题, 其中, $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别表示幼年食饵和成年食饵在 t 时的种群密度; $y(t)$ 表示捕食者在 t 时的种群密度; $\alpha, r, \beta, c, d, e, f, m, E_1, E_2, \tau_1, \tau_2$ 都是正常数; α 表示幼年食饵的出生率; r 表示幼年食饵的死亡率; β 表示成年食饵的密度制约; d 表示捕食者的死亡率; E_1, E_2 分别表示对成年食饵和捕食者的收获率; τ_1 和 τ_2 分别表示成熟时间和时滞.

依据文献[17], 若 $\alpha e^{-r\tau_1} > E_1$ 且 $\frac{c}{mf}(f - d - E_2)^2 - (\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)(f - d - E_2) < 0$, 则系统(3.1)只有两个非负平衡点: $E_1(x_{10}, x_{20}, 0)$, $E^*(x_1^*, x_2^*, y^*)$, 其中 $x_{10} = \frac{\alpha - \alpha e^{-r\tau_1}}{r} x_{20}$, $x_{20} = \frac{\alpha e^{-r\tau_1} - E_1}{\beta}$, $x_1^* = \frac{\alpha - \alpha e^{-r\tau_1}}{r} x_2^*$, $x_2^* = \frac{m y^*(e y^* + d + E_2)}{f - d - E_2 - e y^*}$, $y^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, 且 $A = em\beta + \frac{ce^2}{mf}$, $B = e(\alpha e^{-r\tau_1} - E_1) + \beta m(d + E_2) - \frac{2ec}{mf}(f - d - E_2)$, $C = \frac{c}{mf}(f - d - E_2)^2 - (\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)(f - d - E_2)$.

下面列出文献[17]中系统(3.1)的几个结论:

- (i) 若 $\alpha e^{-\tau_1(r+\lambda)} < E_1$, 则系统(3.1)的平衡点 $E_1(0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的;
- (ii) 若 $d + E_2 > f$, 则系统(3.1)的平衡点 $E_1(x_{10}, x_{20}, 0)$ 是全局渐近稳定的;
- (iii) 若 (1) $M_3 < \tau_2 < \min\{M_1, M_2\}$; (2) $f - \frac{c}{m}(1 + \tau_1 \alpha e^{-r\tau_1}) > \frac{e+pf}{2} > ep$, $\beta(1 - \tau_1 \alpha e^{-r\tau_1}) > \frac{2\tau_1(\alpha e^{-r\tau_1})^2}{x_{22}}$; (3) $\frac{pf}{2m}(-\beta + \frac{c}{m} - f + e) > \frac{1-p}{2} p f m e > 0$; (4) $\alpha e^{-r\tau_1}(2\tau_1 \alpha e^{-r\tau_1} + \beta \tau_1 x_{22} - 1) + \alpha = \alpha e^{-r\tau_1}(\frac{c\omega_2}{m} \tau_1 x_{22} + 1) + (\frac{c\omega_2}{m} - \beta)x_{22} - \alpha = 0$ 成立, 则系统(3.1)的平衡点 $E^*(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的.

系统(3.1)是假设人类活动是连续发生的. 然而, 现实中许多生物都是在固定时刻收获或者以固定脉冲量收获的, 人类活动的离散性也决定了生物种群密度的短时或瞬时快速变化. 因而, 将人类活动看成连续的是不合适的, 而脉冲微分方程能准确地描述人类的这种活动.

下面研究脉冲收获捕食者对系统(3.1)的影响, 脉冲干扰后系统的动力学行为如何? 系统是持续生存的还是食饵将会灭绝? 假设捕食者 $y(t)$ 不只以成年食饵 $x_2(t)$ 为

食, 即 $y(t)$ 能依靠本系统之外的食物为生. 基于系统(3.1), 研究如下脉冲系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_1'(t) = \alpha x_2(t) - r x_1(t) - \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) = \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \frac{c x_2(t) y(t)}{m y(t) + x_2(t)} - E_1 x_2(t), \\ y'(t) = y(t) \left(b - e y(t) + \frac{f x_2(t)}{m y(t) + x_2(t)} \right), \end{array} \right\} \quad t \neq nT, \\ \left. \begin{array}{l} x_1(t^+) = x_1(t), \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = (1 - q) y(t), \end{array} \right\} \quad t = nT, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

其中, $b > 0$ 表示捕食者的增长率; q ($0 < q < 1$)表示捕食者的脉冲收获率, $n \in N$, N 为非负整数集合, 其余参数的生物意义同系统(3.1). 系统(3.2)的初始条件为

$$(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in C_+ = C([- \tau_1, 0], R_+^3), \varphi_1(0) > 0, \varphi_2(0) > 0, \psi(0) > 0, \quad (3.3)$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ 在 $[-\tau_1, 0]$ 上都是正的有界连续函数.

令 $R_+ = [0, +\infty)$, $R_+^3 = \{(x_1, x_2, y) \in R^3 : x_1, x_2, y \in R_+\}$. $f = (f_1, f_2, f_3)$ 表示系统(3.2)中前三个方程的右端. 系统(3.2)的解 $X = (x_1(t), x_2(t), y(t)) : R_+ \rightarrow R_+^3$ 在 $(nT, (n+1)T]$, $n \in N$ 上连续可微. 显然, f 的光滑性保证了系统(3.2)解的全局存在性和唯一性.

下面考虑系统(3.2)的子系统

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = y(t) (b - e y(t)), \quad t \neq nT, \\ y(t^+) = (1 - q) y(t), \quad t = nT \end{array} \right. \quad (3.4)$$

的一些基本性质. 求解(3.4)可得,

$$y(t) = \frac{b y(nT^+)}{(b - e y(nT^+)) \exp(-b(t - nT)) + e y(nT^+)}, \quad t \in (nT, (n+1)T],$$

$$y((n+1)T) = F(y(nT^+)) = \frac{b(1 - q) y(nT^+)}{(b - e y(nT^+)) \exp(-bT) + e y(nT^+)}.$$

由 $F(y^*) = y^*$ 得到两个不动点 $y_0^* = 0$ 和 $y^* = \frac{b(1 - q - \exp(-bT))}{e(1 - \exp(-bT))}$. 从而得到系统(3.4)的周期解为

$$\tilde{y}_0(t) = 0, \quad \tilde{y}(t) = \frac{b(1 - q - \exp(-bT))}{e(1 - q - \exp(-bT)) + e q \exp(-b(t - nT))}.$$

通过计算可知 $\frac{\partial F(y(nT^+))}{\partial y(nT^+)} = \frac{b^2(1 - q) \exp(-bT)}{(b \exp(-bT) + e y(nT^+)(1 - \exp(-bT)))^2}$, 若 $q > 1 - \exp(-bT)$, 则

$$\frac{\partial F(y(nT^+))}{\partial y(nT^+)} \Big|_{y(nT^+)=0} = \frac{1 - q}{\exp(-bT)} < 1,$$

可知 $\tilde{y}_0(t) = 0$ 是局部渐近稳定的. 若 $q < 1 - \exp(-bT)$, 则

$$\frac{\partial F(y(nT^+))}{\partial y(nT^+)} \Big|_{y(nT^+) = y^*} = \frac{\exp(-bT)}{1-q} < 1,$$

可知 $\tilde{y}(t) = \frac{b(1-q-\exp(-bT))}{e(1-q-\exp(-bT))+eq\exp(-b(t-nT))}$ 是局部渐近稳定的.

下面证明正周期解 $\tilde{y}(t)$ 是全局渐近稳定的.

对系统(3.4)作变换 $y = 1/z$, 则得到一个线性非齐次脉冲方程

$$\begin{cases} z'(t) = e - bz(t), & t \neq nT, \\ z(t^+) = \frac{1}{1-q}z(t), & t = nT. \end{cases} \quad (3.5)$$

因此, $y(t) = y(t, y_0)$ 是系统(3.4)的解当且仅当 $z(t) = z(t, z_0)$ 是系统(3.5)的解. 令

$$w(t, s) = \prod_{s \leq nT < t} \frac{1}{1-q} \exp(-b(t-s))$$

是相应的齐次方程的Cauchy矩阵, 则 $z(t) = w(t, 0)z(0) + e \int_0^t w(t, s) ds$ 是系统(3.5)的解. 因为系统(3.4)的解一致有上界, 所以只需证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |z(t) - \tilde{z}(t)| = 0$. 实际上,

$$\begin{aligned} |z(t) - \tilde{z}(t)| &= w(t, 0)|z(0) - \tilde{z}(0)| \\ &= \prod_{0 < nT < t} \frac{1}{1-q} \exp(-b(t-s)) \leq \left(\frac{1}{1-q} \exp(-bT) \right)^n, \end{aligned}$$

其中 $q < 1 - \exp(-bT)$. 从而推出 $|z(t) - \tilde{z}(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. 因此,

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = \left| \frac{1}{z(t)} - \frac{1}{\tilde{z}(t)} \right| = \frac{|z(t) - \tilde{z}(t)|}{z(t)\tilde{z}(t)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

进而得到如下定理.

定理3.1.1 记 $q^* = 1 - \exp(-bT)$.

(i) 如果 $q > q^*$, 那么系统(3.4)的平凡周期解是局部渐近稳定的.

(ii) 如果 $q < q^*$, 那么系统(3.4)有唯一正周期解 $\tilde{y}(t)$, 且是全局渐近稳定的.

根据定理3.1.1得到如下的引理.

引理3.1.2 系统(3.4)有唯一的正周期解 $\tilde{y}(t), t \in (nT, (n+1)T]$, 且对系统(3.4)的任意解 $y(t)$, 有 $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t), t \rightarrow +\infty$.

引理3.1.3 系统(3.2)满足(3.3)的解均为正.

证明 首先证明 $x_2(t) > 0, t > 0$. 反设存在 $t' > 0$, 使得 $x_2(t') = 0$. 令 t_0 是第一个使得 $x_2(t') = 0$ 的时刻, 即 $t_0 = \inf \{t' > 0 : x_2(t') = 0\}$, 由系统(3.2)的第二个方程可知,

$$x_2'(t_0) = \begin{cases} \alpha e^{-r\tau_1} \varphi_2(t_0 - \tau_1) > 0, & 0 < t_0 \leq \tau_1, \\ \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t_0 - \tau_1) > 0, & t_0 > \tau_1. \end{cases}$$

因此, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, $x_2'(t_0 - \varepsilon) > 0$. 但是根据 t_0 的定义可知, $x_2'(t_0 - \varepsilon) \leq 0$, 从而矛盾. 故 $x_2(t) > 0, t > 0$.

由系统(3.2)的第一个方程可得 $x_1'(t) > -\alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - r x_1(t)$. 考虑方程

$$u'(t) = -\alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - r u(t), \quad u(0) = x_1(0),$$

易知

$$u(t) = e^{-rt} \left[x_1(0) - \int_0^t \alpha e^{r(s-\tau_1)} x_2(s - \tau_1) ds \right], \quad t \in (0, \tau_1). \quad (3.6)$$

系统(3.2)的第一个方程可表示为

$$x_1(t) = \int_{t-\tau_1}^t \alpha e^{-r(t-s)} x_2(s) ds. \quad (3.7)$$

由(3.7)可知 $x_1(0) = \int_{-\tau_1}^0 \alpha e^{rs} x_2(s) ds$, 结合(3.6)易得,

$$u(\tau_1) = e^{-r\tau_1} \left[\int_{-\tau_1}^0 \alpha e^{rs} x_2(s) ds - \int_0^{\tau_1} \alpha e^{r(s-\tau_1)} x_2(s - \tau_1) ds \right] = 0,$$

且 $u(t)$ 在 $(0, \tau_1)$ 上递减. 利用比较定理可得 $x_1(t) > u(t) > 0, t \in (0, \tau_1)$. 同理, 由归纳法和文献[44]中的证明方法可知 $x_1(t) > 0, t > 0$.

由系统(3.2)的第三个和第六个方程易得,

$$\begin{cases} y'(t) \geq y(t)(b - ey(t)), & t \neq nT, \\ y(t^+) = (1 - q)y(t), & t = nT, \end{cases}$$

利用比较定理和引理3.1.2得到 $y(t) \geq \tilde{y}(t) > 0, t > 0$. 证毕.

引理3.1.4 存在常数 $M = \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4r(\beta+e)} > 0$, 使得当 t 充分大时, 系统(3.2)的任意解均满足 $x_1(t) \leq M, x_2(t) \leq M, y(t) \leq M$.

证明 令 $V(t) = x_1(t) + x_2(t) + y(t)$. 当 $t \neq nT$ 时,

$$\begin{aligned} D^+V(t) &= \alpha x_2(t) - r x_1(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} - E_1 x_2(t) \\ &\quad + y(t) \left(b - ey(t) + \frac{fx_2(t)}{my(t)+x_2(t)} \right) \\ &\leq (\alpha + r - E_1) x_2(t) - \beta x_2^2(t) + (r + b) y(t) - ey^2(t) - rV(t) \\ &\leq \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4(\beta+e)} - rV(t). \end{aligned}$$

当 $t = nT$ 时,

$$\begin{aligned} V(nT^+) &= x_1(nT) + x_2(nT) + (1 - q)y(nT) \\ &= V(nT) - qy(nT) \leq V(nT). \end{aligned}$$

考虑下面的脉冲微分不等式

$$\begin{cases} D^+V(t) \leq \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4(\beta+e)} - rV(t), & t \neq nT, \\ V(nT^+) \leq V(nT), & t = nT, \end{cases}$$

由定理1.2.1可得,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0^+) \exp\left(\int_0^t (-r) ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t (-r) d\theta\right) \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4(\beta+e)} ds \\ &= V(0^+) \exp(-rt) + \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4r(\beta+e)} (1 - \exp(-rt)) \\ &\rightarrow \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4r(\beta+e)} (t \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

因此 $V(t)$ 是一致有界的. 根据 $V(t)$ 的定义可知, 存在一个正常数 $M = \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4r(\beta+e)}$, 使得当 t 充分大时, $x_1(t) \leq M, x_2(t) \leq M, y(t) \leq M$. 证毕.

§3.2 主要结论

下面首先分析系统(3.2)的食饵灭绝周期解的全局吸引力.

基于(3.7)可知系统(3.2)的动力行为由 $x_2(t)$ 和 $y(t)$ 决定, 因此, 只需研究下面的子系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{aligned} x_2'(t) &= \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} - E_1 x_2(t), \\ y'(t) &= y(t) \left(b - ey(t) + \frac{fx_2(t)}{my(t)+x_2(t)} \right), \end{aligned} \right\} & t \neq nT, \\ \left. \begin{aligned} x_2(t^+) &= x_2(t), \\ y(t^+) &= (1-q)y(t), \end{aligned} \right\} & t = nT. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

系统(3.8)的初始条件为

$$(\varphi_2, \psi) \in C_+ = C([- \tau_1, 0], R_+^2), \varphi_2(0) > 0, \psi(0) > 0. \quad (3.9)$$

由于 $\tilde{x}_2(t) = 0$ 是 $x_2'(t) = 0$ 的一个平衡点, 所以系统(3.8)的食饵灭绝情况就是食饵从系统中完全消失, 即 $x_2(t) = 0, t \geq 0$.

由引理3.1.2易得系统(3.8)有一个食饵灭绝周期解 $(0, \tilde{y}(t)), t \in (nT, (n+1)T]$, 且对系统(3.8)的任意解 $(x_2(t), y(t))$ 均有 $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t), t \rightarrow +\infty$.

记

$$R_1 = \frac{(\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)(m+1)M}{c\Delta}, \quad R_2 = \frac{\alpha e^{-r\tau_1} - (E_1 + \frac{c}{m\Delta})(1-q)\Delta}{\beta M},$$

其中 $\Delta = \frac{b(1-q-\exp(-bT))}{e(1-q)(1-\exp(-bT))}, M = \frac{(\alpha+r-E_1)^2+(r+b)^2}{4r(\beta+e)}$.

定理3.2.1 如果 $R_1 < 1$, 那么系统(3.8)的食饵灭绝周期解 $(0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的.

证明 假设 $(x_2(t), y(t))$ 是系统(3.8)满足(3.9)的任意解. 由 $R_1 < 1$ 可知,

$$(\alpha e^{-r\tau} - E_1)(m+1)M - c\Delta < 0.$$

选择充分小的正常数 ε , 使得

$$(\alpha e^{-r\tau} - E_1)(m+1)M - c(\Delta - \varepsilon) < 0. \quad (3.10)$$

注意到 $y'(t) \geq y(t)(b - ey(t))$, 利用比较定理和引理3.1.2可得,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \frac{b(1-q - \exp(-bT))}{e(1-q)(1 - \exp(-bT))} := \Delta.$$

因此, 存在一个正整数 n_1 和任意小的正数 ε , 使得对所有的 $t \geq n_1T$,

$$y(t) \geq \frac{b(1-q - \exp(-bT))}{e(1-q)(1 - \exp(-bT))} - \varepsilon := \eta. \quad (3.11)$$

由(3.8)和(3.11)易得, 当 $t \geq n_1T + \tau_1$ 时,

$$x_2'(t) \leq \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau) - \beta x_2^2(t) - \left(\frac{c\eta}{(m+1)M} + E_1 \right) x_2(t), \quad (3.12)$$

其中 $M = \frac{(\alpha + r - E_1)^2 + (r+b)^2}{4r(\beta + e)}$. 考虑下面的比较方程

$$z'(t) = \alpha e^{-r\tau_1} z(t - \tau) - \beta z^2(t) - \left(\frac{c\eta}{(m+1)M} + E_1 \right) z(t), \quad (3.13)$$

由(3.10)可知 $\alpha e^{-r\tau_1} < \frac{c\eta}{(m+1)M} + E_1$, 再由引理1.2.1可得,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0. \quad (3.14)$$

结合(3.12), (3.13)和(3.14), 利用比较定理及引理3.1.3可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.

不失一般性, 不妨设 $0 < x_2(t) < \varepsilon, t \geq 0$. 由系统(3.8)的第二个方程易知,

$$y(t)(b - ey(t)) \leq y'(t) \leq y(t) \left(b + \frac{f\varepsilon}{m\Delta_1} - ey(t) \right).$$

因此 $\tilde{z}_1(t) \leq y(t) \leq \tilde{z}_2(t)$, $\tilde{z}_1(t) = \tilde{y}(t)$, $\tilde{z}_2(t) \rightarrow \tilde{y}(t), t \rightarrow +\infty$, 其中 $\tilde{z}_1(t) = \frac{b(1-q - \exp(-bT))}{e(1-q - \exp(-bT)) + eq \exp(-b(t-nT))}$, $t \in (nT, (n+1)T]$ 是方程

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t)(b - ez_1(t)), & t \neq nT, \\ z_1(t^+) = (1-q)z_1(t), & t = nT, \\ z_1(0^+) = y(0^+) \end{cases}$$

的唯一正周期解; $\tilde{z}_2(t) = \frac{(b + \frac{f\varepsilon}{m\Delta_1})(1 - q - \exp(- (b + \frac{f\varepsilon}{m\Delta_1})T))}{e(1 - q - \exp(- (b + \frac{f\varepsilon}{m\Delta_1})T)) + eq \exp(- (b + \frac{f\varepsilon}{m\Delta_1})(t - nT))}$, $t \in (nT, (n + 1)T]$ 是方程

$$\begin{cases} z_2'(t) = z_2(t) \left(b + \frac{f\varepsilon}{m\Delta_1} - ez_2(t) \right), & t \neq nT, \\ z_2(t^+) = (1 - q) z_2(t), & t = nT, \\ z_2(0^+) = y(0^+) \end{cases}$$

的唯一正周期解. 利用比较定理, 对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $T_1 > 0$, 使得当 $t > T_1$ 时, 有

$$\tilde{z}_1(t) - \varepsilon_1 \leq y(t) \leq \tilde{z}_2(t) + \varepsilon_1.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 当 t 充分大时, $\tilde{y}(t) - \varepsilon_1 \leq y(t) \leq \tilde{y}(t) + \varepsilon_1$. 所以当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$. 证毕.

在现实中, 从维护生态平衡和节省资源的原则出发, 只需让系统持续生存.

定理3.2.2 如果 $R_2 > 1$, 那么系统(3.8)持续生存, 即存在正常数 m_2, m_3 和 M , 使得当 t 充分大时, $m_2 \leq x_2(t) \leq M, m_3 \leq y(t) \leq M$.

证明 令 $(x_2(t), y(t))$ 是系统(3.8)满足(3.9)的任意正解. 由 $y'(t) \geq y(t)(b - ey(t))$ 和引理3.1.2易知,

$$y(t) \geq \frac{b(1 - q - \exp(-bT))}{e(1 - q)(1 - \exp(-bT))} - \varepsilon_1 := m_3.$$

结合引理3.1.4可知, 当 t 充分大时, $m_3 \leq y(t) \leq M$.

下面证明存在 $m_2 > 0$, 当 t 充分大时, 使得 $x_2(t) \geq m_2$. 下面分两步来证明.

第一步: 系统(3.8)的第一个方程可以写成

$$x_2'(t) = \left(\alpha e^{-r\tau_1} - \beta x_2(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x_2(t)} - E_1 \right) x_2(t) - \alpha e^{-r\tau_1} \frac{d}{dt} \int_{t-\tau_1}^t x_2(s) ds. \quad (3.15)$$

定义

$$V(t) = x_2(t) + \alpha e^{-r\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t x_2(s) ds.$$

根据(3.15)计算 $V(t)$ 的上右导数可得,

$$V'(t) = \left(\alpha e^{-r\tau_1} - \beta x_2(t) - \frac{cy(t)}{my(t) + x_2(t)} - E_1 \right) x_2(t). \quad (3.16)$$

因为 $R_2 > 1$, 选择正常数 m_2^* 和充分小的正数 ε_1 , 使得

$$\alpha e^{-r\tau_1} - \beta M - \frac{c\sigma}{m \cdot m_3} - E_1 > 0, \quad (3.17)$$

其中

$$\sigma = \frac{b}{e} \left(1 + \frac{fm_2^*}{bmm_3} \right) \left(1 - \frac{q}{1 - \exp\left(-\left(b + \frac{fm_2^*}{mm_3}\right)T\right)} \right) + \varepsilon_1$$

且 $m_2^* = \frac{bmm_3}{f} \left(1 - \frac{\beta M}{\alpha e^{-r\tau_1} - E_1 - c(1-q)\Delta} \right)$. 可推断对任意的正常数 t_0 , 当 $t \geq t_0$ 时, $x_2(t) < m_2^*$ 不可能恒成立. 否则, 假设对所有的 $t \geq t_0$, $x_2(t) < m_2^*$ 恒成立. 由系统(3.8)的第二个和第四个方程可得,

$$\begin{cases} y'(t) \leq \left(b + \frac{fm_2^*}{mm_3}\right) y(t) \left(1 - \frac{e}{b + \frac{fm_2^*}{mm_3}} y(t)\right), & t \neq nT, n \in N, \\ y(t^+) = (1-q)y(t), & t = nT, n \in N. \end{cases}$$

利用比较定理, 存在一个 $t_1 > t_0 + T$, 当 $t \geq t_1$ 时, 使得

$$y(t) < \frac{b}{e} \left(1 + \frac{fm_2^*}{bmm_3} \right) \left(1 - \frac{q}{1 - \exp\left(-\left(b + \frac{fm_2^*}{mm_3}\right)T\right)} \right) + \varepsilon_1 := \sigma. \quad (3.18)$$

根据(3.16), (3.17), (3.18)及比较定理, 有

$$\begin{aligned} V'(t) &> \left(\alpha e^{-r\tau_1} - \beta M - \frac{cy(t)}{m \cdot m_3} - E_1 \right) x_2(t) \\ &> \left(\alpha e^{-r\tau_1} - \beta M - \frac{c}{m \cdot m_3} \sigma - E_1 \right) x_2(t) \\ &> \beta M \left(\frac{\alpha e^{-r\tau_1} - \frac{c}{m \cdot m_3} \sigma - E_1}{\beta M} - 1 \right) x_2(t), \quad t \geq t_1, t \neq nT, n \in N. \end{aligned} \quad (3.19)$$

令 $x_2^t = \min_{t \in [t_1, t_1+T]} x_2(t)$. 下面说明 $x_2(t) \geq x_2^t$, $t \in [t_1, t_1 + T + t_2]$, $x_2(t_1 + T + t_2) = x_2^t$ 及 $x_2'(t_1 + T + t_2) \leq 0$. 由(3.8)和(3.17)易知 $x_2'(t_1 + T + t_2) > (\alpha e^{-r\tau_1} - \beta M - \frac{c}{m \cdot m_3} \sigma - E_1)x_2^t > 0$, 得到矛盾. 因此, 当 $t \geq t_0$ 时, $x_2(t) \geq x_2^t > 0$. 由(3.19)可知,

$$V'(t) > \left(\alpha e^{-r\tau_1} - \beta M - \frac{c}{m \cdot m_3} \sigma - E_1 \right) x_2^t > 0,$$

这表明 $V(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, 这与 $V(t) \leq \left(1 + \frac{(\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)bt_1}{e} \right) M$ 矛盾. 所以, 存在一个正常数 t_0 , 使得 $x_2(t) \geq m_2^*$ 对所有的 $t \geq t_0$ 均成立.

第二步: 如果 $x_2(t) \geq m_2^*$ 对所有的 $t \geq t_0$ 均成立, 那么目标就达到了. 下面考虑当 $t \geq t_0$ 时, $x_2(t)$ 关于 m_2^* 振荡的情况. 令

$$m_2 = \left\{ \frac{m_2^*}{2}, \left(m_2^* + \frac{\beta m}{c} M^2 \right) \exp\left(-\frac{c}{m} \tau_1\right) - \frac{\beta m}{c} M^2 \right\}.$$

下面说明 $x_2(t) \geq m_2$. 存在正常数 \bar{t}, ω , 使得 $x_2(\bar{t}) = x_2(\bar{t} + \omega) = m_2^*$ 且 $x_2(t) < m_2^*$, $\bar{t} < t < \bar{t} + \omega$. 当 \bar{t} 充分大时, $y(t) < \sigma$ 成立, $\bar{t} < t < \bar{t} + \omega$. 因为 $x_2(t)$ 连续有界且不

受脉冲影响, 所以 $x_2(t)$ 一致连续. 因此存在常数 t_3 ($0 < t_3 < T$ 和 t_3 不依赖于 \bar{t} 的选择), 使得 $x_2(t) > m_2^*/2$ 对所有的 $\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + t_3$ 均成立. 如果 $\omega \leq t_3$, 目的就达到了. 如果 $t_3 < \omega \leq T$, 由系统(3.8)的第一个方程可知 $x_2'(t) \geq -(\frac{c}{m} + E_1)x_2(t) - \beta x_2^2(t)$, $\bar{t} < t \leq \bar{t} + \omega$. 于是, 由 $x_2(\bar{t}) = m_2^*$ 易知, 当 $\bar{t} < t \leq \bar{t} + \omega \leq \bar{t} + \tau_1$ 时,

$$x_2(t) \geq \left(m_2^* + \frac{\beta}{\left(\frac{c}{m} + E_1\right)} M^2 \right) \exp\left(-\left(\frac{c}{m} + E_1\right) \tau_1\right) - \frac{\beta}{\left(\frac{c}{m} + E_1\right)} M^2.$$

显然, 当 $\bar{t} < t \leq \bar{t} + \omega$ 时, $x_2(t) \geq m_2$. 若 $\omega \geq \tau_1$, 则 $x_2(t) \geq m_2, \bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \tau_1$. 同上述讨论, 得到 $x_2(t) \geq m_2, \bar{t} \leq t \leq \bar{t} + \omega$. 因为区间 $[\bar{t}, \bar{t} + \omega]$ 是任意选取的, 所以当 t 充分大时, $x_2(t) \geq m_2$. 由上面的讨论可知 m_2 的选择不依赖于(3.8)的正解, 从而当 t 充分大时, $x_2(t) \geq m_2$. 结合引理3.1.4可知 $m_2 \leq x_2(t) \leq M$. 证毕.

§3.3 数值模拟

首先考虑系统(3.1), 若参数(A1): $\alpha = 0.96, r = 0.1, \beta = 0.1, c = 1.0, f = 0.3, m = 1.0, d = 0.05, e = 0.01, \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2, E_1 = 0.5, E_2 = 0.33, x_1(0) = 20, x_2(0) = 15, y(0) = 10$, 则食饵和捕食者最终灭绝, 其模拟结果见图1.

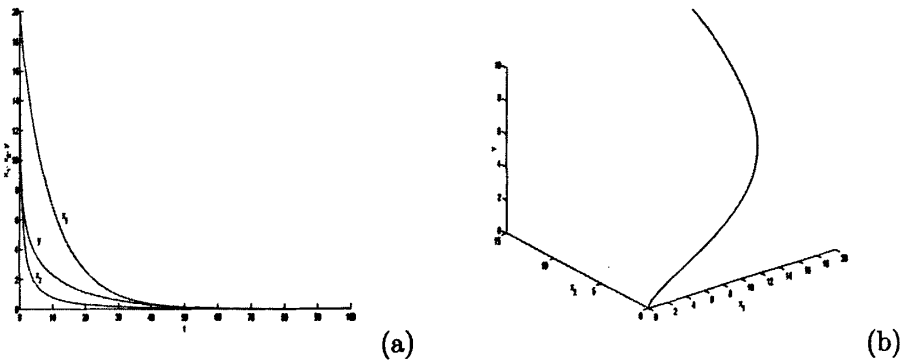


图 1 系统(3.1)食饵和捕食者都灭绝的种群时间序列图及相图

其次考虑系统(3.8), 若参数(A2): $\alpha = 0.96, r = 0.1, \beta = 0.1, c = 1.0, f = 0.3, m = 1.0, b = 0.5, e = 0.01, \tau_1 = 0, E_1 = 0.3, T = 1.0, q = 0.1, x_2(0) = 15, y(0) = 10$, 则 $R_1 = 0.6788$, 由定理3.2.1可知系统(3.8)的食饵灭绝周期解是全局吸引的, 其模拟结果见图2. 若参数(A3): $\alpha = 0.96, r = 0.1, \beta = 0.1, c = 1.0, f = 0.3, m = 1.0, b = 0.5, e = 0.01, \tau_1 = 0, E_1 = 0.3, T = 1.0, q = 0.5, x_2(0) = 15, y(0) = 10$, 则 $R_2 = 2.1217$, 由定理3.2.2可知系统(3.8)是持续生存的, 其模拟结果见图3.

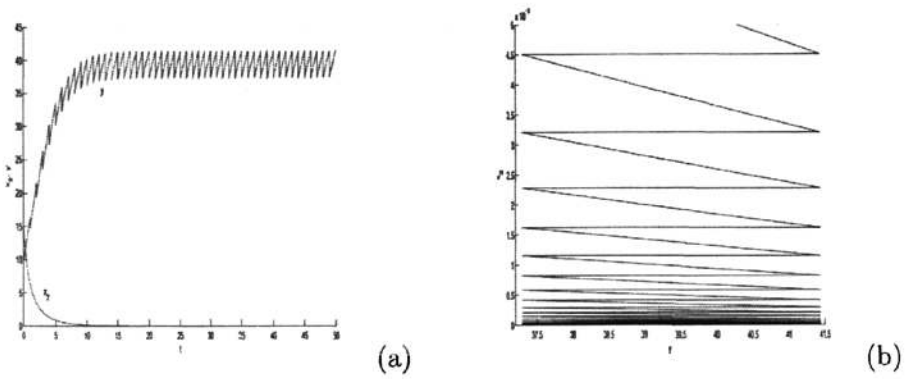


图 2 系统(3.8)食饵灭绝的种群时间序列图及相图

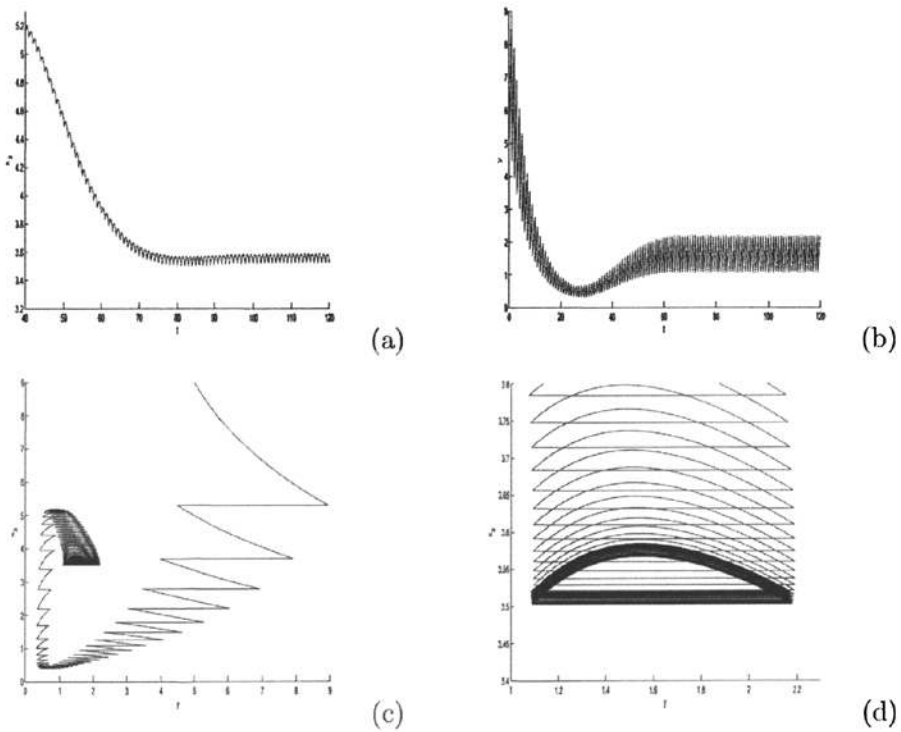


图 3 系统(3.8)持续生存的种群时间序列图及相图

比较连续系统(3.1)和脉冲系统(3.2), 可以发现, 系统(3.1)不存在食饵灭绝而捕食者不灭绝的平衡点, 而系统(3.2)却存在这样的周期解. 这反映了脉冲系统(3.2)对连续系统(3.1)的影响, 得到了系统(3.2)持续生存和系统(3.2)的食饵灭绝周期解全局吸引的充分条件. 结论表明: 在一些恰当的条件下, 通过脉冲收获捕食者可以使系统持续生存, 然而, 若参数满足 $R_1 < 1$, 则不管脉冲收获多少捕食者都不能使系统持续

生存. 这个结果符合自然界中的许多现象, 反过来说, 模型(3.2)是合适的, 结论也是正确的. 而且, 由图1可知, 当同时连续收获食饵和捕食者时, 食饵和捕食者都会很容易灭绝, 进而整个系统崩溃. 然而, 当对食饵连续收获, 捕食者脉冲收获时, 在一定条件下, 食饵和捕食者将达到共存, 即系统持续生存, 见图3. 这些结论显示, 脉冲收获捕食者对系统(3.2)的持续生存具有很重要的作用. 脉冲系统是连续和离散的一个结合体, 它更符合实际情况, 且易于操作和管理. 所以说, 脉冲系统(3.2)优于连续系统(3.1).

为了保持物种的多样性和生态平衡, 人类应该合理的收获捕食者. 在害虫管理中, 我们只需让害虫和天敌共存. 在渔业管理中, 寻求一个科学的渔业开采方法是必要的. 然而, 从经济的观点出发, 如何处理经济利益和生态平衡的问题, 即如何使脉冲周期和脉冲收获率最优化, 这是最优控制的问题, 以后将会讨论这方面的问题.

第四章 一类具有阶段结构和脉冲的Leslie-Gower捕食-食 饵系统分析

§4.1 模型介绍及相关引理

模型(1.4)比传统的Lotka-Volterra捕食-食饵模型更切合实际意义, 且具有丰富的动力学性质. 受(1.4)的启发, 在系统(3.2)的基础上, 考虑系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_1'(t) = \alpha x_2(t) - r x_1(t) - \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) = \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \frac{c x_2(t) y(t)}{c_1 + x_2(t)} - E_1 x_2(t), \\ y'(t) = b y^2(t) - \frac{f y^2(t)}{c_2 + x_2(t)}, \\ x_1(t^+) = x_1(t), \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = (1 - q) y(t), \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \neq (n + l - 1)T, \\ nT, \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} x_1(t^+) = x_1(t), \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = y(t) + p, \end{array} \right\} \begin{array}{l} t = (n + l - 1)T, \\ t = nT, \end{array} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

其中, $b > 0$ 表示捕食者的内禀增长率; q ($0 < q < 1$)表示捕食者的脉冲收获率; $p > 0$ 表示对捕食者的脉冲投放量; 如果在渔业管理中, q 就表示对成年鱼的捕获率, p 就表示对鱼苗的投放量; $n \in N$, N 为非负整数集合. 捕食者对食饵的捕食遵循Holling II型功能反应, $\frac{f y^2(t)}{c_2 + x_2(t)}$ 表示由于最偏好的食物 x_2 的严重短缺而使捕食者种群产生的损耗, 其余参数的生物意义同系统(3.2). 系统(4.1)的初始条件为

$$(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in C_+ = C([- \tau_1, 0], R_+^3), \varphi_1(0) > 0, \varphi_2(0) > 0, \psi(0) > 0, \quad (4.2)$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ 在 $[- \tau_1, 0]$ 上都是正的有界连续函数. 由于(4.1)的第一方程没有出现在第二和第三个方程里面, 所以只需考虑系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_2'(t) = \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \frac{c x_2(t) y(t)}{c_1 + x_2(t)} - E_1 x_2(t), \\ y'(t) = b y^2(t) - \frac{f y^2(t)}{c_2 + x_2(t)}, \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = (1 - q) y(t), \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \neq (n + l - 1)T, \\ nT, \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = y(t) + p, \end{array} \right\} \begin{array}{l} t = (n + l - 1)T, \\ t = nT. \end{array} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

(4.3)的初始条件为

$$(\varphi_2, \psi) \in C_+ = C([- \tau_1, 0], R_+^2), \varphi_2(0) > 0, \psi(0) > 0. \quad (4.4)$$

引理4.1.1^[33] 令 $F: R_+^n \rightarrow R_+^n \in C^1, C^1 \subset \text{int}(R_+^n), \lim_{x \rightarrow 0^+} DF(x) = DF(0)$, 且假设(a)当 $x > 0$ 时, $DF(x) > 0$; (b)当 $0 < x < y$ 时, $DF(y) < DF(x)$.

(1)当 $F(0) = 0$ 时, 令 $\lambda = \rho(DF(0))$.

(i)若 $\lambda \leq 1$, 则对任意的 $x \geq 0, F^n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$;

(ii)若 $\lambda > 1$, 则对任意的 $x > 0, F^n(x) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 或存在 F 的唯一非零不动点 q , 当 $q > 0$ 时, 对任意的 $x > 0, F^n(x) \rightarrow q (n \rightarrow \infty)$.

(2)当 $F(0) \neq 0$ 时, 对任意的 $x \geq 0, F^n(x) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 或存在 F 的唯一不动点 q , 当 $q > 0$ 时, 对任意的 $x > 0, F^n(x) \rightarrow q (n \rightarrow \infty)$.

当食饵灭绝时, 即 $x_1(t) = x_2(t) = 0, t \geq 0$, 系统(4.3)的子系统为

$$\begin{cases} y'(t) = -\left(\frac{l}{c_2} - b\right)y^2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ y(t^+) = (1-q)y(t), & t = (n+l-1)T, \\ y(t^+) = y(t) + p, & t = nT. \end{cases} \quad (4.5)$$

系统(4.5)有唯一的正周期解

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \frac{y_1^*}{1 + \left(\frac{l}{c_2} - b\right)(t - (n-1)T)y_1^*}, & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ \frac{y_2^*}{1 + \left(\frac{l}{c_2} - b\right)(t - (n+l-1)T)y_2^*}, & (n+l-1)T < t \leq nT, \end{cases}$$

其中,

$$y_1^* = \frac{-(q - pu_1) + \sqrt{(q - pu_1)^2 + 4pu_1}}{2u_1}, \quad y_2^* = \frac{-u_3 + \sqrt{u_3^2 + 4pu_2(1-q)}}{2u_2},$$

$$u_1 = (1 + lq - q)\left(\frac{l}{c_2} - b\right)T, \quad u_2 = \left(1 + lp(1-l)\left(\frac{l}{c_2} - b\right)T\right)\left(\frac{l}{c_2} - b\right)T, \quad u_3 = 2lp\left(\frac{l}{c_2} - b\right)T - pu_1 + q, \quad \text{且 } \tilde{y}(0) = \tilde{y}(nT^+) = y_1^*, \tilde{y}(lT^+) = \tilde{y}((n+l-1)T^+) = y_2^*.$$

由引理4.1.1很容易得到下述引理.

引理4.1.2^[33] 系统(4.5)的唯一正周期解 $\tilde{y}(t)$ 是全局渐近稳定的.

由引理4.1.2可知, 系统(4.3)有一个食饵灭绝周期解 $(0, \tilde{y}(t))$, 即系统(4.1)有一个食饵灭绝周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$.

引理4.1.3 系统(4.1)满足(4.2)的解均为正.

证明 类似引理3.1.3的证明, 略.

引理4.1.4 存在正常数 M_1 和 M_2 , 使得当 t 充分大时, 系统(4.1)的任意解满足 $x_1(t) + x_2(t) \leq M_1, y(t) \leq M_2$.

证明 令 $V(t) = x_1(t) + x_2(t)$. 当 $t \neq (n+l-1)T, nT$ 时,

$$\begin{aligned} D^+V(t) &= \alpha x_2(t) - rx_1(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} - E_1x_2(t) \\ &\leq \frac{(\alpha+r-E_1)^2}{4\beta} - rV(t). \end{aligned}$$

当 $t = (n+l-1)T, nT$ 时,

$$V(t^+) = x_1(t^+) + x_2(t^+) = V(t).$$

考虑如下脉冲微分不等式

$$\begin{cases} D^+V(t) \leq \frac{(\alpha+r-E_1)^2}{4\beta} - rV(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ V(t^+) = V(t), & t = (n+l-1)T, \\ V(t^+) = V(t), & t = nT, \end{cases}$$

利用定理1.2.1可得,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0^+) e^{\int_0^t (-r) ds} + \int_0^t e^{\int_s^t (-r) ds} \frac{(\alpha+r-E_1)^2}{4\beta} ds \\ &= V(0^+) e^{-rt} + \frac{(\alpha+r-E_1)^2}{4r\beta} (1 - e^{-rt}) \\ &\rightarrow \frac{(\alpha+r-E_1)^2}{4r\beta} \quad (t \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

因此, $x_1(t) + x_2(t) \leq \frac{(\alpha+r-E_1)^2}{4r\beta} := M_1$.

由系统(4.1)易得,

$$\begin{cases} y'(t) \leq -\left(\frac{f}{c_2+M_1} - b\right) y^2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ y(t^+) = (1-q)y(t), & t = (n+l-1)T, \\ y(t^+) = y(t) + p, & t = nT, \end{cases}$$

利用比较定理和引理4.1.2可知 $y(t) \leq z(t) \leq \tilde{z}(t) + \varepsilon$, 其中 $\tilde{z}(t)$ 是

$$\begin{cases} z'(t) = -\left(\frac{f}{c_2+M_1} - b\right) z^2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ z(t^+) = (1-q)z(t), & t = (n+l-1)T, \\ z(t^+) = z(t) + p, & t = nT \end{cases}$$

的唯一正周期解, 且

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} \frac{z_1^*}{1 + \left(\frac{f}{c_2+M_1} - b\right)(t - (n-1)T)z_1^*}, & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ \frac{z_2^*}{1 + \left(\frac{f}{c_2+M_1} - b\right)(t - (n+l-1)T)z_2^*}, & (n+l-1)T < t \leq nT, \end{cases}$$

其中,

$$z_1^* = \frac{-(q - pv_1) + \sqrt{(q - pv_1)^2 + 4pv_1}}{2v_1}, \quad z_2^* = \frac{-v_3 + \sqrt{v_3^2 + 4pv_2(1-q)}}{2v_2},$$

$$v_1 = (1 - q + lq) \left(\frac{f}{c_2 + M_1} - b \right) T, v_2 = \left(1 + lp(1 - l) \left(\frac{f}{c_2 + M_1} - b \right) T \right) \left(\frac{f}{c_2 + M_1} - b \right) T,$$

$$v_3 = 2lp \left(\frac{f}{c_2 + M_1} - b \right) T - pv_1 + q, \text{ 且 } \tilde{z}(0) = \tilde{z}(nT^+) = z_1^*, \tilde{z}(lT^+) = \tilde{z}((n + l - 1)T^+) = z_2^*.$$

令 $M_2 = \min\{z_1^* + \varepsilon, z_2^* + \varepsilon\}$, 则 $y(t) \leq M_2$. 证毕.

§4.2 主要结论

记

$$R_3 = \frac{(\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)(c_1 + M_1)}{c\Delta_1}, R_4 = \frac{c_1(\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)}{cM_2},$$

其中 $\Delta_1 = \tilde{y}(t)$, $M_1 = \frac{(\alpha + r - E_1)^2}{4r\beta}$, $M_2 = \min\{z_1^* + \varepsilon, z_2^* + \varepsilon\}$.

定理4.2.1 如果 $R_3 < 1$, 那么系统(4.3)的食饵灭绝周期解 $(0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的.

证明 由 $R_3 < 1$ 可知 $(\alpha e^{-r\tau_1} - E_1)(c_1 + M_1) - c\Delta_1 < 0$. 选择充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\alpha e^{-r\tau_1} < \frac{c(\Delta_1 - \varepsilon)}{c_1 + M_1} + E_1.$$

注意到

$$\begin{cases} y'(t) \geq -\left(\frac{f}{c_2} - b\right)y^2(t), & t \neq (n + l - 1)T, nT, \\ y(t^+) = (1 - q)y(t), & t = (n + l - 1)T, \\ y(t^+) = y(t) + p, & t = nT, \end{cases}$$

利用比较定理和引理4.1.2可得,

$$y(t) \geq \tilde{y}(t) - \varepsilon := \eta_1.$$

进而

$$x_2'(t) \leq \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \left(\frac{c\eta_1}{c_1 + M_1} + E_1 \right) x_2(t).$$

考虑下面的比较方程

$$z_1'(t) = \alpha e^{-r\tau_1} z_1(t - \tau_1) - \beta z_1^2(t) - \left(\frac{c\eta_1}{c_1 + M_1} + E_1 \right) z_1(t),$$

由 $\alpha e^{-r\tau_1} < \frac{c(\Delta_1 - \varepsilon)}{c_1 + M_1} + E_1$ 和引理1.2.1可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = 0$. 根据比较定理和引理4.1.3, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0.$$

不失一般性, 假设 $0 < x_2(t) < \varepsilon$, $t \geq 0$. 由系统(4.3)易知,

$$\begin{cases} y'(t) \geq -\left(\frac{f}{c_2} - b\right)y^2(t), & t \neq (n + l - 1)T, nT, \\ y(t^+) = (1 - q)y(t), & t = (n + l - 1)T, \\ y(t^+) = y(t) + p, & t = nT, \end{cases} \quad (4.6)$$

且

$$\begin{cases} y'(t) \leq -\left(\frac{f}{c_2+\varepsilon} - b\right)y^2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ y(t^+) = (1-q)y(t), & t = (n+l-1)T, \\ y(t^+) = y(t) + p, & t = nT, \end{cases}$$

则 $\tilde{z}_2(t) \leq y(t) \leq \tilde{z}_3(t)$, $\tilde{z}_2(t) = \tilde{y}(t)$, $\tilde{z}_3(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$, $t \rightarrow +\infty$, 其中, $\tilde{z}_2(t)$ 是

$$\begin{cases} z_2'(t) = -\left(\frac{f}{c_2} - b\right)z_2^2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ z_2(t^+) = (1-q)z_2(t), & t = (n+l-1)T, \\ z_2(t^+) = z_2(t) + p, & t = nT \end{cases} \quad (4.7)$$

的唯一正周期解, $\tilde{z}_3(t)$ 是

$$\begin{cases} z_3'(t) = -\left(\frac{f}{c_2+\varepsilon} - b\right)z_3^2(t), & t \neq (n+l-1)T, nT, \\ z_3(t^+) = (1-q)z_3(t), & t = (n+l-1)T, \\ z_3(t^+) = z_3(t) + p, & t = nT \end{cases}$$

的唯一正周期解. 根据比较定理及引理4.1.2可知, 对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $T_1 > 0$, 当 $t > T_1$ 时,

$$\tilde{z}_2(t) - \varepsilon_1 \leq y(t) \leq \tilde{z}_3(t) + \varepsilon_1,$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 对充分大的 t , $\tilde{y}(t) - \varepsilon_1 \leq y(t) \leq \tilde{y}(t) + \varepsilon_1$, 从而 $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$, $t \rightarrow +\infty$. 证毕.

定理4.2.2 如果 $R_4 > 1$, 那么系统(4.3)持续生存, 即存在正常数 m_1 , m_2 , M_1 和 M_2 , 使得当 t 充分大时, $m_1 \leq x_2(t) \leq M_1$, $m_2 \leq y(t) \leq M_2$.

证明 由(4.6)和(4.7), 利用比较定理及引理4.1.2可得,

$$y(t) \geq \tilde{z}_2(t) - \varepsilon = \tilde{y}(t) - \varepsilon := m_2.$$

由系统(4.3)的第一个方程可知,

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{c_1+x_2(t)} - E_1 x_2(t) \\ &\geq \alpha e^{-r\tau_1} x_2(t - \tau_1) - \beta x_2^2(t) - \left(\frac{cM_2}{c_1} + E_1\right) x_2(t). \end{aligned}$$

由 $R_4 > 1$ 可知 $\alpha e^{-r\tau_1} > \frac{cM_2}{c_1} + E_1$, 据比较定理和引理1.2.1可得 $x_2(t) \geq \frac{\alpha e^{-r\tau_1} - \frac{cM_2}{c_1} - E_1}{\beta} := m_1$. 结合引理4.1.4可知, $m_1 \leq x_2(t) \leq M_1$, $m_2 \leq y(t) \leq M_2$.

推论4.2.3 令 $E^* = \alpha e^{-r\tau_1} - \frac{c\Delta_1}{c_1+M_1}$, 则

(1) 当 $E_1 > E^*$ 时, 系统(4.3)的食饵灭绝周期解 $(0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的.

(2) 当 $E_1 < E^* + \frac{c\Delta_1}{c_1+M_1} - \frac{cM_2}{c_1}$ 时, 系统(4.3)持续生存.

推论4.2.3的生物意义是很明显的,若对食饵的收获较大时,食饵将会灭绝;若对食饵较小收获时,食饵和捕食者将会共存.在渔业管理中,理论上说可以选择一个合理的控制策略来防止生物的过度捕捞,防止人类的开采超出生物的繁殖能力,也即在种群最终持续生存的情况下达到捕捞量的最优.

§4.3 数值模拟

若在系统(4.3)中,令 $\alpha = 1.0$, $r = 0.1$, $\beta = 1.0$, $\tau_1 = 0$, $c = 1.0$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.8$, $f = 0.4$, $b = 0.5$, $E_1 = 0.2$, $T = 1.2$, $l = 0.5$, $q = 0.1$, $p = 0.1$, $x_2(0) = 0.2$, $y(0) = 0.1$,则由定理4.2.1可知系统(4.3)的食饵灭绝周期解全局渐近稳定,其数值模拟见图1.

若在系统(4.3)中,令 $\alpha = 1.0$, $r = 0.1$, $\beta = 1.0$, $\tau_1 = 0$, $c = 1.0$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.8$, $f = 0.4$, $b = 0.5$, $E_1 = 0.2$, $T = 0.6$, $l = 0.5$, $q = 0.1$, $p = 0.05$, $x_2(0) = 0.2$, $y(0) = 0.1$,则由定理4.2.2可知系统(4.3)是持续生存的,其数值模拟见图2.

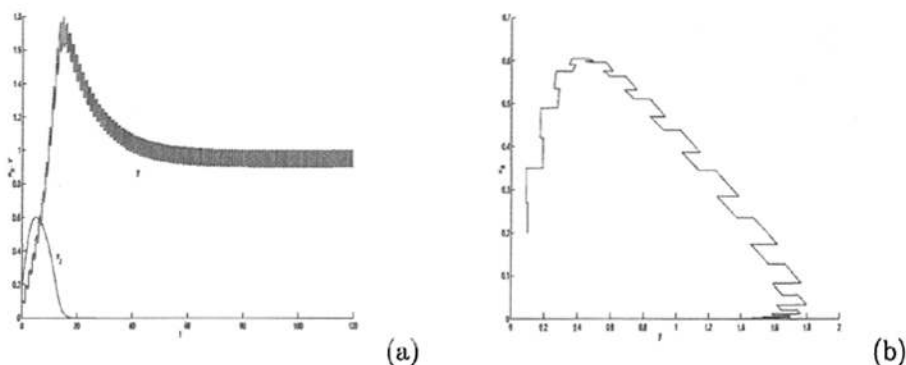


图 1 系统(4.3)食饵灭绝的种群时间序列图和相图

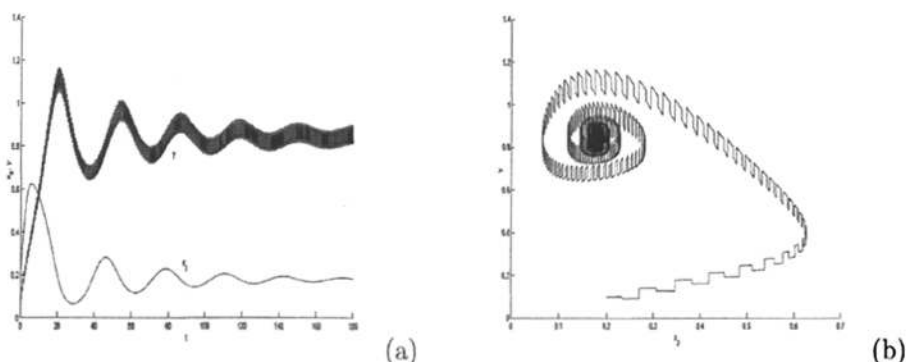


图 2 系统(4.3)持续生存的种群时间序列图和相图

第五章 一类具有阶段结构和脉冲的非自治捕食-食饵系统分析

§5.1 模型介绍及相关引理

现阶段, 具有脉冲效应的自治捕食-食饵系统得到了广泛地研究, 但对具有阶段结构和脉冲的非自治捕食-食饵系统研究的却很少. 鉴于气候、温度、食物供应及其它物理环境因素的周期性变化, 在系统(3.2)的基础上, 考虑一类具有阶段结构和脉冲的非自治捕食-食饵系统

$$\left. \begin{cases} \begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - \alpha(t - \tau_1)e^{-\int_{t-\tau_1}^t r(s)ds}x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) &= \alpha(t - \tau_1)e^{-\int_{t-\tau_1}^t r(s)ds}x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t) - \frac{c(t)x_2(t)y(t)}{m(t)y(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) &= y(t)\left(b(t) - e(t)y(t - \tau_3) + \frac{f(t)x_2(t - \tau_2)}{m(t)y(t - \tau_2) + x_2(t - \tau_2)}\right), \end{aligned} & t \neq t_k, \\ \begin{aligned} x_1(t_k^+) &= x_1(t_k), \\ x_2(t_k^+) &= x_2(t_k), \\ y(t_k^+) &= (1 - E_{2k})y(t_k), \end{aligned} & t = t_k, \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $k = 1, 2, \dots$, E_{2k} 表示对捕食者的脉冲收获率, 时滞 τ_1, τ_2, τ_3 均为非负常数, $b(t) > 0$ 表示捕食者是杂食动物, 即捕食者可以依赖本系统之外的食物为生; $b(t) < 0$ 表示捕食者的死亡率, 其余参数的生物意义同系统(3.2). 系统(5.1)的初始条件为

$$\begin{aligned} (x_1(s), x_2(s), y(s)) &= (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \psi(s)), \quad -\tau^* = -\max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} \leq s \leq 0, \\ \varphi_1(0) > 0, \varphi_2(0) > 0, \psi(0) > 0, \varphi_1, \varphi_2, \psi &\in C^1([- \tau^*, 0], [0, +\infty)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

令 $f^L = \min_{0 \leq t \leq \omega} f(t)$, $f^M = \max_{0 \leq t \leq \omega} f(t)$, 其中 $f(t)$ 为任意正的连续函数.

(H1) 脉冲时刻 t_k 满足 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$.

(H2) E_{2k} 为正的实序列, 且 $0 < E_{2k} < 1, k = 1, 2, \dots$.

(H3) $\prod_{0 < t_k < t} (1 - E_{2k})$ 是正的 ω -周期函数.

(H4) $\alpha(t), r(t), \beta(t), c(t), m(t), e(t), f(t)$ 都是正的 ω -周期连续函数, $b(t)$ 是 ω -周期连续函数且 $\alpha^L \leq \alpha(t) \leq \alpha^M, r^L \leq r(t) \leq r^M, \beta^L \leq \beta(t) \leq \beta^M, c^L \leq c(t) \leq c^M, m^L \leq m(t) \leq m^M, b^L \leq b(t) \leq b^M, e^L \leq e(t) \leq e^M, f^L \leq f(t) \leq f^M$.

(H5) 存在正常数 m_1, M_1 , 使得 $m_1 \leq \prod_{0 < t_k < t} (1 - E_{2k}) \leq M_1$.

(H6) $\alpha^L e^{-r^M \tau_1} - M_1 c^M e^{B_2} > 0$, 其中 $B_2 = \ln \frac{b^M + f^M e^{B_1}}{m_1 e^L} + 2b^M \omega, B_1 = \ln \frac{\alpha^M e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L} + \frac{2\alpha^M \beta^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L}$.

定义5.1.1 如果

(i) $x_1(t), x_2(t), y(t)$ 在 $(0, t_1]$ 和 $(t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$ 上绝对连续;

(ii) 对任意的 $t_k, k = 1, 2, \dots, x_1(t_k^+), x_2(t_k^+), y(t_k^+), x_1(t_k^-), x_2(t_k^-), y(t_k^-)$ 存在且 $x_1(t_k^-) = x_1(t_k), x_2(t_k^-) = x_2(t_k), y(t_k^-) = y(t_k)$;

(iii) $x_1(t), x_2(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上满足系统(5.1), $y(t)$ 在 $[0, +\infty) / \{t_k\}$ 内满足系统(5.1), 当 $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, $y(t_k^+) - y(t_k) = -E_{2k}y(t_k)$, 那么 $x_1(t), x_2(t), y(t)$ 称为系统(5.1)的解.

考虑系统(5.1)的子系统

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(b(t) - e(t)y(t - \tau_3)), & t \neq t_k, \\ y(t_k^+) = (1 - E_{2k})y(t_k), & t = t_k. \end{cases} \quad (5.3)$$

系统(5.3)的非脉冲系统为

$$u'(t) = u(t) \left(b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_3} (1 - E_{2k}) u(t - \tau_3) \right). \quad (5.4)$$

系统(5.4)的初始条件为

$$u(s) = \psi(s), \quad -\tau^* \leq s \leq 0, \quad \psi(0) > 0, \quad \psi \in C^1([-\tau^*, 0], [0, +\infty)). \quad (5.5)$$

引理5.1.2^[3] 假设(H1)-(H4)成立.

(i) 若 $u(t)$ 是(5.4)在 $[-\tau^*, +\infty)$ 上的解, 则 $y(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - E_{2k}) u(t)$ 是(5.3)的解;

(ii) 若 $y(t)$ 是(5.3)在 $[-\tau^*, +\infty)$ 上的解, 则 $u(t) = \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - E_{2k})^{-1} y(t)$ 是(5.4)的解.

引理5.1.3^[3] 若(H1)-(H5)成立, 且 $b(t) > 0$, 则当 t 充分大时, 系统(5.3)的解满足 $N_1 \leq y(t) \leq N_2$, 其中: $N_1 = \frac{m_1 b^L}{M_1 e^M} \exp((b^L - N_2 e^M) \tau^*)$, $N_2 = \frac{M_1 b^M}{m_1 e^L} \exp(b^M \tau^*)$.

引理5.1.4^[45] 如果 $\alpha(t), r(t), A(t), \beta(t)$ 都是正的 ω -周期连续函数, 则系统

$$\begin{cases} v_1'(t) = \alpha(t)v_2(t) - r(t)v_1(t) - A(t)v_2(t - \tau_1), \\ v_2'(t) = A(t)v_2(t - \tau_1) - \beta(t)v_2^2(t) \end{cases}$$

存在一个正的 ω -周期解 $(\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t))$, 且在 $R_+^2 = \{(v_1, v_2) : v_1 > 0, v_2 > 0\}$ 上是全局吸引的.

为了方便, 记 $A(t) = \alpha(t - \tau_1) e^{-\int_{t-\tau_1}^t r(s) ds}$.

引理5.1.5 $R_+^3 = \{(x_1, x_2, y) : x_1 > 0, x_2 > 0, y > 0\}$ 是系统(5.1)的正不变集.

证明 设 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ 是系统(5.1)满足初始条件 $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0, y(0) > 0$ 的任意解. 当 $t \in [0, \tau^*]$ 时, 由系统(5.1)的第二个方程可得,

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= A(t)\varphi_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t) - \frac{c(t)x_2(t)y(t)}{m(t)y(t)+x_2(t)} \\ &\geq x_2(t) \left(-\frac{c(t)}{m(t)} - \beta(t)x_2(t) \right), \end{aligned}$$

由比较定理可得 $x_2(t) \geq \frac{x_2(0)\exp(-\int_0^t \frac{c(s)}{m(s)} ds)}{1+x_2(0)\int_0^t \beta(s)\exp(-\int_0^s \frac{c(u)}{m(u)} du) ds} > 0$. 同理, 当 $t \in [\tau^*, 2\tau^*], [2\tau^*, 3\tau^*], \dots$ 时, $x_2(t) > 0$. 综上可知, $x_2(t) > 0, t \geq 0$.

对系统(5.1)的第一个程在 $[0, t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(x_1(0) + \int_0^t (\alpha(s)x_2(s) - A(s)x_2(t - \tau_1)) e^{-\int_0^s r(u) du} ds \right) \times e^{-\int_0^t r(s) ds} \\ &= \left(x_1(0) + \int_0^t \left(\alpha(s)x_2(s) - \alpha(t - \tau_1) e^{-\int_{s-\tau_1}^s r(u) du} x_2(t - \tau_1) \right) e^{-\int_0^s r(u) du} ds \right) \\ &\quad \times e^{-\int_0^t r(s) ds} \\ &= \left(x_1(0) - \int_{-\tau_1}^0 \alpha(s)\varphi_2(s) e^{-\int_s^0 r(u) du} ds + \int_{t-\tau_1}^t \alpha(s)x_2(s) e^{\int_0^s r(u) du} ds \right) \\ &\quad \times e^{-\int_0^t r(s) ds} \\ &= \int_{t-\tau_1}^t \alpha(s)x_2(s) e^{-\int_s^t r(u) du} ds > 0. \end{aligned}$$

由系统(5.1)的第三个和第六个方程易得,

$$\begin{cases} y'(t) > y(t)(b(t) - e(t)y(t - \tau_3)), & t \neq t_k, \\ y(t_k^+) = (1 - E_{2k})y(t_k), & t = t_k, \end{cases}$$

当 $b(t) > 0$ 时, 由比较定理和引理5.1.3得 $y(t) > N_1 > 0$. 当 $b(t) < 0$ 时, 考虑比较系统

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)(b(t) - e(t)y_1(t - \tau_3)), & t \neq t_k, \\ y_1(t_k^+) = (1 - E_{2k})y_1(t_k), & t = t_k \end{cases}$$

的非脉冲系统

$$u_1'(t) = u_1(t) \left(b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_3} (1 - E_{2k}) u_1(t - \tau_3) \right),$$

则

$$u_1'(t) \leq u_1(t) (b^M - m_2 e^L u_1(t - \tau_3)),$$

由已知条件 $b^M < 0$ 及文献[3]中引理2.2的证明方法可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_1(t) = 0$, 利用引理5.1.2易知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$. 结合比较定理和初始条件(5.5)可得 $y(t) > y_1(t) > 0$.

令 X, Z 为赋范向量空间, $L: \text{Dom}L \subset X \rightarrow Z$ 是一个线性映射, $N: X \rightarrow Z$ 是一个连续映射. 如果 $\dim \text{Ker}L = \text{codim } \text{Im}L < +\infty$ 且 $\text{Im}L$ 在 Z 中是闭的, 那么

映射 L 就称为 Fredholm 映射. 若 L 是一个零指标的 Fredholm 映射, 则存在连续投射算子 $P: X \rightarrow X, Q: Z \rightarrow Z$, 使得 $ImP = KerL, KerQ = ImL = Im(I - Q)$. 从而, $L|_{DomL \cap KerP}: (I - P)X \rightarrow ImL$ 是可逆的, 记可逆算子为 K_p . 如果 Ω 是 X 的一个有界开子集, $QN(\bar{\Omega})$ 有界, 且 $K_p(I - Q)N: \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的, 那么映射 N 称为在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的. 由于 ImQ 同构于 $KerL$, 所以存在一个同构 $J: ImQ \rightarrow KerL$.

定理 5.1.6 (延拓定理)^[46] 令 Ω 是 X 的一个有界开子集, L 是一个零指标的 Fredholm 映射, N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的. 若

- (i) 对每一个 $\lambda \in (0, 1), x \in \partial\Omega \cap DomL, Lx \neq \lambda Nx$;
- (ii) 对每一个 $x \in \partial\Omega \cap KerL, QNx \neq 0$;
- (iii) $deg\{JQN, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$,

则 $Lx = Nx$ 在 $\Omega \cap DomL$ 内至少存在一个解.

§5.2 主要结论

定理 5.2.1 如果 (H1)-(H5) 成立, 且 $b(t) < 0, -\frac{f^M}{b^M} < 1$, 那么系统 (5.1) 的捕食者灭绝周期解 $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), 0)$ 是全局吸引的.

证明 设 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ 是系统 (5.1) 满足 (5.2) 的任意解. 由 $b(t) < 0, -\frac{f^M}{b^M} < 1$ 易知 $f^M + b^M < 0$. 根据系统 (5.1) 的第三个和第六个方程可得,

$$\begin{cases} y'(t) \leq y(t)(b(t) + f(t) - e(t)y(t - \tau_3)), & t \neq t_k, \\ y(t_k^+) = (1 - E_{2k})y(t_k), & t = t_k. \end{cases}$$

考虑比较系统

$$\begin{cases} y_2'(t) = y_2(t)(b(t) + f(t) - e(t)y_2(t - \tau_3)), & t \neq t_k, \\ y_2(t_k^+) = (1 - E_{2k})y_2(t_k), & t = t_k \end{cases}$$

的非脉冲系统

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= u_2(t) \left(b(t) + f(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_3} (1 - E_{2k}) u_2(t - \tau_3) \right) \\ &\leq u_2(t) (b^M + f^M - m_2 e^L u_2(t - \tau_3)), \end{aligned}$$

由 $f^M + b^M < 0$ 及文献 [3] 中引理 2.2 的证明方法可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_2(t) = 0$, 利用引理 5.1.2 可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$. 由比较定理和引理 5.1.5 易知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

不失一般性, 不妨设 $0 < y(t) < \varepsilon$. 系统 (5.1) 中前两个方程的非脉冲系统为

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - A(t)x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) = A(t)x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t) - \frac{c(t)x_2(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - E_{2k})y(t)}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - E_{2k})y(t) + x_2(t)}. \end{cases} \quad (5.6)$$

考虑系统(5.6)的子系统

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - A(t)x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) = A(t)x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t), \end{cases} \quad (5.7)$$

由引理5.1.4可知, 系统(5.7)存在一个正的 ω -周期解 $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$, 且在 $R_+^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ 上是全局吸引的.

由系统(5.6)及假设条件可得,

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - A(t)x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) \leq A(t)x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t), \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - A(t)x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) \geq A(t)x_2(t - \tau_1) - \left(\beta(t) + \frac{c(t)}{m(t)}\varepsilon\right)x_2^2(t), \end{cases}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上述系统的极限系统正好是系统(5.7), 所以, 系统(5.1)的捕食者灭绝周期解 $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), 0)$ 是全局吸引的.

定理5.2.2 如果(H1)-(H5)成立, 且 $b(t) > 0$, 那么系统(5.1)是持续生存的.

证明 令 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ 是系统(5.1)满足(5.2)的任意解. 由系统(5.6)及引理5.1.5可得,

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - A(t)x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) \leq A(t)x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t), \end{cases}$$

于是, 根据比较定理和引理5.1.4易得 $x_1(t) = v_3(t) \leq \tilde{v}_3(t) + \varepsilon$, $x_2(t) \leq v_4(t) \leq \tilde{v}_4(t) + \varepsilon$, 其中 $(\tilde{v}_3(t), \tilde{v}_4(t))$ 是系统

$$\begin{cases} v_3'(t) = \alpha(t)v_4(t) - r(t)v_3(t) - A(t)v_4(t - \tau_1), \\ v_4'(t) = A(t)v_4(t - \tau_1) - \beta(t)v_4^2(t) \end{cases}$$

的正的 ω -周期解. 令 $M_{1x} = \max_{0 \leq t \leq \omega} \{\tilde{v}_3(t) + \varepsilon\}$, $M_{2x} = \max_{0 \leq t \leq \omega} \{\tilde{v}_4(t) + \varepsilon\}$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq M_{1x}, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq M_{2x}.$$

由系统(5.1)的第三个和第六个方程可知,

$$\begin{cases} y'(t) \leq y(t)(b(t) + f(t) - e(t)y(t - \tau_3)), \quad t \neq t_k, \\ y(t_k^+) = (1 - E_{2k})y(t_k), \quad t = t_k, \end{cases}$$

利用比较定理和引理5.1.3可得,

$$y(t) \leq \frac{M_1(b^M + f^M)}{m_1 e^L} \exp((b^M + f^M)\tau^*) := N_3.$$

根据系统(5.6)又可得,

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha(t)x_2(t) - r(t)x_1(t) - A(t)x_2(t - \tau_1), \\ x_2'(t) \geq A(t)x_2(t - \tau_1) - \left(\beta(t) + \frac{c(t)}{m(t)}\right)x_2^2(t), \end{cases}$$

从而, $x_1(t) = v_5(t) \geq \tilde{v}_5(t) - \varepsilon$, $x_2(t) \geq v_6(t) \geq \tilde{v}_6(t) - \varepsilon$, 其中 $(\tilde{v}_5(t), \tilde{v}_6(t))$ 是系统

$$\begin{cases} v_5'(t) = \alpha(t)v_6(t) - r(t)v_5(t) - A(t)v_6(t - \tau_1), \\ v_2'(t) = A(t)v_6(t - \tau_1) - \left(\beta(t) + \frac{c(t)}{m(t)}\right)v_6^2(t) \end{cases}$$

的正的 ω -周期解. 令 $m_{1x} = \max_{0 \leq t \leq \omega} \{\tilde{v}_5(t) - \varepsilon\}$, $m_{2x} = \max_{0 \leq t \leq \omega} \{\tilde{v}_6(t) - \varepsilon\}$, 则

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \geq m_{1x}, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \geq m_{2x}.$$

由系统(5.1)可知,

$$\begin{cases} y'(t) \geq y(t)(b(t) - e(t)y(t - \tau_3)), \quad t \neq t_k, \\ y(t_k^+) = (1 - E_{2k})y(t_k), \quad t = t_k, \end{cases}$$

利用比较定理和引理5.1.3可得 $y(t) \geq N_1$.

令 $K_1 = \min\{m_{1x}, m_{2x}, N_1\}$, $K_2 = \max\{M_{1x}, M_{2x}, N_3\}$, 则

$$K_1 \leq x_1(t) \leq K_2, \quad K_1 \leq x_2(t) \leq K_2, \quad K_1 \leq y(t) \leq K_2.$$

证毕.

下面用Mawhin的延拓定理来证明系统(5.1)的正周期解的存在性.

定理5.2.3 若(H1)-(H6)成立, 且 $b(t) > 0$, 则系统(5.1)至少存在一个正的 ω -周期解.

证明 考虑系统(5.1)的子系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{aligned} x_2'(t) &= A(t)x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t) - \frac{c(t)x_2(t)y(t)}{m(t)y(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) &= y(t) \left(b(t) - e(t)y(t - \tau_3) + \frac{f(t)x_2(t - \tau_2)}{m(t)y(t - \tau_2) + x_2(t - \tau_2)} \right), \end{aligned} \right\} t \neq t_k, \\ \left. \begin{aligned} x_2(t_k^+) &= x_2(t_k), \\ y(t_k^+) &= (1 - E_{2k})y(t_k), \end{aligned} \right\} t = t_k \end{array} \right. \quad (5.8)$$

的非脉冲系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{aligned} x_2'(t) &= A(t)x_2(t - \tau_1) - \beta(t)x_2^2(t) \\ &\quad - \frac{c(t)x_2(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - E_{2k})y(t)}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - E_{2k})y(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) &= y(t) \left(b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_3} (1 - E_{2k})y(t - \tau_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(t)x_2(t - \tau_2)}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_2} (1 - E_{2k})y(t - \tau_2) + x_2(t - \tau_2)} \right) \end{aligned} \right\} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

令 $u_2(t) = \ln |x_2(t)|$, $u_3(t) = \ln |y(t)|$, 则系统(5.9)变为

$$\begin{cases} u_2'(t) = A(t) e^{u_2(t-\tau_1)-u_2(t)} - \beta(t) e^{u_2(t)} \\ \quad - \frac{c(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)} + e^{u_2(t)}}, \\ u_3'(t) = b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_3)} \\ \quad + \frac{f(t) e^{u_2(t-\tau_2)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_2)} + e^{u_2(t-\tau_2)}}. \end{cases} \quad (5.10)$$

显然, 若系统(5.10)存在一个 ω -周期解 $(\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t))$, 则系统(5.9)存在一个正的 ω -周期解 $(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t)) = (e^{\tilde{u}_2(t)}, e^{\tilde{u}_3(t)})$.

下面只需说明系统(5.10)至少存在一个 ω -周期解. 定义

$$X = Z = \left\{ (u_2(t), u_3(t))^T \in C(R, R^2) : u_i(\omega + t) = u_i(t), i = 2, 3 \right\},$$

$$\left\| (u_2(t), u_3(t))^T \right\| = \max_{t \in [0, \omega]} |u_2(t)| + \max_{t \in [0, \omega]} |u_3(t)|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里德范数. 易知 X 和 Z 都是范数 $\|\cdot\|$ 下的巴拿赫空间. 令

$$L: \text{Dom}L \cap X \rightarrow X, L(u_2(t), u_3(t))^T = (u_2'(t), u_3'(t))^T,$$

其中,

$$\text{Dom}L = \left\{ (u_2(t), u_3(t))^T \in C(R, R^2) \right\}, N: X \rightarrow X, N \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{cases} f_2(t) = A(t) e^{u_2(t-\tau_1)-u_2(t)} - \beta(t) e^{u_2(t)} - \frac{c(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)} + e^{u_2(t)}}, \\ f_3(t) = b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_3)} + \frac{f(t) e^{u_2(t-\tau_2)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_2)} + e^{u_2(t-\tau_2)}}. \end{cases}$$

定义

$$P \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u_2(t) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u_3(t) dt \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in X = Z.$$

显然, $\text{Ker}L = \{x \in X : x = h, h \in R^2\}$, $\text{Im}L = \{z \in Z : \int_0^\omega z(t) dt = 0\}$, $\text{Im}L$ 在 Z 中是闭的, $\dim \text{Ker}L = \text{codim} \text{Im}L = 2$, 且 P 和 Q 是连续投射算子, 使得 $\text{Im}P = \text{Ker}L$, $\text{Ker}Q = \text{Im}L = \text{Im}(I - Q)$. 进一步, L_p 的逆算子 $K_p: \text{Im}L \rightarrow \text{Dom}L \cap$

$Ker P$ 存在, 且 $K_p(z) = \int_0^t z(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t z(s) ds dt$, 则 $QN : X \rightarrow Z$, $K_p(I - Q)N : X \rightarrow X$, 且

$$QNx = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_2(t) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_3(t) dt \end{pmatrix},$$

$$K_p(I - Q)Nx = \int_0^t Nx(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t Nx(s) ds dt - \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2}\right) \int_0^\omega Nx(s) ds.$$

显然, QN 和 $K_p(I - Q)N$ 都是连续的.

为了应用定理5.1.6, 需找一个有界开子集 Ω . 下面分两步实现该过程.

(一)找 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 的估计量. 由算子方程 $Lx = \lambda Nx$, $\lambda \in (0, 1)$ 可得,

$$\begin{cases} u_2'(t) = \lambda \left(A(t) e^{u_2(t-\tau_1)-u_2(t)} - \beta(t) e^{u_2(t)} \right. \\ \quad \left. - \frac{c(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)} + e^{u_2(t)}} \right) \\ u_3'(t) = \lambda \left(b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_3)} \right. \\ \quad \left. + \frac{f(t) e^{u_2(t-\tau_2)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_2)} + e^{u_2(t-\tau_2)}} \right). \end{cases} \quad (5.11)$$

设 $(u_2(t), u_3(t))^T \in X$ 是(5.11)的解, 对(5.11)在 $[0, \omega]$ 上积分, 有

$$\begin{cases} \int_0^\omega \left(A(t) e^{u_2(t-\tau_1)-u_2(t)} - \frac{c(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)} + e^{u_2(t)}} \right) dt \\ = \int_0^\omega \beta(t) e^{u_2(t)} dt, \\ \int_0^\omega \left(e(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_3)} - \frac{f(t) e^{u_2(t-\tau_2)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_2)} + e^{u_2(t-\tau_2)}} \right) dt \\ = \int_0^\omega b(t) dt. \end{cases} \quad (5.12)$$

由于 $(u_2(t), u_3(t))^T \in X$, 所以存在 $\xi_i, \eta_i \in [0, \omega]$, 使得

$$u_i(\xi_i) = \min_{t \in [0, \omega]} u_i(t), \quad u_i(\eta_i) = \max_{t \in [0, \omega]} u_i(t), \quad i = 2, 3.$$

在(5.11)的第一个方程两边同时乘以 $e^{u_2(t)}$, 并在 $[0, \omega]$ 上积分, 有

$$\int_0^\omega \left(A(t) e^{u_2(t-\tau_1)} - \frac{c(t) e^{u_2(t)} \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)} + e^{u_2(t)}} \right) dt = \int_0^\omega \beta(t) e^{2u_2(t)} dt. \quad (5.13)$$

由(5.13)可得,

$$\beta^L \int_0^\omega e^{2u_2(t)} dt \leq \int_0^\omega \left(\alpha^M e^{-r^L \tau_1} e^{u_2(t-\tau_1)} \right) dt. \quad (5.14)$$

利用不等式 $(\int_0^\omega e^{u_2(t)} dt)^2 \leq \omega \int_0^\omega e^{2u_2(t)} dt$, 由(5.14)可知,

$$\beta^L \left(\int_0^\omega e^{u_2(t)} dt \right)^2 \leq \alpha^M \omega e^{-r^L \tau_1} \int_0^\omega e^{u_2(t)} dt,$$

从而 $\int_0^\omega e^{u_2(t)} dt \leq \frac{\alpha^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L}$, 且

$$u_2(\xi_2) \leq \ln \frac{\alpha^M e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L}. \quad (5.15)$$

结合(5.11), (5.12)和(5.15), 有

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |u'_2(t)| dt &< \int_0^\omega \left(A(t) e^{u_2(t-\tau_1)-u_2(t)} - \frac{c(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3(t)+e^{u_2(t)}}} + \beta(t) e^{u_2(t)} \right) dt \\ &= 2 \int_0^\omega \beta(t) e^{u_2(t)} dt \leq \frac{2\alpha^M \beta^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

由(5.15)和(5.16)可知,

$$\begin{aligned} u_2(t) &\leq u_2(\xi_2) + \int_0^\omega |u'_2(t)| dt \\ &\leq \ln \frac{\alpha^M e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L} + \frac{2\alpha^M \beta^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L} := B_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

在(5.11)的第二个方程两边同时乘以 $e^{u_3(t)}$, 并在 $[0, \omega]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left(e(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_3)+u_3(t)} - \frac{f(t) e^{u_2(t-\tau_2)} e^{u_3(t)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_2)+e^{u_2(t-\tau_2)}}} \right) dt \\ = \int_0^\omega b(t) e^{u_3(t)} dt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

由(5.18)可得,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega (m_1 e^L e^{2u_3(t)} - f^M e^{B_1} e^{u_3(t)}) dt &\leq b^M \int_0^\omega e^{u_3(t)} dt, \\ m_1 e^L \int_0^\omega e^{2u_3(t)} dt &\leq (b^M + f^M e^{B_1}) \int_0^\omega e^{u_3(t)} dt. \end{aligned} \quad (5.19)$$

利用不等式 $(\int_0^\omega e^{u_2(t)} dt)^2 \leq \omega \int_0^\omega e^{2u_2(t)} dt$ 及(5.19), 可得 $\int_0^\omega e^{u_3(t)} dt \leq \frac{(b^M + f^M e^{B_1}) \omega}{m_1 e^L}$, 从而推出

$$u_3(\xi_3) \leq \ln \frac{b^M + f^M e^{B_1}}{m_1 e^L}. \quad (5.20)$$

结合(5.11), (5.12)和(5.20)可知,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |u'_3(t)| dt &< \int_0^\omega \left(e(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_3)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(t) e^{u_2(t-\tau_2)}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t-\tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3(t-\tau_2)+e^{u_2(t-\tau_2)}}} + b(t) \right) dt \\ &= 2 \int_0^\omega b(t) dt \leq 2b^M \omega. \end{aligned} \quad (5.21)$$

由(5.20)和(5.21)易得,

$$\begin{aligned} u_3(t) &\leq u_3(\xi_3) + \int_0^\omega |u_3'(t)| dt \\ &\leq \ln \frac{b^M + f^M e^{B_1}}{m_1 e^L} + 2b^M \omega := B_2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

由(5.18)可知 $e^M M_1 \int_0^\omega e^{2u_3(t)} dt \geq b^L \int_0^\omega e^{u_3(t)} dt$, 从而推出 $e^{u_3(\eta_3)} \geq \frac{b^L}{e^M M_1}$, 即

$$u_3(\eta_3) \geq \ln \frac{b^L}{e^M M_1}. \quad (5.23)$$

由(5.21)和(5.23)易知,

$$\begin{aligned} u_3(t) &\geq u_3(\eta_3) - \int_0^\omega |u_3'(t)| dt \\ &\geq \ln \frac{b^L}{e^M M_1} - 2b^M \omega := C_2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

由(5.13)可知,

$$\int_0^\omega \left(\alpha^L e^{-r^M \tau_1} e^{u_2(t-\tau_1)} - M_1 c^M e^{B_2} e^{u_2(t)} \right) dt \leq \beta^M \int_0^\omega e^{2u_2(t)} dt,$$

$$\left(\alpha^L e^{-r^M \tau_1} - M_1 c^M e^{B_2} \right) \int_0^\omega e^{u_2(t)} dt \leq \beta^M e^{u_2(\eta_2)} \int_0^\omega e^{u_2(t)} dt,$$

可推出 $e^{u_2(\eta_2)} \geq \frac{\alpha^L e^{-r^M \tau_1} - M_1 c^M e^{B_2}}{\beta^M}$, 即

$$u_2(\eta_2) \geq \ln \frac{\alpha^L e^{-r^M \tau_1} - M_1 c^M e^{B_2}}{\beta^M}. \quad (5.25)$$

由(5.16)和(5.25)可得,

$$\begin{aligned} u_2(t) &\geq u_2(\eta_2) - \int_0^\omega |u_2'(t)| dt \\ &\geq \ln \frac{\alpha^L e^{-r^M \tau_1} - M_1 c^M e^{B_2}}{\beta^M} - \frac{2\alpha^M \beta^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L} := C_1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

结合(5.17)和(5.26)可知,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, \omega]} |u_2(t)| &< \max \left\{ \left| \ln \frac{\alpha^M e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L} \right| + \frac{2\alpha^M \beta^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L}, \right. \\ &\quad \left. \left| \ln \frac{\alpha^L e^{-r^M \tau_1} - M_1 c^M e^{B_2}}{\beta^M} \right| + \frac{2\alpha^M \beta^M \omega e^{-r^L \tau_1}}{\beta^L} \right\} := R_1. \end{aligned} \quad (5.27)$$

结合(5.22)和(5.24)可得,

$$\max_{t \in [0, \omega]} |u_3(t)| < \max \left\{ \left| \ln \frac{b^M + f^M e^{B_1}}{m_1 e^L} \right| + 2b^M \omega, \left| \ln \frac{b^L}{e^M M_1} \right| + 2b^M \omega \right\} := R_2. \quad (5.28)$$

显然, (5.27)和(5.28)中的 R_1 和 R_2 都不依赖于 λ .

(二)构造有界子集 Ω . 令 $M = R_1 + R_2 + R_0$, 其中 R_0 可以取的充分大, 使得代数方程

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(A(t) - \beta(t) e^{u_2} - \frac{c(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t} (1-E_{2k}) e^{u_3 + e^{u_2}}} \right) dt = 0, \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(b(t) - e(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_3} (1-E_{2k}) e^{u_3} + \frac{f(t) e^{u_2}}{m(t) \prod_{0 \leq t_k < t - \tau_2} (1-E_{2k}) e^{u_3 + e^{u_2}}} \right) dt = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

的唯一解 (\tilde{u}, \tilde{v}) 满足 $\|(\tilde{u}, \tilde{v})^T\| = |\tilde{u}| + |\tilde{v}| < M$. 选择 $\Omega = \{(u_2(t), u_3(t))^T \in X : \| (u_2, u_3)^T \| < M\}$, 这说明满足了定理5.1.6中的条件(i).

当 $(u_2(t), u_3(t))^T \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L = \partial\Omega \cap R^2$, $(u_2, u_3)^T$ 是 R_2 中的一个常数向量, 且 $|u_2| + |u_3| = M$. 于是

$$QN \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_2(t) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_3(t) dt \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

这就满足了定理5.1.6中的条件(ii).

令 $J = I : \text{Im}Q \rightarrow \text{Ker}L, (u_2, u_3)^T \rightarrow (u_2, u_3)^T$. 直接计算可得

$$\deg(JQN(u_2, u_3)^T, \Omega \cap \text{Ker}L, (0, 0)^T) = 1,$$

其中 $(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T$ 是(5.29)的唯一解. 因此定理5.1.6中的条件(iii)也满足了. 而且, 容易看出集合 $\{K_p(I - Q)Nx | x \in \bar{\Omega}\}$ 是等度连续且一致有界的, 利用Arzela-Ascoli定理, 可知 $K_p(I - Q)N : \bar{\Omega} \rightarrow X$ 是紧的. 因此, N 是 L -紧的.

上面已经证明了 Ω 满足引理5.1.6中的所有条件, 这说明系统(5.10)至少存在一个 ω -周期解, 于是, 系统(5.9)至少存在一个正的 ω -周期解.

令 $(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t))$ 是系统(5.9)的一个正的 ω -周期解, 从而很容易有

$$\tilde{x}_1(t) = \int_{t-\tau_1}^t \alpha(s) \tilde{x}_2(s) e^{-\int_s^t r(u) du} ds > 0$$

是正的 ω -周期解. 于是, $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{y}(t))$ 是系统(5.1)满足已知条件的一个正的 ω -周期解. 证毕.

结 论

本文根据种群动力学和脉冲微分方程的基本理论讨论了几类具有阶段结构和脉冲效应的捕食-食饵系统,主要研究了系统的食饵灭绝或捕食者灭绝周期解的稳定性及系统持续生存的问题.

治理害虫的一个非常有效的方法就是将生物控制和化学控制结合起来,即脉冲喷施杀虫剂和脉冲投放捕食者,而且喷施杀虫剂和投放捕食者不能在同一脉冲时刻进行,否则就破坏了投放捕食者的效果,造成一定的经济和时间浪费.另一方面,害虫的幼年不具有生育能力且受到卵壳等的保护,天敌只可能捕食成年害虫.基于上述两个原因,本文的第二章考虑了具有阶段结构和两类脉冲控制的害虫管理系统.利用Floquet理论及比较定理分别得到了系统的害虫灭绝周期解的全局渐近稳定和系统持续生存的充分条件,并应用计算机辅助进行Matlab数值模拟,验证了所得理论结果的可靠性.该系统的唯一不足是在阶段结构中没有考虑时滞对种群动力行为的影响,以后在这方面需进一步改进.

人类活动的离散性决定了脉冲系统比连续系统能更好的描述人类活动.在文章的第三章讨论了具有阶段结构和脉冲收获捕食者的系统.运用时滞微分方程的理论及脉冲微分方程的比较定理,得到了系统的食饵灭绝周期解的全局吸引和系统持续生存的充分条件,且对理论结果进行了数值模拟.然而,从经济的观点出发,如何处理经济利益和生态平衡的问题,即如何使脉冲周期和脉冲收获率最优化,这个问题有待日后去解决.

考虑到捕食者种群的增长速度与雄性和雌性的数量有关,而且假定捕食者种群增长直接与雄雌的数量成比例,本文在第四章研究了一类具有阶段结构和脉冲的Leslie-Gower捕食-食饵系统.该系统主要是由定理4.2.1和4.2.2得到阈值 E^* ;若 $E_1 > E^*$,则系统(4.3)的食饵灭绝周期解 $(0, \bar{y}(t))$ 全局吸引;若 $E_1 < E^* + \frac{c\Delta_1}{c_1+M_1} - \frac{cM_2}{c_1}$,则系统(4.3)持续生存.但没有考虑 $\alpha e^{-r\tau_1} - \frac{cM_2}{c_1} \leq E_1 \leq E^*$ 的情形,此时系统(4.3)的动力学行为如何?从数学的角度来看,这是很有意义的,该问题留作以后进一步讨论.

在第三章的基础上,本文的最后研究了一类具有阶段结构和脉冲的非自治捕食-食饵系统.该系统是对自治系统(3.2)的改进.根据两个基本引理分别得到了系统的捕食者灭绝周期解全局吸引和系统持续生存的充分条件.最后又利用Mawhin的延拓定理讨论了系统正周期解的存在性问题.研究具有阶段结构和脉冲效应的非自治系统的正周期解唯一性和稳定性问题,并用Matlab模拟系统的动力学行为将是以后的主要方向.

参 考 文 献

- [1] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 脉冲微分系统引论[M]. 科学出版社, 2005.
- [2] S.J. Gao, L.S. Chen, Z.D. Teng, Impulsive vaccination of an SEIRS model with time delay and varying total population size [J], *Bulletin of Mathematical Biology* 69 (2007) 731-745.
- [3] Y.Z. Pei, S.Y. Liu, C.G. Liu, L.S. Chen, The dynamics of an impulsive delay SI model with variable coefficients [J], *Applied Mathematical Modelling* 33 (2009) 2766-2776.
- [4] X.Y. Song, M.Y. Hao, X.Z. Meng, A stage-structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays [J], *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 211-223.
- [5] K.Y. Liu, X.Z. Meng, L.S. Chen, A new stage structured predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey [J], *Appl. Math. Comp.* 196 (2008) 705-719.
- [6] 贾建文, 乔红梅. 一类具有脉冲效应和III类功能反应的捕食系统分析[J]. *生物数学学报*, 2008, 23(2) 279-288.
- [7] Y.Z. Pei, S.Y. Liu, C.G. Li, Complex dynamics of an impulsive control system in which predator species share a common prey [J], *J. Nonl. Sci.* DOI 10.1007/s00332-008-9034-x.
- [8] H.K. Baek, Dynamic complexities of a three-species Beddington-DeAngelis system with impulsive control strategy [J], *Acta. Appl. Math.* DOI 10.1007/s10440-008-9378-0.
- [9] R.Q. Shi, L.S. Chen, A predator-prey model with disease in the prey and two impulses for integrated pest management [J], *Appl. Math. Modell.* (2008), doi: 10.1016/j.apm.2008.06.001.
- [10] X.F. Yang, Z. Jin, Y.K. Xue, Weak average persistence and extinction of a predator-prey system in a polluted environment with impulsive toxicant input [J], *Chaos, Solitons and Fractals* 31 (2007) 726-735.
- [11] B. Liu, L. Zhang, Dynamics of a two-species Lotka-Volterra competition system in a polluted environment with pulse toxicant input [J], *Applied Mathematics and Computation* 214 (2009) 155-162.
- [12] H.F. Huo, W.T. Li, J.J. Nieto, Periodic solution of delayed predator-prey model with the Beddington-DeAngelis functional response [J], *Chaos, Solitons and Fractals*, 33 (2007) 505-512.
- [13] M.A. Aziz-Alaoui, M. Daher Okiye, Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II type schemes [J], *Appl. Math. Lett.* 16 (2003) 1069-1075.
- [14] S.A. Gourley, Y. Kuang, A stage-structured predator-prey model and its dependence on through-stage delay and death rate [J], *J. Math. Biol.* 49 (2004) 188-200.
- [15] H.J. Guo, L.S. Chen, The effects of impulsive harvest on a predator-prey system with distributed time delay [J], *Com. Non. Sci. Num. Sim.* 14 (2009) 2301-2309.

- [16] M.P. Hassell, C.C. Varley, New inductive population model of insect parasites and its bearing on biological control [J], *Nature*, 223 (1969) 1133-1137.
- [17] H.Y. Li, R. Zhang, Stability and optimal harvesting of delayed ratio-dependent predator-prey system [J], *J. BioMath.* 23 (1) (2008) 40-52.
- [18] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一, 数学生态学模型与研究方法[M], 四川科学出版社, 2003.
- [19] L.M. Ou, G.L. Luo, Y.L. Jiang, Y.P. Li, The asymptotic behaviors of a stage-structured autonomous predator-prey system with time delay [J], *J. Math. Appl.* 283 (2003) 534-548.
- [20] X.Y. Song, J.A. Cui, The stage-structured predator-prey system with delay and harvesting [J], *Appl. Anal.* 81 (2002) 1127-1142.
- [21] W.D. Wang, L.S. Chen, A predator-prey system with stage-structure for predator [J], *Comput. Math. Appl.* 33 (1997) 83-91.
- [22] F.Y. Wei, K. Wang, Persistence of some stage-structured ecosystems with finite and infinite delay [J], *Appl. Math. Comp.* 189 (1) (2007) 902-909.
- [23] J.J. Jiao, G.P. Pang, L.S. Chen, G.L. Luo, A delayed stage-structured predator - prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator [J], *Applied Mathematics and Computation* 195 (2008) 316-325.
- [24] J.J. Jiao, L.S. Chen, J.J. Nieto, T. Angela, Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey [J], *Appl. Math. Mech.*, (English Ed.) 29 (2009) 653-663.
- [25] J.Y. Wang, Q.S. Lu, Z.S. Feng, A nonautonomous predator-prey system with stage structure and double time delays [J], *journal of Computational and Applied Mathematics* (2009), doi: 10. 1016/j. cam. 2008. 11. 014.
- [26] C.Y. Huang, M. Zhao, L.C. Zhao, Permanence of periodic predator-prey system with two predators and stage structure for prey [J], *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11 (2010) 503-514.
- [27] C.Y. Huang, M. Zhao, H.F. Huo, Permanence of Periodic Predator-Prey System with Functional Responses and Stage Structure for Prey [J], *Abstract and Applied Analysis*, (2008) Article ID 371632, doi:10.1155/2008/371632.
- [28] H.J. Guo, X.Y. Song, An impulsive predator-prey system with modified Leslie-Gower and Holling type II schemes [J], *Chaos Solitons and Fractals* 36(2008) 1320-1331.
- [29] X.Y. Song, Y.F. Li, Dynamic behaviors of the periodic predator-prey model with modified Leslie-Gower Holling-type II schemes and impulsive effect [J], *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 9 (2008) 64-79.
- [30] M.A. Aziz-Alaoui, Study of a Leslie-Gower-type tri-trophic population model [J], *Chaos Solitons Fract* 14 (2002) 1275-93.
- [31] S. Gakkhar, B. Singh, Complex dynamic behavior in a food web consisting of two preys and a predator [J], *Chaos Solitons Fract* 24 (2005) 789-801.

- [32] S. Gakkhar, B. Singh, Dynamics of modified Leslie-Gower-type prey-predator model with seasonally varying parameters [J], *Chaos Solitons and Fractals* 27(2006) 1239-55.
- [33] Y.P. Chen, Z.J. Liu, M.N. Haque, Analysis of a Leslie-Gower-type prey-predator model with periodic impulsive perturbations [J], *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14 (2009) 3412-3423.
- [34] B. Liu, Z.D. Teng, L.S. Chen, Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy [J], *J. Comp. Appl. Math.* 193 (2006) 347-362.
- [35] X.Z. Liu, G. Ballinger, Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models [J], *Nonlinear Anal.* 53 (2003) 1041-1062.
- [36] H. Su, B.X. Dai, Y.M. Chen, K.W. Li, Dynamic complexities of a predator-prey model generalized Holling type III functional response and impulsive effects [J]. *Comp. Math. Appl.* 56 (2008) 1715-1725.
- [37] S.W. Zhang, D.J. Tan, L.S. Chen, Chaos in periodically forced Holling type II predator-prey system with impulsive perturbations [J], *Chaos Soliton. Fract.* 28 (2006) 367-376.
- [38] H.F. Huo, Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses [J], *Computers and Mathematics with Applications*, 48 (2004) 1833-1846.
- [39] Z.J. Liu, R.H. Tan, Impulsive harvesting and stocking in a Monod-Haldane functional response predator-prey system [J], *Chaos Solitons Fractals* 34 (2007) 454-464.
- [40] Y.W. Liu, K.Z. Lu, Permanence and periodic solution of an impulsive delay two-prey one-predator system with variable coefficients [J], *Chin. Quart. J. of Math.* 24(2) (2009) 267-273.
- [41] X.Z. Meng, L.S. Chen, Q.X. Li, The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients [J], *Applied Mathematics and Computation*, 198 (2008) 361-374.
- [42] S.L. Sun, L.S. Chen, Existence of positive periodic solution of an impulsive delay Logistic model [J], *Applied Mathematics and Computation* 184 (2007) 617-623.
- [43] V. Lakshmikantham, D. Bainov, P. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations* [M], World Scientific, Singapore, 1989.
- [44] X.Y. Song, L.S. Chen, Optimal harvesting and stability for a two-species competitive system with stage structure [J], *Math. Biosci.* 170 (2001) 173-186.
- [45] S.Q. Liu, L.S. Chen, Z.J. Liu, Extinction and permanence in nonautonomous competitive system with stage structure [J], *J. Math. Anal. Appl.* 274 (2) (2002) 667-684.
- [46] R.E. Gaines, J.L. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, Springer, Berlin, 1977.

致 谢

本论文是在我的导师黄灿云教授的悉心指导和亲切关怀下完成的。黄老师渊博的专业知识,精益求精的工作作风,严以律己、宽以待人的崇高风范,朴实无华、平易近人的人格魅力深深地感染和激励着我,不仅使我增长了专业知识,还使我明白了许多待人接物和为人处世的道理。本论文从选题到完成,倾注了导师大量的心血。在此,谨向导师表示崇高的敬意和衷心的感谢!

在此,还要感谢黎锁平教授、霍海峰教授、孙建平教授和张民悦教授对我的指导和帮助,他们广博的学识、严谨的治学态度和一丝不苟的工作作风使我受益匪浅,特致以深深地谢意!

感谢三年来与自己一起学习的师兄师姐、师弟师妹的热情帮助和关怀。

最后,感谢亲人对我的关爱和支持。

敬请各位专家和老师批评指正!

罗秀玲
2010年 5月于兰州理工大学

附 录

攻读学位期间所完成的学术论文:

[1] 黄灿云, 罗秀玲, 张慧婷. 具有生物和化学两类脉冲控制的捕食-食饵系统分析. 兰州理工大学学报(已录用).

[2] 杜斌, 黄灿云, 罗秀玲. 食饵庇护环境下两捕食者系统的持久性, 甘肃科学学报, 2010, 22 (1) 29-34.

[3] C.Y. Huang, X.L. Luo, Impulsive exponential stabilization of second-order dynamic equations on time scales, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 52 (5) (2009) 653-660.