Dissertation for
Master degree, 2011

College Code: 10269
Register Number: 51080601045

East China Normal University

Determination of Low-dimensional Solvable Complete Lie superalgebras

Department: Mathematics
Major: Pure Mathematics
Subject: Lie Algebra
Supervisor: Prof. Lei Lin
Name: Liu Fen

Apr, 2011 · Shanghai

华东师范大学学位论文原创性声明

郑重声明: 本人呈交的学位论文《低维可解完备李超代数的确定》, 是在华东师范大学攻读硕士/博士 (请勾选) 学位期间, 在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 除文中已经注明引用的内容外, 本论文不包含其他个人已经发表或撰写过的研究成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中作了明确说明并表示谢意.

作者签名: 刘芬　　　　日期: 2011年 6 月 5 日

华东师范大学学位论文著作权使用声明

《低维可解完备李超代数的确定》系本人在华东师范大学攻读学位期间在导师指导下完成的硕士/博士（请勾选）学位论文, 本论文的研究成果归华东师范大学所有. 本人同意华东师范大学根据相关规定保留和使用此学位论文, 并向主管部门和相关机构如国家图书馆、中信所和"知网"送交学位论文的印刷版和电子版; 允许学位论文进入华东师范大学图书馆及数据库被查阅、借阅; 同意学校将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索, 将学位论文的标题和摘要汇编出版, 采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文.

本学位论文属于 (请勾选)

(　) 1.经华东师范大学相关部门审查核定的"内部"或"涉密"学位论文, 于 年 月 日解密, 解密后适用上述授权.

(√) 2.不保密, 适用上述授权.

导师签名: 林磊　　　　本人签名: 刘芬

日期: 2011年 6 月 5 日

刘芬 硕士学位论文答辩委员会成员名单

姓　名	职　称	单　　位	备注
胡乃红	教授	华东师范大学理工学院数学系	主 席
舒斌	教授	华东师范大学理工学院数学系	
覃瑜君	副教授	华东师范大学理工学院数学系	

摘 要

本文在复数域$\mathbb{C}$上具体讨论了偶部维数为1的可解李超代数, 以及奇部维数分别为1、2的低维可解李超代数, 确定出其中完备的李超代数的结构, 并在某些情况下给出了相应的可解李超代数是否完备的一般判断.

关键词: 可解; 李超代数; 完备; 导子

ABSTRACT

In this paper, we mainly discuss low-dimensional solvable complete Lie superalgebras over the complex field $\mathbb{C}$. Solvable Lie superalgebras whose even part's dimension is 1, or odd part's dimension is 1 or 2 are discussed respectively, and the structures of these complete Lie superalgebras are given. In some cases, general methods of determining whether a solvable Lie superalgebra complete or not are given.

Key words: Solvable; Lie superalgebra; Complete; Derivations

目录

中文摘要 i

英文摘要 ii

1 引言 1

2 预备知识 2

3 偶部维数为 **1** 的可解李超代数 4

4 奇部为零的可解李超代数 7

5 奇部维数为 **1** 的可解李超代数 8

5.1 $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数 8

5.2 $L_{\bar{0}}$ 是完备李代数, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 10

5.3 $L_{\bar{0}}$ 不是完备李代数, $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 12

5.4 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 19

6 奇部维数为 **2** 的可解李超代数 23

6.1 $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数 23

6.2 $\dim L_{\bar{0}} = 2, 3$ 且 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$ 26

参考文献 46

致　谢 48

1 引言

李超代数起源于 20 世纪 70 年代. 由于在物理学中有着重要的应用, 并且与李代数等数学分支也有着密切的联系, 因此近年来人们对李超代数的研究十分活跃, 并且取得了很多的成果. 其中, 在李超代数的分类问题上, 1977 年 V. G. Kac 完成的特征零的代数闭域上的有限维单李超代数的分类是具有重大意义的成果(参见[4]).

中心为零且所有导子都是内导子的李代数称为完备李代数. 在孟道骥、朱林生、姜翠波等人的努力下, 完备李代数的研究在 80 年代后期取得了丰硕的成果(参见[15]-[19]). 相仿于李代数, 最近几年在完备李代数的基础上人们开始了完备李超代数的研究. 并且得到了例如有限维完备李超代数的分解唯一性定理、李超代数完备性的判断定理以及利用半单代数与 Heisenberg 超代数构造一类完备李超代数等一些很好的结论(参见[13], [8]).

随着对低维李代数分类问题的关注, 1997 年朱林生、孟道骥在文[5]中对低维的完备李代数进行了分类, K. Bauwens 在文[3]中讨论了奇部维数为 2 的可解李超代数的分类, 2005 年 W. A. de Graaf 在文[6]中给出了任意域上维数不超过 4 的可解李代数的分类. 本文主要讨论的是可解完备李超代数, 通过对可解李超代数的偶部、奇部维数的分类考虑, 具体讨论了偶部维数是 1、奇部维数是 1 和 2 的三类可解李超代数, 得到了在一些前提下, 可解完备李超代数是否存在的判断结果, 并且给出了一些低维的可解完备李超代数的结构.

本文中出现的域 $\mathbb{F}$ 是特征为零的代数闭域, 域 $\mathbb{C}$ 是复数域.

2 预备知识

本节内容是对与李超代数相关的一些基本概念和基本结果的回顾, 所有这些定义和结论都是标准的(参见[2], [10], [7]).

定义 2.1. 一个超代数是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 $\mathbb{Z}_2$ 阶化代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$, 即, 如果 $A \in L_\alpha$, $B \in L_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, 则有 $[A, B] \in L_{\alpha+\beta}$. 称超代数 L 是一个李超代数, 若对任意的 $A \in L_\alpha, B \in L_\beta, C \in L_\gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2$, 其乘法运算 $[\,,]$ 满足:

$$[A, B] = -(-1)^{\alpha\beta}[B, A],$$
$$(-1)^{\gamma\alpha}[A, [B, C]] + (-1)^{\alpha\beta}[B, [C, A]] + (-1)^{\beta\gamma}[C, [A, B]] = 0.$$

并称 $L_{\bar{0}}$ 是 L 的偶部, $L_{\bar{1}}$ 是 L 的奇部.

显然, 若 L 是一个李超代数, 则 $L_{\bar{0}}$ 是一个李代数, $L_{\bar{1}}$ 在伴随作用下可看作是一个 $L_{\bar{0}}$-模.

在李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 中, 任给 $x_1, x_2 \in L_{\bar{0}}, y_1, y_2, y_3 \in L_{\bar{1}}$, 按照李超代数的定义, 我们把以下三个条件:

$$[y_1, [x_1, x_2]] + [x_1, [x_2, y_1]] + [x_2, [y_1, x_1]] = 0,$$
$$[x_1, [y_1, y_2]] + [y_1, [y_2, x_1]] - [y_2, [x_1, y_1]] = 0,$$
$$[y_1, [y_2, y_3]] + [y_2, [y_3, y_1]] + [y_3, [y_1, y_2]] = 0.$$

分别记为 $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$.

L 的一个 γ 次导子 D 是指 $D \in (\mathrm{End}L)_\gamma = \{g \in \mathrm{End}L \mid g(L_\alpha) \subset L_{\alpha+\gamma}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2\}$, 并且满足:

$$D[A, B] = [D(A), B] + (-1)^{\gamma\alpha}[A, D(B)], \quad \forall A \in L_\alpha, B \in L.$$

记 $(\mathrm{Der}L)_\gamma$ 为 L 的 γ 次导子的集合, $\mathrm{Der}L$ 为 L 的导子李超代数. 则有

$$\mathrm{Der}L = (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}} \oplus (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}.$$

称形如 $\mathrm{ad}A, A \in L$ 的导子为 L 的内导子, 可知 $\mathrm{ad}L = (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}} \oplus (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

定义 2.2. 若对李超代数 L 的导代数序列 (或降中心序列), 存在一整数 k, 使得 $L^{(k)} = 0$ (或 $L^k = 0$), 则称 L 为可解的 (或幂零的).

定理 2.1. [2] 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的有限维李超代数, 则 L 是可解的当且仅当 $L_{\bar{0}}$ 是可解的.

定义 2.3. 若李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的中心为零, 即 $C(L) = 0$, 且 L 的所有导子都是内导子, 即 $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 则称 L 为完备李超代数.

定理 2.2. [7] 若李超代数 $L = K_1 \oplus K_2$, 其中 K_1, K_2 是 L 的阶化理想, 则 L 完备当且仅当 K_1 和 K_2 都完备.

以下内容均是在复数域 $\mathbb{C}$ 上的讨论, 并且李超代数 L 均是有限维的.

3 偶部维数为 1 的可解李超代数

在本节中我们考虑偶部维数等于 1 的李超代数 L. 首先根据文[12], 有下面的引理.

引理 3.1. *设 L 是域 $\mathbb{C}$ 上的李超代数, $\dim L_{\bar{0}} = 1, \dim L_{\bar{1}} = n\ (n > 0)$. 若 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$, 则有 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{1}}] = 0$.*

设 $x, y_1, \ldots, y_n$, 为 L 的基, 其中 $x \in L_{\bar{0}}$, $y_1, \ldots, y_n \in L_{\bar{1}}$, 由引理 3.1 可知, 当 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 时, $x \in C(L)$, 因此 L 不是完备李超代数.

定理 3.2. *若 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是李超代数, 满足 $\dim L_{\bar{0}} = 1, \dim L_{\bar{1}} = n\ (n > 0)$, 则当 $n > 1$ 时, L 不是完备李超代数.*

证明: 根据引理 3.1, 只需考虑 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 的情形. 设 x 是 $L_{\bar{0}}$ 的基.

当 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 时, 有 $x \in C(L)$, 因此 L 不是完备李超代数.

当 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 时, 可验证此时 L 满足李超代数成立的条件. $\mathrm{ad}x$ 作用在 $L_{\bar{1}}$ 上相当于 $L_{\bar{1}}$ 上的一个线性变换. 在复数域上, 对每个变换矩阵都有与之相似的若尔当典范形, 因此通过调整 $L_{\bar{1}}$ 的基, 不妨设 $\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x$ 的变换矩阵是一个若尔当矩阵 J, 并设此时 $L_{\bar{1}}$ 的基是 $y_1, \ldots, y_n$.

(1) 若 $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 为对角矩阵, 此时有 $[x, y_i] = \lambda_i y_i, i = 1, 2, \ldots, n$. 这里假设 $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 否则有 $C(L) \neq 0$.

设 $D_1 \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 且 $D_1 x = 0, D_1 y_i = i y_i, i = 1, 2, \ldots, n$. 由

$$D_1[x, y_i] = i\lambda_i y_i = [D_1 x, y_i] + [x, D_1 y_i]$$

得 $D_1 \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$.

同理可得若 $D_2 \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中 $D_2 x = 0, D_2 y_i = y_i, i = 1, 2, \ldots, n$, 则有 $D_2 \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ 时, 我们考虑 D_1, 可得 $D_1 \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 不然, 设 $D_1 = \mathrm{ad}mx$, 则需要满足 $m = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{n}{\lambda_n}$, 矛盾!

若存在 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, 使得 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则考虑 D_2, 可得 $D_2 \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 不然, 将有 $\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_j}$, 矛盾!

因此, 当 J 是对角矩阵时, 由 $(\mathrm{Der}L)_{\bar{0}} \neq (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$ 知, L 不是完备李超代数.

(2) 若 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$, 即 J 是一个若尔当块矩阵. 这里假设 $\lambda \neq 0$, 否则 $y_1 \in C(L)$.

当 $n > 2$ 或 $\lambda \neq 1$ 时, 设 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 且满足

$$\begin{aligned} Dx &= 0, \\ Dy_1 &= y_1, \\ Dy_2 &= y_1 + y_2, \\ &\cdots \\ Dy_n &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} D[x, y_1] &= \lambda y_1 = [Dx, y_1] + [x, Dy_1], \\ D[x, y_i] &= Dy_{i-1} + \lambda Dy_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_{i-1} + \lambda(y_1 + \cdots + y_i) \\ &= \lambda y_1 + (y_1 + \lambda y_2) + \cdots + (y_{i-1} + \lambda y_i) = [Dx, y_i] + [x, Dy_i], \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 且易验证得 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

而当 $n = 2$ 且 $\lambda = 1$ 时, 设$D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 且满足

$$Dx = 0, Dy_i = y_i, i = 1, 2.$$

可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 因此当 J 是一个若尔当矩阵时, L 不是完备李超代数.

(3) 若 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$, 其中 J_i 是 r_i 阶若尔当块, $s > 1$, 满足 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$, 且存在 j, $1 \leqslant j \leqslant s$, 使 $r_j > 1$.

构造 L 的线性变换 D, 使 D 限制在每个若尔当块所对应的基的片断上, 都有如 (2) 中所构造的导子的作用. 那么, 可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 且 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 因此 L 不完备. □

事实上,还可以考察 L 的奇次导子 D,且设

$$Dx = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n,$$
$$Dy_i = b_ix, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

则相应于定理 3.2 中的三种情况: 首先,当 J 为对角矩阵时,由 $D[x,y_i] = \lambda_iDy_i$,得 $b_i = 0, \ \ i = 1,\ldots,n$. 从而 $D = -\mathrm{ad}(\frac{a_1}{\lambda_1}y_1 + \cdots + \frac{a_n}{\lambda_n}y_n) \in \mathrm{ad}L_{\bar{1}}$.

其次,当 J 为一个若尔当块矩阵时,由 $D[x,y_1] = \lambda Dy_1$,得 $b_1 = 0$. 由 $D[x,y_i] = D(y_{i-1} + \lambda y_i)$,得 $b_{i-1} + \lambda b_i = 0$,所以 $b_i = 0, i = 2,\ldots,n$. 故 $D = \mathrm{ad}(m_1y_1 + \cdots + m_ny_n)$,其中 $m_1,\ldots,m_n$ 满足

$$\begin{cases} m_1\lambda + m_2 = -a_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n-1}\lambda + m_n = -a_{n-1}, \\ m_n\lambda = -a_n. \end{cases}$$

最后,当 J 含有多个若尔当块时,可对各个若尔当块分别计算,同样可得 $b_i = 0, i = 1,\ldots,n$. 且 $D = \mathrm{ad}(m_1y_1 + \cdots + m_ny_n)$,其中 $m_1,\ldots,m_n$ 满足

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 + m_2 = -a_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{r_1}\lambda_1 = -a_{r_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n-r_s+1}\lambda_s + m_{n-r_s+2} = -a_{n-r_s+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\lambda_s = -a_n. \end{cases}$$

因此我们可以得到, $\mathrm{Der}L_{\bar{1}} = \mathrm{ad}L_{\bar{1}}$ 都是成立的.

根据定理 3.2,可得结论: 若 L 是偶部维数为 1 的完备李超代数,则 L 的奇部维数必为 1,且 L 有结构 L : $[x,y] = y$,其中 x,y 分别是 $L_{\bar{0}}, L_{\bar{1}}$ 的基.

4 奇部为零的可解李超代数

设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是一个 n 维李超代数, 其中 $L_{\bar{1}} = 0$. 事实上, 此时的李超代数 L 是一个 n 维的李代数. 根据文[5], 可得到下面的定理.

定理 4.1. 维数不超过 6 的可解完备李代数的分类如下:

$G_2^1 : [x_1, x_2] = x_1;$
$G_4^1 : G_2^1 \oplus G_2^1;$
$G_5^1 : [x_1, x_2] = x_3, [x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_3] = x_3, [x_5, x_2] = x_2, [x_5, x_3] = x_3;$
$G_6^1 : G_2^1 \oplus G_2^1 \oplus G_2^1;$
$G_6^2 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, [x_5, x_1] = x_1, [x_5, x_3] = x_3, [x_5, x_4] = 2x_4,$
$[x_6, x_2] = x_2, [x_6, x_3] = x_3, [x_6, x_4] = x_4;$
$G_6^3 : [x_1, x_2] = x_3, [x_1, x_3] = x_4, [x_1, x_4] = x_5, [x_2, x_3] = x_5, [x_6, x_1] = x_1,$
$[x_6, x_2] = 2x_2, [x_6, x_3] = 3x_3, [x_6, x_4] = 4x_4, [x_6, x_5] = 5x_5.$

其中 G_i^j 表示维数为 i 的第 j 类李代数, $x_1, \ldots, x_i$ 是 G_i^j 的一组基.

当然, 定理 4.1 中的六类李代数也是维数不超过 6 且奇部为零的可解完备李超代数的分类.

5 奇部维数为 1 的可解李超代数

本节要考虑的是奇部维数等于 1 的可解李超代数 L, 我们将分以下四种情形来讨论: (1) $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数; (2) $L_{\bar{0}}$ 是完备李代数, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$; (3) $L_{\bar{0}}$ 不是完备李代数, $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$; (4) $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0, [L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$.

5.1 $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数

命题 5.1. *设李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$, 满足 $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数, 且 $L_{\bar{1}}$ 是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模. 若 $\dim L_{\bar{0}} = n$, 则 L 是完备的李超代数当且仅当 $\dim L_{\bar{1}} = n$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 且 $\dim\{\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}} x \mid x \in L_{\bar{0}}\} = n$.*

证明: 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是 $L_{\bar{0}}$ 的一组基, 且 $\dim L_{\bar{1}} = m$. 因为 $L_{\bar{1}}$ 是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数, 而任何有限维不可约 $L_{\bar{0}}$-模都是 1 维的, 于是 $L_{\bar{1}}$ 是 1 维的 $L_{\bar{0}}$-模的直和. 因此存在 $L_{\bar{1}}$ 的基 $y_1, \ldots, y_m$ 及 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in L_{\bar{0}}^*$, 使 $[x, y_i] = \lambda_i(x) y_i$, $\forall x \in L_{\bar{0}}$.

若存在 $y_i, y_j \in L_{\bar{1}}$, 使 $[y_i, y_j] \neq 0$, 则由 $[y_i, y_j] \in L_{\bar{0}}$, 得 $[[y_i, y_j], L_{\bar{0}}] = 0$.

$\forall y_k \in L_{\bar{1}}$, 由 $[[y_i, y_j], y_k] + [[y_k, y_i], y_j] + [[y_j, y_k], y_i] = 0$, 得

$$\lambda_k([y_i, y_j]) y_k + \lambda_j([y_k, y_i]) y_j + \lambda_i([y_j, y_k]) y_i = 0.$$

由于 y_i, y_j, y_k 是 $L_{\bar{1}}$ 的基元素, 不论指标 i, j, k 是否相同, 都可以得到 $[[y_i, y_j], y_k] = 0$, $k = 1, \ldots, m$, 即 $[y_i, y_j] \in C(L)$.

因此 $C(L) = 0$ 成立需满足 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$. 故在下面的讨论中, 假设 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 是成立的.

$\forall D \in (\mathrm{Der} L)_{\bar{0}}$, 设 $D y_j = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk} y_k$. 由 $D[x_i, y_j] = [D x_i, y_j] + [x_i, D y_j]$ 得

$$\lambda_j(x_i) D y_j = \lambda_j(D x_i) y_j + \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \lambda_k(x_i) y_k.$$

根据 y_i 的系数可得

$$\begin{cases} \lambda_j(D x_i) = 0, \\ a_{jk}(\lambda_j(x_i) - \lambda_k(x_i)) = 0, \quad j \neq k. \end{cases}$$

若 $D x_i \neq 0$, 则由 $D x_i \in L_{\bar{0}}$, 知 $[D x_i, L_{\bar{0}}] = 0$. 而 $\forall j = 1, 2, \ldots, n, \lambda_j(D x_i) = 0$, 表明 $[D x_i, L_{\bar{1}}] = 0$. 从而 $D x_i \in C(L)$, 即此时 $C(L) \neq 0$.

若对某 $j \neq k$, 有 $\lambda_j(x_i) - \lambda_k(x_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 则 $[L_{\bar{0}}, y_j - y_k] = 0$, 从而 $y_j - y_k \in C(L)$, 此时也有 $C(L) \neq 0$.

因此, 若 $C(L) = 0$, 则有 $Dx_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$; 且 $j \neq k$ 时, $a_{jk} = 0$, 进而可得 $Dy_j = a_{jj}y_j$, $j = 1, \ldots, m$.

若 L 完备, 则 $D \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 设 $D = \mathrm{ad}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$, 则由 $Dy_j = a_{jj}y_j$ 得

$$\begin{cases} a_1\lambda_1(x_1) + \cdots + a_n\lambda_1(x_n) = a_{11}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1\lambda_m(x_1) + \cdots + a_n\lambda_m(x_n) = a_{mm}. \end{cases}$$

而此方程组有唯一的解 $(a_1, \ldots, a_n)$ 当且仅当

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1(x_1) & \ldots & \lambda_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_m(x_1) & \ldots & \lambda_m(x_n) \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1(x_1) & \ldots & \lambda_1(x_n) & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_m(x_1) & \ldots & \lambda_m(x_n) & a_{mm} \end{pmatrix} = n.$$

此时, 一方面, 若设 $k_1\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x_1 + \cdots + k_n\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x_n = 0$, 其中 $k_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$, 则由 $[k_1x_1 + \cdots + k_nx_n, L_{\bar{1}}] = 0$ 及 $k_1x_1 + \cdots + k_nx_n \in L_{\bar{0}}$, 得 $k_1x_1 + \cdots + k_nx_n \in C(L)$, 由 L 完备得 $k_1 = \cdots = k_n = 0$; 另一方面, 对任意的 $x \in L_{\bar{0}}$, 存在 $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{C}$, 满足 $x = l_1x_1 + \cdots + l_nx_n$, 故 $\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x = l_1\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x_1 + \cdots + l_n\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x_n$. 因此, $\dim\{\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x \mid x \in L_{\bar{0}}\} = n$.

若令 $(a_{11}, \ldots, a_{mm})$ 分别为 m 阶单位矩阵的各列, 则根据

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(x_1) \\ \vdots \\ \lambda_m(x_1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda_1(x_n) \\ \vdots \\ \lambda_m(x_n) \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

都是 $\begin{pmatrix} \lambda_1(x_1) \\ \vdots \\ \lambda_m(x_1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda_1(x_n) \\ \vdots \\ \lambda_m(x_n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 的极大线性无关组, 可得 $m = n$.

反之, 若 $\dim L_{\bar{1}} = n$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 且 $\dim\{\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x \mid x \in L_{\bar{0}}\} = n$, 由于 $L_{\bar{0}}$ 在 $L_{\bar{1}}$ 上的作用是完全可约的, 故 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是线性无关的, 可构成 $L_{\bar{0}}^*$ 的一组基, 进而在 $L_{\bar{0}}$ 中存在对偶基 $x'_1, \ldots, x'_n$, 使得 $\lambda_i(x'_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. 因此 L 的结构为: $[x'_i, y_i] = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. 此时 L 是完备李超代数的直和, 根据定理 2.2 可得 L 是完备的. □

根据命题 5.1 可得结论: 当 L 是满足 $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数且 $\dim L_{\bar{1}} = 1$ 的可解李超代数时, 若 $\dim L_{\bar{0}} > 1$, 则 L 一定不是完备李超代数.

5.2 $L_{\bar{0}}$ 是完备李代数, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$

我们先来回顾一个与可解完备李代数有关的结论.

引理 5.2. [10] 若 g 是一个可解的完备李代数, 则 g 有分解

$$g = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n},$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是 g 的一个极大环面子代数, $\mathfrak{n}$ 是 g 的极大幂零理想(即幂零根基).

命题 5.3. 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是一个李超代数, 且 $\dim L_{\bar{1}} = 1$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$. 若 $L_{\bar{0}}$ 是可解完备李代数, 且有分解 $L_{\bar{0}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. 对于任意的 $x \in L_{\bar{0}}, y \in L_{\bar{1}}$, 若设 $[x, y] = \lambda(x)y$, 则当 $\lambda \neq \alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{h}^*$是 $\mathfrak{n}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根子空间的任一个根)时, L 是完备李超代数.

证明: 首先, 考虑 L 的中心: 若 $x + ky \in C(L)$, 其中 $x \in L_{\bar{0}}, y \in L_{\bar{1}}$, 则由 $[x + ky, y] = 0$, 得 $[x, y] = 0$ 且 $k = 0$, 故 $x \in C(L_{\bar{0}})$, 从而 $x = 0$, 于是 $C(L) = 0$.

其次, 考虑导子: $\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, $D|_{L_{\bar{0}}} \in \mathrm{Der}L_{\bar{0}} = \mathrm{ad}L_{\bar{0}}$, 可设 $D|_{L_{\bar{0}}} = \mathrm{ad}x$, 对某个 $x \in L_{\bar{0}}$. 由 $D[y, y] = 2[y, Dy]$ 得

$$[x, [y, y]] = 2\lambda(x)[y, y], \text{ 即 } [Dy - \lambda(x)y, y] = 0.$$

因此 $Dy = \lambda(x)y$, 于是 $D = \mathrm{ad}x \in \mathrm{ad}L$.

由 $[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]]$, $\forall x \in \mathfrak{n}_\alpha, h \in \mathfrak{h}$, 得 $\alpha(h)\lambda(x) = 0$.

而 $\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$, 存在 $h \in \mathfrak{h}$, 使得 $\alpha(h) \neq 0$. 因此 $\lambda(x) = 0$. 即 $[x, y] = 0$, $\forall x \in \mathfrak{n}_\alpha$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 设 $Dx = \mu(x)y, x \in L_{\bar{0}}; Dy = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} a_\alpha x_\alpha$.

$\forall x \in \mathfrak{n}_\alpha, h \in \mathfrak{h}$, 由 $D[h, x] = [Dh, x] + [h, Dx]$ 得

$$\alpha(h)\mu(x) = \mu(x)\lambda(h).$$

但是 $\alpha \neq \lambda$, 因此 $\mu(x) = 0$. 即 $Dx = 0$, $\forall x \in \mathfrak{n}_\alpha$.

$\forall y \in L_{\bar{1}}, h \in \mathfrak{h}$, 由 $D[h, y] = [Dh, y] + [h, Dy]$ 得

$$\lambda(h) \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} a_\alpha x_\alpha = \mu(h)[y, y] + \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} a_\alpha \alpha(h) x_\alpha.$$

从而

$$\begin{cases} \lambda(h)a_{2\lambda}x_{2\lambda} = \mu(h)[y, y] + 2\lambda(h)a_{2\lambda}x_{2\alpha}, & (\alpha = 2\lambda) \\ (\lambda(h) - \alpha(h))a_\alpha x_\alpha = 0. & (\alpha \neq 2\lambda) \end{cases}$$

因此 $\mu(h)[y,y]=-\lambda(h)a_{2\lambda}x_{2\lambda}$,且 $\alpha\neq 2\lambda$ 时, $a_\alpha=0$, 所以 $Dy=a_{2\lambda}x_{2\lambda}$.

$\forall h_i,h_j\in\mathfrak{h}$, 由 $D[h_i,h_j]=[Dh_i,h_j]+[h_i,Dh_j]$ 得

$$\lambda(h_j)\mu(h_i)=\mu(h_j)\lambda(h_i).$$

若 $[h,y]=0,\ \forall h\in\mathfrak{h}$, 则 $0\neq[y,y]\in C(L_{\bar{0}})$ 矛盾! 因此存在 $h\in\mathfrak{h}$, 满足 $\lambda(h)\neq 0$.

若 $\mu(h)=0$, 则 $a_{2\lambda}=0$, 此时 $D=0$;

若 $\mu(h)\neq 0$, 则令 $m=-\frac{\mu(h)}{\lambda(h)}$, 且由 $\lambda(h)\mu(h_i)=\mu(h)\lambda(h_i)$ 知 $\lambda(h_i)\neq 0$ 时, $\mu(h_i)\neq 0$. 因此 $\frac{\mu(h)}{\lambda(h)}=\frac{\mu(h_i)}{\lambda(h_i)}$. 此时有 $D=\mathrm{ad}my\in\mathrm{ad}L_{\bar{1}}$.

所以, 我们可得到 $\mathrm{Der}L=\mathrm{ad}L$, 从而 L 是完备的. □

根据此命题, 我们在定理 4.1 中的可解完备李代数的基础上, 可以得到以下的李超代数:

(1) $L_{\bar{0}}=G_2^1$, 设 $[x_i,y]=\lambda(x_i)y,\ i=1,2;\ [y,y]=k_1x_1+k_2x_2\neq 0$.

由 $(0,1,1)$ 得

$$\begin{cases} k_1=-2\lambda(x_2)k_1,\ \lambda(x_1)k_2=0,\\ k_2=2\lambda(x_1)k_1,\ \ \lambda(x_2)k_2=0.\end{cases}$$

若 $k_2\neq 0$, 则 $\lambda(x_1)=0$, 从而 $k_2=2\lambda(x_1)k_1=0$, 矛盾! 故 $k_2=0$. 此时必有 $k_1\neq 0$, 进而 $\lambda(x_1)=0,\lambda(x_2)=-\frac{1}{2}$. 再以 y 代替 $\frac{y}{\sqrt{k_1}}$, 则有李超代数

$$L:\ [x_1,x_2]=x_1,[x_2,y]=-\frac{1}{2}y,[y,y]=x_1.$$

(2) $L_{\bar{0}}=G_4^1$, 设 $[x_i,y]=\lambda(x_i)y,\ i=1,2,3,4;\ [y,y]=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4\neq 0$.

由 $(0,0,1)$ 得 $\lambda(x_1)=0,\lambda(x_3)=0$.

由 $(0,1,1)$ 得

$$\begin{cases} k_2=0,\ k_1+2\lambda(x_2)k_1=0,\ \lambda(x_2)k_3=0,\\ k_4=0,\ k_3+2\lambda(x_4)k_3=0,\ \lambda(x_4)k_1=0.\end{cases}$$

若 $k_1\neq 0,k_3\neq 0$, 则 $\lambda(x_2)=-\frac{1}{2}$, 且 $\lambda(x_2)=0$, 矛盾! 但是由于 k_1,k_3 不能同时为 0, 因此可以得到下面两种情形(显然, 它们是同构的):

$$k_3\neq 0,k_1=0,\lambda(x_2)=0,\lambda(x_4)=-\frac{1}{2},\ 或\ k_1\neq 0,k_3=0,\lambda(x_2)=-\frac{1}{2},\lambda(x_4)=0.$$

对于后者, 以 y 代替 $\frac{y}{\sqrt{k_1}}$, 则有李超代数

$$L: [x_1,x_2]=x_1,[x_3,x_4]=x_3,[x_2,y]=-\frac{1}{2}y,[y,y]=x_1.$$

(3) $L_{\bar{0}}=G_5^1$, 设 $[x_i,y]=\lambda(x_i)y,\ i=1,2,\ldots,5;\ [y,y]=\sum\limits_{i=1}^{5}k_ix_i\neq 0$.

由 $(0,0,1)$ 得 $\lambda(x_i)=0,\ \ i=1,2,3$.

由 $(0,1,1)$ 得

$$\begin{cases} k_i=0,\ i=1,2,4,5,\\ k_3-2\lambda(x_j)k_3=0,\ j=4,5.\end{cases}$$

由于 $k_3\neq 0$, 所以 $\lambda(x_4)=\frac{1}{2},\lambda(x_5)=\frac{1}{2}$. 若以 y 代替 $\frac{y}{\sqrt{k_3}}$, 则有李超代数

$$L: [x_1,x_2]=x_3,[x_4,x_1]=x_1,[x_4,x_3]=x_3,[x_5,x_2]=x_2,[x_5,x_3]=x_3,$$
$$[x_4,y]=\frac{1}{2}y,[x_5,y]=\frac{1}{2}y,[y,y]=x_3.$$

观察可发现, 当 $L_{\bar{0}}$ 是完备李代数 G_2^1,G_4^1,G_5^1 时, 以上得到的李超代数都满足命题 5.3 中的 $\lambda\neq\alpha$ 条件, 因此它们都是完备的李超代数.

5.3 $L_{\bar{0}}$ 不是完备李代数, $[L_{\bar{0}},L_{\bar{0}}]\neq 0$, $[L_{\bar{1}},L_{\bar{1}}]\neq 0$

首先根据文[6], 可得到如下的结论.

引理 5.4. *以下是所有维数不超过 4 的可解李代数的分类, 其中 g_i^j 表示维数为 i 的第 j 类李代数.*

g_i^1: 交换李代数, $i=1,2,3,4$;

g_2^2: $[x_1,x_2]=x_1$;

g_3^2: $[x_3,x_1]=x_1,[x_3,x_2]=x_2$;

g_3^3: $[x_3,x_1]=x_2,[x_3,x_2]=ax_1+x_2$;

g_3^4: $[x_3,x_1]=x_2,[x_3,x_2]=ax_1$;

g_3^5: $g_1^1\oplus g_2^2$;

g_4^2: $[x_4,x_1]=x_1,[x_4,x_2]=x_2,[x_4,x_3]=x_3$;

g_4^3: $[x_4,x_1]=x_1,[x_4,x_2]=x_3,[x_4,x_3]=-ax_2+(a+1)x_3\ (a\neq 0)$;

g_4^4 : $[x_4, x_2] = x_3, [x_4, x_3] = x_3$;

g_4^5 : $[x_4, x_2] = x_3$;

g_4^6 : $[x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_2] = x_3, [x_4, x_3] = ax_1 + bx_2 + x_3$;

g_4^7 : $[x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_2] = x_3, [x_4, x_3] = ax_1 + bx_2$ (a, b 不同时为零);

g_4^8 : $g_2^2 \oplus g_2^2$;

g_4^9 : $[x_4, x_1] = x_1 + ax_2, [x_4, x_2] = x_1, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2$;

g_4^{10} : $[x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_2] = ax_1, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2$;

g_4^{11} : $[x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_2] = bx_2, [x_4, x_3] = (b-1)x_3, [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = ax_1$ $(a \neq 0, b \neq 1)$;

g_4^{12} : $[x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_2] = 2x_2, [x_4, x_3] = x_3, [x_3, x_1] = x_2$;

g_4^{13} : $[x_4, x_1] = x_1 + ax_3, [x_4, x_2] = x_2, [x_4, x_3] = x_1, [x_3, x_1] = x_2$;

g_4^{14} : $[x_4, x_1] = ax_3, [x_4, x_3] = x_1, [x_3, x_1] = x_2$.

当 $\dim L_{\bar{0}} = 2$ 时, $L_{\bar{0}}$ 只有交换李代数和完备李代数两种情形, 而本文在之前的内容中均已讨论过.

当 $\dim L_{\bar{0}} \geqslant 3$ 时, 我们分两种情形讨论如下.

(I) $L_{\bar{0}}$ 有余维数为 1 的交换理想 $\mathfrak{n}$, 设 $\mathfrak{n}$ 的基为 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, 并设 x_n 是 $\mathfrak{n}$ 在 $L_{\bar{0}}$ 中补空间的基, 且设 $L_{\bar{1}}$ 的基为 y. 根据 $L_{\bar{0}}$ 可解当且仅当 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$ 幂零可得, $[x_n, x_i] \subset [L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \subset \mathfrak{n}, \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$.

设 $[x_i, y] = \lambda_i y, i = 1, 2, \ldots, n$, 则

$$[x_i, [y, y]] = [[x_i, y], y] + [y, [x_i, y]] = 2\lambda_i [y, y] \in \mathfrak{n}.$$

若存在 $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\lambda_i \neq 0$, 则可得 $[y, y] \in \mathfrak{n}$, 进而 $[x_i, [y, y]] = 0$, 故 $[y, y] = 0$, 与前提 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 矛盾! 因此 $\forall i = 1, \ldots, n-1$, 都有 $[x_i, y] = 0$.

不妨假设 $[x_n, y] = \lambda y$, $[y, y] = k_1 x_1 + \cdots + k_{n-1} x_{n-1}$, 则 $\lambda \neq 0$. 否则有 $0 \neq [y, y] \in C(L)$. 此时, L 是李超代数当且仅当 $[x_n, [y, y]] = 2\lambda [y, y]$ 成立.

考查 $D \in (\mathrm{Der} L)_{\bar{0}}$, 且满足

$$\begin{aligned} Dx_i &= x_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ Dx_n &= 0, \\ Dy &= \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

则当且仅当 $[x_n, x_i] = 2\lambda x_i,\ i = 1, \ldots, n-1$ 成立时, $D \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

此时, 再考察 $D' \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 且满足

$$\begin{aligned} D'x_1 &= k_2x_1 - k_1x_2, \\ D'x_{n-1} &= k_{n-1}x_{n-2} - k_{n-2}x_{n-1}, \\ D'x_n &= 0, \\ D'y &= 0. \end{aligned}$$

由于 $[y, y] \neq 0$, 检验可知 $D' \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

综上, 在 (I) 的情形下所得到的李超代数都不可能是完备的. 特别地, 当 $L_{\bar{0}} = g_3^2, g_3^3, g_3^4, g_3^5, g_4^2, g_4^3, g_4^4, g_4^5, g_4^6, g_4^7$ 时, 都不能构造出满足 $\dim L_{\bar{1}} = 1$, 且 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 的完备李超代数.

(II) 对于其余的情形, 我们来逐个讨论.

(i) $L_{\bar{0}} = g_4^8$: 此时的 $L_{\bar{0}}$ 是完备的李代数 G_4^1.

(ii) $L_{\bar{0}} = g_4^9$: 由 $(0, 0, 1)$ 可得 $[x_i, y] = 0,\ i = 1, 2$. 进而由

$$[x_2, [y, y]] = [[x_2, y], y] + [y, [x_2, y]] = 0,$$

可设 $[x_3, y] = \lambda y,\ [x_4, y] = \mu y,\ [y, y] = k_1x_1 + k_2x_2 \neq 0$.

由 $(0, 1, 1)$ 可得 $\lambda = \frac{1}{2},\ ak_1 = 2\mu k_2,\ k_1 + k_2 = 2\mu k_1$.

从而有以下三种情形 (注意到 k_1, k_2 不全为 0):

(1) $a = 0,\ \mu = 0,\ k_1 + k_2 = 0$;

(2) $a = 0,\ \mu = \frac{1}{2},\ k_2 = 0$;

(3) $a \neq 0,\ \mu \neq 0,\ k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 由 $Dx_1 = D[x_3, x_1] \in [L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$, 可设 $Dx_1 = a_1x_1 + a_2x_2$. 同理设 $Dx_2 = b_1x_1 + b_2x_2$.

根据 $D[x_3, x_2] = [Dx_3, x_2] + [x_3, Dx_2]$, 可得 $[Dx_3, x_2] = 0$, 因此可设 $Dx_3 = c_1x_1 + c_2x_2$.

若设 $Dx_4 = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4$, 且 $Dy = ky$. 则由导子的定义, 需满足:

$$\begin{cases} ac_1 - d_2 = 0, & a_1k_1 + b_1k_2 = 2kk_1, & a_1 - b_1 - b_2 = d_4, \\ d_3 + 2\mu d_4 = 0, & a_2k_1 + b_2k_2 = 2kk_2, & a_2 + d_3 + d_4 = ab_1, \\ c_1 + c_2 = d_1, & a_2 - ab_1 = d_3, & aa_1 - a_2 + ad_4 = ab_2. \end{cases} \tag{*}$$

若 $D \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 设 $D = \mathrm{ad}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)$, 则需满足:

$$\begin{cases} m_1 + c_1 = 0, \quad am_1 + d_2 = 0, \quad m_2 + c_2 = 0, \quad m_1 + m_2 = -d_1, \\ m_3 - b_2 = 0, \quad m_4 - b_1 = 0, \quad am_4 - a_2 = 0, \quad m_3 + m_4 = a_1, \\ m_3 + 2\mu m_4 = 2k. \end{cases}$$

显然 (*) 中的第一行所有的等式是成立的, 而第二行的等式成立当且仅当 $d_4 = 0$ (此时也有 $d_3 = 0$).

若 $d_4 = 0$, 则由

$$\begin{cases} ak_1 - 2\mu k_2 = 0, \\ ab_1 - a_2 = 0, \\ a_2k_1 + b_2k_2 = 2kk_2, \end{cases}$$

可得 $k_2(k_2 + 2\mu b_1 - 2k) = 0$.

当 $k_2 \neq 0$ 时, $m_3 + 2\mu m_4 = b_2 + 2\mu b_1 = 2k$; 当 $k_2 = 0$ 时, 有 $a = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, 进而由 $a_1k_1 + b_1k_2 = 2kk_2$ 得 $a_1 = 2k$, 即也有 $m_3 + 2\mu m_4 = 2k$ 成立. 因此, 当 $d_4 = 0$ 时, 导子 D 一定是一个内导子.

下面讨论 $d_4 = 0$ 成立的充要条件.

由

$$\begin{cases} ab_1 = a_2 + d_3 + d_4, \\ a_2 - ab_1 - d_3 = 0, \\ d_3 + 2\mu d_4 = 0, \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} 2d_3 + d_4 = 0, \\ d_3 + 2\mu d_4 = 0. \end{cases}$$

所以当 $\mu \neq \frac{1}{4}$ 时, 必有 $d_4 = 0$, 从而有 $(\mathrm{Der}L)_{\bar{0}} = (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$; 当 $\mu = \frac{1}{4}$ 时, 由于 d_4 不一定为 0, 因此 L 存在外导子.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 若设

$$\begin{aligned} Dx_i &= a_iy, \ i = 1, 2, 3, 4, \\ Dy &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4. \end{aligned}$$

则根据导子的定义, 有

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = b_3 = b_4 = 0, \quad 2a_3\mu = a_4, \quad 2a_3k_1 = -b_1, \\ a_4k_1 + b_2 = (\mu - 1)b_1, \quad 2a_3k_2 = -b_2, \quad a_4k_2 + ab_1 = \mu b_2. \end{cases}$$

故 $D = \mathrm{ad}(-2a_3y) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$. 因此 $(\mathrm{Der}L)_{\bar{1}} = (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

相应与 (1), (2), (3) 三种情形, 我们可以得到三类可解完备的李超代数: (其中需进行基的调整, 用 y 代替 $\frac{y}{\sqrt{k_1}}$ 即可.)

(1) $[x_4,x_1] = x_1, [x_4,x_2] = x_1, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \dfrac{1}{2}y,$
$[y,y] = x_1 - x_2;$

(2) $[x_4,x_1] = x_1, [x_4,x_2] = x_1, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \dfrac{1}{2}y,$
$[x_4,y] = \dfrac{1}{2}y, [y,y] = x_1;$

(3) $[x_4,x_1] = x_1 + ax_2, [x_4,x_2] = x_1, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \dfrac{1}{2}y,$
$[x_4,y] = \mu y, [y,y] = x_1 + \dfrac{a}{2\mu}x_2\ (\mu \neq 0, \dfrac{1}{4},\ a \neq 0$ 且 $a = 2\mu(2\mu-1)).$

在 (1), (2) 中以 x_2 代替 $x_1 - x_2$, 则可将两个李超代数简化为:

(1)′ $[x_4,x_1] = x_1, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \dfrac{1}{2}y, [y,y] = x_2;$

(2)′ $[x_4,x_1] = x_1, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \dfrac{1}{2}y, [x_4,y] = \dfrac{1}{2}y,$
$[y,y] = x_1.$

对于 (3) ,分别以 x_1, x_2 代替 $x_1 + \frac{a}{2\mu}x_2, x_1 - \frac{a}{2\mu-1}x_2$, 则可得李超代数:

(3)′ $[x_4,x_1] = 2\mu x_1, [x_4,x_2] = (1-2\mu)x_2, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \dfrac{1}{2}y,$
$[x_4,y] = \mu y, [y,y] = x_1\ (\mu \neq 0, \dfrac{1}{4}).$

由此可看出 (2)′ 是 (3)′ 中 $\mu = \frac{1}{2}$ 时的特殊情况.

(iii) $L_{\bar{0}} = g_4^{10}$: 由 (0,0,1) 及 (0,1,1) 可得 $[x_i,y] = 0, i = 1,2$, 且 $[x_3,y] = \frac{1}{2}y$.

若设 $[x_4,y] = \mu y, [y,y] = k_1x_1 + k_2x_2$, 则有 $k_1 = 2\mu k_2,\ ak_2 = 2\mu k_1$.

由 k_1, k_2 不全为零知, 可有以下两种情形:

(1) $a = 0,\ \mu = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 \neq 0;$

(2) $a \neq 0,\ \mu \neq 0,\ k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0.$

对于 (1), 有李超代数

$$L : [x_4,x_1] = x_2, [x_3,x_1] = x_1, [x_3,x_2] = x_2, [x_3,y] = \frac{1}{2}y, [y,y] = x_2.$$

考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_1 &= x_1, \\ Dx_i &= 0,\ i = 2, 3, \\ Dx_4 &= -x_4, \\ Dy &= 0. \end{aligned}$$

验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 故 L 不是完备的.

对于 (2), 有李超代数

$$\begin{aligned} L:\ & [x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_2] = ax_1, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \frac{1}{2}y, \\ & [x_4, y] = \mu y, [y, y] = x_1 + \frac{1}{2\mu}x_2\ (\mu \neq 0, \text{且 } a = 4\mu^2). \end{aligned}$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 需满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= a_1x_1 + a_2x_2, \\ Dx_2 &= aa_2x_1 + a_1x_2, \\ Dx_3 &= b_1x_1 + b_2x_2, \\ Dx_4 &= ab_2x_1 + b_1x_2, \\ Dy &= (\frac{aa_2}{4\mu} + \frac{a_1}{2})y. \end{aligned}$$

从而 $D = \mathrm{ad}(-b_1x_1 - b_2x_2 + a_1x_3 + a_2x_4) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 需满足

$$\begin{aligned} Dx_i &= 0, i = 1, 2, \\ Dx_3 &= a_1y, \\ Dx_4 &= 2\mu a_1y, \\ Dy &= -2a_1x_1 - \frac{a_1}{\mu}x_2. \end{aligned}$$

因此 $D = \mathrm{ad}(-2a_1y) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

故 $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 从而 L 是一个完备李超代数. 此时若分别以 x_1, x_2, x_4 代替 $x_1 + \frac{1}{2\mu}x_2, x_1 - \frac{1}{2\mu}x_2, \frac{1}{2\mu}x_4$, 则可将李超代数简化为:

$$L:\ [x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_2] = -x_2, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \frac{1}{2}y,$$

$$[x_4, y] = \frac{1}{2}y, [y, y] = x_1.$$

(iv) $L_{\bar{0}} = g_4^{11}$: 设 $[y, y] = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4$, 由 $(0, 0, 1)$ 可得 $[x_i, y] = 0, i = 1, 2, 3$. 由 $(0, 1, 1)$ 知 $k_1 = k_3 = k_4 = 0$, 且 $ak_2 = 0$. 由 $[y, y] \neq 0$, 得 $a = 0$, 这与 g_4^{11} 中要求 $a \neq 0$ 矛盾. 因此不存在 $L_{\bar{0}} = g_4^{11}$ 且 $[y, y] \neq 0$ 的李超代数.

(v) $L_{\bar{0}} = g_4^{12}$: 由李超代数的定义可得

$$\begin{aligned} L: \ & [x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_2] = 2x_2, [x_4, x_3] = x_3, [x_3, x_1] = x_2, [x_4, y] = y, \\ & [y, y] = x_2. \end{aligned}$$

考察 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_i &= x_i, i = 1, 2, \\ Dx_j &= 0, j = 3, 4, \\ Dy &= \frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

验证可知 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 故 L 不是完备的.

(vi) $L_{\bar{0}} = g_4^{13}$: 由李超代数的定义可得

$$\begin{aligned} L: \ & [x_4, x_1] = x_1 + ax_3, [x_4, x_2] = 2x_2, [x_4, x_3] = x_1, [x_3, x_1] = x_2, [x_4, y] = \frac{1}{2}y, \\ & [y, y] = x_2. \end{aligned}$$

考察 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_i &= x_i, i = 1, 3, \\ Dx_2 &= 2x_2, \\ Dx_4 &= 0, \\ Dy &= y. \end{aligned}$$

验证可知 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 故 L 不是完备的.

(vii) $L_{\bar{0}} = g_4^{14}$: 由 $(0, 0, 1)$ 可得 $[x_2, y] = 0$, 因此 $x_2 \in C(L)$, 故 L 不完备.

从本节讨论中可知, 满足 $L_{\bar{0}}$ 既不是交换李代数也不是完备李代数, 且 $\dim L_{\bar{1}} = 1$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 的维数不超过 5 完备李超代数, 只可能出现在 $L_{\bar{0}} = g_4^9$, g_4^{10} 的情形下.

5.4 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$

设 $x_1, \ldots, x_n, y$, 为 L 的基, 其中 $x_1, \ldots, x_n \in L_{\bar{0}}$, $y \in L_{\bar{1}}$. 事实上, 此时的李超代数也可以看作一个 $n+1$ 维的可解李代数 G. 这可根据 $[y, y] = 0$, 且 $[x_i, y] \in \mathbb{C}y$ 检验即得.

进一步地, 可证明若 L 是一个完备的李超代数, 则 G 也是一个完备的李代数. 这是因为:

(1) $C(L) = 0$ 当且仅当 $C(G) = 0$;

(2) 由 L 完备, 可得 $\mathrm{Der}G = \mathrm{ad}G$, 这是因为 $\forall D \in \mathrm{Der}G$, 设

$$
\begin{aligned}
Dx_i &= X_i + a_i y,\ i = 1, \ldots, n,\\
Dy &= X_{n+1} + a_{n+1} y.
\end{aligned}
$$

其中 $X_i \in L_{\bar{0}}$, $i = 1, \ldots, n+1$.

若定义 G 上的线性变换 D_1, D_2, 使

$$
\begin{aligned}
&D_1 x_i = X_i,\ D_1 y = a_{n+1} y;\\
&D_2 x_i = a_i y,\ D_2 y = X_{n+1},\quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

则 $D = D_1 + D_2$.

$\forall x_i, x_j \in L_{\bar{0}}$, 由 $D[x_i, x_j] = [Dx_i, x_j] + [x_i, Dx_j]$ 得

$$D_1[x_i, x_j] - [D_1 x_i, x_j] - [x_i, D_1 x_j] + D_2[x_i, x_j] - [D_2 x_i, x_j] - [x_i, D_2 x_j] = 0.$$

而 $[x_i, x_j] \in L_{\bar{0}}$, 所以 $D_1[x_i, x_j] - [D_1 x_i, x_j] - [x_i, D_1 x_j] \in L_{\bar{0}}$, 且 $D_2[x_i, x_j] - [D_2 x_i, x_j] - [x_i, D_2 x_j] \in L_{\bar{1}}$. 即

$$
\begin{aligned}
D_1[x_i, x_j] &= [D_1 x_i, x_j] + [x_i, D_1 x_j],\\
D_2[x_i, x_j] &= [D_2 x_i, x_j] + [x_i, D_2 x_j].
\end{aligned}
$$

同理, 由 $D[x_i, y] = [Dx_i, y] + [x_i, Dy]$ 及 $[x_i, y] \in L_{\bar{1}}$,得

$$
\begin{aligned}
D_1[x_i, y] &= [D_1 x_i, y] + [x_i, D_1 y],\\
D_2[x_i, y] &= [D_2 x_i, y] + [x_i, D_2 y] = [x_i, D_2 y].
\end{aligned}
$$

由于 L 完备, 所以存在 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 满足 $[x_i, y] \neq 0$, 否则 $y \in C(L)$.

设 $[x_i, y] = \lambda_i y$, 从而由 $D_2[x_i, y] = \lambda_i D_2 y = [x_i, D_2 y]$ 得 $D_2 y = \frac{1}{\lambda_i}[x_i, D_2 y] \in [L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$, 所以 $[D_2 y, y] = 0$.

由 $D[y, y] = [Dy, y] + [y, Dy]$ 得

$$
\begin{aligned}
0 &= D_1[y, y] = [D_1 y, y] + [y, D_1 y], \\
0 &= D_2[y, y] = [D_2 y, y] + [y, D_2 y] = [D_2 y, y] - [y, D_2 y].
\end{aligned}
$$

因此 $D_1 \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, $D_2 \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 从而 $D = D_1 + D_2 \in \mathrm{ad}L = \mathrm{ad}G$, 即 G 是完备的李代数.

定理 5.5. [10] 设 $g_i = \mathfrak{h}_i + \mathfrak{n}_i$, $i = 1, 2$ 是两个可解完备李代数, 幂零根基为 $\mathfrak{n}_i, i = 1, 2$. 则 g_1 与 g_2 同构当且仅当 $\mathfrak{n}_1$ 与 $\mathfrak{n}_2$ 同构.

当 $\dim L_{\bar{0}} = 2$ 时, 因为不存在三维的可解完备李代数, 所以此种前提下的完备李超代数也是不存在的.

当 $\dim L_{\bar{0}} = 3$ 时, 由定理 4.1 可知维数为 4 的可解完备李代数只有 G_4^1 : $[X_1, X_2] = X_1$, $[X_3, X_4] = X_3$. 分别令 $L_{\bar{0}} = g_3^2, g_3^3, g_3^4, g_3^5$, 可得到相应的满足中心为零的李超代数为:

$L_3^2 : [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \lambda y \ (\lambda \neq 0);$
$L_3^3 : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = a x_1 + x_2, [x_3, y] = \lambda y \ (a \neq 0, \lambda \neq 0);$
$L_3^{'3} : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y] = \lambda y, [x_3, y] = \mu y \ (\lambda, \mu$ 不全为 $0);$
$L_3^4 : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = a x_1, [x_3, y] = \lambda y \ (a \neq 0, \lambda \neq 0);$
$L_3^5 : [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y] = \lambda y, [x_3, y] = y.$

由于 G_4^1 的幂零根基 $\mathfrak{n}$ 满足 $\dim \mathfrak{n} = 2$, 且 $\mathfrak{n}^2 = 0$. 而 L_3^2, L_3^3, L_3^4 相应的李代数的幂零根基均为 3 维; 虽然 $L_3^{'3}$ 中当 $\lambda \neq 0$ 时相应的李代数的幂零根基的基为 x_2, y, 但由于 $[x_3, x_1] \neq 0$, 因此根据定理 5.5 知, L_3^2, L_3^3, L_3^4 都不是完备的李代数.

对于 L_3^5: 令

$$
\begin{cases}
X_1 \mapsto x_1, \\
X_2 \mapsto x_2 - \lambda x_3, \\
X_3 \mapsto x_3, \\
X_4 \mapsto y.
\end{cases}
$$

则可知 $G_4^1 \simeq L_3^5$. 检验可知 L_3^5 确是一个完备的李超代数.

事实上, $\forall D \in (\mathrm{Der}L_3^5)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$
\begin{aligned}
Dx_1 &= a_1x_1,\\
Dx_2 &= b_1x_1,\\
Dx_3 &= 0,\\
Dy &= ky.
\end{aligned}
$$

故 $D = \mathrm{ad}(b_1x_1 - a_1x_2 + (k + a_1\lambda)x_3) \in (\mathrm{ad}L_3^5)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L_3^5)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$
\begin{aligned}
Dx_1 &= 0,\\
Dx_2 &= c\lambda y,\\
Dx_3 &= cy,\\
Dy &= 0.
\end{aligned}
$$

故 $D = \mathrm{ad}(-cy) \in (\mathrm{ad}L_3^5)_{\bar{1}}$. 即有 $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$.

当 $\dim L_{\bar{0}} = 4$ 时, 根据定理 4.1, 维数为 5 的可解完备李代数只有 G_5^1, 其幂零根基的基为 x_1, x_2, x_3, 且 $[x_1, x_2] = x_3$.

而当 $L_{\bar{0}} = g_4^2$, g_4^3, $g_4^6\ (a \neq 0)$, $g_4^7\ (a \neq 0)$, g_4^{11}, g_4^{12}, $g_4^{13}\ (a \neq 0)$ 时, 所得到的李超代数相应的李代数的幂零根基的基为 x_1, x_2, x_3, y, 因此 L 不完备.

当 $L_{\bar{0}} = g_4^5$ 时, 有 $x_3 \in C(L)$; 当 $L_{\bar{0}} = g_4^{14}$ 时, 有 $x_2 \in C(L)$, 因此, 此时的 L 都不完备.

当 $L_{\bar{0}} = g_4^4$, $g_4^6\ (a = 0)$, $g_4^7\ (a = 0)$, g_4^8, g_4^9, g_4^{10}, $g_4^{13}\ (a = 0)$ 时, 可得到相应的满足中心为零的李超代数为:

$$
\begin{aligned}
L_4^4 &: [x_4, x_2] = x_3, [x_4, x_3] = x_3, [x_1, y] = y, [x_2, y] = \lambda_1 y, [x_4, y] = \lambda_2 y;\\
L_4^6 &: [x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_2] = x_3, [x_4, x_3] = bx_2 + x_3, [x_1, y] = \lambda y, [x_4, y] = \mu y;\\
L_4^7 &: [x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_3] = bx_2, [x_1, y] = \lambda y, [x_4, y] = \mu y;\\
L_4^8 &: [x_1, x_2] = x_1, [x_3, x_4] = x_3, [x_2, y] = \lambda y, [x_4, y] = \mu y;\\
L_4^9 &: [x_4, x_1] = x_1 + ax_2, [x_4, x_2] = x_1, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \lambda y,\\
&\quad [x_4, y] = \mu y;\\
L_4^{10} &: [x_4, x_1] = x_2, [x_4, x_2] = ax_1, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \lambda y,\\
&\quad [x_4, y] = \mu y;\\
L_4^{13} &: [x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_2] = x_2, [x_4, x_3] = x_1, [x_3, y] = \lambda y, [x_4, y] = \mu y.
\end{aligned}
$$

在 $L_4^4, L_4^6, L_4^7, L_4^{13}$ 相应的李代数中, $x_3, x_4 \notin \mathfrak{n}$, 但 $[x_3, x_4] \neq 0$, 因此它们都不是完备的李超代数.

对 L_4^8, L_4^9, L_4^{10} 相应的李代数来说, 虽然它们的幂零根基 $\mathfrak{n}$ 的基为 x_1, x_2, y, 但 $\mathfrak{n}$ 是交换的, 与 G_5^1 的幂零根基是不同构的. 因此它们也不是完备的李超代数.

在本子节中通过借助完备李代数的性质, 知满足条件 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$, $\dim L_{\bar{1}} = 1$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 且维数不超过 5 的完备李超代数只有 L_3^5.

推论 5.6. *维数不超过 5 且奇部维数为 1 的可解完备李超代数在同构意义下有以下的分类:*

$$L_1: \ [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y] = -\frac{1}{2}y, [y, y] = x_1;$$

$$L_2: \ [x_1, x_2] = x_1, [x_3, x_4] = x_3, [x_2, y] = -\frac{1}{2}y, [y, y] = x_1;$$

$$L_3: \ [x_1, x_2] = x_3, [x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_3] = x_3, [x_5, x_2] = x_2, [x_5, x_3] = x_3,$$
$$[x_4, y] = \frac{1}{2}y, [x_5, y] = \frac{1}{2}y, [y, y] = x_3;$$

$$L_4: \ [x_4, x_1] = x_1, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \frac{1}{2}y, [y, y] = x_2;$$

$$L_5: \ [x_4, x_1] = 2\mu x_1, [x_4, x_2] = (1 - 2\mu)x_2, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \frac{1}{2}y,$$
$$[x_4, y] = \mu y, [y, y] = x_1 \ (\mu \neq 0, \frac{1}{4});$$

$$L_6: \ [x_4, x_1] = x_1, [x_4, x_2] = -x_2, [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y] = \frac{1}{2}y,$$
$$[x_4, y] = \frac{1}{2}y, [y, y] = x_1;$$

$$L_7: \ [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y] = \lambda y, [x_3, y] = y.$$

6 奇部维数为 2 的可解李超代数

本节所考虑的是奇部维数为 2 的可解李超代数 L, 按照 L 的偶部是否为交换李代数分两类进行讨论. 且在每一类中, 将根据 $L_{\bar{1}}$ 是否为完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 来具体分析 L 何时完备.

6.1 $L_{\bar{0}}$ 是交换李代数

设可解李超代数 L 满足偶部是交换李代数且奇部维数为 2, 则若 $L_{\bar{1}}$ 是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 由命题 5.1, 此时有唯一的一个完备李超代数

$$L: [x_1,y_1]=y_1,[x_2,y_2]=y_2,$$

其中 x_1,x_2,y_1,y_2 分别是 $L_{\bar{0}}$, $L_{\bar{1}}$ 的基.

当 $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模时, 根据 $[L_{\bar{1}},L_{\bar{1}}]$ 是否为零可得到下面两个命题.

命题 6.1. *L 是奇部维数为 2 的可解李超代数, $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, $[L_{\bar{0}},L_{\bar{0}}]=0$, $[L_{\bar{1}},L_{\bar{1}}]=0$. 若 L 是完备李超代数, 则 L 需满足 $[L_{\bar{0}},L_{\bar{1}}]\neq 0$ 且 $\dim L_{\bar{0}}=2$.*

证明: 当 $[L_{\bar{1}},L_{\bar{1}}]=0$ 时, 根据李定理可知, 存在 $L_{\bar{1}}$ 的基 y_1,y_2, 使得 $\forall x\in L_{\bar{0}}$, $\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x$ 关于基 y_1,y_2 的矩阵是一个上三角矩阵. 因此, 若设 $\dim L_{\bar{0}}=n$, 且有一组基 $x_1,\ldots,x_n$. 则可令 $\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}}x_i$ 的矩阵 $M_i=\begin{pmatrix}\lambda_1(x_i) & r(x_i)\\ 0 & \lambda_2(x_i)\end{pmatrix}$, $i=1,\ldots,n$.

由 $(0,0,1)$ 得, $\forall i,j\in\{1,\ldots,n\}$, 有 $M_iM_j=M_jM_i$. 由于 $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 故 $r(x_1),\ldots,r(x_n)$ 不全为零, 不妨设 $r(x_1)\neq 0$, 则有

$$\lambda_2(x_i)=\lambda_1(x_i)+\frac{\lambda_2(x_1)-\lambda_1(x_1)}{r(x_1)}r(x_i),\ i=1,\ldots,n.$$

若存在 $i\in\{1,\ldots,n\}$, 使得 $M_i=0$, 即 $[x_i,L_{\bar{1}}]=0$, 则有 $x_i\in C(L)$.

若 $\dim L_{\bar{0}}=1$, 根据定理 3.2, L 不是完备李超代数.

若 $\dim L_{\bar{0}}>2$, 即非零矩阵 M_i 的个数大于 2. 从中可取出 M_i,M_j, 其中 $2\leqslant i<j\leqslant n$, 则可得 $\begin{vmatrix}\lambda_1(x_1) & \lambda_1(x_i) & \lambda_1(x_j)\\ r(x_1) & r(x_i) & r(x_j)\\ \lambda_2(x_1) & \lambda_2(x_i) & \lambda_2(x_j)\end{vmatrix}=0$. 因此存在不全为零的复数 k_1,k_2,k_3, 使得 $k_1M_1+k_2M_i+k_3M_j=0$, 进而有 $k_1x_1+k_2x_i+k_3x_j\in C(L)$, 即 L 不完备. □

当 L 满足 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 且 $\dim L_{\bar{0}} = 2$ 时, 若用 x_1 代替 $\frac{x_1}{r(x_1)}$, 并记 $\lambda_1(x_1) = \lambda$, $\frac{\lambda_2(x_1)}{r(x_1)} = \mu$, 则调整基后可得李超代数

$$L:\ [x_1, y_1] = \lambda y_1, [x_1, y_2] = y_1 + \mu y_2, [x_2, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = y_2.$$

当 $\lambda = \mu$ 时, 考虑 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$,

$$\begin{aligned} Dx_1 &= x_1 - \lambda x_2, \\ Dx_2 &= 0, \\ Dy_i &= y_1, i = 1, 2. \end{aligned}$$

则可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

而当 $\lambda \neq \mu$ 时, L 是一个完备的李超代数. 事实上, 以 y_2 代替 $y_1 + (\mu - \lambda)y_2$, 则 L 可化简为

$$L:\ [x_1, y_1] = \lambda y_1, [x_1, y_2] = \mu y_2, [x_2, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = y_2.$$

再以 x_1 代替 $\frac{x_1 - \mu x_2}{\lambda - \mu}$, 则我们可得 $[x_1, y_1] = y_1, [x_2, y_i] = y_i, i = 1, 2$. 进一步地, 若令 x_2 代替 $x_2 - x_1$, 即得完备李超代数

$$L:\ [x_1, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = y_2.$$

命题 6.2. *L 是奇部维数为 2 的可解李超代数, 满足 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] = 0$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$. 设 $L_{\bar{0}}$ 的一组基 $x_1, \ldots, x_n$, 且 $\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}} x_i$ 在 $L_{\bar{1}}$ 的基 y_1, y_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_1(x_i) & r(x_i) \\ 0 & \lambda_2(x_i) \end{pmatrix}$. 若 $C(L) = 0$, 则有以下结论成立:*

(1) $[y_1, y_1] = 0$;

(2) $[y_1, y_2] \neq 0, [y_2, y_2] \neq 0$;

(3) $\lambda_1(x_i) + \lambda_2(x_i) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n$.

证明: (1) 若 $[y_1, y_1] \neq 0$, 由 $0 = [x_i, [y_1, y_1]] = 2\lambda_1(x_i)[y_1, y_1]$, 得 $\lambda_1(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. 故

$$[[y_1, y_2], y_1] = \lambda_1([y_1, y_2])y_1 = 0.$$

由 $[[y_1, y_2], y_1] + [[y_2, y_1], y_1] + [[y_1, y_1], y_2] = 0$, 得 $[[y_1, y_1], y_2] = 0$. 又 $[[y_1, y_1], y_1] = 0$, 因此 $[y_1, y_1] \in C(L)$, 矛盾!

(2) 若 $[y_1, y_2] = 0$, 由于 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$, 因此 $[y_2, y_2] \neq 0$. 由 (1,1,1) 得 $[[y_2, y_2], y_i] = 0$, $i = 1, 2$, 即 $[y_2, y_2] \in C(L)$. 矛盾! 于是 $[y_1, y_2] \neq 0$.

若 $[y_2,y_2]=0$, 由 (1) 及 (1,1,1) 可得 $0\neq[y_1,y_2]\in C(L)$, 矛盾!

(3) 由 $[x_i,[y_1,y_2]]=[[x_i,y_1],y_2]+[y_1,[x_i,y_2]]$, 得

$$\lambda_1(x_i)[y_1,y_2]+r(x_i)[y_1,y_1]+\lambda_2(x_i)[y_1,y_2]=0.$$

因为 $[y_1,y_2]\neq 0$, 所以 $\lambda_1(x_i)+\lambda_2(x_i)=0,\ \forall\, i=1,\dots,n.$ □

设可解李超代数 L 满足 $\dim L_{\bar{1}}=2$, $[L_{\bar{0}},L_{\bar{0}}]=0$, $[L_{\bar{1}},L_{\bar{1}}]\neq 0$, 且 $C(L)=0$, 则根据命题 6.2(3), 可令 $\lambda(x_i)=\lambda_1(x_i)=-\lambda_2(x_i)$, 则 $\lambda(x_1),\dots,\lambda(x_n)$ 不全为零, 若不然, 有 $[x_i,y_1]=0,[x_i,y_2]=r(x_i)y_1$, $\forall i=1,\dots,n$. 因此 $[x_i,[y_1,y_2]]=0$, 进而有 $[y_1,y_2]\in C(L)$, 矛盾! 故不妨设 $\lambda(x_n)\neq 0$.

设 $[y_1,y_2]=\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i$, 由 $[x_i,[y_2,y_2]]=[[x_i,y_2],y_2]+[y_2,[x_i,y_2]]$, 得

$$r(x_i)[y_1,y_2]-\lambda(x_i)[y_2,y_2]=0,\ i=1,\dots,n.$$

且由 $[x_i,[x_j,y_2]]=[x_j,[x_i,y_2]]$, 得$\lambda(x_i)r(x_j)=r(x_i)\lambda(x_j)$, $\forall\, i,j=1,\dots,n$. 故可设 $[y_2,y_2]=\frac{r(x_n)}{\lambda(x_n)}[y_1,y_2]$.

考虑 $D\in(\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, D 满足

$$\begin{aligned}Dx_i&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ i=1,\dots,n.\\ Dy_1&=\lambda(x_n)y_1,\\ Dy_2&=r(x_n)y_1-\lambda(x_n)y_2,\end{aligned}$$

其中 $(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} m_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{m_2\lambda(x_1)}{\lambda(x_n)}\\ -m_1 & m_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{m_1\lambda(x_1)-m_3\lambda(x_2)}{\lambda(x_n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m_{n-2} & m_n & \frac{m_{n-2}\lambda(x_{n-2})-m_n\lambda(x_{n-1})}{\lambda(x_n)}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m_{n-1} & \frac{m_{n-1}\lambda(x_{n-1})}{\lambda(x_n)}\end{pmatrix}$.

检验可得 $D\in(\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 且若 $D\in(\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 则必有 $Dx_i=0$, $i=1,\dots,n$, 从而 $\forall\, i$, $m_i=0$, 因此 $[y_1,y_2]=0$, 与命题 6.2 矛盾! 故 $D\notin(\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 即 L 不是完备李超代数.

综上, 我们可以得到下面的定理.

定理 6.3. 满足偶部是交换李代数且奇部维数是 2 的完备李超代数在同构意义下只有一类. 即若 x_1,x_2,y_1,y_2 分别是 $L_{\bar{0}}$, $L_{\bar{1}}$ 的基, 则李超代数的结构为

$$L:\ [x_1,y_1]=y_1,[x_2,y_2]=y_2.$$

6.2 L 是可解李超代数, 满足 $\dim L_{\bar{0}} = 2,\ 3$ 及 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$

当 $\dim L_{\bar{0}} = 2$ 且 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$, 即 $L_{\bar{0}} = g_2^2$ 时, 可以证明下面的结论.

命题 6.4. *若李超代数 L 满足 $L_{\bar{0}} = g_2^2$ 且 $\dim L_{\bar{1}} = 2$, 则 L 不是完备李超代数.*

证明: 设 $L_{\bar{0}}$ 的基为 x_1, x_2, 且 $\mathrm{ad}_{L_{\bar{1}}} x_i$ 在 $L_{\bar{1}}$ 的基 y_1, y_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_1(x_i) & r(x_i) \\ 0 & \lambda_2(x_i) \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$. 则由 $(0,0,1)$ 得

$$\lambda_i(x_1) = 0,\ i = 1, 2,\ \text{且}\ r(x_1)(\lambda_2(x_2) - \lambda_1(x_2) - 1) = 0.$$

(i) 若李超代数 L 满足 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$, 可考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_i &= 0,\ i = 1, 2, \\ Dy_j &= y_j,\ j = 1, 2. \end{aligned}$$

验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 故此时 L 不是完备的.

(ii) 若在李超代数 L 中 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$, 按 $r(x_1)$ 是否为零分别讨论如下.

(1) 若 $r(x_1) = 0$, 即 $[x_1, L_{\bar{1}}] = 0$. 则由 $[x_1, [y_i, y_j]] = 0$, 得 $[y_i, y_j] \in \mathbb{C}x_1$, 因此可设 $[y_i, y_j] = k_{ij}x_1,\ i, j = 1, 2$. 此时可考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 2x_1, \\ Dx_2 &= 0, \\ Dy_i &= y_i,\ i = 1, 2. \end{aligned}$$

则有 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$ 当且仅当 $\lambda_1(x_2) = -\frac{1}{2}, r(x_2) = 0, \lambda_2(x_2) = -\frac{1}{2}$. 即李超代数

$$\begin{aligned} L: &[x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_1] = -\frac{1}{2}y_1, [x_2, y_2] = -\frac{1}{2}y_2, [y_1, y_1] = k_{11}x_1, [y_1, y_2] = k_{12}x_1, \\ &[y_2, y_2] = k_{22}x_1,\ \text{其中}\ k_{11}, k_{12}, k_{22}\ \text{不全为 } 0. \end{aligned}$$

对 $k_{12} = 0$ 与 $k_{12} \neq 0$ 两种情况, 可分别考察 $D, D' \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 2x_1, & D'x_1 &= 2x_1, \\ Dx_2 &= 0, & D'x_2 &= 0, \\ Dy_1 &= y_1 - k_{11}y_2, & D'y_1 &= 2y_1 - \tfrac{k_{11}}{k_{12}}y_2, \\ Dy_2 &= k_{22}y_1 + y_2; & D'y_2 &= \tfrac{k_{22}}{k_{12}}y_1. \end{aligned}$$

验证可有 $D, D' \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D, D' \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 故 L 不是完备的李超代数.

(2) 若 $r(x_1) \neq 0$, 则有 $\lambda_2(x_2) - \lambda_1(x_2) - 1 = 0$. 设 $[y_i, y_j] = k_{ij}x_1 + k'_{ij}x_2,\ i, j = 1, 2$.

由李超代数的定义可得:

$$\begin{cases} k_{11} = 0,\ k'_{11} = 0, & k'_{12} = 0, \\ k'_{22} - 2r(x_1)k_{12} = 0, & k_{22} + 2r(x_2)k_{12} = 0, \\ (\lambda_1(x_2) + 1)k_{12} = 0, & (\lambda_1(x_2) + 1)k_{22} = 0. \end{cases}$$

由 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \neq 0$ 得, $\lambda_1(x_2) \neq -1$, 进而 $\lambda_2(x_2) = 0$. 又因为 $k_{12} \neq 0$, 故可用 y_1, y_2 分别代替 $\frac{y_1}{\sqrt{k_{12}}}, \frac{y_2}{\sqrt{k_{12}}}$, 则有李超代数

$$L: [x_1, x_2] = x_1, [x_1, y_2] = r(x_1)y_1, [x_2, y_1] = -y_1, [x_2, y_2] = r(x_2)y_1, [y_1, y_2] = x_1,$$
$$[y_2, y_2] = -2r(x_2)x_1 + 2r(x_1)x_2.$$

考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{1}}$, 满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= r(x_1)y_1, \\ Dx_2 &= 0, \\ Dy_1 &= x_1, \\ Dy_2 &= -r(x_2)x_1. \end{aligned}$$

验证可得 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$, 因此 L 不是完备的李超代数. □

下面将要考虑的是当 $\dim L_{\bar{0}} = 3$ 且 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \neq 0$ 时的可解李超代数, 显然此时 $L_{\bar{0}} \in \{g_3^2,\ g_3^3,\ g_3^4,\ g_3^5\}$.

(I) $L_{\bar{1}}$ 是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模的情形:

当 $L_{\bar{0}} = g_3^2, g_3^3\ (a \neq 0), g_3^4\ (a \neq 0)$ 时, 由 $(0,0,1)$ 可得 $[x_i, L_{\bar{1}}] = 0,\ i = 1, 2$.

若令 $[x_3, y_1] = \lambda y_1$, $[x_3, y_2] = \mu y_2$, 则由 $[x_1, [y_i, y_j]] = [[x_1, y_i], y_j] + [y_i, [x_1, y_j]]$, 得 $[x_1, [y_i, y_j]] = 0$. 故可设 $[y_i, y_j] = k_{ij}x_1 + k'_{ij}x_2,\ i, j = 1, 2$. 从而根据李超代数的定义, 只需使 L 满足: $\forall i, j \in \{1, 2\}$, 有

$$[x_3, [y_i, y_j]] = [[x_3, y_i], y_j] + [y_i, [x_3, y_j]]. \qquad (**)$$

(i) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^2$ 时, 由 $(**)$ 式可得

$$\begin{cases} (2\lambda - 1)k_{11} = 0, & (2\lambda - 1)k'_{11} = 0, \\ (\lambda + \mu - 1)k_{12} = 0, & (\lambda + \mu - 1)k'_{12} = 0, \\ (2\mu - 1)k_{22} = 0, & (2\mu - 1)k'_{22} = 0. \end{cases}$$

考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 满足

$$\begin{aligned} Dx_i &= 2x_i,\ i = 1,2, \\ Dx_3 &= 0, \\ Dy_j &= y_j,\ j = 1,2. \end{aligned}$$

则有 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$ 当且仅当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时, 若 $k_{11}, k'_{11}, k_{22}, k'_{22}$ 全为 0, 则可考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_i &= x_i,\ i = 1,2, \\ Dx_3 &= 0, \\ Dy_1 &= 0, \\ Dy_2 &= y_2. \end{aligned}$$

验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 因此不妨设 $k_{11} \neq 0$, 故 $r = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} k_{11} & k'_{11} \\ k_{12} & k'_{12} \\ k_{22} & k'_{22} \end{pmatrix}$ 的值是 1 或 2.

(1) 当 $r = 1$ 时, 若 $[y_1, y_2] = 0$, 则由 $(k_{22}, k'_{22}) = k(k_{11}, k'_{11})$, $k \in \mathbb{C}$ 得: 当 $k \neq 0$ 时, 以 y_2 代替 $\frac{y_2}{\sqrt{k}}$, 有 $[\bar{y}_2, \bar{y}_2] = [y_1, y_1]$; 而当 $k = 0$ 时, 有 $[y_2, y_2] = 0$.

若 $[y_1, y_2] \neq 0$, 调整基 $\bar{y}_1 = y_1, \bar{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{k_{22} - 2k_{12} + (k_{12})^2}}(y_2 - k_{12}y_1)$, 则得 $[\bar{y}_1, \bar{y}_2] = 0$, 故总可设 $[y_1, y_2] = 0$.

进一步, 用 x_1 代替 $k_{11}x_1 + k'_{11}x_2$, 则可得到两个李超代数

$$\begin{aligned} L_1 : {} & [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \frac{1}{2}y_2, [y_1, y_1] = x_1, \\ & [y_2, y_2] = x_1; \\ L_2 : {} & [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \frac{1}{2}y_2, [y_1, y_1] = x_1. \end{aligned}$$

易验证对 $D \in (\mathrm{End}L_k)_{\bar{0}}$, $k = 1, 2$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 2x_1, \\ Dx_i &= 0,\ i = 2,3, \\ Dy_j &= y_j,\ j = 1,2. \end{aligned}$$

都有 $D \in (\mathrm{Der}L_k)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L_k)_{\bar{0}}$, 因此 L_1, L_2 都不是完备的李超代数.

(2) 当 $r = 2$ 时, 若 $[y_1, y_2] = 0$, 则 (k_{11}, k'_{11}) 与 (k_{22}, k'_{22}) 是线性无关的; 若 $[y_1, y_2] \neq 0$, 可调整 $L_{\bar{1}}$ 的基, 使得 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} k_{11} & k'_{11} \\ k_{22} & k'_{22} \end{pmatrix} = 2$. 从而可设 $[y_1, y_2] = k_1[y_1, y_1] + k_2[y_2, y_2]$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

分别用 x_1, x_2 代替 $k_{11}x_1 + k'_{11}x_2, k_{22}x_1 + k'_{22}x_2$, 则有李超代数

$$L: [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \frac{1}{2}y_2, [y_1, y_1] = x_1, [y_1, y_2] = k_1x_1 + k_2x_2, [y_2, y_2] = x_2.$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_i &= a_1x_i,\ i = 1, 2, \\ Dx_3 &= b_1x_1 + b_2x_2, \\ Dy_j &= \frac{a_1}{2}y_j,\ j = 1, 2. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}(-b_1x_1 - b_2x_2 + a_1x_3) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 当 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_i &= 0, i = 1, 2, \\ Dx_3 &= a_1y_1 + a_2y_2, \\ Dy_j &= -2a_1x_j,\ j = 1, 2. \end{aligned}$$

当 k_1, k_2 不全为 0 时, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_i &= 0,\ i = 1, 2, \\ Dx_3 &= a_1y_1 + a_2y_2, \\ Dy_1 &= (-2a_1 - 2a_2k_1)x_1 - 2a_2k_2x_2, \\ Dy_2 &= -2a_1k_1x_1 - (2a_2 + 2a_1k_2)x_2. \end{aligned}$$

但都有 $D = \mathrm{ad}(-2a_1y_1 - 2a_2y_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 从而 L 是一个完备李超代数.

(ii) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^3\,(a \neq 0)$ 时, 由 (**) 式可得

$$\begin{cases} k'_{11} = \frac{2\lambda}{a}k_{11}, & (4\lambda^2 - 2\lambda - a)k_{11} = 0, \\ k'_{12} = \frac{\lambda+\mu}{a}k_{12}, & ((\lambda + \mu)^2 - (\lambda + \mu) - a)k_{12} = 0, \\ k'_{22} = \frac{2\mu}{a}k_{22}, & (4\mu^2 - 2\mu - a)k_{22} = 0. \end{cases}$$

对于满足上面各式的李超代数 L, 考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_i &= 2x_i, \quad i = 1,2, \\ Dx_3 &= 0, \\ Dy_j &= y_j, \quad j = 1,2. \end{aligned}$$

验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 即 L 不是完备的李超代数.

(iii) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^4\,(a \neq 0)$ 时, 由 (**) 式可得

$$\begin{cases} k'_{11} = \frac{2\lambda}{a}k_{11}, & (4\lambda^2 - a)k_{11} = 0, \\ k'_{12} = \frac{\lambda+\mu}{a}k_{12}, & ((\lambda+\mu)^2 - a)k_{12} = 0, \\ k'_{22} = \frac{2\mu}{a}k_{22}, & (4\mu^2 - a)k_{22} = 0. \end{cases}$$

对于满足上面各式的李超代数 L, 我们考察与 (ii) 中相同的 D, 可得 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 即此时的 L 也不是完备李超代数.

(iv) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^3\,(a = 0)$ 时, 设 $[x_1, y_1] = \lambda_1 y_1, [x_1, y_2] = \mu_1 y_2, [x_3, y_1] = \lambda_2 y_1, [x_3, y_2] = \mu_2 y_2$, 则 λ_1, μ_1 不能同时为 0, 否则 $x_1 - x_2 \in C(L)$, 即有 $C(L) \neq 0$.

由 $[x_2, [y_i, y_j]] = 0$, 可知 $[y_i, y_j] \in \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$, 进而由 $(1,1,1)$ 及 λ_1, μ_1 不能同时为 0, 可得 $[y_i, y_j] \in \mathbb{C}x_2$. 故可设 $[y_i, y_j] = k_{ij}x_2,\ i, j = 1, 2$.

由 $(0,1,1)$ 得

$$\begin{cases} \lambda_1 k_{11} = 0, & (1 - 2\lambda_2)k_{11} = 0, \\ (\lambda_1 + \mu_1)k_{12} = 0, & (1 - \lambda_2 - \mu_2)k_{12} = 0, \\ \mu_1 k_{22} = 0, & (1 - 2\mu_2)k_{22} = 0. \end{cases}$$

按照 k_{11}, k_{22} 是否为 0, 有下列四种情形:

当 $k_{11} \neq 0, k_{22} \neq 0$ 时, 则有 $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{1}{2}$;

当 $k_{11} = 0, k_{22} = 0$ 时, 且 $k_{12} \neq 0$, 则有 $\lambda_1 + \mu_1 = 0, \lambda_2 + \mu_2 = 1$;

当 $k_{11} \neq 0, k_{22} = 0$ 时,有 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}$, 且若 $k_{12} \neq 0$, 则 $\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}$;

当 $k_{11} = 0, k_{22} \neq 0$ 时,有 $\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}$, 且若 $k_{12} \neq 0$, 则 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

由于 λ_1, μ_1 不能同时为 0, 因此只需讨论以下四种情形:

(1) $k_{11} = k_{12} = k_{22} = 0$;

(2) $k_{11} = k_{22} = 0, k_{12} \neq 0, \mu_1 = -\lambda_1$ 不为 $0, \lambda_2 + \mu_2 = 1$;

(3) $k_{11} \neq 0, k_{12} = k_{22} = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}$;

(4) $k_{11}=k_{12}=0, k_{22}\neq 0, \mu_1=0, \mu_2=\frac{1}{2}$.

对于情形 (1), 可得李超代数

$$L:[x_3,x_1]=x_2,[x_3,x_2]=x_2,[x_1,y_1]=\lambda_1 y_1,[x_1,y_2]=\mu_1 y_2,[x_3,y_1]=\lambda_2 y_1,$$
$$[x_3,y_2]=\mu_2 y_2.$$

不妨设 $\lambda_1\neq 0$, 此时 μ_1,μ_2 不能同时为 0, 否则 $y_2\in C(L)$. 对 $\mu_2\neq 0$ 和 $\mu_2=0$ 两种情形, 可分别考察 $D,D'\in(\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} &Dx_i=x_i,\ i=1,2, && D'x_i=x_2,\ i=1,2,\\ &Dx_3=0, && D'x_3=0,\\ &Dy_1=\lambda_2 y_1, && D'y_1=\lambda_2 y_1,\\ &Dy_2=2\mu_2 y_2; && D'y_2=\mu_1 y_2. \end{aligned}$$

验证可知都有 $D,D'\in(\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D,D'\notin(\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 因此在情形 (1) 下不存在完备的李超代数.

对于情形 (2), 若以 y_1,y_2 分别代替 $\frac{1}{\sqrt{k_{12}}}y_1,\frac{1}{\sqrt{k_{12}}}y_2$, 则可令 $[y_1,y_2]=x_2$. 再以 x_1,x_2 分别代替 $\frac{1}{\lambda_1}x_1,\frac{1}{\lambda_1}x_2$, 并记 $\lambda_2=\lambda$, 则有李超代数

$$L:[x_3,x_1]=x_2,[x_3,x_2]=x_2,[x_1,y_1]=y_1,[x_1,y_2]=-y_2,[x_3,y_1]=\lambda y_1,$$
$$[x_3,y_2]=(1-\lambda)y_2,[y_1,y_2]=x_2.$$

$\forall D\in(\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_i&=ax_2,\ i=1,2,\\ Dx_3&=bx_2,\\ Dy_1&=cy_1,\\ Dy_2&=(a-c)y_2. \end{aligned}$$

故 $D=\mathrm{ad}((c-\lambda)x_1-(b+c-\lambda a)x_2+ax_3)\in(\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D\in(\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_1&=a_1y_1+a_2y_2,\\ Dx_2&=0,\\ Dx_3&=\lambda a_1y_1+(\lambda-1)a_2y_2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Dy_1 &= a_2x_2,\\
Dy_2 &= -a_1x_2.
\end{aligned}
$$

故 $D = \mathrm{ad}(-a_1y_1 + a_2y_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 从而 L 是一个完备李超代数. 此时若以 x_1 代替 $x_1 - x_2$, 则李超代数可简化为

$$
\begin{aligned}
L: &[x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_1] = y_1, [x_1, y_2] = -y_2, [x_3, y_1] = \lambda y_1, [x_3, y_2] = (1-\lambda)y_2,\\
&[y_1, y_2] = x_2.
\end{aligned}
$$

对于情形 (3), 由于 $k_{11} \neq 0, \mu_1 \neq 0$, 通过调整基, 并记 $\mu_2 = \lambda$, 有李超代数

$$
\begin{aligned}
L: &[x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = y_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \lambda y_2,\\
&[y_1, y_1] = x_2.
\end{aligned}
$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$
\begin{aligned}
Dx_i &= ax_2, \quad i = 1, 2,\\
Dx_3 &= bx_2,\\
Dy_1 &= \frac{a}{2}y_1,\\
Dy_2 &= cy_2.
\end{aligned}
$$

故 $D = \mathrm{ad}((c - \lambda a)x_1 - (b + c - \lambda a)x_2 + ax_3) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$
\begin{aligned}
Dx_1 &= ay_2,\\
Dx_2 &= 0,\\
Dx_3 &= by_1 + \lambda ay_2,\\
Dy_1 &= -2bx_2,\\
Dy_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

故 $D = \mathrm{ad}(-2by_1 - ay_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 从而 L 是一个完备李超代数. 此时若以 x_1 代替 $x_1 - x_2$, 则李超代数可简化为

$$
L: [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = y_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \lambda y_2, [y_1, y_1] = x_2.
$$

对于情形 (4), 对调 y_1, y_2, 可知此时的李超代数与情形 (3) 中的李超代数是同构的.

(v) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^4\ (a=0)$ 时, 由于 $[x_2, L_{\bar{0}}] = 0$ 且 $[x_2, L_{\bar{1}}] = 0$, 因此 $x_2 \in C(L)$, 从而 L 不完备.

(vi) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^5$ 时, 设 $[x_2, y_1] = \lambda_1 y_1, [x_2, y_2] = \mu_1 y_2, [x_3, y_1] = \lambda_2 y_1, [x_3, y_2] = \mu_2 y_2$. 则 λ_2, μ_2 不能同时为 0, 否则 $x_3 \in C(L)$.

由 $[x_1, [y_i, y_j]] = 0$, 可知 $[y_i, y_j] \in \mathrm{span}\{x_1, x_3\}$. 进而由 $(1,1,1)$ 及 λ_2, μ_2 不能同时为 0, 可得 $[y_i, y_j] \in \mathbb{C}x_1$, 所以可设 $[y_i, y_j] = k_{ij}x_1,\ i, j = 1, 2$.

由 $(0,1,1)$ 得

$$\begin{cases} (2\lambda_1 + 1)k_{11} = 0, & \lambda_2 k_{11} = 0, \\ (\lambda_1 + \mu_1 + 1)k_{12} = 0, & (\lambda_2 + \mu_2)k_{12} = 0, \\ (2\mu_1 + 1)k_{22} = 0, & \mu_2 k_{22} = 0. \end{cases}$$

因为 λ_2, μ_2 不能同时为 0, 故 k_{11}, k_{22} 至少有一个为 0, 从而有下面四种情形:

(1) 当 $k_{11} \neq 0, k_{22} = 0$ 时, 则有 $k_{12} = 0, \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 0, \mu_2 \neq 0$;

(2) 当 $k_{11} = 0, k_{22} \neq 0$ 时,则有 $k_{12} = 0, \lambda_2 \neq 0, \mu_1 = -\frac{1}{2}, \mu_2 = 0$;

(3) 当 $k_{11} = 0, k_{22} = 0$ 时, 且若 $k_{12} \neq 0$, 则 $\mu_1 + \lambda_1 = -1, \mu_2 = -\lambda_2$;

(4) 当 $k_{11} = 0, k_{22} = 0$ 时, 且 $k_{12} = 0$.

情形 (1) 与情形 (2) 对应的李超代数是同构的, 因此只需考虑情形 (1). 通过调整基, 并记 $\mu_2 = \lambda$, 则有李超代数

$$L: [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_1] = -\frac{1}{2}y_1, [x_2, y_2] = \lambda y_2, [x_3, y_2] = y_2, [y_1, y_1] = x_1.$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= ax_1, \\ Dx_2 &= bx_1, \\ Dx_3 &= 0, \\ Dy_1 &= \frac{a}{2}y_1, \\ Dy_2 &= cy_2. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}(bx_1 - ax_2 + (c + a\lambda)x_3) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= 0,\\
Dx_2 &= ay_1 + \lambda by_2,\\
Dx_3 &= by_2,\\
Dy_1 &= 2ax_1,\\
Dy_2 &= 0.
\end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}(2ay_1 - 2by_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 从而 L 是一个完备李超代数.

对于情形 (3), 记 $\lambda_1 = \lambda$, 可得李超代数

$$L: [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_1] = \lambda y_1, [x_2, y_2] = (-1-\lambda)y_2, [x_3, y_1] = y_1, [x_3, y_2] = -y_2,$$
$$[y_1, y_1] = x_1.$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= ax_1,\\
Dx_2 &= bx_1,\\
Dx_3 &= 0,\\
Dy_1 &= cy_1,\\
Dy_2 &= (a-c)y_2.
\end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}(bx_1 - ax_2 + (c + \lambda a)x_3) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= 0,\\
Dx_2 &= \lambda ay_1 + (1+\lambda)ay_2,\\
Dx_3 &= ay_1 + by_2,\\
Dy_1 &= bx_1,\\
Dy_2 &= -ax_1.
\end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}(-ay_1 + by_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 从而 L 是一个完备李超代数. 此时若以 x_2 代替 $x_2 - \lambda x_3$, 则李超代数可简化为

$$L:\ [x_1,x_2] = x_1, [x_2,y_2] = -y_2, [x_3,y_1] = y_1, [x_3,y_2] = -y_2, [y_1,y_1] = x_1.$$

对于情形 (4), 有李超代数

$$L: [x_1,x_2] = x_1, [x_2,y_1] = \lambda_1 y_1, [x_2,y_2] = \mu_1 y_2, [x_3,y_1] = \lambda_2 y_1, [x_3,y_2] = \mu_2 y_2.$$

由于 λ_2,μ_2 不能同时为 0, 不妨设 $\lambda_2 \neq 0$. 可考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_i &= 0,\ \ i = 1,3, \\ Dx_2 &= x_1, \\ Dy_1 &= 0, \\ Dy_2 &= \lambda_2 y_2. \end{aligned}$$

验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 故 L 不是完备李超代数.

(II) $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模的情形:

由于 $L_{\bar{0}}$ 是可解李代数, 故 $L_{\bar{1}}$ 中有一维的 $L_{\bar{0}}$-子模, 设其基为 y_1, 则 $L' = L_{\bar{0}} \oplus \mathbb{C}y_1$ 可构成一个李超代数, 因此可在 L' 的基础上得到相应的李超代数 L. 此时 $L_{\bar{1}}$ 的基可设为 y_1, y_2, 且设 $[x_i,y_2] = r(x_i)y_1 + \lambda_2(x_i)y_2$, $i = 1,2,3$; $[y_i,y_2] = k_{i2}^1 x_1 + k_{i2}^2 x_2 + k_{i2}^3 x_3$, $i = 1,2$.

命题 6.5. 设李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 中, $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, $L_{\bar{0}}$, $L_{\bar{1}}$ 的基分别为 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2. 若 $\dim [L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] = 2$, $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \subset \mathrm{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$, $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}$, 且满足 $[x_{i_1}, x_{i_2}] = 0$, $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \subset \mathrm{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$, $[x_{i_j}, L_{\bar{1}}] = 0$, $j = 1,2$. 那么对于 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_{i_j} &= x_{i_j}, \\ Dx_k &= 0,\ k \neq i_1, i_2, \\ Dy_i &= \frac{y_i}{2},\ i = 1,2. \end{aligned}$$

则有 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

证明: 首先, 根据导子的定义, 可直接验证得到 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$.

其次, 若设 $D = \mathrm{ad}(m_{i_1}x_{i_1} + m_{i_2}x_{i_2} + m_k x_k)$, 则由 $Dx_{i_j} \neq 0$, 知 $m_k \neq 0$. 因为 $[x_{i_j}, y_2] = 0$, $j = 1,2$, 且 $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 故 $[x_k,y_2] = r(x_k)y_1 + \lambda_2(x_k)y_2$ 中 $r(x_k) \neq 0$, 此时 $Dy_2 = m_k r(x_k)y_1 + m + k\lambda_2(x_k)y_2 \neq \frac{y_2}{2}$, 因此 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. □

(i) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^2$ 时, 可以得到两类李超代数:

$L_1' : [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [y_1, y_1] = x_1;$

$L_2' : [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \lambda y_1.$

(1) 在 L_1' 的基础上, 由 $(0,0,1)$ 得 $[x_i, y_1] = 0,\ [x_i, y_2] = r(x_i)y_1,\ i = 1,2.$ 且由$[x_i,[y_j,y_2]] = [[x_i,y_j],y_2]+[y_j,[x_i,y_2]],\ i,j = 1,2,$ 得 $r(x_1) = 0, r(x_2) = 0, k_{12}^3 = 0, k_{22}^3 = 0$, 即有 $[x_i, L_{\bar{1}}] = 0, i = 1,2,$ 且 $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] \subset \mathrm{span}\{x_1,x_2\}$. 因此, 由命题 6.5 可知所得的 L 不是完备李超代数.

(2) 在 L_1' 的基础上得到的李超代数 L 应满足

$$\begin{aligned}
&k_{12}^3 = 0, \quad r(x_1)k_{12}^1 = 0, \quad r(x_2)k_{12}^1 = 0, \quad (\lambda + \lambda_2(x_3) - 1)k_{12}^1 = 0,\\
&k_{22}^3 = 0, \quad r(x_1)k_{12}^2 = 0, \quad r(x_2)k_{12}^2 = 0, \quad (\lambda + \lambda_2(x_3) - 1)k_{12}^2 = 0,\\
&2r(x_3)k_{12}^1 + 2\lambda_2(x_3)k_{22}^1 = k_{22}^1, \quad 2r(x_3)k_{12}^2 + 2\lambda_2(x_3)k_{22}^2 = k_{22}^2,\\
&\lambda_2(x_1) = 0, \quad \lambda_2(x_2) = 0, \quad r(x_3)k_{22}^1 = -r(x_2)k_{22}^2.
\end{aligned}$$

由于 $(r(x_1), r(x_2)), (k_{12}^1, k_{12}^2)$ 中至少有一组为 0, 而由命题 6.5 可知 $(r(x_1), r(x_2))$ 为 0 时, L 有外导子, 因此令 $(r(x_1), r(x_2)) \neq 0$, 此时有

$$(2\lambda_2(x_3) - 1)k_{22}^1 = 0,\ (2\lambda_2(x_3) - 1)k_{22}^2 = 0,\ (2\lambda - 3)k_{22}^2 = 0,\ r(x_1)k_{22}^1 + r(x_2)k_{22}^2 = 0.$$

若 (k_{22}^1, k_{22}^2) 为 0, 即 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$ 时, 可以考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned}
Dx_i &= 0, i = 1,2,3,\\
Dy_j &= y_j,\ j = 1,2.
\end{aligned}$$

则有 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

若 (k_{22}^1, k_{22}^2) 不为 0, 不妨设 $r(x_2) \neq 0$, 则 $k_{22}^2 = -\frac{r(x_1)}{r(x_2)}k_{22}^1$. 分别用 y_1, y_2 代替 $\frac{y_1}{\sqrt{k_{22}^1}}, \frac{y_2}{\sqrt{k_{22}^1}}$, 用 x_2 代替 $\frac{x_2}{r(x_2)}$, 可得李超代数

$$\begin{aligned}
L:\ &[x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = r(x_1)y_1, [x_2, y_2] = y_1, [x_3, y_1] = \lambda y_1,\\
&[x_3, y_2] = r(x_3)y_1 + \frac{1}{2}y_2, [y_2, y_2] = x_1 - r(x_1)x_2.
\end{aligned}$$

对 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 和 $\lambda = \frac{1}{2}$ 两种情形, 可分别考察 $D, D' \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned}
&Dx_1 = r(x_1)(x_1 + x_2), && D'x_1 = r(x_1)(x_1 + x_2),\\
&Dx_2 = x_1 + x_2, && D'x_2 = x_1 + x_2,\\
&Dx_3 = 0, && D'x_3 = r(x_3)(x_1 + x_2),\\
&Dy_1 = (r(x_1) + 1)y_1, && D'y_1 = (r(x_3) + 1)y_1,\\
&Dy_2 = \frac{1}{2\lambda - 1}r(x_3)(r(x_1) + 1)y_1; && D'y_2 = 0.
\end{aligned}$$

可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 即在 L_2' 的基础上得到的李超代数也不是完备的.

(ii) 当 $L_{\bar{0}} = g_3^3$ 时, 设在 L' 中 $[x_i, y_1] = \lambda_i y_1$, $i = 1, 2, 3$; $[y_1, y_1] = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$, 则有

$$\lambda_1 a = 0, \lambda_1 k_1 = 0, \lambda_1 k_2 = 0, \lambda_2 = 0, k_3 = 0, 2\lambda_3 k_1 = ak_2, k_1 = (2\lambda_3 - 1)k_2.$$

由此, 可得四类李超代数:

$$\begin{aligned}
&L_1' : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = ax_1 + x_2, [x_3, y_1] = \lambda_3 y_1;\\
&L_2' : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = ax_1 + x_2, [x_3, y_1] = \lambda_3 y_1,\\
&\qquad [y_1, y_1] = (2\lambda_3 - 1)x_1 + x_2 \ (a = \lambda_3(2\lambda_3 - 1));\\
&L_3' : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = x_2, [y_1, y_1] = x_1 - x_2;\\
&L_4' : [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [y_1, y_1] = x_2.
\end{aligned}$$

(1) 在 L_1' 的基础上, 根据 $(0, 0, 1)$ 可设 $[x_i, y_2] = r(x_i)y_1$, $i = 1, 2$. 由 $[x_1, [y_1, y_2]] = 0$, 得 $k_{12}^3 = 0$. 且由 $[x_i, [y_2, y_2]] = [[x_i, y_2], y_2] + [y_2, [x_i, y_2]]$, $i = 1, 2$, 得

$$r(x_1)k_{12}^1 = 0,\ 2r(x_1)k_{12}^2 = -k_{22}^3,\ 2r(x_2)k_{12}^1 = -ak_{22}^3,\ 2r(x_2)k_{12}^2 = -k_{22}^3.$$

因此, 不论 $r(x_1)$ 为零, 还是 k_{12}^1 为零, 总能得到 $k_{22}^3 = 0$, 且 $(r(x_1), r(x_2)), (k_{12}^1, k_{12}^2)$ 中至少有一组为 0, 而由命题 6.5, 可以假设 $(r(x_1), r(x_2))$ 不为 0, 即令 (k_{12}^1, k_{12}^2) 为 0. 此时由 $(1, 1, 1)$, 还可以得到 $k_{22}^1 = 0, k_{22}^2 = 0$, 即有 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$, 考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned}
&Dx_i = 0, i = 1, 2, 3,\\
&Dy_j = y_j, j = 1, 2.
\end{aligned}$$

可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 即 L 不完备.

(2) 在 L_2' 的基础上, 根据 L 中的 $(0,0,1)$ 可设 $[x_i, y_2] = r(x_i)y_1$, $i = 1,2$. 而由 $[x_i, [y_j, y_2]] = [[x_i, y_j], y_2] + [y_j, [x_i, y_2]]$, $i, j = 1,2$, 得

$$(2\lambda_3 - 1)r(x_1) = 0,\ r(x_1) + k_{12}^3 = 0, 2r(x_2)k_{12}^2 + k_{22}^3 = 0,\ r(x_2) + k_{12}^3 = 0.$$

由于 $\lambda_3(2\lambda_3 - 1) \neq 0$, 因此 $r(x_1) = 0, r(x_2) = 0, k_{12}^3 = 0, k_{22}^3 = 0$, 即 $[x_i, L_{\bar{1}}] = 0$, $i = 1,2$, 且 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] \subset \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$, 从而根据命题 6.5, 可知得到的李超代数存在外导子.

(3) 在 L_3' 的基础上, 由 L 中的 $(0,0,1)$, 可设 $[x_2, y_2] = r(x_2)y_1$. 由 $[x_2, [y_1, y_2]] = [[x_2, y_1], y_2] + [y_1, [x_2, y_2]]$, 得 $r(x_2) = 0, k_{12}^3 = 0$, 即 $[x_2, y_2] = 0$. 进而, 由 $[x_2, [y_2, y_2]] = 0$, 得 $k_{22}^3 = 0$. 由 $[[y_1, y_1], y_2] + 2[[y_1, y_2], y_1] = 0$, 得 $[x_1, y_2] = 0$, 因此根据命题 6.5 可知, 此时得到的李超代数 L 也不是完备的.

(4) 在 L_4' 的基础上, 由 L 中的 $(0,0,1)$, 可得

$$\lambda_2(x_2) = 0, \quad \lambda_2(x_1)r(x_3) + \left(\frac{1}{2} - \lambda_2(x_3)\right)r(x_1) = r(x_2).$$

由 $[x_2, [y_i, y_2]] = [[x_2, y_i], y_2] + [y_i, [x_2, y_2]], i = 1,2$, 得 $r(x_2) = 0, k_{12}^3 = 0, k_{22}^3 = 0$. 而由 L 中的 $(1,1,1)$, 得 $k_{12}^1[x_1, y_2] = 0, k_{22}^1[x_1, y_2] = 0$, 因此根据命题 6.5, 只需考虑 $[x_1, y_2] \neq 0$ 时的情形, 即令 $k_{12}^1 = 0, k_{22}^1 = 0$.

再由 L 中的 $(0,1,1)$ 得

$$r(x_1) + \lambda_2(x_1)k_{12}^2 = 0, r(x_3) + \lambda_2(x_3)k_{12}^2 - \frac{1}{2}k_{12}^2 = 0, (k_{12}^2)^2 = k_{22}^2.$$

若 k_{12}^2=0, 则 $r(x_1) = 0, r(x_3) = 0$, 从而 $L_{\bar{1}}$ 是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 与前提矛盾! 故 $k_{12}^2 \neq 0$. 此时若用 y_2 代替 $\frac{y_2}{k_{12}^2}$, 可得李超代数

$$\begin{aligned} L:\ & [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = -\lambda_2(x_1)y_1 + \lambda_2(x_1)y_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, \\ & [x_3, y_2] = \left(\frac{1}{2} - \lambda_2(x_3)\right)y_1 + \lambda_2(x_3)y_2, [y_1, y_1] = x_2, [y_1, y_2] = x_2, [y_2, y_2] = x_2, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_2(x_1) \neq 0$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$Dx_i = bx_i,\ i = 1,2,$$

$$\begin{aligned} Dx_3 &= cx_3, \\ Dy_1 &= \frac{b}{2}y_1, \\ Dy_2 &= dy_1 + \left(\frac{b}{2} - d\right)y_2. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}\left(\frac{(\frac{1}{2}-\lambda_2(x_3))b-d}{\lambda_2(x_1)}x_1 + \frac{(\lambda_2(x_3)-\frac{1}{2})b-c\lambda_2(x_1)+d}{\lambda_2(x_1)}x_2 + bx_3\right) \in (\mathrm{ad}L)_{\overline{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\overline{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= by_1 - by_2, \\ Dx_2 &= 0, \\ Dx_3 &= cy_1 - \frac{b\lambda_2(x_3)}{\lambda_2(x_1)}y_2, \\ Dy_i &= 2\left(\frac{b\lambda_2(x_3)}{\lambda_2(x_1)} - c\right)x_2, i = 1, 2. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}\left(\left(\frac{2b\lambda_2(x_3)}{\lambda_2(x_1)} - 2c - \frac{b}{\lambda_2(x_1)}\right)y_1 + \frac{b}{\lambda_2(x_1)}y_2\right) \in (\mathrm{ad}L)_{\overline{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 而且 $C(L) = 0$, 故 L 是一个完备李超代数. 此时若以 y_2 代替 $y_2 - y_1$, 再以 x_1 代替 $x_1 - x_2$, 并且记 $\lambda = \lambda_2(x_1), \mu = \lambda_2(x_3)$, 则李超代数可简化为

$$L: \ [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = \lambda y_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \mu y_2, [y_1, y_1] = x_2.$$

再以 x_1 代替 $\frac{x_1}{\lambda}$, 则有

$$L: \ [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = y_2, [x_3, y_1] = \frac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \mu y_2, [y_1, y_2] = x_2.$$

(iii) 当 $L_{\overline{0}} = g_3^4$ 时, 可得到四类李超代数:

$$\begin{aligned} L_1' &: [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = ax_1, [x_3, y_1] = \frac{\sqrt{a}}{2}y_1, [y_1, y_1] = x_1 + \frac{1}{\sqrt{a}}x_2; \\ L_2' &: [x_3, x_1] = x_2, [x_3, x_2] = ax_1, [x_3, y_1] = \lambda_3 y_1; \\ L_3' &: [x_3, x_1] = x_2, [x_1, y_1] = \lambda_1 y_1, [x_3, y_1] = \lambda_3 y_1; \\ L_4' &: [x_3, x_1] = x_2, [y_1, y_1] = k_{11}x_2. \end{aligned}$$

(1) 在 L_1' 的基础上, 由 L 中的 $(0, 0, 1)$, 可得 $\lambda_2(x_1) = 0, \lambda_2(x_2) = 0$.

由 $[x_i,[y_1,y_2]] = [[x_i,y_1],y_2] + [y_1,[x_i,y_2]], i = 1,2$, 得 $r(x_1) = 0, r(x_2) = 0, k_{12}^3 = 0$. 进而由 $2[[y_1,y_2],y_2] + [[y_2,y_2],y_1] = 0$, 得 $k_{22}^3 = 0$. 根据命题 6.5, 此时得到的李超代数 L 不完备.

(2) 在 L_2' 的基础上, 所得到的李超代数 L 需满足

$$k_{12}^3 = 0,\ \ r(x_1)k_{12}^1 = 0,\ \ r(x_2)k_{12}^2 = 0,\ \ 2r(x_1)k_{12}^2 = -k_{22}^3,\ \ 2r(x_2)k_{12}^1 = -ak_{22}^3,$$

故 $k_{22}^3 = 0$, 且 $(r(x_1), r(x_2)), (k_{12}^1, k_{12}^2)$ 中至少有一组为 0, 由命题 6.5 可设 $(r(x_1), r(x_2))$ 不为 0, 进而还可以得到

$$\begin{aligned}&2\lambda_2(x_3)k_{22}^1 - ak_{22}^2 = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda_2(x_3))r(x_2) = ar(x_1), \quad r(x_1)k_{22}^1 + r(x_2)k_{22}^2 = 0,\\ &2\lambda_2(x_3)k_{22}^2 - k_{22}^1 = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda_2(x_3))r(x_3) = r(x_2).\end{aligned}$$

若 (k_{22}^1, k_{22}^2) 为 0, 即有 $[L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}] = 0$, 考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned}Dx_i &= 0, i = 1,2,3,\\ Dy_j &= y_j, j = 1,2.\end{aligned}$$

可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

若 (k_{22}^1, k_{22}^2) 不为 0, 通过调整基,可得李超代数

$$\begin{aligned}L: [x_3,x_1] = x_2, [x_3,x_2] = ax_1, [x_1,y_2] = r(x_1)y_1, [x_2,y_2] = -\sqrt{a}r(x_1)y_1,\\ [x_3,y_1] = \lambda_3 y_1, [x_3,y_2] = r(x_3)y_1 + \frac{\sqrt{a}}{2}y_2, [y_2,y_2] = \sqrt{a}x_1 + x_2.\end{aligned}$$

考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned}Dx_i &= x_i,\ \ i = 1,2,\\ Dx_3 &= 0,\\ Dy_1 &= \frac{3}{2}y_1,\\ Dy_2 &= -\frac{r(x_3)}{\sqrt{a}}y_1 + \frac{1}{2}y_2.\end{aligned}$$

验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 但 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$. 因此在 L_2' 的基础上所得到的李超代数不是完备的.

(3) 在 L_3' 的基础上, 由 L 中的 $(0,0,1)$ 可得

$$(\lambda_2(x_1) - \lambda_1)r(x_2) = 0, \quad (\lambda_2(x_3) - \lambda_3)r(x_2) = 0,$$

$$\lambda_2(x_2)=0,\quad (\lambda_2(x_1)-\lambda_1)r(x_3)+(\lambda_3-\lambda_2(x_3))r(x_1)=r(x_2).$$

因此, 总可得到 $r(x_2)=0$, 即 $[x_2,y_2]=0$, 从而 $x_2\in C(L)$, 故 L 不是完备李超代数.

(4) 类似地, 在 L'_4 的基础上所得到李超代数的中心也不为 0, 从而也不完备.

(iv) 当 $L_{\bar{0}}=g_3^5$ 时, 可得到三类李超代数:

$$\begin{aligned}
&L'_1:[x_1,x_2]=x_1,[x_2,y_1]=-\frac{1}{2}y_1,[y_1,y_1]=x_1;\\
&L'_2:[x_1,x_2]=x_1,[x_2,y_1]=\lambda_1y_1,[x_3,y_1]=\lambda_3y_1;\\
&L'_3:[x_1,x_2]=x_1,[y_1,y_1]=x_3.
\end{aligned}$$

(1) 在 L'_1 的基础上, 由 L 中的 $(0,0,1)$ 可得

$$\lambda_2(x_1)=0,\quad \left(\lambda_2(x_3)+\frac{1}{2}\right)r(x_3)=\lambda_2(x_3)r(x_2).$$

由 $[x_1,[y_i,y_2]]=[[x_1,y_i],y_2]+[y_i,[x_1,y_2]], i=1,2$, 得 $r(x_1)=0,k_{12}^2=0,k_{22}^2=0$. 进而, 还可得到

$$\begin{aligned}
&r(x_3)k_{i2}^3=0,\ \ \lambda_2(x_3)k_{i2}^3=0,\ \ i=1,2,\quad r(x_3)+\lambda_2(x_3)k_{12}^1=0,\\
&r(x_3)k_{12}^1+\lambda_2(x_3)k_{22}^1=0,\quad r(x_2)+\left(\lambda_2(x_2)+\frac{1}{2}\right)k_{12}^1=0.
\end{aligned}$$

若 $r(x_3)=0,\lambda_2(x_3)=0$, 则 $[x_3,y_2]=0$, 从而 $x_3\in C(L)$; 若 k_{12}^1=0, 则 $r(x_2)=0,r(x_3)=0$, 从而 $L_{\bar{1}}$ 是完全可约 $L_{\bar{1}}$-模. 故 $k_{12}^3=0,k_{22}^3=0$, 且 $k_{12}^1\neq0$, $\lambda_2(x_3)\neq0$.

此时, 若用 x_3,y_2 分别代替 $-\frac{x_3}{\lambda_2(x_3)}$, $\frac{y_2}{k_{12}^1}$, 并记 $\lambda_2(x_2)=\lambda$, 则有李超代数

$$\begin{aligned}
L:&[x_1,x_2]=x_1,[x_2,y_1]=-\frac{1}{2}y_1,[x_2,y_2]=-(\lambda+\frac{1}{2})y_1+\lambda y_2,[x_3,y_2]=y_1-y_2,\\
&[y_1,y_1]=x_1,[y_1,y_2]=x_1,[y_2,y_2]=x_1.
\end{aligned}$$

$\forall D\in(\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned}
Dx_i&=ax_i,\ \ i=1,2,\\
Dx_3&=0,\\
Dy_1&=\frac{b}{2}y_1,
\end{aligned}$$

$$Dy_2 = cy_1 + \left(\frac{b}{2} - c\right)y_2.$$

故 $D = \mathrm{ad}\left(ax_1 - bx_2 + \left(c - \frac{b}{2} - \lambda b\right)x_3\right) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 0, \\ Dx_2 &= \left(\frac{a}{2} + \lambda b\right)y_1 - \lambda b y_2, \\ Dx_3 &= -by_1 + by_2, \\ Dy_i &= ax_1,\ i = 1,2. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}((a-b)y_1 + by_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 故 L 是一个完备李超代数. 此时若以 y_2 代替 $y_2 - y_1$, 则李超代数可简化为

$$L:\ [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_1] = -\frac{1}{2}y_1, [x_2, y_2] = \lambda y_2, [x_3, y_2] = -y_2, [y_1, y_1] = x_1.$$

(2) 在 L_2' 的基础上, 根据李超代数 L 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
&k_{12}^2 = 0,\ \lambda_3 k_{12}^3 = 0,\ \lambda_2(x_3)k_{12}^3 = 0,\ r(x_1)k_{12}^3 = 0,\ 2r(x_1)k_{12}^1 = k_{22}^2,\ r(x_3)k_{12}^3 = 0,\\
&(\lambda_1 + \lambda_2(x_2) + 1)k_{12}^1 = 0,\ (\lambda_3 + \lambda_2(x_3))k_{12}^1 = 0,\ 2r(x_2)k_{12}^1 + 2\lambda_2(x_2)k_{22}^1 + k_{22}^1 = 0,\\
&\lambda_2(x_2)k_{22}^2 = 0,\ \lambda_2(x_3)k_{22}^2 = 0,\ \lambda_2(x_3)k_{22}^3 = 0,\ r(x_3)(\lambda_1 - \lambda_2(x_2)) = r(x_2)(\lambda_3 - \lambda_2(x_3)),\\
&r(x_3)k_{12}^1 = -\lambda_2(x_3)k_{22}^1,\ (\lambda_3 - \lambda_2(x_3))r(x_1) = 0,\ r(x_1)k_{22}^1 + r(x_2)k_{22}^2 + r(x_3)k_{22}^3 = 0,\\
&r(x_2)k_{12}^3 = -\lambda_2(x_2)k_{22}^3,\ (\lambda_2(x_2) - 1 - \lambda_1)r(x_1) = 0,\ 2r(x_1)k_{12}^1 + \lambda_1 k_{22}^2 + \lambda_3 k_{22}^3 = 0.
\end{aligned}$$

若 $k_{12}^3 \neq 0$, 则 $\lambda_3 = r(x_3) = \lambda_2(x_3) = 0$, 从而 $x_3 \in C(L)$, 故令 $k_{12}^3 = 0$.

若 $k_{12}^1 \neq 0$, 则有 $\lambda_2(x_3) = -\lambda_3, \lambda_2(x_2) = -\lambda_1 - 1$. 此时若 $\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_2(x_3) = r(x_3) = 0$, 也可得到 $x_3 \in C(L)$, 因此当 $k_{12}^1 \neq 0$ 时, 可令 $\lambda_3 \neq 0$. 进而还有 $r(x_1) = 0$, $k_{22}^2 = k_{22}^3 = 0$. 若 $r(x_3) = 0$, 则由 $\lambda_2(x_3) \neq 0$, $k_{12}^1 \neq 0$ 得 $r(x_2) = 0$, 这与 $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模矛盾, 故 $r(x_3) \neq 0$. 以 x_3 代替 $\frac{x_3}{\lambda_3}$, 再以 x_1, y_1 分别代替 $\frac{r(x_3)}{\lambda_3}x_1, \frac{r(x_3)}{\lambda_3}y_1$, 可得李超代数

$$\begin{aligned} L: &[x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_1] = \lambda_1 y_1, [x_3, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = (\lambda_1 + \frac{1}{2})y_1 - (\lambda_1 + 1)y_2,\\ &[x_3, y_2] = y_1 - y_2, [y_1, y_2] = x_1, [y_2, y_2] = x_1. \end{aligned}$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= ax_1,\\
Dx_2 &= bx_1,\\
Dx_3 &= 0,\\
Dy_1 &= cy_1,\\
Dy_2 &= \left(c-\frac{a}{2}\right)y_1 + (a-c)y_2.
\end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}(bx_1 - ax_2 + (c+\lambda a)x_3) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= 0,\\
Dx_2 &= \left(a\lambda_1 - \frac{b}{2}\right)y_1,\\
Dx_3 &= ay_1 + by_2,\\
Dy_1 &= bx_1,\\
Dy_2 &= -ax_1.
\end{aligned}$$

其中 $b(1+\lambda) = 0$, 故 $D = \mathrm{ad}(-(a+b)y_1 + by_2) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 故 L 是一个完备李超代数. 此时若以 x_2 代替 $x_2 - \lambda x_3$, 则李超代数可简化为

$$\begin{aligned}
L: &[x_1,x_2] = x_1, [x_3,y_1] = y_1, [x_2,y_2] = \frac{1}{2}y_1 - y_2, [x_3,y_2] = y_1 - y_2,\\
&[y_1,y_2] = x_1, [y_2,y_2] = x_1.
\end{aligned}$$

当 $k_{12}^1 = 0$ 时, 有 $k_{22}^2 = 0$. 此时若 $k_{22}^3 \neq 0$, 则 $x_3 \in C(L)$, 故令 $k_{22}^3 = 0$. 按照 k_{22}^1 是否为 0, 可得下面两个李超代数

$$\begin{aligned}
L:\ &[x_1,x_2] = x_1, [x_2,y_1] = \lambda_1 y_1, [x_3,y_1] = \lambda_3 y_1, [x_1,y_2] = r(x_1)y_1,\\
&[x_2,y_2] = r(x_2)y_1 + \lambda_2(x_2)y_2, [x_3,y_2] = r(x_1)y_1 + \lambda_2(x_3)y_2;\\
L':\ &[x_1,x_2] = x_1, [x_2,y_1] = \lambda_1 y_1, [x_3,y_1] = \lambda_3 y_1, [x_2,y_2] = r(x_2)y_1 - \frac{1}{2}y_2,\\
&[x_3,y_2] = r(x_3)y_1, [y_2,y_2] = k_{22}^1 x_1, \text{ 其中 } r(x_3)\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\right) = r(x_2)\lambda_3,\ k_{22}^1 \neq 0.
\end{aligned}$$

首先对于 L, 考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$Dx_i = 0, i = 1,2,3,$$

$$Dy_j = y_j, j = 1,2.$$

则验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 且 $D \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$ 当且仅当 $r(x_1) = 0, \lambda_2(x_3) = \lambda_3$. 但是在这一条件成立的情况下, 再考察 $D' \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} D'x_1 &= -\lambda_3 r(x_2)x_1, \\ D'x_i &= 0, \quad i = 2,3, \\ D'y_j &= (r(x_3) + \lambda_3 r(x_2)\lambda_2(x_2))y_j, \quad j = 1,2. \end{aligned}$$

由于 $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 故 $r(x_2)r(x_3) \neq 0$; 而 $\lambda_3 = r(x_3) = 0$ 可推出 $x_3 \in C(L)$, 因此 $\lambda_3 r(x_2)$ 与 $r(x_3)$ 不可同时为 0, 故 $D' \neq 0$, 且验证可知 $D' \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$, 因此 L 不是完备李超代数.

其次对于 L', 若 $\lambda_3 = 0$, 则 $r(x_3) \neq 0$. 此时考察 $D \in (\mathrm{End}L)_{\bar{0}}$, 其中

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 0, \\ Dx_i &= r(x_i)x_3, \ i = 2,3, \\ Dy_1 &= r(x_3)y_1, \\ Dy_2 &= 0. \end{aligned}$$

则验证可知 $D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 且 $D \notin (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

因此考虑令 $\lambda_3 \neq 0$, 此时由 $L_{\bar{1}}$ 不是完全可约 $L_{\bar{0}}$-模, 可知 $r(x_3) \neq 0$, 通过调整基, 可得李超代数

$$\begin{aligned} L: &[x_1,x_2] = x_1, [x_2,y_1] = \lambda_1 y_1, [x_3,y_1] = \lambda_3 y_1, [x_2,y_2] = \frac{2\lambda_1+1}{2\lambda_3}y_1 - \frac{1}{2}y_2, \\ &[x_3,y_2] = y_1, [y_2,y_2] = x_1. \end{aligned}$$

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{0}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= ax_1, \\ Dx_2 &= bx_1, \\ Dx_3 &= 0, \\ Dy_1 &= \left(\frac{a}{2} + c\lambda_3\right)y_1, \\ Dy_2 &= cy_1 + \frac{a}{2}y_2. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}\left(bx_1 - ax_2 + \left(c + \frac{a}{2\lambda_3} + \frac{a\lambda_1}{\lambda_3}\right)x_3\right) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{0}}$.

$\forall D \in (\mathrm{Der}L)_{\bar{1}}$, 则 D 须满足

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 0, \\ Dx_2 &= \frac{a\lambda_1 - b}{\lambda_3}y_1 + by_2, \\ Dx_3 &= ay_1, \\ Dy_1 &= 0, \\ Dy_2 &= 2bx_1. \end{aligned}$$

故 $D = \mathrm{ad}\left(\frac{-a-2b}{\lambda_3}y_1 + 2by_2\right) \in (\mathrm{ad}L)_{\bar{1}}$.

因此, $\mathrm{Der}L = \mathrm{ad}L$, 故 L 是一个完备李超代数. 此时若以 x_2 代替 $x_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}x_3$, 再以 x_3, y_1 分别代替 $\frac{x_3}{\lambda_3}, \frac{y}{\lambda_3}$, 则李超代数可简化为

$$L: [x_1, x_2] = x_1, [x_3, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = y_1 - y_2, [x_3, y_2] = y_1, [y_2, y_2] = x_1.$$

进一步地, 再以 y_2 代替 $y_1 - y_2$, 则有

$$L: [x_1, x_2] = x_1, [x_3, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = -y_2, [y_2, y_2] = x_1.$$

(3) 在 L'_3 的基础上, 由 $2[[y_1, y_2], y_1] + [[y_1, y_1], y_2] = 0$, 得 $[x_3, y_2] = 0$, 故 $x_3 \in C(L)$, 因此得到的李超代数 L 不完备.

推论 6.6. 维数不超过 5 且奇部维数为 2 的可解完备李超代数在同构意义下有以下的分类:

$L'_1: [x_1, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = y_2;$

$L'_2: [x_3, x_1] = x_1, [x_3, x_2] = x_2, [x_3, y_1] = \dfrac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \dfrac{1}{2}y_2, [y_1, y_1] = x_1,$
$\quad [y_1, y_2] = k_1x_1 + k_2x_2, [y_2, y_2] = x_2;$

$L'_3: [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_1] = y_1, [x_1, y_2] = -y_2, [x_3, y_1] = \lambda y_1,$
$\quad [x_3, y_2] = (1-\lambda)y_2, [y_1, y_2] = x_2;$

$L'_4: [x_3, x_2] = x_2, [x_1, y_2] = y_2, [x_3, y_1] = \dfrac{1}{2}y_1, [x_3, y_2] = \lambda y_2, [y_1, y_1] = x_2;$

$L'_5: [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_1] = -\dfrac{1}{2}y_1, [x_2, y_2] = \lambda y_2, [x_3, y_2] = y_2, [y_1, y_1] = x_1;$

$L'_6: [x_1, x_2] = x_1, [x_2, y_2] = -y_2, [x_3, y_1] = y_1, [x_3, y_2] = -y_2, [y_1, y_1] = x_1;$

$L'_7: [x_1, x_2] = x_1, [x_3, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = \dfrac{1}{2}y_1 - y_2, [x_3, y_2] = y_1 - y_2, [y_1, y_2] = x_1,$
$\quad [y_2, y_2] = x_1;$

$L'_8: [x_1, x_2] = x_1, [x_3, y_1] = y_1, [x_2, y_2] = -y_2, [y_2, y_2] = x_1.$

参 考 文 献

[1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[2] M. Scheunnert, The theory of Lie superalgebras, Lecture Notes in Math. 716, Springer-Verlag, Berlin Herdelberg, New York, 1979.

[3] Kristien Bauwens, Lieven Le Bruyn, Some remarks on solvable Lie superalgebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 99(1995), 113-134.

[4] V. G. Kac, Lie superalgebras [J], Adv Math, 1997, 26:8-96.

[5] L. S. Zhu, D. J. Meng, The classification of complete Lie algebras with low dimensions [J], Algrbra Colloq, 1997, 4(1):95-109.

[6] W. A. de Graaf, Classification of solvable Lie algebras [J], Experimental Mathematics, 2005, 14(1):15-25.

[7] Li Zhenheng, Compiete Lie superalgebras, Math. Res. Exposition. 1994, 14(2):159-164.

[8] L. Y. Wang, D. J. Meng, Some results on complete Lie superalgebras，Linear Algebra Appl., 355(2002), 1-14.

[9] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏, 有限维半单李代数简明教程 [M], 科学出版社, 2008.

[10] 孟道骥, 朱林生, 姜翠波, 完备李代数 [M], 科学出版社, 2001.

[11] 王立云, 完备李超代数与广义 Witt 型李超代数 [D], 上海交通大学, 2004.

[12] 王志刚, 低维李超代数的分类 [D], 华东师范大学, 2006.

[13] 李振亨, 完备李超代数分解的唯一性 [J], 东北数学, 1993, 9(3), 403-405.

[14] 孙洪洲, 韩其智, 李超代数综述, 物理学进展, 1983, 40(1), 81-125.

[15] 孟道骥, 完备 Lie 代数, 南开大学学报, 1985, 2, 9-19.

[16] 孟道骥, 具有交换幂零根基的完备李代数, 数学学报, 1991(34), 191-202.

[17] 孟道骥, 完备李代数的极大环面子代数, 数学年刊, 1995(16), 723-728.

[18] 孟道骥, 朱林生, 完备 Lie 代数的若干进展, 数学进展, 27(1998), 193-201.

[19] 朱林生, 孟道骥, 一些无限维完备李代数, 数学年刊, 2000(3), 311-316.

致谢

三年的硕士生活转瞬即逝，回首过去，往事历历在目，心中感慨万千，这其中的点点滴滴都将深深印在我的脑海中，使我有信心在今后的学习生活中更加努力勤奋，不断地从各个方面完善自己.

值此论文完成之际，我要向所有曾经给予我关心和帮助的老师、同学表达我深深的谢意. 首先我要感谢我的导师林磊副教授. 林老师在学习、生活各方面都给予我很大的帮助和支持. 在这次论文的写作和定稿过程中，林老师花费了大量的时间和精力帮助我审稿和修改. 林老师渊博的知识，严谨的作风，敬业的精神，宽广的胸怀，崇高的品质如春风细雨般潜移默化着我，他那慈父般的教导和指引让我终生难忘，使我真正领悟到了"学高为师，身正为范"的内涵.

三年的研究生学习和生活中，我还得到了数学系其他很多老师的教导，感谢陈志杰教授、芮和兵教授、舒斌教授、刘攀副教授、万福永副教授等教过我的老师，我也有幸聆听过时俭益教授、王建磐教授和胡乃红教授等老师的讲座，老师们深厚的专业知识、平易近人的作风，为我树立了很好的榜样，指引着我以后前进的方向.

感谢辅导员邹佳晨老师和徐洁老师在生活上对我无微不至的关怀和照顾，他们兢兢业业，尽职尽责，无怨无悔地为我们排忧解难.

还要感谢各位同窗同学，特别要感谢我的同门：冯铮铮、陈俊光，也要感谢同方向的张慧、胡红梅和室友杨秀，以及我的老乡郭冉和宋慈，感谢你们对我的帮助和这三年中带给我的无数的快乐，你们的友谊是我一生最大的财富，值得我永远珍藏和回忆. 也感谢我们 2008 级全体研究生同学，是你们陪我一起走过这三年美好时光！更要感谢我的家人，谢谢你们对我的爱和为我无私的付出！

谨以此文作为我三年学习生涯的总结，并再次向曾经给予我鼓励和帮助的老师、同学表达我最衷心的感谢和祝福，同时感谢答辩委员会的所有专家和学者，谢谢！