最优控制理论与应用中的两个问题

摘　　要

本论文由三部分组成.

第一部分为绪论，介绍本论文所讨论的两个问题和所获得的主要结果.

第二部分讨论一个带有逐点状态约束的四阶常微分系统的时间最优控制问题，给出了显式解.

第三部分讨论最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式的最优控制问题. 在一定的假设下，我们证明了最优控制的存在性和最大值原理.

关键词: 逐点状态约束，　最优控制，　最优轨线，　时间最优控制，　时滞算子，变分不等式，　逼近系统，　轨线变分.

Two Problems in Optimal Control Theory and Applications

Abstract

This thesis consists of three parts.

In the first part, we introduce the two problems which will be discussed in the following two parts and the main results of the thesis.

In the second part, we discuss the time-optimal control problem for an ordinary differential system with a pointwise state-constraint. We give the explicit solution.

Finally in the third part, we study the optimal control problems for the variational inequality with delays in the highest order spatial derivatives. Under some suitable conditions, we prove the existence and the maximum principle for the optimal control.

Keywords : pointwise state-constraint, optimal control, optimal trajectory, time-optimal control, time-delays operator, variational inequality, approximating systems, variation along a trajectory.

第一部分

绪论

第一章　绪论

本论文讨论最优控制理论与应用中的两个问题. 在下面的两节，我们介绍这两个问题，并给出本论文所获得的主要结果. 对它们详细的讨论分别在本论文的第二部分和第三部分给出. 在第三节，我们介绍本论文中常用的一些记号.

§1.1　第二部分所讨论的问题与主要结果

求解带有逐点状态约束的最优控制与最优轨线是很困难的. 当系统的相轨线有约束时，已有的最优性条件都先验假设最优轨线或最优控制满足某些性质，而这些假设往往难以验证. 求解带有逐点状态约束的具体最优控制问题，目前还没有一般的有效的方法. 能够解到底的具体例子也很少见到.

在本文的第二部分，我们考虑控制系统

$$x^{(4)}(t) = u(t), \qquad a.e. t \in (0, +\infty), \qquad |u(t)| \le 1 \tag{1.1.1}$$

在逐点状态约束

$$|\ddot{x}| \le 1 \tag{1.1.2}$$

下由初始状态

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0$$

出发，以最短的时间转移到终端状态

$$x(T) = h, \quad \dot{x}(T) = \ddot{x}(T) = x^{(3)}(T) = 0$$

的时间最优控制问题 (P) . 这里 $h > 0$ 给定，记控制域为 $U = [-1, 1]$ ，控制函数类为在 U 中取值的可测函数的全体.

在这一部分，我们证明了下面的主要结果:

定理 1.1.1. 对于任意的 $h > 0$ ，问题 (P) 恒有唯一解. 最快到达时间为

$$\bar{T}_h = \begin{cases} \sqrt[4]{2^7 \cdot 3 \cdot h}, & 0 < h \le \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}; \\ 2 + \sqrt{\frac{2}{3} + 4h}, & h > \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

当 $0 < h \le \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}$ 时，最优控制为

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in (0, (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})t_1) \cup (t_1, (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})t_1); \\ -1, & t \in ((1 - \frac{\sqrt{2}}{2})t_1, t_1) \cup ((1 + \frac{\sqrt{2}}{2})t_1, 2t_1). \end{cases} \tag{1.1.4}$$

当 $h > \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}$ 时，最优控制为

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1) \cup (t_1, t_1 + \sqrt{2}) \cup (2t_1 - 2, 2t_1 - 1); \\ 0, & t \in (2, t_1 - \sqrt{2}) \cup (t_1 + \sqrt{2}, 2t_1 - 2); \\ -1, & t \in (1,2) \cup (t_1 - \sqrt{2}, t_1) \cup (2t_1 - 1, 2t_1). \end{cases} \tag{1.1.5}$$

其中，

$$t_1 = \frac{\bar{T}_h}{2}.$$

由上述结果可以验证：当 $h > \frac{17}{6} + 2\sqrt{2}$ 时，问题 (P) 的最优轨线不满足约束最大值原理 ([57]) 的正规性假设. 这表明，已有的最大值原理 ([57]) 不能用来求解上述例子. 我们采用变换的方法求解该问题. 先将原问题转化为一个固定时间区间上的较简单的最优控制问题. 通过对最优轨线性质的具体分析求出后者的最优解. 最后求出原问题的最优时间与最优控制的显式表达.

上述结果为带有逐点状态约束的最优控制问题提供了一个能够彻底求解的稀有的例子. 鉴于问题 (P) 的特殊性，我们这里的求解方法还难以推广到更广泛的系统. 对于带有逐点状态约束的最优控制问题，其一般的求解方法还有待于进一步的探索和研究.

§1.2 第三部分所讨论的问题与主要结果

对于变分不等式 [1] 及其最优控制问题的研究，已有大批的工作. 对于带有时滞的变分不等式的讨论，目前还不多见. Valeriano([65]) 曾对一类带有时滞的变分不等式建立了解的存在唯一性定理，他假设时滞只出现于状态变量本身和其低阶偏导数项而不出现在其最高阶偏导数项之中. 在本文的第三部分，我们讨论最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式的最优控制问题. 下面简要介绍这一部分的主要内容和主要结果.

给定 R^n 中有界区域 Ω、正数 r 与 T、广义测度 μ、集值映射 β 及函数 f, f^0:

[1] 在有的中文文献中，也称之为"变分不等方程". 本文依照" variational inequality "一词的翻译惯例，使用"变分不等式"这一术语.

$R \times R^n \times R \times U \to R$．我们讨论下述的最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式:

$$\begin{cases} \dot{y}(t,x) - \triangle y(t,x) + \int_{-r}^{0} \triangle y(t+\theta,x)\mu(d\theta) + \beta(y(t,x)) \ni f(t,x,y(t,x),u(t,x)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad in\ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)); \\ y(t,x) = \varphi(t,x), \qquad a.e.\ (t,x) \in (-r,0) \times \Omega; \\ y(0,x) = z(x), \qquad a.e.\ x \in \Omega; \\ y(t,x) = 0, \qquad in\ (0,T) \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

使得指标泛函

$$J(y,u) = \int_0^T dt \int_\Omega f^0(t,x,y(t,x),u(t,x))dx \tag{1.2.7}$$

极小化的最优控制问题 (C)．这里，集值映射 β 定义为

$$\beta(r) = \begin{cases} (-\infty, 0], & r = 0; \\ \{0\}, & r > 0. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

假设 U 为一般的可分度量空间. 控制函数类取为

$$\mathcal{U} = \{u = u(\cdot,\cdot) \mid u(\cdot,\cdot)\text{为}(0,T) \times \Omega \longrightarrow U \text{ 的可测映射 }\}. \tag{1.2.9}$$

在讨论中，对 μ 与 f 和 f^0 我们作下面的假定.

($\mathbf{H}_\mu$) μ是$\mathcal{B}([-r,0])$上的有限值广义测度，且满足

$$\lim_{s\downarrow 0} |\mu|\left([-r,0]\right) \mid \mu \mid \left([-s,0]\right) < 1. \tag{1.2.10}$$

($\mathbf{H}_1$) 对任意$(t,x,y,u) \in R \times R^n \times R \times U$，$f(\cdot,\cdot,y,\cdot)$ 与 $f^0(\cdot,\cdot,y,\cdot)$ 为 $(0,T) \times \Omega \times U$上 *Lebesgue* 可测函数，$f(t,x,\cdot,u)$, $f^0(t,x,\cdot,u) \in C^1(R)$． 且有常数 $k > 0$ 使得

$$|f(t,x,0,u)| + \left|f^0(t,x,0,u)\right| + |f_y(t,x,y,u)| + \left|f_y^0(t,x,y,u)\right| \le k \tag{1.2.11}$$

$$\forall\ (t,x,y,u) \in R \times R^n \times R \times U.$$

($\mathbf{H}_2$) 对于任意的 $(t,x,y) \in [0,T] \times \Omega \times R$，$f(t,x,y,\cdot)$ 与 $f^0(t,x,y,\cdot)$ 在 U 上连续.

($\mathbf{H}_3$) 对于任意的 $(t,x) \in Q_T$, 集值映射 $\mathcal{E}(t,x,\cdot)$ 具有 *Cesari* 性质 [1]．

---

[1] 参见第 58 页定义 5.2.1.

这里的集值映射 $\mathcal{E}(t,x,\cdot):R\to 2^{R^2}$ 定义为

$$\mathcal{E}(t,x,y)=\{(v^0,v)\mid v^0\geq f^0(t,x,y,u),v=f(t,x,y,u),u\in U\}.$$

我们的基本思路是将变分不等式看作一类等式方程的极限，用逼近方法研究状态方程 (1.2.6) 的可解性和该系统的最优控制. 具体地说，我们以具有相同初边值条件的同类等式方程

$$\begin{aligned}&\dot{y}_\varepsilon(t,x)-\Delta y_\varepsilon(t,x)+\int_{-r}^{0}\Delta y_\varepsilon(t+\theta,x)\mu(d\theta)+\beta_\varepsilon(y_\varepsilon(t,x))\\=\;&f(t,x,y_\varepsilon(t,x),u(t,x)),\end{aligned}\tag{1.2.12}$$

与指标泛函

$$J_\varepsilon(u(\cdot,\cdot))=\int_0^T dt\int_\Omega f^0\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),u(t,x)\big)dx\tag{1.2.13}$$

去逼近变分不等式 (1.2.6) 与指标泛函 (1.2.7) .

作为最优控制问题研究的必要准备，在第三部分中我们首先建立最高阶偏导数项具有时滞的半线性抛物型变分不等式的适定性理论. 文 [74] 对一类最高阶偏导数项具有时滞的抽象抛物型方程建立了解的存在唯一性理论. 方程 (1.2.12) 的可解性可作为其特殊情形得到. 而且由文 [74] 可知，当非齐次项 f 与系统的初值 (φ,z) 具有较好的性质时，方程 (1.2.12) 存在唯一解，且该解也具有较好的性质. 状态方程 (1.2.6) 的可解性是在这些结论的基础上建立的. 在使用逼近方法时，由于逼近方程 (1.2.12) 中 $\beta_\varepsilon(\cdot)$ 关于 ϵ 无界，因而不能直接用 [74] 中的结果导出 y_ε 的有界性. 我们利用时滞算子的性质和方程 (1.2.12) 在某种意义下的单调性，直接证明了逼近解 y_ε、其各阶导数以及 $\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)$ 诸序列的有界性 (详见第 40 页定理 4.3.5) . 这是我们证明状态方程 (1.2.6) 可解性的关键. 在讨论 (1.2.6) 的可解性时，我们将控制处理为抽象参数. 从而，这部分内容与控制理论相对独立，其结果具有独立的理论价值.

在研究变分不等式 (1.2.6) 与指标泛函 (1.2.7) 确定的最优控制问题时，由于辅助状态变量 η(参见第 36 页 (4.10) 式) 的可用信息太少，我们不能直接研究方程 (1.2.6) 的轨线变分. 借鉴 [7] 与 [18] 的研究方法，我们首先给出逼近系统 (1.2.12) 的逼近控制问题的变分方程和伴随方程，然后研究其伴随方程解的收敛性，最后得到 (1.2.6) 的伴随方程. 与 [7] 和 [18] 不同的是，(1.2.12) 的伴随方程中由于时滞项 $G^*(\Delta\psi_\varepsilon)$ 的出现，给逼近项 $\beta_\varepsilon'(y_\varepsilon)\psi_\varepsilon$ 的收敛性的讨论带来很大困难 (详见 §3.3 中的 (5.29) 与 (5.30) 式). 我们仅在一个较大的空间中证明了其收敛性.

在第三部分，我们证明了下面的主要结果：

定理 1.2.1. (**状态方程的可解性与连续依赖性**) 若 $(\mathbf{H}_1)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，则对于任意的 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ 及 $\varphi \in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 、 $z \in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ ，变分不等式 (1.2.6) 恒有唯一解. 且其解 $\boldsymbol{y} = y(\cdot,\cdot,\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 连续依赖于 $(\boldsymbol{u},\varphi,z)$.

定理 1.2.2. (**最优控制的存在性**) 若 $(\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}_3)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，则问题 (C) 至少存在一个最优解.

定理 1.2.3. (**最大值原理**) 设 $(\mathbf{H}_1)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立， $(\bar{y},\bar{u})$ 是问题 (C) 的最优对. 则存在 $\psi \in L^2(0,T+r;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega))$ 及 $\zeta \in H^{-1}(Q_T)$ 使得

$$\mathrm{supp}\zeta \subset \{(t,x)\in(0,T)\times\Omega \;\big|\; \bar{y}(t,x)=0\} \tag{1.2.14}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}+\Delta\psi-\int_{-r}^{0}\Delta\psi(t-\theta,x)\mu(d\theta)+f_y(\bar{y},\bar{u})\psi-\zeta=-f_y^0(\bar{y},\bar{u}), \\ \qquad\qquad\qquad in\ H^{-1}((0,T)\times\Omega); \\ \psi(t,x)=0, \qquad a.e.\ (t,x)\in[T,T+r]\times\Omega; \\ \psi(t,x)=0, \qquad in\ (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.15}$$

且对于 *Hamilton* 函数

$$\begin{gathered} H(t,x,y,\psi,u)=f(t,x,y,u)\psi-f^0(t,x,y,u), \\ \forall(t,x,y,\psi,u)\in[0,T]\times\Omega\times R\times R\times U. \end{gathered} \tag{1.2.16}$$

下述最大值条件成立：

$$\begin{gathered} H\big(t,x,\bar{y}(t,x),\psi(t,x),\bar{u}(t,x)\big)=\max_{u\in U}H\big(t,x,\bar{y}(t,x),\psi(t,x),u\big), \\ a.e.\ (t,x)\in(0,T)\times\Omega. \end{gathered} \tag{1.2.17}$$

对于最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式及其控制问题的研究，本文的工作还仅仅是一个开端. 当系统的初值正则性较差时如何定义这类变分不等式解的含义并建立解的适定性理论、当 β 为一般的极大单调算子时系统的初值与单调算子应满足何种形式的相容性条件、以及抽象空间中这类变分不等式的相应理论等问题，都有待于进一步的研究. 就控制问题而言，本文没有考虑终端约束与轨线约束. 有约束的情形以及这类系统的极大极小控制等最优控制问题也都有待于进一步的研究.

§1.3 常用记号

在本论文中， R^m 为通常的 m 维实欧氏空间，其中向量 α 与 γ 的内积和范数

分别表示为

$$\alpha\cdot\gamma \quad 和 \quad |\alpha|=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}.$$

A^τ 为向量或矩阵 A 的转置. Ω 为 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, r 与 T 为给定常数, 且满足 $0<r<T$. 对 $t>0$, 记 $Q_t=(0,t)\times\Omega$, $Q_{-t}=(-t,0)\times\Omega$, $\Sigma_t=(0,t)\times\partial\Omega$. 以 $|E|$ 表示集合 E 的 Lebesgue 测度. 如无特别说明, "可测"或" $a.e.$ "均指 Lebesgue 测度意义下的 "可测" 或 "几乎处处". 以 $\overline{co}E$ 表示集合 E 的闭凸包; 以 χ_E 表示集合 E 的特征函数, 即

$$\chi_E(t,x)=\begin{cases}1, & (t,x)\in E;\\ 0, & (t,x)\overline{\in} E.\end{cases}$$

$\dot{x}$ 与 $\ddot{x}$ 表示函数 x 关于时间变量的导数 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{d^2x}{dt^2}$. 对于 Q_T 上 $a.e.$ 有定义的实值可测函数 $y(\cdot,\cdot)$,

$$\dot{y}(t,x)=y_t(t,x)=\frac{\partial y(t,x)}{\partial t},\quad \frac{\partial y(t,x)}{\partial x_j} \text{ 与 } \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x_j^2}$$

表示函数 $y(\cdot,\cdot)$ 的广义导数 (参见 [69] §1.8) .

$$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_n})^\tau \text{ 与 } \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

分别表示梯度算子与 Laplace 算子. 文中用到的 $L^2(E)$ 、 $L^\infty(E)$ 、 $L^2(a,b;H)$ 与 $W^{1,2}([a,b];H)$ 等函数空间以及 $H^p(\Omega)$ 、 $H_0^p(\Omega)$ 、 $H^{-1}(\Omega)$ 等 Sobolev 空间和各空间上的内积或范数均按照文 [1] 与 [69] 中的含义理解. 以

$$\int_\Omega fg\,dx$$

表示 $H_0^1(\Omega)$ 与 $H^{-1}(\Omega)$ 中元素 f 与 g 的对偶积. 并引用下述记号:

$$L_+^2(\Omega)=\{w\in L^2(\Omega)\big|w(x)\geq 0 \quad a.e.\ \ x\in\Omega\},\qquad L_-^2(\Omega)=-L_+^2(\Omega).$$

$L_\pm^2(Q_T)$ 可类似定义. 显然, $L_\pm^2(\Omega)$ 与 $L_\pm^2(Q_T)$ 分别是 $L^2(\Omega)$ 与 $L^2(Q_T)$ 中的闭凸锥.

第二部分

一个有逐点状态约束的时间最优控制问题的显式解

第二章　一个在逐点状态约束下四阶线性系统的时间最优控制问题的显式解

§2.1　引言

在工程科学、经济学等领域出现的控制问题中，由于问题本身的实际背景或技术条件的限制，往往要求受控系统的状态或控制满足某些约束条件．讨论带有逐点状态约束的最优控制问题，具有非常重要的理论和应用价值．在上世纪六十年代初， Pontryagin 等 ([57],[79]) 讨论了带有逐点状态约束的有限维系统的最优控制．早在 1967 年， A. I. Egorov([24]) 讨论了关于带有逐点状态约束的偏微分方程的最优控制．此后，Mossino([53])、Mackenroth([49])、Casas([14]) 与 Soner([62]) 等对带有更一般的逐点状态约束形式的线性系统的最优控制相继作了研究．从九十年代末起，研究线性、半线性、拟线性椭圆系统、抛物系统、发展系统和变分不等式系统最优控制的文献大批出现，有很多工作都同时考虑了带有逐点状态约束的情形．详见 [2], [3], [5], [10], [13], [16], [15], [19], [21], [18], [35], [37], [47], [55], [56], [58], [59], [67], [70], [73] 以及 [34] 中所列的参考文献．

求解带有逐点状态约束的最优控制与最优轨线相当困难．最优控制与最优轨线的计算一般按照下述思路进行：首先根据最优性条件写出一组关于状态变量与伴随变量的方程，然后求出这组方程的解或验证某组函数是该方程的解，最后验证该解确是最优解．文 [57] 与 [78] 中给出的计算实例大都是这样求解的．

当系统的相轨线有约束时，已有的最优性条件都先验假设最优轨线或最优控制满足某些性质．例如在无穷维系统的情形，最优性条件要求容许轨线的能达集满足某种形式的有限余维数假设 ([37], [46], [67]) ，这些假设在求解具体问题时往往很难验证．而且，由于伴随方程中一般出现一个测度项，这就使得最优性条件中方程组的求解非常困难．再如，对于有限维系统， Pontryagin 等人给出的约束最大值原理虽然不包含测度项 (参见 [57] 第六章定理 22-25)，但却要求最优轨线在约束区域的内部和边界上只有有限次换接，而且要求最优轨线对于控制集具有一定的正规性．正规性的本质是要求最优轨线位于某个“足够丰富”的轨线族内，以便使用适当的变分方法．而在实际问题中最优轨线包含某些“孤立段”的情形时有发生．所以即使对于有限维系统，已有的最优性条件也很难用来求解最优控制与最优轨线．求解带有逐点状态约束的具体最优控制问题，目前还没有一般的有效的方法．

在本章中，我们研究一个控制系统

$$x^{(4)}(t) = u(t), \qquad |u(t)| \le 1,$$

在逐点状态约束

$$|\ddot{x}| \le 1 \tag{2.1}$$

下由初始状态

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0$$

出发，在以最短的时间转移到状态

$$x(T) = h, \quad \dot{x}(T) = \ddot{x}(T) = x^{(3)}(T) = 0 \tag{2.2}$$

的时间最优控制问题，其中 $h > 0$ 给定. 我们求出了最快到达时间 $\bar{T}_h$ 与最优控制 $\bar{u}(\cdot)$ 的显式表达.

我们采用的方法是：首先建立上述时间最优控制问题与固定时间区间上路程最大问题的可解性及最优控制之间的关系；然后证明当时区较短时后一问题实际上是没有状态约束的问题，并通过对最优轨线性质的具体分析求出后一问题的最优解；最后求出原问题的最优控制. 从最后的结果可以看到：尽管该问题的最优轨线最多换接有限次，但它含有几个边界段，且每个边界段都不满足文 [57] 中约束最大值原理的正规性假设.

本章的后续内容安排如下：第二节给出问题的控制形式与初步分析，指出如果该问题的最优轨线含有边界段，则其边界段一定不满足文 [57] 中约束最大值原理的正规性假设. 第三节给出问题的两次转化及诸问题之间的联系. 第四节对转化后的问题直接计算其最优控制. 最后一节求出原问题的最优解.

§2.2　问题的状态空间提法

我们研究的控制系统为

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = u(t) \qquad a.e. t \in (0, +\infty), \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

取控制域为 $U = [-1, 1]$，控制函数类 $\mathcal{U}$ 为 U 值可测函数的全体. 对于任意的 $T > 0$，记

$$\mathcal{U}(T) = \{\ u(\cdot)\ \big|\ u\text{是}(0,T) \to [-1,1]\text{的可测映射}\ \}.$$

显然，对于任意的 $u\in\mathcal{U}(T)$，系统 (2.3) 在 $[0,T]$ 上恒有唯一解 $x_u(\cdot)$，称其为控制 u 确定的 轨线．记 $[0,T]$ 上全部轨线所成的集合为

$$\mathcal{Y}(T)=\{\ x_u(\cdot)\ \Big|\ u(\cdot)\in\mathcal{U}(T)\ \}. \tag{2.4}$$

对于给定的 $h>0$，记

$$\mathcal{Y}_{ad}=\{\ x(\cdot)\mid \text{存在 } T>0,\ \text{使得 } x(\cdot)\in\mathcal{Y}(T),\ \text{且 (2.1) 及 (2.2) 成立}\ \}. \tag{2.5}$$

$$\mathcal{U}_{ad}=\{\ u(\cdot)\mid x_u(\cdot)\in\mathcal{Y}_{ad}\ \}. \tag{2.6}$$

性能指标泛函为

$$T(u)=\inf\{\ T>0\mid x_u(\cdot)\in\mathcal{Y}(T),\ \text{且 (2.1) 与 (2.2) 成立}\ \},\quad \forall u\in\mathcal{U}_{ad}. \tag{2.7}$$

则上述时间最优控制问题即是：

问题 (P)：给定 $h>0$, 寻求 $\bar{u}\in\mathcal{U}_{ad}$ 使得

$$T(\bar{u})=\bar{T}_h\overset{\text{def}}{=}\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}T(u)\ . \tag{2.8}$$

当这样的 $\bar{u}$ 存在时，称其为问题 (P) 的 最优控制，相应的 $\bar{x}(\cdot)=x_{\bar{u}}(\cdot)$ 称为问题 (P) 的 最优轨线，分别称 $\mathcal{U}_{ad}$ 与 $\mathcal{Y}_{ad}$ 中的函数为问题 (P) 的 容许控制 与 容许轨线．

若取 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^\tau=(x,\dot{x},\ddot{x},x^{(3)})^\tau$，则系统 (2.3) 可写成如下的一阶线性系统形式：

$$\begin{cases}\dot{Y}(t)=AY(t)+Bu(t), & t>0,\\ Y(0)=0.\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

轨线约束 (2.1) 可写成

$$g(Y(t))=[y_3(t)]^2-1\le 0,\quad \forall t\in[0,T].$$

从这种形式出发，我们可说明文 [57] 中带有逐点状态约束的最大值原理不能用于求解问题 (P)．为此，我们先简要介绍约束最大值原理的主要内容和相关概念 (详见文 [57] 第六章) 如下.

考虑以 R^n 为状态空间的控制系统

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,u), \qquad a.e.t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

在终端约束与逐点状态约束

$$y(t_f) = y_1; \qquad g(y(t)) \le 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

之下使得指标泛函

$$J(y,u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(y,u)dt$$

达到最小的最优控制问题 $(\bar{P})$．其终端时刻 t_f 未给定．控制函数类为 U 值可测函数， U 为 R^m 中有界闭区域.

对于问题 $(\bar{P})$ 的任一条轨线 $y(\cdot)$，若在 $[t_1,t_2]$ 上恒有 $g(y(t))<0$，则称 $y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ 为 $y(\cdot)$ 的 *内部段*；若在 $[t_1,t_2]$ 上恒有 $g(y(t))=0$，则称 $y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ 为 $y(\cdot)$ 的 *边界段*；若 $g(y(t_1))=0$，且在 t_1 的某个单侧邻域中 (或两侧) 恒有 $g(y(t))<0$，则称 t_1 为 $y(\cdot)$ 的 *换接点*．构造数值函数

$$p(y,u) = f(y,u) \cdot \nabla g(y).$$

若在点 (y,u) 处有

$$p = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial u} \ne 0,$$

则称 y 关于 u 是 *正规的*．记

$$w(y) = \{\ u \in U \mid y\text{关于}u\text{是正规的}\ \}.$$

若 $y(\cdot)$ 的边界段 $y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ 满足

$$u(t) \in w(y(t)), \qquad \forall t \in [t_1, t_2],$$

则称该边界段是正规的.

边界段的最大值原理([57] 定理 6.22) 设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题 $(\bar{P})$ 的最优对，且 $\bar{y}(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ 是最优轨线 $\bar{y}(\cdot)$ 的正规边界段，则存在常数 ψ^0 、数值函数 $\lambda(\cdot)$ 和 R^n 值函数 $\psi(\cdot)$ 满足 [1]

$$\psi^0 \le 0, \qquad (\psi^0, \psi(\cdot)) \ne 0;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda(t)\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad a.e. t \in [t_1, t_2];$$

$$H(\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t)) = \max_{u\in w(\bar{y}(t))} H(\bar{y}(t),\psi(t),u), \qquad \forall t \in [t_1,t_2].$$

其中，
$$H(y,\psi,u) = \psi\cdot f(y,u) + \psi^0 f^0(y,u).$$
□

约束最大值原理([57] 定理 6.26) 设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题 $(\bar{P})$ 的最优对. 若 $\bar{y}(\cdot)$ 只有有限个换接点，且所有的边界段都是正规的，则其每个内部段满足通常的最大值原理，每个边界段满足边界段的最大值原理，每个换接点 τ 满足下述的跳跃条件：

$$\psi(\tau^+) = \psi(\tau^-) + \mu\nabla g(y(\tau)) \qquad \text{或} \qquad \psi(\tau^-) + \mu\nabla g(y(\tau)) = 0 \ \text{而}\ \mu \ne 0.$$

其中 μ 是实数. □

对于问题 (P) 而言，当其最优轨线的某段位于边界 $g(Y)=0$ 上时，由于

$$p(Y,u) = < \frac{\partial g(Y)}{\partial Y}, AY+Bu > = 2y_3y_4$$

不直接依赖于 u ，从而

$$\frac{\partial p(Y,u)}{\partial u} \equiv 0,$$

即该段轨线上的每点关于控制域 $U=[-1,1]$ 中的任一点都是非正规的，故不满足约束最大值原理所要求的正规性条件.

为了求解问题 (P) ，我们首先将该问题转化为在同样的逐点状态约束条件下终端时间固定的最大路程问题 ($\mathrm{W_T}$) ，然后进一步将后者转化为终端约束更简单的同类问题 ($\mathrm{R_T}$) . 求出问题 ($\mathrm{R_T}$) 的最优控制之后，根据诸问题间的对应关系依次求问题 ($\mathrm{W_T}$) 与问题 (P) 的最优解. 文中用到的基本理论参见 [76] .

§2.3 问题 (P) 的转化

根据运动学常识我们知道：在相同的条件下，“以最短时间走完规定路程”与“在限定时间内走得最远”是描述同一概念“最快”的两种不同方式. 基于这一思

[1] 这里，我们略去了有关 $\lambda(\cdot)$ 的性质.

想，我们可将“最短时间问题”(P) 转化为下述的“最大路程问题”$(\mathrm{W_T})$. 记

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(T)=\{\ x(\cdot)\in\mathcal{Y}(T)\ |\ \dot{x}(T)=\ddot{x}(T)=x^{(3)}(T)=0\ ,\ \text{且 (2.1) 成立}\ \}. \tag{2.9}$$

相应的容许控制类记为

$$\tilde{\mathcal{U}}_{ad}(T)=\{\ u(\cdot)\in\mathcal{U}(T)\ |\ x_u(\cdot)\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(T)\ \}. \tag{2.10}$$

问题 $(\mathbf{W_T})$：给定 $T>0$, 寻求 $\bar{u}\in\tilde{\mathcal{U}}_{ad}(T)$ 使得

$$x_{\bar{u}}(T)=\bar{s}(T)\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{u\in\tilde{\mathcal{U}}_{ad}(T)}x_u(T). \tag{2.11}$$

对于任意的 $T>0$，由于常值控制 $u(t)\equiv 0$ 对应于 $x(\cdot)=0\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$，故有

$$\bar{s}(T)\geq 0.$$

另一方面，根据三阶 Taylor 公式，系统 (2.3) 的解为

$$x_u(t)=\frac{1}{6}\int_0^t(t-s)^3u(s)ds. \tag{2.12}$$

故对于任意的 $u\in\mathcal{U}(T)$，恒有

$$|x_u(T)|\leq\frac{1}{6}\int_0^T(T-s)^3ds=\frac{T^4}{24}.$$

从而，

$$0\leq\bar{s}(T)\leq\frac{T^4}{24}.$$

即问题 $(\mathrm{W_T})$ 的最优值 $\bar{s}(T)$ 定义 $(0,\infty)$ 上的一非负函数.

问题 (P) 与问题 $(\mathrm{W_T})$ 可以通过其最优值的对应相联系. 我们有下述结论:

引理 2.3.1. *若问题 $(\mathrm{W_T})$ 对于任意的 $T>0$ 存在最优解，且其最优值 $\bar{s}(T)$ 是 $T\in(0,\infty)$ 的严格单增连续函数，并满足*

$$\lim_{T\to 0^+}\bar{s}(T)=0,\qquad \lim_{T\to+\infty}\bar{s}(T)=+\infty. \tag{2.13}$$

则问题 (P) 对于任意的 $h>0$ 存在最优解，其最优时间 $\bar{T}_h$ 满足

$$\bar{s}(\bar{T}_h)=h. \tag{2.14}$$

且其最优控制与最优轨线 恰为 *问题 $(\mathrm{W_{\bar{T}_h}})$ 的最优控制与最优轨线.*

证明. 对于任意的 $h>0$，由 $\bar{s}(T)$ 的单调连续性及 (2.13) 可知，有唯一的 $\hat{T}_h>0$ 使得

$$\bar{s}(\hat{T}_h)=h.$$

设 $\tilde{u}(\cdot)$ 为问题 $(W_{\hat{T}_h})$ 的最优控制，并记 $\tilde{x}(\cdot)=x_{\tilde{u}}(\cdot)$．由

$$\tilde{u}\in\tilde{\mathcal{U}}_{ad}(\hat{T}_h)\qquad 及\qquad \tilde{x}(\hat{T}_h)=h$$

可知 $\tilde{u}\in\mathcal{U}_{ad}$．故只要证明 $\bar{T}_h=\hat{T}_h$，则 (2.14) 式成立．且 $(\tilde{u},\tilde{x})$ 也是问题 (P) 的最优对.

由 $\tilde{u}\in\mathcal{U}_{ad}$ 立即得知 $\bar{T}_h\le\hat{T}_h$．若 $\bar{T}_h<\hat{T}_h$，则存在 $T\in[\bar{T}_h,\hat{T}_h)$ 及 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}$ 使得 $x_u(T)=h$．记 $\hat{t}=\hat{T}_h-T$，设问题 $(W_{\hat{t}})$ 的最优控制为 $v(\cdot)$．取

$$\hat{v}(t)=\begin{cases}u(t), & a.e.t\in(0,T);\\ v(t-T), & a.e.t\in(T,\hat{T}_h).\end{cases}$$

则 $\hat{v}\in\mathcal{U}(\hat{T}_h)$，且容易验证

$$x_{\hat{v}}(t)=\begin{cases}x_u(t), & t\in[0,T];\\ h+x_v(t-T), & t\in(T,\hat{T}_h).\end{cases}$$

$$x_{\hat{v}}^{(k)}(t)=\begin{cases}x_u^{(k)}(t), & t\in[0,T];\\ x_v^{(k)}(t-T), & t\in(T,\hat{T}_h].\end{cases}\qquad k=1,\ 2,\ 3.$$

从而 $x_{\hat{v}}(\cdot)\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(\hat{T}_h)$, $\hat{v}(\cdot)\in\tilde{\mathcal{U}}_{ad}(\hat{T}_h)$．且有

$$x_{\hat{v}}(\hat{T}_h)=h+x_v(\hat{t})=\bar{s}(\hat{T}_h)+\bar{s}(\hat{t})>\bar{s}(\hat{T}_h).$$

这显然与 $\bar{s}(\hat{T}_h)$ 的定义矛盾．从而 $\bar{T}_h=\hat{T}_h$ 成立.

最后，若 $u(\cdot)$ 为问题 (P) 的最优控制，则 $T(u)=\bar{T}_h$．从而 $u(\cdot)\in\tilde{\mathcal{U}}_{ad}(\bar{T}_h)$．且由 (2.14) 可知

$$x_u(\bar{T}_h)=h=\bar{s}(\bar{T}_h).$$

故 $u(\cdot)$ 也是问题 $(W_{\bar{T}_h})$ 的最优控制. □

对于问题 $(\mathrm{W_T})$，我们可根据其两端点约束的对称性将其转化为终端约束更简单的下述问题 $(\mathrm{R_T})$ 求解．记

$$\hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)=\{\ x(\cdot)\in\mathcal{Y}(T)\mid\ddot{x}(T)=0\ ,\ 且\ (2.1)\ 成立\ \}.$$

$$\hat{\mathcal{U}}_{ad}(T) = \{\ u(\cdot) \in \mathcal{U}(T) \mid x_u(\cdot) \in \hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)\ \}.$$

问题 ($\mathrm{R_T}$)：给定 $T > 0$ ，寻求 $\hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}_{ad}(T)$ 使得

$$x_{\hat{u}}(T) = \bar{r}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{u \in \hat{\mathcal{U}}_{ad}(T)} x_u(T).$$

问题 ($\mathrm{W_{2T}}$) 与问题 ($\mathrm{R_T}$) 有下述对应关系.

引理 2.3.2. 对于任意的 $T > 0$ ，恒有

$$\bar{s}(2T) = 2\bar{r}(T). \tag{2.15}$$

且问题 ($\mathrm{W_{2T}}$) 有解等价于问题 ($\mathrm{R_T}$) 有解.

证明. 对于任意的 $y(\cdot) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(2T)$ ，令

$$(\pi y)(t) = \frac{1}{2}\big[y(2T) + y(t) - y(2T - t)\big], \quad 0 \le t \le T. \tag{2.16}$$

我们首先证明 π 是 $\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(2T) \to \hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 的满映射. 事实上，若记 $(\pi y)(\cdot) = x(\cdot)$ ，则

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2}\big[\ddot{y}(t) - \ddot{y}(2T - t)\big], \qquad t \in [0, T].$$

$$x^{(4)}(t) = \frac{1}{2}\big[y^{(4)}(t) - y^{(4)}(2T - t)\big], \quad a.e.\, t \in [0, T].$$

故有

$$\ddot{x}(T) = 0; \ \ |\ddot{x}(t)| \le 1, \quad t \in [0, T]; \quad x^{(4)}(\cdot) \in \mathcal{U}(T).$$

又 $x^{(k)}(0) = 0$, ($k = 0, 1, 2, 3$) 显然成立，故 $x(\cdot) \in \hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$. 另一方面，对于任意的 $x(\cdot) \in \hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ ，取

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t \le T; \\ 2x(T) - x(2T - t), & T < t \le 2T. \end{cases} \tag{2.17}$$

则显然 $y(\cdot)$ 在 $t = T$ 点处连续且左可导，其左导数即为 $\dot{x}(T)$. 又由罗比达法则及 $\dot{x}(\cdot)$ 的连续性可得

$$\lim_{t \to T^+} \frac{y(t) - y(T)}{t - T} = \lim_{t \to T^+} \frac{x(T) - x(2T - t)}{t - T} = \lim_{t \to T^+} \dot{x}(2T - t) = \dot{x}(T).$$

即 $y(\cdot)$ 在 $t=T$ 点处右可导且右导数也是 $\dot{x}(T)$. 故 $\dot{y}(\cdot)$ 在 $t=T$ 点处连续从而在 $[0,2T]$ 上连续. 同理可证 $\ddot{y}(\cdot)$ 与 $y^{(3)}(\cdot)$ 在 $[0,2T]$ 上连续, $y^{(3)}(\cdot)$ 在 $[0,2T]$ 上几乎处处可导，且

$$y^{(k)}(t)=\begin{cases} x^{(k)}(t), & 0\le t\le T; \\ (-1)^{k-1}x^{(k)}(2T-t), & T<t\le 2T. \end{cases} \qquad k=1,\ 2,\ 3.$$

由 $x(\cdot)\in\hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 可得 $y^{(4)}(\cdot)\in\mathcal{U}(T)$ ，且

$$y^{(k)}(2T)=0,\quad k=1,\ 2,\ 3;\qquad |\ddot{y}(t)|\le 1,\quad t\in[0,2T].$$

即 $y(\cdot)\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(2T)$. 由 (2.16) 容易验证 $(\pi y)(\cdot)=x(\cdot)$ ，故 π 是满映射.

现在我们证明 (2.15) 式. 对于任意的 $y(\cdot)\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(2T)$ ，由 (2.16) 及 $\bar{r}(T)$ 定义立即得到

$$y(2T)=2(\pi y)(T)\le 2\bar{r}(T).$$

对 $y(\cdot)\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(2T)$ 取上确界则得

$$\bar{s}(2T)\le 2\bar{r}(T).$$

另一方面，对于任意的 $x(\cdot)\in\hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 及 (2.17) 确定的 $y(\cdot)\in\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(2T)$ ，由

$$x(T)=\frac{1}{2}y(2T)\le\frac{1}{2}\bar{s}(2T)$$

取上确界立即得到

$$\bar{r}(T)\le\frac{1}{2}\bar{s}(2T).$$

从而 $\bar{s}(2T)=2\bar{r}(T)$.

最后，我们证明问题 $(\mathrm{W_{2T}})$ 与问题 $(\mathrm{R_T})$ 的可解性等价. 事实上，若 $\tilde{x}(\cdot)$ 为问题 $(\mathrm{W_{2T}})$ 的最优轨线，则由 $(\pi\tilde{x})(\cdot)\in\hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 及

$$(\pi\tilde{x})(T)=\frac{1}{2}\tilde{x}(2T)=\frac{1}{2}\bar{s}(2T)=\bar{r}(T)$$

立即得知 $(\pi\tilde{x})(\cdot)$ 为问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优轨线. 同理，若 $\hat{x}(\cdot)$ 为问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优轨线，则由 (2.17) 定义的 $\hat{y}$ 为问题 $(\mathrm{W_{2T}})$ 的最优轨线. □

§2.4 问题 ($\mathrm{R_T}$) 的最优控制

对于任意的 $u \in \mathcal{U}(T)$ ，由 Taylor 公式可得

$$\ddot{x}_u(t) = \int_0^t (t-s)u(s)ds, \quad |\ddot{x}_u(t)| \le \int_0^t (t-s)ds = \frac{t^2}{2}.$$

故当 T 较小时, 系统 (2.3) 的任一轨线均满足 (2.1) . 从而, 只满足终端条件 $\ddot{x}_u(T) = 0$ 且使 $x_u(T)$ 最大的 $x_u(\cdot)$ 必然也是问题 ($\mathrm{R_T}$) 的最优轨线. 即只要求出下述问题的最优解即可.

问题 ($\hat{\mathrm{R}}_\mathrm{T}$) : 给定 $T > 0$, 寻求 $\hat{v} \in \mathcal{U}(T)$ 使得

$$x_{\hat{v}}(T) = \hat{r}(T) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{\, x_u(T) \mid u \in \mathcal{U}(T),\ \ddot{x}_u(T) = 0 \,\}.$$

上述问题 ($\hat{\mathrm{R}}_\mathrm{T}$) 的最优控制由下述定理给出.

定理 2.4.1. 对于任意的 $T > 0$ ，问题 ($\hat{R}_T$) 恒有唯一解. 其最优控制为

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})T; \\ -1, & (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})T < t < T. \end{cases} \tag{2.18}$$

最大位移为

$$\hat{r}(T) = \frac{T^4}{48} \quad . \tag{2.19}$$

且 $x_{\hat{v}}(\cdot)$ 是逐点最优的. 即对于满足 $\ddot{x}_u(T) = 0$ 的任意 $u(\cdot) \in \mathcal{U}(T)$ ，恒有

$$x_u(t) \le x_{\hat{v}}(t), \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{2.20}$$

证明. 对于任意的 $u(\cdot) \in \mathcal{U}(T)$ ，记 $x(\cdot) = x_u(\cdot)$. 对 $x(\cdot)$ 及其各阶导数分别在 $t = 0$ 与 $t = T$ 点处作 Taylor 展开, 则对于 $0 \le t \le T$ 有

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3 u(s)ds, & \dot{x}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 u(s)ds, \\ \ddot{x}(t) = \int_0^t (t-s)u(s)ds, & x^{(3)}(t) = \int_0^t u(s)ds. \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} x(t) = x(T) + (t-T)\dot{x}(T) + \frac{1}{2}(t-T)^2\ddot{x}(T) + \frac{1}{6}(t-T)^3 x^{(3)}(T) + \frac{1}{6}\int_T^t (t-s)^3 u(s)ds, \\ \dot{x}(t) = \dot{x}(T) + (t-T)\ddot{x}(T) + \frac{1}{2}(t-T)^2 x^{(3)}(T) + \frac{1}{2}\int_T^t (t-s)^2 u(s)ds, \\ \ddot{x}(t) = \ddot{x}(T) + (t-T)x^{(3)}(T) + \int_T^t (t-s)u(s)ds, \\ x^{(3)}(t) = x^{(3)}(T) + \int_T^t u(s)ds. \end{cases}$$

比较以上两组展开式可得：对于任意的 $t\in[0,T]$，

$$\begin{cases} x(T)=(T-t)\dot{x}(T)-\frac{1}{2}(T-t)^2\ddot{x}(T)+\frac{1}{6}(T-t)^3x^{(3)}(T)+\frac{1}{6}\int_0^T(t-s)^3u(s)ds, \\ \dot{x}(T)=(T-t)\ddot{x}(T)-\frac{1}{2}(T-t)^2x^{(3)}(T)+\frac{1}{2}\int_0^T(t-s)^2u(s)ds, \\ \ddot{x}(T)=(T-t)x^{(3)}(T)+\int_0^T(t-s)u(s)ds. \end{cases} \tag{2.22}$$

若 $\ddot{x}(T)=0$，则以此及 (2.22) 中后两式代入第一式可得

$$x(T)=\frac{1}{6}\int_0^T(t-s)(T-s)(2T-t-s)u(s)ds, \qquad \forall t\in[0,T]. \tag{2.23}$$

故由 $|u(s)|\le 1$ 得到

$$x(T)\le|x(T)|\le\frac{1}{6}\int_0^T|t-s|(T-s)(2T-t-s)ds. \tag{2.24}$$

且对于任意的 $t\in[0,T]$，由上两式可知：

$$\text{(2.24) 中等号成立} \Leftrightarrow u(s)=\begin{cases} 1, & a.e. s\in(0,t); \\ -1, & a.e. s\in(t,T). \end{cases} \tag{2.25}$$

对于由 (2.25) 给出的 $u(\cdot)\in\mathcal{U}(T)$，我们有

$$\ddot{x}_u(s)=\begin{cases} \frac{s^2}{2}, & 0\le s\le t, \\ t^2-\frac{1}{2}(s-2t)^2, & t\le s\le T. \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\ddot{x}_u(T)=0\Leftrightarrow t=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})T. \tag{2.27}$$

特别地取 $t=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})T$，则由 (2.24) 立即得知由 (2.18) 定义的 $\hat{v}(\cdot)$ 为问题 $(\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{T}})$ 的最优控制. 且由 (2.25) 与 (2.27) 可知 $\hat{v}(\cdot)$ 是问题 $(\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{T}})$ 唯一的最优控制.

最后，我们证明最优轨线 $x_{\hat{v}}(\cdot)$ 的逐点最优性. 对于满足 $\ddot{x}_u(T)=0$ 的任意 $u(\cdot)\in\mathcal{U}(T)$，记

$$t_0=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})T, \quad y(t)=\ddot{x}_u(t)-\ddot{x}_{\hat{v}}(t).$$

由 $|u|\le 1$ 及

$$y(t)=\int_0^t(t-s)[u(s)-\hat{v}(t)]ds, \quad \forall t\in[0,T].$$

得知

$$y(t)\le 0 \tag{2.28}$$

对于 $0 \le t \le t_0$ 成立. 若有某 $\tau \in (t_0, T)$ 使得 $y(\tau) > 0$，则由 Langrange 中值定理，存在 $\xi \in (t_0, \tau)$ 及 $\eta \in (\tau, T)$ 使得

$$\dot{y}(\xi) = \frac{y(\tau) - y(t_0)}{\tau - t_0} \ge \frac{y(\tau)}{\tau - t_0} > 0, \quad \dot{y}(\eta) = \frac{y(T) - y(\tau)}{T - \tau} = \frac{-y(\tau)}{T - \tau} < 0.$$

从而

$$\dot{y}(\eta) - \dot{y}(\xi) < 0.$$

另一方面，在 (t_0, T) 内 $\hat{v}(t) \equiv -1$，故有

$$\dot{y}(\eta) - \dot{y}(\xi) = \int_\xi^\eta \ddot{y}(s) ds = \int_\xi^\eta [u(s) + 1] ds \ge 0.$$

这一矛盾说明 (2.28) 式在 (t_0, T) 内恒成立. 故 (2.28) 式在 $[0, T]$ 上恒成立. 从而,

$$x_u(t) - x_{\hat{v}}(t) = \int_0^t (t - s) y(s) ds \le 0, \qquad \forall t \in [0, T].$$

□

由 (2.26) 可知

$$\forall t \in [0, T], \ \ 0 \le \ddot{x}_{\hat{v}}(t) \le \ddot{x}_{\hat{v}}(2t_0) = t_0^2 = (\frac{3}{2} - \sqrt{2}) T^2.$$

故由定理 2.4.1 及

$$(\frac{3}{2} - \sqrt{2}) T^2 \le 1 \Leftrightarrow T \le 2 + \sqrt{2}$$

立即得到

推论 2.4.2. 当 $0 < T \le 2 + \sqrt{2}$ 时，由 (2.18) 给出的 $\hat{v}(\cdot)$ 也是问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优控制. □

当 $T > 2 + \sqrt{2}$ 时，我们估计问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优轨线含有“边界段”. 考虑到其“内部段”与“边界段”应充分光滑地衔接，而在边界段上 $\ddot{x} \equiv \pm 1$, $x^{(3)} \equiv 0$. 故我们以这样的思想构造问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优轨线：将由 (2.18) 及 $t_0^2 = (\frac{3}{2} - \sqrt{2}) T^2 = 1$ 确定的轨线在 $2t_0$ 点处 (该点满足 $x^{(3)} = 0$) 分割为左右两段，在其中插入由 $\ddot{x} \equiv \pm 1$ 确定的一段轨线 (接合点处适当选取初值使得三段轨线恰好衔接). 然后证明如此构造的轨线确是问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优轨线.

定理 2.4.3. 对于任意的 $T > 0$，问题 $(\mathrm{R_T})$ 恒有唯一解. 其最优值为

$$\bar{r}(T) = \begin{cases} \frac{T^4}{48}, & 0 < T \le 2 + \sqrt{2}\,; \\ \frac{T^2}{2} - T + \frac{5}{12}, & T > 2 + \sqrt{2}\,. \end{cases} \tag{2.29}$$

当 $0<T\le 2+\sqrt{2}$ 时，其最优控制 $\hat{u}(\cdot)=\hat{v}(\cdot)$ 由 (2.18) 给出；当 $T>2+\sqrt{2}$ 时其最优控制为

$$\hat{u}(t)=\begin{cases}1, & t\in(0,1);\\ -1, & t\in(1,2)\cup(t_1,T);\\ 0, & t\in(2,t_1).\end{cases}\qquad \text{其中}\ \ t_1=T-\sqrt{2}\,. \tag{2.30}$$

且最优轨线 $x_{\hat{u}}(\cdot)$ 在 $\hat{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 中是逐点最优的．即

$$x_u(t)\le x_{\hat{u}}(t),\qquad \forall u(\cdot)\in\hat{\mathcal{U}}_{ad}(T),\quad \forall t\in[0,T]. \tag{2.31}$$

证明. 由推论 2.4.2 可知，只需证明当 $T>2+\sqrt{2}$ 时结论成立．

首先，由 (2.21) 及 (2.30) 容易求得

$$x_{\hat{u}}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^4}{24}, & t\in[0,1];\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{(t-1)^2}{2}-\dfrac{(t-2)^4}{24}, & t\in(1,2];\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{(t-1)^2}{2}, & t\in(2,t_1];\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{(t-1)^2}{2}-\dfrac{(t-t_1)^4}{24}, & t\in(1,2].\end{cases} \tag{2.32}$$

$$\ddot{x}_{\hat{u}}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2}, & t\in[0,1];\\ 1-\dfrac{(t-2)^2}{2}, & t\in(1,2];\\ 1, & t\in(2,t_1];\\ 1-\dfrac{(t-t_1)^2}{2}, & t\in(1,2].\end{cases} \tag{2.33}$$

由此容易验证

$$\forall t\in[0,T],\quad 0\le\ddot{x}_{\hat{u}}(t)\le 1;\qquad \ddot{x}_{\hat{u}}(T)=0,\qquad x_{\hat{u}}(T)=\frac{T^2}{2}-T+\frac{5}{12}.$$

即由 (2.30) 定义的 $\hat{u}\in\hat{\mathcal{U}}_{ad}(T)$．

其次，若能证明

$$\ddot{x}_u(t)\le\ddot{x}_{\hat{u}}(t),\qquad \forall u(\cdot)\in\hat{\mathcal{U}}_{ad}(T),\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{2.34}$$

则

$$x_u(t)=\int_0^t (t-s)\ddot{x}_u(s)ds \le \int_0^t (t-s)\ddot{x}_{\hat{u}}(s)ds = x_{\hat{u}}(t), \qquad \forall u(\cdot)\in \hat{\mathcal{U}}_{ad}(T),\ \ \forall t\in[0,T].$$

从而， $x_{\hat{u}}(\cdot)$ 的逐点最优性得证. 且有

$$\bar{r}(T)=x_{\hat{u}}(T)=\frac{T^2}{2}-T+\frac{5}{12}.$$

即 (2.30) 成立. 下面我们证明 (2.34) 成立.

对于任意的 $u(\cdot)\in\hat{\mathcal{U}}_{ad}(T)$ ，记 $y(t)=\ddot{x}_u(t)-\ddot{x}_{\hat{u}}(t)$. 则

$$\ddot{y}(t)=u(t)-u_{\hat{u}}(t), \qquad a.e. t\in(0,T);$$

$$y(0)=\dot{y}(0)=y(T)=0; \qquad y(2)=x_u(2)-1\le 0.$$

当 $0\le t\le 1$ 时,

$$y(t)=\int_0^t (t-s)[u(s)-1]ds\le 0.$$

即 (2.34) 对于 $0\le t\le 1$ 成立. 对于 $2\le t\le t_1$ ， (2.34) 显然成立. 套用定理 2.4.1 证明中所用的反证法可以证明 (2.34) 对于 $1<t<2$ 及 $t_1<t\le T$ 亦成立.

最后, 我们证明最优控制的唯一性. 当 $0<T\le 2+\sqrt{2}$ 时, 由定理 2.4.1 知唯一性成立. 当 $T>2+\sqrt{2}$ 时, 若 $u(\cdot)\in\hat{\mathcal{U}}_{ad}(T)$ 也是最优控制, 则

$$\int_0^T (T-s)[\ddot{x}_u(s)-\ddot{x}_{\hat{u}}(s)]ds = x_u(T)-x_{\hat{u}}(T)=0.$$

注意到 (2.34) ，我们得到

$$\ddot{x}_u(s)-\ddot{x}_{\hat{u}}(s)=0, \quad a.e. s\in(0,T).$$

从而, 由其连续性得知上式对 $s\in[0,T]$ 逐点成立. 从而

$$u(s)=x_u^{(4)}(s)=x_{\hat{u}}^{(4)}(s)=\hat{u}(s), \quad a.e. s\in(0,T).$$

唯一性得证. □

§2.5 问题 (P) 的最优控制

根据引理 2.3.1 、引理 2.3.2 及定理 2.4.3, 我们首先给出问题 ($\mathrm{W_T}$) 的最优控制.

定理 2.5.1. 对于任意的 $T > 0$, 问题 $(\mathrm{W_T})$ 恒有唯一解. 其最优值为

$$\bar{s}(T) = \begin{cases} \dfrac{T^4}{3 \cdot 2^7}, & 0 < T \leq 4 + 2\sqrt{2}; \\ \dfrac{T^2}{4} - T + \dfrac{5}{6}, & T > 4 + 2\sqrt{2}. \end{cases} \tag{2.35}$$

当 $0 < T \leq 4 + 2\sqrt{2}$ 时, 其最优控制为

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in (0, \dfrac{(2-\sqrt{2})T}{4}) \cup (\dfrac{T}{2}, \dfrac{(2+\sqrt{2})T}{4}); \\ -1, & t \in (\dfrac{(2-\sqrt{2})T}{4}, \dfrac{T}{2}) \cup (\dfrac{(2+\sqrt{2})T}{4}, T). \end{cases} \tag{2.36}$$

当 $T > 4 + 2\sqrt{2}$ 时, 其最优控制为

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in (0,1) \cup (\dfrac{T}{2}, \dfrac{T+2\sqrt{2}}{2}) \cup (T-2, T-1); \\ 0, & t \in (2, \dfrac{T-2\sqrt{2}}{2}) \cup (\dfrac{T+2\sqrt{2}}{2}, T-2); \\ -1, & t \in (1,2) \cup (\dfrac{T-2\sqrt{2}}{2}, \dfrac{T}{2}) \cup (T-1, T). \end{cases} \tag{2.37}$$

且最优轨线 $x_{\tilde{u}}(\cdot)$ 在 $\tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 中是逐点最优的. 即

$$x_u(t) \leq x(t) \qquad (\forall x(\cdot) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(T), \ \ \forall t \in [0,T]). \tag{2.38}$$

证明. 在 (2.18) 与 (2.30) 中以 $\frac{T}{2}$ 取代 T, 则 $\hat{u}$ 为问题 $(\mathrm{R_{T/2}})$ 的最优控制. 易见由 (2.36) 与 (2.37) 定义的 $\tilde{u}$ 满足

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2}; \\ -\hat{u}(T-t), & \dfrac{T}{2} < t \leq T. \end{cases} \tag{2.39}$$

$$x_{\tilde{u}}(t) = \begin{cases} x_{\hat{u}}(t), & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2}; \\ 2x_{\hat{u}}(\dfrac{T}{2}) - x_{\hat{u}}(T-t), & \dfrac{T}{2} < t \leq T. \end{cases} \tag{2.40}$$

由引理 2.3.2 的证明过程可知 $\tilde{u}$ 为问题 $(\mathrm{R_T})$ 的最优控制. 且由 (2.15) 与 (2.29) 可立即得到 (2.35) .

下面证明最优控制的唯一性. 若 $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{ad}(T)$ 也是最优控制, 则由 (2.15) 与 (2.16) 可得

$$(\pi x_u)(\frac{T}{2}) = \frac{1}{2}x_u(T) = \frac{1}{2}\bar{s}(T) = \bar{r}(\frac{T}{2}).$$

故 πx_u 也是问题 $(\mathrm{R}_{\mathrm{T}/2})$ 的最优轨线. 由问题 $(\mathrm{R}_{\mathrm{T}/2})$ 最优控制的唯一性知其最优轨线亦唯一. 故

$$\pi x_u = x_{\hat{u}}.$$

从而, 由 (2.16) 、 (2.36) 、 (2.37) 及 (2.39) 与 (2.39) 可得

$$x_u(t) - x_u(T-t) = 2(\pi x_u)(t) - x_u(T) = 2x_{\hat{u}}(t) - \bar{s}(T), \qquad \forall t \in [0, \frac{T}{2}].$$

由于

$$|\ddot{x}_u(t)| \le 1, \quad t \in [0,T]; \qquad |u(t)| \le 1, \quad a.e. t \in (0,T),$$

故在 $\{\ t \in [0, \frac{T}{2}] \mid \hat{u}(t) = \pm 1\ \}$ 的各个区间上, 由

$$u(t) - u(T-t) = 2x_{\hat{u}}^{(4)}(t) = 2\hat{u}(t) = \pm 2, \qquad a.e. t \in [0, \frac{T}{2}]$$

立即得到

$$u(t) = -u(T-t) = \pm 1 = \hat{u}(t), \quad (a.e.);$$

在 $\{\ t \in [0, \frac{T}{2}] \mid \hat{u}(t) = 0\ \}$ 的各个区间上, 由

$$\ddot{x}_u(t) - \ddot{x}_u(T-t) = 2\ddot{x}_{\hat{u}}(t) = 2\ddot{x}_{\hat{u}}(t) = \pm 2,$$

立即得到

$$\ddot{x}_u(t) = -\ddot{x}_u(T-t) = \pm 1.$$

从而,

$$u(t) = -u(T-t) = 0 = \hat{u}(t) \quad (a.e.).$$

在区间 $(\frac{T}{2}, T)$ 上, 我们有

$$u(t) = -u(T-t) = -\hat{u}(T-t) = \hat{u}(t) \quad (a.e.).$$

故 $u(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$ 成立. 唯一性获证.

逐点最优性 (2.38) 的证明可套用定理 2.4.1 证明中所用的方法完成, 故从略.

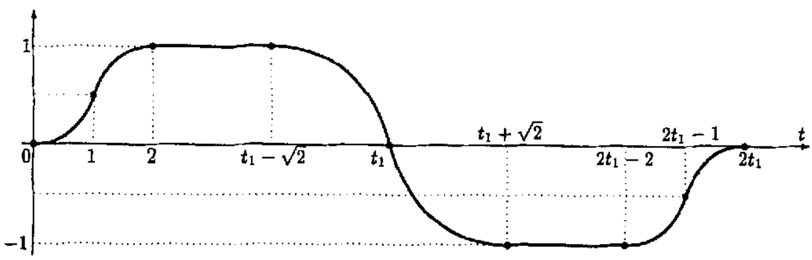
□

下面证明本章的主要结果.

定理 1.1.1 的证明. 由定理 2.5.1 , 问题 (W_T) 对于任意的 $T > 0$ 存在唯一最优解. 且由 (2.35) 容易验证 $\bar{s}(T)$ 是 $T \in (0, \infty)$ 的严格单增连续函数. 并满足 (2.13) .

由引理 2.3.1 可知，问题 (P) 对于任意的 $h>0$ 亦恒有唯一解. 联立 (2.35) 与 (2.14) 解出 $\bar{T}_h$，则得到 (1.1.3)．由引理 2.3.1 及定理 2.5.1 即知由 (1.1.4) 或 (1.1.5) 定义的 $\bar{u}$ 是其最优控制. □

注 2.5.2. 由 (1.1.5) 计算可知: 当 $h>\frac{17}{6}+2\sqrt{2}$ 时, 问题 (P) 的最优轨线 $\bar{x}(\cdot)=x_{\bar{u}}(\cdot)$ 在约束集的内部与边界上换接四次，且对应于 $t\in[2,t_1-\sqrt{2}]$ 和 $t\in[t_1+\sqrt{2},2t_1-2]$ 的两段分别位于约束边界 $\ddot{x}=1$ 与 $\ddot{x}=-1$ 上 ($\ddot{x}_{\bar{u}}(\cdot)$ 的图形如下图所示)．从而 $\bar{x}(\cdot)$ 不满足约束最大值原理的正规性假设.



$\ddot{x}_{\bar{u}}(t)$ 的图形

第三部分

最高阶偏导数具有时滞的变分不等式的最优控制

第三章 引 言

§3.1 引例

考虑单相 Stefan 问题 ([8],[46],[77]). 假设 R^3 中某区域 Ω 由水和冰占据, $y(t,x)$ 与 $q(t,x)$ 是其温度分布与热流分布. 在任一时刻 $t>0$, 区域 Ω 被分割为冰区 Ω_t^0 与水区 Ω_t^+ 两个子区域, 其公共边界记为 Γ_t . 由于热传导的作用, 子区域 Ω_t^0 与 Ω_t^+ 随时间 t 变化, 即 Γ_t 是移动边界. 如果在区域 Ω 的边界 (或部分边界) 上施加一个热源, 则可以考虑用它控制移动边界 Γ_t 的移动状况. 这类控制问题在冶炼技术等实际问题中也常常遇到. 材料无记忆时有关这类系统控制问题的研究可参见 [8] 、 [29] 、 [75] 与 [77] 等文献.

以下概述温度分布函数 y 所满足的关系的推导过程. 记区域 Ω 内部热量分布函数为 $Q(t,x)$, 且假定水的比热为常数 c . 则有

$$Q(t,x)=cy(t,x),\qquad \dot{Q}(t,x)=c\dot{y}(t,x).$$

另一方面, 用微元法与 Stokes 公式容易导出由热传导所引起的热量的时间变化率为 $-div\boldsymbol{q}(t,x)$. 当水和冰的状态相互转化时, 会出现放热或吸热现象. 记由此损失的热量为 $\eta(t,x)$, 则显然应有

$$\dot{Q}(t,x)=-div\boldsymbol{q}(t,x)-\eta(t,x).$$

从而

$$c\dot{y}(t,x)=-div\boldsymbol{q}(t,x)-\eta(t,x).$$

根据经典的 Fourier 法则

$$\boldsymbol{q}(t,x)=-k\nabla y(t,x), \tag{3.1}$$

得到温度 $y(t,x)$ 应满足的状态方程为

$$c\dot{y}(t,x)-k\Delta y(t,x)+\eta(t,x)=0. \tag{3.2}$$

假定冰的温度恒为 $0°C$. 则有

$$\begin{cases}\eta(t,x)=0, & y(t,x)>0;\\ \eta(t,x)\le 0, & y(t,x)=0.\end{cases}$$

利用 (1.2.8) 定义的集值函数 β ，上式可写成

$$\eta(t,x) \in \beta(y(t,x)). \tag{3.3}$$

$y(t,x)$ 的状态方程可写如下成变分不等式的形式

$$\dot{y}(t,x) - \frac{k}{c}\Delta y(t,x) + \beta(y(t,x)) \ni 0. \tag{3.4}$$

经典的 Fourier 热传导定律 (3.1) 意味着导热材料无记忆. 实际上，导热材料是有记忆的. Gurtin 与 Pipkin([33]) 和 Nunziato([54]) 等讨论了有记忆的材料的热传导问题. 他们引入了 Fourier 法则的一种修正形式

$$\boldsymbol{q}(t,x) = -k\int_0^\infty a(s)\nabla y(t-s,x)ds, \tag{3.5}$$

其中的 $a(\cdot)$ 称为热流量松弛函数. 更加一般地，综合考虑即时效应与滞后效应，考虑下面的修正的 Fourier 法则：

$$\boldsymbol{q}(t,x) = -k\nabla y(t,x) - \int_0^\infty \nabla y(t-s,x)\mu(ds). \tag{3.6}$$

其中 $\mu(\cdot)$ 是定义在 $\mathcal{B}(0,\infty)$ 的有限测度，满足 $\mu(\{0\}) = 0$. 这样，温度分布函数 y 应满足如下关系：

$$c\dot{y}(t,x) - k\Delta y(t,x) - \int_0^\infty \Delta y(t-s,x)\mu(ds) + \beta(y(t,x)) \ni 0. \tag{3.7}$$

这是一个最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式.

注：变分不等式可以看作带有逐点状态约束的特殊的微分方程.

事实上，对于给定的集值映射

$$\beta : D(\beta)(\subset H) \to 2^{\hat{H}}$$

及以 H 为状态空间的变分不等式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \beta(y(t)) \ni f(t,y(t)). \tag{3.8}$$

如果取 $H \times \hat{H}$ 为新的状态空间，则变分不等式 (3.8) 化为带有逐点状态约束

$$(y(t),\eta(t)) \in \mathcal{M} = \{\ (y,\eta) \in H \times \hat{H} \mid y \in D(\beta),\ \eta \in \beta(y)\ \}. \tag{3.9}$$

的等式方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + \eta(t) = f(t,y(t)). \tag{3.10}$$

因此，变分不等式 (3.8) 的可解性等价于方程 (3.10) 有满足逐点约束 (3.9) 的解 (y,η) . 如果取 (3.9) 中的约束集为

$$\mathcal{M} = \{\ (y,\eta) \in H \times \hat{H} \mid y \in D(\beta),\ \eta \in \beta(y),\ F(y) \in Q\ \}.$$

则在约束条件 $(y,\eta) \in \mathcal{M}$ 下 (3.10) 关于 (y,η) 的可解性即是通常所说的带有状态约束的下述问题 (关于 y) 的可解性：

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} + \beta(y(t)) \ni f(t,y(t)); \\ \\ F(y(t)) \in Q. \end{cases} \tag{3.11}$$

由于 (3.10) 中几乎不包含关于 $\eta(\cdot)$ 的可用信息，而在大多数问题中人们只关心变分不等式的解 (y,η) 中 $y(\cdot)$ 的特性（如唯一性、正则性等），所以在研究变分不等式时一般采用 (3.8) 或 (3.11) 的形式.

在本文中，我们采用上述状态约束的观点研究变分不等式.

§3.2　相关问题的研究概况

变分不等式作为偏微分方程的一个重要分支在上世纪六十年代由 J.L.Lions 和 G.Stampacchia 等学者创立以来，在欧美各国蓬勃发展，其理论日臻完善，其应用不断拓广，形成了一个颇具规模的体系. 与此同时，随着变分学的发展和最优控制理论的诞生，各种变分不等式控制系统的最优控制问题开始进入许多控制理论工作者的研究视野，

在上世纪六十年代，Lions 在研究椭圆型偏微分方程的线性二次最优控制时，发现其最优控制的一阶必要条件具有变分不等式的形式 ([42]) . 于是， Lions 、Stampacchia 与 Mosco 等人着手研究变分不等式解的存在性、正则性等基本问题 ([43], [52]) . 七十年代中期， Mignot 讨论了椭圆型变分不等式的最优控制问题 ([50]) . 随后， Barbu ([7], [8]) 、 Friedman ([29]-[31]) 、 Mignot-Puel ([51]) 、 Baiocch([6]) 等进一步讨论了椭圆型与抛物型变分不等式系统的最优控制. 关于变分不等式系统的早期研究成果，可参见 [6] 与 [46] 中所列的参考文献以及 [46] 中第五章末的评注.

需要指出的是，八十年代前有关分布参数系统 (包括由偏微分方程和变分不等式支配的系统) 的最优性条件一般都是在控制域的凸性假定下获得的. 八十年代初，李训经和姚允龙 ([44]) 使用针状变分的方法就非凸控制域的情形证明了发展型分布参数系统的最大值原理. 九十年代初，雍炯敏在控制域为一般的可分度量空间的假

定下对带有状态约束的半线性椭圆型偏微分方程和变分不等式建立了 Pontryagin 型的最大值原理 ([71]) . 他们的这些工作 ([44], [45], [70] – [73]) 是讨论非凸控制域上无限维系统的最优控制的基础.

近十几年来, 随着变分不等式在力学、工程、化学、经济、金融等领域的广泛应用, 相应的最优控制问题的研究日趋活跃. 迄今为止, 已出现了大批研究成果 (例如 [3], [5] , [11] , [10] , [13] , [30] , [31] , [35] , [38] , [46], [51] , [60], [67], [68], [77] 等) . 最近几年, Adams 、 Lenhart 、雍炯敏 ([2]) 、陈启宏 ([19], [21], [18]) 、楼红卫 ([47], [48]) 等人对椭圆与抛物型障碍最优控制问题做了一系列研究, 在最优解的存在性、唯一性、正则性、最大值原理、极大极小控制、间接障碍控制以及退化系统的最优控制等方面获得了一批研究成果.

由于在材料力学、热传导理论和经济预测、金融工程、风险控制等许多实际问题中, 材料有记忆或信息滞后的现象非常普遍 ([33], [54], [64], [68]) , 带有时间滞后的受控系统的控制问题自然成为最优控制理论研究的重要对象. 从本质上说, 无论系统的状态空间是否为无穷维空间, 时滞系统的控制问题一般都属于无穷维空间上的控制问题. 对带有时滞的微分方程, 关于其解的存在性、唯一性、正则性等基本问题目前为止还没有较为一般的结果, 所以, 时滞系统最优控制的研究成果远不如无时滞的系统丰富. 文 [4], [12], [61], [74] 等讨论了一些线性、拟线性抛物方程解的存在唯一性、正则性等问题. 在最优控制方面, 李训经和姚允龙 ([44]) 讨论了含时滞的分布参数系统的最优控制的最大值原理. Kowalewski 与 Krakowiak([40]) 讨论了具有积分型时滞项的抛物系统的时间最优控制问题. 潘立平与雍炯敏 ([55]) 就最高阶导数带有时滞的拟线性抛物方程建立了 Pontryagin 型的最大值原理.

对于带有时滞的变分不等式最优控制问题的研究, 目前还很少. Valeriano([65]) 对一类带有时滞的变分不等式建立了解的存在唯一性定理. 他假设时滞只出现在状态变量本身及其低阶偏导数项中而不出现在其最高阶偏导数项. 对于最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式的最优控制的研究, 目前尚未见到这方面的结果.

这一部分以后各章的具体安排如下:

第四章讨论状态方程 (1.2.6) 解的存在唯一性及解对初值和参数的连续依赖性. 我们将控制处理为抽象参数, 从而这部分内容与控制理论相对独立. 前两节介绍时滞算子与变分不等式的解等基本概念和基本假设. 第三节讨论逼近系统解序列的一致有界性. 这节内容是建立适定性理论的必要准备, 其中关于时滞算子性质的引理 4.3.4 在第四、五两章中起着关键性的作用. 第四节建立变分不等式解的存在唯一性

与对初值的连续依赖性定理，并研究了对应于同一控制列变分不等式与逼近方程的解序列之间的关系．第五节建立解对参数的连续依赖性定理．最后一节扼要介绍了无限时滞的情形．作为对最高阶导数具有时滞的变分不等式可解性的研究，这一章的结果具有独立的理论价值．

第五章研究由 (1.2.6) 与 (1.2.7) 所描述的最优控制问题．我们的控制域是一般的可分度量空间，可以没有任何代数结构．第一节给出问题的陈述．第二节证明 Cesari 型条件下最优控制的存在性定理．第三节研究逼近控制问题．首先证明逼近控制问题与原问题的指标值及最优值之间的联系，然后给出逼近控制问题的轨线变分、伴随方程及其解序列的弱收敛性，并最终得到原问题的伴随方程．第四节利用变分原理建立了 Pontryagin 型的最大值原理，并指出该结果与文 [55] 中相应结果的联系．

第四章　时滞变分不等式的可解性

对于具有时滞项的变分不等式，最基本的问题即是其可解性. 本章的主要任务即是对于最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式建立其解的存在唯一性和连续依赖性定理. 我们采用逼近的方法建立所述的主要结果. 文 [74] 对一类最高阶偏导数项具有时滞的抽象抛物型方程建立了解的存在唯一性理论. 我们用这类抛物方程逼近所研究的变分不等式，根据逼近解的收敛性导出变分不等式的解. 由于逼近方程中 "逼近项" 的无界性， [74] 中解的估计将失去作用. 我们将在第三节专门研究逼近解的一致有界性. 作为重要的理论准备，该节的主要结果及其证明方法在本章以后的各节中将起关键性的作用.

§4.1　时滞算子

设 $\mathcal{B}$ 是 $[-r,0]$ 上的 Borel σ- 代数， $\mu(\cdot)$ 是 $([-r,0],\mathcal{B})$ 上的有限值广义测度. 定义 时滞算子G 如下：

定义 4.1.1. *设 $m\in N$ ， $\forall h\in L^2((-r,\infty)\times\Omega;R^m)$, 若 $\overline{h}$ 为 Borel 可测函数，且满足*

$$\overline{h}(t,x)=h(t,x),\qquad a.e.\ (t,x)\in(-r,\infty)\times\Omega, \tag{4.1}$$

则定义

$$(Gh)(t,x)\triangleq\int_{-r}^{0}\overline{h}(t+\theta,x)\mu(d\theta)\quad a.e.\ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega. \tag{4.2}$$

满足 (4.1) 的 Borel 可测函数 $\overline{h}$ 一般称为 h 的 Borel 修正 (见 [74]) . 下述引理表明：对于任意的 $h\in L^2((-r,\infty)\times\Omega;R^m)$, 在 " a.e. " 意义下 Gh 是一意的，与 $\overline{h}$ 的选择无关.

引理 4.1.2. (i) *若 $h:(-r,\infty)\times\Omega\to R^m$ 是 Borel 可测函数，且满足*

$$h=0,\qquad a.e.\ \ (t,x)\in(-r,\infty)\times\Omega,$$

则

$$\int_{-r}^{0}h(t+\theta,x)\mu(d\theta)=0,\quad a.e.\ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega. \tag{$*$}$$

(ii) *若 $h\in L^2((-r,\infty)\times\Omega;R^m)$ ，则 $Gh\in L^2((0,\infty)\times\Omega;R^m)$. 且对于任意的*

$g \in L^2((0,\infty)\times\Omega;R^m)$, $0 \le s \le +\infty$ 及 $0 \le s_0 \le r$，下述不等式成立:

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega dx \int_0^{s+s_0} (Gh)\cdot g dt\right| \\
\le\ & \frac{1}{2}\int_\Omega dx \int_0^{s+s_0} |g|^2\,dt + \frac{1}{2}\,|\,\mu\,|\,\big([-r,0]\big)^2 \int_\Omega dx \int_{-r}^{s} |h|^2\,dt \\
&+\frac{1}{2}|\mu|\,\big([-r,0]\big)\,|\,\mu\,|\,\big([-s_0,0]\big)\int_\Omega dx \int_s^{s+s_0} |h|^2\,dt.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

证明. 设 $\mu = \mu^+ - \mu^-$ 是 μ 的 Hahn-Jordan 分解. 不妨设 $\mu^+([-r,0]) > 0$ 且 $m = 1$. 记

$$
h^+ = \max(h,0), \qquad h^- = \max(-h,0).
$$

若 h Borel 可测，则由映射 $(\theta,t,x) \mapsto (t+\theta,x)$ 的 Borel 可测性得知 $h^\pm(t+\theta,x)$ 是 (θ,t,x) 的 Borel 可测函数，从而函数

$$
\int_{-r}^{0} h^\pm(t+\theta,x)\mu^\pm(d\theta)
$$

关于 (t,x) Borel 可测.

(i) 若 $h:(-r,\infty)\times\Omega \to R$ 为 Borel 可测函数，且满足

$$
h = 0, \quad a.e.\ \ (t,x)\in(-r,\infty)\times\Omega.
$$

令

$$
w(t,x) = \int_{-r}^{0} h^+(t+\theta,x)\mu^+(d\theta). \tag{4.4}
$$

对于任意的 $g \in L^2((0,\infty)\times\Omega)$ 及 $\varepsilon > 0$，由均值不等式及 Fubini 定理可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega dx \int_0^\infty g(t,x)w(t,x)dt\right| = \left|\int_\Omega dx \int_0^\infty dt \int_{-r}^{0} g(t,x)h^+(t+\theta,x)\mu^+(d\theta)\right| \\
\le\ & \varepsilon \int_\Omega dx \int_0^\infty dt \int_{-r}^{0} g(t,x)^2\mu^+(d\theta) + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega dx \int_0^\infty dt \int_{-r}^{0} h^2(t+\theta,x)\mu^+(d\theta) \\
=\ & \varepsilon\mu^+\big([-r,0]\big)\int_\Omega dx \int_0^\infty g(t,x)^2 dt + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{-r}^{0}\mu^+(d\theta)\int_\Omega dx \int_\theta^\infty h^+(t,x)^2 dt \\
=\ & \varepsilon\mu^+\big([-r,0]\big)\int_\Omega dx \int_0^\infty g(t,x)^2 dt.
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则得到

$$
\int_\Omega dx \int_0^\infty g(t,x)w(t,x)dt = 0, \quad \forall\, g \in L^2((0,\infty)\times\Omega).
$$

从而 $w(t,x)=0,\quad a.e.\ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega$．同理可得

$$\int_{-r}^{0}h^+(t+\theta,x)\mu^-(d\theta)=\int_{-r}^{0}h^-(t+\theta,x)\mu^\pm(d\theta)=0,\quad a.e.(t,x)\in(0,\infty)\times\Omega.$$

从而 $(*)$ 式成立.

(ii) 由 (i) 可知，(4.2) 式不依赖于 Borel 修正 $\bar{h}$（显然不唯一）的特殊选取，不妨设 h 本身是 Borel 可测的．对于任意的 $g\in L^2((0,\infty)\times\Omega;R^m)$，$s\in[0,+\infty)$ 及 $s_0\in[0,r]$，由 Cauchy-Schwartz 不等式及 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega dx\int_0^{s+s_0}w(t,x)g(t,x)dt\right|\\
=&\left|\int_\Omega dx\int_0^{s+s_0}dt\int_{-r}^0 h^+(t+\theta,x)g(t,x)\mu^+(d\theta)\right|\\
\le&\frac{1}{2\mu^+([-r,0])}\int_\Omega dx\int_0^{s+s_0}dt\int_{-r}^0 g(t,x)^2\mu^+(d\theta)\\
&+\frac{\mu^+([-r,0])}{2}\int_\Omega dx\int_0^{s+s_0}dt\int_{-r}^0 h^+(t+\theta,x)^2\mu^+(d\theta)\\
\le&\frac{1}{2}\int_\Omega dx\int_0^{s+s_0}g(t,x)^2dt\\
&+\frac{\mu^+([-r,0])}{2}\int_\Omega dx\int_{-r}^0\mu^+(d\theta)\int_{-r-\theta}^{s-\theta}h^+(t+\theta,x)^2dt\\
&+\frac{\mu^+([-r,0])}{2}\int_\Omega dx\int_{-s_0}^0\mu^+(d\theta)\int_{s-\theta}^{s+s_0-\theta}h^+(t+\theta,x)^2dt\\
=&\frac{1}{2}\int_\Omega dx\int_0^{s+s_0}g(t,x)^2dt+\frac{1}{2}\mu^+([-r,0])^2\int_\Omega dx\int_{-r}^s h^+(t,x)^2dt\\
&+\frac{1}{2}\mu^+([-r,0])\mu^+([-s_0,0])\int_\Omega dx\int_s^{s+s_0}h^+(t,x)^2dt.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

这里，w 由 (4.4) 定义．由上述不等式可知 $w\in L^2((0,\infty)\times\Omega)$．同理可得

$$\int_{-r}^0 h^+(t+\theta,x)\mu^-(d\theta),\quad \int_{-r}^0 h^-(t+\theta,x)\mu^\pm(d\theta)\in L^2((0,\infty)\times\Omega).$$

从而 $Gh\in L^2((0,\infty)\times\Omega)$．在 (4.5) 中分别以 Gh, h 及 $|\mu|$ 取代 w, h^+ 及 μ^+，则得到 (4.3)． □

特别地，在 (4.3) 中取 $s_0=0$, $g=Gh$，则立即得到下述结论：

推论 4.1.3. 对任意的 $m\in N$ 及 $0<s\le+\infty$，G 是 $L^2((-r,s)\times\Omega;R^m)\to L^2((0,s)\times\Omega;R^m)$ 的有界线性算子，且

$$\|G\|\le|\mu|\left([-r,0]\right).$$

关于算子 G 我们给出以下几点附注：

注 4.1.4. (i) 作为 $L^2((-r,s)\times\Omega;R^m)\to L^2((0,s)\times\Omega;R^m)$ 的有界线性算子，对于给定的 r 及 $\mu(\cdot)$，G 与 s 及 m 有关，严格地说，应当记为 $G_{s,m}$．为简洁起见，我们将仍采用记号 G，s 与 m 的值在特定的上下文中是明确的．

(ii) 由引理 4.1.2 (i) 可知，(4.2) 式不依赖于 Borel 修正 $\overline{h}$ 的特殊选取，故当 h 本身 Borel 可测时，

$$(Gh)(t,x)=\int_{-r}^{0}h(t+\theta,x)\mu(d\theta)\quad a.e.\ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega.$$

当 h 为一般的 Lebesgue 可测函数时，为简洁起见，在后文中我们将仍采用这一表达形式，其涵义按照 (4.2) 式理解．同样，当涉及某函数关于测度 μ 的积分时，我们总是理解为其 Borel 修正的积分．

(iii) 时滞算子 G 涵盖了许多常见的时滞情形．例如，有限或可列多个离散时滞以及绝对连续的分布型时滞，都可表示为 (4.2) 的形式．

§4.2　时滞变分不等式

设 $(\mathcal{U},d)$ 为度量空间，$F:R\times R^n\times R\times\mathcal{U}\to R$ 为给定函数，β 为 (1.2.8) 定义的集值映射．对于给定的参数 $u\in\mathcal{U}$，考虑下述的最高阶偏导数项具有时滞的变分不等式

$$\begin{cases}\dot y(t,x)-\Delta y(t,x)+G(\Delta y)(t,x)+\beta(y(t,x))\ni F(t,x,y(t,x),u),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad in\ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));\\ y(t,x)=\varphi(t,x),\qquad a.e.\ (t,x)\in Q_{-r};\\ y(0,x)=z(x),\qquad a.e.\ x\in\Omega;\\ y(t,x)=0,\qquad in\ \Sigma_T.\end{cases}\tag{4.6}$$

为简洁起见，当不需强调时后文中我们常略去 F 或 y 中的自变量 (t,x)．如将 $F(t,x,y(t,x),u))$ 或 $\beta(y(t,x))$ 简写为 $F(y,u)$ 或 $\beta(y)$．我们首先给出上述变分不等式解的概念．

定义 4.2.1. 对于给定的 $u \in \mathcal{U}$ 及初值 (φ, z) ，若函数 $(y,\eta) \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \cap W^{1,2}\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \times L^2(Q_T)$ ，且满足

$$
\begin{aligned}
&y(t,x) = \varphi(t,x), && a.e.\ (t,x) \in Q_{-r}; && (4.7)\\
&y(0,x) = z(x), && a.e.\ x \in \Omega.; && (4.8)\\
&\eta(t,x) \in \beta\big(y(t,x)\big), && a.e.\ (t,x) \in Q_T; && (4.9)\\
&\dot{y} - \Delta y + G(\Delta y) + \eta = F(y,u), && a.e.\ \ in\ Q_T. && (4.10)
\end{aligned}
$$

则称 (y,η) 为变分不等式 (4.6) 的解.

注：对于变分不等式 (4.6) 的解 (y,η) ，我们主要关心的是 y 的特性. 所以，在后文中我们常常用 " (4.6) 的解 y " 表示 " (4.6) 的解 (y,η) 中的 y " 这一含义. 若非必要，我们将不再提及 η . 但是，我们应当牢记：变分不等式 (4.6) 的解是一组函数 (y,η) 而不是一个函数 y .

本章中，我们对 (4.6) 中的 F 与 μ 作如下的基本假设：

(H$_f$) 对任意$(t,x,y,u) \in R \times R^n \times R \times \mathcal{U}$ ， $F(\cdot,\cdot,y,u)$ 为 Q_T 上 *Lebesgue* 可测函数， $F(t,x,\cdot,u) \in C^1(R)$. 且有常数 $k > 0$ 使得

$$|F(t,x,0,u)| + |F_y(t,x,y,u)| \le k, \qquad \forall\ (t,x,y,u) \in R \times R^n \times R \times \mathcal{U}. \tag{4.11}$$

(H$_\mu$) 广义测度μ 满足

$$\lim_{s\downarrow 0} |\mu|\big([-r,0]\big) \mid \mu \mid \big([-s,0]\big) < 1. \tag{4.12}$$

当 μ 为绝对连续型广义测度或不以 0 为聚点的至多可列集上离散广义测度时，(4.12) 显然成立.

§4.3 逼近系统

定义 4.3.1. 对于以 0 为聚点的任意集合 $\Lambda \subseteq (0,1)$ ，若函数族 $\{\beta_\varepsilon(\cdot) | \varepsilon \in \Lambda\} \subset C^1(R)$ 满足

$$
\forall \varepsilon \in \Lambda, \qquad \begin{cases} \beta_\varepsilon(\lambda) = 0, & \forall \lambda \ge 0; \\ \beta_\varepsilon(\lambda) < 0, & \forall \lambda < 0; \\ 0 \le \beta_\varepsilon'(\lambda) \le \frac{1}{\varepsilon}, & \forall \lambda \in R. \end{cases} \tag{4.13}
$$

$$\forall \lambda < 0, \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \beta_\varepsilon(\lambda) = -\infty, \tag{4.14}$$

则称 $\{\beta_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Lambda\}$ 为集值函数 β 的一个光滑逼近族. 函数 β_ε 称为 β 的 ε- 逼近.

为简洁起见，后文中 β 的光滑逼近族与 ε- 逼近我们将都用 β_ε 表示，其含义可由特定的上下文理解.

任给 β 的光滑逼近族 β_ε ，考虑 (4.6) 的逼近系统

$$\begin{cases} \dot{y}_\varepsilon - \triangle y_\varepsilon + G(\triangle y_\varepsilon) + \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) = F(y_\varepsilon, u), & \text{in } Q_T; \\ y_\varepsilon = \varphi, & \text{in } Q_{-r}; \\ y_\varepsilon(0,\cdot) = z(\cdot), & \text{in } \Omega; \\ y_\varepsilon(t,x) = 0, & \text{in } \Sigma_T. \end{cases} \tag{4.15}$$

根据 [74] 中的定理 2.4 立即可得：

引理 4.3.2. *若 $(\mathrm{H_f})$ 与 (H_μ) 成立，则对于任意的 $\varphi \in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$，$z \in H_0^1(\Omega)$ 及 $u \in \mathcal{U}$ ，逼近系统 (4.15) 恒有唯一强解 $y_\varepsilon \in L^2\big(-r,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big) \cap W^{1,2}\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$.*

以后我们将用 $y_\varepsilon(u,\varphi,z)$ 、 $y_\varepsilon(u)$ （如果初值 (z,φ) 给定）或 y_ε 表示 (4.15) 的解. 下一节我们将证明：当 $z \in L_+^2(\Omega)$ 时，逼近系统的解 $\{y_\varepsilon\}$ 有子列收敛到 (4.6) 的解 y . 由于 $\{\beta_\varepsilon'\}$ 无界，故逼近解集 $\{y_\varepsilon\}$ 的一致有界性研究是问题的关键. 本节的主要结果即是 $\{y_\varepsilon\}$ 的一致有界性. 我们先从两个技术性引理入手，它们不仅在本节主要结果的证明中起关键性的作用，而且在后文中也多次用到.

引理 4.3.3. *若 $(\mathrm{H_f})$ 成立， $s>0$ ，则对任意 $y,\hat{y},\tilde{y} \in L^2(Q_s)$ 及 $u \in \mathcal{U}$ ，下述各式成立.*

$$\text{(i)} \quad \left|\int_{Q_s} F(y,u)y\,dtdx\right| \le \frac{k\,|\Omega|\,s}{4} + 2k\int_{Q_s} y^2\,dtdx; \tag{4.16}$$

$$\text{(ii)} \quad \left|\int_{Q_s} F(y,u)\tilde{y}\,dtdx\right| \le 2k^2\,|\Omega|\,s + 2k^2\int_{Q_s} y^2\,dtdx + \frac{1}{4}\int_{Q_s} \tilde{y}^2\,dtdx; \tag{4.17}$$

$$\text{(iii)} \quad \left|\int_{Q_s} \Big(F(\hat{y},u) - F(y,u)\Big)\tilde{y}\,dtdx\right| \le \frac{k}{2}\int_{Q_s} (\hat{y}-y)^2\,dtdx + \frac{k}{2}\int_{Q_s} \tilde{y}^2\,dtdx. \tag{4.18}$$

证明. 显然 $F(\cdot,\cdot,y(\cdot,\cdot),u)$ 可测. 由 (4.11) 及

$$F(y,u) = F(\hat{y},u) + \int_0^1 F_y(\lambda(y-\hat{y}),u)(y-\hat{y})\,d\lambda,$$

可得

$$|F(y,u)| \le k(1+|y|),$$

$$|F(\hat{y},u) - F(y,u)| \le k\,|\hat{y}-y|\,.$$

引用基本不等式

$$|ab| \leq \frac{ca^2}{4} + \frac{b^2}{c}, \qquad \forall\, c > 0.$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&|F(y,\boldsymbol{u})y| \leq \frac{k}{4} + 2ky^2,\\
&|F(y,\boldsymbol{u})\tilde{y}| \leq 2k^2 + 2k^2y^2 + \frac{1}{4}\tilde{y}^2,\\
&\left|\Big(F(\hat{y},\boldsymbol{u}) - F(y,\boldsymbol{u})\Big)\tilde{y}\right| \leq \frac{1}{2}k(\hat{y}-y)^2 + \frac{1}{2}k\tilde{y}^2.
\end{aligned}$$

在 Q_s 上对上述各式积分，则得所述结论. □

引理 4.3.4. 设 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立， $h \in L^2\big((-r,T)\times\Omega;R^m\big)$, $g \in L^2(Q_T)$, $\alpha > 0$. 若有常数 a, $b > 0$ 使得

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx + \alpha\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx \leq a + b\int_{Q_s}g^2dtdx + \alpha\left|\int_{Q_s}(Gh)\cdot hdtdx\right|, \qquad \forall s \in [0,T]. \tag{4.19}$$

则 $g \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. 且存在常数 $C = C(r,T,b,\mu(\cdot)) > 0$ ，使得

$$\|g\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \alpha\|h\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C(a + \alpha\int_{Q_{-r}}|h|^2\,dtdx). \tag{4.20}$$

证明. 不妨设 $\alpha = 1$. 否则，我们以 $\frac{h}{\sqrt{\alpha}}$ 取代 (4.19) 与 (4.20) 中的 h 即可. 由 (4.12) ，存在 $\overline{s} \in (0,r]$ 及 $\delta \in (0,1)$ ，使得

$$|\mu|\left([-r,0]\right)|\mu|\left([-\overline{s},0]\right) = 1-\delta.$$

对于任意的 $s \in (0,\overline{s}]$ ，分别以 0 与 s 取代 (4.3) 中的 s 与 s_0 ，我们得到

$$\left|\int_{Q_s}(Gh)\cdot hdtdx\right| \leq \frac{|\mu|\left([-r,0]\right)^2}{2}\int_{Q_{-r}}|h|^2\,dtdx + (1-\frac{\delta}{2})\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx.$$

故由 (4.19) 可知

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g(s,x)^2dx + \frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx\\
\leq\ & a + \frac{1}{2}|\mu|\left([-r,0]\right)^2\int_{Q_{-r}}|h|^2\,dtdx + b\int_0^s\int_\Omega g(t,x)^2dx.
\end{aligned}$$

由 Gronwall 引理可得

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx + \frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx \leq \Big(a + \frac{1}{2}|\mu|\left([-r,0]\right)^2\int_{Q_{-r}}|h|^2\,dtdx\Big)e^{bs}.$$

记

$$\overline{a}=a+\frac{1}{2}|\mu|\left([-r,0]\right)^2\int_{Q_{-r}}|h|^2\,dtdx,\quad C_1=e^{b\overline{s}}.$$

则

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx+\frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx\le C_1\overline{a},\quad \forall s\in(0,\overline{s}].$$

假设 $j\overline{s}<T$，且存在常数 $C_j>0$ 使得

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx+\frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx\le C_j\overline{a},\quad \forall s\in(0,j\overline{s}]. \tag{4.21}$$

对于任意的 $s\in\left(j\overline{s},\min\{T,(j+1)\overline{s}\}\right]$，由 (4.3) 及 (4.21) 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_s}(Gh)\cdot hdtdx\right|\\
\le\ &\frac{1}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx+\frac{1}{2}|\mu|\left([-r,0]\right)^2\int_\Omega dx\int_{-r}^{j\overline{s}}|h|^2\,dt\\
&+\frac{1}{2}|\mu|\left([-r,0]\right)|\mu|\left([j\overline{s}-s,0]\right)\int_\Omega dx\int_{j\overline{s}}^{s}|h|^2\,dt\\
\le\ &(\overline{a}-a)+\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx+\frac{1}{2}\left(|\mu|\left([-r,0]\right)^2+\delta-1\right)\int_\Omega dx\int_0^{j\overline{s}}|h|^2\,dt\\
\le\ &(\overline{a}-a)+\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx+\left(\frac{|\mu|\left([-r,0]\right)^2}{\delta}+1\right)C_j\overline{a}.
\end{aligned}$$

将上述不等式代入 (4.19) 则得到

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx+\frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx\le\overline{a}\left(1+C_j+\frac{1}{\delta}C_j|\mu|\left([-r,0]\right)^2\right)+b\int_{Q_s}g^2dtdx.$$

注意到 (4.21)，可知上述不等式对于任意的 $s\in(0,j\overline{s}]$ 亦成立．再次引用 Gronwall 引理可得：对任意 $s\in(0,\min\{T,(j+1)\overline{s}\}]$，恒有

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx+\frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx\le\overline{a}\left(1+C_j+\frac{1}{\delta}C_j|\mu|\left([-r,0]\right)^2\right)e^{bs}.$$

记

$$C_{j+1}=\left(1+C_j+\frac{1}{\delta}C_j|\mu|\left([-r,0]\right)^2\right)e^{(j+1)b\overline{s}}, \tag{4.22}$$

则

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx+\frac{\delta}{2}\int_{Q_s}|h|^2\,dtdx\le C_{j+1}\overline{a}\quad\forall\, s\in\left(\,0,\ \min\{T,(j+1)\overline{s}\}\,\right]. \tag{4.23}$$

由归纳原理，(4.23) 对任意正整数 j 成立.

设 $(j_0-1)\overline{s} < T \le j_0\overline{s}$ ，记

$$C = \left(1+\frac{2}{\delta}\right)\left(1+\frac{|\mu|\left([-r,0]\right)^2}{2}\right)C_{j_0}.$$

则由 (4.23) 可得

$$\int_\Omega g(s,x)^2dx + \int_{Q_s}|h|^2\,dtdx \le C\Big(a+\int_{Q_{-r}}|h|^2\,dtdx\Big), \quad \forall s\in(0,T].$$

即 (4.20) 得证. 由 $C_1=e^{b\overline{s}}$ 及 (4.22) 可知这里的常数 C 只依赖于 r,T,b 和 $\mu(\cdot)$. □

下面，我们给出本节的主要结果.

定理 4.3.5. *设* $(\mathbf{H_f})$ *与* $(\mathbf{H}_\mu)$ *成立. 则存在常数* $C=C(r,T,\mu(\cdot),k)>0$ *使得对* β *的任一光滑逼近族* β_ε *、任意初值* $\varphi\in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$*、* $z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ *及* $u_\varepsilon\in\mathcal{U}$ *，* (4.15) *的解* $y_\varepsilon=y_\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi,z)$ *满足*

$$\begin{aligned}&\|y_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla y_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\triangle y_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\dot{y}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q_T)}\\ \le\ & C\Big(1+\|z\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\varphi\|^2_{L^2(-r,0;H^2(\Omega))}\Big), \qquad \forall\,\varepsilon>0. \qquad (4.24)\end{aligned}$$

证明. 对于任意的 $s\in(0,T]$ ，以 y_ε 乘方程 (4.15) 并在 Q_s 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac12\int_\Omega y_\varepsilon(s,x)^2dx-\frac12\int_\Omega z(x)^2dx+\int_{Q_s}|\nabla y_\varepsilon|^2\,dtdx+\int_{Q_s}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)y_\varepsilon dtdx\\ =\ &\int_{Q_s}F(y_\varepsilon,u_\varepsilon)y_\varepsilon dtdx-\int_{Q_s}(G\nabla y_\varepsilon)\cdot\nabla y_\varepsilon dtdx.\end{aligned}$$

由 (4.13) 可知

$$\int_{Q_s}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)y_\varepsilon dtdx\ge 0.$$

根据 (4.16) ，我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega y_\varepsilon(s,x)^2dx+2\int_{Q_s}|\nabla y_\varepsilon|^2\,dtdx\\ \le\ &\frac{k|\Omega|T}{2}+\int_\Omega z^2dx+4k\int_{Q_s}y_\varepsilon^2dtdx+2\left|\int_{Q_s}(G\nabla y_\varepsilon)\cdot\nabla y_\varepsilon dtdx\right|.\end{aligned}$$

故由引理 4.3.4 可得

$$\|y_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+2\|\nabla y_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)}\le C\left(\frac{k|\Omega|T}{2}+\int_\Omega z^2dx+2\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(Q_{-r})}\right), \quad \forall\varepsilon>0.$$

若记

$$C_0 = |\Omega| T + \|z\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{L^2(-r,0;H^2(\Omega))} \cdot \tag{4.25}$$

则上式等价于

$$\|y_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C_1 C_0, \quad \|\nabla y_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)} \le C_1 C_0, \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.26}$$

其中 $C_1 = C_1(r, T, \mu(\cdot), k)$.

以 Δy_ε 乘方程 (4.15) 两边并在 Q_s 上积分，同时注意到

$$\int_\Omega dx \int_0^s \dot{y}_\varepsilon \Delta y_\varepsilon dt = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z(x)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y_\varepsilon(s,x)|^2\, dx,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y_\varepsilon(s,x)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z(x)|^2\, dx + \int_{Q_s} (\Delta y_\varepsilon)^2 dtdx + \int_{Q_s} \beta'_\varepsilon(y_\varepsilon)\, |\nabla y_\varepsilon|^2\, dtdx \\
= & -\int_{Q_s} F_y(y_\varepsilon, u_\varepsilon)\, |\nabla y_\varepsilon|^2\, dtdx + \int_{Q_s} (G\Delta y_\varepsilon)(t,x)\Delta y_\varepsilon(t,x) dtdx \\
\le & \ k\int_{Q_s} |\nabla y_\varepsilon|^2\, dtdx + \left|\int_{Q_s} (G\Delta y_\varepsilon)(t,x)\Delta y_\varepsilon(t,x) dtdx\right|.
\end{aligned}$$

而且，由 (4.13) 可知

$$\int_{Q_s} \beta'_\varepsilon(y_\varepsilon)\, |\nabla y_\varepsilon|^2\, dtdx \ge 0.$$

根据 (4.11) 与引理 4.3.4 ，可以得到

$$\|\nabla y_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C_2 C_0, \quad \|\Delta y_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)} \le C_2 C_0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{4.27}$$

其中 $C_2 = C_2(r, T, \mu(\cdot), k)$.

以 $\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)$ 乘方程 (4.15) 两边并在 Q_s 上积分，同时引用 (4.17) 及推论 4.1.3 ，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} \beta_\varepsilon(y_\varepsilon)^2 dtdx + \int_{Q_T} \dot{y}_\varepsilon \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) dtdx \\
= & \int_{Q_T} F(y_\varepsilon, u_\varepsilon)\beta_\varepsilon(y_\varepsilon) dtdx + \int_{Q_T} \Delta y_\varepsilon \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) dtdx - \int_{Q_T} (G\Delta y_\varepsilon)(t,x)\beta_\varepsilon(y_\varepsilon(t,x)) dtdx \\
\le & \ 2k^2 |\Omega| T + 2k^2 \int_{Q_T} y_\varepsilon^2 dtdx + \frac{1}{4}\int_{Q_T} \beta_\varepsilon(y_\varepsilon)^2 dtdx + 2\int_{Q_T} (\Delta y_\varepsilon)^2 dtdx \\
& + \frac{1}{8}\int_{Q_T} \beta_\varepsilon(y_\varepsilon)^2 dtdx + \frac{1}{2}\int_{Q_T} \beta_\varepsilon(y_\varepsilon)^2 dtdx + \frac{1}{2}|\mu|\left([-r,0]\right)^2 \int_\Omega dx \int_{-r}^T (\Delta y_\varepsilon)^2 dtdx.
\end{aligned}$$

而且，由 (4.13) 及 $z \in L^2_+(\Omega)$ 可知

$$\int_{Q_T} \dot{y}_\varepsilon \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) dt dx = \int_\Omega dx \int_{z(x)}^{y_\varepsilon(T,x)} \beta_\varepsilon(\lambda) d\lambda \geq 0.$$

故由 (4.26) 及 (4.27) 可得

$$\|\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C_3 C_0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0). \tag{4.28}$$

其中 $C_3 = C_3(r, T, \mu(\cdot), k)$.

根据 $|F(y_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon)| \leq k(1 + |y_\varepsilon|)$ 与 (4.26) 可知

$$\|F(\cdot, \cdot, y_\varepsilon(\cdot, \cdot), \boldsymbol{u}_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_4 C_0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

从方程 (4.15) 及 (4.26)-(5.10) 立即得知

$$\|\dot{y}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C_5 C_0, \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.29}$$

其中 $C_i = C_i(r, T, \mu(\cdot), k)$， $i = 4, 5$. 显然， (4.24) 等价于 (4.26)–(4.29). □

§4.4 解的存在唯一性与解对初值的连续依赖性

定理 4.4.1. 设 $(\mathbf{H}_f)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立. 则对于任意的 $\varphi \in L^2(-r, 0; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ 、$z \in H^1_0(\Omega) \cap L^2_+(\Omega)$ 及 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ ，变分不等式 (4.6) 至少有一个解 $y = y(\boldsymbol{u}, \varphi, z)$. 且对于 $\beta(\cdot)$ 的任一光滑逼近族 $\beta_\varepsilon(\cdot)$ ，逼近系统 (4.15) 的解 $y_\varepsilon = y_\varepsilon(\boldsymbol{u}, \varphi, z)$ 恒有某个子列（ 仍以 $\{y_\varepsilon\}$ 表示 [1]），使得

$$\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时}, \quad \begin{cases} y_\varepsilon \text{ 在 } H^1(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } y, \text{在 } L^2(Q_T) \text{ 中强收敛于 } y; \\ \Delta y_\varepsilon \text{ 在 } L^2(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \Delta y; \\ \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) \text{ 在 } L^2(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \eta. \end{cases} \tag{4.30}$$

其中 η 满足 (4.9) 及 (4.10) .

证明. 我们将证明过程分为三个步骤.

第一步：证明存在 $\eta \in L^2(Q_T)$ 及 $y \in L^2(-r, T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T]; L^2(\Omega))$ 使得 (4.30) 成立.

[1]后文中，序列的子列将仍以其本身表示，以后不再注明.

由定理 4.3.5 可知，$\{ y_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$ 是 $H^1(Q_T)$ 中有界集，$\{ \Delta y_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$ 与 $\{ \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \}$ 是 $L^2(Q_T)$ 中有界集. 由 $H^1(Q_T)$ 与 $L^2(Q_T)$ 的自反性及 Eberlein-Shmul'yan 定理，存在 $y \in H^1(Q_T)$ 、$\xi, \eta \in L^2(Q_T)$ 及 $\{y_\varepsilon\}$ 、$\{\Delta y_\varepsilon\}$ 与 $\{\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\}$ 的子列，使得

$$\text{当 } \varepsilon \to 0 \text{ 时，} \begin{cases} y_\varepsilon \text{ 在 } H^1(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } y, \text{在 } L^2(Q_T) \text{ 中强收敛于 } y; \\ \Delta y_\varepsilon \text{ 在 } L^2(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \xi; \\ \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) \text{ 在 } L^2(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \eta. \end{cases} \tag{4.31}$$

定义 $y\big|_{Q_{-r}} = \varphi$，$y(0,\cdot) = z(\cdot)$. 我们现在证明 $y \in L^2(-r,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega))$，且

$$\Delta y = \xi \qquad \text{in } L^2(Q_T). \tag{4.32}$$

一方面，由于 $H^1(Q_T)$ 可嵌入 $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ 之中，故 y_ε 在 $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ 中亦弱收敛于 y . 又由 $H_0^1(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 的闭子空间及 $y_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 立即得到 $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. 而且，对于任意的 $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$，在等式

$$\int_{Q_T} y_\varepsilon \Delta w dt dx = \int_{Q_T} \Delta y_\varepsilon w dt dx$$

两边令 $\varepsilon \to 0$，并利用 Δy_ε 与 y_ε 的弱收敛性则得到

$$\int_{Q_T} y \Delta w dt dx = \int_{Q_T} \xi w dt dx.$$

从而可知 $y \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$，且 (4.32) 成立.

另一方面，由 $y_\varepsilon \in W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega))$ 及 $y_\varepsilon(0,\cdot) = z(\cdot)$ 可得

$$y_\varepsilon(t,x) = z(x) + \int_0^t \dot{y}_\varepsilon(s,x) ds \qquad \forall t \in [0,T],\ a.e.\ x \in \Omega.$$

以任意的 $w \in C_0^\infty(Q_T)$ 乘上式两边并在 Q_T 上积分，则有

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} y_\varepsilon w dt dx &= \int_{Q_T} z w dt dx + \int_\Omega dx \int_0^T dt \int_0^t \dot{y}_\varepsilon(s,x) w(t,x) ds \\ &= \int_{Q_T} z w dt dx + \int_\Omega dx \int_0^T \dot{y}_\varepsilon(s,x) \left(\int_s^T w(t,x) dt \right) ds. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，根据 y_ε 与 $\dot y_\varepsilon$ 的弱收敛性，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} ywdtdx &= \int_{Q_T} zwdtdx+\int_\Omega dx\int_0^T \dot y(s,x)\left(\int_s^T w(t,x)dt\right)ds\\ &= \int_{Q_T} zwdtdx+\int_\Omega dx\int_0^T dt\int_0^t \dot y(s,x)w(t,x)ds\\ &= \int_{Q_T}\left(z(x)+\int_0^t \dot y(s,x)ds\right)w(t,x)dtdx.\end{aligned}$$

由此得知

$$y(t,x)=z(x)+\int_0^t \dot y(s,x)ds \qquad a.e.\ (t,x)\in Q_T.$$

又由 $\dot y\in L^2(Q_T)$ 知上式右端对任意的 $t\in[0,T]$ 有意义，从而 $y\in W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega))$．亦即 $y\in L^2(-r,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega))$ 成立．

第二步：证明 (4.9) 式成立．该式显然等价于

$$\eta\in L_-^2(Q_T),\quad y\in L_+^2(Q_T)\ \text{且}\ \eta y=0\quad a.e.\ in\ Q_T. \tag{4.33}$$

下面，我们依次证明上述各式．

首先，$L_-^2(Q_T)$ 作为 $L^2(Q_T)$ 中的闭凸集是弱闭的，故由 $\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\in L_-^2(Q_T)$ 与 (4.31) 立即得到 $\eta\in L_-^2(Q_T)$．

其次，若 $y\bar{\in}L_+^2(Q_T)$，则存在某 $\delta>0$ 使得可测集 $E=\{(t,x)\in Q_T\mid y(t,x)<-2\delta\}$ 有正测度．不妨设 $|E|=2\sigma$．由 (4.31), $\{y_\varepsilon\}$ 有某子列在 Q_T 上几乎处处收敛于 y．根据 Egorov 定理，存在 E 的某个可测子集 E_σ 使得 $|E_\sigma|>\sigma$，且 $\{y_\varepsilon\}$ 在 E_σ 上一致收敛于 y．故当 ε 充分小时，$y_\varepsilon<-\delta$ 在 E_σ 上一致成立．由 $\beta'_\varepsilon\ge 0$ 知 $\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\le\beta_\varepsilon(-\delta)$ 在 E_σ 上一致成立．从而，根据 (4.14) 可得

$$\int_{E_\sigma}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)ydtdx\ge\int_{E_\sigma}\beta_\varepsilon(-\delta)(-2\delta)dtdx=-2\delta\,|E_\sigma|\,\beta_\varepsilon(-\delta)\to+\infty,\qquad \varepsilon\to 0.$$

另一方面，由 $\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)$ 的弱收敛性可得

$$\int_{E_\sigma}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)ydtdx=\int_{Q_T}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)(y\chi_{E_\sigma})dtdx\to\int_{E_\sigma}\eta ydtdx<+\infty,\qquad \varepsilon\to 0.$$

上述矛盾说明 $y\in L_+^2(Q_T)$ 必然成立．

最后，由 $\int_{Q_T}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)y_\varepsilon dtdx\ge 0$ 及 (4.31) 可得 $\int_{Q_T}\eta ydtdx\ge 0$．注意到 $\eta y\le 0$，立即得知 $\eta y=0$ $(a.e.\ \text{in}\ Q_T)$．故 (4.33) 得证．

第三步：证明 y 是变分不等式 (4.6) 的解. 显然，我们只需要证明 (4.10) 成立即可. 根据算子 G 的有界性及 (4.30)，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$(\dot{y}_\varepsilon,\ \triangle y_\varepsilon,\ G(\triangle y_\varepsilon),\ \beta_\varepsilon(y_\varepsilon)) \text{ 在 } \left(L^2(Q_T)\right)^4 \text{ 中弱收敛于} (\dot{y},\ \triangle y,\ G(\triangle y),\ \eta).$$

且由

$$|F(y_\varepsilon, u) - F(y, u)| \le k\,|y_\varepsilon - y|$$

可知

$$\int_{Q_T} |F(y_\varepsilon, u) - F(y, u)|^2\, dtdx \le k^2 \int_{Q_T} |y_\varepsilon - y|^2\, dtdx.$$

从而，由 (4.31) 我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|F(y_\varepsilon, u) - F(y, u)\|_{L^2(Q_T)} = 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$，在方程 (4.15) 两边取 $L^2(Q_T)$ 中的弱极限立即得到 (4.10). □

定理 4.4.2. *(解对初值的连续依赖性定理)* 设 $(\mathrm{H_f})$ 与 (H_μ) 成立，则存在常数 $C = C(r, T, \mu(\cdot), k) > 0$，使得对任意的 $\varphi,\ \hat{\varphi} \in L^2\big(-r, 0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big)$、$z,\ \hat{z} \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega)$ 及 $u \in \mathcal{U}$ 下述估计式成立：

$$\begin{aligned} &\|\hat{y} - y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla(\hat{y} - y)\|^2_{L^2(Q_T)} \\ \le\ & C\Big(\|\hat{z} - z\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\hat{\varphi} - \nabla\varphi\|^2_{L^2(Q_{-r})}\Big). \end{aligned} \tag{4.34}$$

这里，y 与 $\hat{y}$ 分别是 (4.6) 对应于 (u, φ, z) 与 $(u, \hat{\varphi}, \hat{z})$ 的解.

证明. 设

$$\begin{cases} \eta = F(y, u) - \dot{y} + \triangle y - G(\triangle y), \\ \hat{\eta} = F(\hat{y}, u) - \dot{\hat{y}} + \triangle \hat{y} - G(\triangle \hat{y}). \end{cases}$$

则 $\eta,\ \hat{\eta} \in L^2(Q_T)$，且有

$$\eta \in \beta(y), \quad \hat{\eta} \in \beta(\hat{y}), \qquad a.e.\ \text{in } Q_(T). \tag{4.35}$$

令 $\tilde{y}=\hat{y}-y$. 则 $\tilde{y}$ 满足

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}-\triangle\tilde{y}+G\triangle\tilde{y}+(\hat{\eta}-\eta)=F(\hat{y},u)-F(y,u), & a.e. \text{ in } Q_T; \\ \tilde{y}=\hat{\varphi}-\varphi, & \text{in } Q_{-r}; \\ \tilde{y}(0,\cdot)=\hat{z}-z, & \text{in } \Omega; \\ \tilde{y}(t,x)=0, & \text{in } \Sigma_T. \end{cases}$$

对于任意的 $0<s\le T$，以 $\tilde{y}$ 乘该方程并在 Q_s 上积分，则有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega \tilde{y}(s,x)^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega(\hat{z}-z)^2dx+\int_{Q_s}|\nabla\tilde{y}|^2\,dtdx+\int_{Q_s}(\hat{\eta}-\eta)(\hat{y}-y)dtdx \\ =\ &\int_\Omega dx\int_0^s(G\nabla\tilde{y})\cdot\nabla\tilde{y}dt+\int_{Q_s}[F(\hat{y},u)-F(y,u)]\tilde{y}dtdx. \end{aligned}$$

由 (4.35) 可知

$$\int_{Q_s}(\hat{\eta}-\eta)(\hat{y}-y)dtdx\ge 0.$$

从而，引用 (4.18) 可得

$$\int_\Omega \tilde{y}(s,x)^2dx+2\int_{Q_s}|\nabla\tilde{y}|^2\,dtdx \tag{4.36}$$

$$\le\ \int_\Omega(\hat{z}-z)^2dx+2k\int_{Q_s}\tilde{y}^2dtdx+2\left|\int_{Q_s}(G\nabla\tilde{y})\cdot\nabla\tilde{y}dtdx\right|. \tag{4.37}$$

根据引理 4.3.4，存在常数 $C=C(r,T,k,\mu)>0$ 使得

$$\begin{aligned} &\|\tilde{y}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+2\|\nabla\tilde{y}\|^2_{L^2(Q_T)} \\ \le\ &C\Big(\int_\Omega(\hat{z}-z)^2dx+2\int_{Q_{-r}}|\nabla(\hat{\varphi}-\varphi)|^2\,dtdx\Big). \end{aligned}$$

此不等式显然与 (4.34) 等价. □

在定理 4.4.2 中取 $\hat{\varphi}$ 与 $\hat{z}$ 分别等于 φ 与 z，则立即得到

定理 4.4.3. (**解的存在唯一性定理**) 若 $(\mathbf{H_f})$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，则对于任意的 $\varphi\in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$、$z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 及 $u\in\mathcal{U}$，变分不等式 (4.6) 恒有唯一解 (y,η). □

对于任意的 $\varphi\in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$ 、 $z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 及 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ ，在后文中我们一般只用 $y(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 或 $y(\boldsymbol{u})$ （当初值 φ 与 z 给定时）表示变分不等式 (4.6) 的解，而略去 $\eta(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 或 $\eta(\boldsymbol{u})$ [1] .

由解的唯一性及定理 4.4.1 可知：变分不等式 (4.6) 的任一解 $y(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 均是逼近系统 (4.15) 的某个解序列 $\{y_\varepsilon(\boldsymbol{u},\varphi,z)\}$ 的极限. 从 (4.30) 与 (4.24) 我们立即得知 $y(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 及其各阶导数一致（关于参数 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ 一致）受控于其初值的模. 即我们有下述结论：

定理 4.4.4. *设 $(\mathbf{H}_f)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立. 则存在常数 $C=C(r,T,\mu(\cdot),k)>0$ 使得对任意的 $\varphi\in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$ 、 $z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 及 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ ，变分不等式 (4.6) 的解 (y,η) 恒满足下述估计式：*

$$\begin{aligned}&\|y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\Delta y\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\dot y\|^2_{L^2(Q_T)}+\|\eta\|^2_{L^2(Q_T)}\\ \le\ & C\Big(1+\|z\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\varphi\|^2_{L^2(-r,0;H^2(\Omega))}\Big).\end{aligned}\tag{4.38}$$

□

当初值 φ 与 z 给定时，对于以 0 为聚点的任意集合 $\{\,\varepsilon\,\}\subseteq(0,1)$ 、 β 的任一族光滑逼近 β_ε 及任意一族参数 $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}\subset\mathcal{U}$ ，变分不等式 (4.6) 的解族 $\{y^\varepsilon=y(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\}$ 与逼近系统 (4.15) 的解族 $\{y_\varepsilon=y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\}$ 有着非常密切的关系. 下述结果在后文中将多次用到.

定理 4.4.5. *设 $(\mathbf{H}_f)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，且 $\varphi\in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$ 与 $z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 给定. 则对于 β 的任一族光滑逼近 β_ε 及任意的 $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}\subset\mathcal{U}$ ，变分不等式 (4.6) 的解族 $\{y^\varepsilon=y(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\}$ 与逼近系统 (4.15) 的解族 $\{y_\varepsilon=y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\}$ 具有下述性质：*

(i) 存在 $\eta\in L^2(Q_T)$ 与 $y\in L^2\big(-r,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)\cap W^{1,2}\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ 以及 $\{y^\varepsilon\}$ 与 $\{y_\varepsilon\}$ 的子列，使得

$$\text{当}\ \ \varepsilon\to0\ \text{时},\qquad\begin{cases}y^\varepsilon\text{与}y_\varepsilon\text{在}H^1(Q_T)\text{中弱收敛于}y,\ \text{在}L^2(Q_T)\text{中强收敛于}y;\\ \Delta y^\varepsilon\text{与}\Delta y_\varepsilon\text{在}L^2(Q_T)\text{中弱收敛于}\Delta y;\\ \eta^\varepsilon\text{与}\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\text{在}L^2(Q_T)\text{中弱收敛于}\ \ \eta.\end{cases}\tag{4.39}$$

且 (4.9) 式成立. 这里 $(y^\varepsilon,\eta^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ 满足 (4.10) .

[1] 参见第 36 页的附注.

(ii)$\{y_\varepsilon\}$ 与 $\{y^\varepsilon\}$ 的上述子列满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|y_\varepsilon-y^\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla(y_\varepsilon-y^\varepsilon)\|^2_{L^2(Q_T)}\right)=0 \tag{4.40}$$

证明. 在定理 4.4.1 证明的第一步与第二步中以 $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ 取代 $\boldsymbol{u}$，立即得到 (i) 中关于 y_ε 与 η 的结论 (4.30) 与 (4.9). 从估计式 (4.38) 出发，同理可证：存在 $\hat{\eta}\in L^2(Q_T)$, $\hat{y}\in L^2\big(-r,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)\cap W^{1,2}\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ 及 $\{y^\varepsilon\}$ 的子列，使得

$$\text{当}\quad \varepsilon\to 0\quad\text{时,}\qquad \begin{cases} y^\varepsilon\text{在}H^1(Q_T)\text{中弱收敛于}\hat{y},\ \text{在}L^2(Q_T)\text{中强收敛于}\hat{y};\\ \Delta y^\varepsilon\text{在}L^2(Q_T)\text{中弱收敛于}\Delta\hat{y};\\ \eta^\varepsilon\text{在}L^2(Q_T)\text{中弱收敛于}\ \ \hat{\eta}. \end{cases} \tag{4.41}$$

如能证明

$$\hat{y}=y,\qquad \hat{\eta}=\eta, \tag{4.42}$$

则 (4.39) 得证.

我们将 (4.42) 的证明放在最后，下面先证 (4.40) 式成立. 记

$$z_\varepsilon=y_\varepsilon-y^\varepsilon,\ \ y_\varepsilon^+=\max\{y_\varepsilon,\ 0\},$$

则我们有

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon-\Delta z_\varepsilon+G(\Delta z_\varepsilon)+[\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)-\eta^\varepsilon]=F(y_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-F(y^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon), & \text{in } Q_T\\ z_\varepsilon\big|_{\Sigma_T}=0,\\ z_\varepsilon\big|_{t\le 0}=0. \end{cases}$$

对于任意的 $s\in(0,T]$, 以 z_ε 乘上式两边并在 Q_s 上积分，则得

$$\begin{aligned} &\frac12\int_\Omega z_\varepsilon(s)^2dx+\int_{Q_s}|\nabla z_\varepsilon|^2\,dtdx+\int_{Q_s}[\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)y_\varepsilon-\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)y^\varepsilon-\eta^\varepsilon y_\varepsilon^++\eta^\varepsilon y^\varepsilon]dtdx\\ =\ &\int_{Q_s}\eta^\varepsilon(y_\varepsilon-y_\varepsilon^+)dtdx-\int_{Q_s}(G\nabla z_\varepsilon)\cdot\nabla z_\varepsilon dtdx+\int_{Q_s}[F(y_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-F(y^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)]z_\varepsilon dtdx. \end{aligned}$$

注意到

$$\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)\le 0,\quad \beta_\varepsilon(y_\varepsilon)y_\varepsilon\ge 0,\ \ y^\varepsilon\ge 0,\quad \eta^\varepsilon\le 0,\quad \eta^\varepsilon y^\varepsilon=0,\quad (a.e.\ \text{ in } Q_T)$$

以及

$$[F(y_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-F(y^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)]z_\varepsilon=\int_0^1F_y(y^\varepsilon+\lambda z_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)z_\varepsilon^2d\lambda\le kz_\varepsilon^2,$$

我们得到

$$\int_\Omega z_\varepsilon(s,x)^2dx+2\int_{Q_s}|\nabla z_\varepsilon|^2\,dtdx$$
$$\leq\ 2\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}\left\|y_\varepsilon-y_\varepsilon^+\right\|_{L^2(Q_T)}+2\left|\int_{Q_s}(G\nabla z_\varepsilon)\cdot\nabla z_\varepsilon dtdx\right|+2k\int_{Q_s}z_\varepsilon^2dtdx.$$

根据引理 4.3.4 可得

$$\|z_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+2\|\nabla z_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)}\leq C_1\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}\left\|y_\varepsilon-y_\varepsilon^+\right\|_{L^2(Q_T)}, \qquad \forall\,\varepsilon>0.$$

又由 (4.38) 可知

$$\|\eta^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}\leq C_2, \qquad \forall\,\varepsilon>0.$$

从而，我们得到

$$\|z_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla z_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)}\leq C\left\|y_\varepsilon-y_\varepsilon^+\right\|_{L^2(Q_T)}, \qquad \forall\,\varepsilon>0.$$

其中， $C_i=C_i(r,T,\mu(\cdot),k)$， $i=1,\ 2$； $C=2C_1C_2$． 又由

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|y_\varepsilon-y\|_{L^2(Q_T)}=0,\quad y\geq0\ \ (\ a.e.\ \text{in}\ Q_T\ )\ \ \text{及}\ \ \left|y-y_\varepsilon^+\right|\leq|y-y_\varepsilon|$$

立即得到

$$\left\|y_\varepsilon-y_\varepsilon^+\right\|_{L^2(Q_T)}\leq\|y_\varepsilon-y\|_{L^2(Q_T)}+\left\|y-y_\varepsilon^+\right\|_{L^2(Q_T)}\leq2\|y_\varepsilon-y\|_{L^2(Q_T)}\to0,\quad\varepsilon\to0.$$

从而， (4.40) 式成立.

最后，我们证明 (4.42)． 显然， (4.40) 蕴涵

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|z_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}=0.$$

另一方面，由 (4.30) 与 (4.41) 可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|z_\varepsilon-(y-\hat y)\|_{L^2(Q_T)}\leq\lim_{\varepsilon\to0}\left(\|y_\varepsilon-y\|_{L^2(Q_T)}+\|\hat y-y^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}\right)=0.$$

从而

$$\hat y=y.$$

又由

$$|F(y_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-F(y^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)|\leq\int_0^1|F_y(y^\varepsilon+\lambda z_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)z_\varepsilon|\,d\lambda\leq k\,|z_\varepsilon|$$

可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|F(y_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-F(y^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)\|_{L^2(Q_T)}=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$ ，在等式

$$\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)-\eta^\varepsilon=F(y_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-F(y^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon)-\dot{z}_\varepsilon+\triangle z_\varepsilon-G(\triangle z_\varepsilon)$$

两边取 $L^2(Q_T)$ 中的弱极限，则由 (4.30) 与 (4.41) 立即得到

$$\eta-\hat{\eta}=0.\qquad \text{即}\qquad \hat{\eta}=\eta.$$

□

§4.5　解对参数的连续依赖性

为了考虑 (4.6) 的解 $y=y(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 对参数 $\boldsymbol{u}$ 的连续依赖性，我们需要 F 关于 $\boldsymbol{u}$ 具有 Hölder 连续性. 即 F 满足下述假设

($\mathbf{H_u}$) *存在常数 $M>0$ 与 $\alpha>0$，使得*

$$\|F(y,\boldsymbol{u})-F(y,\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)}\le M(1+|y|)d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^\alpha,\qquad \forall y\in R,\ \forall\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathcal{U}.\quad (4.43)$$

当 F 满足 ($\mathbf{H_f}$) 时，对任意 $y\in R$ 与 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ 恒有 $F(y,\boldsymbol{u})\in L^2(Q_T)$，从而 (4.43) 式有意义. 我们首先证明下述基本结论.

引理 4.5.1. *若 F 满足 ($\mathbf{H_f}$) 与 ($\mathbf{H_u}$)，则对于任意的 $y\in L^2(Q_T)$ 及 $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$，恒有*

$$\|F(y,\boldsymbol{u})-F(y,\boldsymbol{v})\|^2_{L^2(Q_T)}\le\frac{4kM(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}}\big(1+\|y\|^2_{L^2(Q_T)}\big)d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^\alpha.\qquad (4.44)$$

证明. 对于任意的 $y\in L^2(Q_T)$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$，由 ($\mathbf{H_f}$) 立即得知 $F(\cdot,\cdot,y(\cdot,\cdot),\boldsymbol{u})$ 为 Q_T 上可测函数. 且由

$$|F(y,\boldsymbol{u})|\le k(1+|y|)$$

可知 $F(y,\boldsymbol{u})\in L^2(Q_T)$.

我们首先证明当 y 为 Q_T 上简单函数时 (4.44) 式成立. 不妨设

$$y=\sum_{j=1}^m y_j\chi_{E_j}.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式及 (4.43) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |F(y,\boldsymbol{u}) - F(y,\boldsymbol{v})|^2 \, dtdx = \sum_{j=1}^{m} \int_{E_j} |F(y_j,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{v})|^2 \, dtdx \\
\le\ & 2k \sum_{j=1}^{m} (1+|y_j|) \int_{E_j} |F(y_j,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{v})| \, dtdx \\
\le\ & 2k \sum_{j=1}^{m} (1+|y_j|) \Big(\int_{E_j} dtdx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{E_j} |F(y_j,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{v})|^2 \, dtdx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & 2k \sum_{j=1}^{m} (1+|y_j|) \sqrt{|E_j|} \, \|F(y_j,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)} \\
\le\ & 2kMd(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\alpha} \sum_{j=1}^{m} (1+|y_j|)^2 \sqrt{|E_j|}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{Q_T} y^2 dtdx = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 |E_j|, \ \ |Q_T| = \sum_{j=1}^{m} |E_j| \ \ \text{与} \ \ |E_j| \le \frac{|E_j|^2}{|Q_T|},$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} (1+|y_j|)^2 \sqrt{|E_j|} \\
\le\ & 2 \sum_{j=1}^{m} (1+y_j^2) \frac{|E_j|}{\sqrt{|Q_T|}} \\
=\ & 2\sqrt{|Q_T|} + \frac{2}{\sqrt{|Q_T|}} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 |E_j| \\
=\ & \frac{2}{\sqrt{|Q_T|}} \big(|Q_T| + \|y\|^2_{L^2(Q_T)} \big) \\
\le\ & \frac{2(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}} \big(1 + \|y\|^2_{L^2(Q_T)} \big).
\end{aligned}$$

从而, (4.44) 式成立.

当 y 为任意的 $L^2(Q_T)$ 函数时, 取 Q_T 上简单函数列 $\{y_j\}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty} \|y_j - y\|_{L^2(Q_T)} = 0\,, \quad \text{从而} \quad \lim_{j\to\infty} \|y_j\|_{L^2(Q_T)} = \|y\|_{L^2(Q_T)} \ .$$

由

$$\begin{aligned}
&|F(y,\boldsymbol{u}) - F(y,\boldsymbol{v})| \\
\le\ & |F(y,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{u})| + |F(y_j,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{v})| + |F(y_j,\boldsymbol{v}) - F(y,\boldsymbol{v})| \\
\le\ & 2k\,|y - y_j| + |F(y_j,\boldsymbol{u}) - F(y_j,\boldsymbol{v})|
\end{aligned}$$

及范数不等式可得

$$
\begin{aligned}
& \|F(y,\boldsymbol{u})-F(y,\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)} \\
\leq\ & 2k\,\|y-y_j\|_{L^2(Q_T)}+\|F(y_j,\boldsymbol{u})-F(y_j,\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)} \\
\leq\ & 2k\,\|y-y_j\|_{L^2(Q_s)}+\Big[\frac{4kM(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}}\big(1+\|y_j\|^2_{L^2(Q_T)}\big)d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^\alpha\Big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

令 $j\to\infty$ 取极限，则得到 (4.44) 式. □

定理 4.5.2.（解对参数的连续依赖性定理） *设 $(\mathbf{H_f})$、$(\mathbf{H_u})$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，则存在常数 $C=C(r,T,\mu(\cdot),k,M)>0$，使得对任意的 φ, $\hat{\varphi}\in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$、$z$, $\hat{z}\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 及 $\boldsymbol{u}$, $\hat{\boldsymbol{u}}\in\mathcal{U}$，下述估计式成立:*

$$
\begin{aligned}
& \|\hat{y}-y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla(\hat{y}-y)\|^2_{L^2(Q_T)} \\
\leq\ & C\Big(\|\hat{z}-z\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\hat{\varphi}-\nabla\varphi\|^2_{L^2(Q_{-r})}+\big(1+\|y\|^2_{L^2(Q_T)}\big)d(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}})^\alpha\Big). \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

这里，y 与 $\hat{y}$ 分别是 (4.6) 对应于 $(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 与 $(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\varphi},\hat{z})$ 的解.

证明. 在定理 4.4.2 的证明中以 $F(\hat{y},\hat{\boldsymbol{u}})$ 取代 $F(\hat{y},\boldsymbol{u})$，并由 (4.18) 与 (4.44) 可得

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{Q_s}[F(\hat{y},\hat{\boldsymbol{u}})-F(y,\boldsymbol{u})]\tilde{y}dtdx\right| \\
\leq\ & \int_{Q_s}|F(\hat{y},\hat{\boldsymbol{u}})-F(y,\hat{\boldsymbol{u}})|\,|\tilde{y}|\,dtdx\int_{Q_s}|F(y,\hat{\boldsymbol{u}})-F(y,\boldsymbol{u})|\,|\tilde{y}|\,dtdx \\
\leq\ & 2k\int_{Q_s}\tilde{y}^2dtdx+\frac{1}{4k}\int_{Q_s}|F(y,\hat{\boldsymbol{u}})-F(y,\boldsymbol{u})|^2\,dtdx \\
\leq\ & 2k\int_{Q_s}\tilde{y}^2dtdx+\frac{M(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}}\big(1+\|y\|^2_{L^2(Q_T)}\big)d(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})^\alpha.
\end{aligned}
$$

故 (4.36) 相应地由下式取代

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega\tilde{y}(s,x)^2dx+2\int_{Q_s}|\nabla\tilde{y}|^2\,dtdx \\
\leq\ & \int_\Omega(\hat{z}-z)^2dx+4k\int_{Q_s}\tilde{y}^2dtdx+2\left|\int_{Q_s}(G\nabla\tilde{y})\cdot\nabla\tilde{y}dtdx\right| \\
& +\frac{2M(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}}\big(1+\|y\|^2_{L^2(Q_T)}\big)d(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})^\alpha.
\end{aligned}
$$

根据引理 4.3.4，存在常数 $C=C(r,T,\mu(\cdot),k)>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\|\tilde y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+2\|\nabla\tilde y\|^2_{L^2(Q_T)}\\ \le\ & C\Big(\int_\Omega(\hat z-z)^2dx+2\int_{Q_{-r}}|\nabla(\hat\varphi-\varphi)|^2\,dtdx+\frac{2M(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}}(1+\|y\|^2_{L^2(Q_T)})d(\hat{\boldsymbol u},\boldsymbol u)^\alpha\Big).\end{aligned}$$

此不等式显然与 (4.45) 等价. □

在结束本节之前，我们给出定理 4.4.5 的下述补充.

定理 4.5.3. *若 $(\mathbf{H_f})$、$(\mathbf{H}_\mu)$ 与 $(\mathbf{H_u})$ 成立，且存在 $\boldsymbol u\in\mathcal U$，使得*

$$\lim_{\varepsilon\to0}d(\boldsymbol u_\varepsilon,\boldsymbol u)=0 \tag{4.46}$$

成立，则定理 4.4.5 (i) 中的 (y,η) 是变分不等式 (4.6) 的解.

证明. 由定理 4.4.5 (i) 已经得知 (4.9) 式成立，我们只需证明 (y,η) 满足 (4.10)．由 (4.18) 与 (4.44) 可得

$$\begin{aligned}&\|F(y_\varepsilon,\boldsymbol u_\varepsilon)-F(y,\boldsymbol u)\|_{L^2(Q_T)}\\ \le\ &\|F(y_\varepsilon,\boldsymbol u_\varepsilon)-F(y,\boldsymbol u_\varepsilon)\|_{L^2(Q_T)}+\|F(y,\boldsymbol u_\varepsilon)-F(y,\boldsymbol u)\|_{L^2(Q_T)}\\ \le\ & k\|y_\varepsilon-y\|_{L^2(Q_T)}+\Big[\frac{4kM(|Q_T|+1)}{\sqrt{|Q_T|}}(1+\|y\|^2_{L^2(Q_T)})d(\boldsymbol u_\varepsilon,\boldsymbol v)^\alpha.\Big]^{\frac12}.\end{aligned}$$

故由 (4.39) 与 (4.46) 可知

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|F(y_\varepsilon,\boldsymbol u_\varepsilon)-F(y,\boldsymbol u)\|_{L^2(Q_T)}=0.$$

在等式

$$\dot y_\varepsilon-\triangle y_\varepsilon+G(\triangle y_\varepsilon)+\beta_\varepsilon(y_\varepsilon)=F(y_\varepsilon,\boldsymbol u_\varepsilon)$$

两边令 $\varepsilon\to0$ 取 $L^2(Q_T)$ 中的弱极限，并注意到 (4.39)，则立即得到 (4.10). □

§4.6 无限时滞的情形

如果 $\mu(\cdot)$ 是 $((-\infty,0],\mathcal B)$ 上的有限值广义测度，将时滞算子定义式中的 (4.2) 修改为

$$(Gh)(t,x)\triangleq\int_{-\infty}^0\overline h(t+\theta,x)\mu(d\theta)\quad a.e.\ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega. \tag{4.47}$$

则 (4.6) 是具有无限时滞的变分不等式.

如果将关于测度 μ 的假设 $(\mathbf{H}_\mu)$ 换成

$$(\mathbf{H}_\mu^\infty) \qquad \lim_{s\downarrow 0}|\mu|\big((-\infty,0]\big)\mid\mu\mid\big([-s,0]\big)<1. \tag{4.48}$$

则我们可以推广文 [74] 中的定理 2.4 到无限时滞的情形，从而可以证明：

引理 4.6.1. *若 $(\mathbf{H}_f)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu^\infty)$ 成立，则对于任意的 $\varphi\in L^2\big(-\infty,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$，$z\in H_0^1(\Omega)$ 及 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$，以 (4.47) 取代 (4.2) 之后的逼近系统 (4.15) 恒有唯一解 $y_\varepsilon\in L^2\big(-\infty,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)\cap W^{1,2}\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$.*

仔细检查前几节各结论的证明过程可以发现：只要将假设 $(\mathbf{H}_\mu)$ 换成 $(\mathbf{H}_\mu^\infty)$，则本章的所有结论 (在叙述上略做修改后) 对于无限时滞的情形仍然成立.

第五章 时滞变分不等式的最优控制

§5.1 问题的提法

设 U 为可分度量空间，定义控制函数类 $\mathcal{U}$ 为

$$\mathcal{U}=\{\boldsymbol{u}=u(\cdot,\cdot)\mid u(\cdot,\cdot)\text{为}Q_T\longrightarrow U\text{ 的可测映射 }\}. \tag{5.1}$$

在 $\mathcal{U}$ 上定义 Ekeland 距离:

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=|\{(t,x)\in Q_T|\ u(t,x)\neq v(t,x)\}|\quad (\forall \boldsymbol{u}=u(\cdot,\cdot),\boldsymbol{v}=v(\cdot,\cdot)\in\mathcal{U}). \tag{5.2}$$

根据 [46] 可知，($\mathcal{U}$, d) 为完备度量空间（参见 [46] Proposition 3.10 ）.

给定函数 $f,f^0:R\times R^n\times R\times U\to R$，并设它们满足基本假设 ($\mathbf{H}_1$)．定义函数

$$F(t,x,y,\boldsymbol{u})=f(t,x,y,u(t,x))\qquad(\forall\ (t,x,y)\in Q_T\times R,\ \boldsymbol{u}=u(\cdot,\cdot)\in\mathcal{U}). \tag{5.3}$$

则变分不等式 (4.6) 转化为以控制函数 $\boldsymbol{u}=u(\cdot,\cdot)$ 为参数的下述形式:

$$\begin{cases}\dot y(t,x)-\Delta y(t,x)+G(\Delta y)(t,x)+\beta(y(t,x))\ni f(t,x,y(t,x),u(t,x)),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad in\ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));\\ y(t,x)=\varphi(t,x),\qquad a.e.\ (t,x)\in Q_{-r};\\ y(0,x)=z(x),\qquad a.e.\ x\in\Omega;\\ y(t,x)=0,\qquad in\ \Sigma_T.\end{cases} \tag{5.4}$$

引理 5.1.1. 若 ($\mathbf{H}_1$) 与 ($\mathbf{H}_\mu$) 成立，则

(*i*) 由 (5.3) 定义的 F 满足 ($\mathbf{H}_\mathrm{f}$) 与 ($\mathbf{H}_\mathrm{u}$)．

(*ii*) 对于任意的 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ 及 $\varphi\in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$、$z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$，变分不等式 (5.4) 恒有唯一解．且其解 $\boldsymbol{y}=y(\cdot,\cdot,\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 连续依赖 [1] 于 $(\boldsymbol{u},\varphi,z)$．

证明. 当 (1.2.11) 成立时，($\mathbf{H}_\mathrm{f}$) 显然成立．且对于任意的 $\boldsymbol{u}=u(\cdot,\cdot),\boldsymbol{v}=v(\cdot,\cdot)\in\mathcal{U}$ 及 $(t,x,y)\in Q_T\times R$，由

$$|f(t,x,y,u(t,x))|=\left|f(t,x,0,u(t,x))+\int_0^1 f(t,x,\lambda y,u(t,x))yd\lambda\right|\le k(1+|y|) \tag{5.5}$$

[1] 这里的“连续依赖”按第 52 页定理 4.5.2 的意义理解．其中的 $\alpha=\frac{1}{2}$.

可知：

$$\|F(y,\boldsymbol{u})-F(y,\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)}^2=\int_{Q_T}|f(t,x,y,u(t,x))-f(t,x,y,v(t,x))|^2\,dtdx$$

$$\begin{aligned}&\le\int_{\{u(t,x)\neq v(t,x)\}}\big[2k(1+|y|)\big]^2dtdx\\&=\big[2k(1+|y|)\big]^2d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

即

$$\|F(y,\boldsymbol{u})-F(y,\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)}\le 2k(1+|y|)d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}}.$$

从而 $(\mathbf{H_u})$ 成立.

(ii) 是定理 4.4.3 与定理 4.5.2 的直接推论. □

以后我们将用 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 等直接表示轨线 $y(\cdot,\cdot)$ 与控制 $u(\cdot,\cdot)$ 或 $v(\cdot,\cdot)$ 等函数 [1]，而不再设出 $\boldsymbol{y}=y(\cdot,\cdot)$、$\boldsymbol{u}=u(\cdot,\cdot)$ 或 $\boldsymbol{v}=v(\cdot,\cdot)$ 等. 系统 (5.4) 的解 $\boldsymbol{y}=y(\cdot,\cdot,\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 以后仍简记为 $y(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 或 $y(\boldsymbol{u})$（当初值 (φ,z) 给定时）. 记

$$\mathcal{A}=\Big\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\;\Big|\;\boldsymbol{u}\in\mathcal{U},\;\boldsymbol{y}=y(\boldsymbol{u})\Big\}.$$

称 $\mathcal{A}$ 为变分不等式 (5.4) 对应于 (φ,z) 的 *可行集*， $\mathcal{A}$ 中元 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ 称为 *可行对*.

给定初值 [2] $\varphi\in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)\big)$ 及 $z\in H_1^0(\Omega)\bigcap L_+^2(\Omega)$，定义 $\mathcal{A}$ 上泛函 J 如下：

$$J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})=\int_{Q_T}f^0\big(t,x,y(t,x),u(t,x)\big)dtdx,\qquad\forall(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\in\mathcal{A}.\tag{5.6}$$

显然，当 $(\mathbf{H_1})$ 成立时，对于任意的 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\in\mathcal{A}$，恒有 $f^0\big(\cdot,\cdot,y(\cdot,\cdot),u(\cdot,\cdot)\big)\in L^1(Q_T)$，即 (5.6) 式有意义. 我们的控制问题即是

问题$(\mathbf{C})$： *寻求*$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{u}})\in\mathcal{A}$*使得*

$$J(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{u}})=\inf_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\in\mathcal{A}}J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}).\tag{5.7}$$

如果这样的 $(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{u}})$ 存在，则称之为问题 (C) 的一个 *最优对*， $\bar{\boldsymbol{u}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 分别称为 *最优控制* 与 *最优轨线*.

---

[1] 记号 $\boldsymbol{y}$ 只用于表示作为整体的函数 $y(\cdot,\cdot)$, 不用于表示函数值 $y(t,x)$.

[2] 在本章中，我们将固定系统 (5.4) 的初值 $\varphi\in L^2\big(-r,0;H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)\big)$ 及 $z\in H_1^0(\Omega)\bigcap L_+^2(\Omega)$, 以后不再注明.

若 $(\mathbf{H}_1)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，则由引理 5.1.1 可知，指标泛函 (5.6) 的值由控制 $\boldsymbol{u}$ 唯一确定，我们将以 $J(u)$ 表示．记

$$\bar{J}=\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}} J(\boldsymbol{u}). \tag{5.8}$$

可以证明泛函 J 具有 Hölder 连续性.

定理 5.1.2. *若 $(\mathbf{H}_1)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，则存在常数 $C=C(r,T,k,\mu(\cdot),\varphi(\cdot,\cdot),z(\cdot))>0$，使得*

$$|J(\boldsymbol{u})-J(\boldsymbol{v})|\le Cd(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{4}},\qquad \forall \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathcal{U}. \tag{5.9}$$

证明．记

$$F^0(t,x,y,\boldsymbol{u})=f^0(t,x,y,u(t,x)),\qquad \forall (t,x,y,\boldsymbol{u})\in R\times R^n\times R\times\mathcal{U}.$$

在引理 5.1.1(i) 的证明中以 F^0 取代 F，则立即得到：

$$\left\|F^0(y,\boldsymbol{u})-F^0(y,\boldsymbol{v})\right\|_{L^2(Q_T)}\le 2k(1+|y|)d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}},\qquad \forall y\in R,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathcal{U}.$$

即 F 与 F^0 均满足 $(\mathbf{H}_f)$ 与 $(\mathbf{H}_u)$．由定理 4.4.4，不妨设 [1]

$$\|y(\boldsymbol{u})\|_{L^2(Q_T)}\le C_1,\qquad \forall \boldsymbol{u}\in\mathcal{U}.$$

对于任意的 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathcal{U}$，由定理 4.5.1 、定理 4.5.2 及上式可得

$$\left\|F^0(y(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})-F^0(y(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})\right\|_{L^2(Q_T)}\le C_2 d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{4}},$$

$$\|y(\boldsymbol{u})-y(\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)}\le C_3 d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{4}}.$$

从而，由 $(\mathbf{H}_1)$ 及 Cauchy-Schwartz 不等式，我们由有

$$\begin{aligned}
&|J(\boldsymbol{u})-J(\boldsymbol{v})|\\
\le\ & \int_{\{u\ne v\}}\left|f^0(y(\boldsymbol{u}),u)-f^0(y(\boldsymbol{u}),v)\right|dtdx+\int_{Q_T}\left|f^0(y(\boldsymbol{u}),v)-f^0(y(\boldsymbol{v}),v)\right|dtdx\\
\le\ & d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}}\left\|F^0(y(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})-F^0(y(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})\right\|_{L^2(Q_T)}+k\int_{Q_T}|y(\boldsymbol{u})-y(\boldsymbol{v})|\,dtdx\\
\le\ & C_2 d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{3}{4}}+k\sqrt{|Q_T|}\,\|y(\boldsymbol{u})-y(\boldsymbol{v})\|_{L^2(Q_T)}\\
\le\ & C_2 d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{3}{4}}+kC_3\sqrt{|Q_T|}d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

[1] 注意上页脚注 2.

注意到

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \le |Q_T|, \qquad \forall \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}, \tag{5.10}$$

我们得到

$$|J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{v})| \le (C_2 + kC_3)\sqrt{|Q_T|}d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{\frac{1}{4}}.$$

(5.9) 式获证. □

推论 5.1.3. *若* $(\mathbf{H}_1)$ *与* $(\mathbf{H}_\mu)$ *成立，则*

$$-\infty < \bar{J} < +\infty. \tag{5.11}$$

且存在常数 $C = C(r, T, k, \mu(\cdot), \varphi(\cdot,\cdot), z(\cdot)) > 0$ *，使得*

$$|J(\boldsymbol{u})| \le C, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}. \tag{5.12}$$

证明. 显然，我们只需证明 (5.12) 式. 取定 $\boldsymbol{v}_0 \in \mathcal{U}$ ，对于任意的 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ ，由 (5.9) 与 (5.10) 可得

$$|J(\boldsymbol{u})| \le |J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{v}_0)| + |J(\boldsymbol{v}_0)| \le C\,|Q_T|^{\frac{1}{4}} + |J(\boldsymbol{v}_0)|.$$

此即 (5.12) 式. □

§5.2 最优控制的存在性

为了给出最优控制的存在性，我们引入下述的 Cesari 性质 ([17]) .

定义 5.2.1. *对于任意的* $(t,x,y) \in [0,T] \times \Omega \times R$, *记*

$$\mathcal{E}(t,x,y) = \{(v^0, v) \mid v^0 \ge f^0(t,x,y,u), v = f(t,x,y,u), u \in U\}.$$

如果

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\mathcal{E}\big(t,x,(y-\delta, y+\delta)\big) = \mathcal{E}(t,x,y), \qquad \forall y \in R. \tag{5.13}$$

成立，则称集值映射 $\mathcal{E}(t,x,\cdot) : R \to 2^{R^2}$ *具有 Cesari 性质.*

下面证明问题 (C) 的最优控制的存在性定理.

定理 1.2.2 的证明. 由推论 5.1.3, 存在序列 $\{\,(\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{u}_n) \mid n \in N\,\} \subset \mathcal{A}$ 使得

$$\bar{J} \le J(\boldsymbol{u}_n) < \bar{J} + \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in N. \tag{5.14}$$

根据定理 4.4.5, 不妨设 $(\overline{y},\overline{\eta}) \in \left[W^{1,2}([0,T];L^2(\Omega))\bigcap L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)\right] \times L^2(Q_T)$ 满足

$$\begin{cases} \overline{y}=\varphi, & a.e.\ \text{ in } Q_T; \\ \overline{y}\big|_{t=0}=z, & a.e.\ \text{ in } \Omega; \\ \overline{\eta}\in\beta(\overline{y}), & a.e.\ \text{ in } Q_T. \end{cases}$$

且当 $n\to\infty$ 时，
$$\begin{cases} y_n \text{ 在} H^1(Q_T) \text{ 中弱收敛于} \overline{y}，\text{在} L^2(Q_T) \text{ 中强收敛于} \overline{y}; \\ \Delta y_n \text{ 在} L^2(Q_T) \text{ 中弱收敛于} \Delta\overline{y}; \\ \eta_n \text{ 在} L^2(Q_T) \text{ 中弱收敛于} \overline{\eta}. \end{cases} \tag{5.15}$$

其中 (y_n,η_n,u_n) 满足 (4.9) 与 (4.10).[1] (必要时，以其子列取代 $\{(y_n,\eta_n,u_n)\}$ 本身).

显然，不等式 (5.5) 与定理 4.4.1 蕴涵 $\{\, f(\cdot,\cdot,y_n(\cdot,\cdot),u_n(\cdot,\cdot))\,\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中的有界性. 由 $L^2(Q_T)$ 的弱紧性及 Mazur 定理 ([69])，存在函数 $\overline{f}\in L^2(Q_T)$ 及凸组合系数集 $\{\, c_{jn} \mid c_{jn}\geq 0,\ \ j,n\in N\,\}$，使得对于任意的 $j\in N$, $\{\, c_{jn} \mid c_{jn}\neq 0,\ \ n\in N\,\}$ 为有限集，$\sum_n c_{jn}=1$；且对于

$$f_j=\sum_n c_{jn} f(y_{j+n},u_{j+n}), \qquad \forall j\in N,$$

有

$$\lim_{j\to\infty}\left\|f_j-\overline{f}\right\|_{L^2(Q_T)}=0.$$

记

$$f_j^0=\sum_n c_{jn} f^0(y_{j+n},u_{j+n}), \qquad \overline{f^0}(t,x)=\varliminf_{j\to\infty} f_j^0(t,x).$$

由 y_n 在 $L^2(Q_T)$ 中的强收敛性及 Riesz 引理，y_n 有子列在 $L^2(Q_T)$ 上几乎处处收敛于 $\bar{y}$. 即有 Q_T 的可测子集 E 满足 $|E|=|Q_T|$，使得对于任意的 $(t,x)\in E$ 及 $\delta>0$,

$$|y_n(t,x)-\overline{y}(t,x)|<\delta, \qquad \forall n>N(t,x,\delta)$$

对某个 $N(t,x,\delta)\in N$ 成立. 故对于任意的 $j>N(t,x,\delta)$，

$$\big(f^0(t,x,y_{n+j}(t,x),u_{n+j}(t,x)),f(t,x,y_{n+j}(t,x),u_{n+j}(t,x))\big)\in\mathcal{E}\big(t,x,(\overline{y}(t,x)-\delta,\overline{y}(t,x)+\delta)\big),$$

$$\big(f_j^0(t,x),f_j(t,x)\big)\in co\mathcal{E}\big(t,x,(\overline{y}(t,x)-\delta,\overline{y}(t,x)+\delta)\big).$$

[1] 本章中引用 (4.10) 时，其中的 F 均由 (5.3) 式定义，以后不再注明.

从而，

$$\big(\overline{f^0}(t,x),\overline{f}(t,x)\big)\in\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\mathcal{E}\big(t,x,(\overline{y}(t,x)-\delta,\overline{y}(t,x)+\delta)\big),\qquad \forall (t,x)\in E.$$

由 $(\mathbf{H_3})$ 可得

$$\big(\overline{f^0}(t,x),\overline{f}(t,x)\big)\in\mathcal{E}\big(t,x,\overline{y}(t,x)\big),\qquad \forall (t,x)\in E.$$

亦即存在 $u(t,x)\in U$ ，使得

$$\begin{cases}\overline{f^0}(t,x)\geq f^0\big(t,x,\overline{y}(t,x),u(t,x)\big),\\ \overline{f}(t,x)=f\big(t,x,\overline{y}(t,x),u(t,x)\big),\end{cases}\qquad \forall (t,x)\in E.$$

由 $(\mathbf{H_2})$ 及 Fillippov 引理 ([28])，我们可以选取 $\overline{u}\in\mathcal{U}$ 使得

$$\begin{cases}\overline{f^0}(t,x)\geq f^0\big(t,x,\overline{y}(t,x),\overline{u}(t,x)\big),\\ \overline{f}(t,x)=f\big(t,x,\overline{y}(t,x),\overline{u}(t,x)\big),\end{cases}\qquad a.e.\ (t,x)\in Q_T. \tag{5.16}$$

下面证明 $(\overline{y},\overline{u})\in\mathcal{A}$. 记

$$\widetilde{y}_j=\sum_n c_{nj}y_{n+j},\qquad \widetilde{\eta}_j=\sum_n c_{nj}\eta_{n+j},\qquad \forall j\in N.$$

由 (η_n,y_n,u_n) 满足 (4.10) 可知

$$\begin{cases}\dot{\widetilde{y}}_j-\Delta\widetilde{y}_j+G(\Delta\widetilde{y}_j)+\widetilde{\eta}_j=f_j, & a.e.\ \text{ in } Q_T;\\ \widetilde{y}_j=\varphi, & a.e.\ \text{in } Q_{-r};\\ \widetilde{y}_j(0,\cdot)=z(\cdot), & a.e.\ \text{ in } \Omega.\end{cases}$$

令 $n\to\infty$ 取极限, 根据 (5.15) 、(5.16) 及 $\overline{\eta}\in\beta(\overline{y})$ (a.e. in Q_T) 立即得到 $(\overline{y},\overline{u})\in\mathcal{A}$.

最后，我们证明 $J(\overline{u})=\bar{J}$, 即 $(\overline{y},\overline{u})$ 是问题的最优对. 由 (5.14) 可知

$$\int_{Q_T}f_j^0(t,x)dtdx=\sum_n c_{nj}J(u_{nj})<\sum_n c_{nj}\big(\bar{J}+\frac{1}{n+j}\big)<\bar{J}+\frac{1}{j},\qquad \forall j\in N.$$

根据 (5.16) 及 Fatou 引理，我们得到

$$\begin{aligned}J(\overline{u})&=\int_{Q_T}f^0\big(t,x,\overline{y}(t,x),\overline{u}(t,x)\big)dtdx\\&\leq\int_{Q_T}\overline{f^0}(t,x)dtdx=\int_{Q_T}\varliminf_{j\to\infty}f_j^0(t,x)dtdx\\&\leq\varliminf_{j\to\infty}\int_{Q_T}f_j^0(t,x)dtdx\leq\bar{J}.\end{aligned}$$

相反的不等式显然成立. 从而，$J(\overline{u})=\bar{J}$. 定理得证. □

§5.3 逼近系统的轨线变分

在研究问题 (C) 最优解的必要条件时，由于障碍项 $\beta(y)$ 的出现使得直接计算系统 (5.4) 的轨线变分有本质性困难. 所以，我们转而研究逼近系统的轨线变分及其伴随方程，最终通过取极限的方法得到原问题的最优性条件.

以 (5.3) 式定义的 F 代入 (4.15) 中，则得到 (5.4) 的逼近系统. 后文中提到逼近系统或相关结论时，均按这种意义理解. 逼近系统的解仍用 $y_\varepsilon(\boldsymbol{u},\varphi,z)$ 或 $y_\varepsilon(\boldsymbol{u})$（当初值 (φ,z) 给定时）表示.

对于确定的初始数据 (z,φ) 及任意的 $\varepsilon>0$, $\beta_\varepsilon\in C^1(R)$ ，我们引入逼近系统的指标泛函如下：

$$J_\varepsilon(\boldsymbol{u})=J\big(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\big)=\int_{Q_T}f^0\big(t,x,y_\varepsilon(t,x;\boldsymbol{u}),u(t,x)\big)dtdx,\quad \forall\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}. \tag{5.17}$$

$$\bar{J}_\varepsilon=\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}}J_\varepsilon(\boldsymbol{u}). \tag{5.18}$$

我们首先证明：若 β_ε 为 β 的光滑逼近，则 J_ε 为 J 的逼近.

引理 5.3.1. 设 $(\mathbf{H}_1)$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立， $\varphi\in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 及 $z\in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 给定. 则对于 $\beta(\cdot)$ 的任一光滑逼族 $\{\beta_\varepsilon(\cdot)\}$ 及任意的 $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}\subset\mathcal{U}$ ，恒有 $\{\varepsilon\}$ 的子列，使得

$$\lim_{\varepsilon\to0}[J_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)-J(\boldsymbol{u}_\varepsilon)]=0. \tag{5.19}$$

证明. 记

$$y_\varepsilon=y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon,\varphi,z),\qquad y^\varepsilon=y(\boldsymbol{u}_\varepsilon,\varphi,z,).$$

则

$$\begin{aligned}
&J_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)-J(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\\
=&\int_{Q_T}\big[f^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)-f^0(y^\varepsilon,u_\varepsilon)\big]dtdx\\
=&\int_{Q_T}dtdx\int_0^1 f_y^0(y^\varepsilon+\lambda(y_\varepsilon-y^\varepsilon),u_\varepsilon)(y_\varepsilon-y^\varepsilon)d\lambda,\qquad \forall\varepsilon>0.
\end{aligned}$$

由 (1.2.11) 可得

$$|J_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)-J(\boldsymbol{u}_\varepsilon)|\le k\int_{Q_T}|y_\varepsilon-y^\varepsilon|\,dtdx\le k\sqrt{Q_T}\,\|y_\varepsilon-y^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}.$$

根据定理 4.4.5 可知 (5.19) 对于 $\{\varepsilon\}$ 的某子列成立. □

在上述引理中特别取 $u_\varepsilon \equiv u$ 则得到：

推论 5.3.2. *在引理 5.3.1 的条件下，对于 $\beta(\cdot)$ 的任一光滑逼族 $\{\beta_\varepsilon(\cdot)\}$ 及任意的 $u \in \mathcal{U}$，恒有 $\{\varepsilon\}$ 的子列，使得*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u) = J(u). \tag{5.20}$$

□

定理 5.3.3. *设 $(\mathbf{H_1})$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，$\varphi \in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 及 $z \in H_0^1(\Omega)\cap L_+^2(\Omega)$ 给定. 则对于 $\beta(\cdot)$ 的任一光滑逼族 $\{\beta_\varepsilon(\cdot)\}$，恒有*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{J}_\varepsilon = \bar{J}. \tag{5.21}$$

证明. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 可取 $u_\varepsilon \in \mathcal{U}$ 使得

$$\varepsilon + \bar{J}_\varepsilon > J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \bar{J} + [J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J(u_\varepsilon)].$$

不妨设 (5.19) 式成立，则我们有

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \bar{J}_\varepsilon \geq \bar{J}.$$

另一方面，对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们可取 $v_\varepsilon \in \mathcal{U}$ 使得

$$\varepsilon + \bar{J} > J(v_\varepsilon) \geq \bar{J}_\varepsilon + [J(v_\varepsilon) - J_\varepsilon(v_\varepsilon)].$$

故由引理 5.3.1 可得

$$\bar{J} \geq \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \bar{J}_\varepsilon.$$

从而 (5.21) 得证. □

根据 [55]，我们有关于逼近轨线 y_ε 及逼近指标 $J_\varepsilon(u)$ 的下述变分公式.

定理 5.3.4. *设 $(\mathbf{H_1})$ 与 $(\mathbf{H}_\mu)$ 成立，$\varphi \in L^2(-r,0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 及 $z \in H_0^1(\Omega)$ 给定，$u_\varepsilon, v \in \mathcal{U}$. 则对于任意的 $\rho \in (0,1)$，存在 Q_T 的可测子集 $E_{\varepsilon\rho}$ 满足 $|E_{\varepsilon\rho}| = \rho|Q_T|$，使得*

$$\begin{cases} y_\varepsilon(u_{\varepsilon\rho}) = y_\varepsilon(u_\varepsilon) + \rho\xi_\varepsilon(u_\varepsilon, v) + w_\varepsilon(u_\varepsilon, v, \rho), \\ \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\|w_\varepsilon(u_\varepsilon, v, \rho)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = 0; \end{cases} \tag{5.22}$$

$$\begin{cases} J_\varepsilon(\boldsymbol{u}_{\varepsilon\rho}) = J_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon) + \rho\xi_\varepsilon^0(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + w_\varepsilon^0(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}, \rho), \\ \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\left|w_\varepsilon^0(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}, \rho)\right| = 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

其中 $\boldsymbol{u}_{\varepsilon\rho}\in\mathcal{U}$ 由下式定义:

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon\rho} = \chi_{E_{\varepsilon\rho}}\boldsymbol{v} + (1-\chi_{E_{\varepsilon\rho}})\boldsymbol{u}_\varepsilon. \tag{5.24}$$

函数 $\xi_\varepsilon = \xi_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})$ 与 $\xi_\varepsilon^0 = \xi_\varepsilon^0(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})$ （不依赖于 ρ ）是下述方程的解:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_\varepsilon - \triangle\xi_\varepsilon + G(\triangle\xi_\varepsilon) + \beta_\varepsilon'(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon))\xi_\varepsilon = f_y(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon)\xi_\varepsilon + h, & in\ Q_T, \\ \xi_\varepsilon = 0, & in\ [-r,0]\times\Omega, \\ \xi_\varepsilon = 0, & on\ (0,T)\times\partial\Omega; \end{cases} \tag{5.25}$$

$$\xi_\varepsilon^0 = \int_{Q_T} f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon)\xi_\varepsilon dtdx + \int_{Q_T} h^0 dtdx. \tag{5.26}$$

这里,

$$h = f(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), v) - f(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon), \quad h^0 = f^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), v) - f^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon). \tag{5.27}$$

□

根据 [74], 方程 (5.25) 对于任意的 $h\in L^2(Q_T)$ 有唯一解 $\xi_\varepsilon = \xi_\varepsilon(h)$, 且映射

$$h \mapsto \xi_\varepsilon(h)$$

是 $L^2(Q_T)$ 上有界线性算子. 从而, 映射

$$h \mapsto \int_{Q_T} f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon)\xi_\varepsilon(h) dtdx$$

是 $L^2(Q_T)$ 上有界线性泛函. 由 Riesz 表现定理, 存在 $\psi_\varepsilon\in L^2(Q_T)$ 使得

$$\int_{Q_T} f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon)\xi_\varepsilon(h) dtdx = -\int_{Q_T}\psi_\varepsilon h dtdx, \qquad \forall h\in L^2(Q_T). \tag{5.28}$$

容易验证 $\psi_\varepsilon\in L^2(0,T+r;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ ，且 ψ_ε 是下述方程的唯一解:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_\varepsilon + \triangle\psi_\varepsilon - G^*(\triangle\psi_\varepsilon) - [\beta_\varepsilon'(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)) - f_y(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon)]\psi_\varepsilon = -f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon), u_\varepsilon), & \text{in } Q_T; \\ \psi_\varepsilon = 0, & \text{in } [T,T+r]\times\Omega, \\ \psi_\varepsilon = 0, & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.29}$$

其中 G 的伴随算子 G^* 由下式定义：

$$(G^*(w))(t,x) = \int_{-r}^{0} w(t-\theta,x)\mu(d\theta), \ \ a.e.\ (t,x)\in Q_T, \quad \forall w\in L^2(Q_{T+r}). \tag{5.30}$$

仿照定理 4.3.5 的证明方法，我们可以证明下述结论：

定理 5.3.5. *设* $(\mathbf{H}_1)$ *与* $(\mathbf{H}_\mu)$ *成立，则存在常数* $C=C(r,T,\mu(\cdot),k)>0$ *使得对于* $\beta(\cdot)$ *的任一光滑逼近* $\beta_\varepsilon(\cdot)$ *及任意的* $u_\varepsilon\in\mathcal{U}$ *，方程 (5.29) 的解* ψ_ε *满足下述估计：*

$$\|\psi_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla\psi_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_T)} \le C. \tag{5.31}$$

现在，我们证明本节的主要结果．它在最大值原理的证明中将起重要作用．

定理 5.3.6. *设* $(\mathbf{H}_1)$ *与* $(\mathbf{H}_\mu)$ *成立，* $\{\beta_\varepsilon(\cdot)\}$ *为* $\beta(\cdot)$ *的光滑逼近族，* $\{u_\varepsilon\}\subset\mathcal{U}$, $u\in\mathcal{U}$ *，且 (4.46) 成立．则存在* $(\psi,\zeta)\in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)\times H^{-1}(Q_T)$ *及* $\{\psi_\varepsilon\}$ *的子列，使得*

$$\text{当}\varepsilon\to 0\text{时}, \quad \begin{cases} \psi_\varepsilon\text{在}L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\text{中弱收敛于}\psi, \quad \text{在}L^2(Q_T)\text{中强收敛于}\psi, \\ \beta'_\varepsilon(y_\varepsilon(u_\varepsilon))\psi_\varepsilon\text{在}H^{-1}(Q_T)\text{中弱收敛于}\zeta. \end{cases} \tag{5.32}$$

$$supp\zeta \subset \{(t,x)\in Q_T \;\big|\; y(t,x)=0\ \} \tag{5.33}$$

且 ψ *是下述方程的唯一解：*

$$\begin{cases} \dot\psi + \Delta\psi - G^*(\Delta\psi) + f_y(y(u),u)\psi = \zeta - f_y^0(y(u),u), & in\ H^{-1}(Q_T), \\ \psi = 0, & in\ [T,T+r]\times\Omega, \\ \psi = 0, & on\ (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.34}$$

条件 (5.33) 按下述意义理解：对于满足 $\text{supp}w\subset E^+$ 的任一函数 $w\in H_0^1(Q_T)$，恒有

$$<\zeta,\ w>_{H^{-1}(Q_T),H_0^1(Q_T)} = 0,$$

这里

$$E^+ = \{(t,x)\in Q_T \;\big|\; y(t,x)>0\ \}.$$

证明. 由 (5.31) 及定理 4.4.1，存在 $\psi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 及 $\{(\psi_\varepsilon, y_\varepsilon(u_\varepsilon))\}$ 的子列，使得

$$\text{当}\varepsilon\to 0\text{时}, \quad \begin{cases} \psi_\varepsilon \ \text{在}L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\ \text{中弱收敛于}\psi, \ \text{在}L^2(Q_T)\ \text{中强收敛于}\psi, \\ y_\varepsilon(u_\varepsilon)\ \text{在}H^1(Q_T)\ \text{中弱收敛于}y(u), \ \text{在}L^2(Q_T)\ \text{中强收敛于}y(u). \end{cases} \tag{5.35}$$

对于任意的 $(t,x)\in[T,T+r]\times\Omega$，定义 $\psi(t,x)=0$．下面我们证明当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\begin{cases} f_y^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)\text{在}L^2(Q_T)\text{ 中强收敛于}f_y^0(y,u), \\ f_y(y_\varepsilon,u_\varepsilon)\psi_\varepsilon\text{在}L^2(Q_T)\text{ 中弱收敛于}(f_y(y,u)\psi, \\ (\dot\psi_\varepsilon,\triangle\psi_\varepsilon,G^*(\triangle\psi_\varepsilon))\text{在}[H^{-1}(Q_T)]^3\text{ 中弱收敛于}(\dot\psi,\triangle\psi,G^*(\triangle\psi)). \end{cases} \tag{5.36}$$

首先，由 (5.35) 中第二式可知，存在 $\{\varepsilon\}$ 的子列使得

$$y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\to y(\boldsymbol{u})\quad(\varepsilon\to 0),\quad a.e.\ \text{ in } Q_T.$$

从而由 $(\mathbf{H_1})$ 可知

$$f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)\to f_y^0(y,u)\quad(\varepsilon\to 0),\quad a.e.\ \text{ in } Q_T.$$

$$\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)-f_y^0(y,u)\right|\le 2k.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，我们得到

$$\int_{Q_T}\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)-f_y^0(y,u)\right|^2dtdx\to 0,\qquad \varepsilon\to 0.$$

注意到 $(\mathbf{H_1})$ 及 (4.46)，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T}\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u_\varepsilon)-f_y^0(y,u)\right|^2dtdx \\ \le\ & 2\int_{Q_T}\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u_\varepsilon)-f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)\right|^2dtdx+2\int_{Q_T}\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)-f_y^0(y,u)\right|^2dtdx \\ \le\ & 2\int_{(u\ne u_\varepsilon)}|2k|^2dtdx+2\int_{Q_T}\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)-f_y^0(y,u)\right|^2dtdx \\ =\ & 8k^2d(\boldsymbol{u}_\varepsilon,\boldsymbol{u})+2\int_{Q_T}\left|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u)-f_y^0(y,u)\right|^2dtdx\to 0,\qquad \varepsilon\to 0. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|f_y^0(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u_\varepsilon)-f_y^0(y,u)\right\|_{L^2(Q_T)}=0.$$

其次，完全类似地可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_y(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u_\varepsilon)-f_y(y,u)\|_{L^2(Q_T)}=0. \tag{5.37}$$

对于任意的 $w\in L^2(Q_T)$，由 $|f_y|\le k$ 及 $\psi_\varepsilon,\psi\in L^2(Q_T)$ 我们有

$$f_y(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u_\varepsilon)\psi_\varepsilon w,\quad f_y(y,u)\psi w\in L^1(Q_T),$$

$$|[f_y(y_\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon),u_\varepsilon)-f_y(y,u)]\psi w|\le 2k\,|\psi w|\,.$$

由 (5.37)，存在 $\{\varepsilon\}$ 的子列使得

$$f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) - f_y(y, u) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0), \quad a.e. \text{ in } Q_T.$$

从而,

$$|[f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) - f_y(y, u)]\psi w| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad (a.e. \text{ in } Q_T).$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，我们得到

$$\int_{Q_T} |[f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) - f_y(y, u)]\psi w|\, dtdx \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

由此可得，当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{Q_T} f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon)\psi_\varepsilon w dtdx - \int_{Q_T} f_y(y, u)\psi w dtdx\right| \\
\le\ & \int_{Q_T} |f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon)(\psi_\varepsilon - \psi) w|\, dtdx + \int_{Q_T} |[f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) - f_y(y, u)]\psi w|\, dtdx \\
\le\ & k\, \|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^2(Q_T)} \|w\|_{L^2(Q_T)} + \int_{Q_T} |[f_y(y_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon) - f_y(y, u)]\psi w|\, dtdx \to 0.
\end{aligned}$$

即 $f_y(y_\varepsilon, u_\varepsilon)\psi_\varepsilon$ 在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于 $f_y(y, u)\psi$.

最后，对于任意的 $w \in H_0^1(Q_T)$，由 (5.35) 我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \dot{\psi}_\varepsilon - \dot{\psi},\ w >_{H^{-1}(Q_T), H_0^1(Q_T)} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_T} (\psi_\varepsilon - \psi)\dot{w} dtdx = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \to 0} < \Delta\psi_\varepsilon - \Delta\psi,\ w >_{H^{-1}(Q_T), H_0^1(Q_T)} \\
=\ & -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T dt \int_\Omega \nabla(\psi_\varepsilon - \psi) \cdot \nabla w dx \\
=\ & -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \Big[< \psi_\varepsilon - \psi,\ w >_{H_0^1(\Omega)} - < \psi_\varepsilon - \psi,\ w >_{L^2(\Omega)} \Big] dt \\
=\ & -\lim_{\varepsilon \to 0} < \psi_\varepsilon - \psi,\ w >_{L^2(0,T; H_0^1(\Omega))} + \lim_{\varepsilon \to 0} < \psi_\varepsilon - \psi,\ w >_{L^2(Q_T)} = 0.
\end{aligned}$$

根据 Fubini 定理，我们有

$$\begin{aligned}
& < G^*(\Delta\psi_\varepsilon) - G^*(\Delta\psi),\ w >_{H^{-1}(Q_T), H_0^1(Q_T)} \\
=\ & -\int_\Omega dx \int_0^T dt \int_{-r}^0 \nabla(\psi_\varepsilon - \psi)(t - \theta, x) \cdot \nabla w(t, x)\mu(d\theta) \\
=\ & -\int_{-r}^0 \mu(d\theta) \int_\Omega dx \int_{-\theta}^{T-\theta} \nabla(\psi_\varepsilon - \psi)(s, x) \cdot \nabla w(s + \theta, x) ds \\
=\ & -\int_{-r}^0 \mu(d\theta) \int_0^T ds \int_\Omega \nabla(\psi_\varepsilon - \psi)(s, x) \cdot [\chi_{[-\theta, T]}(s) \nabla w(s + \theta, x)] dx.
\end{aligned}$$

记

$$w_\theta(t,x)=w(t+\theta,x)\chi_{[-\theta,T]}(t),\qquad \forall (t,x)\in Q_T,\ \theta\in[-r,0];$$

$$g_\varepsilon(\theta)=\int_0^T dt\int_\Omega \nabla(\psi_\varepsilon-\psi)(t,x)\cdot\nabla w_\theta(t,x)dx,\qquad \forall\theta\in[-r,0].$$

则显然有

$$w_\theta\in H_0^1(Q_T),\qquad \forall\theta\in[-r,0];$$

且

$$\|w_\theta\|_{L^2(Q_T)}\le\|w\|_{L^2(Q_T)},\quad \|\nabla w_\theta\|_{L^2(Q_T)}\le\|\nabla w\|_{L^2(Q_T)},\qquad \forall\theta\in[-r,0].$$

由 (5.31) 可知

$$\begin{aligned}|g_\varepsilon(\theta)| &\le \left(\|\nabla\psi_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}+\|\nabla\psi\|_{L^2(Q_T)}\right)\|w_\theta\|_{L^2(Q_T)}\\ &\le \left(C+\|\nabla\psi\|_{L^2(Q_T)}\right)\|\nabla w\|_{L^2(Q_T)}, \qquad \forall\theta\in[-r,0].\end{aligned}$$

从而由 (5.35) 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}g_\varepsilon(\theta)\\ =\ &\lim_{\varepsilon\to0}\Big[<\psi_\varepsilon-\psi,\ w_\theta>_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}-<\psi_\varepsilon-\psi,\ w_\theta>_{L^2(Q_T)}\Big]\\ =\ &0,\qquad \forall\theta\in[-r,0].\end{aligned}$$

根据 Fubini 定理，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}<G^*(\Delta\psi_\varepsilon)-G^*(\Delta\psi),\ w>_{H^{-1}(Q_T),H_0^1(Q_T)}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T g_\varepsilon(\theta)\mu(d\theta)=0.$$

从而，(5.36) 得证.

令

$$\zeta=\dot\psi+\Delta\psi-G^*(\Delta\psi)+f_y(y(\boldsymbol{u}),u)\psi+f_y^0(y(\boldsymbol{u}),u).$$

则 (5.34) 显然成立，且由 (5.36) 可得 $\zeta\in H^{-1}(Q_T)$.

对于任意的 $w\in H_0^1(Q_T)$，当 $\mathrm{supp}w\subset E^+$ 时，由 $\mathrm{supp}w$ 的紧性及 (5.35)，存在 $\varepsilon_0>0$，使得

$$y_\varepsilon(t,x;u_\varepsilon)>0,\qquad \forall(t,x)\in \mathrm{supp}w,\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

从而

$$
\begin{aligned}
& <\zeta,\ w>_{H^{-1}(Q_T),H_0^1(Q_T)} \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Q_T}\beta_\varepsilon'(y_\varepsilon(u_\varepsilon))\psi_\varepsilon w dt dx \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathrm{supp} w}\beta_\varepsilon'(y_\varepsilon(u_\varepsilon))\psi_\varepsilon w dt dx \\
= & \ 0.
\end{aligned}
$$

即 (5.33) 成立. 定理获证. □

§5.4 最大值原理的证明

现在我们证明问题 (C) 的最优对应满足的必要条件.

定理 1.2.3 的证明. 我们将证明过程分为三个步骤.

第一步：找出逼近问题的近似最优控制 u_ε .

取定 $\beta(\cdot)$ 的光滑逼近族 $\{\beta_\varepsilon(\cdot)\}$ ，对于任意的 $\varepsilon>0$, 记

$$
F_\varepsilon(u)=J_\varepsilon(u)-\bar{J}_\varepsilon,\qquad \forall u\in\mathcal{U}. \tag{5.38}
$$

则显然 $F_\varepsilon(\cdot)$ 在 $\mathcal{U}$ 上连续, 且

$$
\inf_{u\in\mathcal{U}}F_\varepsilon(u)=0.
$$

令

$$
\delta_\varepsilon=\sqrt{F_\varepsilon(\bar{u})+\varepsilon},
$$

则我们有

$$
F_\varepsilon(\bar{u})<\inf_{u\in\mathcal{U}}F_\varepsilon(u)+\delta_\varepsilon^2.
$$

根据 Ekeland 变分原理 ([25])，存在 $u_\varepsilon\in\mathcal{U}$ 使得

$$
\begin{cases}
d(u_\varepsilon,\bar{u})<\delta_\varepsilon, \\
F_\varepsilon(u_\varepsilon)\le F_\varepsilon(\bar{u}), \\
F_\varepsilon(u)-F_\varepsilon(u_\varepsilon)\ge-\delta_\varepsilon d(u,u_\varepsilon), \qquad \forall u\in\mathcal{U}.
\end{cases} \tag{5.39}
$$

第二步：确定 $(y_\varepsilon,u_\varepsilon)$ 应满足的条件.

对于任意的 $v\in\mathcal{U}$ 及 $\rho\in(0,1)$，由定理 5.3.4，存在 Q_T 的可测子集 $E_{\varepsilon\rho}$ 满足 $|E_{\varepsilon\rho}|=\rho|Q_T|$，使得对于 (5.24) 定义的控制 $u_{\varepsilon\rho}\in\mathcal{U}$，(5.22)-(5.27) 成立. 注意到

$$d(u_{\varepsilon\rho},u_\varepsilon)\leq\rho\,|Q_T|,$$

由 (5.28) 及 (5.39) 我们有

$$
\begin{aligned}
&-\delta_\varepsilon\rho\,|Q_T|\leq-\delta_\varepsilon d(u_{\varepsilon\rho},u_\varepsilon)\leq F_\varepsilon(u_{\varepsilon\rho})-F_\varepsilon(u_\varepsilon)=J_\varepsilon(u_{\varepsilon\rho})-J_\varepsilon(u_\varepsilon)\\
\leq\;&\rho\Big[\int_{Q_T}f_y^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)\xi_\varepsilon dtdx+\int_{Q_T}h^0dtdx\Big]+w_\varepsilon^0(u_\varepsilon,v,\rho)\\
=\;&\rho\Big[-\int_{Q_T}\psi_\varepsilon hdtdx+\int_{Q_T}h^0dtdx\Big]+w_\varepsilon^0(u_\varepsilon,v,\rho)\\
=\;&\rho\int_{Q_T}\Big[\big(\psi_\varepsilon f(y_\varepsilon,u_\varepsilon)-f^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)\big)-\big(\psi_\varepsilon f(y_\varepsilon,v)-f^0(y_\varepsilon,v)\big)\Big]dtdx+w_\varepsilon^0(u_\varepsilon,v,\rho)\\
=\;&\rho\int_{Q_T}\Big[H\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),\psi_\varepsilon(t,x),u_\varepsilon(t,x)\big)-H\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),\psi_\varepsilon(t,x),v(t,x)\big)\Big]dtdx\\
&+w_\varepsilon^0(u_\varepsilon,v,\rho).
\end{aligned}
$$

其中 $y_\varepsilon=y_\varepsilon(u_\varepsilon)$ 是逼近系统 (4.15) 的解， ψ_ε 是其伴随系统 (5.29) 的解.

以 ρ 除上述不等式两边并令 $\rho\to0$ 取极限，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_T}\Big[H\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),\psi_\varepsilon(t,x),u_\varepsilon(t,x)\big)-H\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),\psi_\varepsilon(t,x),v(t,x)\big)\Big]dtdx\\
&\geq-\delta_\varepsilon\,|Q_T|.
\end{aligned}\tag{5.40}
$$

第三步：通过取极限导出原问题的最优性条件.

根据推论 5.3.2 及定理 5.3.3，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon(\bar{u})=J(\bar{u})=\bar{J}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}F_\varepsilon(\bar{u})=\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon(\bar{u})-\lim_{\varepsilon\to0}\bar{J}_\varepsilon=\bar{J}-\bar{J}=0.$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon=0.\tag{5.41}$$

下面证明

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{Q_T}\Big[H\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),\psi_\varepsilon(t,x),u_\varepsilon(t,x)\big)-H\big(t,x,y_\varepsilon(t,x),\psi_\varepsilon(t,x),v(t,x)\big)\Big]dtdx\\
=&\int_{Q_T}\Big[H\big(t,x,\bar{y}(t,x),\psi(t,x),\bar{u}(t,x)\big)-H\big(t,x,\bar{y}(t,x),\psi(t,x),v(t,x)\big)\Big]dtdx.
\end{aligned}\tag{5.42}
$$

其中 (ψ,ζ) 满足 (1.2.14) 及 (1.2.15).

以 $y^\varepsilon(t,x)$ 表示系统 (5.4) 相应于 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_\varepsilon$ 的解 $y(t,x;\boldsymbol{u}_\varepsilon)$. 由 (5.39) 及 (5.41) 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d(\boldsymbol{u}_\varepsilon,\bar{\boldsymbol{u}})=0. \tag{5.43}$$

援用定理 4.5.2, 我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\|y^\varepsilon-\bar y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla(y^\varepsilon-\bar y)\|^2_{L^2(Q_T)}\Big]=0.$$

根据定理 4.4.5，不妨设 (4.40) 成立. 从而可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\|y_\varepsilon-\bar y\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla(y_\varepsilon-\bar y)\|^2_{L^2(Q_T)}\Big]=0. \tag{5.44}$$

又由 $(\mathbf{H_1})$、(5.43) 及 (5.44)，我们得到

$$\begin{cases}\lim_{\varepsilon\to 0}\|f(y_\varepsilon,u_\varepsilon)-f(\bar y,\bar u)\|_{L^2(Q_T)}=0,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|f^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)-f^0(\bar y,\bar u)\right\|_{L^2(Q_T)}=0,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\|f(y_\varepsilon,v)-f(\bar y,v)\|_{L^2(Q_T)}=0,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|f^0(y_\varepsilon,v)-f^0(\bar y,v)\right\|_{L^2(Q_T)}=0.\end{cases}$$

且由定理 5.3.6，不妨设

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\psi_\varepsilon-\psi\|_{L^2(Q_T)}=0,$$

且 (1.2.14) 与 (1.2.15) 对于某 $\zeta\in H^{-1}(Q_T)$ 成立. 从而

$$\begin{cases}\lim_{\varepsilon\to 0}\|f(y_\varepsilon,u_\varepsilon)\psi_\varepsilon-f(\bar y,\bar u)\psi\|_{L^1(Q_T)}=0,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|f^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)-f^0(\bar y,\bar u)\right\|_{L^1(Q_T)}=0,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\|f(y_\varepsilon,v)\psi_\varepsilon-f(\bar y,v)\psi\|_{L^1(Q_T)}=0,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|f^0(y_\varepsilon,v)-f^0(\bar y,v)\right\|_{L^1(Q_T)}=0,\end{cases}$$

由此即知 (5.42) 成立.

由 (5.40)-(5.42), 我们得到

$$\int_{Q_T}\Big[H\big(t,x,\bar y(t,x),\psi(t,x),\bar u(t,x)\big)-H\big(t,x,\bar y(t,x),\psi(t,x),v(t,x)\big)\Big]dtdx\ge 0. \tag{5.45}$$

由 U 的可分性及 $v\in\mathcal{U}$ 的任意性, 上式等价于最大值条件 (1.2.17). 定理获证. □

注 5.4.1. 对于下述的时滞受控系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) + G(\Delta y)(t,x) = f(t,x,y(t,x),u(t,x)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } H^{-1}(Q_T); \\ y(t,x) = \varphi(t,x), \qquad\qquad a.e.\ (t,x) \in Q_{-r}; \\ y(0,x) = z(x), \qquad\qquad a.e.\ x \in \Omega; \\ y(t,x) = 0, \qquad\qquad\quad \text{in } \Sigma_T. \end{cases} \tag{5.46}$$

及 (5.6) 定义的指标泛函 $J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$，如果最优控制问题

$$J(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{u}}) = \min\{\ J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) \mid (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\text{满足}(5.46)\ \}$$

的最优解 $(\bar{y},\bar{u})$ 恰好满足 $\bar{\boldsymbol{y}} \in L^2_+(Q_T)$，则 $(\bar{y},\bar{u})$ 也是问题 (C) 的最优解. 此时，由 (1.2.14) 可知伴随方程 (1.2.15) 中

$$\zeta = 0.$$

亦即 (1.2.15) 中的 ζ 一项不出现. 从而，定理 1.2.3 化为系统 (5.46) 的最大值原理（参见 [55] 定理 3.1）.

参考文献

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic, New York, 1975.

[2] D. R. Adams, S. M. Lenhart and J. Yong, Optimal control of the obstaclfor an elliptic variational inequality, *Appl. Math. Optim.*, **38**(1998), 121-140.

[3] M. Amar and C. Mariconda, A nonconvex Variational problem with constraints, *SIAM J. Control Optim.* **33**(1995), 299-307.

[4] A. Ardito and P. Ricciardi, Existence and regularity for linear delay partial differential equations, *Nonlinear Anal.* 4(1980), 411-414.

[5] N. Arada and J. P. Raymond, Optimal control problems with mixed control-state constraints, *SIAM J. Control Optim.* **39**(2000), 1391-1407.

[6] C. Baiocch and A. Capelo, *Variational and Quqsivariational Inequalities,* John Wiley & Sons, 1984.

[7] V. Barbu, Necessary conditions for distributed control problems governed by parabolic variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **19**(1981), 64-86.

[8] V. Barbu , *Optimal Control of Variational Inequalities,* Pitman, London, New York, 1984.

[9] L. D. Berkovitz, *Optimal Control Theory,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] M. Bergounioux, Optimal control of problems governed by abstract elliptic variational inequalities with state constraints, *SIAM. J. Control Optim.* **36**(1998), 273-289.

[11] M. Bergounioux and H. Zidan, Pontryagin maximum principle for optimal control of variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **37**(1999), 1273-1290.

[12] G. Di Blasio, K. Kunish and E. Sinestrari, L^2-regularity for parabolic partial integro diffierential equations with delay in the highest-order derivatives, *J. Math. Anal. Appl.* **102**(1984), 38-57.

[13] F. Bonnas and E. Casas, An extension of Pontryagin's principle for state-contrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.* **33**(1995), 274-298.

[14] E. Casas, Contol of an elliptic problem with pointwise state constraints, *SIAM J. Control Opyim.*, **24** (1986), 1309-1318.

[15] E. Casas, Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations, *SIAM J. Control Opyim.*, **35** (1997), 1297-1327.

[16] E. Casas and J. Yong , Maximum principle for state-constrained optimal control problems governed by quasilinear elliptic equations, *Diff. Int. Eqs.*, **8** (1995), 1-18.

[17] L. Cesari, Existence of solutions and existence of optimal solutions, *lecture Notes in Math,* Vol.979, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 88-107.

[18] Q. Chen, Indirect obstacle control problem for semilinear elliptic variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **38**(1999), 138-158.

[19] Q. Chen, Optimal control of semilinear elliptic variational bilateral problem, *Acta Mathematica Sinica*, Eglish series, **16**(2000), 123-140

[20] Q. Chen, A nonlinear parabolic system arising from the eddy currents problems, *J. Nonlinear Analysis: T. M. A.*, **42**(2000), 759-770.

[21] Q. Chen, Minimax control for evolutionary variational bilateral problem, *Nonlinear Analysis*, **57**(2004), 229-252.

[22] G. Duavut and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1976.

[23] I. Ekeland, On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.*, **47**(1974), 324-353.

[24] A. I. Egorov, Necessary optimality conditions for distributed parameter systems, *SIAM J. Control*, **5** (1967), 352-408.

[25] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* (NS), **1**(1979), 443-474.

[26] H. O. Fattorini, A Unified theory of necessary conditions for nonlinear nonconvex control systems, *Appl. Math. Optim.*, **15** (1987), 141-185.

[27] H. O. Fattorini, *Infinite Dimensional Optimization Theory and Optimal Control*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1999.

[28] A. F. Filippov, On certain questions in the theory of optimal control, *SIAM J.Control Ser. A Control*, **1** (1962), 76-84.

[29] A. Friedman, *variational Principles and Free-boundary Problems*, Wiley, New York, 1982.

[30] A. Friedman, Optimal control for variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **24**(1986), 439-451.

[31] A. Friedman, Optimal control for parabolic variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **25**(1987), 482-497.

[32] A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications, Translation of Math. Monographs, Sci.*, Vol.187, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2000.

[33] M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, A general theory of heat conduction with finite wave speeds, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **31**(1968), 113-126.

[34] R. F. Hartl, S. P. Sethi, and R. G. Vickson, A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints, *SIAM Review*, **37**(1995), 181-218.

[35] Z. He, State constrained control problems governed by variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **25**(1987), 1119-1144.

[36] C. J. Himmelberg, M. Q. Jacobs and F. S. Van Vleck, Measurable multifunctions, selectors and Filippov's implicit functions lemma, *J. Math. Anal. Appl.*, **25**(1969), 276-284.

[37] B. Hu and J. Yong, Pontryagin maximum principle for semilinear and quasilinear parabolic equations with pointwise state constraints, *SIAM J. Control Optim.* **33**(1995), 1857-1880.

[38] K. Ito and K. Kunisch, optimal control of elliptic variational inequalities , *Appl. Math. Optim.* , **41**(2000), 343-364.

[39] D. Kinderlehrer dna G. Stampacchia, *Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York and London, 1980

[40] A. Kowalewski and A. Krakowiak, Time-optimal control of a parabolic system with time lags in the integral form, *IMA J. Math. Control Information*, **17**(2000), 209-225.

[41] I. Lasiecka, State constrained control problems for parabolic systems: regularity of optimal solutions, *Appl. Math. Optim.*, **6** (1980), 1-29.

[42] J. L. Lions, Sur le contrôle optimal de systèmes décrits par des équations aux dérivées partelles linéaires, Remarques générales; Équations elliptiques; Équations d'evolution, *C. R. Acad . Sci. Paris, Sér. A-B* **263**(1966), A661-A663; A713-715; A776-779.

[43] J. L. Lions and G. Stampacchia , Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**(1967), 493-519.

[44] X. Li and Y. Yao, Maximum principle of distributed parameter systems with time lags, in *Distributed parameter systems*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 75, Springer, (1985), 410-427.

[45] X. Li and J. Yong , Necessary conditions of optimal control for distributed parameter systems, *SIAM J. Control Optim.*, **29**(1991), 895-908.

[46] X. Li and J. Yong , *Optimal Control Theory For Infinite Dimensional Systems*, Birkhäuser, Boston, 1995.

[47] H. Lou , On the regularity of an obstacle control problem , *J. Math. Anal. appl.*, **258**(2001), 32-51.

[48] H. Lou , An optimal control problem governed by quasi-linear variational inequalities , *SIAM J. Control Optim.*, **41**(2002), 1229-1253.

[49] U. Mackenroth, Convex parabolic boundary control problems with pointwise state constraints, *J. Math. Anal. Appl.*, **87** (1982), 256-277.

[50] F. Mignot, Contrôle dans les inequations variationelles elliptiques, *J. Funct. Anal.*, **22**(1976), 130-185.

[51] F. Mignot and J. P. Puel, Optimal control in some variational inequalities, *SIAM J. Control Optim.*, **22**(1984), 466-476.

[52] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Advances*

of Math., **3**(1969), 510-585.

[53] J. Mossino, An application of duality to distributed optimal control problrms with constraints on the control and state, *J. Math. Anal. Appl.*, **50** (1975), 223-242.

[54] J. W. Nunziato, On heat conduction in materials with memory, *Quart. Appl. Math.* **29**(1971), 187-204.

[55] L. Pan and J. Yong, Optimal control for quasilinear retarded parabolic systems, *ANZIAM J.* **42**(2001), 532-551.

[56] M. D. R. De Pinho, M. M. Ferreira, and F. A. C. C. Fontes, An Euler-Lagrange inclusion for optimal control problems with state contraints, *J. Dynamical and Control Systems*, **8**, 23-45.

[57] L. S. Pontryagin; V. G. Boltyanskii; R. V. Gamkrelidze; and E. F. Mischenko, *Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, 1962.

[58] F. Rampazzo and R. Vinter, Degenerate optimal control problems with state constraints, *SIAM J. Control Optim.* **39** (2000), 989-1007.

[59] J. P. Raymond and H. Zidant, Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls, *SIAM J. Control Optim.* **36** (1998), 1853-1879.

[60] J. F. Rodrigues, *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland Math. Stud.134, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1987.

[61] N. O. Sedova, A remark on the Lyapunov-Rzumikhin method for equations with infinit delay, *Diff. Eqs.*, **38** (2002), 1423-1434.

[62] H. M. Soner, Optiml control with state-space constraint I, *SIAM J. Control Optim.* **24**(1986), 552-561.

[63] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, 3rd edition*, North-Holland-Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

[64] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, New York, 1988.

[65] C. Valeriano, A result concerning a variational inequality of evolution for operators of first order in t with retarded terms, *Ann. Mat. Pura Appl.*, IV. Ser. **88**(1971), 357-378.

[66] G. Wang , Optimal control of parabolic differential equations with two point boundary State constraints, *SIAM J. Control Optim.* **38**(2000), 1639-1654.

[67] G. Wang and L. Wang, State-constrained optimal control governed by non-well-posed parabolic differential equations, *SIAM J. Control Optim.* **40**(2002), 1517-1539.

[68] P. Wilmott, *Derivatives: The Theoty and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons, University edition, 1998.

[69] K. Yosida, *Functional Analysis, 6th edition* , Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[70] J. Yong, Maximum principle of the optimal controls for a nonsmooth similinear evolution system, *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, Springer-Verlag, **144**(1990), 559-569.

[71] J. Yong, Pontryagin maximum principle for similinear second order elliptic partial differential equations and variational inequalities with state constraints, *Diff. Int. Eqs.*, 5(1992), 1307-1334.

[72] J. Yong, Existence theory of optimal controls for distributed parameter systems, *Kodai Math. J.*, **15**(1992), 193-220.

[73] J. Yong, Necessary conditions for minimax control problems of second order elliptic partial differential equations, *Kodai Math. J.*, **16**(1993), 469-486.

[74] J. Yong and L. Pan, Quasi-linear parabolic partial differential equations with delays in the highest-order spatial derivatives, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A* **54**(1993), 174-203.

[75] 黄少云，非稳定井流的自由边界问题， *数学学报*, **25**(1982), 754-768.

[76] (苏)Г. M. 菲赫金哥尔茨著，叶彦谦等译， *微积分学教程*, 人民教育出版社，北京, 1955.

[77] 王耀东， *变分不等方程*, 高等教育出版社，北京, 1987.

[78] 张光澄 主编， *最优控制计算方法*, 成都科技大学出版社，成都， 1991.

[79] (苏)B. B. 索洛多夫尼柯夫 主编， 王众讫 译， *自动调整原理 (第三分册)*, 水利电力出版社，北京, 1959.

致　　谢

作者深切缅怀已故导师李训经先生．作者能在几年中熟悉最优控制理论并逐步深入地展开理论研究，与李先生的悉心指导、热情帮助与亲切鼓励是分不开的．李先生正直的为人品格、深厚的学术造诣与严谨的治学风范使作者在做人、治学、工作等各个方面都获益匪浅．

作者衷心感谢雍炯敏教授与汤善健教授．作者的研究工作从论文选题、研究框架、理论推导到最后成文都得到了雍老师与汤老师的悉心指导与热情帮助．两位老师的为人品格和治学精神即使在今后的工作、学习、和研究道路上也将会给作者以深刻的影响与极大的帮助．

几年来，作者曾得到过许多老师和同学的帮助与指教．楼红卫教授、张旭教授（四川大学）、潘立平教授、吴汉忠博士、周渊副教授、汪更生教授（武汉大学）、陈启宏教授（上海财经大学）等曾对作者的研究工作给予指导与帮助，并提出了许多宝贵的建设性意见与建议，使作者受益良多，作者在此表示由衷的感谢．刘道百博士、袁小平教授、于江博士（上海交通大学）、刘昌良同学与许亚善同学等曾与作者多次交流与讨论，赵学雷教授、寇春海教授（东华大学）、洪文明博士（北京师范大学）、辛杰博士（烟台师范学院）、张乃敏博士（大连大学）、李富山博士（曲阜师范学院）、王泽军博士（上海交通大学）、郎艳怀博士（上海财经大学）等，也曾对作者的研究给予关心与帮助，作者在此向他们表示诚挚的谢意．

作者还感谢复旦大学数学系资料室的各位老师和在学习与生活中曾经给予我帮助的其他所有老师、同学及有关工作人员．

论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或其它机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。

作者签名：朱高伟　　日期：2005.4.18

论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。保密的论文在解密后遵守此规定。

作者签名：朱高伟　导师签名：汤善健　日期：2005年4月19日