Classified Index: TP182

UDC: 621.5

# Ph. D. Dissertation

## Analysis for Uncertain Statistics and Its Applications

By

Xiaosheng Wang

**Major: Systems Engineering**

**Supervisor: Prof. Weiguo Yang**

**Jiangsu University**

December, 2010

# 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权江苏大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保　密 □，在　　年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☑。

学位论文作者签名：王小晴　　指导教师签名：杨闯

2010年12月21日　　2010年12月21日

# 独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已注明引用的内容以外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：王小鸣

日期：2010年 12 月 21 日

# 摘 要

大量调研表明，用语言描述的某些不精确量，诸如“大约 100 公里”、“或许 80 公斤”、“低速”、“中年”、“大号”等既不是随机现象也不是模糊现象，而是不确定现象。不确定理论是具有规范性、自对偶性、单调性、次可加性及乘积测度公理的数学系统，是公理化数学的一个分支，是研究人类系统不确定性的数学工具。不确定统计是基于不确定理论的一种统计方法，该方法是通过收集、整理、分析相关领域专家经验数据，利用不确定理论建立数学模型，为最终做出决策提供建议和意见。

不确定分布是不确定理论的重要概念之一，其用于刻画不确定变量的取值规律。建立恰当的不确定分布是不确定理论成功应用于实践的重要环节。然而在生产实践中难以获知不确定分布的精确表达式，故通过寻找不确定测度的上下界来估计不确定分布或者利用经验不确定分布来近似不确定分布是切实可行的方案。

在不确定理论基础上，本文建立了关于不确定测度的不等式，提出了获取不确定分布的方法，同时建立了不确定分布中的未知参数估计方法。论文的主要的内容和工作如下：

1. 讨论了不确定变量序列均方收敛的性质，给出了不确定变量序列均方收敛的充分必要条件，即该序列是 Cauchy 序列；在不确定过程的一般概念基础上，定义了不确定二阶矩过程，并讨论了该过程的若干性质。

2. 从不确定变量的矩出发，建立了关于不确定测度的若干不等式。通过不确定变量的矩，给出了不确定测度的上下界估计范围。

3. 从不确定统计的基本思想出发，将不确定统计和 Delphi 法相结

合，针对多专家经验数据，提出了获取多专家综合不确定分布的方法。同时，通过调研的实例进行了验证。

4. 对于不确定分布中含有未知参数的情形，利用专家经验数据，定义了经验矩，建立了不确定矩方法来估计未知参数。

5. 定义了阶梯型经验不确定分布及基于该分布的经验矩，对某些不确定分布中的未知参数，提出了相应的矩方法来估计未知参数。

**关键词:** 不确定理论, 经验不确定分布, Delphi 法, 矩估计, 二阶矩过程

# ABSTRACT

Some information and knowledge are usually represented by human language like "about 100km", "Roughly 80kg", " low speed", "middle age" and "big size" . A lot of survey showed that those imprecise quantities behave neither like randomness nor like fuzziness. Uncertainty theory is a branch of axiomatic mathematics based on normality, monotonicity, self-duality, countable subadditivity and product measure axioms. It is a mathematical tool in the research of human uncertain system. Uncertain statistics is a methodology for collecting and interpreting expert's experimental data by uncertainty theory and provides help for the decision makers by the corresponding statistical models.

Uncertainty distribution is one of the important concepts of uncertainty theory and used to describe uncertain variables in easy-to-use way. It is a key step that builds the appropriate uncertainty distribution for applications in the real world. However, it is hard to obtain the precise uncertainty distribution in the experiment. So it is a feasible way to approximate uncertainty distribution by the empirical uncertainty distribution or estimation of uncertain measure.

Based on uncertainty theory, this dissertation builds some inequalities on uncertain measure, presents Delphi method for obtaining uncertainty distribution and proposes the method of moments for estimating the unknown parameters. The main content of the dissertation and contributions are as follows:

1. Some mathematical properties of convergence in mean square for the sequences of uncertain variables are discussed. After that, a necessary and sufficient condition of convergence in mean square for the sequences of uncertain variables is provided. On the other hand, uncertain second

moment process is defined and its some related properties are introduced based on uncertainty theory.

2. In order to apply uncertain measure in the real life and build essential limit theorems for the sequences of uncertain variables, a class of inequalities on uncertain measure are constructed by using the moments of uncertain variables. These inequalities may give the upper bounded or lower bounded estimates of some uncertain measure.

3. In order to estimate the uncertainty distribution for an uncertain variable via multiple experts' experimental data, a new method by combination of individual empirical uncertainty distribution and Delphi is presented. At the same time, some real examples are given to verify this method.

4. Based on the expert's experimental data, an uncertain method of moments is presented by the empirical moment defined in this dissertation for estimating the unknown parameters, and a numerical method is designed to find moment estimates of unknown parameters.

5. According to the expert's experimental data, a step empirical uncertainty distribution is defined to describe some uncertain variables. Based on step empirical uncertainty distribution, empirical mean, empirical variance and empirical k-th moments are defined and another method of moments is presented to estimate the unknown parameters of uncertainty distribution.

**KEY WORDS:** uncertainty theory, empirical uncertainty distribution, Delphi method, method of moments, second moment process

# 目 录


1 绪 论 ........ 1

1.1 选题背景及研究意义 ........ 1

1.1.1 选题背景 ........ 1

1.1.2 研究意义 ........ 3

1.2 国内外研究现状 ........ 4

1.3 研究框架 ........ 5

1.3.1 研究内容 ........ 5

1.3.2 研究方法 ........ 6

1.4 本文的创新点 ........ 6

2 不确定理论基础 ........ 7

2.1 不确定测度和不确定变量 ........ 7

2.2 不确定分布和逆不确定分布 ........ 8

2.3 不确定变量的独立性及运算法则 ........ 11

2.4 矩的概念 ........ 12

2.5 各种收敛的概念与相互关系 ........ 12

2.6 不确定理论目前的应用研究领域 ........ 13

3 不确定变量序列均方收敛的充分必要条件 ........ 15

3.1 均方收敛的充分必要条件 ........ 15

3.2 不确定过程 ........ 20

3.3 不确定二阶矩过程 ........ 21

4 不确定测度的矩估计 ........ 23

4.1 基本不等式 ........ 23

4.2 不确定测度的矩估计 ........ 26

5 基于多专家经验数据的不确定分布估计 ........ 33

5.1 不确定统计 ........ 33

5.1.1 专家经验数据 ........ 34

5.1.2 经验不确定分布 ........ 34

5.2 Delphi 法简介 ........ 36

5.3 不确定分布的估计 ........ 37

**6 不确定分布的矩估计 ........ 43**
6.1 统计学中的矩估计方法 ........ 43
6.2 最小二乘估计 ........ 43
6.3 不确定矩估计 ........ 44
6.4 经验方差 ........ 50
**7 阶梯型经验不确定分布 ........ 55**
7.1 阶梯经验不确定分布 ........ 55
7.2 不确定矩估计方法 ........ 59
**8 结论与展望 ........ 65**
8.1 论文的主要工作 ........ 65
8.2 后续研究的展望 ........ 65
**参考文献 ........ 67**
**致 谢 ........ 73**
**读博期间发表的论文、主持及参加的课题 ........ 75**

# 1 绪 论

## 1.1 选题背景及研究意义

### 1.1.1 选题背景

在人类社会实践活动中，存在着大量的无法避免的各种各样的不精确现象。如何认识这些不精确现象？如何发掘这些不精确现象背后的规律？如何建立适当的数学模型来刻画、研究不精确现象？一直是科学研究工作者热衷追求的奋斗目标。对于不精确现象，大致分为了客观不精确性和主观不精确性。对于客观不精确现象，人们利用概率论建立相关的数学模型来研究，并取得了非常丰富的研究成果。目前，通过概率论及建立在其基础之上的数理统计，人们对部分不精确现象有了充分的认识，并广泛应用在随机系统、随机控制、可靠性、金融保险、国民统计、统计决策等领域。

不可否认，每一个学科都有着各自的应用领域及局限范围。概率论也一样不能够完全解释人类社会实践活动中的所有不精确性现象。由人类主观意识造成的不精确性，或者人类语言表达的不精确性，如“大约 100 公理”，“高速”，“大约 80 公斤”，“大小适中”等等。应该如何去认识、刻画这些不精确现象？有的学者主张利用主观概率建立数学模型研究，有的学者主张利用 Dempster-Shafer 理论建立数学模型[65,81]，美国控制论专家 Zadeh[88,89,90]主张利用模糊集理论进行研究，清华大学刘宝碇教授[39]也曾经建立可信性理论进行研究。然而，大量调研发现，这些现象既不适合利用主观概率研究也不适合用模糊集理论研究。事实上，主观概率、Dempster-Shafer 理论和模糊集理论均存在各自的悖论。

（1）主观概率的悖论

Cohen[11]通过调研指出如果甲、乙两个人到某同一目的地的可能性分别是0.3和0.4，当甲、乙两人是否到目的地相互独立时，最后两人同时到目的地的可能性要远远大于0.12.即此时不再满足概率中独立事件的乘积概率公式。另外，刘宝碇教授[46]在 2010 年给出了如下的例子。

假设有十个城市，各城市之间距离相等，假设为96公里。现在假设不知道城市之间距离，请专家给出城市之间距离的主观数据。经过调研，专家给出了城市

之间距离为100±5公里。若把城市之间距离理解为[95,105]上均匀分布的随机变量，则得到十个城市之间距离和的99%的置信区间为[977,1203]。这意味着真实的距离960公里以99%的可能性落在区间[977,1203]之外。若把该问题应用于可靠性分析中，不难想象可能会出现灾难性的后果。

(2) Dempster-Shafer 理论的悖论

Dempster-Shafer 理论[65,81]也被认为是信度函数理论。该理论在概率的基础上，对概率论的概念进行了扩展。把概率论的事件扩展成命题，把事件的集合扩展成命题的集合等，其实质上是主观概率的贝叶斯理论的扩展。其中，基本概率分配、信任函数及似然函数等是 Dempster-Shafer 理论的基本的概念。信度函数允许人们基于信度使用一个问题的概率来推导一个相关问题的概率。这些信度值可能有也可能没有概率的数学性质，他们与概率的差异大小将取决于这两个问题有多相关。

虽然 Dempster-Shafer 理论在实际中得到了某些应用，但其自身的不足也是显而易见的，特别是在高冲突证据组合的时候导致合成的结果违背直觉。虽然诸多学者在这个问题上尝试努力改进，但是到目前为止，这一问题终究没有得到很好的解决。其中具有代表性的是由 Kyburg[80]指出的一个著名的悖论。

某地区发生凶杀案，嫌疑人为$a,b,c$.有两人向警方提供证据：

• 证人$e$为住在被害人屋子对面的老妇，称事发时透过窗户看见嫌疑人$a$在凶杀现场。

• 证人$f$为被害人的邻居，称在事发时段看见嫌疑人$c$在凶杀现场。

假设我们得到如下基本概率指派：

$$m_1(\{a\})=0.99,\quad m_1(\{b\})=0.01 \tag{1.1}$$

$$m_2(\{b\})=0.01,\quad m_2(\{c\})=0.99 \tag{1.2}$$

那么由 Dempster 组合规则去组合(1.1) 和(1.2)，则得到

$$m_{12}(\{a\})=0,\quad m_{12}(\{b\})=1,\quad m_{12}(\{c\})=0.$$

这一结果表明嫌疑人$b$确定为杀人犯。然而，实际情况是上述证据同时认为该嫌疑人为凶手的可能性是很小的。显然，这是一个悖论。

(3) 模糊集的悖论

总所周知，模糊集完全依赖于隶属度函数。现在考虑“北京到天津大约 100 公里”。如果“大约 100 公里”理解为模糊概念，则可以构造隶属度函数

$$\mu(x)=\begin{cases}(x-80)/20, 80\le x\le 100\\(120-x)/20, 100\le x\le 120.\end{cases}$$

上述隶属度函数表示了一个三角模糊变量$(80,100,120)$. 由此我们得到以下两个结论：

- 北京到天津的距离“恰好为 100 公里”的可能性是 1.
- 北京到天津的距离“不是 100 公里”的可能性是 1.

然而，根据常识知道，北京到天津的距离恰好为 100 公里的可能性是 0.另一方面，北京到天津的距离是 100 公里和不是 100 公里的可能性均为 1，这个结论显然难以让人接受。此例说明了不精确量“大约 100 公里”并不适合利用可能性测度来描述，也说明了其不是模糊概念。

为了更好的研究人类系统的不精确现象，清华大学的刘宝碇教授于 2007 年[40]建立了不确定理论，并于 2010 年[46]重新定义了不确定理论，使得该理论更加完善。不确定理论是从实际应用出发，以测度论为基础，建立在公理化体系之上的平行于概率论的一门严谨的数学分支。目前从不确定理论出发，研究了不确定过程、不确定方程、不确定分析、不确定逻辑，不确定可靠性分析、不确定熵，并成功应用于不确定规划、不确定金融、不确定控制、统计学习等领域。

2010 年，Liu[46]建立了不确定统计理论，指出不确定统计是收集、分析、解释专家经验数据，以不确定理论为基础建立相关统计模型的一种统计方法论，并做出了基础且重要的前期工作。给出了收集专家经验数据的一般方法，为估计不确定分布，定义了基于专家经验数据的经验不确定分布，提供了最小二乘法估计不确定分布中的未知参数的方法。

### 1.1.2 研究意义

众所周知，概率论是建立在坚实的公理化基础之上，概率测度、随机变量及概率分布是概率论中的三个基本概念。同样，建立在公理化基础之上的不确定理论中，不确定测度、不确定变量及不确定分布是三个基础且重要的概念。不确定测度用来表示事件发生的可能性大小，不确定变量用来描述不确定现象，不确定分布用来刻画不确定变量的取值变化规律。显然不确定变量的不确定分布是最终研究不确定现象的有力工具。

（1）在实际问题研究中，通过领域专家的经验知识得到经验不确定分布，经

验不确定分布可以近似代替理论不确定分布，那么如何获取经验不确定分布？在仅有一个专家的经验数据，刘宝碇教授提供了一种获取经验不确定分布的方法。对于多个专家的经验数据，刘宝碇教授指出可利用各个专家的经验分布的加权和来作为所需的经验不确定分布。我们将提出利用 Delphi 法给出所需的经验不确定分布，该方法不仅充分考虑的专家反复修改的意见，而且拓宽了获取经验分布的方式。

（2）当已知不确定分布类型，而该分布含有未知参数时，如何估计未知参数，是一种新的考验。 我们定义了经验矩、经验均值、经验方差等基本概念，提供了基于经验不确定分布的矩估计方法来估计未知参数，为系统研究不确定统计奠定了基础。

（3）在实际实践中，如果不能够获取不确定分布，那么寻求不确定分布的上下界将是一个通行的方案。根据不确定测度的定义和运算法则，建立关于不确定测度的不等式是获取不确定分布上下界的一个有效方法。

## 1.2 国内外研究现状

不确定理论是 2007 年由清华大学刘宝碇教授提出并建立的用于研究主观不精确现象的一门新的数学分支。该理论一经提出，得到了国内外专家学者的高度关注，理论研究和应用研究得到了不断的发展。

国内以刘宝碇教授为主的清华大学不确定实验室，在理论研究及不确定规划、不确定金融等应用领域研究进展迅速。不确定理论已经衍生出了不确定风险分析、不确定分析、不确定过程、不确定微分方程、不确定集理论、不确定推理等领域[46]。其中，2008 年 Liu[43]首先提出了不确定过程的概念，把不确定过程定义为以时间或空间为参数的不确定变量序列，定义了独立增量过程，不确定平稳过程，不确定更新过程并给出了更新定理及更新报酬定理[46]。2009 年，Liu 创造性地提出了 Canonical 过程[43]；Liu[44]建立了不确定分析理论，用于研究不确定过程的函数的微分和积分等问题；Liu[43]提出了 Canonical 过程驱动的不确定微分方程，之后，Chen 和 Liu[8]证明了不确定微分方程解的存在性及唯一性定理，Liu[50]等人研究了非 Lipschitz 系数下的不确定微分方程解的存在性及唯一性。2010 年，Liu[46]设计了 99 算法用以不确定微分方程的数值解；2009 年，Li 和 Liu[55]提出了不确定逻辑理

论，把不确定命题的真值定义为该命题为真的不确定测度，Chen 和 Ralescu[9]提出了计算真值的一种数值算法，Liu[45]提出了 Entailment 模型用于计算真值；2010 年，Liu[47]提出了不确定集及相关概念，同时提出了基于不确定集，由不确定序列驱动的不确定推理，并首次建立了推理准则。之后，Gao,Gao 和 Ralescu[19] 推广了推理准则。在应用方面，不确定理论成功地应用到不确定规划中[42]，广泛应用于车辆调度问题、机器排序、线路安排、目标规划等问题的研究。另外，Liu[48]建立了不确定风险分析和不确定可靠分析理论，将不确定理论引进了金融领域[44]，给出了欧式期权、美式期权及保险破产指标等显示解。Chen[7]研究了不确定金融市场的美式期权问题；2010 年，Zhu[94]研究了不确定优化控制问题等；不确定推理[47]成功应用在不确定控制领域。河北大学哈明虎教授等[54]成功把不确定理论应用到支持向量机、统计学习等领域,四川大学的徐久平教授等[51]研究了不确定期望的运算性质，黄冈师范学院彭锦教授等研究了不确定风险测度。清华大学的博士生戴徫[14,15]研究了不确定熵及二次熵，并将极小二次互熵原理应用于不确定统计分析中。河北大学的尤翠莲[87]研究了不确定变量序列的各种收敛性及关系。

国外一些专家学者也对不确定理论表现出了浓厚的兴趣。Iwamura K.和 Kageyama M.等[31]研究了无限乘积不确定空间，南非开普敦大学统计学家 Renkuan Guo 等人研究了不确定决策理论[23]、不确定 Bayes 测度[24]、一般不确定分布的本质形式[25]、不确定正态分布[26]等。Peng Z.和 Iwamura K. [61]合作研究了不确定分布的充分必要条件.

## 1.3 研究框架

### 1.3.1 研究内容

本课题将主要研究以下的内容。

•不确定变量序列均方收敛的充分必要条件。根据不确定过程的一般定义，给出了二阶矩过程的定义，并讨论了二阶矩过程的一般性质；

•研究了不确定测度的矩不等式，给出了不确定测度的上下界的矩估计；

•基于 Delphi 法和单个专家经验分布，研究了多个专家经验分布的获取方法，提出了一种新的获取经验不确定分布的方法，并进行了实例调研和验证；

•研究了不确定分布中的未知参数的估计方法，提出了基于专家经验数据的矩

估计方法，并进行了实例验证；

•提出阶梯型经验不确定分布的概念，讨论了基于阶梯型经验不确定分布的参数估计方法。

### 1.3.2 研究方法

本课题主要采用理论联系实际的方法进行研究。由于不确定理论是从测度论的观点出发、基于公理化平行于概率论的数学分支，在理论研究中，以测度论为基础，借鉴概率论与数理统计思想，联系实际生产实践活动中的实例进行针对性的研究。

## 1.4 本文的创新点

由于不确定理论是一门崭新的学科，所以本课题所作主要研究工作均是新的思想和新的结论。

•讨论不确定变量序列均方收敛的性质，建立了均方收敛的一个充分必要条件；

•在不确定过程的一般概念基础之上，提出了不确定二阶矩过程，讨论了其相关的性质；

•建立了新的不确定测度的矩不等式。不确定测度满足次可列可加性而非可列可加性，所以在应用中，能够有效估计不确定测度的上下界是一种新的方法和结论；

•针对多专家经验数据，提出了基于 Delphi 法的获取不确定分布的一种方法，并应用于实际问题研究之中；

•提出了不确定统计中关于不确定分布未知参数的矩估计方法。不确定理论中，不存在类似概率论中的大数定律和中心极限定理，所以不确定统计的研究方法与传统的数理统计截然不同，是一种崭新的方法论。

# 2 不确定理论基础

由于信息的缺失，在社会实践活动中不可避免的存在着人类主观造成的不精确性。例如“大约100公里”，“高速”，“大约1米高”等等。如何去认识、度量、刻画这些不精确量？从测度论的观点出发，以公理化为基础，清华大学刘宝碇教授于2007年[40]提出了不确定理论来刻画上述的不精确量，并在2010年[46]重新定义了不确定理论，使得该理论更加完善。不确定理论是具有规范性、自对偶性、单调性、次可加性和乘积测度公理的数学系统，是公理化数学的一个分支，是研究主观不确定性的数学工具。目前该理论在理论研究和应用研究方面均取得了较大的进展。不确定测度、不确定变量、不确定分布是不确定理论中三个基本重要的概念。其中不确定测度用来度量事件发生的可能性大小，不确定变量用来描述不确定现象，不确定分布用来刻画不确定变量的取值变化规律。本章介绍本文研究工作用到的不确定理论中的基本概念。

## 2.1 不确定测度和不确定变量

设$\Gamma$是一个非空集合，称为论域。$L$是$\Gamma$上的$\sigma-$代数，每个$A\in L$称为事件。$M\{A\}$是由$L$到$[0,1]$的集合函数，其用来表征事件$A$发生的可能性大小，刘宝碇教授给[46]出了如下的公理。

**公理1**：（规范性）$M\{\Gamma\}=1$.

**公理2**：（单调性）对于任意的$A_1\subset A_2\in L$，有$M\{A_1\}\le M\{A_2\}$.

**公理3**：（自对偶性）对于任意的$A\in L$，有$M\{A\}+M\{A^c\}=1$.

**公理4**：（次可列可加性）设$A_i\in L,i=1,2,\cdots$，那么$M\{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\}\le\sum_{i=1}^{\infty}M\{A_i\}$.

**注 2.1.1** 上述公理3（自对偶性）保证了不确定理论满足排中律和矛盾律。

**定义 2.1.1** 若集合函数$M$满足上面前四条公理，则称$M$是不确定测度，三元组$(\Gamma,L,M)$称为不确定空间。

**注 2.1.2** 虽然概率测度满足上面4条公理，但是概率论和不确定理论是互不包含的两个独立的数学分支。事实上，概率测度和不确定测度的乘积测度是完全

不相同的。即不确定测度满足下面的乘积测度公理。

**公理 5：** 设$(\Gamma_k, M_k, L_k), k=1,2,\cdots,n$是不确定空间。令$M=M_1\times M_2\times\cdots M_n$，则

$$M\{\prod_{k=1}^{n} A_k\}=\min_{1\le k\le n} M_k\{A_k\}.$$

即对每个乘积$\sigma-$代数$L=L_1\times L_2\times\cdots\times L_n$上的事件$A$，有

$$M\{A\}=\begin{cases}\sup\limits_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\subset A}\min\limits_{1\le k\le n} M_k\{A_k\}, & \sup\limits_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\subset A}\min\limits_{1\le k\le n} M_k\{A_k\}>0.5\\ 1-\sup\limits_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\subset A^c}\min\limits_{1\le k\le n} M_k\{A_k\}, & \sup\limits_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\subset A^c}\min\limits_{1\le k\le n} M_k\{A_k\}>0.5\\ 0.5, & \text{其他.}\end{cases}$$

**注 2.1.3** Peng[60]证明了上述乘积测度满足不确定测度的四条公理。

**定义 2.1.2** 由不确定空间$(\Gamma, L, M)$到实数集的可测函数$\xi$称为不确定变量，即对于任意 Borel 集$B$，集合

$$\{\xi\in B\}=\{\gamma\in\Gamma \mid \xi(\gamma)\in B\}$$

是一个事件。

## 2.2 不确定分布和逆不确定分布

概率论中，以概率密度或分布律刻画随机变量；模糊集理论中，以隶属度函数刻画模糊变量。不确定理论中，以不确定分布刻画不确定变量。

**定义 2.2.1**[46] 设$\xi$为不确定变量，对于任意实数$x$，函数

$$\Phi(x)=M\{\xi\le x\}$$

称为$\xi$的不确定分布。

Peng 和 Iwamura 证明了函数$\Phi(x)$为不确定分布的充分必要条件，即

**定理 2.2.1**[61] 一个函数$\Phi(x)$: $R\to[0,1]$为不确定分布的充分必要条件是其为单调递增函数，除非$\Phi(x)\equiv 0$或者$\Phi(x)\equiv 1$.

几个常见的不确定分布：

**定义 2.2.2**[46] 一个不确定变量$\xi$称为线性的，若其具有线性的不确定分布

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

记为$L(a,b)$，其中$a<b$均为实数。

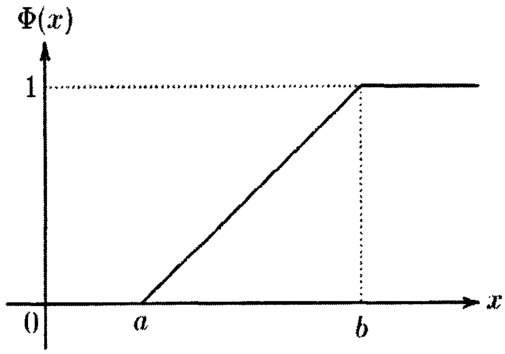


图 2.2.1 线性不确定分布

**定义 2.2.3**[46]一个不确定变量$\xi$称为 zigzag 的，若其不确定分布为

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ (x-a)/2(b-a), & a\le x\le b\\ (x+c-2b)/2(c-b), & b\le x\le c\\ 1, & x>c\end{cases}$$

记为$z(a,b,c)$，其中$a<b<c$是三个实数。

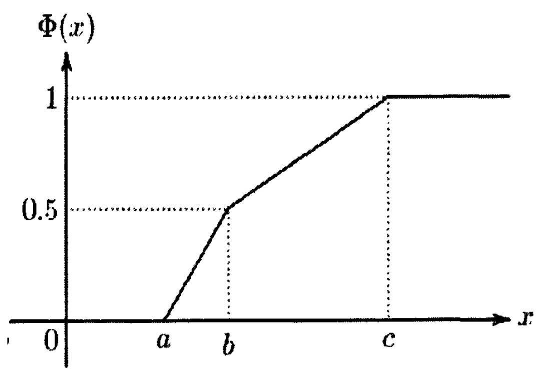


图 2.2.2 zigzag 不确定分布

**定义 2.2.4**[46]一个不确定变量$\xi$称为正态的，若其不确定分布为

$$\Phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},\quad x\in\Re$$

记为$N(e,\sigma)$，其中$e,\sigma$是两个实数，且$\sigma>0$.

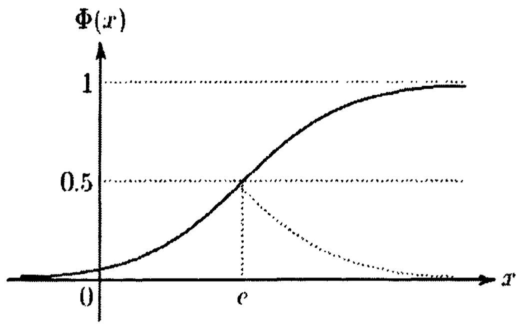


图 2.2.3 正态不确定分布

**定义 2.2.5**[46]一个不确定变量$\xi$称为对数正态的，如果$\ln\xi$是一个正态不确定变量$N(e,\sigma)$.其不确定分布为

$$\Phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-\ln x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},\quad x\geq 0$$

记为$\log N(e,\sigma)$，其中$e,\sigma$是两个实数，且$\sigma>0$.

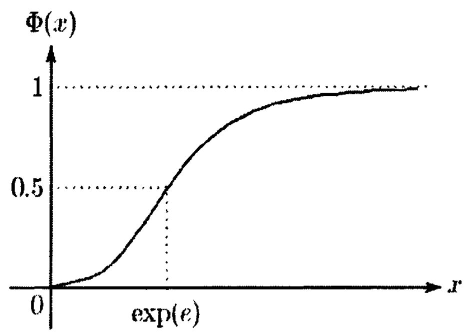


图 2.2.4 对数正态不确定分布

Liu[46]提出通过逆分布的方法来获得不确定分布，为此首先定义了正则不确定分布及逆分布。

**定义 2.2.5**[46] 一个不确定分布$\Phi(x)$称为是正则的，若对于任意的$\alpha\in(0,1)$，其反函数$\Phi^{-1}(\alpha)$惟一存在。

**定义 2.2.6**[46] 设不确定变量$\xi$具有正则分布$\Phi(x)$，则其反函数$\Phi^{-1}(\alpha)$称为$\xi$的逆不确定分布。

**例 2. 2. 1** 线性不确定变量$L(a,b)$的逆不确定分布为

$$\Phi^{-1}(\alpha)=(1-\alpha)a+\alpha b.$$

**例 2. 2. 2** zigzag 不确定变量$z(a,b,c)$的逆不确定分布为

$$\Phi^{-1}(\alpha)=\begin{cases}(1-2\alpha)a+2\alpha b, & 若\alpha<0.5\\(2-2\alpha)b+(2\alpha-1)c, & 若\alpha\geq 0.5.\end{cases}$$

**例 2.2.3** 正态不确定变量$N(e,\sigma)$的逆不确定分布为

$$\Phi^{-1}(\alpha)=e+\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

**注 2.2.1** 在实际应用中，Liu[46]提出了 99 方法来获得不确定变量$\xi$的逆分布及不确定分布。

## 2.3 不确定变量的独立性及运算法则

为了便于应用，刘宝碇教授给出并证明了不确定变量的若干运算法则，其中 99 算法成功地解决了不确定变量函数的运算问题。

**定义 2.3.1**[40] 不确定变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$称为独立的，若对于任意的 Borel 集$B_1,B_2,\cdots,B_n$，有

$$M\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i\in B_i)\}=\min_{1\le i\le n}M\{\xi_i\in B_i\}.$$

**定理 2.3.1**[40]设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是独立不确定变量，$f_1,f_2,\cdots,f_n$是 Borel 可测函数，则$f_1(\xi_1),f_2(\xi_2),\cdots,f_n(\xi_n)$是独立不确定变量。

**定理 2.3.2**[46] 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是独立不确定变量，$f$是可测函数，那么

$$\xi=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

是一个不确定变量，并且有

$$M\{\xi\in B\}=\begin{cases}\sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B}\min\limits_{1\le k\le n}M_k\{\xi_k\in B_k\}, & \sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B}\min\limits_{1\le k\le n}M_k\{\xi_k\in B_k\}>0.5\\ 1-\sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B^c}\min\limits_{1\le k\le n}M_k\{\xi_k\in B_k\}, & \sup\limits_{f(B_1,B_2,\cdots,B_n)\subset B^c}\min\limits_{1\le k\le n}M_k\{\xi_k\in B_k\}>0.5\\ 0.5, & \text{其它.}\end{cases}$$

其中当函数$f(x)$为单调增加或单调减少、函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$单调增加，单调减少或单调性改变时，利用 99 方法[46]，分别给出了各自的运算法则。

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是不确定变量，分别具有不确定分布$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$.当$f$单调增加时，$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是不确定变量且具有如下的逆分布

$$\psi^{-1}(\alpha)=f(\Phi_1^{-1}(\alpha),\Phi_2^{-1}(\alpha),\cdots,\Phi_n^{-1}(\alpha)).$$

当$f$单调减少时，$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是不确定变量且具有如下的逆分布

$$\psi^{-1}(\alpha)=f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha),\Phi_2^{-1}(1-\alpha),\cdots,\Phi_n^{-1}(1-\alpha)).$$

## 2.4 矩的概念

根据实际问题的需要，Liu 定义了不确定变量的期望值、方差及矩等。

**定义 2.4.1**[40] 设$\xi$是不确定变量，如果下面等式右边两个积分至少有一个是有限的，则称

$$E[\xi]=\int_0^{+\infty}M\{\xi\geq r\}dr-\int_{-\infty}^0 M\{\xi\leq r\}dr \tag{2.1}$$

为不确定变量$\xi$的期望值。

期望值表示在不确定测度意义下，不确定变量$\xi$平均取值的情况。

**定理 2.4.1**[46]设不确定变量$\xi$具有不确定分布$\Phi$，若其期望值存在，则有

$$E[\xi]=\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)d\alpha\,. \tag{2.2}$$

**定义 2.4.2**[46] 设不确定变量$\xi$具有有限期望值$e$，则称

$$V[\xi]=E[(\xi-e)^2] \tag{2.3}$$

为不确定变量$\xi$的方差。

**注 2.4.1** 方差用来说明不确定变量取值与期望值之间的分散程度。然而在实际应用中，难易获得确切的方差，在不确定理论中，Liu 约定采用下面的方差计算公式

$$V[\xi]=2\int_e^{+\infty}(r-e)(1-\Phi(r)+\Phi(2e-r))dr \tag{2.4}$$

其中，$e,\Phi$分别为不确定变量$\xi$的期望值和不确定分布。

一般地，有如下的矩的定义

**定义 2.4.3**[40] 设不确定变量$\xi$具有有限期望值$e$，那么对于任意的正整数$k$，（1）$E[\xi^k]$称为$k$阶矩；（2）$E[|\xi|^k]$称为$k$阶绝对矩；（3）$E[(\xi-e)^k]$称为$k$阶中心矩；（4）$E[|\xi-e|^k]$称为$k$阶绝对中心矩。

## 2.5 各种收敛的概念与相互关系

对于不确定变量序列，Liu 定义了四种常用的收敛定义并讨论了各种收敛之间的关系。

**定义 2.5.1**[40] 设$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots$是定义在不确定空间$(\Gamma,L,M)$上的不确定变量序

列，事件$\Lambda$满足$M\{\Lambda\}=1$，若对于每个$\gamma\in\Lambda$，有$\lim_{i\to\infty}|\xi_i(\gamma)-\xi(\gamma)|=0$，则称不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$几乎必然收敛于不确定变量$\xi$. 记为$\xi_i\to\xi, a.s.$

**定义 2.5.2**[40] 设$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots$是定义在不确定空间$(\Gamma,L,M)$上的不确定变量序列，若对于任意的正数$\varepsilon>0$，有$\lim_{n\to\infty}M\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}=0$，则称不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$依测度收敛于不确定变量$\xi$.

**定义 2.5.3**[40] 设$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots$是定义在不确定空间$(\Gamma,L,M)$上的不确定变量序列，且均具有有限期望值。若$\lim_{n\to\infty}E[|\xi_n-\xi|]=0$，则称不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$依均值收敛于不确定变量$\xi$.

特别地，若$\lim_{n\to\infty}E[|\xi_n-\xi|^2]=0$，则称不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$依均方收敛于不确定变量$\xi$.

**定义 2.5.4**[40] 设$\Phi,\Phi_1,\Phi_2,\cdots$分别是不确定变量$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots$的不确定分布，若在$\Phi$的每个连续点$x$处有$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=\Phi(x)$，则称不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$依分布收敛于不确定变量$\xi$.

刘宝碇教授证明并验证了上述各种收敛有如下的关系

$$\text{依均值收敛}\Rightarrow\text{依测度收敛}\Rightarrow\text{依分布收敛}$$

另外，几乎处处收敛和前面三种收敛互不包含。

## 2.6 不确定理论目前的应用研究领域

现在，以不确定理论为基础，分别展开了不确定统计、不确定过程、不确定方程、不确定金融、不确定推理控制、不确定风险分析等领域的研究。尤其在不确定规划理论及应用方面有着丰富的研究结论[42]等。

# 3 不确定变量序列均方收敛的充分必要条件

众所周知，概率论中的极限定理有着丰富结果[3,10,28,63,69,83,84].模糊集理论中，Zadeh[89]定义了模糊事件的可能性测度。随后，日本学者 Kwakerenaak H.[33,34]定义了模糊随机变量，Li 和 Ogura [37]等人研究了模糊随机变量序列的极限定理, Puri M. 和 Ralescu D.[64]研究了模糊鞅的收敛性。基于可信性理论[39]，Wang[74,75,76]等人研究了模糊变量序列的收敛性及极限定理。不确定理论中，Liu 定义了不确定变量序列的几乎必然收敛、依测度收敛、依分布收敛、依均值收敛及均方收敛等不同的收敛方式，讨论了前四种收敛的关系。另外，You[87]定义了不确定变量序列的几乎处处一致收敛性，并讨论了与几乎处处收敛，依测度收敛，依均值收敛和依分布收敛的关系。随机过程的研究具有悠久的历史及丰富的结论。在模糊集理论提出后，很多学者研究了模糊状态的随机过程[2,67,70]。基于可信性理论，Kageyama[32]研究了可信性马尔可夫决策过程的平均情况，Zhao[92,93]研究了模糊随机更新过程和随机模糊更新过程。

本章将讨论不确定变量序列均方收敛的性质及充分必要条件。进一步地，在不确定过程的一般定义基础上，提出了不确定二阶矩过程，讨论了该过程的常见性质。

## 3.1 均方收敛的充分必要条件

设$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots$是定义在不确定空间$(\Gamma,L,M)$上的不确定变量序列，且均具有有限期望值。若

$$\lim_{n\to\infty} E[|\xi_n-\xi|^2]=0$$

则称不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$依均方收敛于不确定变量$\xi$. 记为$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi \quad (ms)$.

由于不确定理论中定义了不确定变量的矩，且矩方便于计算，故本节将通过矩讨论均方收敛的若干性质。

为方便起见，本章记$H$为具有有限二阶矩的不确定变量组成的集合，另外，我们约定：如果$M\{\xi=\eta\}=1$，则$\xi=\eta$.

**引理 3.1.1 ($r$阶不等式)** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为不确定变量，$r>0$，则

$$E[|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|]^r \le n^r\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^r \tag{3.1}$$

证明：显然，对于任意的实数$x$，有

$$\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n \ge x\} \subset \{\xi_1 \ge \frac{x}{n}\} \cup \{\xi_2 \ge \frac{x}{n}\} \cup \cdots \cup \{\xi_n \ge \frac{x}{n}\}.$$

由公理 2，得到

$$M\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \ge x\} \le \sum_{i=1}^{n}M\{\xi_i \ge \frac{x}{n}\}. \tag{3.2}$$

进一步地，由上式得到

$$M\{|\sum_{i=1}^{n}\xi_i| \ge x\} \le \sum_{i=1}^{n}M\{|\xi_i| \ge \frac{x}{n}\}. \tag{3.3}$$

由期望值的定义及式(3.3)，有

$$\begin{aligned}
E[|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|]^r &= \int_0^{+\infty}M\{|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|^r \ge x\}dx \\
&= \int_0^{+\infty}M\{|\sum_{i=1}^{n}\xi_i| \ge x^{\frac{1}{r}}\}dx \\
&\le \int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} M\{|\sum_{i=1}^{n}\xi_i| \ge \frac{x^{\frac{1}{r}}}{n}\}dx \\
&= \sum_{i=1}^{n}n^r\int_0^{+\infty}M\{|\sum_{i=1}^{n}\xi_i| \ge \frac{x}{n^r}\}d\frac{x}{n^r} \\
&= n^r\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^r.
\end{aligned}$$

引理证毕。

**定理 3.1.1** 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi \quad (ms)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\eta \quad (ms)$，那么$\xi=\eta$.

证明:由引理 3. 1. 1， 我们有

$$E|\xi-\eta|^2=E|\xi-\xi_n+\xi_n-\eta|^2 \le 4(E|\xi_n-\xi|^2+E|\xi_n-\eta|^2) \to 0\ (n\to\infty).$$

从而得到

$$E|\xi-\eta|^2=0.$$

这蕴含着对于任意的$r>0$，有

$$M\{|\xi=\eta|^2 \ge r\}=0.$$

即$M\{\xi=\eta\}=1$.定理证毕。

**定理 3.1.2** 如果$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\quad(ms)$，$\lim_{n\to\infty}\eta_n=\eta\quad(ms)$，那么对于任意的实数$\alpha,\beta$有

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)=\alpha\xi+\beta\eta\quad(ms).$$

**证明**：由引理 3. 1. 1，

$$E|\alpha\xi_n+\beta\eta_n-\alpha\xi-\beta\eta|^2$$
$$=E|\alpha(\xi_n-\xi)+\beta(\eta_n-\eta)|^2$$
$$\le(E|\alpha(\xi_n-\xi)|^2+E|\beta(\eta_n-\eta)|^2)\to 0\ (n\to\infty).$$

定理证毕。

**定理 3.1.3** 设$\xi,\xi_n\in H\ (n\ge 1)$是独立不确定变量，如果$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\quad(ms)$，那么

$$\lim_{n\to\infty}E[\xi_n]=E[\xi].$$

**证明**：由于$\xi_n$和$\xi$独立，由 Jensen 不等式[40]得到

$$|E[\xi_n]-E[\xi]|^2=|E[\xi_n-\xi]|^2\le E|\xi_n-\xi|^2\to 0\ (n\to\infty).$$

因此，$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\quad(ms)$蕴含着$\lim_{n\to\infty}E[\xi_n]=E[\xi]$. 定理证毕。

**定理 3.1.4** 设$f(x)$是一个普通的实函数且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|,\ \forall x,y\in\Re. \tag{3.4}$$

此处$K$是一个常数，如果$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\quad(ms)$，那么

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=f(\xi)\quad(ms).$$

**证明**：由 Lipschitz 条件知道

$$|f(\xi_n)-f(\xi)|^2\le K^2|\xi_n-\xi|^2.$$

由上述不等式得到

$$\int_0^{+\infty}M\{|f(\xi_n)-f(\xi)|^2\ge r\}dr\le K^2\int_0^{+\infty}M\{|\xi_n-\xi|^2\ge 2\}dr.$$

即

$$E[|f(\xi_n)-f(\xi)|^2\le K^2E[|\xi_n-\xi|^2].$$

从而知道$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\ (ms)$蕴含着$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=f(\xi)\ (ms)$. 定理证毕。

下面讨论均方收敛的条件，定理 3.1.5 表明一个不确定序列均方收敛的充分必

要条件是该序列是一个 Cauchy 序列。

**定义 3.1.1** 设$\xi_n \in H$，$n \ge 1$.若不确定变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$满足

$$\lim_{m,n\to\infty} E[|\xi_m - \xi_n|^2] = 0,$$

则称该序列为 Cauchy 序列。

**定义 3.1.2** 设$\xi_n \in H$，$n \ge 1$.若不确定序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$满足对于任意的$\varepsilon > 0$有

$$\lim_{m,n\to\infty} M\{|\xi_m - \xi_n| \ge \varepsilon\} = 0,$$

则称该序列为依测度 Cauchy 序列。

**定理 3.1.5** 不确定序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$在$H$中均方收敛于$\xi$的充分必要条件是该序列是$H$中的 Cauchy 序列。

**证明：** 首先证明如果$\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi \quad (ms)$，那么不确定序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$是$H$中的 Cauchy 序列。

由于$\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi \quad (ms)$，那么对于任意的$\varepsilon > 0$，一定存在某个正整数$N$，使得当$m,n > N$时，有

$$E|\xi_m - \xi|^2 < \frac{\varepsilon}{8},\quad E|\xi_n - \xi|^2 < \frac{\varepsilon}{8}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} E|\xi_m - \xi_n|^2 &= E|\xi_m - \xi + \xi - \xi_n|^2 \\ &\le 4(E|\xi_m - \xi|^2 + E|\xi_n - \xi|^2) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

下面证明如果不确定序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$是$H$中的 Cauchy 序列，那么

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi \quad (ms).$$

设不确定序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$是$H$中的 Cauchy 序列，由 Markov 不等式[40]，得到

$$M\{|\xi_m - \xi_n| \ge \varepsilon\} \le \frac{E[|\xi_m - \xi_n|^2]}{\varepsilon^2}.$$

即不确定序列$\xi_1,\xi_2,\cdots$是依测度 Cauchy 序列。下面我们证明存在$\xi \in H$，使得

$$\lim_{n\to\infty} M\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\} = 0. \tag{3.5}$$

令$\eta = \varepsilon = \dfrac{1}{2^j}$，$j \in N$（此处$N$表示正整数集合）。那么存在正整数$k_0(j)$，使得

对于任意的$m,n\ge k_0(j)$

$$M\{|\xi_m-\xi_n|\ge\frac{1}{2^j}\}\le\frac{1}{2^j}.$$

不妨设$k(j)<k(j+1)$，记

$$E_j=\{|\xi_{k(j+1)}-\xi_{k(j)}|\ge\frac{1}{2^j}\},\quad A_i=\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j,\quad A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

由公理 4 知，

$$M\{A_i\}=M\{\bigcup_{j=i}^{\infty}E_j\}\le\sum_{j=i}^{\infty}M\{E_j\}<\frac{1}{2^{i-1}}.$$

显然，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\subset A_i$ $i=1,2,\cdots$由公理 2 知道$M\{A\}=0$.因此，对于任意的$\gamma\in H-A$，存在某个指标$i$使得$\gamma\notin A_i$及

$$|\xi_{k(j+1)}(\gamma)-\xi_{k(j)}(\gamma)|<\frac{1}{2^j}.$$

所以我们有

$$\sum_{j=i}^{\infty}|\xi_{k(j+1)}(\gamma)-\xi_{k(j)}(\gamma)|<\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{i-1}}.$$

从而知道$\xi_{k(1)}(\gamma)+\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_{k(i+1)}(\gamma)-\xi_{k(i)}(\gamma)|$在$H-A$中绝对收敛。所以不确定序列$\{\xi_{k(i)}\}$在$H$中几乎处处收敛。不妨设其极限是$\xi$.那么对于任意的$\varepsilon>0$，必存在一个正整数$K$，使得当$i>K$时有

$$M\{|\xi_{k(i)}-\xi|\ge\frac{\varepsilon}{2}\cap(H-A)\}<\varepsilon,\quad M\{|\xi_{k(i)}-\xi|\ge\frac{\varepsilon}{2}\cap A\}=0.$$

进一步地，

$$\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\}\subset\{|\xi_n-\xi_{k(i)}|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|\xi_{k(i)}-\xi|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$=\{|\xi_n-\xi_{k(i)}|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{(|\xi_{k(i)}-\xi|\ge\frac{\varepsilon}{2})\cap(\Gamma-A)\}\cup\{(|\xi_{k(i)}-\xi|\ge\frac{\varepsilon}{2})\cap A\}.$$

由公理 2 知道等式（3.1.5）成立。再由等式(3.1.4)得到

$$\lim_{n\to\infty}E|\xi_n-\xi|^2=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}M\{|\xi_n-\xi|^2\ge r\}dr$$

$$=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}2rM\{|\xi_n-\xi|\ge r\}dr$$

$$= \int_0^\infty 2r \lim_{n\to\infty} M\{|\xi_n - \xi| \geq r\} dr$$

$$= 0,$$

即 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi \quad (ms)$. 定理证毕。

## 3.2 不确定过程

刘宝碇教授[43]于 2008 年提出并开始着手研究不确定过程，不确定过程实质上是一种二元函数。随后深入研究了不确定更新过程及 Canonical 过程。

**定义 3.2.1**[43] 设 $T$ 是指标集，$(\Gamma, L, M)$ 是不确定空间，由 $T \times (\Gamma, L, M)$ 到实数集的可测函数称为一个随机过程。记为 $X_t(\gamma), t \in T, \gamma \in \Gamma$.

**定义 3.2.2**[43] 对于固定的 $\gamma^*$，函数 $X_t(\gamma^*)$ 称为不确定过程 $X_t$ 的一个样本轨道。若对于 $t$，几乎所有轨道都是连续的，则称不确定过程 $X_t(\gamma)$ 是样本连续的。

在不确定过程的一般定义上，Liu[46]定义并研究了独立增量、平稳过程、更新过程等几种常见的不确定过程，同时还创造性地定义 Canonical 过程，并将其成功应用到不确定方程和不确定金融等研究领域。

**定义 3.2.3**[46] 设 $X_t$ 是不确定过程，若对于任意时刻 $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$，

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

是独立的不确定变量，则称不确定过程 $X_t$ 是独立增量过程。

**定义 3.2.4**[46]设 $X_t$ 是不确定过程，若对于给定的 $t > 0$ 及任意的 $s > 0$，$X_{s+t} - X_s$ 具有相同的不确定分布，则称不确定过程 $X_t$ 是平稳过程。

**定义 3.2.5**[46]设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 iid 正的不确定变量，定义

$$S_0 = 0，\quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n，\quad n \geq 1.$$

则称不确定过程 $N_t = \max_{n\geq 0}\{n \mid S_n \leq t\}$ 为更新过程。

Liu[46]研究了不确定更新过程的更新定理及更新报酬过程。

**定义 3.1.6**[46] 一个不确定过程 $C_t$ 称为 Canonical 过程，若满足

（1）$C_0 = 0$ 及几乎所有样本轨道是 Lipschitz 连续的；

（2）$C_t$ 是平稳和独立增量的；

（3）每个增量 $C_{s+t} - C_s$ 是期望值为 0，方差为 $t^2$ 的正态不确定变量。

**注 3.2.1** Canonical 过程几乎所有样本轨道是 Lipschitz 连续函数，而 Brownian 运动几乎所有样本轨道是连续但非 Lipschitz 连续函数。这意味着，Brownian 运动是用来描述花粉以无限速度在做不规则运动，而 Canonical 过程描述了花粉以有限速度做不规则运动。

## 3.3 不确定二阶矩过程

**定义 3.3.1** 不确定过程$\{\xi_t, t\in T\subset\Re\}$称为不确定二阶矩过程，如果对于任意的$t\in T$，有

$$E[\xi_t]<\infty,\ E[\xi_t^2]<\infty$$

成立。

**性质 3.3.1** 设$\{\xi_t, t\in T\}$为不确定二阶矩过程，则$V_\xi(t)<\infty$，此处

$$V_\xi(t)=E[\xi(t)-m_\xi(t)]^2,\ \ m_\xi(t)=E[\xi(t)],\ \ t\in T.$$

**证明：** 由引理 3.1.1 得到

$$V_\xi(t)=E[\xi(t)-m_\xi(t)]^2\le 4E[\xi^2(t)]+4m_\xi^2(t)<\infty.$$

证毕。

**性质 3.3.2** 设$\{\xi_t, t\in T\}$为不确定二阶矩过程，则对于任意的$s,t\in T$，有

$$Cov(s,t)=E[(\xi(s)-m_\xi(s))(\xi(t)-m_\xi(t))]<\infty.$$

**证明：** 由 Jensen 不等式[40]知，$E[\xi]\le|E[\xi]|\le E[|\xi|]$成立。由 Holder 不等式[40]及引理 3.1.1 得到

$$\begin{aligned}Cov^2(s,t)&\le E^2[|\xi(s)-m_\xi(s))(\xi(t)-m_\xi(t))|]\\&\le E[|\xi(s)-m_\xi(s)|^2]\cdot E[|\xi(t)-m_\xi(t)|^2]\\&\le[4E[|\xi(s)|^2]+4m_\xi^2(s)]\cdot[4E[|\xi(t)|^2]+4m_\xi^2(t)]\\&<\infty.\end{aligned}$$

证毕。

**性质 3.3.3** 具有二阶矩的不确定变量全体构成的集合$H$是一个线性空间。

**证明：** 设$\xi,\eta\in H$，那么$E|\xi|^2<+\infty$，$E|\eta|^2<+\infty$.由引理 3.1.1 知，对于任意的实数$\alpha,\beta$有

$$E|\alpha\xi+\beta\eta|^2\le 4(E|\alpha\xi|^2+E|\beta\eta|^2)=4\alpha^2E|\xi|^2+4\beta^2E|\eta|^2<\infty.$$

证毕。

**定理 3.3.4** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是不确定变量，定义$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，如果

$$E[\xi_i^2]<\infty，\ i=1,2,\cdots,$$

那么有

$$M\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge x\}\le\frac{n^2}{x^2}\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i^2].\tag{3.6}$$

**证明**：由 Markov 不等式[40]及引理 3.1.1 知

$$M\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge x\}\le\frac{1}{x^2}E|\max_{1\le j\le n}|S_j||^2\le\frac{1}{x^2}E|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||^2\le\frac{n}{x^2}E[\xi_i^2].$$

定理证毕。

**例 3.3.1** Canonical 过程$\{C_t,t\in[a,b]\}$是不确定二阶矩过程。事实上，由于$\{C_t,t\in[a,b]\}$是 Canonical 过程，故$E[C_t]=0<\infty$，$E[C_t^2]=V[C_t]=t^2\le b^2<\infty$.且对于任意的$s,t\in[a,b]$，$Cov(s,t)=E[C_sC_t]<\frac{3}{\pi^2}st$.

**例 3.3.2** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots$是独立的线性不确定变量$L(a_n,b_n)$，$n\ge1$.根据不确定分布的运算律[46]，得到

$$E[\xi_n]=\frac{a_n+b_n}{2}，\ V[\xi_n]=\frac{(b_n-a_n)^2}{12}$$

$$E[\xi_m\xi_n]=\frac{1}{3}a_ma_n+\frac{1}{6}a_mb_n+\frac{1}{6}a_nb_m+\frac{1}{3}b_mb_n<\infty.$$

故$\xi_1,\xi_2,\cdots$是不确定二阶矩过程。进一步地，对于任意的正整数$m,n$

$$Cov(m,n)=\frac{1}{4}a_ma_n-\frac{1}{12}a_nb_m-\frac{1}{4}a_mb_n+\frac{1}{12}b_mb_n.$$

# 4　不确定测度的矩估计

测度论[27]是现代分析的基础，自 1933 年，Kolmogorov 建立了概率公理化体系后，概率论的发展完全依赖于概率测度，其中概率不等式是研究随机变量序列收敛性的重要工具和手段。Zadeh[89,90]提出了度量模糊事件的概率测度及可能性测度。不确定测度是满足规范性、单调性、自对偶性及次可列可加性的集函数，其用于度量不确定事件的发生的可能性大小。Liu[53]研究了如何产生不确定测度，Zhang[91]进一步地讨论了不确定测度。在实际应用中，当难易获得不确定测度精确值时候，通过建立恰当的不等式来寻找不确定测度的上下界是行之有效的一种办法。不确定理论中建立了矩的概念并给出了矩的计算公式及相应的若干重要不等式，如 Markov 不等式、Chebyshev 不等式、Holder 不等式、Minkowski 不等式及 Jensen 不等式等[40]。Zhu 和 Liu[95]研究了随机模糊变量的某些不等式，并应用于变量序列的收敛性研究中。Yang[85]研究了基于不确定理论的一个矩不等式。本章进一步建立关于不确定测度的不等式，以提供不确定测度上、下界的矩估计。

## 4.1　基本不等式

在不确定理论中，Liu 首先建立了若干基础且重要的不等式。

**定理 4.1.1**[40]　设$\xi$是不确定变量，$f$是一个非负函数，如果$f$是偶函数且在$[0,+\infty)$上递增，那么对于任意给定的数$t>0$，有

$$M\{|\xi|\geq t\}\leq\frac{E[f(\xi)]}{f(t)}. \tag{4.1}$$

**定理 4.1.2**[40] (Markov 不等式) 设$\xi$是不确定变量，那么对于任意给定的数$t>0$及$p>0$，有

$$M\{|\xi|\geq t\}\leq\frac{E[|\xi|^p]}{t^p}. \tag{4.2}$$

**定理 4.1.3**[40] (Chebyshev 不等式)设$\xi$是不确定变量，方差$V[\xi]$存在，那么对于任意给定的数$t>0$，有

$$M\{|\xi-E[\xi]|\geq t\}\leq\frac{V[\xi]}{t^2}. \tag{4.3}$$

**定理 4.1.4**[40](Holder 不等式) 设 $p,q$ 是两个正数且满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$\xi,\eta$ 是独立不确定变量且分别满足 $E[\xi|^p<\infty$ 和 $E[\eta|^q<\infty$，那么

$$E[|\xi\eta|]\le\sqrt[p]{E[|\xi|^p]}\sqrt[q]{E[|\eta|^q]}. \tag{4.4}$$

**定理 4.1.5**[40](Minkowski 不等式) 设 $p$ 是一实数且满足 $p\ge1$，$\xi,\eta$ 是独立不确定变量且分别满足 $E[\xi|^p<\infty$ 和 $E[\eta|^p<\infty$，那么

$$\sqrt[p]{E[|\xi+\eta|^p]}\le\sqrt[p]{E[|\xi|^p]}+\sqrt[p]{E[|\eta|^p]}. \tag{4.5}$$

**定理 4.1.6**[40](Jensen 不等式) 设 $\xi$ 是不确定变量，$f:\Re\to\Re$ 是一个凸函数，如果 $E[\xi]$ 和 $E[f(\xi)]$ 有限，那么

$$f(E[\xi])\le E[f(\xi)]. \tag{4.6}$$

特别地，如果 $f(x)=|x|^p$，$p\ge1$，那么有

$$|E[\xi]|^p\le E[|\xi|^p]. \tag{4.7}$$

下面建立一些新的基本不等式。

**定理 4.1.7** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是不确定变量，那么对于任意实数 $x$，有

$$M\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ge x\}\le\sum_{i=1}^{n}M\{\xi_i\ge\frac{x}{n}\}. \tag{4.8}$$

**证明**：我们只需证明两个变量的情形。由于

$$\{\xi_1+\xi_2\ge x\}\subset\{\xi_1\ge\frac{x}{2}\}\cup\{\xi_2\ge\frac{x}{2}\}.$$

根据公理 2 和公理 4，有

$$\begin{aligned}M\{\xi_1+\xi_2\ge x\}&\le M\{(\xi_1\ge\frac{x}{2})\cup(\xi_2\ge\frac{x}{2})\}\\&\le M\{\xi_1\ge\frac{x}{2}\}+M\{\xi_2\ge\frac{x}{2}\}.\end{aligned}$$

定理证毕。

**推论 4.1.1** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是不确定变量，那么对于任意实数 $x$，有

$$M\{|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|\ge x\}\le\sum_{i=1}^{n}M\{|\xi_i|\ge\frac{x}{n}\}. \tag{4.9}$$

由上述推论 4.1.1 不难得到下面的 $r$ 阶不等式，即引理 3.1.1.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为不确定变量，$r>0$，则

$$E[|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|]^r \le n^r\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^r \tag{4.10}$$

**注 4.1.1** 概率论中著名的 cr 不等式指出，对于随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，当 $0<r\le 1$ 时，有 $E[|\sum_{i=1}^{n}X_i|]^r \le \sum_{i=1}^{n}E|X_i|^r$ 成立。但是由于不确定变量的期望值运算一般不满足线性性，故当 $0<r\le 1$ 时，不确定变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 一般不满足 $E[|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|]^r \le \sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^r$.

**例 4.1.1** 令不确定空间 $(\Gamma,L,M)$ 为 $\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$，其中 $M\{\gamma_1\}=0.7$，$M\{\gamma_2\}=0.3$，$M\{\gamma_3\}=0.2$，$M\{\gamma_1,\gamma_2\}=0.8$，$M\{\gamma_1,\gamma_3\}=0.7$，$M\{\gamma_2,\gamma_3\}=0.3$.不确定变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 定义如下

$$\xi_1(\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\gamma_1\\ 0, & \gamma=\gamma_2\\ 2, & \gamma=\gamma_3\end{cases},\qquad \xi_2(\gamma)=\begin{cases}0, & \gamma=\gamma_1\\ 2, & \gamma=\gamma_2\\ 3, & \gamma=\gamma_3.\end{cases}$$

由于不确定变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 不是独立的，因此有

$$(\xi_1+\xi_2)(\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\gamma_1\\ 2, & \gamma=\gamma_2\\ 5, & \gamma=\gamma_3.\end{cases}$$

因此 $E[\xi_1]=0.9$，$E[\xi_2]=0.8$ 及 $E[\xi_1+\xi_2]=1.9$.这意味着 $E[\xi_1+\xi_2]>E[\xi_1]+E[\xi_2]$.

**推论 4.1.2** 设 $\xi,\eta$ 是 iid（独立同分布）不确定变量，那么对于任意的实数 $a$ 及 $r>0$，有

$$E[|\xi-\eta|^r]\le 2^{r+1}E[|\xi-a|^r].$$

**证明：** 由定理 4.1.7 及 $\xi,\eta$ 是 iid 不确定变量知

$$\begin{aligned}E[|\xi-\eta|^r]&=E[|(\xi-a)-(\eta-a)|^r]\\&\le 2^r(E[|\xi-a|^r-E|\eta-a|^r)\\&\le 2^{r+1}E[|\xi-a|^r]\end{aligned}$$

**定理 4.1.8** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为不确定变量，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$.那么对于任意的实数 $x$，有

$$M\{\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge x\}\ge M\{\max_{1\le i\le n}|\xi_i|\ge 2x\}. \tag{4.11}$$

**证明**：记$S_0=0$，那么$\xi_i=S_i-S_{i-1}\,(1\le i\le n)$.从而有

$$\begin{aligned}\{\max_{1\le i\le n}|\xi_i|\ge 2x\}&=\{\max_{1\le i\le n}|S_i-S_{i-1}|\ge 2x\}\\&\subset\{\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge x\cup\max_{1\le i\le n}|S_{i-1}|\ge x\}\\&\subset\{\max_{1\le i\le n}|S_i|\ge x\}\end{aligned}$$

由公理2知道不等式(4.11)成立。定理证毕。

## 4.2 不确定测度的矩估计

设$\xi$是不确定变量，定理4.1.1给出了$M\{|\xi|\ge t\}\ \ (t>0)$的上界估计，下面的定理4.2.1将给出$M\{|\xi|\ge t\}\ \ (t>0)$的下界估计。

**定理4.2.1** 设$\xi$是不确定变量，$g(x)$是一个非负偶函数，如果$g(x)$在$[0,+\infty)$上递增，且$E[g(\xi)]$有限，那么对于任意的$t>0$，有

$$M\{g(\xi)\ge t\}\ge\frac{E[g(\xi)]-t}{T-t}\tag{4.12}$$

其中$T=\inf\{t:M\{g(\xi)\ge t\}=0\}$.

**证明**：由于$g(x)$是一个非负函数，根据期望值定义得到

$$\begin{aligned}E[g(\xi)]&=\int_0^{+\infty}M\{g(\xi)\ge r\}dr\\&=\int_0^{t}M\{g(\xi)\ge r\}dr+\int_t^{+\infty}M\{g(\xi)\ge r\}dr\\&\le t+\int_t^{T}M\{g(\xi)\ge t\}dt\\&=t+(T-t)M\{g(\xi)\ge t\}.\end{aligned}$$

也即$M\{g(\xi)\ge t\}\ge\dfrac{E[g(\xi)]-t}{T-t}$.定理证毕。

**推论4.2.1** 设$\xi$是不确定变量，符号$T,t$如定理4.2.1所定义，那么

$$M\{|\xi|\ge t\}\ge\frac{E[|\xi|]-t}{T-t}.\tag{4.13}$$

特别地，如果$|\xi|\le 1$，则有$M\{|\xi|\ge t\}\ge\dfrac{E[|\xi|]-t}{1-t}$.

**证明**：当定理4.2.1中$g(x)=|x|$时，式(4.12)即为式(4.13).

在不确定理论中，为了更好地刻画不确定变量，Liu[41]提出了第一辨识函数的

概念。

**定义 4.2.1**[41] 函数 $\lambda(x)$ 称为不确定变量 $\xi$ 的第一辨识函数，如果

(1) $\lambda(x)$ 是实数集 $\Re$ 上的非负函数，使得

$$\sup_{x\neq y}(\lambda(x)+\lambda(y))=1;$$

(2) 对于任意 Borel 集 $B$，有

$$M\{\xi\in B\}=\begin{cases}\sup\limits_{x\in B}\lambda(x), & \lambda(x)<0.5\\ 1-\sup\limits_{x\in B^c}\lambda(x), & \lambda(x)\geq 0.5.\end{cases}$$

**引理 4.2.1**[41] 设不确定变量 $\xi$ 具有第一辨识函数 $\lambda(x)$，那么对于任意的 Borel 集 $B$，有

$$M\{\xi\in B\}=\begin{cases}\sup\limits_{x\in B}\lambda(x), & \sup\limits_{x\in B}\lambda(x)<0.5\\ 1-\sup\limits_{x\in B^c}\lambda(x), & \sup\limits_{x\in B}\lambda(x)\geq 0.5.\end{cases}$$

设 $\xi$ 是取值于 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的简单不确定变量，设其第一辨识函数为

$$\lambda(x)=\begin{cases}\lambda_1, & x=1\\ \lambda_2, & x=2\\ \cdots, & \cdots\\ \lambda_m, & x=m.\end{cases}$$

**定理 4.2.2** 设不确定变量 $\xi$ 如上定义，如果存在某个指标 $k$ $(1<k<m)$，使得 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_k$ 及 $\lambda_k\geq\lambda_{k+1}\geq\cdots\geq\lambda_m$，那么有

$$M\{\xi=m\}\leq\frac{E[\xi]}{m-k+1}. \tag{4.14}$$

**证明**：根据期望值的定义及引理 4.2.1，对于由上面定义的不确定变量 $\xi$，有

$$E[\xi]=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\cdot i \tag{4.15}$$

其中权重 $\omega_i$ 由如下定义[41]

$$\omega_i=\begin{cases}\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\mid j\leq i\}-\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\mid j<i\}+\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\mid j\geq i\}-\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\mid j>i\}, & \lambda_i<0.5\\ 1-\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\mid j<i\}-\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\lambda_j\mid j>i\}, & \lambda_i\geq 0.5\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,m.$$

如果存在某个指标 $k$ $(1<k<m)$，使得

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k$ 及 $\lambda_k \ge \lambda_{k+1} \ge \cdots \ge \lambda_m$，那么权重 $\omega_i$ 为

$$\omega_i = \begin{cases} \lambda_1, & i=1 \\ \lambda_i - \lambda_{i-1}, & i=2,3,\cdots,k \\ 1-\lambda_{k-1}-\lambda_{k+1}, & i=k \\ \lambda_i - \lambda_{i+1}, & i=k+1,k+2,\cdots,m-1 \\ \lambda_m, & i=m. \end{cases}$$

注意到 $\lambda_i \le 1$，$i=1,2,\cdots,m$，有

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{i=1}^{m} i\cdot\omega_i \\ &= \omega_1 + \sum_{i=2}^{k-1} i\cdot\omega_i + k(1-\lambda_{k-1}-\lambda_{k+1}) + \sum_{i=k+1}^{m-1} i\cdot\omega_i + m\omega_m \\ &= -\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{k-1}+k+\lambda_{k+1}+\cdots+\lambda_m \\ &\ge (\lambda_k-\lambda_1)+\cdots+(\lambda_k-\lambda_{k-1})+\lambda_k+\lambda_{k+1}+\cdots+\lambda_m \\ &\ge \lambda_k+\lambda_{k+1}+\cdots+\lambda_m \\ &\ge (m-k+1)\lambda_m \\ &= (m-k+1)M\{\xi=m\} \quad (\text{由引理 } 4.2.1). \end{aligned}$$

从而不等式(4.14)成立。定理证毕。

特别地，如果定理 4.2.2 中的条件为 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_m$，那么类似地可以得到 $M\{\xi=m\} \ge \dfrac{E[\xi]-m}{1-m}(m\ge 2)$；如果 4.2.2 中的条件为 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m$，那么类似地可以得到 $M\{\xi=m\} \le \dfrac{E[\xi]}{m}$.

**定理 4.2.3** $\xi$ 是取值于 $\{1,2,\cdots\}$ 的离散不确定变量，设其第一辨识函数为

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x=1 \\ \lambda_2, & x=2 \\ \cdots, & \cdots \\ \lambda_m, & x=m \\ \cdots, & \cdots \end{cases}$$

如果对于 $m=1,2,\cdots$，$M\{\xi=m\}$ 不是递增的，那么

$$M\{\xi=m\} \le \frac{E[\xi]}{m}+\frac{1}{2}.$$

证明：由于$M\{\xi=m\}$不是递增的，由引理 4.2.1 知道$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots$从而$\lim\limits_{n\to\infty}=\lambda_\infty$存在。同时权重由如下定义

$$\omega_i=\begin{cases}1-\lambda_2, & i=1\\ \lambda_i-\lambda_{i+1}, & 2\le i<\infty\\ \lambda_\infty, & i=\infty.\end{cases}$$

从而有，

$$\begin{aligned}E[\xi]&=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\omega_i\\ &\ge\sum_{i=1}^{m}i\cdot\omega_i\\ &=(1-\lambda_2)+2(\lambda_2-\lambda_3)+\cdots+m(\lambda_m-\lambda_{m+1})\\ &=1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_m-m\cdot\lambda_{m+1}\\ &\ge\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_m-\frac{m}{2}\\ &\ge m\cdot\lambda_m-\frac{m}{2}\\ &=m\cdot M\{\xi=m\}-\frac{m}{2}.\end{aligned}$$

定理证毕。

**定理 4.2.4** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是不确定变量，记$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$，如果$E[\xi^2]<\infty$，$i=1,2,\cdots$，那么有

$$M\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge x\}\le\frac{n^2}{x^2}\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i^2].\tag{4.16}$$

证明：由 Markov 不等式及定理 4.1.7，知

$$\begin{aligned}M\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge x\}&\le\frac{1}{x^2}E|\max_{1\le j\le n}|S_j||^2\\ &\le\frac{1}{x^2}E|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||^2\\ &\le\frac{n^2}{x^2}\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i^2].\end{aligned}$$

故不等式(4.16)成立，定理证毕。

**定理 4.2.5** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是不确定变量，记$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，如果存在某个常数$c>0$使得$|\xi_i|\le c$，$i=1,2,\cdots,n$，那么对于任意给定的实数$x>0$，有

$$M\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge x\}\le\frac{n^2}{x^2}[\sum_{i=1}^{n}V[\xi_i]+c^2].\qquad(4.17)$$

证明：$n^2\sum_{i=1}^{n}V[\xi_i]=n^2\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i-E[\xi_i]]^2$

$$\ge E[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-E[\xi_i]|]^2\ (\text{由定理 4.1.7})$$

$$\ge E[\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i|-E|\xi_i|)]^2$$

$$\ge E[\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i|-c)]^2\ (\text{由}|\xi_i|\le c)$$

$$=E[(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|)^2-2nc\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|]+n^2c^2$$

$$\ge E[(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|)^2]-n^2c^2\ (\text{由}|\xi_i|\le c)$$

$$\ge x^2M\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge x\}-n^2c^2.(\text{由 Markov 不等式})$$

从而不等式(4.17)成立。定理证毕。

特别地，如果在定理 4.2.5 中，由$\eta_i=\frac{\xi_i}{n}$代替$\xi_i$，则有

$$M\{\max_{1\le j\le n}|S'_j|\ge x\}\le\frac{1}{x^2}[\sum_{i=1}^{n}V[\xi_i]+c^2]$$

其中$S'_j=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$.

**定理 4.2.6** 设$\xi$是非负不确定变量，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}M\{\xi\ge n\}\le E[\xi]\le\sum_{n=0}^{\infty}M\{\xi\ge n\}.\qquad(4.18)$$

证明：由$\xi$是非负不确定变量及期望值定义知

$$E[\xi]=\int_0^{\infty}M\{\xi\ge r\}dr$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}M\{\xi\geq r\}dr$$

$$\geq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}M\{\xi\geq n\}dr$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M\{\xi\geq n\}.$$

从而得到了不等式(4.18)的左边。类似地，

$$E[\xi]=\int_{0}^{\infty}M\{\xi\geq r\}dr$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}M\{\xi\geq r\}dr$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}M\{\xi\geq n-1\}dr$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M\{\xi\geq n-1\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}M\{\xi\geq n\}$$

从而证明了不等式(4.18)的右边，定理证毕。

# 5 基于多专家经验数据的不确定分布估计

统计学是用来分析、处理自然科学及社会科学信息的工具。在复杂的自然或社会现象中，人们可以借助于数据所提供的信息，经过归纳分析、推断检验、决策、预测等过程，使我们对现实状况更了解、更好地处理现实世界的问题。其中，数理统计研究的对象主要是带有随机性质的自然及社会现象[35,52,96]。它通过对随机现象的观察收集一定量的数据，然后整理、分析，并应用概率论的知识，对要研究的随机现象建立有效的数学模型，做出合理的估计、检验、推断、预测，从而为正确的科学决策提供科学依据。模糊统计是以模糊集理论[77,88]为基础，类比于数理统计的一种统计分析方法。为了确定隶属度函数，建立了模糊统计学[58]，包括基于模糊决策方法的点估计[4,22,73]、基于模糊信息系统的点估计[21]、模糊区间估计[12]、模糊假设检验[5,66]、模糊回归[71,72]、基于模糊概率测度的模糊 Bayes 统计[59]、模糊 Bayes 决策准则[56]等，并在专家系统中得到广泛应用[79]。

不确定分布是不确定理论中重要的三个基本概念之一。如何获得不确定分布及如何估计不确定分布中的未知参数是不确定理论在实践中应用的根本性问题，为此，清华大学的刘宝碇教授[46]于 2010 年首先提出不确定统计的思想，并做出了重要的基础性工作。本章介绍不确定统计的思想和基本的方法，针对多专家经验数据情形，结合 Delphi 法获得经验不确定分布。

## 5.1 不确定统计

不确定统计是清华大学刘宝碇教授 2010 年提出的一种新的统计方法。该方法主要是通过收集、整理、分析专家经验数据，利用不确定理论建立数学模型，为最终做出决策提供建议和意见。不确定统计不同于传统的数理统计，主要体现在（1）不确定统计以不确定理论为理论基础；（2）不确定统计依赖于专家经验数据而非历史数据；（3）不确定统计的专家经验数据是成对出现而非单个的随机样本点形式；（4）在实际应用中，专家经验数据不会太多，故不确定统计不依赖大数定律及中心极限定理。

### 5.1.1 专家经验数据

不确定统计依赖于专家经验数据，首先考虑如何获取专家经验数据。Liu[46]设计了一种调研方法来获取专家经验数据，即对于某一个不确定变量$\xi$，请一位或几位专家完成关于$\xi$的调研。例如关于不确定变量“北京到天津大约100 km”，首先请专家给出一个自己认为的北京到天津的距离的可能取值$x$（比如110 km），再请该专家回答“北京到天津的距离不超过110 km 可能性”，专家根据自己的经验给出一种判断（比如0.8），这样就得到专家的一个经验数据$(x,\alpha)=(110,0.8)$.重复上述过程，一般地得到了如下的专家经验数据

$$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n).$$

**注 5.1.1** 专家经验数据$(x,\alpha)$满足$M\{\xi\le x\}=\alpha$.

**注 5.1.2** 在向专家调研时，$x,\alpha$及$n$均不提前设定。另外，专家不一定对所涉及的问题有全面的了解和相关的知识。

### 5.1.2 经验不确定分布

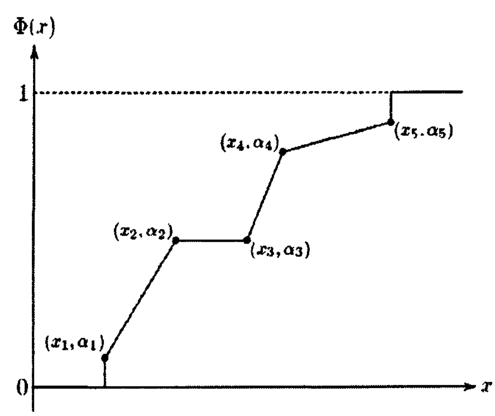


图 5.1.1 经验不确定分布

在获得专家经验数据后，Liu[46]设计了经验不确定分布来刻画不确定变量。假设得到了如下的专家经验数据

$$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n) \tag{5.1}$$

且上述数据满足条件

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le 1. \tag{5.2}$$

那么经验不确定分布定义为

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \alpha_i+\dfrac{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}, & x_i\le x\le x_{i+1},1\le i<n\\ 1, & x>x_n\end{cases} \tag{5.3}$$

经验不确定分布(5.3)的期望值为[46]

$$E[\xi]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n.$$

**例 5.1.1　2010 年高考估分调查表**

2010 年天津市考生仍采用先估分后填报高考志愿的政策。对于每位考生来说，当他完成高考后就意味着他的高考分数已经定下，只是在官方公布分数之前无从获知而已，故考生估计的高考分数是典型的不确定变量。显然，对于估计自己的高考分数，每位考生就是专家。下面调查了天津市 2010 年某中学 9 名考生的估分情况。

考生 1：(560,0)，(563,0.1)，(565,0.3)，(567,0.8)，(576,1)

考生 2：(575,0)，(585,0.3)，(595,0.5)，(600,0.6)，(605,1)

考生 3：(510,0)，(515,0.3)，(520,0.4)，(525,0.5)，(530,1)

考生 4：(555,0)，(565,0.3)，(575,0.5)，(579,0.6)，(585,1)

考生 5：(460,0)，(462,0.4)，(465,0.5)，(468,0.9)，(475,1)

考生 6：(610,0)，(612,0.3)，(616,0.4)，(618,0.5)，(621,0.8)

考生 7：(490,0)，(500,0.1)，(505,0.5)，(510,0.8)，(515,1)

考生 8：(556,0)，(558,0.2)，(560,0.5)，(564,0.7)，(571,1)

考生 9：(540,0)，(545,0.3)，(550,0.5)，(553,0.7)，(560,1)

下面表 5.1.1 中，统计出了上述 9 位考生按照经验不确定分布(5.3)计算出的期望值和官方公布高考分数后的各自的真实高考成绩。表 5.1.1 中均值指期望值，实值是考生真实的高考分数。

**表 5.1.1　天津市某中学高考估分调查表**

| | E1 | E2 | E3 | E4 | E5 | E6 | E7 | E8 | E9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 均值 | 566.25 | 592.75 | 521.5 | 572.5 | 464.5 | 616.45 | 505.25 | 561.75 | 549.5 |
| 实值 | 567 | 590 | 516 | 570 | 465 | 616 | 507 | 562 | 551 |

其中，表 5.5.1 中第一行分别表示 9 位考生。由表 5.1.1 知，按照经验不确定分布(5.3)

计算得出的期望值更接近考生的真实分数。

在实际决策，尤其重大决策中，常常需要多个专家根据自己的经验提出各自的意见和见解，共同协商完成最后的决策规则。如何通过专家经验数据来理解、分析、综合各个专家的知识、经验？刘宝碇教授[46]首先提出了加权和的方法来综合专家经验数据，以综合专家的知识、经验。

设$\xi$是不确定变量，有$m$位专家，每位专家给出自己的经验数据及产生相应的$m$个经验不确定分布$\Phi_1(x),\Phi_2(x),\cdots,\Phi_m(x)$.则$m$位专家最终的综合经验不确定分布定义为

$$\Phi(x)=\omega_1\Phi_1(x)+\omega_2\Phi_2(x)+\cdots+\omega_m\Phi_m(x) \tag{5.4}$$

其中$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$是凸权重系数，满足$\sum_{i=1}^{m}\omega_i=1$.权重表示了对各个专家经验的重视程度及认可程度。

## 5.2 Delphi 法简介

Delphi法[13,100]是上世纪50年代由美国著名的Rand公司提出的一种预测方法。其主要特点是通过向专家组进行多轮咨询，逐步获得专家一致性意见。经过多年的完善和发展，该方法已日趋成熟，是目前被普遍应用的预测方法之一。被广泛应用于管理决策[86]，项目规划[1,6]，学生毕业和学位水平研究[98]，医疗诊断[101]，家庭生育及健康[97]，模糊统计及人力资源[30, 102]，专家系统[16],社会科学[99]等研究领域。

Delphi 法通常按照以下步骤实施：第一步，对于目标问题，由组织者设计调查表，将调查表与相关资料一并寄与各个专家；第二部，根据各自的经验与知识，各个专家匿名、独立地发表自己的意见，进行问卷调查；第三步，组织者收回调查表进行统计分析，找出专家意见的倾向性和一致性，整理出综合结果以作为下一轮调研设计的依据；第四步，组织者将综合结果和进一步的信息反馈给各个专家。专家根据反馈结果及新的信息，在充分考虑大家的意见后提出下一轮的方案；第五步，根据需要重复第二部到第四步，直到符合提前设定的标准来确定结束。第六步，组织者整理最后的调研报告，获得具有统计意义的多名专家集体综合结果。

Delphi 法实质上是集中了专家们对于问题的认识及经验，依靠专家的经验知识和综合分析能力进行预测。至于何时结束，与目标问题及提前设定的标准有关。Delphi 法的好处在于具有匿名性、信息反馈性和对结果进行统计分析等三个特点。一方面，通过一次次的实验修正，往往可以获得较好的结果。另一方面，Delphi 法不允许各个专家面对面开会讨论，最大程度上减小了群体成员之间因个人权威、压力等对他人造成的影响，同时避免了个人的局限性，使得最终的预测结果精确度较高，可靠性较大。

## 5.3 不确定分布的估计

设$\xi$是不确定变量，目标是给出$\xi$的经验不确定分布$\Phi(x)$.现在请$m$位专家，每位专家给出$\xi$的若干个可能取值$x_1,x_2,\cdots,x_n$（不妨设$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$，且每位专家给出的可能取值及可能取值的个数不一定相同）及$\xi$不超过$x_i$的可能性$\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,n$.具体地，设计方案如下.

**Step 1.** 每位专家给出各自的经验数据$(x_{ij},\alpha_{ij}^{(1)})$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,i_n$.其中$x_{ij}$表示第$i$位专家给出$\xi$的第$j$个可能取值，$\alpha_{ij}^{(1)}$表示第$i$位专家第一次给出$\xi$不超过$x_{ij}$的可能性.

**Step 2.** 根据上述数据计算每位专家的经验不确定分布。共有$m$个经验不确定分布$\Phi_i(x)$，$i=1,2,\cdots,m$.

**Step 3.** 计算所有专家提供$\xi$的可能值的个数，记为$n$.此处若不同的专家提供了$\xi$相同的可能值，则记为一个可能值。设$\xi$的可能值为$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$，计算均值和偏差

$$\overline{\alpha}_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Phi_i(x_j),\quad j=1,2,\cdots,n$$

$$d_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\Phi_i(x_j)-\overline{\alpha}_j)^2,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

**Step 4.** 对于某个给定的水平$\varepsilon>0$,如果对于所有的$j$都有$d_j<\varepsilon$,那么进入到 Step 5. 否则，把所得到的信息反馈回各个专家（如前一轮得到的综合不确定分布$\Phi$及各个专家的提供数据的原因等），使得专家根据反馈信息重新给出各自的经验数

据。返回到 Step 2.

**Step 5.** 由最后的综合数据$(x_1,\overline{\alpha}_1),(x_2,\overline{\alpha}_2),\cdots,(x_n,\overline{\alpha}_n)$得到不确定分布$\Phi$.

**例 5.3.1.国内某高校试卷平均成绩预测调查**

国内某高校 2009/2010 学年第二学期期末高等数学统考试卷难易度分析。显然在试卷确定之后和学生答完试卷之前，试卷的平均成绩是不确定变量。请 6 位担任该课程的教师对试卷难易程度进行分析。每位教师根据自己的认识和经验，给出学生考试后可能的平均成绩及相应的可能性，然后综合各教师的经验数据，再重新预判。此处约定水平$\varepsilon=0.05$.

第一次调研数据如下：

教师 1：(70,0.15), (75,0.75), (80,1)

教师 2：(60,0.2), (70,0.4), (75,0.5), (80,1)

教师 3：(50,0.5), (60,0.6), (70,0.7), (80,0.9)

教师 4：(60,0.05), (70,0.15), (80,0.51), (85,0.85), (90,0.95)

教师 5： (75,0.5), (80,0.8), (90,0.95)

教师 6：(60,0.1), (70,0.2), (75,0.5), (80,0.7), (85,0.5)

由上述数据知，6 位教师提供的所有可能值为50,60,70,75,80,85,90.根据经验不确定分布(5.3)计算每位专家的经验不确定分布$\Phi_i^{(1)}(x)$，$i=1,2,\cdots,6$ 及$x=50,60,70,75,80,85,90$的函数值，其中$\Phi_i^{(1)}(x)$表示第$i$位专家第一次的经验不确定分布，见表 5.3.1

**表 5.3.1**

| 专家 | 50 | 60 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 教师 1 | 0 | 0 | 0.15 | 0.75 | 1 | 1 | 1 |
| 教师 2 | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 1 | 1 | 1 |
| 教师 3 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 1 |
| 教师 4 | 0 | 0.05 | 0.15 | 0.33 | 0.51 | 0.85 | 0.95 |
| 教师 5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.8 | 0.875 | 0.95 |
| 教师 6 | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1 |

令

$$\overline{\alpha}_j^{(1)}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i^{(1)}(x_j),\quad j=1,2,\cdots,7 \tag{5.5}$$

$$d_j^{(1)}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(\Phi_i^{(1)}(x_j)-\overline{\alpha}_j^{(1)})^2,\quad j=1,2,\cdots,7 \tag{5.6}$$

其中$\overline{\alpha}_j^{(1)}$，$d_j^{(1)}$表示第一轮的均值和偏差。由式(5.5)和式(5.6)计算相应的$\overline{\alpha}_j^{(1)}$，$d_j^{(1)}$.见表 5.3.2

**表 5.3.2**

| 均值、偏差 | 50 | 60 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\alpha}_j^{(1)}$ | 0.083 | 0.158 | 0.267 | 0.563 | 0.818 | 0.929 | 0.983 |
| $d_j^{(1)}$ | 0.035 | 0.044 | 0.051 | 0.026 | 0.03 | 0.003 | 0.001 |

由表 5.3.2 知道，$d_3^{(1)}=0.051>\varepsilon=0.05$.故将表 5.3.2 返回专家，请专家参考表 5.3.2 数据及考虑各个专业学生生源情况、学习态度、高等数学在该专业的重要程度等。然后请专家再次给出试卷的可能平均成绩及相应的可能性。

第二次调研数据如下：

教师 1：(70,0.35), (75,0.75), (80,1)

教师 2：(60,0.2), (70,0.4), (75,0.5), (80,1)

教师 3：(60,0.2), (65, 0.4), (70,0.5), (80,0.9), (90,1)

教师 4：(60,0.15), (70,0.25), (80,0.71), (85,0.85), (90,0.95)

教师 5： (70,0.3), (75,0.5), (80,0.8), (90,0.95)

教师 6：(60,0.1), (70,0.3), (75,0.5), (80,0.7), (85,0.5)

由上述数据知，6 位教师提供的所有可能值为 60,65,70,75,80,85,90. 再次根据经验不确定分布(5.3)计算出每位专家的经验不确定分布$\Phi_i^{(2)}(x)$，$i=1,2,\cdots,6$及$x=60,65,70,75,80,85,90$的函数值，见表 5.3.3

由式(5.5)和式(5.6)类似地计算相应的$\overline{\alpha}_j^{(2)}$，$d_j^{(2)}$.见表 5.3.4

由表 5.3.4 知道，$\max\limits_{1\le j\le 7}\{d_j^{(2)}\}=d_2^{(2)}=0.021<\varepsilon=0.05$.令

$$\alpha_j=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i^{(2)}(x_j),\quad j=1,2,\cdots,7.$$

这样得到了基于 6 位专家的综合经验数据

$$(60,0.108),\ (65,0.183),\ (70,0.571),(80,0.85),\ (85,0.929),\ (90,0.983) \tag{5.7}$$

表 5.3.3

| 专家 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 教师 1 | 0 | 0 | 0.35 | 0.75 | 1 | 1 | 1 |
| 教师 2 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 1 | 1 | 1 |
| 教师 3 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 0.95 | 1 |
| 教师 4 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.475 | 0.7 | 0.85 | 0.95 |
| 教师 5 | 0 | 0 | 0.3 | 0.5 | 0.8 | 0.875 | 0.95 |
| 教师 6 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1 |

表 5.3.4

| 均值、偏差 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\alpha}_j^{(1)}$ | 0.108 | 0.183 | 0.35 | 0.571 | 0.85 | 0.929 | 0.983 |
| $d_j^{(1)}$ | 0.007 | 0.021 | 0.007 | 0.012 | 0.016 | 0.003 | 0.001 |

根据上述专家经验数据(5.7)，得到试卷平均成绩的经验不确定分布为

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0, & x<60 \\ 0.015x-0.792, & 60\le x\le 65 \\ 0.0334x-1.988, & 65\le x\le 70 \\ 0.442x-2.744, & 70\le x\le 75 \\ 0.0558x-3.614, & 75\le x\le 80 \\ 0.0158x-0.414, & 80\le x\le 85 \\ 0.0108x-0.011, & 85\le x\le 90 \\ 1, & x>90. \end{cases} \tag{5.8}$$

由不确定经验分布(5.8)及 $E[\xi]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n$，计算得到可能的平均成绩为 72.8575.

下面表 5.3.5 是该校随机抽取部分专业学生的最后考试成绩.表中人数指班级人数，平均分数指班级的平均分数。由表 5.3.5 知道，班级平均最高分为 84，最低平均分为 58，计算得出总平均成绩为 72.9429 .该平均数与由经验不确定分布得到的平均分数相当接近。

表 5.3.5

| 班级 | 人数 | 平均分 | 班级 | 人数 | 平均分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 安全 0901 | 28 | 71 | 给水 0902 | 28 | 69 |
| 农水 0901 | 29 | 73 | 给水 0903 | 27 | 73 |
| 农水 0902 | 27 | 67 | 给水 0904 | 31 | 76 |
| 地理 0901 | 36 | 75 | 勘察 0903 | 30 | 73 |
| 道桥 0901 | 37 | 76 | 自动化 0901 | 29 | 67 |
| 土木 0901 | 36 | 75 | 自动化 0902 | 29 | 71 |
| 土木 0905 | 36 | 72 | 建环 0902 | 32 | 69 |
| 土木 0906 | 34 | 72 | 建环 0903 | 28 | 76 |
| 应化 0901 | 32 | 76 | 建环 0904 | 30 | 74 |
| 工程 0903 | 31 | 74 | 水务 0901 | 20 | 76 |
| 工程 0903 | 28 | 74 | 水务 0902 | 20 | 74 |
| 水资本 0902 | 29 | 77 | 资勘 0902 | 33 | 84 |
| 水资本 0901 | 30 | 75 | 资勘 0903 | 32 | 81 |
| 资环 0901 | 36 | 82 | 环境 0901 | 32 | 74 |
| 测绘 0901 | 29 | 77 | 环境 0902 | 33 | 66 |
| 测绘 0902 | 27 | 78 | 机制 0901 | 30 | 66 |
| 机制 0902 | 30 | 69 | 机制 0903 | 33 | 58 |
| 机制 0904 | 33 | 63 | —— | —— | —— |

# 6 不确定分布的矩估计

## 6.1 统计学中的矩估计方法

为估计概率分布的未知参数，以概率论中的大数定律为基础，数理统计建立了经典的矩估计方法。即以总体矩与样本矩构造恰当的方程组，以该方程组的解作为未知参数的矩估计值。模糊统计则基于模糊决策方法和模糊信息系统建立了模糊点估计，其中包括了矩估计和极大似然估计。不确定理论中一方面不存在大数定律，另一方面专家的经验数据一般较少，因此当不确定分布中含有未知参数时，需要崭新的数学方法来获取未知参数的估计值。本章基于经验不确定分布建立不确定矩估计方法来估计不确定分布的未知参数。

## 6.2 最小二乘估计

假设某个不确定变量的分布形式已知，但是分布中含有未知参数，如何估计那些未知参数？Liu[46] 建议采用最小二乘方法。

设$\xi$为不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$，其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$是未知参数。$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据。则满足下式的$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$是未知参数的最小二乘估计值

$$\min_{\theta_1,\cdots,\theta_p}\sum_{i=1}^{n}(\Phi(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_p)-\alpha_i)^2 . \tag{6.1}$$

下面给出最小二乘的另一种形式，虽然是上述(6.1)的变种，但是扩展了准则(6.1)的使用范围。

设$\xi$为不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$，其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$是未知参数。如果不确定分布$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$是正则的，即不确定变量$\xi$具有逆分布$\Phi^{-1}$. 假设我们得到专家经验数据$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$，且该数据满足条件(5.2).即

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le 1 .$$

那么显然对于任意的$\alpha_i$，有

$$M\{\xi\le\Phi^{-1}(\alpha_i)\}=\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,n .$$

上述假设意味着下面最小化问题(6.2)的解可以作为不确定分布为$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$中的未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$的估计值

$$\min_{\theta_1,\cdots,\theta_p}\sum_{i=1}^{n}(\Phi^{-1}(\alpha_i;\theta_1,\cdots,\theta_p)-x_i)^2. \tag{6.2}$$

如果不确定变量$\xi$的逆分布简单且容易计算，在估计未知参数时，可以优先考虑准则(6.2),而非准则(6.1).

**例 6.2.1** 设$\xi$是正态不确定变量，其分不确定布为

$$\Phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},\quad x\in\Re$$

此处$e$和$\sigma$是两个待估未知参数。由不确定理论[46]知道，正态不确定变量$\xi$具有逆分布

$$\Phi^{-1}(\alpha)=e+\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha},\quad \alpha\in(0,1).$$

现在假设得到专家经验数据$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$，则解优化问题(6.2)得到未知参数$e$和$\sigma$的估计值分别为

$$\hat{e}=\bar{x}-\hat{\sigma}\frac{\sqrt{3}}{n\pi}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi n\frac{\bar{x}\sum\ln\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}-\sum x_i\ln\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}{(\sum\ln\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i})^2-n\sum(\ln\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i})^2}$$

此处$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.由例 6.2.1 可知，利用准则(6.2)估计正态不确定变量是十分方便的。

## 6.3 不确定矩估计

本节介绍一种新的估计不确定分布未知参数的方法----矩估计方法。其本质是利用专家经验数据的经验矩与理论矩构造关于未知参数的方程组，以该方程组的解作为未知参数的矩估计值。首先证明经验不确定分布的$k$阶矩存在。

**定理 6.3.1** 设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足

$$0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \quad 0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n \le 1. \tag{6.3}$$

$\xi$为不确定变量，具有经验不确定分布(5.3).即

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0, & x<x_1 \\ \alpha_i+\dfrac{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}, & x_i \le x \le x_{i+1}, 1 \le i < n \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

则对于任意的正整数$k$，有

$$E[\xi^k]=\alpha_1 x_1^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)x_i^j x_{i+1}^{k-j}+(1-\alpha_n)x_n^k. \tag{6.4}$$

特别地，有

$$E[\xi]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n. \tag{6.5}$$

**证明**：由于$0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，根据经验不确定分布(5.3)，有

$$\begin{aligned}
E[\xi^k] &= \int_0^{+\infty} M\{\xi^k \ge x\}dx \\
&= \int_0^{+\infty} kx^{k-1} M\{\xi \ge x\}dx \\
&= \int_0^{+\infty} kx^{k-1}(1-M\{\xi < x\})dx \\
&= k\int_0^{x_1} x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx+k\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx \\
&\quad +k\int_{x_n}^{+\infty} x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx \\
&= k\int_0^{x_1} x^{k-1}dx+k\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx \\
&= x_1^k+k\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{k-1}(1-\alpha_i-\frac{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i})dx \\
&= \frac{k\alpha_1+\alpha_2}{k+1}x_1^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)x_i^j x_{i+1}^{k-j} \\
&\quad +\frac{1}{k+1}\sum_{i=2}^{n-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1})x_i^k+(1-\frac{1}{k+1}\alpha_{n-1}-\frac{k}{k+1}\alpha_n)x_n^k \\
&= \alpha_1 x_1^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)x_i^j x_{i+1}^{k-j}+(1-\alpha_n)x_n^k.
\end{aligned}$$

定理证毕。

**定义 6.3.1** 设$\xi$为不确定变量，$k$为正整数，如果$\xi$的$k$阶矩$E[\xi^k]$存在，则称$E[\xi^k]$为不确定变量$\xi$的$k$阶理论矩。

**定义 6.3.2** 设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足条件(6.3)，对于任意的正整数$k$，称

$$\bar{\xi}^k=\alpha_1 x_1^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)x_i^j x_{i+1}^{k-j}+(1-\alpha_n)x_n^k \tag{6.6}$$

为$k$阶经验矩。

关于矩估计方法描述如下。

**矩估计**：设$\xi$为不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$，其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$是未知参数，$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足条件(6.3). $E[\xi^k]$和$\bar{\xi}^k$分别是$k$阶理论矩和$k$阶经验矩。令

$$E[\xi^k]=\bar{\xi}^k,\quad k=1,2,\cdots,p. \tag{6.7}$$

由于

$$E[\xi^k]=k\int_0^{+\infty}x^{k-1}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx,$$

上述方程组(6.7)等价于方程组

$$k\int_0^{+\infty}x^{k-1}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx=\bar{\xi}^k,\quad k=1,2,\cdots,p. \tag{6.8}$$

方程组(6.7)或(6.8)的解称为未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$的据估计值，分别记为$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_p$.

**例 6.3.1** 设$\xi$为不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x;a)=ax^{\frac{1}{2}},\quad a>0 \tag{6.9}$$

其中$a$为未知参数。设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足条件(6.3).

由矩估计方法(6.7)知，未知参数$a$的估计值是方程

$$E[\xi]=\bar{\xi}$$

的解，此处$\bar{\xi}$由式(6.6)定义。由于$E[\xi]=\dfrac{1}{3a^2}$，故有

$$\frac{1}{3a^2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n. \tag{6.10}$$

解上述方程得到未知参数$a$的矩估计值

$$\hat{a}=\{3[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n]\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.11}$$

假设得到专家经验数据

$$(\frac{1}{16},\frac{1}{4}),\ (\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\ (\frac{16}{25},\frac{4}{5})$$

则由式(6.11)得到矩估计值

$$\hat{a}=1.0817$$

及相应的矩估计不确定分布

$$\Phi(x)=1.0817x^{\frac{1}{2}}.$$

**例 6.3.2** 设$\xi$为不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x;a,b)=ax+b,\quad a>0 \tag{6.12}$$

其中$a,b$为两个未知参数。设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足条件(6.3). 由矩估计方法(6.7)知，未知参数$a,b$的估计值是方程组

$$\begin{cases}E[\xi]=\bar{\xi}\\ E[\xi^2]=\bar{\xi}^2\end{cases} \tag{6.13}$$

的解，此处$\bar{\xi},\bar{\xi}^2$由式(6.6)定义。由于$\xi$的逆分布为$\Phi^{-1}=\dfrac{\alpha-b}{a}$.从而有[54]

$$E[\xi]=\int_0^1\Phi^{-1}(\alpha)d\alpha=\frac{1-2b}{2a}$$

$$E[\xi^2]=\int_0^1(\Phi^{-1}(\alpha))^2d\alpha=\frac{1+3b^2-3b}{3a^2}.$$

因此方程组(6.13)等价于下面的方程组(6.14)

$$\begin{cases}\dfrac{1-2b}{2a}=\bar{\xi}\\ \dfrac{1+3b^2-3b}{3a^2}=\bar{\xi}^2\end{cases} \tag{6.14}$$

解方程组(6.14)，得到未知参数$a,b$的矩估计值

$$\begin{cases}\hat{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\overline{\xi}^{2}-(\overline{\xi})^{2})^{-\frac{1}{2}}\\ \hat{b}=\dfrac{1}{2}(1-2\hat{a}\overline{\xi}).\end{cases} \tag{6.15}$$

假设得到下面的专家经验数据

$$(0.4, 0.1), (1.0, 0.2), (1.5, 0.3), (2.0, 0.4), (3.0, 0.7), (4.0, 0.9)$$

由式(6.6)，(6.15)得到未知参数$a,b$矩估计值分别为

$$\hat{a}=0.2442,\ \hat{b}=-0.0519.$$

同时得到$\xi$的矩估计不确定分布

$$\Phi(x)=0.2442x-0.0519$$

如果方程组(6.7)没有显式解，则可采用下面的数值解法。

定义函数$F:\Re^{p}\to\Re^{p}$，

$$F(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)=\begin{pmatrix}F_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)\\ F_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)\\ \cdots\\ F_p(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)\end{pmatrix}$$

此处

$$F_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)=k\int_0^{+\infty}x^{k-1}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx-\overline{\xi}^{p},\quad k=1,2,\cdots,p.$$

显然方程组(6.7)等价于$F(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)=0$.

如果函数$F$是可微的且$F$的 Jacobian 矩阵容易计算，则按下面的方法进行计算。

Step 1. 由式(6.6)估计$k$阶经验矩，$k=1,2,\cdots,p$.

Step 2. 给定未知参数的初始值$\theta^0=(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_p^0)$.

Step 3. 计算 Jacobian 矩阵$J_F(\theta^k)$的逆矩阵$J_F(\theta^k)^{-1}$，$k=1,2,\cdots,p$

此处

$$J_F(\theta^k)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial\theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial\theta_p}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial\theta_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F_p}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial F_p}{\partial\theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_p}{\partial\theta_p}\end{pmatrix} \tag{6.16}$$

其中的积分可通过数值方法计算。

Step 4. 通过下面的方程计算$\theta^{k+1}$

$$\theta^{k+1}=\theta^k-J_F(\theta^k)^{-1}F(\theta^k). \tag{6.17}$$

Step 5. 如果$|\theta^{k+1}-\theta^k|>\alpha$及$k<C$，则重复第三步到第五步，此处$\alpha,C$是给定的正数。

Step 6. 如果$|\theta^n-\theta^{n-1}|\le\alpha$，结束并记录最后的$\theta^n$.

**注 6.3.1** 如果不确定分布$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$是关于参数连续可微的，则有

$$\frac{\partial\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx}{\partial\theta_1}=-\int_0^{+\infty}\frac{\partial\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)}{\partial\theta_1}dx.$$

**注 6.3.2** 如果函数$F$不是可微的或者 Jacobian 矩阵难以计算，则可通过计算

$$\frac{F_i(\theta_1,\cdots,\theta_j+h_j,\cdots,\theta_p)-F_i(\theta_1,\cdots,\theta_j,\cdots,\theta_p)}{h_j}$$

来代替

$$\frac{\partial F_i(\theta_1,\cdots,\theta_j,\cdots,\theta_p)}{\partial\theta_j},\quad i,j=1,2,\cdots,p,$$

其中$h_1,h_2,\cdots,h_p$是给定的小的正数。

**例 6.3.3** 设$\xi$是不确定变量，具有对数正态分布

$$\Phi(x;e,\sigma)=(1+\exp(\frac{\pi(e-\ln x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},\quad x\in\Re.$$

其中$e,\sigma$是两个未知参数。假设得到如下的专家经验数据

$$(0.6,0.1),\ (1.0,0.3),\ (1.5,0.4),\ (2.0,0.6),\ (2.8,0.8),\ (3.6,0.9)$$

则有

$$F(e,\sigma)=\begin{pmatrix}\int_0^{+\infty}1-(1+\exp(\frac{\pi(e-\ln x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1}dx-1.86\\ 2\int_0^{+\infty}x(1-(1+\exp(\frac{\pi(e-\ln x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1})dx-3.56\end{pmatrix},$$

$$J_F(e,\sigma)=\begin{pmatrix}\int_0^{+\infty}\frac{\pi f(x;e,\sigma)}{\sqrt{3}\sigma(1+f(x;e,\sigma))^2}dx & \int_0^{+\infty}\frac{\pi(e-\ln x)f(x;e,\sigma)}{\sqrt{3}\sigma^2(1+f(x;e,\sigma))^2}dx\\ 2\int_0^{+\infty}x\frac{\pi f(x;e,\sigma)}{\sqrt{3}\sigma(1+f(x;e,\sigma))^2}dx & 2\int_0^{+\infty}x\frac{\pi(e-\ln x)f(x;e,\sigma)}{\sqrt{3}\sigma^2(1+f(x;e,\sigma))^2}dx\end{pmatrix}$$

其中 $f(x;e,\sigma)=\exp(\frac{\pi(e-\ln x)}{\sqrt{3}\sigma}$.

初始值选择为(0.6, 0.5)所有的积分可有 Simpson 公式计算。经过计算机计算得到方程 $F(e,\sigma)=0$ 的近似解为

$$\hat{e}=0.50,\quad \hat{\sigma}=0.47.$$

从而有矩估计分布

$$\Phi(x;0.50,0.47)=(1+\exp(\frac{\pi(0.50-\ln x)}{\sqrt{3}\times 0.47}))^{-1}.$$

## 6.4 经验方差

在 6.3 节中，矩估计要求专家经验数据满足条件(6.3)，即

$$0\le x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le 1.$$

如果专家经验数据仅仅满足下面条件

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le 1. \tag{6.18}$$

理论上可以对上述数据 $x_i$ 进行平移以达到条件(6.3).本节介绍经验方差，利用经验方差在条件(6.18)下（无需平移）估计不确定分布中的未知参数。

需要注意，在不确定理论中，不确定变量的方差是一种约定而非精确公式。本节所讨论的经验方差也遵循了这种约定。虽然是约定的方差，但是并不影响我们正常的使用方差讨论相关问题。

**定理 6.4.1** 设 $\xi$ 为不确定变量，具有经验不确定分布(5.3).设

$$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$$

为专家经验数据，且满足条件(6.18)，即

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n\le 1.$$

则不确定变量$\xi$的方差满足

$$V[\xi]\le 2(\int_0^{x_n-e}x(1-\Phi(e+x))dx+\int_0^{e-x_1}x\Phi(e-x)dx) \tag{6.19}$$

其中$e=E[\xi]$.在这种情况下，我们约定$\xi$的方差即为

$$V[\xi]=2(\int_0^{x_n-e}x(1-\Phi(e+x))dx+\int_0^{e-x_1}x\Phi(e-x)dx) \tag{6.20}$$

证明：设$\xi$为不确定变量，具有经验不确定分布(5.3).由式(6.5)知道，$\xi$的期望值

$$E[\xi]=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n$$

总是存在。不妨记

$$e=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n,$$

则一定存在某个正整数$l=1,2,\cdots,n-1$，使得$x_l\le e\le x_{l+1}$.由方差的定义及公理4，有

$$\begin{aligned}V[\xi]&=\int_0^{+\infty}M\{(\xi-e)^2\ge r\}dr\\&=\int_0^{+\infty}M\{(\xi-e\ge\sqrt{r})\cup(\xi-e\le-\sqrt{r})\}dr\\&\le\int_0^{+\infty}M\{\xi-e\ge\sqrt{r}\}dr+\int_0^{+\infty}\{\xi-e\le-\sqrt{r}\}dr\end{aligned} \tag{6.21}$$

如果$x\ge x_n-e$，即$e+x\ge x_n$，那么$\Phi(e+x)=1$.因此有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}M\{\xi-e\ge\sqrt{r}\}dr&=2\int_0^{+\infty}xM\{\xi-e\ge x\}dx\\&=2\int_0^{+\infty}x(1-\Phi(e+x))dx\\&=2\int_0^{x_n-e}x(1-\Phi(e+x))dx.\end{aligned} \tag{6.22}$$

如果$x\ge e-x_1$，即$e-x\le x_1$，那么$\Phi(e-x)=0$.因此有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\{\xi-e\le-\sqrt{r}\}dr&=2\int_0^{+\infty}xM\{\xi\le e-x\}dx\\&=2\int_0^{+\infty}x\Phi(e-x)dx\\&=2\int_0^{e-x_1}x\Phi(e-x)dx.\end{aligned} \tag{6.23}$$

由式(6.21), (6.22)及 (6.23)知道不等式(6.19)成立。定理证毕。

**定义 6.4.1** 设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足条件(5.2)，即

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n，\ 0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n \le 1.$$

$\Phi(x)$是经验不确定分布(5.3).记

$$e = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1 + \sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i + (1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n$$

则

$$S^2 = 2(\int_0^{x_n-e} x(1-\Phi(e+x))dx + \int_0^{e-x_1} x\Phi(e-x)dx) \tag{6.24}$$

称为经验方差。

在真实的实验中，常常遇到只需估计不确定变量的期望值和方差。另外，如果不确定分布中只有两个未知参数，亦可通过经验期望和经验方差估计未知参数，此时，专家经验数据只需满足条件(5.2),显然扩大了条件(6.3).

假设$\xi$是不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x;a,b)$，专家经验数据

$$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$$

满足条件(5.2).如果$\xi$的期望$E[\xi]$和方差$V[\xi]$存在，则以方程组

$$\begin{cases} E[\xi] = \bar{\xi} \\ V[\xi] = S^2 \end{cases} \tag{6.25}$$

的解作为未知参数的矩估计值。其中$\bar{\xi}$，$S^2$分别由(6.6)和(6.24)定义。

**例 6.4.1** 设$\xi$是线性不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \le x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

其中$a<b$是两个未知参数。设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据且满足条件(5.2).下面利用(6.25)估计未知参数$a,b$.

由于$E[\xi]=\dfrac{a+b}{2}$，$V[\xi]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ [46]，故由(6.25)得到

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \bar{\xi} \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = S^2. \end{cases} \tag{6.26}$$

由上述方程组得到$a,b$的估计值分别为

$$\hat{a}=\bar{\xi}-\sqrt{3}S\text{，}\quad \hat{b}=\bar{\xi}+\sqrt{3}S.$$

进一步地，假设得到如下的专家经验数据

$$(1.2,0.1),\ (1.5,0.25),\ (2.0,0.5),\ (2.3,0.65),\ (2.6,0.8),\ (2.9,0.95)$$

由式(6.6)，(6.24)及(6.26)，分别得到

$$\hat{a}=0.6706\text{，}\quad \hat{b}=3.3444$$

及线性不确定分布

$$\Phi_n(x)=\begin{cases}0, & x<0.6706\\ (x-0.6706)/2.6738, & 0.6706\le x\le 3.3444\\ 1, & x>3.3444.\end{cases}$$

**例 6.4.2** 设$\xi$是 zigzag 不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ (x-a)/2(b-a), & a\le x\le b\\ (x+c-2b)/2(c-b), & b\le x\le c\\ 1, & x>c.\end{cases}$$

其中$a<b<c$是三个未知参数。由于$\xi$的方差难以计算，则利用经验方差代替方差。假设得到如下的专家经验数据

$$(1.2,0.1),\ (1.6,0.3),\ (2.0,0.5),\ (2.2,0.55),\ (3.0,0.75),\ (3.9,0.975)$$

由式(6.6)，(6.24)分别得到

$$\bar{\xi}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n=2.2588$$

$$S^2=2(\int_0^{x_n-e}x(1-\Phi(e+x))dx+\int_0^{e-x_1}x\Phi(e-x)dx)=1.7702$$

从而$\hat{E}[\xi]=2.2588$，　$\hat{V}[\xi]=1.7702$分别为$\xi$的期望值和方差的估计值。

**例 6.4.3** 设$\xi$是正态不确定变量，其分不确定布为

$$\Phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1}\text{，}\quad x\in\Re$$

其中$e$和$\sigma>0$是两个待估未知参数。设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据且满足条件(5.2).

由于

$$E[\xi]=e\text{，}\ V[\xi]=\sigma^2$$

由(6.6)，(6.24)及(5.25)得到$e,\sigma^2$的估计值为

$$\hat{e}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i+(1-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2})x_n$$

$$\hat{\sigma}^2=2(\int_0^{x_n-e}x(1-\Phi(e+x))dx+\int_0^{e-x_1}x\Phi(e-x)dx).$$

# 7 阶梯型经验不确定分布

在不确定统计中，Liu[46]提出了如下的经验不确定分布(5.3).

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \alpha_i+\dfrac{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}, & x_i\le x\le x_{i+1},1\le i<n\\ 1, & x>x_n\end{cases}$$

这是连续的折线型分布。同时在不确定理论中，Liu 定义了不确定更新过程$\{N_t\}$，其分布为

$$M\{N_t\le n\}=1-M\{S_{n+1}\le t\},$$

其中$S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是 i.i.d.正的不确定变量。显然其分布用折线型(5.3)近似表示不合理。另外不确定正态分布

$$\Phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},\quad x\in\Re$$

是不确定理论中极为重要的一种分布，其已经被成功应用到不确定分析和不确定微分方程中[8]。然而，我们难以得到其二阶矩（因为$x\in\Re$）。这意味着直接利用上章的不确定矩估计方法来估计未知参数是失效的。

为更简单处理这些数据，本章介绍阶梯型经验不确定分布，同时基于阶梯型经验不确定分布定义了$k$阶经验矩并设计了一种新的矩估计方法来估计不确定分布中的未知参数。

## 7.1 阶梯经验不确定分布

设$\xi$是不确定变量，$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据，且满足下面条件

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n=1. \tag{7.1}$$

那么

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \alpha_i, & x_i\le x\le x_{i+1} \qquad i=1,2,\cdots,n\\ 1, & x\ge x_n\end{cases} \tag{7.2}$$

称为阶梯经验不确定分布。

本章若不特别说明，$\Phi(x)$ 指由(7.2)定义的阶梯经验不确定分布。

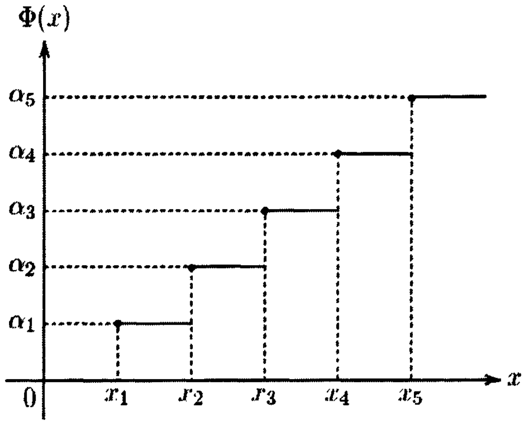


图 7.1.1 阶梯型经验不确定分布

下面定理介绍阶梯经验不确定分布的期望值、方差及 $k$ 阶矩。

**定理 7.1.1** 设 $(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$ 是专家经验数据，且满足条件 (7.1). 记 $\alpha_0=0$，那么阶梯经验不确定分布(7.2)具有下面的期望值和方差

$$E[\xi]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i \tag{7.3}$$

$$V[\xi]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-E[\xi])^2\,. \tag{7.4}$$

**证明**：首先证明式(7.3).由假设知，如果 $x_1\ge 0$，那么由期望值定义(2.1)得到

$$\begin{aligned}E[\xi]&=\int_0^{x_1}1dx+\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1-\alpha_i)dx+\int_{x_m}^{+\infty}0dx\\&=x_1+\sum_{i=1}^{m-1}(1-\alpha_i)(x_{i+1}-x_i)+0\\&=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i\,.\end{aligned}$$

如果 $x_m\le 0$，那么

$$\begin{aligned}E[\xi]&=-\int_{-\infty}^{x_1}0dx-\sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\alpha_i dx+\int_{x_m}^{0}1dx\\&=0-\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i(x_{i+1}-x_i)+x_m\\&=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i\end{aligned}$$

如果存在某个指标$l$使得$x_l \le 0 \le x_{l+1}$，那么

$$E[\xi]=\int_0^{x_{l+1}}(1-\alpha_l)dx+\sum_{i=l+1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1-\alpha_i)dx-\sum_{i=1}^{l-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\alpha_i dx-\int_{x_l}^{0}\alpha_l dx$$

$$=x_{l+1}(1-\alpha_l)+\sum_{i=l+1}^{m-1}(1-\alpha_i)(x_{i+1}-x_i)-\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i(x_{i+1}-x_i)+x_l\alpha_l$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i$$

综上得到期望值为$E[\xi]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i$，即式(7.3)得证。

下面证明式(7.4)成立。

记$e=E[\xi]$，不失一般性地，假设存在某个指标$l$使得$x_l \le e \le x_{l+1}$.对于阶梯经验不确定分布(7.2)，由方差的计算公式(2.4)得到

$$V[\xi]=2\int_e^{+\infty}(r-e)(1-\Phi(r)+\Phi(2e-r))dr$$

$$=2\int_e^{+\infty}(r-e)(1-\Phi(r))dr+2\int_e^{+\infty}(r-e)\Phi(2e-r)dr. \tag{7.5}$$

由于

$$\int_e^{+\infty}(r-e)(1-\Phi(r))dr$$

$$=\int_e^{x_{l+1}}(r-e)(1-\alpha_l)dr+\sum_{i=l+1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(r-e)(1-\Phi(r))dr+\int_{x_n}^{+\infty}(r-e)(1-\Phi(r))dr$$

$$=(1-\alpha_l)(\frac{1}{2}r^2-er)\Big|_e^{x_{l+1}}+\sum_{i=l+1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(r-e)(1-\alpha_i)dr$$

$$=\frac{1}{2}(1-\alpha_l)[x_{l+1}^2-2ex_{l+1}+e^2]+\sum_{i=l+1}^{n-1}(1-\alpha_i)(\frac{1}{2}r^2-er)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\alpha_l)(x_{l+1}-e)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=l+1}^{n-1}(1-\alpha_i)[(x_{i+1}-e)^2-(x_i-e)^2] \tag{7.6}$$

及

$$\int_e^{+\infty}(r-e)\Phi(2e-r)dr$$

$$=\int_e^{-\infty}(e-t)\Phi(t)dt \quad (\text{令}\ 2e-r=t)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}0dt+\sum_{i=1}^{l-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(e-t)\alpha_i dt+\int_{x_l}^{e}(e-t)\alpha_l dt$$

$$=\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i\frac{1}{2}(2ex_{i+1}-x_{i+1}^2-2ex_i+x_i^2)+\alpha_l\frac{1}{2}(e^2-2ex_l+x_l^2)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i[(x_i-e)^2-(x_{i+1}-e)^2]+\frac{1}{2}\alpha_l(x_l-e)^2. \tag{7.7}$$

由式(7.5)，(7.6)和 (7.7)得到

$$V[\xi]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-e)^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-E[\xi])^2.$$

即式(7.4)成立。定理证毕。

**定理 7.1.2** 设 $(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$ 是专家经验数据，且满足下面条件

$$0\le x_1<x_2<\cdots<x_n(\text{或}\,x_1<x_2<\cdots<x_n\le 0),\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n=1. \tag{7.8}$$

记 $\alpha_0=0$，那么对于任意的正整数 $k$，阶梯经验不确定分布(7.1)具有 $k$ 阶矩

$$E[\xi^k]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^k\ . \tag{7.9}$$

证明：第一步：如果 $0\le x_1<x_2<\cdots<x_n$，那么

$$E[\xi^k]=\int_0^{+\infty}M\{\xi^k\ge r\}dr$$

$$=\int_0^{+\infty}kx^{k-1}M\{\xi\ge x\}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}kx^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx$$

$$=k\int_0^{x_1}x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx+k\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx$$

$$+k\int_{x_n}^{+\infty}x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx$$

$$=k\int_0^{x_1}x^{k-1}dx+k\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}x^{k-1}(1-M\{\xi<x\})dx$$

$$=x_1^k+\sum_{i=1}^{n-1}(1-\alpha_i)(x_{i+1}^k-x_i^k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^k.$$

第二步：如果 $x_1<x_2<\cdots<x_n\le 0$，且 $k$ 是奇数，那么

$$E[\xi^k]=-\int_{-\infty}^{0}M\{\xi^k\le r\}dr$$

$$=-\int_{-\infty}^{0}kx^{k-1}M\{\xi\le x\}dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{x_1}0dx-k\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\alpha_i x^{k-1}dx-k\int_{x_n}^{0}x^{k-1}dx$$

$$=-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(x_{i+1}^k-x_i^k)+x_n^k$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^k$$

第三步：如果$x_1<x_2<\cdots<x_n\le 0$，且$k$是偶数，那么

$$E[\xi^k]=\int_0^{+\infty}M\{\xi^k\ge r\}dr$$

$$=\int_0^{-\infty}kx^{k-1}M\{\xi\le x\}dx$$

$$=-k\int_{-\infty}^{0}x^{k-1}M\{\xi\le x\}dx$$

由第二步知道，等式(7.9)在第三步成立。定理证毕。

## 7.2 不确定矩估计方法

本节利用专家经验数据及阶梯经验分布定义经验矩，经验方差，进一步介绍了用于估计不确定分布中的矩方法。

**定义 7.2.1** 设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据，且满足条件 (7.1)，即

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,\quad 0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n=1.$$

记$\alpha_0=0$，那么对于任意的正整数$k$，

$$\bar{\xi}^k=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^k, \tag{7.10}$$

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-\bar{\xi})^2 \tag{7.11}$$

分别成为经验$k$阶矩和经验方差。其中$\bar{\xi}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i$成为经验期望值。

如果不确定分布的类型已知，但是其中含有未知参数，按下面的矩方法估计未知参数。

**矩估计**：设$\xi$为不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$，其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$是未知参数，$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$为专家经验数据，且满足条件(7.1.1). $E[\xi^k]$和$\bar{\xi}^k$分别是$k$阶理论矩和$k$阶经验矩。令

$$E[\xi^k]=\bar{\xi}^k,\quad k=1,2,\cdots,p. \tag{7.12}$$

由于$E[\xi^k]=k\int_0^{+\infty}x^{k-1}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx$，上述方程组(7.12)等价于方程组

$$k\int_0^{+\infty}x^{k-1}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx=\bar{\xi}^k,\quad k=1,2,\cdots,p. \tag{7.13}$$

方程组(7.2.12)或(7.1.13)的解称为未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$的据估计值，分别记为$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_p$.

从而估计未知参数只需求解方程组

$$\begin{cases}E[\xi]=\bar{\xi}\\ E[\bar{\xi}^2]=\bar{\xi}^2\\ \cdots\ \cdots\\ E[\bar{\xi}^p]=\bar{\xi}^p,\end{cases} \tag{7.14}$$

即

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx=\sum_{i=1}^n(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i\\ 2\int_0^{+\infty}x(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx=\sum_{i=1}^n(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^2\\ \qquad\cdots\qquad\cdots\\ p\int_0^{+\infty}x^{p-1}(1-\Phi(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p))dx=\sum_{i=1}^n(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^p.\end{cases} \tag{7.15}$$

**注 7.2.1** 在真实的试验中，我们经常遇到只需估计不确定分布的期望值和方差的情形。另外，如果不确定分布只有两个未知参数，且当专家经验数据满足条件(7.1)时，可以利用经验均值和经验方差进行估计。即，假设$\xi$是一个不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x;a,b)$，其中$a,b$是未知参数，且专家经验数据满足条件(7.1). 如果不确定分布$\Phi(x;a,b)$的期望值$E[\xi]$和方差$V[\xi]$存在，那么只需通过求解方程组

$$\begin{cases}E[\xi]=\bar{\xi}\\ V[\xi]=S^2\end{cases} \tag{7.16}$$

即

$$\begin{cases} E[\xi]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i \\ V[\xi]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-\bar{\xi})^2 \end{cases} \tag{7.17}$$

来获得未知参数$a,b$的估计值。

**注 7.2.2** 假设$\xi$是一个不确定变量，其不确定分布为$\Phi(x)$。在真实的试验中，如果方差$V[\xi]$难以计算，则可利用$S^2$代替方差$V[\xi]$.

**例 7.2.1** 设$\xi$是一个线性不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ (x-a)/(b-a), & a\le x\le b \\ 1, & x>b \end{cases}$$

其中$a<b$为两个未知参数。设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据，且满足条件 (7.1).下面利用方程组(7.16)估计未知参数$a,b$.

由$\xi$是一个线性不确定变量知道，$E[\xi]=\dfrac{a+b}{2}$，$V[\xi]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$[ ].则由式(7.16)得到

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=\bar{\xi} \\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=S^2. \end{cases}$$

由上述方程组得到未知参数的估计值为

$$\hat{a}=\bar{\xi}-\sqrt{3}S\text{，}\quad \hat{b}=\bar{\xi}+\sqrt{3}S$$

进一步地，假设我们得到如下的专家经验数据

$$(1.2,0.1),\ (1.5,0.25),\ (2.0,0.5),\ (2.3,0.65),\ (2.6,0.8),\ (2.9,0.95).$$

那么有未知参数的估计值$\hat{a}=1.0868$，$\hat{b}=2.9432$及线性不确定分布

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0, & x<1.0868 \\ (x-1.0868)/1.8564, & 1.0868\le x\le 2.9432 \\ 1, & x>2.9432. \end{cases}$$

**例 7.2.2** 设$\xi$是一个 zigzag 不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ (x-a)/2(b-a), & a\le x\le b\\ (x+c-2b)/2(c-b), & b\le x\le c\\ 1, & x>c\end{cases}\tag{7.18}$$

其中$a<b<c$是三个未知参数。由于$\xi$的方差难以计算，那么在实验中可以用$S^2$代替方差$V[\xi]$. 假设得到如下的专家经验数据

$$(1.2,0.1),\ (1.6,0.3),\ (2.0,0.5),\ (2.2,0.55),\ (3.0,0.75),\ (3.9,0.975).$$

那么由式(7.10)和 (7.11)，得到

$$\bar{\xi}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i=2.4275,$$

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-\bar{\xi})^2=0.8802.$$

从而认为 zigzag 不确定分布(7.2.18)的期望值和方差为$\hat{E}[\xi]=2.4275$，$\hat{V}[\xi]=0.8802$.

**例 7.2.3** 设$\xi$是一个正态不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x)=(1+\exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}))^{-1},\quad x\in\Re$$

其中$e,\sigma$是两个未知参数，且$\sigma>0$.设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据，且满足条件 (7.1). 由于$E[\xi]=e$，$V[\xi]=\sigma^2$， 由式(7.17)得到$e,\sigma^2$的矩估计值为

$$\begin{cases}\hat{e}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i\\ \hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-\bar{\xi})^2.\end{cases}$$

进一步地，得到$\sigma$的矩估计值为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})(x_i-\bar{\xi})^2}.$$

**例 7.2.4** 设$\xi$是一个不确定变量，其不确定分布为

$$\Phi(x;a,b)=ax+b,\quad (a>0)$$

其中$a,b$是两个未知参数。设$(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2),\cdots,(x_n,\alpha_n)$是专家经验数据，且满足条件 (7.8).下面估计参数$a,b$.

由于

$$E[\xi]=\int_0^1 \Phi^{-1}(x)dx=\frac{1-2b}{2a}$$

$$E[\xi^2]=\int_0^1 (\Phi^{-1}(x))^2 dx=\frac{1+3b^2-3b}{3a^2}.$$

由方程组(7.15)，得到

$$\begin{cases}\dfrac{1-2b}{2a}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i\\ \dfrac{1+3b^2-3b}{3a^2}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^2.\end{cases}$$

则未知参数 $a,b$ 的矩估计值分别为

$$\hat{a}=\frac{1}{2\sqrt{3}}[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i)^2]^{-\frac{1}{2}} \tag{7.19}$$

$$\hat{b}=\frac{1}{2}-\hat{a}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i-1})x_i. \tag{7.20}$$

假设得到如下的专家经验数据

$$(0.8,0.1),\ (1.0,0.15),\ (1.5,0.275),\ (2.0,0.4),\ (3.0,0.65),\ (4.0,0.9).$$

则由式(7.19)，(7.20)得到未知参数 $a,b$ 的矩估计值

$$\hat{a}=0.2167,\ \hat{b}=-0.0022$$

及矩估计不确定分布

$$\Phi(x)=0.2167x-0.0022.$$

# 8 结论与展望

## 8.1 论文的主要工作

不确定分布是不确定理论的重要概念之一，其用于刻画不确定变量的取值变化规律。获取不确定分布是不确定理论成功应用于实际生产活动中的关键步骤。本文重点研究了不确定分布估计问题，其中主要内容如下：

- 研究了不确定变量序列均方收敛的性质，给出了不确定变量序列均方收敛的充分必要条件；
- 提出了不确定二阶矩过程的概念，讨论了该不确定过程的若干性质；
- 建立了关于不确定测度的若干不等式，用于估计相应不确定分布的上下界；
- 基于多专家经验数据，提出了 Delphi 法来获取不确定分布；
- 对于不确定分布中含有未知参数的情形，提出了不确定矩估计方法；
- 提出了阶梯型不确定分布的概念，建立了基于阶梯型不确定分布的矩估计方法。

## 8.2 后续研究的展望

社会是人类的社会，在社会学、金融学、石油勘探、管理学、统计决策等领域处处存在着主观不确性的运筹问题。数理统计已有了完整的统计分析体系，而不确定统计分析研究刚刚起步。建立更多的不确定统计方法及统计模型，将不确定统计应用于实际生产实践中是下一步是主要研究工作。将准备展开以下方面的研究：

- 在不确定理论下，运用极大熵原理和极小互熵原理选择最有效的不确定分布；
- 利用无参数估计思想，进一步建立不确定分布未知参数的估计方法；
- 研究不确定统计的假设检验问题；
- 不确定统计的半参数估计方法研究；
- 不确定统计的应用研究。

# 参考文献


[1] Albert P., et al. Application of Delphi method selection of procurement systems for construction projects[J]. Construction Management and Economics, 1466-433x. 2001(7): 699-718.

[2] Bhattacharyya M. Fuzzy Markovian decision process[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1998(99): 273-282.

[3] Billingsley P. Convergence of probability Measures[M]. New York: John Wiley & Sons. 1968.

[4] Buckley J. Fuzzy decision making with data: applications to statistics[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1985(17): 139-147.

[5] Casals M., Gil M., Gil P. The fuzzy decision problem: An approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information[J]. European Journal of Operational Research. 1986(27): 371-382.

[6] Chang I., et al. An efficient approach for large scaled project planning based on fuzzy Delphi method[J]. Fuzzy aSets and Systems. 1995(76): 277-288.

[7] Chen X. American Option Pricing Formula for Uncertain Financial Market[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010: 58-62.

[8] Chen X., Liu B. Existence and Uniqueness Theorem for Uncertain Differential Equations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making. 2010(9): 69-81.

[9] Chen X., Ralescu D. A Note on Truth Value in Uncertain Logic[C]. Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences. Kunming. 2009: 739-741.

[10] Chung K. L. A Course in Probability Theory[M]. New York: Academic Press. 1974.

[11] Cohen J., et al. The mutual effect of two uncertainties[J]. The Durham Research Review: The Research Publication of Institute of Education, University of Durham. 1958(2): 215-222.

[12] Corral N., Gil M. A note on interval estimation with fuzzy data[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988(20): 209-215.

[13] Dalkey N. An experimental study of group opinion: The Delphi method. 1969(5): 408-426.

[14] Dai W. Quadratic Entropy of Uncertain Variables[J].Information. to be published. http://orsc.edu.cn/online/100707.pdf.

[15] 戴韡. 不确定理论中的极大熵原理，[博士学位论文].北京：清华大学，2010.

[16] Dalkey N., Helmer O. An Experimental Application of the Delphi Method to the use of Experts[J]. Management Science. 1963 (3): 458-467.

[17] Gao X. Some properties of continuous uncertain measure[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2009(3): 419-426.

[18] Gao X., You C. Maximum entropy membership functions for discrete fuzzy variables[J]. Information Sciences. 2009(179): 2353-2361.

[19] Gao X., Gao Y., Ralescu D. On Liu's inference rule for uncertain systems[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2010(18): 1-11.

[20] Gao Y. Analysis of k-out-of-n System with Uncertain Lifetimes[C]. Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences. Kunming. 2009: 794-797.

[21] Gil M. Fuzziness and loss of information in statistical problems[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics. 1987(17): 1012-1025.

[22] Gil M., Corral N., Gil P. The fuzzy decision problem: an approach to the point estimation problem with fuzzy information[J]. European Journal of Operational Research. 1985(22): 26-34.

[23] Guo R., Cui Y. Guo. Uncertainty Decision Theory[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010: 5-14.

[24] Guo R, et al. Uncertain Bayes Measure[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010: 63-78.

[25] Guo R, et al. Essential Form of General Uncertainty Distributions[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010: 171-183.

[26] Guo R., Guo D., Thiart C. Liu's Uncertain Normal Distribution[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010: 191-207.

[27] Halmos P. Measure Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1974.

[28] Heyde C. Martingale Limit Theory and Its Application[M]. New York: Academic Press. 1980.

[29] Isaacson D., Madsen R. Markov Chains Theory and Applications[M]. New York: John Wiley & Sons. 1976.

[30] Ishikawa A., et al. The max-min Delphi method and fuzzy Delphi method via fuzzy integration[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1993(55): 241-253.

[31] Iwamura K., Kageyama M. Infinite Product Uncertainty Space[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010:1-4.

[32] Kageyama M. Credibilistic Markov decision processes: The average case[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009(224): 140-145.

[33] Kwakerenaak H. Fuzzy random variables-I: definitions and theorems[J]. Information Sciences. 1978(15):1-19.

[34] Kwakerenaak H. Fuzzy random variables-II: algorithms and examples for the discrete case[J]. Information Sciences. 1979(17): 253-278.

[35] Larsen J., Marx M. An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications[M]. 2nd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1968.

[36] Li P., Liu B. Entropy of credibility distributions for fuzzy variables[J]. IEEE Transactions on

Fuzzy Systems. 2008(16). 123-129.

[37] Li S., Ogura Y. Strong laws of large numbers for independent fuzzy set-valued random variables[J]. Fuzzy Sets and Systems. 2006(157): 2569-2578.

[38] Liu B. Inequalities and convergence concepts of fuzzy and rough variables[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making. 2003(2): 87-100.

[39] Liu B. A survey of credibility theory[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making. 2006(5): 387-408.

[40] Liu B. Uncertainty Theory[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[41] Liu B. Uncertainty Theory[M]. 3rd ed. Beijing: Uncertainty Theory Laboratory. 2008. http://orsc.edu.cn/utlab.

[42] Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

[43] Liu B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process[J]. Journal of Uncertain Systems. 2008 (2): 3-16.

[44] Liu B. Some research problems in uncertainty theory[J]. Journal of Uncertain Systems.2009(3): 3-10.

[45] Liu B. Uncertain Entailment and Modus Ponens in the Framework of Uncertain Logic[J]. Journal of Uncertain Systems. 2009(3): 243-251.

[46] Liu B. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

[47] Liu B. Uncertain set theory and uncertain inference rule with application to uncertain control[J]. Journal of Uncertain Systems. 2010(4): 83-98.

[48] Liu B. Uncertain risk analysis and uncertain reliability analysis[J]. Journal of Uncertain Systems. 2010(4): 163-170.

[49] Liu B., Liu Y. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002(10): 445-450.

[50] Liu H., Fei W., Liang Y. Existence and Uniqueness of Solution for Uncertain Differential Equations with Non-Lipschitz Coefficients[C]. Proceedings of the Third Intelligent Computing Conference. Wuhu. 2010: 6-12.

[51] Liu W., Xu J. Some properties on expected value operator for uncertain variables[J]. Information: An International Interdisciplinary Journal. 2010(13).

[52] Conover W. Practical Nonparametric Statistics[M]. 2nd ed. New York：John Wiley and Sons, 1980

[53] Liu Y. How to Generate Uncertain Measures[C]. Proceedings of Tenth National Youth Conference on Information and Management Sciences. Luoyang. 2008: 23-26.

[54] Liu Y., Ha M. Expected value of function of uncertain variables[J]. Journal of Uncertainty Systems. 2010(4).

[55] Li X., Liu B. Hybrid logic and uncertain logic[J]. Journal of Uncertain Systems. 2009(3):

83-94.

[56] Mesiar R., Piasecki K. On a possible generalization of the Bayes method of inference[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1990(35): 351-357.

[57] Murray T., Pipino L., Gigch J. A pilot study of fuzzy set modification of Delphi[J]. Human Systems Mgmt. 1985(5): 76-80.

[58] Negoita V., Ralescu D. Simulation, Knowledge-Based Computing, and Fuzzy Statistics[M]. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1987

[59] Piasecki K. On the Bayes formula for fuzzy probability measures[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1986(18): 183-185.

[60] Peng Z. Some properties of product uncertain measure. http://orsc.edu.cn/online/081228.pdf.

[61] Peng Z., Iwamura K., A suffiicient and necessary condition of uncertainty distribution[J]. Journal of Interdisciplinary Mathematics. to be published. http://orsc.edu.cn/online/090305.pdf.

[62] Peng Z., Kar S. Uncertain Second-order Logic[C]. Proceedings of the First International Conference on Uncertainty Theory. Urumchi. 2010: 259-263.

[63] Petrov V. Sums of Independent Random Variables[M]. Berlin: Spring-Verlag. 1975

[64] Puri M., Ralescu D. Convergence theorems for fuzzy martingale[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application. 1991(160): 107-122.

[65] Shafer. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton University Press, 1976.

[66] Saade J., Schwarzlander H. Fuzzy hypothesis testing with hybrid data[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1990(35): 197-212.

[67] Salzenstein F., et al. Non-stationary fuzzy Markov chain[J]. Pattern Recognition Letters. 2007(28):2201-2208.

[68] Stephens M. EDF statistics for goodness of fit and some comparisons[J]. Journal of the American Statistical Association. 1974(69): 730-737.

[69] Stout W. Almost Sure Convergence[M]. New York: Academic Press. 1974.

[70] Symeonaki M., Stamou G. Theory of Markov systems with fuzzy states[J]. Fuzzy Sets and Systems. 2004(143): 427-445.

[71] Tanaka H., Uejima S. Asai K., Fuzzy linear regression model[J]. Transactions on Systems Man and Cybernetics. 1980(10): 2933-2938.

[72] Tanaka H., Uejima S., Asai K. Linear regression analysis with fuzzy model[J]. Transactions on Systems Man and Cybernetics. 1982(12): 903-907.

[73] Uemura Y. A decision rule on fuzzy events[J]. Japanese Journal Fuzzy Theory and Systems. 1991(3): 291-300.

[74] Wang X., Yang W. The laws of large numbers for independent fuzzy variable sequences[C]. Proceeding of the 2008 International Symposium on Computational Intelligence and Design. Wuhan. 2008. 60-63.

[75] Wang X., et al. Some inequalities on credibility measure[C]. Proceeding of the 6th

International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Tianjin. 2009. 414-417

[76] 王小胜，郭海英．独立模糊变量序列的几个极限定理[J]．模糊系统与数学．2008(22):138-141.

[77] 王忠玉，吴柏林.模糊数据统计学[M]．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.

[78] Wang Z., Li X. Uncertain Satisfiability and Uncertain Entailment[C]. Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences. Kunming. 2009: 747-752.

[79] Waterman D. A Guide to Expert Systems[M]. Inc: Addison-Wesley Publishing Company, 1986

[80] 熊卫，鞠实儿，罗旭东．论 Dempster-Shafer 理论的一个悖论[J]．计算机科学．2005(32):145-169.

[81] Dempster, A. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. The Annals of Mathematical Statistics 1967(38): 325–339.

[82] Yan L. Optimal Portfolio elections with Uncertain Returns[J]. Modern Applied Science. 2009(3). http://orsc.edu.cn/online/090810.pdf.

[83] Yang W. G. Strong limit theorems for arbitrary stochastic sequences[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007(326): 1445-1451.

[84] Yang W. G., Liu W. A local convergence theorem for partial sums of stochastic adapted sequences[J].Czechoslovak Mathematical Journal. 2006(56): 525-532.

[85] Yang Y. Moments and Tails Inequality within the Framework of Uncertainty Theory[J]. Information: An International Interdisciplinary Journal. 2010(13). http://orsc.edu.cn/online/090612.pdf.

[86] Okoli C., et al. The Delphi method as a research tool: an example, design considerations and applications[J]. Information and Management. 2004(42); 15-29.

[87] You C. On the convergence of uncertain sequences[J]. Mathematical and Computer Modelling. 2009(49): 482-487.

[88] Zadeh L. Fuzzy sets[J]. Information and Control.1965(8): 338-353.

[89] Zadeh L. Probability Measures of Fuzzy Events[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1968(23): 421-427.

[90] Zadeh L. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1999(100): 9-34.

[91] Zhang Z. Some Discussions on Uncertain Measure[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making. to be published. http://orsc.edu.cn/online/100613.pdf.

[92] Zhao R., Tang W. Some properties of fuzzy random renewal processes[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2006(14): 173-179.

[93] Zhao R., Tang W., Yun H. Random fuzzy renewal process[J]. European Journal of

Operational Research. 2006(169): 189-201.

[94] Zhu Y. Uncertain Optimal Control with Application to a Portfolio Selection Model[J]. Cybernetics and Systems. 2010(41). http://orsc.edu.cn/online/090524.pdf.

[95] Zhu Y., Liu B. Some inequalities of random fuzzy variables with application to moment convergence[J]. Computers and Mathematics with Applications. 2005(50): 719-727.

[96] Brookes C., Betteley L., Loxston S. Fundamentals of Mathematics and Statistics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1979

[97] Teijlingen E. et al. Delphi method and nominal group techniques in family planning and reproductive health research[J].——

[98] Skulmoski G. et al. The Delphi method for graduate research[J]. Journal of Information Technology Education. 2007(6): 1-21.

[99] Landeta J. Current validity of the Delphi method in social sciences[J]. Technological Forecasting and Social Change. 2006(73): 467-482.

[100] Linstone H., Turoff M. The Delphi Method[M]. London: Addison-Wesley Publishing Company. 1975.

[101] Graham B., et al. Delphi as a method to establish consensus for diagnostic criteria[J]. Journal of Clinical Epidemiology. 2003(56): 1150-1156.

[102] Chang P. et al. The fuzzy Delphi method via fuzzy statistics and membership function fitting and an application to the human resources[J]. Fuzzy Sets and Systems. 2000(112): 511-520.

# 致 谢

在这篇博士论文完成之际，首先感谢我的导师杨卫国教授。杨老师不仅学识渊博，学术洞察力敏锐，而且具有严谨的科学态度和孜孜不倦的奋斗精神。对于我的研究工作，杨老师给予了精心的指导，他的言传身教使我终身受益。在今后的科学研究道路上，一定铭记杨老师的教诲，认真、严谨、勤奋地进行我的研究工作。

感谢江苏大学及江苏大学理学院提供的良好学习环境和科研条件，感谢在我学习和科学研究过程中给予帮助的所有老师和师兄弟们。

特别感谢清华大学刘宝碇教授。在我研究过程中，刘老师给予了无私的帮助和关怀，同时刘老师所倡导的“创新、实用、基础”科研理念，为我指明了科学研究的基本思想和方法。

最后要感谢我的家人，感谢父母、岳父母、妻子及女儿给予的理解、支持和鼓励。

# 读博期间发表的论文、主持及参加的课题

[1] Xiaosheng Wang, Haiying Guo, Convergence Theorems for Partial Sums of Arbitrary Stochastic Sequences[J]. Journal of Inequalities and Applications (SCIE), to be published.

[2] Xiaosheng Wang, Zhichao Gao, Haiying Guo, Delphi method for estimating uncertainty distributions[J]. Information: An International Interdisciplinary Journal (SCIE), to be published.

[3] Xiaosheng Wang, Weiguo Yang, Li Ma, The laws of large numbers for independent fuzzy variable sequences[C].Proceeding of the 2008 International Symposium on Computational Intelligence and Design. Wuhan. 2008. 60-63. EI, ISTP 收录。

[4] Xiaosheng Wang, Haiying Guo, Some inequalities on credibility measure[C]. Proceeding of the 6th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Tianjin. 2009. 414-417.EI, ISTP 收录。

[5] Xiaosheng Wang, Haiying Guo, Some limit theorems for arbitrary stochastic sequences[C]. Proceeding of International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization. Sanya . 2009. 413-426. EI, ISTP 收录。

[6] Xiaosheng Wang, Haiying Guo, Strong Convergence Theorems for Arbitrary Sequence Series of B-Valued Random Variables[C]. Proceeding of 2009 International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering. Wuhan. 2009 (光盘版). EI, ISTP 收录。

[7] 王小胜，郭海英， 独立粗糙变量序列的强收敛性[J]. 模糊系统与数学. Vol.21, No.5, 2007.131-135.

[8] 王小胜，郭海英， 独立模糊变量序列的几个极限定理[J]. 模糊系统与数学. Vol.22, No.5, 2008,138-141.

[9] 王小胜，郭海英， 模糊二阶矩过程及均方收敛性[J]. 模糊系统与数学. (已录用，拟刊登于 2010 年，Vol.24, No.5)

[10] 马丽，王小胜， 二维模糊向量可信性分布的联合商及其性质[J]. 模糊系统与数学. Vol.23, No.5, 2009, 115-120.

[11] 路瑞华，王小胜， 一类负相依随机变量序列的强大数定律[J]. 河北工程大学学报（自然版），Vol.25, No.2，2008, 110-112.

## 目前投出去的文章

[1] Xiaosheng Wang, Zixiong Peng, Method of Moments for Estimating Uncertainty Distributions. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. (minor

revision ) http://orsc.edu.cn/online/100408.pdf.

[2] Xiaosheng Wang, Haiying Guo, A Necessary and Sufficient Condition of Convergence in Mean Square for Uncertain Sequence, International Journal of Fuzzy Systems. (minor revision ) http://orsc.edu.cn/online/100326.pdf.

[3] Xiaosheng Wang, Haiying Guo, Some Iequalities on Unceertain Measure, Journal of Inequalities and Applications.

## 主持和参加的课题

[1] 2010年—2012年，模糊马氏信源和模糊平稳信源的渐进等分性研究，河北省自然科学基金，No. F2010001044，主持；

[2] 2006年—2008年，（隐）马尔可夫链在模式识别中的应用，邯郸市科研项目，主持；

[3] 2006年—2008年，马尔可夫随机场及非齐次马氏链的极限理论，国家自然科学基金，No. 10571076，主研；

[4] 2010年—2012年，树指标随机过程的极限理论，国家自然科学基金，No.11071104，主研。