

摘 要

期权是人们为了规避市场风险而设计出来的一种金融衍生工具。期权定价是金融衍生工具理论研究和实际应用的核心。期权定价理论是目前金融工程、金融数学研究的前沿和热点问题。美式期权可以提前执行，在实践中具有更大的灵活性。一般情况下，美式期权价格却没有精确的解析定价公式，因此研究美式期权定价问题的数值解法具有重要的意义。

本文研究了美式期权定价问题的几种数值解法，主要内容如下：

第一章简要介绍了期权知识、美式期权定价问题模型与美式期权价格的性质，以及美式期权定价问题数值解的研究现状。

第二章用紧差分方法求解美式期权定价问题。从抛物型方程自由边界问题出发，首先对问题进行变量变换，转换为抛物型初边值问题，再进行紧有限差分，并给出了差分格式的稳定性证明，然后给出数值求解的具体算法。最后进行数值实验，并与二叉树、PSOR、有限元数值方法进行比较，证明算法是非常高效和收敛的。

第三章用记忆梯度投影方法求解美式期权定价问题。首先把线性互补问题转换为变分不等式问题，并进行变量变换，然后给出变分不等式问题的等价极值问题，用记忆梯度投影算法进行求解。最后进行数值实验，并与二叉树、PSOR数值方法进行比较，证明算法是非常高效和收敛的。

第四章借鉴有限元方法求解美式期权定价问题。首先把线性互补问题限制到有限区域上，进行热变换，再转换为变分不等式问题，对时间跟空间区域进行离散，给出了离散格式的稳定性证明，然后给出算法并进行数值求解。最后进行数值实验，并与二叉树、PSOR等数值方法进行比较，证明算法是非常高效和收敛的。

关键词：美式期权定价，数值方法，自由边界问题，变分不等式问题，紧差分方法，记忆梯度投影方法，有限元方法

Several Numerical Methods for American Option Pricing

Liu Min (Mathematics)
Directed by Prof. Li Ronghua

Abstract

Option is one kind of financial derivatives people designed to avoid the market risk. Option pricing is the core question of theory research and practical application of financial derivatives. The option pricing is a frontier problem as well as a hot issue of financial engineering and financial mathematics at present. For American options can be exercised at any time up to the maturity dates, they are more flexibility in practice. However, no closed-form solutions exist for American options of their valuation in general case. Therefore it is important to study the numerical methods for American option pricing.

In this paper, we propose several numerical methods for American option pricing. The main content of the thesis is presented as follows:

In chapter1, we briefly introduce some basic option knowledge, the American option pricing model and the property of American option price. In addition, the research status of numerical solution for American option pricing problem is introduced too.

In chapter 2, a compact finite difference method for American option pricing is proposed. By transformations we change the free boundary problem of partial differential equation into an ordinary differential equation initial value problem. And then we apply the compact difference scheme to the new problem. Moreover, stability of the method is proved and the algorithm is given. Some numerical experiments have been carried out. And a comparison, made among the binary tree algorithm, projective successive over-relaxation method and finite element method, shows that the new method is high efficient and convergent.

In chapter 3, a memory gradient projection method for American option pricing is used. Firstly, we convert the linear complementarity problem into a variational inequality one, and then make variable transformation for the variational inequality problem. Secondly, we study the equivalent optimization problem with an inequality constraint and boundary conditions,

whose necessary condition for the optimality is the variational inequality presentation of American options. To solve the obtained optimization problem, we use the memory gradient projection method. The detailed algorithm is suggested. Finally, we test the algorithm and compare it with the binary tree algorithm and projective successive over-relaxation method. Numerical experiments show that the new method is high efficient and convergent.

In chapter 4, we provide a new method for American option pricing by drawing lessons from finite element method. First, we restrict the linear complementary problem to a limited area. And then a variable transformation is made. After that we convert the problem into a variational inequality problem. Second, we discretize the time and space area. At the same time, we prove the stability of this scheme. After that, we give a algorithm and solve the problem by it. At last, we carry out some numerical experiments to compare with binary tree algorithm and projective successive over-relaxation method. Results show that this algorithm is high efficient and convergent.

Keywords: american option pricing, numerical methods, free boundary problem, variational inequality problem, compact finite difference method, memory gradient projection method, finite element method

关于学位论文的独创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在指导教师指导下独立进行研究工作所取得的成果，论文中有关资料和数据是实事求是的。尽我所知，除文中已经加以标注和致谢外，本论文不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含本人或他人为获得中国石油大学（华东）或其它教育机构的学位或学历证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对研究所做的任何贡献均已在论文中作出了明确的说明。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文作者签名： 刘敏

日期：2010年6月1日

学位论文使用授权书

本人完全同意中国石油大学（华东）有权使用本学位论文（包括但不限于其印刷版和电子版），使用方式包括但不限于：保留学位论文，按规定向国家有关部门（机构）送交学位论文，以学术交流为目的赠送和交换学位论文，允许学位论文被查阅、借阅和复印，将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文。

保密学位论文在解密后的使用授权同上。

学位论文作者签名： 刘敏

日期：2010年6月1日

指导教师签名： 李荣华

日期：2010年6月1日

第一章 前言

期权具有良好的规避风险、风险投资和价值发现等功能，而且表现出灵活性和多样性等特点，已成为最具活力的金融衍生产品，得到了迅速发展和广泛利用。用期权可以构造新型金融产品，各种各样的期权、新型金融产品和技术手段使金融市场能够更充分地转移风险和进行套期保值，同时也为大规模的金融投机活动创造许多新的机会和提供新的工具。

期权交易在全球越来越流行，我国正在逐步发展期权交易市场，于是对期权理论的研究对我国的金融发展具有重要的指导意义。期权的思想也已经渗入到现实经济中，例如各种实际项目的投资等可以用期权理论去评价，一些金融资产如股票、可转换债券及认股权证等也蕴含了期权的思想，也可以用期权理论进行分析，从而对于期权理论的研究具有重要的现实意义。

期权理论研究的重点有两个方向：一个方向是如何构造出新型的期权，以满足不断变化的市场投资的需求；另一个方向是如何确定这些日趋复杂的期权的价值，即期权的定价问题。

1970年以来，伴随着期权市场的迅速发展，期权定价理论的研究取得了突破性进展。1973年，Black和Scholes^[1]发表了题为“The pricing of Options and Corporate Liabilities”的论文，给出了不支付红利股票下的欧式期权的定价公式；同年，Merton^[2]发表了另一篇论文“Theory of rational option pricing”，这两篇论文奠定了期权定价的理论性基础。从此之后，许多学者专家对期权定价理论进行研究。期权定价理论是目前金融工程、金融数学研究的前沿和热点问题。

由于美式期权可以提前执行，持有人拥有比欧式期权更多的获利机会，在实践中具有更大的灵活性，而且在美国交易的期权大部分是美式的，所以美式期权的定价问题便成为广泛的研究课题。

一般情况下，美式期权没有精确的解析定价公式，只能使用近似解析方法或数值方法进行求解。计算机软硬件技术的发展使得计算速度得到极大的提高，为数值方法求解美式期权提供了保障。

1.1 期权相关知识

期权(option)是赋予其持有者在一个特定的时间或之前以预先指定的价格买入或卖

出标的资产的权利,它是期权购买者拥有的一种权利,而并非一种义务.即对于期权的买方来说有这样的权利:在一个特定的时间或之前以预先指定的价格选择是否买入(或卖出)一定数量和规格的标的资产,而对于卖方来说有义务按规定满足买方未来买卖的要求.

期权的标的资产(underlying asset)包括债券、股票、货币、股票指数、外汇、商品和期货合约等等.

根据买入和卖出的不同,期权分为看涨期权(Call option)和看跌期权(Put option).看涨期权的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格购买标的资产.看跌期权的持有者有权在某一确定时间以某一确定价格出售标的资产.

根据具体执行时间的限制,期权又分为美式期权(American option)和欧式期权(European option).欧式期权规定期权持有者只能在到期日那一天才能履行合约.美式期权可以在到期日之前的任何时刻执行,具有更大的灵活性.

期权合约是期权交易双方确定贸易关系的正式法律文件,是标准化的契约.

期权的要素包括:

- (1) 标的资产: 期权合同规定的双方买入或卖出的资产;
- (2) 执行价格: 期权合同规定的购入或售出标的资产的价格,在签订期权合同时就已经固定,不再随标的资产的市场价格变化而变化;
- (3) 到期日: 期权合同所规定的有效期限或合同持有者行使权力的时间;
- (4) 期权金: 买卖双方购买或出售期权的价格.

期权的特点包括:

- (1) 独特的损益结构

期权具有非线性损益结构,通过不同期权、期权与其他投资工具的组合,投资者可以构造出不同风险收益状况的投资组合.

- (2) 期权交易的风险

对于期权交易者来说,买方与卖方均面临着期权金不利变化的风险.期权买方的风险底线已经确定和支付,其风险控制在期权金范围内.期权卖方的风险则存在不确定性.

期权买方的风险有限,但其亏损有可能是100%.期权卖方可以收到期权金,但是一旦资产价格发生较大的不利变化或者波动率大幅升高,对于卖方来说,此时的损失相当于“无限”.

由于美式期权可以提前执行，持有人拥有比欧式期权更多的获利机会，在实践中具有更大的灵活性，而且美式期权的应用更为普遍。目前世界各主要交易所买卖的期权合约大部分为美式期权，尤以股票期权市场最为突出，所以美式期权的定价问题是期权理论无法回避的核心内容。本文即对美式期权定价问题进行研究。

1.2 美式期权定价问题的模型及其性质

1.2.1 Black-Scholes 期权定价模型

Black和Scholes(1973)^[1]开创性地推导出不支付红利股票下欧式期权的价格满足一个线性的抛物型偏微分方程即著名的Black-Scholes方程。通过求解这个问题得到了欧式期权的解析定价公式。

我们按照Black和Scholes在1973年那篇奠定诺贝尔经济学奖的经典论文的思路来推导Black-Scholes微分方程。

为了描述方便，记(本文后续章节继续沿用)

V_t ：期权的当前价格(简记为 V)；

S_t ：标的资产的市场价格(简记为 S)；

K ：买权合同的执行价格；

r ：按连续复利计算的无风险利率；

μ ：标的资产价格期望；

σ ：标的资产价格波动率；

T ：到期日；

t ：当前定价日；

$T-t$ ：距离到期时间。

Black 和 Scholes 在推导 Black-Scholes 模型时做了以下 7 条基本假设：

- (1) 无风险利率 r 已知，且为常数，不随时间变化；
- (2) 只包括两种资产：一种是风险资产，其价格 S_t 的变化为几何布朗运动，即

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB(t),$$

另一种是无风险资产 S_t^0 ，它的价格过程为 $dS_t^0 = r S_t^0 dt$ ；

- (3) 在衍生证券的有效期内，标的资产没有红利支付；

- (4) 期权为欧式期权;
- (5) 资本市场完善, 即不存在交易手续费、税收及保证金等因素;
- (6) 投资者可以自由借入和贷出资金, 借入利率和贷出利率相等, 均为无风险利率. 而且所有证券都是高度可分的, 即投资者可以购买任意数量的标的资产;
- (7) 对卖空没有任何限制, 允许使用全部所得卖空衍生证券.

假设 V_t 是期权的当前价格, 显然, V_t 一定是标的资产当前市场价格 S_t 和当前时刻 t 的某种函数.

由 Black-Scholes 模型的基本假设, 风险资产价格 S_t 遵循随机过程:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (1-1)$$

方程(1-1)的离散形式为:

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta B_t. \quad (1-2)$$

由 Ito 公式, 期权价值 V_t 是标的资产价格 S_t 的函数, 应有:

$$dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dB_t. \quad (1-3)$$

简记 $dB_t = dz$.

方程(1-3)的离散形式为:

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \Delta z. \quad (1-4)$$

V 是 S 与 t 的函数, 所以方程(1-2)与方程(1-4)遵循相同的维纳过程, 即 $\Delta z (= \varepsilon \sqrt{\Delta t})$ 相同. 所以我们可以选择该风险资产和期权的组合来消除维纳过程.

构造如下的投资组合:

- (1) 卖出一份期权
- (2) 买入 $\frac{\partial V}{\partial S}$ 份风险资产

则该证券组合的价值为:

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S. \quad (1-5)$$

Δt 时间后, 该证券组合的价值变化 $\Delta \Pi$ 为:

$$\Delta\Pi = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S.$$

将方程(1-2)和(1-4)代入上式, 得:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t. \quad (1-6)$$

因为这个方程不含有 Δz , 经过 Δt 时间后证券组合必定没有风险. 因此, 该证券组合的瞬时收益率一定与其它短期无风险证券的收益率相同. 否则, 将存在无风险的套利机会. 所以:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t.$$

其中 r 为无风险利率.

将方程(1-5)和(1-6)代入上式可得:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) \Delta t,$$

化简得:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV. \quad (1-7)$$

式(1-7)就是著名的 Black-Scholes 微分方程.

有红利支付时, 上述方程变为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV.$$

对于欧式看跌期权, 解下面的偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV, \\ V|_{t=T} = \max(K - S_T, 0). \end{cases}$$

得欧式看跌期权的 Black-Scholes 定价公式: $P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$.

其中:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

1.2.2 美式期权定价问题模型

美式看涨期权的价格与美式看跌的期权价格之间存在对称关系^[3]:

设 $V_c(S, t; r, q)$, $V_p(S, t; r, q)$ 以及 $S_c(t; r, q)$, $S_p(t; r, q)$ 分别是具有相同期限 T 和相同执行价格 K 的支付红利的美式看涨和看跌期权的价格与最佳实施边界, 则

$$V_c(S, t; r, q) = \frac{S}{K} V_p\left(\frac{K^2}{S}, t; r, q\right) \text{ 和 } \sqrt{S_c(t; r, q) S_p(t; r, q)} = K, \quad (1-8)$$

这里 K 是期权的执行价格, r 是无风险利率, q 是红利率.

本文只考虑美式看跌期权的定价问题, 看涨期权的价格可以通过上式直接得出.

美式期权定价模型一般说有三种: 自由边界问题, 线性互补问题, 变分不等式问题. 下面分别给予介绍.

(1) 从数学上来说, 美式期权的定价问题是一个自由边界问题, 这里的自由边界是一条需要确定的交界线, 它把区域 $\{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ 分成两部分, 一部分是继续持有区域, 另一部分是终止持有区域, 这条自由边界在金融上称为最佳实施边界. 显然对每个美式期权的持有者来说, 需要知道曲线的位置, 以便制订出最佳的实施方案.

对于终止期为 $t = T$ 的美式看跌期权, 存在两个区域:

$$\textcircled{1} \text{ 继续持有区域 } \Sigma_1 = \{(S, t) \mid S(t) \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}: V(S, t) > (K - S)^+,$$

$$\textcircled{2} \text{ 终止持有区域 } \Sigma_2 = \{(S, t) \mid 0 \leq S \leq S(t), 0 \leq t \leq T\}: V(S, t) = (K - S)^+,$$

最佳实施边界 $\Gamma: S = S(t)$ 在这两个区域中间.

对于美式看跌期权的定价, 就是要在 Σ_1 中寻找函数对 $\{V(S, t), S(t)\}$, 使得它适合定解问题:

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (\Sigma_1) \\ V(S(t), t) = K - S(t), \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S(t), t) = -1. \end{cases}$$

由于 $S(t)$ 是自由边界, 所以这是一个抛物型方程的自由边界问题.

(2) 美式看跌期权定价问题是一个最优停止问题:

$$V(t, x) = \max_{\tau \in \Gamma_{t,x}} \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(\tau-t)}(K - S(\tau)) \mid S(t) = x].$$

由变分不等式跟最优停时的关系^[4]，得美式看跌期权定价的变分不等式问题模型为：

求 $V(S, t) \in C_{\Sigma}^1$ ，使得

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V, V - (K - S)^+\} = 0, & (\Sigma) \\ V(S, T) = (K - S)^+, & (0 \leq S < \infty) \\ V \rightarrow 0. & (S \rightarrow \infty) \end{cases}$$

其中

$$\Sigma = \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}.$$

(3) 美式期权定价问题可以转化为一个依赖于时间的线性互补问题^[5]：

$$\begin{cases} V(S, t) \geq (K - S)^+, \\ rV - \frac{\partial V}{\partial t} - (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \geq 0, \quad t \in [0, T], S \geq 0, \\ (V(S, t) - (K - S)^+) \left(rV - \frac{\partial V}{\partial t} - (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = 0. \end{cases}$$

1.2.3 美式期权价格的各种性质

首先考虑永久美式期权。永久美式期权是没有终止期的美式期权。

(1) 不考虑红利情况的永久美式看跌期权价格 $V(S)$ 满足如下定解问题

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + rS \frac{dV}{dS} - rV = 0, & (S_0 < S < \infty) \\ V(S_0) = K - S_0, \\ V(\infty) = 0. \end{cases}$$

上述问题是二阶常微分方程边值问题，用下面的方法求解^[6]：

令 $V = S^\alpha$ ，得 α 满足方程

$$\frac{\sigma^2}{2} \alpha^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \alpha - r = 0.$$

求得

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\frac{2r}{\sigma^2}.$$

从而

$$V(S) = AS + BS \frac{2r}{\sigma^2}.$$

由边界条件得

$$A = 0, B = S_0 \frac{2r}{\sigma^2} (K - S_0),$$

从而上述问题的解为

$$V(S; S_0) = \left(\frac{S_0}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} (K - S_0),$$

这个解依赖于 S_0 .

下面求最佳实施边界 $S = S_0^*$. 即求 $S = S_0^*$, 使得

$$V(S; S_0^*) = \max_{0 \leq S_0 \leq K} V(S; S_0) = \max_{0 \leq S_0 \leq K} \left(\frac{S_0}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} (K - S_0).$$

令 $F(S_0) = \left(\frac{S_0}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} (K - S_0)$, 由

$$\frac{dF}{dS_0} = \left(\frac{S_0}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left[\frac{2rK}{\sigma^2 S_0} - \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \right] = 0,$$

得

$$S_0^* = \frac{K}{1 + \sigma^2 / (2r)}.$$

(2) 支付红利情形下, 若红利率 q 与时间无关, 则永久美式看跌期权的数学模型为:

求 $\{V(S), S_0\}$, 使得

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + (r - q) S \frac{dV}{dS} - rV = 0, & (S_0 < S < \infty) \\ V(S_0) = K - S_0, \\ V'(S_0) = -1, \\ V(\infty) = 0. \end{cases}$$

令 $V = S^\alpha$, 得 α 满足方程

$$\frac{\sigma^2}{2} \alpha^2 + (r - q - \frac{\sigma^2}{2}) \alpha - r = 0,$$

求得

$$\alpha_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 + \frac{2r}{\sigma^2}},$$

其中

$$\omega = \frac{-r + q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}.$$

从而 $V(S) = AS^{\alpha_+} + BS^{\alpha_-}$.

由边界条件, 求出

$$A = 0, B = -\frac{1}{\alpha_-} \left(\frac{K}{1-1/\alpha_-} \right)^{1-\alpha_-},$$

$$S_0 = \frac{K}{1-1/\alpha_-}. \quad (1-9)$$

从而得

$$V = -\frac{1}{\alpha_-} \left(\frac{K}{1-1/\alpha_-} \right)^{1-\alpha_-} S^{\alpha_-}.$$

下面对美式期权的最佳实施边界 $S = S(t)$ 作定性的分析, 包括 $S(T)$ 的位置, $S(t)$ 的单调性, $S(t)$ 的上下界等. 讨论这些性质将有助于对美式期权定价问题进行数值求解.

定理 1.1^[3] 设 $\Gamma: \{S = S(t), (0 \leq t \leq T)\}$ 是支付红利的美式期权的最佳实施边界, 则

$$S(T) = \begin{cases} \min \left\{ K, \frac{rK}{q} \right\}, & (\text{看跌期权}) \\ \max \left\{ K, \frac{rK}{q} \right\}. & (\text{看涨期权}) \end{cases}$$

定理 1.2^[3] 设 $\Gamma: \{S = S(t), (0 \leq t \leq T)\}$ 是美式期权的最佳实施边界, 则

$$\begin{cases} S_p(t) \text{ 单调非减,} & (\text{看跌期权}) \\ S_c(t) \text{ 单调非增.} & (\text{看涨期权}) \end{cases}$$

且对看跌期权有估计:

$$S_{p,\infty} \leq S_p(t) \leq \min \left\{ K, \frac{rK}{q} \right\},$$

对看涨期权有估计:

$$\max \left\{ K, \frac{rK}{q} \right\} \leq S_c(t) \leq S_{c,\infty}.$$

这里 $S_{p,\infty}$ 与 $S_{c,\infty}$ 分别是相应的永久美式看跌期权与看涨期权的最佳实施边界. $S_{p,\infty}$ 见式子(1-9), $S_{c,\infty}$ 可由 $S_{p,\infty}$ 根据式子(1-8)得到.

美式看跌期权跟美式看涨期权的最佳实施边界的图像如下:

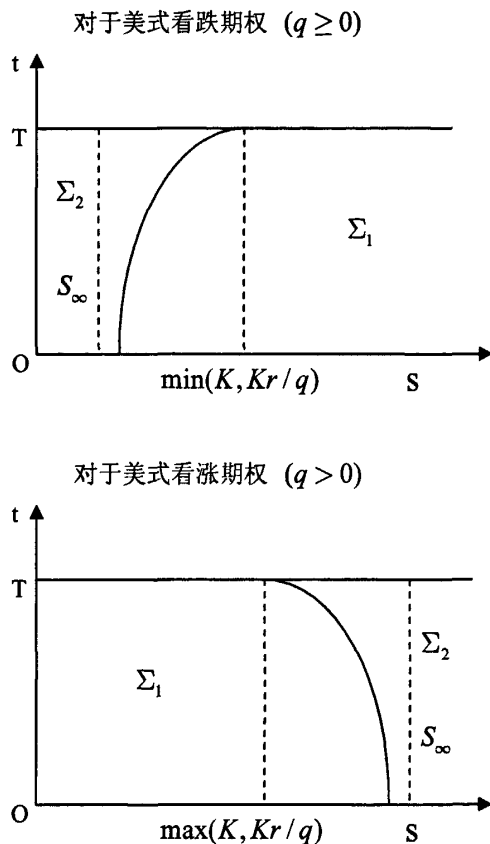


图 1-1 美式期权的最佳实施边界

Fig1-1 The optimal exercising boundary of American options

1.3 美式期权定价问题数值解的研究现状

用于求解美式期权定价问题的数值方法主要有:

(1) 二叉树方法由 Cox、Ross 和 Rubinstein(1979)^[7]在著名的 CRR 模型中引入, 随后扩展出三叉树方法以及切片法.

(2) 有限差分方法是把微分方程转化为差分方程, 再用迭代法求解这些差分方程. Brennan 和 Schwartz(1977)^[8]将有限差分法应用到美式期权定价中. Jaillet、Lamberton 和 Lapeyre(1990)^[9]基于变分不等式框架研究了 Brennan-Schwartz 算法.

(3) Monte Carlo 模拟方法是利用随机数对许多不同的路径进行抽样. 最早使用其对期权定价的是 Boyle(1977)^[10]. Grant、Vora 和 Week(1997)^[11]将动态规划思想融入 Monte Carlo 方法中. Longstaff 和 Schwarts(2001)^[12]提出最小二乘蒙特卡罗(LSM)模拟法能很好的为美式期权定价.

美式期权定价问题可以写成多种形式, 然后再求解. 具体采用何种形式, 取决于拟选取的方法. 下面回顾一下与本课题相关的最新研究进展情况:

(1) 美式期权的定价问题是一个自由边界问题

李莉英、金朝嵩(2005)^[13]用快速傅里叶变换加龙格-库塔法对美式看跌期权进行计算. Chung-ki Cho、Sunbu Kang、Taekkeun Kim和Yonghoon Kwon(2006)^[14]使用参数估计法, 获得了美式看涨期权的最佳执行曲线及价格. 吴强(2006)^[15]对解的性质进行了研究, 引入人工边界, 使得求解区域变小, 数值求解速度加快. Jichao Zhao、Matt Davison和Robert M(2007)^[16]发展了三种紧有限差分法. Tangman、Gopaul和Bhuruth(2008)^[17, 18]用有限差分高阶紧格式求解方程.

(2) 美式期权定价问题可以转化为一个依赖于时间的线性补问题

Huang 和 Pang(1998)^[19]给出了离散线性补问题的格式, 并给出了美式期权定价的 PSOR 方法, Lemke 算法和 PPP 算法. Koulisianis 和 Papatheodorou (2000)^[20]提出了自由指数(MI)方法. 张超(2005)^[21]用线性补问题的连续性算法来研究美式期权定价. Ikonen 和 Toivanen (2007)^[22]对方程用中心差分进行空间离散, 对时间用两步向后差分的 C-N 格式离散, 然后数值求解. Stilianos 和 Markolefas(2008)^[23]用半离散 Galerkin 公式逼近偏微分方程, 与高阶 Lagrang 有限元结合, 得到一个好的数值方法.

(3) 美式期权定价问题可以转化为一个变分不等式问题

Jaillet、Lamberton 和 Lapeyre(1990)^[9]研究了基于变分不等式的美式期权定价函数的正则性质, 给出了计算美式看跌期权的 Brennan-Schwartz 算法. Dempster 和 Hutton(1997)^[24]用线性规划方法研究了美式期权定价. 张铁等(2002)^[25]建立了半离散和全离散有限元逼近格式, 并给出了有限元解的收敛性和稳定性分析. Zhang、Yang 和 Teo(2006)^[26]用有限元法进行离散, 用 ALM 方法进行数值求解. Kwon 和 Friesz(2008)^[27]把变分不等式问题转化为极值问题, 然后用梯度投影方法进行求解. V.P. Israel, M.A. Rincon(2008)^[28]把远空间用正则化方法映射到一个简单的空间上, 然后用有限元法和有限差分法进行求解.

(4) 对原问题进行变换得到美式期权价格满足的积分方程

MacMillan(1986)^[29]、Barone-Adesi和Whaley(1987)^[30]给出了美式期权价格的积分表示. Broadie和 Detemple(1996)^[31]从这一基本思想出发点提出了基于美式期权价格的上下边界的数值逼近方法. Panini和Srivastav(2004)^[32]运用Mellin积分变换方法,得到期权价格的积分方程和自由边界的积分方程,并运用数值方法进行求解. Liu yaping和Lu tao(2004)^[33]应用Laplace变换获得了支付连续红利的美式看涨期权的积分表示,以及最优执行边界满足的一个非线性的第二类Volterra积分方程,用数值积分公式得到了积分方程的数值解.

(5) 由美式期权的分解定理出发进行求解

Jacka(1991)^[34]和Carr、Jarrow和Myneni(1992)^[35]推出了美式看跌期权价格可以分解为欧式看跌期权价格和由于合约提前实施条款而需要增付的期权金. 梁嘉文(2006)^[36]把加法模型方法与美式期权定价分解公式相结合得到美式期权价格的近似值. Hans-Peter Bermin、Arturo Kohatsu-Higa和Josep Perello(2005)^[37]从提前执行所付的保证金出发进行定价.

(6) 通过引入惩罚函数法解决美式期权定价问题

Zvan等(1998)^[38]通过在离散方程中引入一项,把惩罚函数法引入到美式期权定价中. Nielsen等(2002)^[39]补充了上面的工作,在连续方程中引入惩罚项,给出了数值格式. Khaliq、Voss和Kazmi(2006)^[40]在原方程中引入一个小的连续惩罚项用惩罚方法逼近自由边界. Khaliq、Voss和Kazmi(2008)^[41]发展了适应 θ -方法来解决美式期权定价问题. 一般的方法需要每步进行牛顿迭代,适应 θ -方法避免了这个缺陷.

第二章 美式期权定价问题的紧差分方法

美式期权定价问题的数学模型一般可归结为抛物型方程自由边界问题。本章即对自由边界问题进行变换，转换为抛物型初边值问题，然后进行有限差分，从而数值求解。最后进行数值实验，并与二叉树、PSOR、有限元等数值方法进行比较，证明本章算法是一个非常高效和收敛的算法。

2.1 自由边界问题及变换

美式看跌期权的价格 $V = V(t, S)$ 满足以下抛物型方程自由边界问题

$$\begin{cases} V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r-q)SV_S - rV = 0, & S \in [S^*(t), \infty), t \in (0, T], \\ V(S, T) = \max(K - S, 0), & S \in [S^*(T), \infty), \\ V(S^*(t), t) = K - S^*(t), & V_S(S^*(t), t) = -1, t \in (0, T], \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0. \end{cases} \quad (2-1)$$

这里， $S^*(t)$ 是未知的自由边界，它是 t 的单调增函数，在执行日有

$$S^*(T) = \min\left(K, \frac{rK}{q}\right).$$

下面对问题(2-1)进行变换，将变系数方程化为常系数方程，将反向时间问题化为正向时间问题。引入变量变换

$$\begin{cases} \tau = \sigma^2(T-t)/2, \\ x = \ln(S/K) + (k-1)\tau, & x^* = \ln(S^*/K) + (k-1)\tau, \\ u(x, \tau) = e^{k\tau}(V(S, t) + S - K)/K, \end{cases} \quad (2-2)$$

其中 $k = 2(r-q)/\sigma^2$, $k_1 = 2r/\sigma^2$ 。

在上述变换下，问题(2-1)转化为如下问题：

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + g(x, \tau), & x \in (x^*(\tau), \infty), \tau \in (0, T_1], \\ x^*(0) = \min(0, \ln(r/q)), \\ u(x, 0) = \max(e^x - 1, 0), & x \in [x^*(0), \infty), \\ u(x^*(\tau), \tau) = 0, & u_x(x^*(\tau), \tau) = 0, \tau \in (0, T_1], \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} u(x, \tau) = e^{k\tau}(e^{x-(k-1)\tau} - 1), & \tau \in (0, T_1], \end{cases} \quad (2-3)$$

其中 $g(x, \tau) = e^{k\tau}((k_1 - k)e^{x-(k-1)\tau} - k_1)$, $T_1 = \sigma^2 T / 2$ 。

2.2 紧差分方法

紧差分方法能快速精确的求解偏微分方程. 下面介绍如何应用紧差分方法求解美式看跌期权定价问题.

为了便于构造数值方法, 需将上述问题限制在有界区域 $[-a, a]$ 上. 剖分空间区域 $[-a, a]: -a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = a$, 空间剖分步长 $h = x_n - x_{n-1} = 2a/(N+1)$, 再剖分时间区域 $[0, T_1]: 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = T_1$, 时间剖分步长 $\Delta\tau = \tau_m - \tau_{m-1} = T_1/M$.

简记 $u_n = u(x_n, \tau)$, $u_n'' = u''(x_n, \tau)$, $g_n = g(x_n)$, $u_i^j = u(x_n, \tau_m)$, $(u''_n)^m = u''(x_n, \tau_m)$.

在 τ 时刻有:

$$10u_1'' + u_2'' = \frac{1}{12h^2}(99u_0 - 134u_1 - 70u_2 + 156u_3 - 61u_4 + 10u_5),$$

$$u_{i-1}'' + 10u_i'' + u_{i+1}'' = \frac{12}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$u_{N-1}'' + 10u_N'' = \frac{1}{12h^2}(99u_{N+1} - 134u_N - 70u_{N-1} + 156u_{N-2} - 61u_{N-3} + 10u_{N-4}).$$

精度为 $O(h^4)$, 写成矩阵形式为

$$AU''(\tau) = MU(\tau) + H(\tau), \quad (2-4)$$

其中 $A = (a_{i,j})$, M 均为 $N \times N$ 的矩阵, H, U'', U 为 N 维向量,

$$a_{i,i} = 10, a_{i,i\pm 1} = 1, i = 1, \dots, N, U'' = (u_1'', u_2'', \dots, u_N'')^T, U = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T.$$

$$M = \frac{12}{h^2} \begin{pmatrix} \frac{-134}{144} & \frac{-70}{144} & \frac{156}{144} & \frac{-61}{144} & \frac{10}{144} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{10}{144} & \frac{-61}{144} & \frac{156}{144} & \frac{-70}{144} & \frac{-134}{144} \end{pmatrix}, H = \frac{1}{12h^2} \begin{pmatrix} 99u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 99u_{N+1} \end{pmatrix}.$$

问题(2-3)中 $u_\tau = u_{xx} + g(x, \tau)$ 的差分近似为

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}((u''_n)^{m+1} + g_n^{m+1}) + \frac{1}{2}((u''_n)^m + g_n^m). \quad (2-5)$$

写成矩阵形式为

$$U^{m+1} - U^m = \frac{1}{2} \Delta\tau((U'')^{m+1} + G^{m+1} + (U'')^m + G^m). \quad (2-6)$$

其中 $G = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$.

式子(2-4)中取时间层为 $m+1$ 层时, 有

$$A(U'')^{m+1} = MU^{m+1} + H^{m+1}, \quad (2-7)$$

取时间层为 m 层时, 有

$$A(U'')^m = MU^m + H^m. \quad (2-8)$$

式子(2-6)两边同时左乘矩阵 A , 再把(2-7), (2-8)代入, 合并同类项得

$$(A - \frac{1}{2}\Delta\tau M)U^{m+1} = (A + \frac{1}{2}\Delta\tau M)U^m + \frac{1}{2}\Delta\tau(H^{m+1} + AG^{m+1} + H^m + AG^m). \quad (2-9)$$

为简化表达式, 记

$$\begin{aligned} B &= A - \frac{1}{2}\Delta\tau M, \\ f^m &= (A + \frac{1}{2}\Delta\tau M)U^m + \frac{1}{2}\Delta\tau(H^{m+1} + AG^{m+1} + H^m + AG^m), \end{aligned} \quad (2-10)$$

我们得到线性方程组

$$BU^{m+1} = f^m. \quad (2-11)$$

2.3 稳定性分析

能否用上述差分格式计算美式期权价格, 需要考虑差分格式的稳定性.

(2-9)的齐次格式写为

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{6\Delta\tau}{h^2})u_{n-1}^{m+1} + (10 + \frac{12\Delta\tau}{h^2})u_n^{m+1} + (1 - \frac{6\Delta\tau}{h^2})u_{n+1}^{m+1} \\ &= (1 + \frac{6\Delta\tau}{h^2})u_{n-1}^m + (10 - \frac{12\Delta\tau}{h^2})u_n^m + (1 + \frac{6\Delta\tau}{h^2})u_{n+1}^m \end{aligned} \quad (2-12)$$

在结点 (n, m) 上(2-12)的近似解 \tilde{u}_n^m 与理论解 u_n^m 的差 V_n^m 满足

$$\begin{cases} (1 - \frac{6\Delta\tau}{h^2})V_{n-1}^{m+1} + (10 + \frac{12\Delta\tau}{h^2})V_n^{m+1} + (1 - \frac{6\Delta\tau}{h^2})V_{n+1}^{m+1} \\ = (1 + \frac{6\Delta\tau}{h^2})V_{n-1}^m + (10 - \frac{12\Delta\tau}{h^2})V_n^m + (1 + \frac{6\Delta\tau}{h^2})V_{n+1}^m & m = 0, 1, \dots, M-1 \\ V_n^0 \text{ 初始误差} & n = 1, \dots, N-1 \\ V_0^m = V_N^m = 0 & m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases}$$

利用 Fourier 分析方法, 令 $V_n^m = \xi^m e^{i\beta nh}$, 代入上式得:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{6\Delta\tau}{h^2}\right)\xi^{m+1}e^{i\beta(n-1)h} + \left(10 + \frac{12\Delta\tau}{h^2}\right)\xi^{m+1}e^{i\beta nh} + \left(1 - \frac{6\Delta\tau}{h^2}\right)\xi^{m+1}e^{i\beta(n+1)h} \\ &= \left(1 + \frac{6\Delta\tau}{h^2}\right)\xi^m e^{i\beta(n-1)h} + \left(10 - \frac{12\Delta\tau}{h^2}\right)\xi^m e^{i\beta nh} + \left(1 + \frac{6\Delta\tau}{h^2}\right)\xi^m e^{i\beta(n+1)h} \end{aligned}$$

上式两边同除以 $e^{i\beta nh}$ ，并化简得

$$\xi^{m+1} = \frac{10 + 2\cos\beta h + \frac{12\Delta\tau}{h^2}(\cos\beta h - 1)}{10 + 2\cos\beta h + \frac{12\Delta\tau}{h^2}(1 - \cos\beta h)} \xi^m.$$

令

$$p = 10 + 2\cos\beta h, q = \frac{12\Delta\tau}{h^2}(1 - \cos\beta h),$$

显然

$$p \geq 0, q \geq 0, |p - q| \leq |p + q|,$$

所以增长因子

$$G(\beta, \Delta\tau, h^2) = \frac{p - q}{p + q},$$

故对于任意 $\Delta\tau, h$ 有

$$|G(\beta, \Delta\tau, h^2)| \leq 1,$$

从而齐次格式为无条件稳定的。又因为低阶项对差分格式的稳定性没有影响^[42]，所以格式(2-5)无条件稳定。

2.4 算法

考虑线性方程组(2-11)的求解。为简化表述，下面用*代表矩阵 B 的非零元素。

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & * & * & * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & 0 & * & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & * & * & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

由于 B 不是三对角矩阵，不能直接使用追赶法求解，这里我们用求解线性方程组的

高斯消元法的思想进行求解. 与追赶法类似, 也是先“追”再“赶”. 计算量与追赶法差不多. 首先用矩阵 B 的第 2 行, 第 3 行, 第 4 行对第 1 行做变换, 再用第 1 行对第 4 行和第 5 行做变换, 然后对第 6 行到倒数第 2 行用其上面的那一行做变换, 最后用倒数第 5, 4, 3, 2 行对最后一行做变换, 变成了上面形式的矩阵, 在变换的同时 f^m 也跟着变换, 至此就可以从最后一行倒推, 在第 5 行和第 4 行之间插入第 1 行, 这样就得到线性方程组的所有解.

紧差分法求解美式看跌期权定价问题的主要步骤如下:

Step 1 由(2-3)中的条件, 计算 $U^0, x^*(0)$;

Step 2 对 $m = 0, 1, \dots, M-1$ 循环执行 Step 3 到 Step 5;

Step 3 由(2-3)中的边界条件及(2-10), 求得 f^m ;

Step 4 求解线性方程组(2-11), 得 U^{m+1} 的值;

Step 5 更新 U^{m+1} 的值并确定 $x^*(m+1)$:

找到 $U_n^{m+1} \leq 0, U_{n+1}^{m+1} > 0$, 重新赋值 $U_k^{m+1} = 0, k = 1, \dots, n$. 若 $U_n^{m+1} = 0$, 则

$x^*(m+1) = x_n$, 否则用 (x_n, U_n^{m+1}) 和 (x_{n+1}, U_{n+1}^{m+1}) 的线性插值近似 $x^*(m+1)$;

Step 6 求美式看跌期权价格 S 及最佳执行边界 S^* :

求出 $x_n, x^*(m), U^m$ 后, 利用变换(2-2)即可求出 $t_m = T - 2m\Delta\tau / \sigma^2$ 时刻与标的

资产价格 $S_n = K \exp(x_n - (k-1)m\Delta\tau)$ 相应的美式看跌期权价格为:

$$V(S_n, t_m) = K(1 - \exp(x_n - (k-1)m\Delta\tau)) + U_n^m \exp(-k_1 m\Delta\tau),$$

最佳执行边界为: $S^*(m) = K \exp(x^*(m) - (k-1)m\Delta\tau), m = 0, 1, \dots, M$.

2.5 数值实验

考虑美式看跌期权的定价, 设期权执行价 $K = 100$.

表 2-1 给出了差分网格 (M, N) 取为(300,300)时, 在不同参数下本章方法(JCF)与二叉树方法^[43](BIN), PSOR 方法^[44]及有限元法^[28](FE)分别求得的期权价格. 可以看出算法结果与经典算法的结果非常接近, 精确度很高.

表 2-2 给出了期权参数为 $r=0.07$, $\sigma=0.40$, $q=0.03$, $T=1$ 时, 随差分网格 (M, N) 的变化, 期权价格的变化情况. 可以看出算法是收敛的, 而且差分网格越密集, 结果越精确.

表 2-1 不同参数不同方法下的美式看跌期权价格
Table2-1 A comparison between JCF, BIN, PSOR and FE

参数	S	T=1				T=6			
		JCF	BIN	PSOR	FE	JCF	BIN	PSOR	FE
$r=0.07$	80	24.0012	24.0073	24.0007	24.0029	32.2215	32.2402	32.2383	32.2357
$\sigma=0.40$	90	18.2742	18.2769	18.2666	18.2695	28.4427	28.4583	28.4551	28.4518
$q=0.03$	100	13.7854	13.7867	13.7744	13.7776	25.3023	25.3129	25.3124	25.3086
	110	10.3312	10.3338	10.3222	10.3252	22.6575	22.6726	22.6669	22.6628
	120	7.7014	7.7037	7.6991	7.7015	20.4016	20.4110	20.4117	20.4074
$r=0.02$	80	24.2094	24.2143	24.2075	24.2103	37.4654	37.4702	37.4658	37.4643
$\sigma=0.40$	90	17.7056	17.7152	17.7024	17.7087	33.3099	33.3164	33.3100	33.3079
$q=0.04$	100	12.5586	12.5653	12.5508	12.5587	29.6778	29.6752	29.6763	29.6740
	110	8.6810	8.6863	8.6782	8.6852	26.4959	26.4954	26.4955	26.4932
	120	5.8805	5.8809	5.8777	5.8822	23.7049	23.7047	23.7054	23.7033

表 2-2 不同网格差分下的美式看跌期权价格
Table2-2 Values of an American put option by different mesh sizes

S	(50,100)	(50,300)	(200,300)	(300,500)	(500,500)	(1000,1000)	BIN
80	23.9927	23.9865	23.9997	24.0031	24.0044	24.0059	24.0073
90	18.2735	18.2621	18.2730	18.2734	18.2744	18.2753	18.2769
100	13.7902	13.7755	13.7844	13.7843	13.7851	13.7876	13.7867
110	10.3401	10.3232	10.3304	10.3299	10.3306	10.3315	10.3338
120	7.7124	7.6951	7.7008	7.7001	7.7006	7.7022	7.7037

图 2-1 中左图给出了期权相关参数为 $K=100$, $r=0.07$, $q=0.03$, $T=1$, 差分网格为 $(300,300)$ 时, σ 变化下的最优执行边界, 右图为 $\sigma=0.4$ 时本章方法与有限元法求得最优执行边界的比较.

数值实验表明, 本章方法高效收敛, 能很好的求解美式期权定价问题.

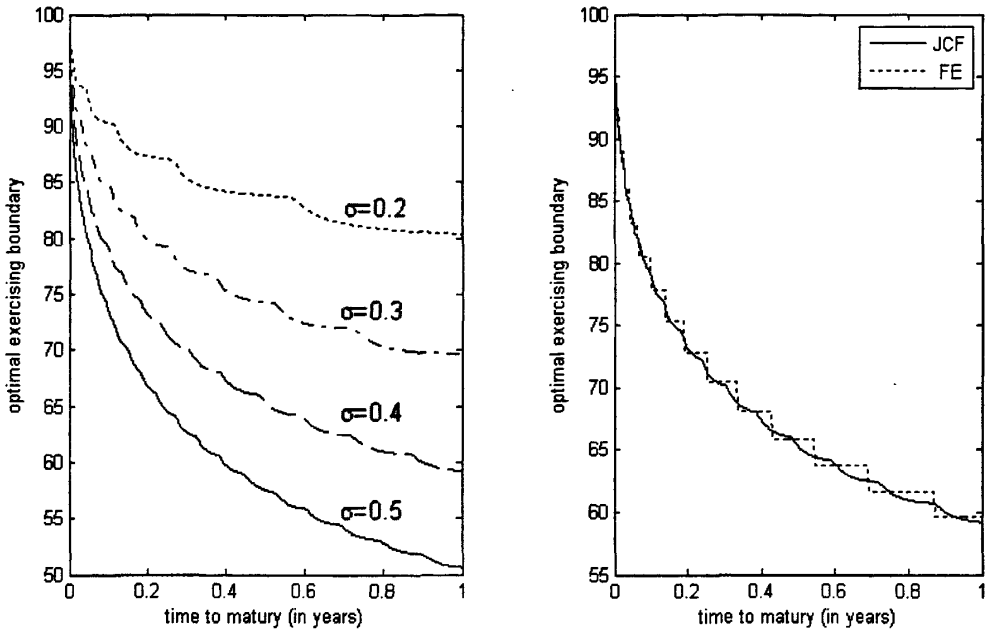


图 2-1 σ 变化下最优执行边界及 JCF, FE 方法下最优执行边界的对比

Fig2-1 The optimal exercising boundary by different paramers and a comparison between JCF and FE

第三章 美式期权定价问题的记忆梯度投影法

美式期权变分不等式问题等价于具有不等式约束和边界条件的最优化问题，本章我们即通过求解最优化问题来求解美式期权定价问题。对时间和空间进行离散，然后用记忆梯度投影方法进行求解。最后进行数值实验，并与二叉树、PSOR 数值方法进行比较，证明本章算法是一个非常高效和收敛的算法。

3.1 问题描述及变换

3.1.1 线性互补问题

美式看跌期权定价问题可以写成线性补问题(LCP):

$$\mathcal{L}_{BS}(P(S,t)) \cdot [P(S,t) - \Phi(S)] = 0, \quad (3-1)$$

$$P(S,t) - \Phi(S) \geq 0, \quad (3-2)$$

$$-\mathcal{L}_{BS}(P(S,t)) \geq 0 \quad (3-3)$$

边界条件为:

$$P(S,t) \geq \Phi(S),$$

$$P(S,T) = \Phi(S),$$

$$P(0,t) = K,$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S,t) = 0.$$

其中 \mathcal{L}_{BS} 表示Black-Scholes算子,

$$\mathcal{L}_{BS} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial}{\partial S} - r.$$

收益函数 $\Phi(S)$ 定义如下:

$$\Phi(S) \equiv \max(K - S, 0).$$

3.1.2 变分不等式问题

定义3.1 给定一非空集合 Ω 和一函数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则变分不等式问题 $VIP(F, \Omega)$ 为:

寻找向量 y 使得

$$\begin{aligned} y &\in \Omega \\ \langle F(y), x - y \rangle &\geq 0 \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示相应的内积.

定义函数集

$$\Omega = \{G(S, t) \mid G(S, t) - \Phi(S) \geq 0 \quad \forall S \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T]\},$$

选择 $U \in \Omega$, 使得

$$-\mathcal{L}_{BS}(P(S, t)) \cdot [U(S, t) - \Phi(S, t)] \geq 0 \quad \forall S \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T]. \quad (3-4)$$

由(3-1)得:

$$-\mathcal{L}_{BS}(P(S, t)) \cdot [P(S, t) - \Phi(S)] = 0. \quad (3-5)$$

(3-5)减(3-4), 得

$$-\mathcal{L}_{BS}(P(S, t)) \cdot [U(S, t) - P(S, t)] \geq 0 \quad \forall S \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T], \quad (3-6)$$

等价于:

$$\int_0^\infty -\mathcal{L}_{BS}(P(S, t)) \cdot [U(S, t) - P(S, t)] dS \geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (3-7)$$

这即是美式看跌期权的变分不等式. 注意到 Ω 是一个非空的均方可积空间, 对任意给定的瞬时时间 $t \in [0, T]$, 相应范数定义为:

$$\langle u(S, t), v(S, t) \rangle = \int_0^\infty [u(S, t) \cdot v(S, t)] dS.$$

3.1.3 log 变换

做变换:

$$\begin{aligned} y &\equiv \log S \\ \tau &\equiv T - t \\ u(y, \tau) &\equiv P(S, t), \end{aligned}$$

则(3-3)变为:

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\partial u}{\partial y} - ru \leq 0. \quad (3-8)$$

定义算子

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\partial}{\partial y} - r,$$

收益函数: $\phi(y) = \max(K - e^y, 0)$, 我们得到变分不等式问题.

变分不等式问题为: 寻找 $u \in \Omega$, 对每一个瞬时时间 $\tau \in [0, T]$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u)[v-u]dy \geq 0 \quad \forall v \in \Omega \quad (3-9)$$

其中

$$\Omega = \{v: v - \phi \geq 0, v(y, 0) = \phi(y), v(-\infty, \tau) = \phi(-\infty), v(\infty, \tau) = \phi(\infty)\}. \quad (3-10)$$

记: $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

3.2 变分不等式问题的有限差分近似及等价极值问题

对问题

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u)[v-u]dy \geq 0 \quad \forall v \in \Omega, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3-11)$$

我们用 $[y_L, y_U]$ 近似代替空间 y 区域 $(-\infty, \infty)$, 并把此区间离散为 M 个子区间, 使得

$$y_i = y_L + i\Delta y, \quad i = 0, \dots, M$$

$$\Delta y = \frac{y_U - y_L}{M}$$

把时间区域离散为 L 个子区间, 使得

$$\tau_j = j\Delta \tau, \quad j = 0, \dots, L$$

$$\Delta \tau = \frac{T}{L}$$

则(3-11)近似为

$$\sum_{i=0}^M \Psi(u_{i,j})[v_{i,j} - u_{i,j}] \geq 0 \quad \forall v \in \Omega, \quad \forall j \in \{0, \dots, L\} \quad (3-12)$$

其中 $u_{i,j} = u(y_i, \tau_j)$. 有限差分近似是否稳定取决于网格 Δy 和 $\Delta \tau$ 的大小. 当有限差分近似不稳定时, 序列 $u_{i,j}$ 无界, 格式不收敛. 这主要是由舍入误差的积累导致的. 通过对有限差分近似稳定性的讨论, 当 $\Delta \tau / (\Delta y)^2$ 有界时, 格式才稳定.

$j=0$ 时, $\tau=0$, (3-12)有解: $u_{i,0} = \phi_i = \phi(y_i)$. 从这个解出发, 我们逐步求解(3-12).

考虑下述逼近:

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial \tau} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \tau}$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \theta \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta y} \right) + (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \approx \theta \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} \right) + (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{(\Delta y)^2} \right)$$

其中：当 $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ 时，分别对应显式格式，C-N 格式和隐式格式。

$$\begin{aligned} \Psi(u_{i,j}; u_{i,j-1}) \approx & \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \theta \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta y)^2} \right) \right. \\ & \left. + (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] \\ & - \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left[\theta \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta y} \right) + (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \end{aligned}$$

其中， $\Psi(u_{i,j}; u_{i,j-1})$ 是对任意 i 和 j ，当 $u_{i,j-1}$ 给定时，算子 $\Psi(\cdot)$ 在 $u_{i,j}$ 的近似。

考虑极值问题：

$$\min J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^u \Psi(v) dv dy \quad s.t. \quad u \in \Omega \quad (3-13)$$

定理3.1^[27] 极值问题(3-13)的任一解是变分不等式(3-9)的解。

定理3.2^[27] 泛函 $J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^u \Psi(v) dv dy$ 是处处G-可微的，且 $\frac{\partial J(u)}{\partial u} = \Psi(u)$ 。

3.3 记忆梯度投影方法

考虑问题(P)： $\min_{x \in \Omega} f(x)$ ，其中 $\Omega \subseteq R^n$ 是非空闭凸集， $f(x): R^n \rightarrow R$ 是 Ω 上的一阶连续可微函数。

Calamai P.H. 等^[45]提出了求解问题(P)的一般性Goldstein-Lavitin-Polyak梯度投影算法。Goldstein-Lavitin-Polyak梯度投影算法的迭代公式为：

$$x_{k+1} = P(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)), \quad k = 1, 2, \dots$$

其中投影算子 $P(\cdot): R^n \rightarrow \Omega$ 定义为： $P(x) = \arg \min \{ \|z - x\|_2 : z \in \Omega \}$ 。步长 α_k 满足广义Armijo步长搜索。

记忆梯度法在迭代中较多的利用了已经得到的目标函数的某些信息，因而在求解过程中具有较快的收敛速度，将此方法用于求解约束优化问题，能改善现有梯度投影算法的收敛速度。

记忆梯度投影算法如下^[46]:

Step 1 $\forall x \in \Omega$, 取 $s > 1 + \sqrt{2}$, 令 $k = 1$, $d_0 = 0$, $\beta_0 = 0$;

Step 2 令 $d_k = -\nabla(f(x_k)) + \beta_k d_{k-1}$;

其中: $\beta_k \in I_k$, $I_k = [-\varepsilon(x_k)/(s\sigma_k^2 \|g_k\| \cdot \|d_{k-1}\|), (\varepsilon(x_k)/s\sigma_k^2 \|g_k\| \cdot \|d_{k-1}\|)]$

$$\varepsilon(x) = \|\bar{x}(1) - x\|^2 / (1 + \|\bar{x}(1) - x\|^2), \quad \bar{x}(\alpha) = P(x + \alpha(-\nabla f(x)));$$

Step 3 取 $x_{k+1} = P(x_k + \alpha_k d_k)$, 其中 α_k 是步长.

结合共轭梯度算法与拟-Newton 方程, 得结合拟-Newton 方程的参数 $\beta_k^{Q-Newton}$ 的取法为

$$\beta_k^{Q-Newton} = \frac{g_k^T y_{k-1} - g_k^T s_{k-1}}{d_{k-1}^T y_{k-1}},$$

其中 $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$, $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$. 结合以上参数, 可选取参数 β_k 为:

$$\beta_k = \arg \min \left\{ \left| \beta - \beta_k^{Q-Newton} \right| : \beta \in I_k \right\}.$$

3.4 算法

经过上面的讨论, 得算法为下面形式:

Step 1 计算初始值: $u_{i,0} = \phi_i = \phi(y_i)$. 令 $j = 1$;

Step 2 解变分不等式: $\sum_{i=0}^M \Psi(u_{i,j}; u_{i,j-1}) [v_{i,j} - u_{i,j}] \geq 0, \quad \forall v_{i,j} \in \Omega$;

Step 2.1 初始化: 令 $s > 1 + \sqrt{2}$, $k = 1$, $d_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $u_{i,j}^1 = u_{i,j-1}$;

Step 2.2 计算梯度:

$$\begin{aligned} \Psi(u_{i,j}^k; u_{i,j-1}) &\approx \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}}{\Delta\tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \theta \left[\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta y)^2} \right] \\ &\quad + (1 - \theta) \left[\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ &\quad - \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left[\theta \left(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta y} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \end{aligned}$$

Step 2.3 令 $d_k = -\nabla(f(x_k)) + \beta_k d_{k-1}$; 记: $(\Psi(u_{i,j}^k; u_{i,j-1}) \triangleq \nabla(f(x_k)), u_{i,j}^k \triangleq x_k)$

其中: $\beta_k \in I_k, I_k = [-\varepsilon(x_k)/(s\sigma_k^2 \|g_k\| \cdot \|d_{k-1}\|), (\varepsilon(x_k)/s\sigma_k^2 \|g_k\| \cdot \|d_{k-1}\|)]$

$\varepsilon(x) = \|\bar{x}(1) - x\|^2 / (1 + \|\bar{x}(1) - x\|^2), \bar{x}(\alpha) = P(x + \alpha(-\nabla f(x)))$

$$\beta_k^{Q-Newton} = \frac{g_k^T y_{k-1} - g_k^T s_{k-1}}{d_{k-1}^T y_{k-1}}, \beta_k = \arg \min \{ |\beta - \beta_k^{Q-Newton}| : \beta \in I_k \}$$

Step 2.4 取 $x_{k+1} = P(x_k + \alpha_k d_k) = \max(\phi, x_k + \alpha_k d_k)$, 其中 α_k 是步长;

Step 2.5 终止测试

若满足终止准则, 则 $u^*(y, \tau) \approx u^{k+1}(y, \tau)$. 否, 令 $k = k + 1$, 转 Step 2.2;

Step 3 令 $j = j + 1$, 转 Step 2, 直到 $j = L$ 结束.

3.5 数值实验

本章考虑美式看涨期权定价, 设期权执行价格为 $K = 100$. 取 $y_L = -6.5, y_U = 6.5$.

表 3-1 给出了期权参数为 $r = 0.03, \sigma = 0.20, q = 0.07, T = 1$ 时, 随差分网格 (M, N) 的变化, 期权价格的变化情况. 可以看出算法是收敛的, 而且差分网格越密集, 结果越精确.

表 3-2 给出了在本章方法(MGP)与二叉树方法^[43](BIN)及 PSOR 方法^[44]下分别求得的美式看涨期权价格. 可以看出算法结果与经典算法的结果非常接近, 精确度很高, 说明本章算法可以用来求解美式期权定价问题.

表 3-1 不同网格差分下的美式看涨期权价格

S	(50,300)	(100,300)	(200,500)	(300,1000)	(500,1500)	BIN
70	0.1483	0.1483	0.1475	0.1458	0.1456	0.1453
80	0.7849	0.7849	0.7834	0.7799	0.7805	0.7803
90	2.6063	2.6062	2.5977	2.6040	2.6046	2.6051
100	6.3148	6.3147	6.2887	6.2955	6.2956	6.2937
110	12.2306	12.2306	12.1854	12.1864	12.1843	12.1838
120	20.2831	20.2831	20.2304	20.2348	20.2333	20.2308

表 3-2 不同方法下的美式看涨期权价格

Table3-2 A comparison between MGP, BIN and PSOR

		T=0.5			T=3		
参数	S	MGP	BIN	PSOR	MGP	BIN	PSOR
$r=0.03$	70	0.0142	0.0139	0.0142	1.0705	1.0699	1.0702
$\sigma=0.20$	80	0.2200	0.2191	0.2199	2.5811	2.5799	2.5793
$q=0.07$	90	1.3869	1.3867	1.3863	5.1608	5.1673	5.1659
	100	4.7842	4.7819	4.7775	9.0615	9.0645	9.0627
	110	11.1024	11.0983	11.0987	14.4453	14.4437	14.4435
	120	20.0020	20.0000	20.0025	21.4171	21.4137	21.4146

图 3-1 给出了 $r=0.03$, $\sigma=0.20$, $q=0.07$ 时随资产价格变化和时间变化的美式看涨期权的价格。

图 3-2 给出了 $r=0.03$, $\sigma=0.20$, $q=0.07$, $T=0.5$ 时随资产价格变化的美式看涨期权的价格。

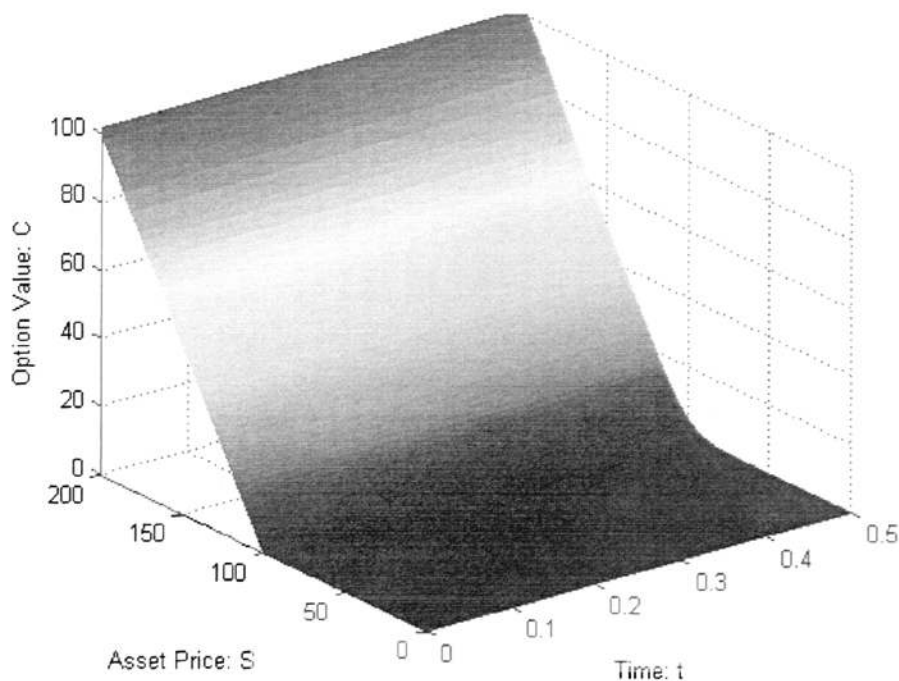
图 3-1 $K=100, r=0.03, \sigma=0.2, q=0.07$ 时美式看涨期权价格

Fig3-1 The result for an American call option

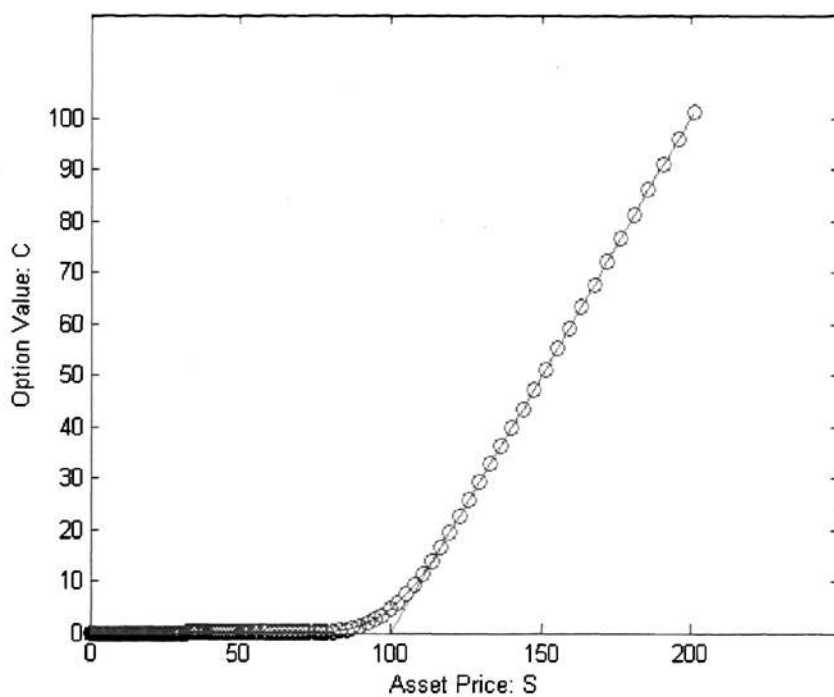


图 3-2 $T = 0.5, K = 100, r = 0.03, \sigma = 0.2, q = 0.07$ 时美式看涨期权价格

Fig3-2 The result for an American call option

第四章 美式期权定价问题的有限元方法

本章从美式期权定价问题的线性互补问题出发进行数值求解. 首先把线性互补问题限制到有限区域上, 然后做变换, 再转换为变分不等式问题, 时间跟空间区域离散, 进行求解. 给出定理证明了离散之后的格式稳定. 最后进行数值实验, 并与二叉树、PSOR 数值方法进行比较, 证明本章算法是一个非常高效和收敛的算法.

4.1 问题描述及变换

4.1.1 线性互补问题

美式看跌期权的价格满足如下线性互补偏微分方程

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)(V - G(S)) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0, \quad V \geq G(S), \\ G(S) = \max(K - S, 0), \quad 0 \leq S < \infty, \quad 0 < t < T, \\ V(T, S) = G(S), \quad V(t, 0) = G(0), \quad V(t, S) = 0, \quad S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4-1)$$

用 $H^m(I)$ 表示通常的 Sobolev 空间, $\|\cdot\|_m$ 为相应范数, $H^0(I) = L_2(I)$. 空间上的范数与内积分别记为 $\|\cdot\|$ 和 (\cdot, \cdot) . 设 X 是一个 Banach 空间, $u(t): [0, T] \rightarrow X$ 表示 X -值函数, 定义空间

$$L_p(0, T; X) = \{u(t) : \|u\|_{L_p(X)} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

用 C 表示与剖分尺寸无关的常数, 在不同处代表不同的常量.

令 $\{\Omega_k\}$ 为一列增区域, 其中 $\Omega_k = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_{\mathbb{R}^n} < k\}$, $\partial\Omega_k = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_{\mathbb{R}^n} = k\}$,

且 $\mathbb{R}^n = \cup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, 对问题(4-1)进行正则化^[28], 将其限制到有限区域 Ω_k (k 足够大) 上得到

下述新问题

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_k}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial V_k}{\partial S} - rV_k\right)(V_k - G_k(S)) = 0, \\ \frac{\partial V_k}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_k}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial V_k}{\partial S} - rV_k \leq 0, \quad V_k \geq G_k(S), \\ G_k(S) = \max(K - S, 0), \quad 0 \leq S < \infty, \quad 0 < t < T, \\ V_k(T, S) = G_k(S), \quad V_k(t, 0) = G_k(0), \quad V_k(t, S) = 0, \quad S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4-2)$$

4.1.2 变换

对问题(4-2)作变换:

$$\begin{cases} S = Ke^x, \\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \\ V_k = Kv(x, \tau). \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_k}{\partial t}(x, \tau) &= \frac{\partial Kv}{\partial t}(x, \tau) = -\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau), \\ \frac{\partial V_k}{\partial S}(x, \tau) &= \frac{\partial Kv}{\partial S}(x, \tau) = K \frac{\partial \ln(S/K)}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) = e^{-x} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau), \\ \frac{\partial^2 V_k}{\partial S^2}(x, \tau) &= \frac{\partial}{\partial S}(e^{-x} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau)) = -\frac{e^{-2x}}{K} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) + \frac{e^{-2x}}{K} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau). \end{aligned}$$

则 $\frac{\partial V_k}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_k}{\partial S^2} + (r-q)S \frac{\partial V_k}{\partial S} - rV_k \leq 0$ 变为

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau) + (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)K \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) - rKv(x, \tau) \leq 0.$$

上式化简为

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau) + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) - k_1 v(x, \tau) \leq 0,$$

其中

$$k = \frac{2(r-q)}{\sigma^2}, k_1 = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

再令 $v(x, \tau) = u(x, \tau)e^{\alpha x + \beta \tau}$, 有

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{\partial (ue^{\alpha x + \beta \tau})}{\partial \tau}(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) + \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) = \frac{\partial (ue^{\alpha x + \beta \tau})}{\partial x}(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)) \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) + \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \end{aligned}$$

则 $-\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau) + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) - k_1 v(x, \tau) \leq 0$, 变为

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) + (k+2\alpha-1)\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) + (\alpha^2 + \alpha(k-1) - k_1 - \beta)u(x, \tau) \leq 0.$$

令 $\alpha = \frac{1-k}{2}$, $\beta = -\frac{(k-1)^2}{4} - k_1$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) \geq 0$$

股票价格不可能上升为无限大, 也不可能下降为 0, 所以限制变量 $x \in [x_0, x_f]$.

边界条件为:

$$u(x, 0) = \max(e^{-\alpha x} - e^{\bar{\alpha}x}, 0),$$

$$u(x_0, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x_0} - e^{\bar{\alpha}x_0}, 0),$$

$$u(x_f, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x_f} - e^{\bar{\alpha}x_f}, 0).$$

其中 $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(k+1)$.

令 $T_1 = \frac{1}{2}\sigma^2 T$, 得到问题(4-2)变换后的新问题为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} \geq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \geq g(x), (x, \tau) \in [x_0, x_f] \times [0, T_1], \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u - g(x)) = 0, (x, \tau) \in [x_0, x_f] \times [0, T_1], \\ u(x_0, \tau) = g(x_0, \tau), u(x_f, \tau) = g(x_f, \tau), \tau \in [0, T_1], \\ u(x, 0) = g(x, 0), x \in [x_0, x_f]. \end{cases} \quad (4-3)$$

其中 $g(x, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x} - e^{\bar{\alpha}x}, 0)$.

4.1.3 变分不等式问题

令 $v \in D(\Omega_k)$, 且 $v \geq g(x)$, 在(4-3)的第一个不等式中左右同乘以 v , 然后再左右同时在 Ω_k 上积分, 得

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial \tau} v dx + \int_{\Omega_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx \geq 0,$$

由 Green 定理, 得

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx = - \int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

从而有

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial \tau} v dx + \int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \geq 0.$$

定义 $a(u, v) = (u_x, v_x)$, 则问题(4-3)等价的变分不等式为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, v - u \right) + a(u, v - u) \geq 0. \quad (4-4)$$

4.2 全离散近似

剖分时间区域 $[0, T_1]$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = T_1$, $\tau_m - \tau_{m-1} = \Delta\tau = T_1/M$, 剖分空间区域 $[x_0, x_f]$: $x_0 < x_1 < \dots < x_N = x_f$, $x_n - x_{n-1} = \Delta h = (x_f - x_0)/N$, $n = 1, 2, \dots, N$, 记 $u(\cdot, m\Delta t) = u^m(\cdot)$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau_m} = \frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta\tau},$$

从而式子(4-4)变为

$$(u^m - u^{m-1}, v - u^m) + \Delta\tau a(u^m, v - u^m) \geq 0. \quad (4-5)$$

设 $\{\phi_0, \dots, \phi_{N-1}\}$ 为线性有限元空间的基函数, 则 u_h^m 表示为

$$u_h^m = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^m \phi_i(x).$$

显然有:

$$u_h^m(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j^m \phi_j(x_i) = \begin{cases} u_i^m & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

将式子(4-5)化为矩阵形式, 并进行化简得

$$BU^m \geq F^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (4-6)$$

其中

$$B = C + \Delta\tau A, \quad F^{m-1} = CU^{m-1},$$

$$C = (c_{i,j}), \quad c_{i,j} = (\phi_i, \phi_j), \quad A = (a_{i,j}), \quad a_{i,j} = (\partial\phi_i/\partial x, \partial\phi_j/\partial x).$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\frac{1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} c_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^2(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx = \frac{2h}{3}, \\ c_{i+1,i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}(x) \phi_i(x) dx = c_{i,i+1} = \frac{h}{6}, \\ a_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial\phi_i^2(x)}{\partial x} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial\phi_i^2(x)}{\partial x} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial\phi_i^2(x)}{\partial x} dx = \frac{2}{h}, \\ a_{i+1,i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial\phi_{i+1}(x)}{\partial x} \phi_i(x) dx = a_{i,i+1} = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

4.3 稳定性分析

定理 4.1 全离散格式(4-5)按范数 $\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}$ 是绝对稳定的.

$$\|u_h^m\|_a \leq \|u_h^0\|_a, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

证明 将(4-5)式写为

$$(u_h^m, u_h^m) + \Delta\tau a(u_h^m, u_h^m) \leq (u_h^m - u_h^{m-1}, v) + (u_h^{m-1}, u_h^m) + \Delta\tau a(u_h^m, v)$$

取 $v = \frac{1}{2}(u_h^m + u_h^{m-1})$, 利用柯西不等式得

$$\begin{aligned} \|u_h^m\|^2 + \Delta\tau \|u_h^m\|_a^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_h^m\|^2 - \frac{1}{2} \|u_h^{m-1}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_h^{m-1}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_h^m\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta\tau \|u_h^m\|_a^2 + \frac{1}{2} \Delta\tau \|u_h^m\|_a \|u_h^{m-1}\|_a \end{aligned}$$

化简即得

$$\|u_h^m\|_a \leq \|u_h^{m-1}\|_a, \quad \forall m, m = 1, 2, \dots, M.$$

定理得证. \square

4.4 算法

引进 R^{N-1} 向量 $b = (-a_{0,1}\Delta\tau g(x_0), 0, \dots, 0)^T$. 采用投影SOR方法求解变分不等式方程(4-6), 记 $1 < \omega < 2$ 为超松弛因子. 算法步骤如下:

Step 1 计算 $U^0 = g = (g(x_1), g(x_1), \dots, g(x_{N-1}))^T, F^0 = CU^0 + b$;

Step 2 对 $k = 0, 1, \dots, M-1$, 循环执行 Step 3 到 Step 6;

Step 3 $V^0 = \max(g, U^k)$;

Step 4 对 $i = 1, 2, \dots, N-1$, 计算 $V_i = (F_i^k - b_{i,i-1}V_{i-1} - b_{i,i+1}V_{i+1}^0) / b_{i,i}$;

Step 5 如果 $\|V - V^0\| \leq \varepsilon$, 则令 $U^{k+1} = V, F^{k+1} = CU^{k+1} + b$;

否则, 令 $V^0 = V$, 转 Step 4.

4.5 数值实验

本章考虑美式看跌期权定价, 设期权执行价格为 $K = 100$.

表 4-1 给出了期权参数为 $r = 0.07, \sigma = 0.40, q = 0.03, T = 1$ 时, 随网格 (M, N) 的变化期权价格的变化情况. 可以看出算法是收敛的, 而且差分网格越密集, 结果越精确.

表 4-2 给出了在本章方法(NFE)与二叉树方法^[43](BIN), PSOR 方法^[44]分别求得的美式看跌期权价格. 可以看出算法结果与经典算法的结果非常接近, 精确度很高, 说明本章算法可以用来求解美式期权定价问题.

图 4-1 给出了 $K = 100, r = 0.07, q = 0.03, T = 1$ 时, σ 变化下的最优执行边界.

表 4-1 不同网格差分下的美式看跌期权价格

Table4-1 Values of an American put option by different mesh sizes					
S	(200,300)	(500,500)	(1000,1000)	(2000,2000)	BIN
80	24.0000	24.0033	24.0052	24.0059	24.0073
90	18.2656	18.2724	18.2740	18.2747	18.2769
100	13.7733	13.7826	13.7859	13.7874	13.7867
110	10.3212	10.3282	10.3298	10.3305	10.3338
120	7.6982	7.6986	7.7008	7.7016	7.7037

表 4-2 不同参数下的美式看跌期权价格

Table4-2 A comparison between NFE, BIN and PSOR

参数	S	T=1			T=6		
		NFE	BIN	PSOR	NFE	BIN	PSOR
$r = 0.07$	80	24.0059	24.0073	24.0007	32.2377	32.2402	32.2383
$\sigma = 0.40$	90	18.2747	18.2769	18.2666	28.4554	28.4583	28.4551
$q = 0.03$	100	13.7874	13.7867	13.7744	25.3142	25.3129	25.3124
	110	10.3305	10.3338	10.3222	22.6673	22.6726	22.6669
	120	7.7016	7.7037	7.6991	20.4107	20.4110	20.4117
$r = 0.03$	80	23.1995	23.2001	23.1988	34.2068	34.2066	34.2018
$\sigma = 0.20$	90	15.5854	15.5868	15.5841	29.3690	29.3707	29.3634
$q = 0.07$	100	9.6311	9.6298	9.6282	25.1151	25.1112	25.1089
	110	5.4911	5.4931	5.4905	21.4076	21.4048	21.4016
	120	2.9114	2.9121	2.9112	18.2015	18.1990	18.1956

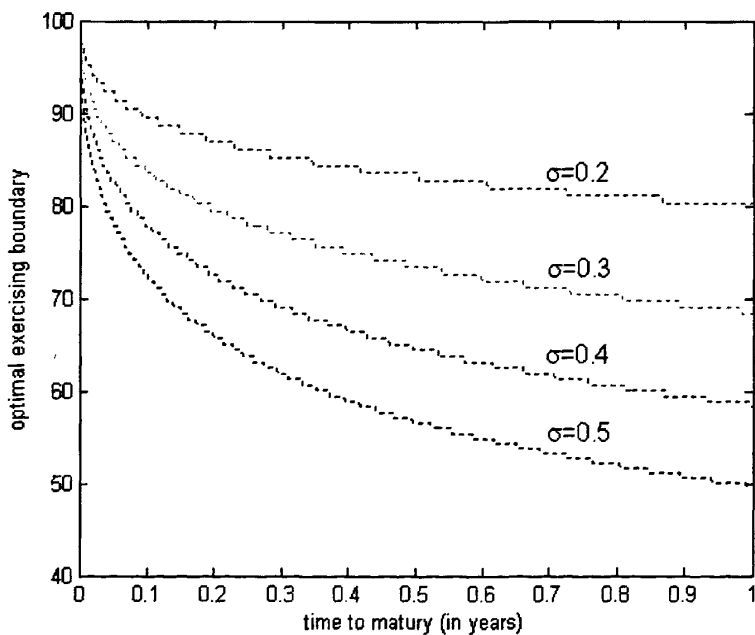
图 4-1 σ 变化下美式看跌期权的最优执行边界

Fig4-1 The optimal exercising boundary by different paramers

结 论

本文研究了美式期权定价问题的几种数值解法:

第二章用紧差分方法求解美式期权定价问题. 紧差分格式可以快速的求解偏微分方程, 具有四阶计算精度. 美式期权定价问题是一个自由边界问题, 通过变量变换化为偏微分方程, 利用紧差分方法进行求解.

第三章用记忆梯度投影方法求解美式期权定价问题. 把美式期权定价问题与极值问题联系起来, 通过求解极值问题从而求解美式期权定价问题. 极值问题可以用优化中的诸多算法求解. 本章就是用记忆梯度投影方法进行求解.

第四章借鉴有限元方法求解美式期权定价问题. 首先通过变量变换将变系数方程化为常系数方程, 将反向时间问题化为正向时间问题, 从而将原问题转化为等价的变分不等方程. 用基于线性基函数之上的有限元方法进行求解.

以上几章均给出了算法的具体步骤, 并利用 Matlab7.0 编写程序, 对算法进行了数值实验, 且与几种数值方法进行比较, 证明算法都是非常高效和收敛的, 适合于求解美式期权定价问题.

参考文献

- [1] Black F., Scholes M.. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654
- [2] Merton R.C.. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science 4, 1973, 1: 141-183
- [3] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M] (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2008
- [4] Ksendal B. Stochastic Differential Equations (Sixth Edition) [M]. Springer, 2006
- [5] Shreve S.E. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models[M]. Springer, 2007
- [6] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M] (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2002
- [7] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.. Option Pricing: A Simplified Approach[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7: 229-263
- [8] Brennan M.J., Schwartz E.S.. The valuation of American put options[J]. J. Finance, 1977, 32: 449-462
- [9] Jaillet P., Lamberton D., Lapeyre B.. Variational inequalities and the pricing of American options[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1990, 21: 263-289
- [10] Boyle P.. Options: A Monte Carlo approach[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3): 323-338
- [11] Grant D., Vora G., Week D.. Path-dependent options: extending the Monte Carlo simulation approach[J]. Management Science, 1997, 43(11): 1589-1602
- [12] Longstaff F.A., Schwartz E.S.. Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach[J]. The Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113-147
- [13] 李莉英, 金朝嵩. 美式看跌期权定价的一种混合数值方法[J]. 经济数学, 2005, 22(2): 145-149
- [14] Cho Chung-ki, Kang Sunbu, Kim Taekkeun, et al. Parameter Estimation Approach to the Free Boundary for the Pricing of an American Call Option[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51: 713-720
- [15] 吴强. 美式期权的应用及其数值计算[D]. 上海: 上海师范大学, 2006
- [16] Zhao Jichao, Matt D., Corless R.M.. Compact finite difference method for American

- option pricing[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 206: 306-321
- [17] Tangman D.Y., Gopaul A., Bhuruth M.. Numerical pricing of options using high-order compact finite difference schemes[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 218: 270-280
- [18] Tangman D.Y., Gopaul A., Bhuruth M.. A fast high-order finite difference algorithm for pricing American options[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 222: 17-29
- [19] Huang J., Pang J.S.. Option pricing and linear complementarity[J]. *Journal of Computational Finance*, 1998, 2(3):31-60
- [20] Koulisianis M.D., Papatheodorou T.S.. A ‘moving index’ method for the solution of the American options valuation problem[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2000, 54: 373-381
- [21] 张超. 线性补问题与美式期权定价[J]. *皖西学院学报*, 2005, 21(2): 18-21
- [22] Ikonen S., Toivanen J.. Pricing American options using LU decomposition[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2007, 1(51): 2529-2551
- [23] Stilianos Markolefas. Standard Galerkin formulation with high order Lagrange finite elements for option markets pricing[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 195: 707-720
- [24] Dempster MAH, Hutton JP. Pricing American Stock Options by Linear Programming[J]. *Mathematical Finance*, 1999, 9(3): 229-254
- [25] 张铁. 美式期权定价问题的数值方法[J]. *应用数学学报*, 2002, 25(1): 113-122
- [26] Zhang K., Yang X.Q., Teo K.L.. Augmented Lagrangian method applied to American option pricing[J]. *Automatica*, 2006, 42: 1407-1416
- [27] Kwon C., Friesz T.L.. Valuation of American Options by the Gradient Projection Method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 206: 380-388
- [28] Israel V.P., Rincon M.A.. Variational inequalities applied to option market problem[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 201: 384-397
- [29] MacMillan L.W. An Analytical Approximation for the American Put Prices[J]. *Advances in Futures and Options Research*, 1986, 1: 119-139

- [30] Baron-Adesi G, Whaley R.. Efficient Analytical Approximation of American Option Values[J]. *Journal of Finance*, 1987, 42: 301-320
- [31] Broadie M., Detemple J. B.. American Options Valuation: New Bounds. Approximations and a Comparison of Existing Methods[J]. *Review of Financial Studies*, 1996, 4: 1211-1250
- [32] Panini R., Srivastav R.P.. Option Pricing with Mellin Transforms[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, 40: 43-56
- [33] Liu yapping, Lu tao. The Integral Representation of the Price of American Options and Numerical Methods[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2004, 21(8): 17-21
- [34] Jacka S.D.. Optimal stopping and the American put[J]. *Mathematical Finance*, 1991, 1: 1-14
- [35] Carr P., Jarrow R., Myneni R.. Alternative characterizations of American put options[J]. *Mathematical Finance*, 1992, 2: 87-106
- [36] 梁嘉文. 美式期权定价的数值解[D]. 广州: 中山大学, 2006
- [37] Hans-Peter Bermin, Arturo Kohatsu-Higa, Josep Perello. Hints for an extension of the early exercise premium formula for American options[J]. *Physica A*, 2005, 355:152-157
- [38] Zvan R., Forsyth P.A., Vetzal K.R.. Penalty methods for American options with stochastic volatility[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1998, 91: 199-218
- [39] Nielsen B.F., Skavhaug O., Tveito A.. Penalty and front-fixing methods for the numerical solution of American option problems[J]. *The Journal of Computational Finance*. 2002, 5(4): 69-97
- [40] Khaliq A.Q.M., Voss D.A., Kazmi S.H.K.. A linearly implicit predictor-corrector scheme for pricing American options using a penalty method approach[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2006, 30: 489-502
- [41] Abdul Q.M. K., David A. V., Kamran K.. Adaptive θ -methods for pricing American options[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 222: 210-227
- [42] 戴嘉尊, 邱建贤. 微分方程数值解法[M]. 南京: 东南大学出版社, 2004
- [43] Shreve S.E. *Stochastic Calculus for Finance I : The Binomial Asset Pricing Model*[M]. Springer, 2007

- [44] 张铁, 李明辉. 求解股票期权定价问题的差分方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2004, 25(2): 190-193
- [45] Calamai P. H., More J.J. Projected gradient methods for linearly constrained problems [J], *Mathematical Programming*, 1987, 39: 93-116
- [46] 程鹏. 非线性规划超记忆梯度算法和GLP投影算法[D]. 东营: 中国石油大学(华东), 2007

附录 A 第二章的数值算法源代码

```

function []=CompactFD (K,r,sigma,delta,T,S0,N,M,w,sita)
clear
t0=cputime;
K=100;T=1;r=0.04;sigma=0.30;delta=0;S0=75.9572;x0=5;sita=0.5;c0=5+2*sqrt(6);w=1.5;
T1=(sigma)^2*T/2;k=2*(r-delta)/(sigma)^2;k1=2*r/(sigma)^2;SS=log(S0/E)+(k-1)*T1;
M=1000;N=1000;h=2*x0/N;dt=T1/M;a=10+sita*dt*24/h^2;b=1-(a-10)/2;
for i=1:M+1
    tau(i)=(i-1)*dt;
end
U=zeros(M+1,N+1);U0=zeros(1,N+1);
for i=1:N+1
    x(i)=-x0+h*(i-1);
    if(i>1 && x(i-1)<SS && x(i)>=SS)
        t=i;
    end
end
U(:,1)=0;U(1,:)=max(exp(x)-1,0);U(:,N+1)=exp(k1*tau).*(exp(x0-(k-1)*tau)-1);
CFD_S(1)=K*min(r/delta,1);
f=zeros(N-1,1);G0=zeros(1,N-1);G=zeros(1,N-1);
a1=c0-sita*dt*(16-15*c0)/12/h^2;a12=1+sita*dt*2*(2*c0+15)/12/h^2;
a13=-sita*dt*2*(7*c0+8)/12/h^2;a14=sita*dt*(6*c0+1)/12/h^2;
a15=-sita*dt*c0/12/h^2;aN2=-sita*dt*10/12/h^2;aN3=sita*dt*61/12/h^2;
aN4=-sita*dt*156/12/h^2;aN5=1+sita*dt*70/12/h^2;aN=10+sita*dt*134/12/h^2;
for j=2:M+1
    G0=CompactFDg(x(2:N),tau(j-1),k,k1);G=CompactFDg(x(2:N),tau(j),k,k1);
    %高斯消元
    U0=U(j-1,:);
    for i=2:N-2

```

```

f(i)=U0(i)+10*U0(i+1)+U0(i+2)+(1-sita)*dt*(U0(i)-2*U0(i+1)+U0(i+2))*12/h^2
+sita*dt*(G(i-1)+10*G(i)+G(i+1))+(1-sita)*dt*(G0(i-1)+10*G0(i)+G0(i+1));
end
f(1)=c0*U0(2)+U0(3)+sita*dt*(10*c0-1)*U(j,1)/12/h^2+(1-sita)*dt*((16-15*c0)*U0(2)
-2*(2*c0+15)*U0(3)+2*(7*c0+8)*U0(4)-(6*c0+1)*U0(5)+c0*U0(6)+(10*c0-1)
*U0(1))/12/h^2+sita*dt*(c0*G(i)+G(i+1))+(1-sita)*dt*(c0*G0(i)+G0(i+1));
f(N-1)=U0(N-1)+10*U0(N)+sita*dt*99*U(j,N+1)/12/h^2+(1-sita)*dt*(10*U0(N-4)-61
*U0(N-3)+156*U0(N-2)-70*U0(N-1)-134*U0(N)+99*U0(N+1))/12/h^2+sita*dt
*(G(i-1)+10*G(i))+(1-sita)*dt*(G0(i-1)+10*G0(i));
b12=-a1*a/b+a12;b13=-a1+a13;f(1)=-a1/b*f(2)+f(1);
b13=-b12*a/b+b13;b14=-b12+a14;f(1)=-b12/b*f(3)+f(1);
b14=-b13*a/b+b14;b15=-b13+a15;f(1)=-b13/b*f(4)+f(1);C=-a*b15/b14+b;
f(4)=-a/b14*f(1)+f(4);D(1)=-b*b15/b14+a;f(5)=-b/b14*f(1)+f(5);
for i=2:N-6
    D(i)=-b^2/D(i-1)+a;
    f(i+4)=-b/D(i-1)*f(i+3)+f(i+4);
end
bN3=-aN2*b/D(N-9)+aN3;f(N-1)=-aN2/D(N-9)*f(N-5)+f(N-1);
bN4=-bN3*b/D(N-8)+aN4;f(N-1)=-bN3/D(N-8)*f(N-4)+f(N-1);
bN5=-bN4*b/D(N-7)+aN5;f(N-1)=-bN4/D(N-7)*f(N-3)+f(N-1);
bN=-bN5*b/D(N-6)+aN;f(N-1)=-bN5/D(N-6)*f(N-2)+f(N-1);U(j,N)=f(N-1)/bN;
for i=N-2:-1:5
    U(j,i+1)=(f(i)-b*U(j,i+2))/D(i-4);
end
U(j,5)=(f(1)-b15*U(j,6))/b14;U(j,4)=(f(4)-C*U(j,6))/b;
U(j,3)=(f(3)-b*U(j,5)-a*U(j,4))/b;
U(j,2)=(f(2)-b*U(j,4)-a*U(j,3))/b;
i=2; %求最佳执行边界
while i<=N+1
    if U(j,i-1)<0 && U(j,i)>=0

```

```

    st=exp(x(i)-(k-1)*tau(j));st1=exp(x(i-1)-(k-1)*tau(j));
    CFD_S(j)=E*(-st*U(j,i-1)+st1*U(j,i))/(U(j,i)-U(j,i-1));U(j,i-1)=0;
    break;
end
    U(j,i-1)=0;i=i+1;
end
end
%求期权价格
if abs(x(t)-SS)<1E-5
    CompactFD_result=K*(1-exp(x(t)-(k-1)*T1)+U(M+1,t)*exp(-k1*T1))
else
    ut=1-exp(x(t)-(k-1)*T1)+U(M+1,t)*exp(-k1*T1);
    ut1=1-exp(x(t-1)-(k-1)*T1)+U(M+1,t-1)*exp(-k1*T1);
    CompactFD_result=K*(ut*(SS-x(t-1))+ut1*(x(t)-SS))/(x(t)-x(t-1))
end
plot(2*tau/sigma^2,CFD_S,'b') %绘最优执行边界图
CompactFD_time=cputime-t0

function [result]=CompactFDg(x,t,k,k1);
    result=exp(k1*t).*((k1-k)*exp(x-(k-1)*t)-k1);
end

```

附录 B 第三章的数值算法源代码

```

function []=Gradient(K,r,sigma,delta,T,S0,N,M,sita)
clear
t0=cputime;
K=100;T=0.5;r=0.03;sigma=0.2;delta=0.07;S0=200;
M=300;N=500;sita=0.5;xL=-6.5;xU=6.5;dx=(xU-xL)/N;dt=T/M;SS=log(S0);
for i=1:N+1
    x(i)=xL+(i-1)*dx;
    if(i>1 && x(i-1)<SS && x(i)>=SS)
        t=i;
    end
end
for i=1:N+1
    fai(i)=max(exp(x(i))-K,0);
end
U=zeros(M+1,N+1); U0=zeros(1,N+1);
U(1,:)=fai;U(:,1)=0;U(:,N+1)=2000;
Gradient_S(1)=K*max(r/delta,1);
for j=1:M
    U0=U(j,:);
    g=Gradientg(U0,U(j,:),N-1,dt,dx,sita,r,delta,sigma);
    i =1;d=-g;
    while i<1000
        UU=max(fai(2:N),U0(2:N)-g);
        U(j+1,2:N)=max(fai(2:N),U0(2:N)+0.0007*d);
        if norm(U(j+1,:)-U0)<1E-5
            break;
        end
        U0= U(j+1,:);
    end
end

```

```

    d0=d;g0=g;
    g=Gradientg(U0,U(j,:),N-1,dt,dx,sita,r,delta,sigma);
    d=-g+nqbb(U0(2:N),U(j,2:N),UU,g,g0,d0)*d0;
    i = i + 1;
end
i=2;%求最佳执行边界
while i<=N+1
    if abs(U(j+1,i)-exp(x(i))+K)<1E-7
        Gradient_S(j+1)=exp(x(i));break;
    end
    i=i+1;
end
end
for j=1:M+1
    Time1(j)=(j-1)*dt;
end
for i=1:t
    S(i)=exp(x(i));
end
% 求期权价格
if abs(x(t)-SS)<1E-5
    Gradient_result=U(M+1,t)
else
    Gradient_result=(U(M+1,t)*(SS-x(t-1))+U(M+1,t-1)*(x(t)-SS))/(x(t)-x(t-1))
end
plot(Time1,CFD1_S,'r')
%mesh(Time1,S,U(:,1:t'))
%axis([0 0.5 0 S0 0 E])
%xlabel('Time: t')
%ylabel('Asset Price: S')

```



```

%ylabel('Option Value: C')
%%plot(S,fai(1:t),'r-',S,U(M+1,1:t),'bo-')
%%set(gca,'XTick',0:50:S0)
%%set(gca,'YTick',0:10:E)
%%xlabel('Asset Price: S')
%%ylabel('Option Value: C')
Gradient_time=cputime-t0;

function [result]=Gradientg(U,U0,m,dt,dy,sita,r,delta,sigma)
for i=1:m
    result(i)=(U(i+1)-U0(i+1))/dt-0.5*sigma*sigma*(sita*(U(i+2)-2*U(i+1)+U(i))/dy/dy
        +(1-sita)*(U0(i+2)-2*U0(i+1)+U0(i))/dy/dy)-(r-delta-0.5*sigma*sigma)
        *(0.5*sita*(U(i+2)-U(i))/dy+0.5*(1-sita)*(U0(i+2)-U0(i))/dy)+r*sita*U(i+1)
        +r*(1-sita)*U0(i+1);
end

function b1=nqbb(U,U0,UU,g,g0,d0)
c=(norm(UU-U))^2;
br=c/(1+c)/norm(g)/norm(d0)/2.789;
b1=(g*(g-g0)'-g*(U-U0)')/(d0*(g-g0)');
if b1>br
    b1=br;
elseif b1<-br
    b1=-br;
end

```

附录 C 第四章的数值算法源代码

```

function []=FE(K,r,sigma,delta,T,S0,N,M,w)
clear
t0=cputime;
K=100;T=1;r=0.07;sigma=0.4;delta=0.03;S0=80;
M=300;N=300;x0=5;w=1.5;SS=log(S0/K);T1=(sigma)^2*T/2;
k=2*(r-delta)/(sigma)^2;k1=2*r/(sigma)^2;alpha=(k-1)/2;beta=(k-1)^2/4+k1;
h=2*x0/N;dt=T1/M;ma=2*h/3;mb=h/6;a=ma+dt*2/h;b=mb-dt/h;
for i=1:M+1
    tau(i)=(i-1)*dt;
end
for i=1:N+1
    x(i)=-x0+h*(i-1);
end
t=ceil((SS+x0)/h)+1;U=zeros(M+1,N+1);G=zeros(1,N-1);
U(1,:)=FEg(x,alpha,beta,tau(1));U(:,1)=FEg(-x0,alpha,beta,tau);
U(:,N+1)=FEg(x0,alpha,beta,tau);FE_S(1)=K*min(r/delta,1);
for n=1:M
    B(1)=ma*U(n,2)+mb*U(n,3)+dt/h*U(n+1,1);
    for i=2:N-2
        B(i)=mb*(U(n,i+2)+U(n,i))+ma*U(n,i+1);
    end
    B(N-1)=ma*U(n,N)+mb*U(n,N-1)+dt/h*U(n+1,N+1);
    G=FEg(x(2:N),alpha,beta,tau(n+1));L0=max(U(n,2:N),G);i=0;
    while (i<1000)
        y(1)=(B(1)-b*L0(2))/a;L(1)=max(G(1),L0(1)+w*(y(1)-L0(1)));
        for j=2:N-2
            y(j)=(B(j)-b*(L0(j+1)+L(j-1)))/a;L(j)=max(G(j),L0(j)+w*(y(j)-L0(j)));
        end
    end
end

```

```

y(N-1)=(B(N-1)-b*L(N-2))/a;L(N-1)=max(G(N-1),L0(N-1)+w*(y(N-1)-L0(N-1)));
if norm(L-L0)<1E-7
    U(n+1,2:N)=L;break;
end
L0=L;i=i+1;
end
% 下面确定自由边界
i=1;bj=1;
while (i<=N)
    if abs(K*U(n+1,i)*exp(-alpha*x(i)-beta*tau(n+1))+K*exp(x(i))-K)>1E-7
        bj=i-1;break;
    end
    i=i+1;
end
FE_S(n+1)=K*exp(x(bj));
end
if abs(x(t)-SS)<1E-5
    FE_result=K*exp(-alpha*x(t)-beta*T1)*U(M+1,t)
else
    ut=exp(-alpha*x(t)-beta*T1)*U(M+1,t);ut1=exp(-alpha*x(t-1)-beta*T1)*U(M+1,t-1);
    FE_result=K*(ut*(SS-x(t-1))+ut1*(x(t)-SS))/(x(t)-x(t-1))
end
plot(2*tau/sigma^2,FE_S,'b')
FE_time=cputime-t0

function [result]=FEg(x,alpha,beta,tau)
result=exp(alpha*x+beta*tau).*max(1-exp(x),0);
end

```

攻读硕士学位期间取得的学术成果

1. W.K. Pang, Li Ronghua, Liu Min. Convergence of the semi-implicit Euler method for stochastic age-dependent population equations[J]. 2008, 195: 466-474
2. Li Ronghua, Liu Min, Pang Wan-kai. Convergence of numerical solutions to stochastic pantograph equations with Markovian Switching[J]. 2009, 215: 414-422
3. Li Ronghua, Liu Min. Compound Options on Geometric Average Asian Options. 已投《Acta Mathematicae Applicatae Sinica》, 正在外审
4. 刘敏, 李荣华. 美式期权定价问题的紧差分方法求解. 已投《数学的实践与认识》, 正在外审

致 谢

首先，我衷心感谢我的导师李荣华教授。感谢他多年来对我生活上无微不至的关心和帮助，感谢他对我学业上热情、细致的指导。导师严谨求实的治学风格、深邃独到的见解、精深渊博的领域知识、高度的敬业精神以及对科学问题的敏锐地洞察力，给我极大的启迪。李老师的谆谆教诲不但使我在专业知识和科研能力上得到了很大的提高，而且也领会到了许多做人的哲理、人生的真谛，这些宝贵的经验都将使我终生受益。我真诚的再次向李老师表示深深的谢意！

其次，感谢对我有过帮助的同学，特别是数学研07-1班的同学们以及我的师弟师妹们。我们相互交流，相互促进，彼此关心，共同征服困难。感谢他们！同时还要感谢中国石油大学(华东)数学与计算科学学院的各位领导和老师！

最后，我要感谢我的家人，感谢他们对我的支持，感谢他们为我创造了良好的学习环境。父母为了我辛勤劳作，真的很辛苦，再次感谢！