势垒贯穿中 $U_0=E$ 时的透射系数研究
——也从一道势垒习题的问题谈起

刘 明
(湖北教育学院 物理与电子信息系,湖北 武汉 430060)

摘要:推导出了势垒贯穿问题中当 $U_0=E$ 时的透射系数表达式,并利用该公式圆满解释了《大学物理》刊出的一篇题为《从一道习题看量子力学中的势垒》文章中提出的问题.

关键词:势垒贯穿;透射系数;量子力学

中图分类号:O 413.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-0712(2005)05-0034-03

1 问题的提出

《大学物理》刊出过一篇题为《从一道习题看量子力学中的势垒》的文章[1],该文讨论了在目前国内很流行的一本量子力学习题集中的一个问题:计算质量 $m=5$ g,以速度 $v=10$ cm·s^{-1}向一刚性障碍物(高 $H=5$ cm,宽 $W=1$ cm)运动的子弹的透射概率.习题书上是这样解答的:

如果把障碍物的宽度看成势垒的厚度,子弹透射看成是越过障碍物所设置的重力势垒,则透射概率为

$$T\approx\exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m\left(mgH-\frac{1}{2}mv^2\right)}W\right\}=\exp\left\{-\frac{2mW}{\hbar}\sqrt{2gH-v^2}\right\} \tag{1}$$

其中

$$\frac{2mW}{\hbar}\sqrt{2gH-v^2}=0.9\times10^{30}$$

即

$$T=\mathrm{e}^{-0.9\times10^{30}}\approx0$$

文献[1]的作者对此提出了质疑,他选择了一个特殊的情况,即令子弹的速度恰好等于$\sqrt{2gH}$(并估计了一下数量级:$\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times9.8\times10^2\times5}$ cm·s$^{-1}\approx$ 100 cm·s^{-1}),再代入到前面的透射概率表达式中,发现透射率 T 可以接近 1,这显然不合常理.文献[1]认为问题出在势垒不应是重力势垒,而应是刚体对它的阻力势垒上.笔者原先认为这一分析有道理,但经过深入分析后发现,文献[1]实际上是利用式(1)讨论 $U_0=E$ 情况下的透射系数问题.按照这个思路,如果换成微观粒子(如电子),在 $U_0=E$ 的情况下,利用式(1)同样也会出现 T 接近于 1 的不合常理的结果,难道微观粒子(如电子)也不适于用量子力学方法求解?于是笔者查阅了相关文献和教材,对透射概率公式的由来进行了分析,发现该公式出自于势垒贯穿问题中 $U_0>E$ 的情况(没有等号)[2,3],此时透射系数为 $D=D_0\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2\mu(U_0-E)}a}$,其中 D_0是常数,接近于 1,a 是势垒宽度,U_0是粒子在力场中的势能,E 是电子的能量.而使子弹的速度恰好等于$\sqrt{2gH}$,相当于取 $U_0=E$,这显然是把 $U_0=E$ 的情况直接套用到$U_0>E$ 的公式中去了,这是不合适的.笔者认为文献[1]之所以推出不合常理的结论,问题的真正原因就在于此.一般教材上大多都讨论了$U_0>E$ 和 $U_0<E$ 的情况,而没有就$U_0=E$的情况作专门讨论.本文就从势垒贯穿问题的定态薛定谔方程出发,讨论 $U_0=E$ 时的透射系数D_0.

2 $U_0=E$ 时透射系数公式的导出

一维方势垒粒子的波函数 ψ 所满足的定态薛定谔方程为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{2\mu}{\hbar}E\psi=0 & (x<0,x>a) \quad (2)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{2\mu}{\hbar}(E-U_0)\psi=0 & (0<x<a) \quad (3)\end{cases}$$

讨论 $U_0=E$ 时的情况,为简便起见,令 $k_1=\sqrt{\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}}$,则式(2)、(3)可改写为:

收稿日期:2004-03-17;**修回日期**:2004-12-09

作者简介:刘明(1962—),女,湖北武汉人,湖北教育学院物理与电子信息系教授,主要从事量子力学教学研究和高能多重产生唯象学的研究.

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+k_1^2\psi=0 \quad (x<0, x>a) & (4)\\ \dfrac{d^2\psi}{dx^2}=0 \quad (0<x<a) & (5)\end{cases}$$

在 $x<0$ 区域内,方程的解是

$$\psi_1=Ae^{ik_1x}+A'e^{-ik_1x} \tag{6}$$

在 $0<x<a$ 区域内,方程的解是

$$\psi_2=Bx+B' \tag{7}$$

在 $x>a$ 区域内,方程的解是

$$\psi_3=Ce^{ik_1x}+C'e^{-ik_1x} \tag{8}$$

按照公式 $\psi(r,t)=\psi(r)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$,定态波函数是 ψ_1,ψ_2,ψ_3再分别乘上一个含时因子 $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. 由此很容易看出式(6)第一项是由左向右传播的平面波,第二项是由右向左传播的平面波. 式(8)第一项是入射波,第二项是反射波. 而在 $x>a$ 区域内没有由右向左运动的粒子,因而只应有向右传播的透射波. 所以在式(8)中必须令

$$C'=0$$

现在利用波函数及其微商在 $x=0$ 点和 $x=a$ 点连续的条件来确定波函数中的其他系数.

由 $\psi_1\big|_{x=0}=\psi_2\big|_{x=0}$有

$$A+A'=B' \tag{9}$$

由$\dfrac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{d\psi_2}{dx}\Big|_{x=0}$有

$$ik_1A-ik_1A'=B \tag{10}$$

由 $\psi_2\big|_{x=a}=\psi_3\big|_{x=a}$有

$$Ba+B'=Ce^{ik_1a} \tag{11}$$

由$\dfrac{d\psi_2}{dx}\Big|_{x=a}=\dfrac{d\psi_3}{dx}\Big|_{x=a}$有

$$B=ik_1Ce^{ik_1a} \tag{12}$$

式(9)乘以 k 加式(10)得

$$2k_1iA=ik_1B'+B \tag{13}$$

式(11)减去式(12)与 a 之积得

$$B'=Ce^{ik_1a}-ik_1Cae^{ik_1a} \tag{14}$$

式(9)、(14)代入式(13)得

$$2ik_1A=ik_1Ce^{ik_1a}(1-ik_1a)+ik_1Ce^{ik_1a}$$

故有　$$2k_1A=2k_1Ce^{ik_1a}\left(1-\frac{i}{2}k_1a\right)$$

$$\frac{C}{A}=\frac{1}{1-\frac{i}{2}ak_1}e^{-ik_1a}=\frac{1}{1-\frac{i}{2}a\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}}e^{-ia\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}} \tag{15}$$

透射系数 D 为

$$D=\left|\frac{C}{A}\right|^2=\left|\frac{1}{1-\frac{i}{2}ak_1}e^{-ik_1a}\right|^2=\frac{1}{1+\frac{1}{4}a^2k_1^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{\mu Ea^2}{\hbar^2}} \tag{16}$$

3 讨论

由上面分析可知,当 $U_0=E$ 时不会出现上文提到的透射系数为 1 的不合常理的情况.

从以上推得的表达式可知,透射系数随势垒宽度 a 的增大而迅速减小,而且随 $U_0=E$ 的值的增大而减小.

当 $U_0=E$,且趋于 0 时,粒子的透射系数趋于 1.

同样,a 趋于无穷大时,粒子的透射系数也会趋于 0.

以上推导说明,文献[1]中出现的不合理是套公式时忽略了适用条件造成的. 按我们推得的公式,不管是微观粒子还是宏观刚体都不会出现 $U_0=E$ 时 $D=1$,即透射系数为 1 的情况.

对于文献[1]中提到的该习题是否适合用量子力学方法求解的问题可作如下讨论:

对于题中提到的质量 $m=5$ g,运动速度 $v=10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$的子弹,利用德布罗意关系 $p=\dfrac{h}{\lambda}$,则有

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2\mu E}}=\frac{6.626\times10^{-27}}{\sqrt{2\times5\times\frac{1}{2}\times5\times10^2}}\ \mathrm{cm}=$$

$$1.3\times10^{-29}\ \mathrm{cm}=1.3\times10^{-22}\ \mathrm{nm}$$

1.3×10^{-22} nm 显然是一个极小的量,与子弹自身尺度(约 3 cm)或势垒宽度(1 cm)相比,其波长 λ 更是小量,即 d(仪器线度)[4] 远大于 λ,所以量子效应不明显. 也就是说,当仪器线度或光学特征尺度 d 远大于实物粒子的德布罗意波长时,经典的粒子性描述将是可行的,应用经典方法讨论,而不适于用量子力学的方法讨论. 实际上,我们可以用式(16)来估算一下子弹的透射系数(这里取子弹的运动速度为 100 $\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$):

$$D=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{\mu Ea^2}{\hbar^2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\times\frac{5\times\frac{1}{2}\times5\times100^2}{(6.6\times10^{-27})^2}}\approx7\times10^{-52}$$

可见其透射系数趋于 0. 即使子弹速度接近光速,也是这个结果,所以对于子弹来说,其透射现象是可以忽略不计的.

同样我们可以讨论一个能量为 $E=100$ eV 的电子的情况.

注意:1 eV $=1.6\times10^{-19}$ J, $m_e=9.1\times10^{-28}$ g, $E=100\ \mathrm{eV}=1.6\times10^{-17}$ J,由德布罗意关系 $p=\dfrac{h}{\lambda}$,有

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2\mu E}}=\frac{6.6\times10^{-27}}{\sqrt{2\times9.1\times10^{-28}\times1.6\times10^{-10}}}\ \mathrm{cm}=$$

$$1.2\times10^{-8}\ \mathrm{cm}=0.12\ \mathrm{cm}$$

相当于晶格间距,当用晶格作光栅时就可观察到衍射花纹,由此可证明其具有波动性,可用量子力学的方法来处理.

为了便于比较,以下估算一下电子的透射系数D(取势垒宽度$a=10^{-8}$ cm):

$$D=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{\mu Ea^2}{\hbar^2}}=$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}\times\frac{(10^{-8})^2\times9.1\times10^{-28}\times1.6\times10^{-10}}{(6.6\times10^{-27})^2}}\approx$$

$$0.055$$

即当$U_0=E$时,能量为$E=100$ eV的电子在势垒宽度为$a=10^{-8}$ cm的透射系数为0.055,即为5.5%,这是一个不可忽视的量.显然,电子的透射现象是明显的,所以势垒贯穿效应也是微观粒子具有波粒二象性的最好例证之一.

参考文献:

[1] 徐志凌.从一道习题看量子力学中的势垒[J].大学物理,1993,12(10):48.
[2] 曾谨言.量子力学[M].北京:科学出版社,2003.38.
[3] 周世勋.量子力学教程[M].北京:高等教育出版社,1979.44.
[4] 威切曼E H.量子物理学[M].北京:科学出版社,1978.283.

The resarch on penetration coefficient in barrier penetration when $U_0 = E$

LIU Ming
(Department of Physics, Hubei University of Education, Wuhan 430060, China)

Abstract: Formula for penetration coefficient in barrier penetration when $U_0 = E$ is presented, and the question in the article《The reserch on barrier of quantum mechanics from a piece of exercise》(《College Physics》1993, 12(10)) is explained using this formula.

Key words: barrier penetration; penetration coefficient

势垒贯穿中U0=E时的透射系数研究--也从一道势垒习题的问题谈起

作者： 刘明， LIU Ming
作者单位： 湖北教育学院,物理与电子信息系,湖北,武汉,430060

刊名： 大学物理PKU
英文刊名： COLLEGE PHYSICS
年，卷(期)： 2005,24(5)

参考文献(4条)

1. 徐志凌 从一道习题看量子力学中的势垒 1993(10)
2. 曾谨言 量子力学 2003
3. 周世勋 量子力学教程 1979
4. 威切曼E H 量子物理学 1978

引证文献(2条)

1. 彭丽萍 E=U0时势垒贯穿问题的讨论[期刊论文]-黄冈师范学院学报 2007(3)
2. 袁留洋.郑雨军 论一维方势垒穿透[期刊论文]-大学物理 2012(2)