

摘要

压电材料具有良好的机电耦合特性,外加载荷不仅能导致弹性变形还能产生电场,反之外加电场也能发生变形。由于这种良好的性质使得对压电材料的力学分析成为人们关注的焦点。本文在压电材料基本方程的基础上,使用奇异积分方程方法,讨论了功能梯度压电材料在电冲击下的热效应问题。

全文共分为六章,第一章概述了压电材料/功能梯度压电材料的研究现状、研究方法和本文的主要内容,第二章介绍了压电材料的基本方程,第三章讨论了电冲击下含裂纹的功能梯度压电带裂纹尖端的热效应问题,第四章讨论了含裂纹的功能梯度压电带粘接一个功能梯度压电带在电冲击下裂纹尖端的热效应问题,第五章讨论了含裂纹的功能梯度压电带粘接一个半无限大均匀压电材料在电冲击下裂纹尖端的热效应问题。其中,第三、四、五章都首先利用功能梯度压电材料的本构方程得到动态方程组,然后利用 Laplace 变换和 Fourier 变换,得到奇异积分方程组,再根据数值求积方法进行数值计算并讨论了材料参数、裂纹尺寸等对热效应的影响。第六章对全文进行总结并提出今后进一步研究的方向。

关键字:功能梯度压电材料,反平面问题,奇异积分方程,热效应

Abstract

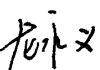
Piezoelectric material has good electrical and mechanical coupling characteristics, Adscitious loading not only leads to elastic deformation but also produce electric field. On the contrary, adscitious electric field can also bring elastic deformation. Due to the good characters, much investigation focus on the piezoelectric material. In this paper, the problems of the thermal effect of functionally graded piezoelectric materials by electric shock are investigated by using integral equation method on the basis of the basic equation of piezoelectric materials.

This article is divided into six chapters. The first chapter summarizes the research status, the various research methods of the piezoelectric/functionally graded piezoelectric materials and the main content of the thesis. Chapter II introduces the basic equation of piezoelectric materials. Chapter III discusses the thermal effect of crack in functionally graded piezoelectric strip by electric shock. Chapter IV investigates the thermal effect of crack in functionally graded piezoelectric strip bond functionally graded piezoelectric strip by electric shock. Chapter V studies the thermal effect of crack in functionally graded piezoelectric strip bond infinite piezoelectric material by electric shock. In these three chapters, firstly, the system complex governing equations can be obtained by using the constitutive relations of functionally graded piezoelectric materials, secondly, the Laplace and Fourier integral transform techniques are used to reduce the problem to the solution of singular integral equations, thirdly, these singular integral equations are solved numerically by employing quadrature formulas, then the effect of the parameters of the materials and the size of the crack to the thermal effect is discussed. Chapter VI sums up the thesis and puts forward to the furthermore research fields in the future.

Key words: Functionally grade piezoelectric materials, anti-plane problem, singular integral equation, thermal effect

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得宁夏大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

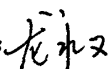
研究生签名： 

时间： 2010年5月30日

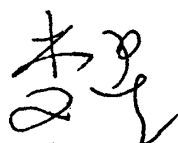
关于论文使用授权的说明

本人完全了解宁夏大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。同意宁夏大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播学位论文的全部或部分内容。

(保密的学位论文在解密后应遵守此协议)

研究生签名： 

时间： 2010年5月30日

导师签名： 

时间： 2010年5月30日

第一章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 压电材料介绍

压电效应是由 Cuire J 和 Curie P 在 1880 年首先发现的。当时他们观察到在某些无对称中心的晶体的极轴方向施加机械应力时,会在正交于极轴方向的电极面上出现大小相等,符号相反的电荷,即正压电效应。1881 年 Lippman G 应用热力学原理预见逆压电效应,即在电场作用下,压电材料出现变形。同年, Curie 兄弟用实验证实了这一点。正压电效应和逆压电效应统称为压电效应。

尽管压电效应在十九世纪就已被发现,但在初期只是作为晶体的物理现象来研究,并没有在应用上引起重视,因而发展缓慢。直到 1961 年,朗之万发明了用石英晶体制作的水声发射器与接收器,这是最早的压电换能器。1917 年贝乐实验室的 Nicolson A M 用罗息盐做成元件。同时随着各种压电晶体的不断发现,压电材料才逐渐进入应用阶段。

随着现代高科技的迅猛发展,智能结构和器件广泛应用于信息技、新材料科技和航天等高新技术领域,压电材料日益显示出其巨大的优越性。由于压电材料的力-电耦合特性及某些压电材料的其它特性,如光电效应、力-热-电耦合特性等。压电材料已广泛应用于智能工程、电子技术、激光技术、红外探测技术、超声技术以及其它工程技术方面,用作传感器、致动器等。同时,压电材料的静、动力学特性得到广泛研究^[1]。

目前,在压电材料的断裂力学研究中,最常见的电学边界条件有三种,一种是可导通边界条件,可导通边界条件认为,由于裂纹厚度很小,裂纹面的电边界条件应上下连续,即上下表面电势和法向电位移分量相等,即:

$$\phi(x,0^+) = \phi(x,0^-), \quad D_y(x,0^+) = D_y(x,0^-)$$

式中, ϕ 为裂纹上下表面电势, D_y 为 y 方向的电位移分量。

利用可导通条件, Parton^[2]开创了分析压电介质的裂纹问题的先河,从他的工作开始,压电裂纹问题受到了研究者的广泛关注。

另一种是不可导通边界条件,认为裂纹不导通电流,裂纹面电位移法向分量为零,即:

$$D_y(x,0^+) = D_y(x,0^-) = 0$$

这种观点认为,空气的电导率远远小于压电材料的电导率,压电介质的断裂力学分析最系统的工作始于 Deeg^[3]的工作。在他的博士论文中,就是利用不可导通边界条件,系统分析了压电介质中的位错、裂纹和夹杂问题。

最后一种是限制导通边界条件,即:

$$D_y(x,0^+) = D_y(x,0^-), \quad D_y(x,0^+)(u^+ - u^-) = -\epsilon_a[\phi(x,0^+) - \phi(x,0^-)]$$

其中 $(u^+ - u^-)$ 为裂纹的宽度, ϵ_a 为裂纹中介质常数。

Hao 和 Shen^[4]首先提出了这种边界条件。Kumar 和 Singh^{[5][6]}应用有限元法,在这种边界条件下做了很多工作。另外, Dascalu 和 Hometcovschi^[7]也做了关于这种边界的工作。

1.1.2 功能梯度材料概述

材料梯度的基本思想可以追溯到 1972 年,当时提出了使材料性质呈现梯度变化的一些建议。然而,功能梯度材料的设计、制造和评价直到 20 世纪 80 年代中期才真正开始。

20 世纪 80 年代以来,随着科技的飞速发展,对材料的性能要求越来越高,尤其是在诸如超高温、超低温、超高压等极限环境下更要求零件有特殊的性能。世界各国的学者在长期研究传统材料的基础上,不仅更加深入地从工程技术方面完善已有的材料,还从理论上陆续提出了许多新概念,并且在实践中制备出一些具有特殊性能的材料,使材料科学呈现出空前繁荣的景象。功能梯度材料(Functionally Graded Materials, 简称 FGM)的概念是在 1984 年前后,由日本仙台地区的几位材料科学家提出的。所谓功能梯度材料是指一种材料,其功能,如组分、结构、性能随空间或时间连续变化或阶梯变化的高性能材料,开始时是用于解决在设计制造新一代航天飞机的热保护系统中出现的许多问题,而真正对功能梯度材料的研究应该说始于 1987 年,目前,功能梯度材料的研究在世界上不少国家得到开展。

为了克服压电材料由于本身缺陷存在,从而可能导致的电器件失效破坏,功能梯度材料的概念被扩展到压电材料中,称为功能梯度压电材料。由于这种材料的性质(如压电常数、介电常数、弹性模量、密度、剪切模量等)沿某一方向是连续变化的,从而可以避免应力集中,延长由其所构成的电器件的寿命。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 压电材料的断裂静力学

自 Parton 研究了压电材料和导体间的有限长裂纹受远场均匀拉伸载荷作用的问题后,压电材料的断裂静力学问题受到了越来越多的关注,尤其是在电场对裂纹扩展影响方面的研究。在实验研究方面, Tobin 和 Pak^[8]关于电场对裂纹扩展影响的实验研究表明:当裂纹方向垂直于极化方向时,正电场(电场方向与极化方向一致)促进裂纹扩展,负电场抑制裂纹扩展;当裂纹平行于极化方向时,电场对裂纹扩展无影响。相关的实验研究还可见 Mchenry 和 Koepke^[9]。在理论研究方面, Pakd^[10]的研究表明:在单独电荷载荷作用下,正负电场总是阴滞裂纹扩展;在固定力载荷和电荷载荷共同作用下,除电场外,电场对裂纹扩展起阻滞或促进作用还取决于电荷载荷的大小。该理论分析与实验结果存在分歧。Park 和 Sun^[11]提出应变能量释放率的概念,从一个侧面解释了实验和理论之间的差异。Gao 等^[12]则通过提出压电介质裂纹尖端电屈服区的 Dugdalc 模型,期望消除实验结果和理论分析之间的分歧。

对压电介质中含夹杂的问题, Sosa^[13]采用势函数方法求解了含椭圆或圆形夹杂的无限大压电材料的平面应变问题。Wang^[14]利用 Green 函数求得了无限大压电基体中含椭球形压电夹杂或椭圆片状裂纹问题的解。关于 Green 函数求解方面的研究还有 Dunm^[15]和 Jiang 等^[16]。利用 Stroh 方法, Qin 及其合作者^[17]对热释电材料的夹杂损伤的平面问题进行了系统的研究。利用 Stroh 方法研究夹

杂损伤问题的还有Du^[17], Liang^[18]等。

对于压电材料弹塑性断裂力学的研究,除 Gao 等外,王自强^[19-20]和 Ru^[21]对压电介质裂纹尖端的电屈服 Dugdale 模型进行了进一步的研究。Shen 等^[22]则提出压电介质裂纹尖端的电屈服和力屈服 Dugdale 模型,研究了压电材料间的型界面裂纹尖端屈服场的非线性力-电效应。

1.2.2 压电材料的断裂动力学

压电材料的断裂动力学是新近兴起的研究领域。与断裂静力学相比,除缺乏有效的数学方法外,动力学的困难在于涉及的因素太多,物理现象复杂,一些基本规律尚未完全搞清楚,现有的分析大多数只是近似分析。目前压电材料的断裂动力学主要面临两方面的困难。一方面,由于力-电耦合效应,变形场必然与 Maxwell 电磁方程发生耦合,这会导致弹性波与电磁波相速度发生偏移而以耦合波形式存在。另一方面,就压电材料的应用范围而言,除却电场强度范围限制外,介电常数依赖于弹性波的频率,频率达到一定范围时会发生色散现象。关于耦合波问题,由于弹性波相速度一般较电磁波相速度小五个数量级左右,因此可以略去与 Maxwell 电磁方程的耦合效应而得到一个准静态近似,现有的研究成果均为基于准静态近似的解。关于色散问题,目前还未见报道。因此对于压电材料的断裂动力学问题,目前见于报道的工作远少于静态问题的工作,而断裂动力学的弹塑性分析至今报道相对不多。

大多数压电材料动态断裂的研究工作集中在冲击响应问题、波散射问题和扩展裂纹问题三个方面。对于冲击响应问题,Chen 和 Yu^[23-25]、Chen 和 Karihaloo^[26]以及 Chen 和 Meguid^[27]采用绝缘电边界条件,利用 Laplace 和 Fourier 变换结合求解对偶积分方程或奇异积分方程,对冲击载荷作用下的压电介质瞬态响应的反平面问题进行了系统的研究。包括无限大压电介质中含有有限长裂纹或半无限长裂纹,压电介质层中含有有限长裂纹且裂纹方向平行于边界或垂直于边界等问题。对上述问题均求得了裂尖的动态应力和电位移强度因子,某些问题甚至得到了封闭形式的解。讨论了裂尖应力场和电位移场的奇异性以及几何构形和电场载荷对动态应力和电位移强度因子的影响。结果表明在反平面问题中,动态电位移强度因子保持静态值。采用相同的电边界条件和方法,Chen 和 Yu^[28]、Chen 和 Worswick 及 Meguid^[29]求解了无限大压电介质或无限长压电介质层中的两个共线裂纹受反平面机械冲击载荷和平面电冲击载荷作用的瞬态响应问题。Wang 和 Yu^[30-32]利用绝缘电边界条件和积分变换方法,求解了无限长压电介质层中的有限长裂纹受力电冲击载荷联合作用的 I 型和 III 型瞬态响应问题。尤其在 III 型问题的研究中,尽管 Shen 等^[33]更早给出了压电介质层间的界面裂纹对冲击载荷响应的平面问题的公式,但动态应力和电位移强度因子及能量释放率的数值计算结果则首次由 Wang 和 Yu 给出,并讨论了电场载荷和裂纹几何尺寸对动态能量释放率的影响。结果表明 I 型问题中的力-电耦合效应比 III 型问题更明显。牛得泉^[34]研究了功能梯度压电带的动态反平面冲击问题,讨论了载荷耦合参数,材料梯度参数和裂纹位置等因素对动应力强度因子和电位移强度因子的影响。

1.2.3 压电材料的热相关问题

对热释电材料,通常假设热场中的量与力场和电场中的量无关,即相当于耦合系数较小或应变率电势变化率较小的情形,因此热传导方程只含待求的温度函数,从而大大降低了问题求解的

难度。除Qin及其合作者^[35-37]研究了含各种缺陷的热释电材料的等效模量外,申胜平等^[38]利用Stroh方法,讨论了热释电材料的热弹性二维问题的一般解,进而求解了共线界面裂纹问题,得到了温度、位移和电势的全场解以及裂纹张开位移和电势差的精确表达式。在此基础上,求得了热释电体中单个裂纹的裂尖端,单个界面裂纹的裂尖端和点热源与界面裂纹的相互作用。Ashida和Tauchert^[39]解决了由压电传感测量仪器中电势差求外部瞬态表面温度的反问题。Fu^[40]等通过对压电材料的I型断裂实验发现:相对于施加力载荷时的压电材料的断裂韧度,施加电载荷时的压电材料的断裂韧度高达约25倍,且在裂纹尖端有发热和放电现象。该实验表明电载荷作用下,裂纹尖端产生了很高的能量耗散,而在力载荷作用下则不发生。作者对此的解释是在电载荷作用下,裂纹尖端发生放电和电畴翻转,从而形成塑性区造成能量耗散。白象忠及其合作者^[41-43]对脉冲电流在导电薄板中的裂纹尖端引起温度变化并实现裂纹止裂的问题进行了理论分析和实验验证。结果表明在脉冲电流作用下,裂纹尖端产生很高的温度并导致裂尖钝化和发生相变,从而阻滞裂纹扩展。Bastawros和Kim^[44]对电流作用下导电薄膜中的裂纹扩展的研究也发现了裂纹尖端温度升高的现象。Bilyk等^[45]首先对单独电流作用时固体金属柱中的电磁场分布进行了研究,然后在连续介质力学的框架内建立了一个综合考虑力-电耦合、应变耦合、应变率、热膨胀、热软化和热传导等因素的有限变形热粘塑性模型,用以注解固体金属圆柱对力-电载荷联合作用的响应。其研究结果表明:电磁场扩散的时间尺度由电传导决定,且远小于热传导的时间尺度,因此当作用电流载荷时,在电磁场扩散的时间惊讶范围内可近似为绝热过程。当施加高电流时,导体内的温度升高值远大于只作用力载荷时的温度升高值。当电流和力场载荷联合作用时,用结合热膨胀的热粘塑性模型比用弹塑性模型更适合描述导体中的变形。Choi^[46]等研究了热冲击载荷作用的梯度涂层裂纹问题。Borgi和Erdogan^{[47][48]}认为裂纹面可以部分导热,用此模型研究了含部分导热裂纹的无限大功能梯度材料和含部分导热界面裂纹的梯度涂层-基底结构在热/机械联合作用下的稳态温度场和应力场问题,分析了因裂纹面部分导热对应力强度因子的影响。周跃亭^[49]研究了热载荷下功能梯度界面层结构中的界面裂纹问题,分析了热传导参数和功能梯度界面层厚度对裂纹面的无量纲温度分布的影响。丁生虎^[50]讨论了热载荷下功能梯度涂层界面的裂纹断裂问题,分析了材料特性,梯度指数和无量纲热阻对温度分布及热应力强度因子的影响。而对于动态电冲击下的压电介质裂纹热效应问题,目前还较少有研究报道。

1.3 非均匀材料断裂动力学研究方法概述

功能梯度压电材料宏观动态断裂理论所讨论的问题及其模型越来越复杂,所用研究的方法很多,就求解策略来看,主要分为解析方法和数值方法(如有限元,有限差分法和边界元法等),断裂动力学的场方程与边界条件比起静态问题要复杂得多,只有少数的特殊问题才可以求得解析解,绝大多数问题是将问题简化为标准的积分方程后应用数值计算求解,下面是一些动态断裂力学中常用的求解方法:

1. 积分变换-对偶积分方程法

此方法主要由 Sih 等人发展而来, Sih 在其著作^[51]中给出了全面而详细的介绍。国内学者范天佑也在这方面进行了深入的研究。对于瞬态问题,则先使用 Laplace 变换,再通过 Fourier 变换或 Hankel 变换,可以将问题转化为对偶积分方程问题求解,对偶积分方程可采用两种方法求解,

对于半无限大裂纹一般采用 Wiener-Hopf 方法以复变函数求解。有限长裂纹可用 Copson 方法, 先将对偶积分方程变换为第二类 Fredholm 积分方程, 然后用数值积分方法求解。

2. 奇异积分方程法

奇异积分方程方法在弹性力学中获得了广泛应用, 已成为求解弹性力学混合边值问题的有力工具之一, 特别是一些带有奇异性的问题, 如接触问题, 裂纹问题等。关于奇异积分方程方法在非均匀材料中的应用主要是对由积分变换转化而来的奇异积分方程的求解。关于奇异积分方程的理论, Muskhelishvili^[62]在其著作中给出了系统的总结, 路见可教授用奇异积分方程的方法, 研究了各向同性不同弹性材料拼接和焊接后的裂纹问题^[63], 李星教授^{[64]-[68]}对不同材料焊接后的双周期裂纹问题做了很好的研究, Erdogan^[69]在奇异积分方程的数值求解方面作出了重要的贡献。

3. 权函数法

利用应力强度因子与能量释放率之间的关系, 在静态断裂力学中的 Rice 提出了权函数法的基本思想, 并得到成功的应用。

对于动态断裂力学问题, 应力强度因子与能量释放率之间的关系只有在拉氏变换后, 才出现与静态问题的类似公式, 于是裂纹体在动态问题中的权函数数只能是在拉氏变换后的域中。如果该裂纹体受到其化载荷系统的体积力和边界力已知, 经拉氏变换后, 则用权函数法求出拉氏变换后域中的动应力强度因子, 再经过拉氏反演即得出该裂纹体受其化载荷系统作用时域中的动应力强度因子。

1.4 本文的研究内容和方法

本文在不可导电边界条件的假设下, 假设功能梯度压电材料的电弹性模量沿其厚度方向按指数变化, 分别运用 Laplace 和 Fourier 变换, 把混合边值问题转化为 Cauchy 型奇异积分方程, 然后利用奇异积分方程数值解法研究:

1. 电冲击下含裂纹的功能梯度压电带的热效应问题;
2. 电冲击下含裂纹的功能梯度压电带粘接功能梯度压电带的热效应问题;
3. 电冲击下含裂纹的功能梯度压电带粘接半无限大均匀压电体的热效应问题。

第二章 基本方程

2.1 压电材料的基本方程

近年来,对压电材料的断裂行为研究相当活跃,在其理论分析中,一般有两种选择,一类是基于线性电弹性理论的本构方程,一类是基于非线性(即塑性)电弹性理论的本构方程。本文是在绝热线性理论的宏观框架下研究反平面裂纹问题,下面主要介绍压电材料的线性电弹理论有关方程。

2.1.1 压电方程

压电方程是由能量守恒定律开始,并且满足 Clausius-Duhem 不等式,运用 Taylor 展开等推导而来的。对于广义各向异性材料,一共有 21 个材料常数 c_{ijkl} , 18 个压电常数 e_{kij} , 六个介电常数 ϵ_{ij} 。描述其力学行为和电学行为的物理量包括弹性位移 u_i 、应力张量 σ_{ij} 、应变张量 ϵ_{ij} 、电势 Φ 、电位移 D_i 、和电场 E_i ($i, j, l, k=1, 2, 3$), 它们满足压电方程、梯度方程和平衡方程。

压电介质的压电性涉及到力学行为与电学行为之间的相互作用,在绝热线性情况下,可以用两个力学量和两个电学量之间的关系,即压电方程来近似描述这种相互作用。选择应变张量 ϵ_{ij} 和电场矢量 E_i 为独立变量,则压电方程为:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijmn} \epsilon_{mn} - e_{nij} E_n \\ D_i &= e_{imn} \epsilon_{mn} + \alpha_{in} E_n\end{aligned}\quad (2-1)$$

式中, C_{ijmn} 为常电场时的弹性刚度系数,称为短路弹性刚度系数,单位为 N/m^2 ; e_{nij} 为压电应力系数,单位为 $N/V \cdot m$, α_{in} 为常应变时的介电系数,称为夹持介电系数,单位为 F/m 。

若考虑弹性、压电、介电常数各自的对称性,压电方程的系数还具有如下特性:

$$\begin{aligned}C_{ijmn} &= C_{ijnm} = C_{jimn} = C_{mnij} \\ e_{nij} &= e_{nji} \\ \alpha_{ij} &= \alpha_{ji}\end{aligned}\quad (2-2)$$

采用矩阵符号来表示张量,记:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sigma_{ij} \quad (p=1,2,3,4,5,6; i, j=1,2,3) \\ \gamma_p &= \begin{cases} \epsilon_{ij} (i=j, p=1,2,3) \\ 2\epsilon_j (i \neq j, p=4,5,6) \end{cases}\end{aligned}\quad (2-3)$$

用矩阵 C 和 e 表示材料系数张量,其分量间关系为:

$$\begin{cases} C_{pq} = C_{ijmn} (i, j, m, n = 1, 2, 3; p = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ e_{ip} = e_{imn} \end{cases} \quad (2-4)$$

方程(2-1)可写为:

$$\begin{cases} \sigma = C\varepsilon - eE \\ D = e\varepsilon + \alpha E \end{cases} \quad (2-5)$$

压电方程的独立变量是可以任意选择的, 根据独立变量的不同选择方案, 压电方程还有以下几种形式:

$$\begin{cases} \sigma = C^D \varepsilon - hD \\ E = -h\varepsilon + \beta^E D \end{cases} \quad (2-6)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = S^D \sigma + gD \\ E = -g\sigma + \beta^\sigma D \end{cases} \quad (2-7)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = S^E \sigma + dE \\ D = d\sigma + \alpha^\sigma E \end{cases} \quad (2-8)$$

式中 C^D 为常电位移时的弹性刚度矩阵, 称为开路弹性刚度矩阵; h 为压电劲度矩阵, 单位为 V/m ; β^E 为常应变时的介电隔离率矩阵, 称为夹持介电隔离率矩阵, 单位为 m/F ; S^D 为常电位移时的弹性柔度矩阵, 称为开路柔度矩阵, 单位为 m^2/N ; g 为压电电压常数矩阵, 单位为 $V \cdot m/N$; β^σ 为常应力时的介电隔离率矩阵, 称为自由介电隔离率矩阵; S^E 为常电场时的弹性柔度常数矩阵, 称为短路柔度矩阵; d 为压电应变常数矩阵, 单位为 m/V ; α^σ 为常应力时的介电常数矩阵, 称为自由介电常数矩阵。

2.1.2 梯度方程

小变形假设下, 应变张量 ε_{ij} 和电场矢量 E_i 可以分别由弹性位移 u_i 和电势 φ 表示:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ E_i &= -\varphi_{,i} \end{aligned} \quad (2-9)$$

式中, 下标逗号表示求导。

2.1.3 平衡方程

应力张量 σ_{ij} 和电位移矢量 D_i 服从

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,i} + f_j &= 0 \\ D_{i,i} &= q \end{aligned} \quad (2-10)$$

式中 f 为体力, q 为电荷密度。在本文中为了和 XOY 坐标系的表示一致, 我们将上述对应

力和电位移, 应变和电场的下标 (i, j, k) 表示为 (x, y, z)

压电材料具有良好的机电耦合特性, 即外加载荷不仅能导致弹性体变形还能产生电场, 反之, 外加电场也能产生变形。近年来, 对内含裂纹的压电材料的断裂行为研究相当活跃。在理论分析中, 有两种选择, 一是基于线性电弹性理论的本构方程。一是基于非线性(即塑性)电弹性理论的本构方程。本文在线性电弹性理论的框架下研究反平面裂纹问题。

首先, 弹性体由于变形, 从而使物体离开了原来所处的平衡状态, 亦即自其余部分施于所截取的那一部分体积上的作用力的合力不再为零, 因而物体的这一部分体积上必然产生力, 以使弹性体恢复平衡。这种由于变形而出现的内力于所在面积的比的极限, 即为应力。根据静电学的基本原理, 小单元体平衡的必要和充分的条件是作用在小单元体上各力的合力矩等于零。可得应力平衡方程(在略去体力的情形下):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2-11)$$

其中, $T_{ij}(i, j = x, y, z)$ 为应力张量。

其次, 弹性体在外力作用下, 不仅产生整体的运动(平衡和旋转), 而且其内部各点之间发生相对位移。弹性体的变形就是由于这种相对位移而形成的。在一般情形下考虑物体内的变形有如下应变几何方程:

$$\begin{aligned}\gamma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (2-12)$$

其中 $\gamma_{ij}(i, j = x, y, z)$ 为应变张量。

设压电介质处于静电场中, 因为在电场中各点的电场强度 E 等于该点电势梯度矢量的负值, 如果把直角坐标系中的 X 轴、 Y 轴和 Z 轴的方向作为场强 E 的三个分量方向, 则有电场相容方程:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2-13)$$

而电位移连续性方程为:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (2-14)$$

其中, E 为电场矢量, ϕ 为电势, D 为电位移。

由于压电材料的机电耦合性质, 即外加载荷不仅能导致弹性体变形还能产生电场, 在线性弹性的框架下, 应力与应变及电场强度之间的关系满足下列本构方程:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ 2\gamma_{yz} \\ 2\gamma_{zx} \\ 2\gamma_{yx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} \\ e_{61} & e_{62} & e_{63} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

同时, 电位移分量和应变及电场强度之间的关系为:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ 2\gamma_{yz} \\ 2\gamma_{zx} \\ 2\gamma_{yx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

其中, u, v, w 为位移矢量, c 为弹性常数, ε 为介电常数, e 为压电常数, 此外, 在已知力边界条件 S_τ 和位移边界条件 S_u 上要分别满足:

$$\tau_{ij} n_j = P_i^*, \quad u_i = u_i^* \quad (2-17)$$

在已知电位移边界条件 S_D 和电势边界条件 S_ϕ 上要分别满足:

$$D_i n_i = D_n^*, \quad \phi = \phi^* \quad (2-18)$$

其中, n 为边界上的单位法线矢量, 带星号的物理量是该量在边界上的已知值。

2.2 横观各向同性压电材料的本构方程

对于常见的以 z 轴极化的横观各向同性压电材料, 独立的压电材料参数只有 10 个, 其本构方程为:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ 2\gamma_{yz} \\ 2\gamma_{zx} \\ 2\gamma_{yx} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ 2\gamma_{yz} \\ 2\gamma_{zx} \\ 2\gamma_{yx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

对于反平面问题, 应力分量只剩下两个分量, 即 τ_{xz} 和 τ_{yz} ; 位移矢量只有一个 w 分量; 其余的应力分量都等于零。我们横观各向同性的压电材料薄板, 在受平面内电场和反平面剪应力作用, 其本构方程为:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{44} & -e_{15} \\ c_{44} & -e_{15} \\ e_{15} & \varepsilon_{11} \\ e_{15} & \varepsilon_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \\ E_x & E_y & E_x & E_y \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

2.3 压电材料反平面裂纹问题的电弹性动态控制方程

对于反平面剪切变形问题, 电机械边值问题可以简化为

$$U_x = U_y = 0, \quad U_z = w(x, y, t) \quad (2-22)$$

$$E_x = E_x(x, y, t), \quad E_y = E_y(x, y, t), \quad E_z = 0 \quad (2-23)$$

这里 U_k 和 E_k ($k = x, y, z$) 分别为位移分量和电场分量。

电弹性动态控制方程为:

$$\tau_{zk,k} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad D_{k,k} = 0, \quad k = x, y \quad (2-24)$$

$$\tau_{zk} = c_{44} U_{z,k} - e_{15} E_k, \quad k = x, y \quad (2-25)$$

$$D_k = e_{15} U_{z,k} + \varepsilon_{11} E_k, \quad k = x, y \quad (2-26)$$

$$\gamma_{zk} = \frac{U_{z,k}}{2}, \quad E_k = -\phi_{,k}, \quad k = x, y \quad (2-27)$$

将式(2-22)和(2-23)代入到方程(2-24)和(2-25)中, 则本构方程可简化为:

$$\tau_{xz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2-28)$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2-29)$$

平衡方程和 Maxwell 静电平衡方程简化为:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \quad (2-30)$$

其中 τ_{xz} , τ_{yz} 为应力分量, D_x , D_y 为位移分量, γ_{xz} , γ_{yz} 是应变分量, ϕ 为电势, c_{44} 为剪切模量, e_{15} 为压电常数, ε_{11} 为介电常数, ρ 为压电材料的密度。

本文就是基于以上基本方程, 在适当的边界条件下, 讨论电冲击下含裂纹的功能梯度压电带的热效应问题。

第三章 电冲击下含裂纹的功能梯度压电带的热效应

以往对压电介质热相关问题的研究都是在热场与力电场互不耦合的假设下进行的, Fu 等^[40]关于压电介质断裂的实验研究表明在电载荷下, 压电介质的断裂韧性大大高于力载荷下的断裂韧性, 并且在压电介质裂纹尖端产生明显的升温现象。自象忠等^{[42][43]}的研究则表明在导体中可利用电冲击作用实现裂纹止裂。Bilyk 等^[45]的研究揭示了当施加高电流时, 导体内的温度升高值远远大于只作用力载荷的温度升高值。受上述压电介质的实验结果和导体中相关研究的启发, 本章探讨在高电冲击载荷作用下, 压电介质中裂纹尖端的热效应问题, 通过引入热源功率, 利用绝热近似, 由简化的热传导方程得到了裂纹尖端在电冲击作用下短时间范围的温度场。同时讨论了裂纹尺寸对温度升高值和升高区域大小的影响。

3.1 问题的描述

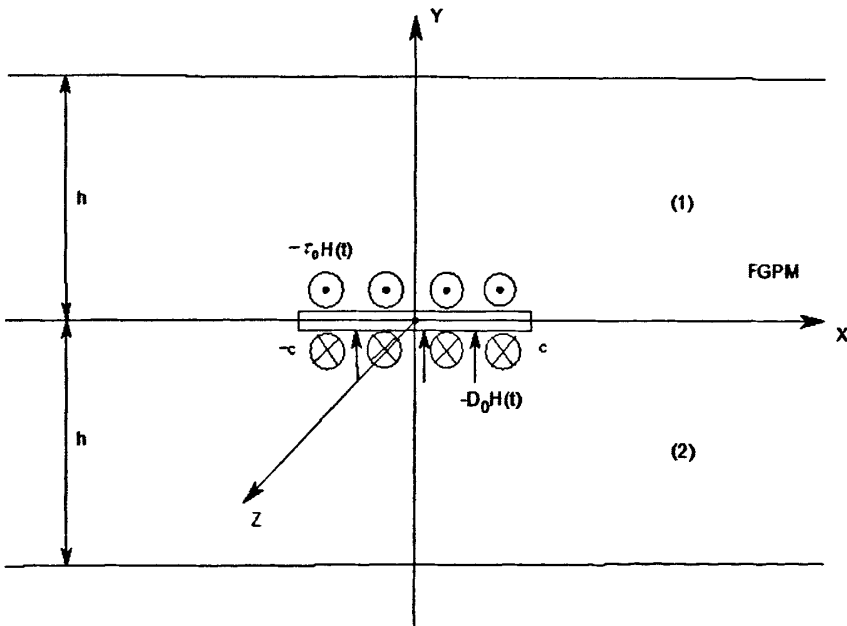


图 3-1 功能梯度压电带热效应问题的结构示意图

考虑如图 3-1 所示的结构, 采用直角坐标系 (x, y, z) , 其中 z 轴为功能梯度压电体的极轴。长为 $2c$ 的裂纹位于 x 轴上, 压电体为厚度为 $2h$ 的无限长条, 裂纹上方区域和下方区域关于 x 轴对称, 假设裂纹面上作用有电场冲击载荷。

下面求解承受电冲击作用下, 裂纹尖端区域在电冲击下的热效应。求解上述问题时, 在求裂纹尖端附近的力场和电场时不考虑与温度场相关的因素, 在求解裂纹尖端的力-电场后再考虑温度的影响, 该问题中压电介质的几何方程、本构方程分别为:

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3-1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = c_{44}(y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + e_{15}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \sigma_{yz} = c_{44}(y) \frac{\partial \omega}{\partial y} + e_{15}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ D_x = e_{15}(y) \frac{\partial \omega}{\partial x} - \kappa_{11}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ D_y = e_{15}(y) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \kappa_{11}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (3-2)$$

其中, ε 、 ω 、 E 、 ϕ 、 σ 、 D 分别代表应变张量、反平面位移、电场强度矢量、电势、应力张量、电位移矢量, $c_{44}(y)$ 、 $e_{15}(y)$ 、 $\kappa_{11}(y)$ 分别为剪切模量、压电常数、介电常数。

平衡方程和 Maxwell 方程为:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \quad (3-3)$$

假设功能梯度压电材料的剪切模量, 压电常数, 介电常数和密度沿其厚度方向按指数函数变化, 即:

$$c_{44} = c_0 e^{\beta y}, \quad e_{15} = e_0 e^{\beta y}, \quad \kappa_{11} = \kappa_0 e^{\beta y}, \quad \rho = \rho_0 e^{\beta y} \quad (3-4)$$

裂纹面边界条件: ($-c < x < c$)

$$\sigma_{yz}(x, 0, t) = -\tau_0 H(t), \quad D_y(x, 0, t) = -D_0 H(t) \quad (3-5)$$

对称性边界条件: ($|x| > c$)

$$\omega(x, 0, t) = 0, \quad \phi(x, 0, t) = 0 \quad (3-6)$$

自由边界条件: ($-\infty < x < +\infty$)

$$\sigma_{yz}(x, h, t) = 0, \quad D_y(x, h, t) = 0 \quad (3-7)$$

τ_0 和 D_0 分别为力场和电场冲击载荷的幅度, $H(t)$ 表示 Heaviside 函数。

3.2 问题的求解

定义 Laplace 变换:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} F(p) e^{px} dp \quad (3-8)$$

这里 Br 代表 Bromwith 积分路径。

Fourier 变换:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isx} ds \quad (3-9)$$

把(3-2)代入(3-3), 得:

$$\begin{cases} c_0 \nabla^2 \omega + e_0 \nabla^2 \phi + c_0 \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} + e_0 \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\ e_0 \nabla^2 \omega - \kappa_0 \nabla^2 \phi + e_0 \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} - \kappa_0 \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

令 $\psi = \phi - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega$, 则由(3-10)可得:

$$\begin{cases} \nabla^2 \omega + \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} = s_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

其中 $s_0 = \rho_0 / (c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0})$.

对(3-11)式中的时间变量进行 Laplace 变换:

$$\begin{cases} \omega^*(x, y, p) = \int_0^{\infty} \omega(x, y, t)e^{-pt} dt \\ \omega(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega^*(x, y, p)e^{pt} dp \end{cases} \quad (3-12)$$

$$\begin{cases} \psi^*(x, y, p) = \int_0^{\infty} \psi(x, y, t)e^{-pt} dt \\ \psi(x, y, t) = \int_{\gamma} \psi^*(x, y, p)e^{pt} dp \end{cases} \quad (3-13)$$

由(3-12)和(3-13), (3-11)变为:

$$\begin{cases} \nabla^2 \omega^* + \beta \frac{\partial \omega^*}{\partial y} = s_0 p^2 \omega^* \\ \nabla^2 \psi^* + \beta \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3-14)$$

再对(3-14)中的 x 变量进行 Fourier 变换:

$$\begin{cases} \omega^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s, y, p)e^{-isx} ds \\ F(s, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^*(x, y, p)e^{isx} dx \end{cases} \quad (3-15)$$

$$\begin{cases} \psi^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, y, p)e^{-isx} ds \\ G(s, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, y, p)e^{isx} dx \end{cases} \quad (3-16)$$

把(3-15), (3-16)代入(3-14), 有:

$$(-s^2)F(s, y, p) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(s, y, p) + \beta \frac{\partial}{\partial y} F(s, y, p) = s_0 p^2 F(s, y, p) \quad (3-17)$$

$$(-s^2)G(s, y, p) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(s, y, p) + \beta \frac{\partial}{\partial y} G(s, y, p) = 0 \quad (3-18)$$

令: $F(s, y, p) = A(s, p)e^{\gamma y}$, 代入(3-17)式, 得:

$$\gamma = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4(s^2 + s_0 p^2)}}{2} \quad (3-19)$$

故 $F(s, y, p) = A_1(s, p)e^{t_1 y} + A_2(s, p)e^{t_2 y}$

其中

$$t_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2}, \quad t_2 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2} \quad (3-20)$$

则有:

$$\omega^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(s, p)e^{t_1 y} + A_2(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} dx \quad (3-21)$$

同理可得:

$$\psi^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(s, p)e^{t_3 y} + A_4(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} dx \quad (3-22)$$

其中

$$t_3 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2}, \quad t_4 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2} \quad (3-23)$$

由变换 $\psi = \phi - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega$, 有:

$$\begin{aligned} \phi^*(x, y, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} [A_1(s, p)e^{t_1 y} + A_2(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(s, p)e^{t_3 y} + A_4(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (3-24)$$

即在 Laplace 域中的形式解为(3-21)和(3-24)式。

引入位错密度函数:

$$f^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial \omega^*(x, 0, p)}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (3-25)$$

$$g^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial \phi^*(x, 0, p)}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (3-26)$$

由(3-21), (3-24)和(3-25), (3-26)以及边界条件(3-6), 得:

$$A_1(s, p) + A_2(s, p) = \frac{1}{-is} \int_c^{\infty} f^*(t, p) e^{ist} dt \quad (3-27)$$

$$A_3(s, p) + A_4(s, p) = \left(-\frac{e_0}{\kappa_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{-is} \int_c^{\infty} f^*(t, p) e^{ist} dt\right) + \frac{1}{-is} \int_c^{\infty} g^*(t, p) e^{ist} dt \quad (3-28)$$

由本构方程(3-2), 边界条件(3-7)及(3-21), (3-24), 得:

$$\left(c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0}\right) e^{\beta h} [t_1 A_1(s, p) e^{i'h} + t_2 A_2(s, p) e^{i'2h}] + e_0 e^{\beta h} [t_3 A_3(s, p) e^{i'3h} + t_4 A_4(s, p) e^{i'4h}] = 0 \quad (3-29)$$

$$2e_0 e^{\beta h} [t_1 A_1(s, p) e^{i'h} + t_2 A_2(s, p) e^{i'2h}] + \kappa_0 e^{\beta h} [t_3 A_3(s, p) e^{i'3h} + t_4 A_4(s, p) e^{i'4h}] = 0 \quad (3-30)$$

联立(3-27)-(3-30), 得:

$$A_1 = \frac{-t_2 e^{i'2h}}{t_1 e^{i'h} - t_2 e^{i'2h}} f, \quad A_2 = \frac{t_1 e^{i'h}}{t_1 e^{i'h} - t_2 e^{i'2h}} f \quad (3-31)$$

$$A_3 = \frac{-t_4 e^{i'4h}}{t_3 e^{i'3h} - t_4 e^{i'4h}} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g\right), \quad A_4 = \frac{t_3 e^{i'3h}}{t_3 e^{i'3h} - t_4 e^{i'4h}} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g\right) \quad (3-32)$$

其中

$$f = \frac{1}{-is} \int_c^{\infty} f^*(t, p) e^{ist} dt, \quad g = \frac{1}{-is} \int_c^{\infty} g^*(t, p) e^{ist} dt \quad (3-33)$$

把(3-31), (3-32)代入(3-21) (3-24), 由本构方程(3-2), 边界条件(3-5)得到如下第一类 Cauchy 奇异积分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{f^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{e_0}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{g^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} K_{11}(x, t, p) f^*(t, p) dt \\ - \frac{e_0}{\pi} \int_c^{\infty} K_{12}(x, t, p) g^*(t, p) dt = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (3-34)$$

$$\begin{aligned} -\frac{e_0}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{f^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{\kappa_0}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{g^*(t, p)}{t-x} dt - \frac{e_0}{\pi} \int_c^{\infty} K_{21}(x, t, p) f^*(t, p) dt \\ + \frac{\kappa_0}{\pi} \int_c^{\infty} K_{22}(x, t, p) g^*(t, p) dt = -\frac{D_0}{p} \end{aligned} \quad (3-35)$$

其中:

$$K_{11} = \int_0^{\infty} [U_1(s, p) - 1] \sin s(t-x) ds \quad (3-36)$$

$$K_{12} = \int_0^{\infty} [U_2(s, p) + 1] \sin s(t - x) ds \quad (3-37)$$

$$K_{21} = K_{22} = \int_0^{\infty} [U_2(s, p) - 1] \sin s(t - x) ds \quad (3-38)$$

$$U_1 = \frac{1}{s} \left[\frac{e_0^2}{\kappa_0} \cdot \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h} - t_3 t_4 e^{t_4 h}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} - (c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0}) \cdot \frac{t_1 t_2 e^{t_1 h} - t_1 t_2 e^{t_2 h}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} \right] \quad (3-39)$$

$$U_2 = \frac{1}{s} \cdot \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h} - t_3 t_4 e^{t_4 h}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \quad (3-40)$$

奇异积分方程组(3-34), (3-35)的单值条件为:

$$\begin{cases} f^*(0, p) = 0 \\ g^*(0, p) = 0 \end{cases} \quad (3-41)$$

引入变量 $t = uc, x = rc$, 并令 $f^*(t, p) = F(u, p), g^*(t, p) = G(u, p)$, $K_{ij}(x, t, p) = K_{ij}^*(u, r, p) (i, j = 1, 2)$, 积分方程组(3-34), (3-35)化为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u, p)}{u - r} du + \frac{e_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(u, p)}{u - r} du + \frac{c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}^*(r, u, p) \cdot F(u, p) du \\ - \frac{e_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}^*(r, u, p) G(u, p) du = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\begin{aligned} -\frac{e_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u, p)}{u - r} du + \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(u, p)}{u - r} du - \frac{e_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}^*(r, u, p) \cdot F(u, p) du \\ + \frac{\kappa_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}^*(r, u, p) G(u, p) du = -\frac{D_0}{p} \end{aligned} \quad (3-43)$$

$$F(0, p) = 0 \quad (3-44)$$

$$G(0, p) = 0 \quad (3-45)$$

利用 $F(0, p)$ 和 $G(0, p)$ 的 Chebyshev 多项式展开形式:

$$f^*(t, p) = F(u, p) = \frac{R(u, p)}{\sqrt{1 - u^2}} \quad R(u, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(u, p) \quad (3-46)$$

$$g^*(t, p) = G(u, p) = \frac{S(u, p)}{\sqrt{1 - u^2}} \quad S(u, p) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n T_n(u, p) \quad (3-47)$$

把(3-46)和(3-47)代入(3-42)-(3-45), 并利用 Gauss-Chebyshev 积分公式, 得到如下线性方程组:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{u_i - r_m} + cK_{11}^*(r_m, u_i, p) \right] \frac{R(u_i, p)}{N} + \sum_{i=1}^N \left[-\frac{e_0}{u_i - r_m} + e_0 cK_{12}^*(r_m, u_i, p) \right] \frac{S(u_i, p)}{N} = -\frac{\tau_0}{p} \quad (3-48)$$

$$\sum_{l=1}^N \left[-\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{21}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N \left[-\frac{\kappa_0}{u_l - r_m} + \kappa_0 c K_{22}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{D_0}{p} \quad (3-49)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{R(u_l, p)}{N} = 0 \quad (3-50)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{S(u_l, p)}{N} = 0 \quad (3-51)$$

其中:

$$u_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2N}\pi\right) \quad (l=1,2,\dots,N) \quad (3-52)$$

$$r_m = \cos\left(\frac{m}{N}\pi\right) \quad (m=1,2,\dots,N-1) \quad (3-53)$$

(3-48)-(3-51)是一个以 $R(u_l, p)$ 和 $S(u_l, p)$ 为未知数的具有 $2N$ 个方程的方程组,求解即可

得到 $R(u_l, p)$ 和 $S(u_l, p)$ ($l=1,2,\dots,N$)。

3.3 裂纹尖端的温度场

本小节对裂纹尖端热效应的讨论基于以下两个假设:(1)热场与力、电场互不耦合,因此在热传导方程中不包括力电场的量;(2)短时间内的近似绝热过程。这种假设是成立的,因为根据 Bilyk 等^[45]的研究表明当作用电流载荷时,电磁场扩散的时间尺度远小于热传导的时间尺度,因此在电磁场扩散的时间尺度范围内可近似为绝热过程。

根据上述假设,作为压电介质中热传导议程的一级近似,绝热条件下的方程为:

$$p = p_0 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3-54)$$

其中 p_0 为比热,对无外部热源作用的情况,根据白象忠等^[42]对导电薄板中利用电冲击阻滞裂纹扩展的研究,可引入热源功率来等效外部点热源作用。导体中的热源功率定义为:

$$p = E \cdot J \quad (3-55)$$

其中, J 为导体中的电流密度矢量。

功能梯度压电材料属于电介质材料,而对于电介质,电流密度矢量可表示为:

$$J = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3-56)$$

类似于导体问题,在压电材料中由式(3-55)和(3-56)引入热源功率,将其代入式(3-54)并对时间积分,得到的压电介质中温度场为:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{p_0} \int_0^t E(x, y, \tau) \frac{\partial D(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3-57)$$

由几何方程(3-1)，本构方程(3-2)以及式(3-21)，(3-24)，有：

$$\begin{aligned} E_x^*(x, y, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \cdot \frac{e_0}{\kappa_0} [A_1(s, p)e^{iy} + A_2(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \cdot [A_3(s, p)e^{iy} + A_4(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \end{aligned} \quad (3-58)$$

$$\begin{aligned} E_y^*(x, y, p) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} [t_1 A_1(s, p)e^{iy} + t_2 A_2(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_3 A_3(s, p)e^{iy} + t_4 A_4(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \end{aligned} \quad (3-59)$$

$$\begin{aligned} D_x^*(x, y, p) &= (e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-is) \cdot [A_1(s, p)e^{iy} + A_2(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \\ &\quad - \kappa_{11} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-is) \cdot [A_3(s, p)e^{iy} + A_4(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \end{aligned} \quad (3-60)$$

$$\begin{aligned} D_y^*(x, y, p) &= (e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_1 A_1(s, p)e^{iy} + t_2 A_2(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \\ &\quad - \kappa_{11} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_3 A_3(s, p)e^{iy} + t_4 A_4(s, p)e^{iy}] e^{-ix} ds \end{aligned} \quad (3-61)$$

把(3-31)-(3-33)代入上式，并利用(3-48)-(3-51)的解，得到(3-57)中电场强度和电位移强度在 Laplace 变换域中的解为：

$$E_x^*(x, y, p) = c \left[\sum_{i=1}^N K_{ex1}(u_i, x, y, p) \frac{R(u_i, p)}{N} + \sum_{i=1}^N K_{ex2}(u_i, x, y, p) \frac{S(u_i, p)}{N} \right] \quad (3-62)$$

$$E_y^*(x, y, p) = c \left[\sum_{i=1}^N K_{ey1}(u_i, x, y, p) \frac{R(u_i, p)}{N} + \sum_{i=1}^N K_{ey2}(u_i, x, y, p) \frac{S(u_i, p)}{N} \right] \quad (3-63)$$

$$D_x^*(x, y, p) = c \left[\sum_{i=1}^N K_{dx1}(u_i, x, y, p) \frac{R(u_i, p)}{N} + \sum_{i=1}^N K_{dx2}(u_i, x, y, p) \frac{S(u_i, p)}{N} \right] \quad (3-64)$$

$$D_y^*(x, y, p) = c \left[\sum_{i=1}^N K_{dy1}(u_i, x, y, p) \frac{R(u_i, p)}{N} + \sum_{i=1}^N K_{dy2}(u_i, x, y, p) \frac{S(u_i, p)}{N} \right] \quad (3-65)$$

其中 $K_{exi}(u, x, y, p)$, $K_{eyi}(u, x, y, p)$, $K_{dxi}(u, x, y, p)$, $K_{dyi}(u, x, y, p)$ ($i=1,2$) 均为已知函数，具体形式如下：

$$K_{ed}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_2 e^{t_2 h + y} - t_1 e^{t_1 h + y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} + \frac{t_3 e^{t_3 h + y} - t_4 e^{t_4 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (3-66)$$

$$K_{ed2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \frac{t_4 e^{t_4 h + y} - t_3 e^{t_3 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \cos[s(cu-x)] ds \quad (3-67)$$

$$K_{ey1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_1 t_2 e^{t_1 h + y} - t_1 t_2 e^{t_2 h + y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} + \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (3-68)$$

$$K_{ey2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \sin[s(cu-x)] ds \quad (3-69)$$

$$K_{dd1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \left(e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \frac{t_1 e^{t_1 h + y} - t_2 e^{t_2 h + y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} + \kappa_{11} \left[\frac{t_3 e^{t_3 h + y} - t_4 e^{t_4 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (3-70)$$

$$K_{dd2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \kappa_{11} \frac{t_4 e^{t_4 h + y} - t_3 e^{t_3 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \cos[s(cu-x)] ds \quad (3-71)$$

$$K_{dd1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \left(e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \frac{t_1 t_2 e^{t_1 h + y} - t_1 t_2 e^{t_2 h + y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} - \kappa_{11} \left[\frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (3-72)$$

$$K_{dd2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} -\kappa_{11} \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \sin[s(cu-x)] ds \quad (3-73)$$

通过 Laplace 变换的数值反演, 得到时间域中的电场强度和电位移, 然后根据 (3-57) 即可求出裂纹尖端的温度场。其中 (3-66)-(3-73) 在积分路径上不存在奇异点, 可直接进行数值计算。

3.4 结果与讨论

假定裂纹面 $y=0$ 处为压电材料 $BaTiO_3$, 其材料性质如下: $c_{44} = 44Gpa$, $e_{15} = 11.4C/m^2$, $\kappa_{11} = 128.3 \times 10^{10} C/Vm$, $\rho = 5700Kg/m^3$, 只考虑电冲击作用, 令 $\tau_0 = 0$ 。

图 3-2 给出了在不同的裂纹尺寸下, 裂纹尖端的温度随时间变化的关系, 结果表明在时间一定的情况下, 温度随 c/h 的增大而升高, 并且温度在刚开始直线上升达到一个峰值后逐渐趋于一个稳定状态。

图 3-3 给出了材料参数对温度的影响, 结果显示这些曲线在振荡后趋于稳态。

结果表明: 当作用高电冲击载荷时, 会在裂纹尖端引起较高的温度变化。在此情况下, 裂纹尖端的温度效应是不能被忽略的。在裂尖高温的影响下, 裂纹尖端局部高温场的材料性质将发生变化, 如弹性刚度、压电常数、介电常数等。一般情况下, 温度升高引起的材料性质变化也可能提高压电介质的断裂韧性。而且对于反平面问题, 由于温度的升高不引起剪切应力的改变, 此时, 材料性质的变化对压电材料断裂韧性的影响可能起决定作用。另外, 压电材料的压电性是在一定

的温度范围内存在的,当温度升高至超过材料自身的居里温度时,压电材料的内部结构发生改变,压电介质将丧失压电性。因此裂纹尖端的高温区内,压电材料的压电性质发生变化甚至丧失,引起压电材料的压电性出现损伤区,此时裂纹尖端场必须重新计算,而该情况下的裂纹尖端场的求解将是一个非常复杂的过程。

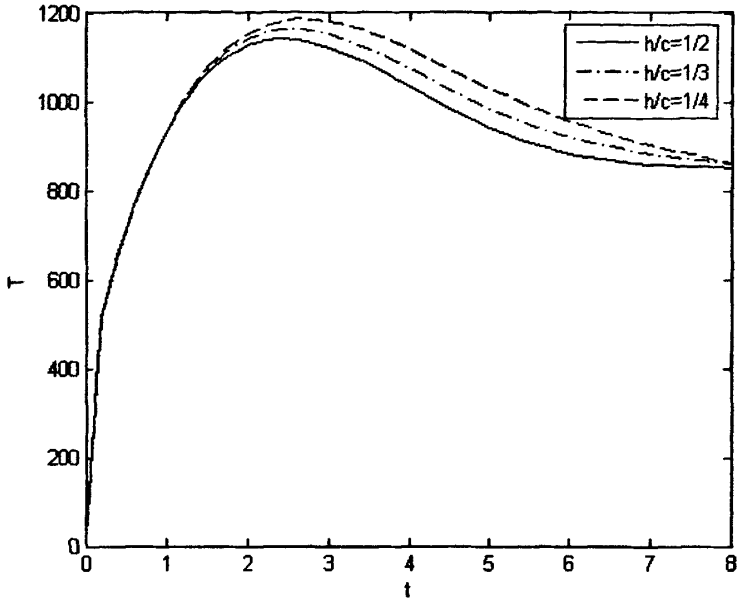


图 3-2 裂纹尺寸对温度的影响 ($\beta = 0.5$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

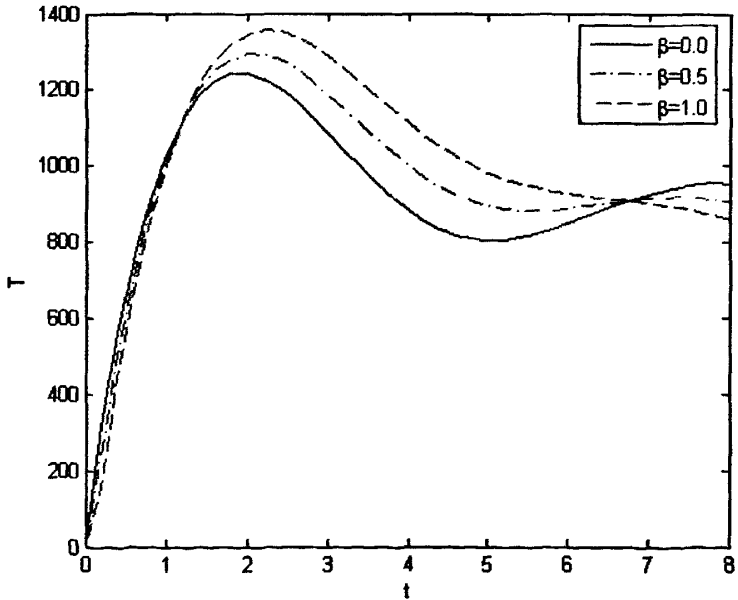


图 3-3 材料参数 β 对温度的影响 ($h = 0.5c$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

第四章 电冲击下含裂纹的功能梯度压电带粘接功能梯度压电带的热效应

4.1 问题的描述

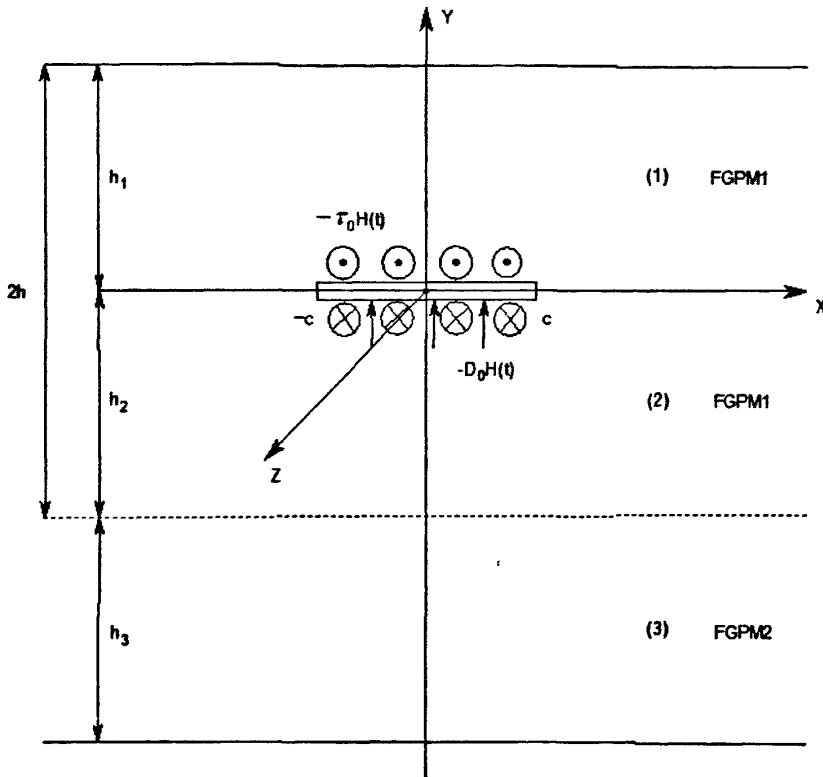


图 4-1 功能梯度压电带粘接功能梯度压电带热效应问题的结构示意图

考虑如图 4-1 所示的结构，一个高为 $2h$ 的功能梯度压电带内含一个长为 $2c$ 的裂纹，拼接一个高为 h_3 的功能梯度压电材料，采用直角坐标系 (x, y, z) ，其中 z 轴为功能梯度压电体的极轴。长为 $2c$ 的裂纹位于 x 轴上。假设 FGPM 包含两层，上层厚为 h_1 ，下层厚为 h_2 ，裂纹面上作用有电场冲击载荷。

同上一章，本构方程，平衡方程，和 Maxwell 静电平衡方程由 (3-1)，(3-2)，(3-3) 表示。

假设功能梯度压电材料的弹性模量，压电常数，介电常数和密度沿其厚度方向按指数函数变化，即：

$$c_{441}(y) = c_0 e^{\beta y}, \quad e_{151}(y) = e_0 e^{\beta y}, \quad \kappa_{111}(y) = \kappa_0 e^{\beta y}, \quad \rho_1(y) = \rho_0 e^{\beta y} \quad (4-1)$$

$$c_{442}(y) = c_0 e^{\beta y}, \quad e_{152}(y) = e_0 e^{\beta y}, \quad \kappa_{112}(y) = \kappa_0 e^{\beta y}, \quad \rho_2(y) = \rho_0 e^{\beta y} \quad (4-2)$$

$$c_{443}(y) = c_0 e^{\gamma y}, \quad e_{153}(y) = e_0 e^{\gamma y}, \quad \kappa_{112}(y) = \kappa_0 e^{\gamma y}, \quad \rho_2(y) = \rho_0 e^{\gamma y} \quad (4-3)$$

此问题非渗透性边界条件如下:

$$\sigma_{y1}(x, h_1, t) = \sigma_{y3}(x, -(h_2 + h_3), t) = 0 \quad (4-4)$$

$$D_{y1}(x, h_1, t) = D_{y3}(x, -(h_2 + h_3), t) = 0 \quad (4-5)$$

$$\sigma_{yz1}(x, 0, t) = \sigma_{yz2}(x, 0, t), \quad D_{y1}(x, 0, t) = D_{y2}(x, 0, t) \quad (4-6)$$

$$\sigma_{yz2}(x, -h_2, t) = \sigma_{yz3}(x, -h_2, t), \quad D_{y2}(x, -h_2, t) = D_{y3}(x, -h_2, t) \quad (4-7)$$

$$\omega_2(x, -h_2, t) = \omega_3(x, -h_2, t), \quad \phi_2(x, -h_2, t) = \phi_3(x, -h_2, t) \quad (4-8)$$

$$\omega_1(x, 0, t) = \omega_2(x, 0, t), \quad \phi_1(x, 0, t) = \phi_2(x, 0, t) \quad (|x| > c) \quad (4-9)$$

$$\sigma_{yz1}(x, 0, t) = -\tau_0 H(t), \quad D_{y1}(x, 0, t) = -D_0 H(t) \quad (-c < x < c) \quad (4-10)$$

τ_0 、 D_0 、 $H(t)$ 同上一章所示。

4.2 问题的求解

把(4-1), (4-2), (4-3)代入(3-1), (3-2), (3-3), 得:

$$c_0 \nabla^2 \omega_i + e_0 \nabla^2 \phi_i + c_0 \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial y} + e_0 \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2) \quad (4-11)$$

$$e_0 \nabla^2 \omega_i - \kappa_0 \nabla^2 \phi_i + e_0 \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial y} - \kappa_0 \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = 0 \quad (i=1,2) \quad (4-12)$$

$$c_0 \nabla^2 \omega_3 + e_0 \nabla^2 \phi_3 + c_0 \gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + e_0 \gamma \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \quad (4-13)$$

$$e_0 \nabla^2 \omega_3 - \kappa_0 \nabla^2 \phi_3 + e_0 \gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \kappa_0 \gamma \frac{\partial \phi_3}{\partial y} = 0 \quad (4-14)$$

令 $\psi_i = \phi_i - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega_i$, ($i=1,2,3$), (4-11)-(4-14)化为:

$$\nabla^2 \omega_i + \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = s_0 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2) \quad (4-15)$$

$$\nabla^2 \psi_i + \beta \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0 \quad (i=1,2) \quad (4-16)$$

$$\nabla^2 \omega_3 + \gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = s_0 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \quad (4-17)$$

$$\nabla^2 \psi_3 + \gamma \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = 0 \quad (4-18)$$

其中 $s_0 = \rho_0 / (c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0})$

对时间变量进行 Laplace 变换, 则方程(4-15)-(4-18)化为:

$$\nabla^2 \omega_i^* + \beta \frac{\partial \omega_i^*}{\partial y} = s_0 p^2 \omega_i^* \quad (i=1,2) \quad (4-19)$$

$$\nabla^2 \psi_i^* + \beta \frac{\partial \psi_i^*}{\partial y} = 0 \quad (i=1,2) \quad (4-20)$$

$$\nabla^2 \omega_3^* + \gamma \frac{\partial \omega_3^*}{\partial y} = s_0 p^2 \omega_3^* \quad (4-21)$$

$$\nabla^2 \psi_3^* + \gamma \frac{\partial \psi_3^*}{\partial y} = 0 \quad (4-22)$$

再对 x 变量进行 Fourier 变换, 方程(4-19)-(4-22)化为:

$$\omega_i^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_i(s, p)e^{t_1 y} + B_i(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} dx \quad (i=1,2) \quad (4-23)$$

$$\psi_i^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_i(s, p)e^{t_3 y} + D_i(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} dx \quad (i=1,2) \quad (4-24)$$

$$\omega_3^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(s, p)e^{t_5 y} + B_3(s, p)e^{t_6 y}] e^{-isx} dx \quad (4-25)$$

$$\psi_3^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_3(s, p)e^{t_7 y} + D_3(s, p)e^{t_8 y}] e^{-isx} dx \quad (4-26)$$

由变换 $\psi = \phi - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega$, 有:

$$\phi^*(x, y, p) = \psi_i^*(x, y, p) + \frac{e_0}{\kappa_0} \omega_i^*(x, y, p) \quad (4-27)$$

其中 $A_i(s, p)$, $B_i(s, p)$, $C_i(s, p)$, $D_i(s, p)$ ($i=1,2,3$) 为待定函数, 且

$$t_{10} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2}, \quad t_{11} = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2} \quad (4-28)$$

$$t_{20} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2}, \quad t_{21} = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2} \quad (4-29)$$

$$t_{30} = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2}, \quad t_{31} = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2} \quad (4-30)$$

$$t_{40} = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + s^2}, \quad t_{41} = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + s^2} \quad (4-31)$$

引入位错密度函数:

$$f^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial[\omega_1^*(x, 0, p) - \omega_2^*(x, 0, p)]}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (4-32)$$

$$g^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial[\phi_1^*(x, 0, p) - \phi_2^*(x, 0, p)]}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (4-33)$$

由(4-23)-(4-27)代入本构方程得:

$$\begin{aligned} \sigma_{yzi}^*(x, y, p) &= (c_0 e^{\beta y} + e_0 e^{\beta y} \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{10} A_i(s, p) e^{t_{10} y} + t_{11} B_i(s, p) e^{t_{11} y}] e^{-isx} dx \\ &\quad + e_0 e^{\beta y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{20} C_i(s, p) e^{t_{20} y} + t_{21} D_i(s, p) e^{t_{21} y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (4-34)$$

$$\begin{aligned} D_{yi}^*(x, y, p) &= (e_0 e^{\beta y} + \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{10} A_i(s, p) e^{t_{10} y} + t_{11} B_i(s, p) e^{t_{11} y}] e^{-isx} dx \\ &\quad - \kappa_0 e^{\beta y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{20} C_i(s, p) e^{t_{20} y} + t_{21} D_i(s, p) e^{t_{21} y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (4-35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz3}^*(x, y, p) &= (c_0 e^{\gamma y} + e_0 e^{\gamma y} \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{30} A_i(s, p) e^{t_{30} y} + t_{31} B_i(s, p) e^{t_{31} y}] e^{-isx} dx \\ &\quad + e_0 e^{\gamma y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{40} C_i(s, p) e^{t_{40} y} + t_{41} D_i(s, p) e^{t_{41} y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (4-36)$$

$$\begin{aligned} D_{y3}^*(x, y, p) &= (e_0 e^{\gamma y} + \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{30} A_i(s, p) e^{t_{30} y} + t_{31} B_i(s, p) e^{t_{31} y}] e^{-isx} dx \\ &\quad - \kappa_0 e^{\gamma y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{40} C_i(s, p) e^{t_{40} y} + t_{41} D_i(s, p) e^{t_{41} y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (4-37)$$

由(4-32)-(4-37)及边界条件(4-4)-(4-9), 得:

$$A_1 = \frac{t_{11} \Omega_1}{(t_{11} - t_{10}) \Omega_2} f \quad (4-38)$$

$$B_1 = \frac{t_{10} e^{t_{10} h} \Omega_1}{(t_{11} - t_{10}) \Omega_2} f \quad (4-39)$$

$$C_1 = \frac{t_{21} \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g \right) \quad (4-40)$$

$$D_1 = \frac{(t_{21} e^{t_{20} h/2} + t_{20} e^{t_{21} h/2}) \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g \right) \quad (4-41)$$

其中

$$f = \frac{1}{-is} \int_c f^*(t, p) e^{ist} dt, \quad g = \frac{1}{-is} \int_c g^*(t, p) e^{ist} dt \quad (4-42)$$

$$\Omega_1 = t_{10} [t_{11} (1 + e^{t_{30} h}) - t_{30} (1 - e^{t_{30} h})] + t_{11} e^{t_{10} h/2} [t_{30} (1 - e^{t_{30} h}) - t_{10} (1 + e^{t_{30} h})] \quad (4-43)$$

$$\Omega_2 = t_{10} e^{t_{10} h} [t_{11} (1 + e^{t_{30} h}) - t_{30} (1 - e^{t_{30} h})] + t_{11} e^{t_{10} h/2} [t_{30} (1 - e^{t_{30} h}) - t_{10} (1 + e^{t_{30} h})] \quad (4-44)$$

$$\Omega_3 = t_{20} [t_{21} (1 + e^{t_{40} h}) - t_{40} (1 - e^{t_{40} h})] + t_{21} e^{t_{21} h/2} [t_{40} (1 - e^{t_{40} h}) - t_{20} (1 + e^{t_{40} h})] \quad (4-45)$$

$$\Omega_4 = t_{20} e^{t_{21} h} [t_{21} (1 + e^{t_{40} h}) - t_{40} (1 - e^{t_{40} h})] + t_{21} e^{t_{21} h/2} [t_{40} (1 - e^{t_{40} h}) - t_{20} (1 + e^{t_{40} h})] \quad (4-46)$$

由(4-38)-(4-41), 本构方程(3-2) 以及边界条件 (4-10) 得到如下第一类 Cauchy 奇异积分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{\pi} \int_c \frac{f^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{e_0}{\pi} \int_c \frac{g^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{c_0}{\pi} \int_c [K_{11}(x, t, p) - \frac{e_0^2}{\kappa_0} K_{21}(x, t, p)] f^*(t, p) dt \\ + \frac{e_0}{\pi} \int_c K_{12}(x, t, p) g^*(t, p) dt = -\frac{\tau_0}{p e^{\beta h_2}} \end{aligned} \quad (4-47)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_0}{\pi} \int_c \frac{f^*(t, p)}{t-x} dt - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_c \frac{g^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{e_0}{\pi} \int_c K_{21}(x, t, p) f^*(t, p) dt \\ - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_c K_{22}(x, t, p) g^*(t, p) dt = -\frac{D_0}{p e^{\beta h_2}} \end{aligned} \quad (4-48)$$

其中:

$$K_{11} = \int_0^{+\infty} [U_1(s, p) - 1] \sin s(t-x) ds \quad (4-49)$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{22} = \int_0^{+\infty} [U_2(s, p) + 1] \sin s(t-x) ds \quad (4-50)$$

$$U_1(s, p) = \frac{1}{s} \cdot \frac{t_{10} t_{11} (1 - e^{t_{10} h}) \Omega_1}{(t_{11} - t_{10}) \Omega_2} \quad (4-51)$$

$$U_2(s, p) = \frac{1}{s} \cdot \frac{t_{20} t_{21} (1 - e^{t_{20} h/2}) \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \quad (4-52)$$

奇异积分方程组 (4-47), (4-48) 的单值条件为:

$$\begin{cases} f^*(0, p) = 0 \\ g^*(0, p) = 0 \end{cases} \quad (4-53)$$

同样的, 引入变量 $t = uc, x = rc$, 并令 $f^*(t, p) = F(u, p)$, $g^*(t, p) = G(u, p)$,

$K_{ij}(x, t, p) = K_{ij}^*(u, r, p) (i, j = 1, 2)$, 积分方程组 (4-47), (4-48) 化为:

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u, p)}{u-r} du + \frac{e_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(u, p)}{u-r} du + \frac{c_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 [K_{11}^*(r, u, p) - \frac{e_0^2}{\kappa_0} K_{21}^*(r, u, p)] \cdot F(u, p) du \\ + \frac{e_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}^*(r, u, p) G(u, p) du = -\frac{\tau_0}{pe^{\beta h_2}} \end{aligned} \quad (4-54)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u, p)}{u-r} du - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(u, p)}{u-r} du + \frac{e_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}^*(r, u, p) \cdot F(u, p) du \\ - \frac{\kappa_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}^*(r, u, p) G(u, p) du = -\frac{D_0}{pe^{\beta h_2}} \end{aligned} \quad (4-55)$$

$$F(0, p) = 0 \quad (4-56)$$

$$G(0, p) = 0 \quad (4-57)$$

利用 $F(0, p)$ 和 $G(0, p)$ 的 Chebyshev 多项式展开形式:

$$f^*(t, p) = F(u, p) = \frac{R(u, p)}{\sqrt{1-u^2}} \quad R(u, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(u, p) \quad (4-58)$$

$$g^*(t, p) = G(u, p) = \frac{S(u, p)}{\sqrt{1-u^2}} \quad S(u, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(u, p) \quad (4-59)$$

把 (4-58) 和 (4-59) 代入 (4-54) - (4-57), 并利用 Gauss-Chebyshev 积分公式, 得到如下线性方程组:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \left[\frac{c_0}{u_l - r_m} + c_0 c K_{11}^*(r_m, u_l, p) - \frac{c_0 c e_0}{\kappa_0} K_{21}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} \\ + \sum_{l=1}^N \left[\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{12}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{\tau_0}{pe^{\beta h_2}} \end{aligned} \quad (4-60)$$

$$\sum_{l=1}^N \left[\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{21}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} - \sum_{l=1}^N \left[\frac{\kappa_0}{u_l - r_m} + \kappa_0 c K_{22}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{D_0}{pe^{\beta h_2}} \quad (4-61)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{R(u_l, p)}{N} = 0 \quad (4-62)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{S(u_l, p)}{N} = 0 \quad (4-63)$$

其中:

$$u_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2N}\pi\right) \quad (l=1,2,\dots,N) \quad (4-64)$$

$$r_m = \cos\left(\frac{m}{N}\pi\right) \quad (m=1,2,\dots,N-1) \quad (4-65)$$

求解(4-60)-(4-63)这个 $2N$ 个未知数 $2N$ 个方程的方程组,即可得到 $R(u_l, p)$ 和 $S(u_l, p)$
($l=1,2,\dots,N$)。

4.3 裂纹尖端的温度场

同上一章,压电介质中温度场为:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{p_0} \int_0^t E(x, y, \tau) \frac{\partial D(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4-66)$$

由几何方程(3-1),本构方程(3-2)以及式(4-23), (4-24),有:

$$\begin{aligned} E_{x_1}^*(x, y, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \cdot \frac{e_0}{\kappa_0} [A_1(s, p)e^{i_0y} + B_1(s, p)e^{i_{11}y}] e^{-isx} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \cdot [C_1(s, p)e^{i_{20}y} + D_1(s, p)e^{i_{21}y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (4-67)$$

$$\begin{aligned} E_{y_1}^*(x, y, p) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} [t_{10}A_1(s, p)e^{i_0y} + t_{11}B_1(s, p)e^{i_{11}y}] e^{-isx} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{20}C_1(s, p)e^{i_{20}y} + t_{21}D_1(s, p)e^{i_{21}y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (4-68)$$

$$\begin{aligned} D_{x_1}^*(x, y, p) &= (e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-is) \cdot [A_1(s, p)e^{i_0y} + B_1(s, p)e^{i_{11}y}] e^{-isx} ds \\ &\quad - \kappa_{11} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-is) \cdot [C_1(s, p)e^{i_{20}y} + D_1(s, p)e^{i_{21}y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (4-69)$$

$$D_y^*(x, y, p) = (e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{10}A_1(s, p)e^{i_0y} + t_{11}B_1(s, p)e^{i_{11}y}] e^{-isx} ds$$

$$-\kappa_{11} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{20}C_1(s, p)e^{t_{20}y} + t_{21}D_1(s, p)e^{t_{21}y}] e^{-isx} ds \quad (4-70)$$

把(4-38)-(4-41)代入上式, 并利用(4-60)-(4-63)的解, 得到(4-66)中电场强度和电位移强度在 Laplace 变换域中的形式解为:

$$E_x^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{exl}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{ey2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (4-71)$$

$$E_y^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{ey1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{ex2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (4-72)$$

$$D_x^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{dx1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{dx2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (4-73)$$

$$D_y^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{dy1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{dy2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (4-74)$$

其中 $K_{exi}(u, x, y, p)$, $K_{eyi}(u, x, y, p)$, $K_{dxi}(u, x, y, p)$, $K_{dyi}(u, x, y, p)$ ($i=1,2$) 均为已知函数, 具体形式如下:

$$K_{ex1}(u, x, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_1 \Omega_1}{(t_{11}-t_{10})\Omega_2} \cdot e^{t_1 y} - \frac{t_{10} e^{t_{10} h} \Omega_1}{(t_{11}-t_{10})\Omega_2} e^{t_1 y} + \frac{t_{21} \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{20y} - \frac{(t_{21} e^{t_{20} h/2} + t_{20} e^{t_{21} h/2}) \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{t_2 y} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (4-75)$$

$$K_{ex2}(u, x, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(t_{21} e^{t_{20} h/2} + t_{20} e^{t_{21} h/2}) \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{t_2 y} - \frac{t_{21} \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{20y} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (4-76)$$

$$K_{ey1}(u, x, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_1 t_1 \Omega_1}{(t_{11}-t_{10})\Omega_2} \cdot e^{t_1 y} - \frac{t_1 t_{10} e^{t_{10} h} \Omega_1}{(t_{11}-t_{10})\Omega_2} e^{t_1 y} + \frac{t_{20} t_2 \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{20y} - \frac{t_{21} (t_{21} e^{t_{20} h/2} + t_{20} e^{t_{21} h/2}) \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{t_2 y} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (4-77)$$

$$K_{ey2}(u, x, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t_2 \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{20y} - \frac{(t_{21} e^{t_{20} h/2} + t_{20} e^{t_{21} h/2}) \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} e^{t_2 y} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (4-78)$$

$$K_{dxi}(u, x, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} (e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0}) \left[\frac{t_1 \Omega_1}{(t_{11}-t_{10})\Omega_2} \cdot e^{t_1 y} - \frac{t_{10} e^{t_{10} h} \Omega_1}{(t_{11}-t_{10})\Omega_2} \cdot e^{t_1 y} \right] + \kappa_{11} \left[\frac{t_2 \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} \cdot e^{20y} - \frac{(t_{21} e^{t_{20} h/2} + t_{20} e^{t_{21} h/2}) \Omega_3}{(t_{21}-t_{20})\Omega_4} \cdot e^{t_2 y} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (4-79)$$

$$K_{d2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \kappa_{11} \left[\frac{(t_2 e^{t_2 h_2} + t_2 e^{t_2 h_2}) \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \cdot e^{t_2 v} - \frac{t_2 \Gamma \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \cdot e^{t_2 v} \right] \cos[s(cu - x)] ds \quad (4-80)$$

$$K_{d1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \left(e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \left[\frac{t_1 t_1 \Omega_4}{(t_{11} - t_{10}) \Omega_2} \cdot e^{t_1 v} - \frac{t_1 t_1 e^{t_1 h_1} \Omega_4}{(t_{11} - t_{10}) \Omega_2} \cdot e^{t_1 v} \right] + \kappa_{11} \left[\frac{t_2 t_2 \Gamma \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \cdot e^{t_2 v} \right. \\ \left. - \frac{t_2 (t_{21} e^{t_2 h_2} + t_2 e^{t_2 h_2}) \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \cdot e^{t_2 v} \right] \sin[s(cu - x)] ds \quad (4-81)$$

$$K_{d2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} -\kappa_{11} \left[\frac{t_2 \Gamma \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \cdot e^{t_2 v} - \frac{(t_2 e^{t_2 h_2} + t_2 e^{t_2 h_2}) \Omega_3}{(t_{21} - t_{20}) \Omega_4} \cdot e^{t_2 v} \right] \sin[s(cu - x)] ds \quad (4-82)$$

通过 Laplace 变换的数值反演, 得到时间域中的电场强度和电位移, 然后根据(4-66)即可求出裂纹尖端的温度场。(4-75)-(4-82)在积分路径上不存在奇异点, 可直接进行数值计算。

4.4 结果与讨论

假定裂纹面 $y=0$ 处为压电材料 $BaTiO_3$, 其材料性质如下: $c_{44} = 44Gpa$, $e_{15} = 11.4C/m^2$, $\kappa_{11} = 128.3 \times 10^{10} C/Vm$, $\rho = 5700Kg/m^3$, 只考虑电冲击作用, 令 $\tau_0 = 0$ 。

图 4-2 给出了裂纹尺寸对温度的影响, 结果发现在时间一定的情况下, 温度随 c/h 的增大而升高, 温度上升达到一个峰值后逐渐趋于稳态。

图 4-3 给出了材料参数 β 对温度的影响, 可以看出: 随着时间的变化, 温度达到一个峰值后逐渐减小, 在其稳态值上下摆动。图 4-4 给出了材料参数 γ 对温度的影响, 在时间相同的情况下, γ 的值越大, 温度越高。

图 4-5 和图 4-6 给出了裂纹位置对温度的影响, 当 h_2/h_1 的值越大, 温度越高, 但影响不是太明显。而在 $h_3/2h$ 一定的情况下, 温度随时间变化的振荡比较大, 总的说来, $h_3/2h$ 的值越大, 温度越高。

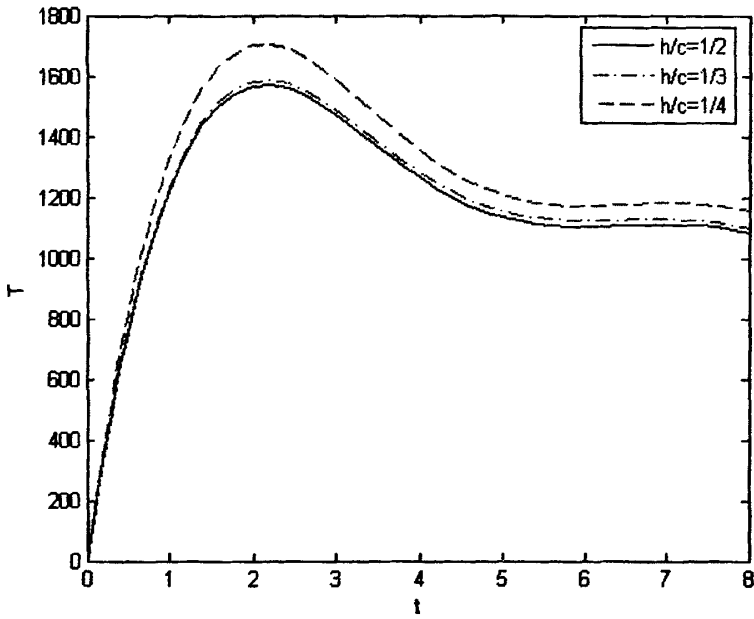


图 4-2 裂尖尺寸对温度的影响 ($\beta=0.5, \gamma=0.5, h_1=h_2=h_3, \tau_0=0, D_0=5 \times 10^4$)

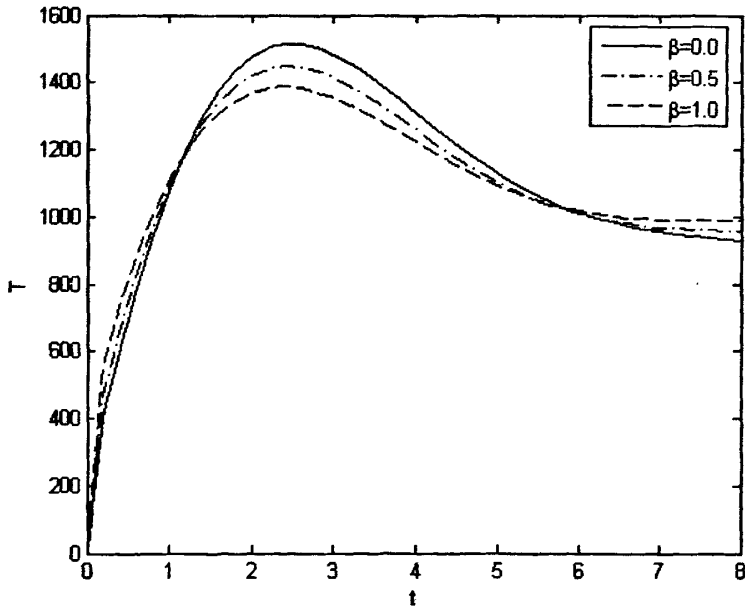


图 4-3 材料参数 β 对温度的影响 ($\gamma=0.5, h_1=h_2=h_3=0.5c, \tau_0=0, D_0=5 \times 10^4$)

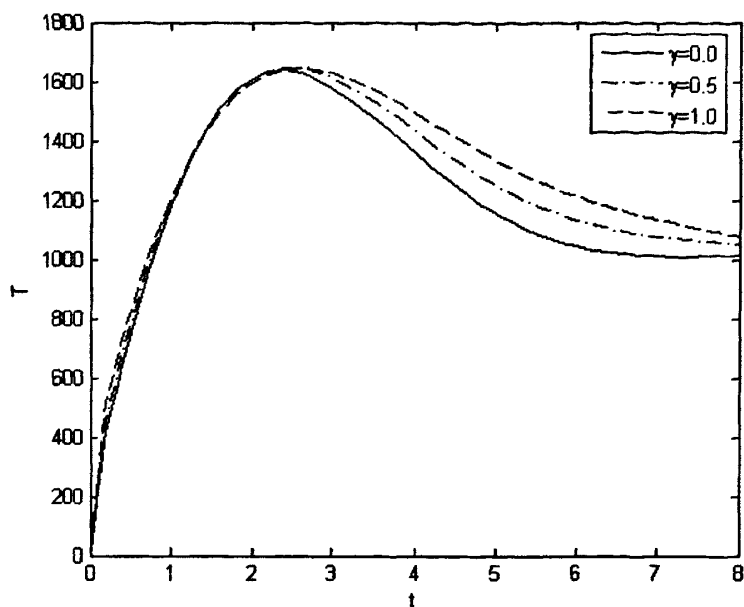


图 4-4 材料参数 γ 对温度的影响 ($\beta = 0.5, h_1 = h_2 = h_3 = 0.5c, \tau_0 = 0, D_0 = 5 \times 10^4$)

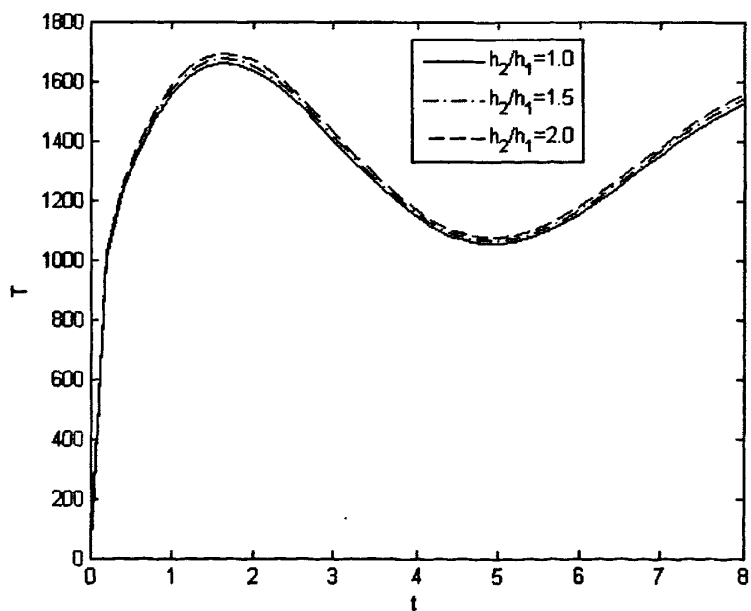


图 4-5 裂纹位置对温度的影响 ($\beta = 0.5, \gamma = 0.5, h = h_3 = 0.5c, \tau_0 = 0, D_0 = 5 \times 10^4$)

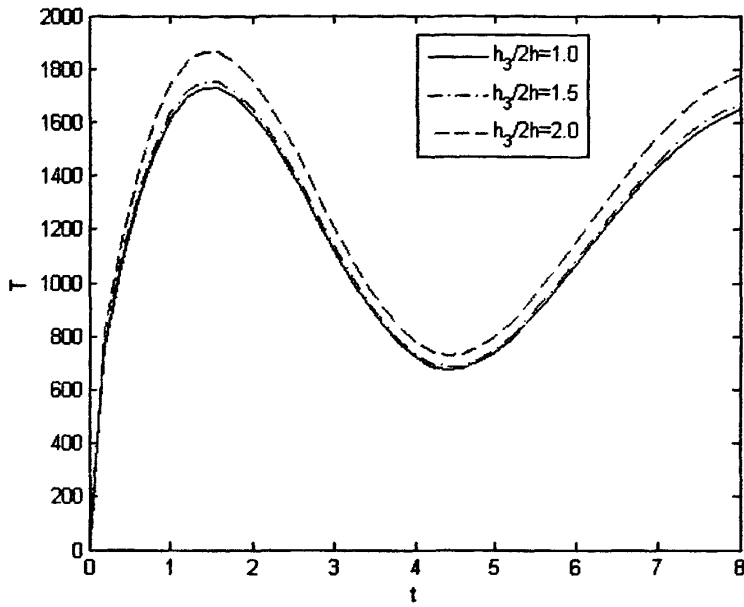


图 4-6 裂纹位置对温度的影响($\beta = 0.5, \gamma = 0.5, h_1 = h_2 = 0.5c, \tau_0 = 0, D_0 = 5 \times 10^4$)

第五章 电冲击下含裂纹的功能梯度压电带粘接半无限大均匀压电材料的热效应

5.1 问题的描述

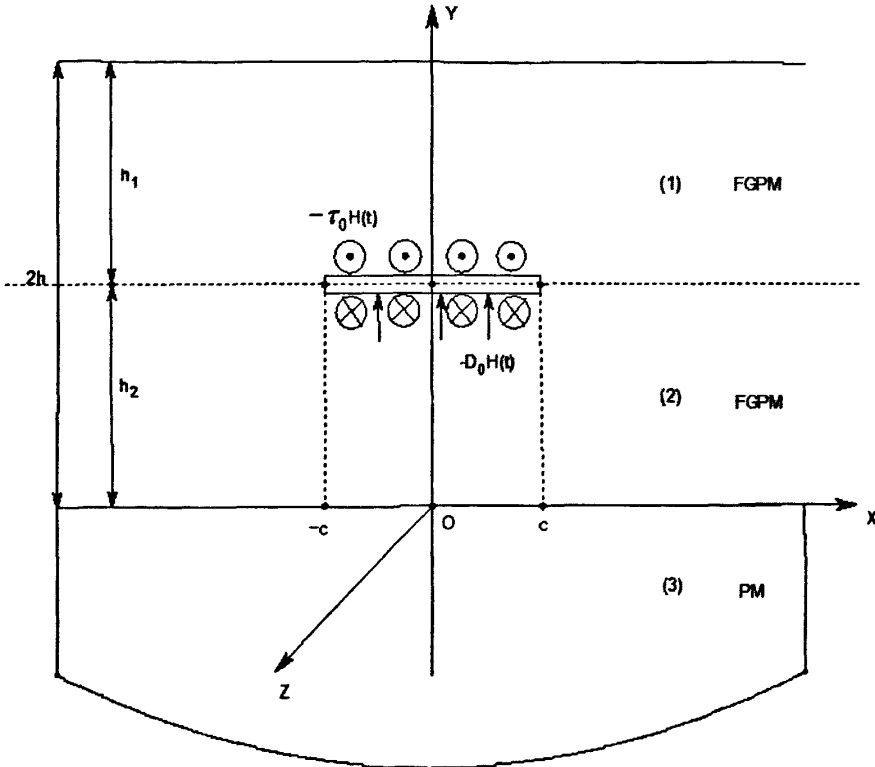


图 5-1 功能梯度压电带粘接半无限大均匀压电材料热效应问题的结构示意图

考虑如图 5-1 所示的结构，一个高为 $2h$ 的功能梯度压电带内含一个长为 $2c$ 的裂纹，下平面为一半无限大均匀压电材料，采用直角坐标系 (x, y, z) ，极化方向仍为 z 轴。同样假设 FGPM 包含两层，上层厚为 h_1 ，下层厚为 h_2 ，裂纹面上作用有电场冲击载荷。

同样，本构方程，平衡方程，和 Maxwell 静电平衡方程由 (3-1)，(3-2)，(3-3) 表示。

假设功能梯度压电材料的弹性模量，压电常数，介电常数和密度沿其厚度方向按指数函数变化，即：

$$c_{44i}(y) = c_0 e^{\beta y}, \quad e_{15i}(y) = e_0 e^{\beta y}, \quad \kappa_{11i}(y) = \kappa_0 e^{\beta y}, \quad \rho_i(y) = \rho_0 e^{\beta y} \quad (i=1,2) \quad (5-1)$$

$$c_{443} = c_0 e^{-\beta h_2}, \quad e_{153} = e_0 e^{-\beta h_2}, \quad \kappa_{113} = \kappa_0 e^{-\beta h_2}, \quad \rho_3 = \rho_0 e^{-\beta h_2} \quad (5-2)$$

此问题非渗透性边界条件如下：

$$\sigma_{y1}(x, h_1 + h_2, t) = 0, \quad D_{y1}(x, h_1 + h_2, t) = 0 \quad (5-3)$$

$$\sigma_{yz1}(x, h_2, t) = \sigma_{yz2}(x, h_2, t), \quad D_{y1}(x, h_2, t) = D_{y2}(x, h_2, t) \quad (5-4)$$

$$\sigma_{yz2}(x, 0, t) = \sigma_{yz3}(x, 0, t), \quad D_{y2}(x, 0, t) = D_{y3}(x, 0, t) \quad (5-5)$$

$$\omega_2(x, 0, t) = \omega_3(x, 0, t), \quad \phi_2(x, 0, t) = \phi_3(x, 0, t) \quad (5-6)$$

$$\omega_1(x, h_2, t) = \omega_2(x, h_2, t), \quad \phi_1(x, h_2, t) = \phi_2(x, h_2, t) \quad (|x| > c) \quad (5-7)$$

$$\sigma_{yz1}(x, h_2, t) = -\tau_0 H(t), \quad D_{y1}(x, h_2, t) = -D_0 H(t) \quad (-c < x < c) \quad (5-8)$$

其中 τ_0 、 D_0 、 $H(t)$ 同第三章所示。

5.2 问题的求解

把(5-1), (5-2)代入(3-1), (3-2), (3-3), 得:

$$c_0 \nabla^2 \omega_i + e_0 \nabla^2 \phi_i + c_0 \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial y} + e_0 \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2) \quad (5-9)$$

$$e_0 \nabla^2 \omega_i - \kappa_0 \nabla^2 \phi_i + e_0 \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial y} - \kappa_0 \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (5-10)$$

$$c_0 \nabla^2 \omega_3 + e_0 \nabla^2 \phi_3 = \rho_0 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \quad (5-11)$$

$$e_0 \nabla^2 \omega_3 - \kappa_0 \nabla^2 \phi_3 = 0 \quad (5-12)$$

令 $\psi_i = \phi_i - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega_i$, ($i = 1, 2, 3$), (5-9)-(5-12)化为:

$$\nabla^2 \omega_i + \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = s_0 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2) \quad (5-13)$$

$$\nabla^2 \psi_i + \beta \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (5-14)$$

$$\nabla^2 \omega_3 = s_0 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \quad (5-15)$$

$$\nabla^2 \psi_3 = 0 \quad (5-16)$$

$$\text{其中 } s_0 = \rho_0 / (c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0})$$

对时间变量进行 Laplace 变换, 则方程(5-13)-(5-16)化为:

$$\nabla^2 \omega_i^* + \beta \frac{\partial \omega_i^*}{\partial y} = s_0 p^2 \omega_i^* \quad (i=1,2) \quad (5-17)$$

$$\nabla^2 \psi_i^* + \beta \frac{\partial \psi_i^*}{\partial y} = 0 \quad (i=1,2) \quad (5-18)$$

$$\nabla^2 \omega_3^* = s_0 p^2 \omega_3^* \quad (5-19)$$

$$\nabla^2 \psi_3^* = 0 \quad (5-20)$$

再对 x 变量进行 Fourier 变换, 方程(5-17)-(5-20)化为:

$$\omega_i^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_i(s, p)e^{t_{10}y} + B_i(s, p)e^{t_{11}y}] e^{-isx} dx \quad (i=1,2) \quad (5-21)$$

$$\psi_i^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_i(s, p)e^{t_{20}y} + D_i(s, p)e^{t_{21}y}] e^{-isx} dx \quad (i=1,2) \quad (5-22)$$

$$\omega_3^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(s, p)e^{t_{30}y} + B_3(s, p)e^{-t_{30}y}] e^{-isx} dx \quad (5-23)$$

$$\psi_3^*(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_3(s, p)e^{t_{30}y} + D_3(s, p)e^{-t_{30}y}] e^{-isx} dx \quad (5-24)$$

$$\phi^*(x, y, p) = \psi_i^*(x, y, p) + \frac{e_0}{\kappa_0} \omega_i^*(x, y, p) \quad (5-25)$$

其中 $A_i(s, p)$, $B_i(s, p)$, $C_i(s, p)$, $D_i(s, p)$ ($i=1,2,3$) 为待定函数, 且

$$t_{10} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 + s^2 + s_0 p^2}, \quad t_{11} = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 + s^2 + s_0 p^2} \quad (5-26)$$

$$t_{20} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 + s^2}, \quad t_{21} = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 + s^2} \quad (5-27)$$

$$t_{30} = \sqrt{s^2 + s_0 p^2} \quad (5-28)$$

引入位错密度函数:

$$f^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial [\omega_1^*(x, h_2, p) - \omega_2^*(x, h_2, p)]}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (5-29)$$

$$g^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial[\phi_1^*(x, h_2, p) - \phi_2^*(x, h_2, p)]}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (5-30)$$

由于 ω_3 , ϕ_3 在无穷远处为零, 故待定常数 $B_3(s, p)$, $D_3(s, p)$ 为零。把 (5-21)-(5-25) 和代入本构方程得:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^*(x, y, p) = & (c_0 e^{\beta y} + e_0 e^{\beta y} \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{10} A_i(s, p) e^{i_0 y} + t_{11} B_i(s, p) e^{i_1 y}] e^{-isx} dx \\ & + e_0 e^{\beta y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{20} C_i(s, p) e^{i_{20} y} + t_{21} D_i(s, p) e^{i_{21} y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (5-31)$$

$$\begin{aligned} D_{yi}^*(x, y, p) = & (e_0 e^{\beta y} + \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{10} A_i(s, p) e^{i_0 y} + t_{11} B_i(s, p) e^{i_1 y}] e^{-isx} dx \\ & - \kappa_0 e^{\beta y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{20} C_i(s, p) e^{i_{20} y} + t_{21} D_i(s, p) e^{i_{21} y}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (5-32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^*(x, y, p) = & (c_0 e^{-\beta h_2} + e_0 e^{-\beta h_2} \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{30} A_i(s, p) e^{i_{30} y} - t_{30} B_i(s, p) e^{-i_{30} y}] e^{-isx} dx \\ & + e_0 e^{-\beta h_2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [s C_i(s, p) e^{sy} - s D_i(s, p) e^{-sy}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (5-33)$$

$$\begin{aligned} D_{y3}^*(x, y, p) = & (e_0 e^{-\beta h_2} + \frac{e_0}{\kappa_0}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [t_{30} A_i(s, p) e^{i_{30} y} - t_{30} B_i(s, p) e^{-i_{30} y}] e^{-isx} dx \\ & - \kappa_0 e^{-\beta h_2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [s C_i(s, p) e^{sy} - s D_i(s, p) e^{-sy}] e^{-isx} dx \end{aligned} \quad (5-34)$$

由 (5-31)-(5-34) 及边界条件 (5-3)-(5-7), 得:

$$A_i = \frac{t_{11}[t_{10}(t_{11} - t_{30})]e^{i_{10}h_2} + t_{11}(t_{30} - t_{10})e^{i_{11}h_2}}{(t_{11} - t_{10})\Omega_1} f \quad (5-35)$$

$$B_i = \frac{t_{10}e^{i_{10}h_2}[t_{10}(t_{11} - t_{30})e^{i_{10}h_2} + t_{11}(t_{30} - t_{10})e^{i_{11}h_2}]}{(t_{11} - t_{10})\Omega_1} f \quad (5-36)$$

$$C_i = \frac{t_{21}[t_{20}(s - t_{21})e^{i_{20}h_2} + t_{21}(t_{20} - s)e^{i_{21}h_2}]}{(t_{21} - t_{20})\Omega_2} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g\right) \quad (5-37)$$

$$D_i = \frac{t_{20}e^{i_{20}h_2}[t_{20}(s - t_{21})e^{i_{20}h_2} + t_{21}(t_{20} - s)e^{i_{21}h_2}]}{(t_{21} - t_{20})\Omega_2} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g\right) \quad (5-38)$$

其中

$$f = \frac{1}{-is} \int_{-c}^c f^*(t, p) e^{ist} dt, \quad g = \frac{1}{-is} \int_{-c}^c g^*(t, p) e^{ist} dt \quad (5-39)$$

$$\Omega_1 = t_{10}(t_{11} - t_{30})e^{-2i_{10}h_2} e^{i_{11}h_2} + t_{11}(t_{30} - t_{10})e^{i_{11}h_2} \quad (5-40)$$

$$\Omega_2 = t_{20}(t_{21} - s)e^{-2t_{20}h_2}e^{t_{21}h_1} + t_{21}(s - t_{20})e^{t_{21}h_2} \quad (5-41)$$

由(5-35)-(5-38), 本构方程(3-2)以及边界条件(5-8)得到如下第一类 Cauchy 奇异积分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{\pi} \int_c^f \frac{f^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{e_0}{\pi} \int_c^f \frac{g^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{c_0}{\pi} \int_c^f [K_{11}(x, t, p) - \frac{e_0^2}{\kappa_0} K_{21}(x, t, p)] f^*(t, p) dt \\ + \frac{e_0}{\pi} \int_c^f K_{12}(x, t, p) g^*(t, p) dt = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (5-42)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_0}{\pi} \int_c^f \frac{f^*(t, p)}{t-x} dt - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_c^f \frac{g^*(t, p)}{t-x} dt + \frac{e_0}{\pi} \int_c^f K_{21}(x, t, p) f^*(t, p) dt \\ - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_c^f K_{22}(x, t, p) g^*(t, p) dt = -\frac{D_0}{p} \end{aligned} \quad (5-43)$$

其中:

$$K_{11} = \int_0^\infty [U_1(s, p) - 1] \sin s(t-x) dx \quad (5-44)$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{22} = \int_0^\infty [U_2(s, p) + 1] \sin s(t-x) dx \quad (5-45)$$

$$U_1(s, p) = \frac{1}{s} \cdot \frac{t_{10}t_{11}e^{t_{10}h_2} [t_{10}(t_{11} - t_{30})e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30} - t_{10})e^{t_{11}h_2}]}{(t_{11} - t_{10})\Omega_1} \cdot (1 - e^{t_{11}h_1}) \quad (5-46)$$

$$U_2(s, p) = \frac{1}{s} \cdot \frac{t_{20}t_{21}e^{t_{20}h_2} [t_{20}(t_{21} - s)e^{t_{20}h_2} + t_{21}(s - t_{20})e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21} - t_{20})\Omega_2} \cdot (1 - e^{t_{21}h_1}) \quad (5-47)$$

奇异积分方程组(5-42), (5-43)的单值条件为:

$$\begin{cases} f^*(0, p) = 0 \\ g^*(0, p) = 0 \end{cases} \quad (5-48)$$

令 $t = uc, x = rc$, $f^*(t, p) = F(u, p)$, $g^*(t, p) = G(u, p)$, $K_{ij}(x, t, p) = K_{ij}^*(u, r, p) (i, j = 1, 2)$, 积分方程组(5-42), (5-43)化为:

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{\pi} \int_1^f \frac{F(u, p)}{u-r} du + \frac{e_0}{\pi} \int_1^f \frac{G(u, p)}{u-r} du + \frac{c_0 c}{\pi} \int_1^f [K_{11}^*(u, r, p) - \frac{e_0^2}{\kappa_0} K_{21}^*(u, r, p)] \cdot F(u, p) du \\ + \frac{e_0 c}{\pi} \int_1^f K_{12}^*(u, r, p) G(u, p) du = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (5-49)$$

$$\frac{e_0}{\pi} \int_1^f \frac{F(u, p)}{u-r} du - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_1^f \frac{G(u, p)}{u-r} du + \frac{e_0 c}{\pi} \int_1^f K_{21}^*(u, r, p) \cdot F(u, p) du$$

$$-\frac{\kappa_0 c}{\pi} \int_1^l K_{22}^*(u, r, p) G(u, p) du = -\frac{D_0}{p} \quad (5-50)$$

$$F(0, p) = 0 \quad (5-51)$$

$$G(0, p) = 0 \quad (5-52)$$

利用 $F(0, p)$ 和 $G(0, p)$ 的 Chebyshev 多项式展开形式:

$$f^*(t, p) = F(u, p) = \frac{R(u, p)}{\sqrt{1-u^2}} \quad R(u, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(u, p) \quad (5-54)$$

$$g^*(t, p) = G(u, p) = \frac{S(u, p)}{\sqrt{1-u^2}} \quad S(u, p) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n T_n(u, p) \quad (5-55)$$

把 (5-54) 和 (5-55) 代入 (5-49) - (5-52), 并利用 Gauss-Chebyshev 积分公式, 得到如下线性方程组:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \left[\frac{c_0}{u_l - r_m} + c_0 c K_{11}^*(r_m, u_l, p) - \frac{c_0 c e_0}{\kappa_0} K_{21}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} \\ + \sum_{l=1}^N \left[\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{12}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (5-56)$$

$$\sum_{l=1}^N \left[\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{21}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} - \sum_{l=1}^N \left[\frac{\kappa_0}{u_l - r_m} + \kappa_0 c K_{22}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{D_0}{p} \quad (5-57)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{R(u_l, p)}{N} = 0 \quad (5-58)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{S(u_l, p)}{N} = 0 \quad (5-59)$$

其中:

$$u_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2N} \pi\right) \quad (l=1, 2, \dots, N) \quad (5-60)$$

$$r_m = \cos\left(\frac{m}{N} \pi\right) \quad (m=1, 2, \dots, N-1) \quad (5-61)$$

求解 (5-56) - (5-59) 后即可得到 $R(u_l, p)$ 和 $S(u_l, p)$ ($l=1, 2, \dots, N$)。

5.3 裂纹尖端的温度场

同样, 压电介质中温度场为:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{p_0} \int_0^t E(x, y, \tau) \frac{\partial D(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5-62)$$

由几何方程(3-1), 本构方程(3-2)以及式(5-21), (5-22), 有:

$$\begin{aligned} E_{x_1}^*(x, y, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} is \cdot \frac{e_0}{\kappa_0} [A_1(s, p)e^{i_0 y} + B_1(s, p)e^{i_{11} y}] e^{-isx} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} is \cdot [C_1(s, p)e^{i_{20} y} + D_1(s, p)e^{i_{21} y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (5-63)$$

$$\begin{aligned} E_{y_1}^*(x, y, p) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} [t_{10} A_1(s, p)e^{i_0 y} + t_{11} B_1(s, p)e^{i_{11} y}] e^{-isx} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [t_{20} C_1(s, p)e^{i_{20} y} + t_{21} D_1(s, p)e^{i_{21} y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (5-64)$$

$$\begin{aligned} D_{x_1}^*(x, y, p) &= (e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-is) \cdot [A_1(s, p)e^{i_0 y} + B_1(s, p)e^{i_{11} y}] e^{-isx} ds \\ &\quad - \kappa_{11} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-is) \cdot [C_1(s, p)e^{i_{20} y} + D_1(s, p)e^{i_{21} y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (5-65)$$

$$\begin{aligned} D_{y_1}^*(x, y, p) &= (e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [t_{10} A_1(s, p)e^{i_0 y} + t_{11} B_1(s, p)e^{i_{11} y}] e^{-isx} ds \\ &\quad - \kappa_{11} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [t_{20} C_1(s, p)e^{i_{20} y} + t_{21} D_1(s, p)e^{i_{21} y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (5-66)$$

把(5-35)-(5-38)代入上式, 并利用(5-56)-(5-59)的解, 得到(5-62)中电场强度和电位移强度在 Laplace 变换域中的形式解为:

$$E_x^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{\alpha 1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{\alpha 2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (5-67)$$

$$E_y^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{\sigma 1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{\sigma 2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (5-68)$$

$$D_x^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{d 1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{d 2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (5-69)$$

$$D_y^*(x, y, p) = c \left[\sum_{l=1}^N K_{\phi 1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} + \sum_{l=1}^N K_{\phi 2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \quad (5-70)$$

其中 $K_{exi}(u, x, y, p)$, $K_{eyi}(u, x, y, p)$, $K_{dxi}(u, x, y, p)$, $K_{dyi}(u, x, y, p)$ ($i = 1, 2$) 均为已知函数, 具体形式如下:

$$K_{ex1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_{11}[t_{10}(t_{11}-t_{30})]e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \cdot e^{t_{10}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{10}e^{t_{10}h_2}[t_{10}(t_{11}-t_{30})e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}]}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \cdot e^{t_{11}y} + \kappa_{11} \left[\frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{21}y} \right] \cos[s(cu-x)] ds \right] \quad (5-71)$$

$$K_{ex2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \left[\frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{21}y} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (5-72)$$

$$K_{ey1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_{10}t_{11}e^{t_{10}y}[t_{10}(t_{11}-t_{30})]e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \right. \\ \left. - \frac{t_{11}t_{10}e^{t_{10}h_2}e^{t_{11}y}[t_{10}(t_{11}-t_{30})e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}]}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} + \frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{21}y} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (5-73)$$

$$K_{ey2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \left[\frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{21}y} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (5-74)$$

$$K_{dx1}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} (e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0}) \left[\frac{t_{11}[t_{10}(t_{11}-t_{30})]e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \cdot e^{t_{10}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{10}e^{t_{10}h_2}[t_{10}(t_{11}-t_{30})e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}]}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \cdot e^{t_{11}y} \right] + \kappa_{11} \left[\frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{21}y} \right] \cos[s(cu-x)] ds \quad (5-75)$$

$$K_{dx2}(u, x, y, p) = \int_0^{\infty} \kappa_{11} \left[\frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{21}y} \right] \cos[s(cu-x)] ds$$

$$-\frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \cos[s(cu-x)] ds \quad (5-76)$$

$$K_{\phi_1}(u, x, y, p) = \int_0^\infty (e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0}) \left[\frac{t_{10}t_{11}[t_{10}(t_{11}-t_{30})]e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \cdot e^{t_{10}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{11}t_{10}e^{t_{10}h_2}[t_{10}(t_{11}-t_{30})e^{t_{10}h_2} + t_{11}(t_{30}-t_{10})e^{t_{11}h_2}]}{(t_{11}-t_{10})\Omega_1} \cdot e^{t_{10}y} \right] + \kappa_{11} \left[\frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (5-77)$$

$$K_{\phi_2}(u, x, y, p) = \int_0^\infty -\kappa_{11} \left[\frac{t_{20}e^{t_{20}h_2}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right. \\ \left. - \frac{t_{21}[t_{20}(s-t_{21})e^{t_{20}h_2} + t_{21}(t_{20}-s)e^{t_{21}h_2}]}{(t_{21}-t_{20})\Omega_2} \cdot e^{t_{20}y} \right] \sin[s(cu-x)] ds \quad (5-78)$$

同样，通过 Laplace 变换的数值反演，得到时间域中的电场强度和电位移，然后根据 (5-62) 即可求出裂纹尖端的温度场。(5-71)-(5-78) 在积分路径上不存在奇异点，可直接进行数值计算。

5.4 结果与讨论

考虑材料参数、裂纹尺寸和位置对温度的影响，假设裂纹面 $y=0$ 处的压电材料为 $BaTiO_3$ ，其材料性质： $c_{44}=44Gpa$ ， $e_{15}=11.4C/m^2$ ， $\kappa_{11}=128.3 \times 10^{10} C/Vm$ ， $\rho=5700Kg/m^3$ ，只考虑电冲击作用，故令 $\tau_0=0$ 。

图 5-2 给出了裂纹尺寸对温度的影响，结果表明在时间一定的情况下，温度随 c/h 的增大而升高，在波动后趋于稳态。

图 5-3 说明了裂纹尖端的温度与材料参数有关，结果表明 β 的值越大，温度值越大。

图 5-4 说明了裂纹位置对温度的影响，可以看出：当 h_2/h_1 一定时，温度随时间变化的在波动后上升，且 h_2/h_1 的比值越大，温度越高。

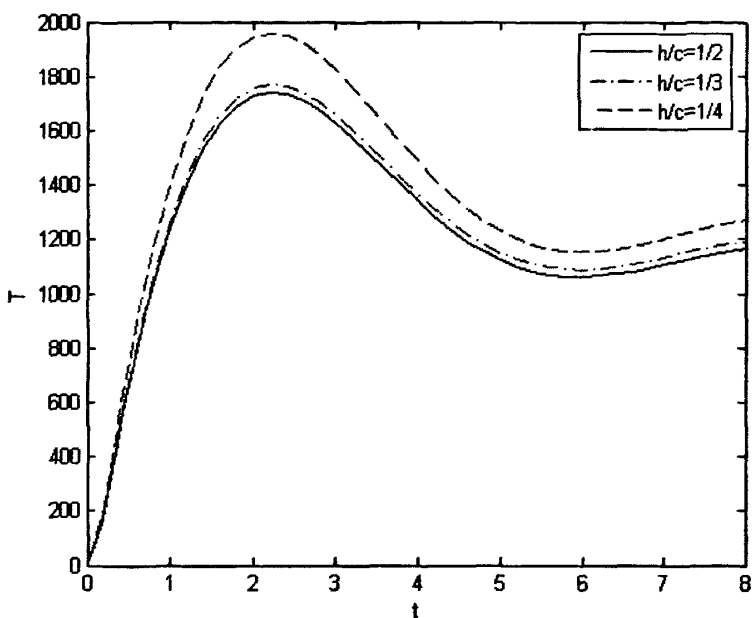


图 5-2 裂纹尺寸对温度的影响 ($\beta=0.5, h_1=h_2, \tau_0=0, D_0=5 \times 10^4$)

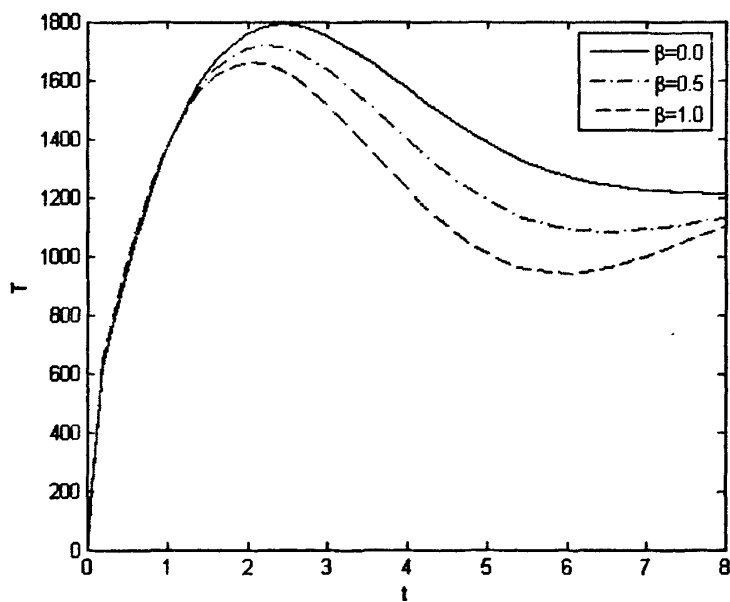


图 5-3 材料参数 β 对温度的影响 ($\tau_0=0, h_1=h_2=0.5c, D_0=5 \times 10^4$)

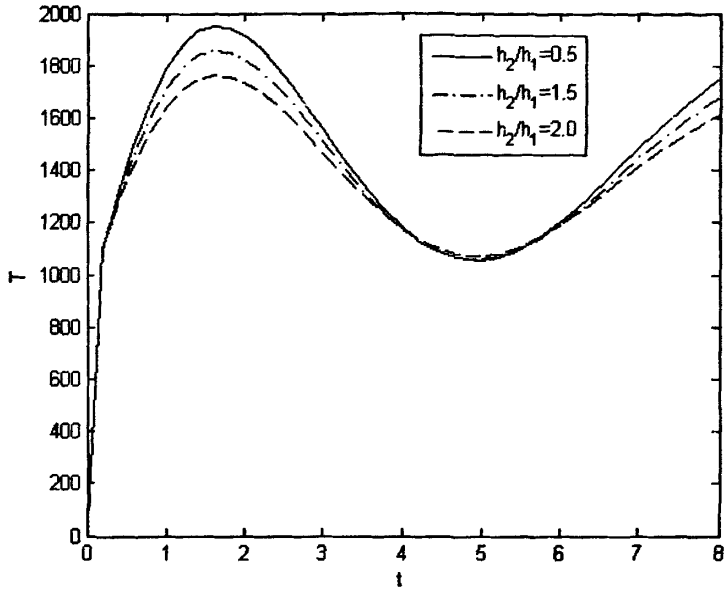


图 5-4 裂纹位置对温度的影响 ($\beta = 0.5$, $h = 0.5c$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

第六章 结论与展望

结论

本文运用积分变换技术结合奇异积分方程数值解法,求解了三类电冲击下含裂纹的功能梯度压电带热效应问题,每一种模型都给出了数值算例,讨论了梯度指数、材料厚度、裂纹尺寸、裂纹位置对电冲击下裂纹尖端温度的影响,说明了电冲击下功能梯度压电材料热效应的不可忽视性。

展望

尽管断裂动力学问题已经有了很多研究,但是研究功能梯度压电材料和功能梯度压电电压磁材料中裂纹的动态冲击问题还是比较少,特别对于其中的热效应问题还有待深入研究:

1. 功能梯度压电材料层合结构中多裂纹的动态冲击问题;
2. 功能梯度压电电压磁材料中的动态冲击问题;
3. 对于力、电、热等多耦合场情况应该作进一步的探讨。

参考文献

- [1] 孙慷,张福学. 压电学.北京:国防工业出版社,1984.
- [2] Parton V Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astro*, 1976,3:671-683
- [3] Deeg W F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids. [Ph D Thesis] University,Stanford,California,USA,1980
- [4] T H Hao,Z Y Shen. A new electric boundary conditions of electric fracture mechanics and its applications. *Engineering Fracture Mechanics*,1994,47:793-802
- [5] S Kumar,R N Singh. Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings. *Acta Materialia*,1996,44(1):173-200
- [6] S Kumar,R N Singh. Influence of applied electric field and mechanical boundary condition on the stress distribution at the crack tip in piezoelectric materials. *Materials Science and Engineering*, 1997,A231:1-9
- [7] Dascalu C, Homentcovschi D. An intermediate crack model for flaws in piezoelectric solids. *Acta Mechanica*,2000,154:85-100
- [8] Tobin A G, Pak Y E. Effect of electric fields on fracture behavior of PZT ceramics. *Proc. SPIE* 1961,Smart Struck Mater,1993:78-86
- [9] McHenry K D, Koepke B G. Electric field effects on subcritical crack growth in PZT. *Fracture Mech.Ceram*,1983,5:337-352
- [10] Pak Y E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric material. *Int. J Fracture*,1992,54: 79-100
- [11] Park S B. Sun C T. Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics. *Int. J Fracture*, 1995,70:203-216
- [12] Gao H J, Zhang T Y. Tong P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic. *J.Mech.Phys.Solids*,1997,45(4):491-510
- [13] Sosa H A. On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int. J. Solids Struct*,1992,29(21): 2613-2622
- [14] Wang B. Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material. *Int. J. Solids Struct*, 1992,29(3):293-308
- [15] Dum M I. Electroelastic Green's functions for transversely isotropic piezoelectric media and their application to the solution of inclusion and in homogeneity problems. *Int. J. Engng. Sci*, 1994,32(1):119-131
- [16] Jiang B, Fang D N, Huang K C. A unified model for piezocomposites with non-piezoelectric matrix and piezoelectric ellipsoidal inclusion. *Int. J. Solids Struct*,1999,36:2707-2733
- [17] Yu S W, Qin Q H. Damage analysis of thermopiezoelectric properties. Part I: Crack tip singularity. *Theor. Appl. Fracture Mech*,1996,9:253-277
- [18] Du S Y, Liang J, Han J C. General coupled solution of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion. *Acta Mech.Sinica*,1994,10(3):273-281
- [19] 王自强. 压电材料裂纹顶端条状电饱和区模型的力学分析. *力学学报*,1999,31(3):311-319

- [20] Wang T C. Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials. *Int. J. Solids Struct*,2000,(37):6031-6049
- [21] Ru C R. Effect of electrical polarization saturation on stress intensity factor in a piezoelectric ceramic. *Int. J Solids Struct*, 1999,36:869-883
- [22] Shen S P, Nishioka T, Duang Z B. Nonlinear electromechanical interfacial fracture for piezoelectric materials. *Mech.Mater*,2000,32(1):57-64
- [23] Chen Z T, Yu S W. Anti-plane dynamics fracture mechanics in piezoelectric materials. *Int.J. Fracture*,1997,85:1.3-1.12
- [24] Chen Z T, Yu S W. Crack tip fields of piezoelectric material under antiplane impact. *Chinese Science Bullitin*,1997,42(9):1615-1619
- [25] Chen Z T, Yu S W. Transient response of cracked piezoelectric strip under arbitrary electro-mechanical impact. *Acta Mechanica Sinica (English series)*,1998,14(3):248-256
- [26] Chen Z T, Karihallo B L. Dynamic response of a cracked piezoelectric ceramic under arbitrary elect-mechanical impact. *Int. J. Solids struct*,1999,36:5125-5133
- [27] Chen Z T, Meguid S A. The transient response of a piezoelectric with a vertical crack under electromechanical impact load. *Int.J. Solids Struct*,2000,37:6051-6062
- [28] Chen Z T, Yu S W. Transient response of a piezoelectric ceramics with two coplanar cracks under electromechanical impact. *Acta Mechanica Sinica(English Series)*,1999,15(4):325-333
- [29] Chen Z T, Worswick M J. Antiplane mechanical and implane electric time-dependent load applied to two coplanar cracks in piezoelectric ceramic material. *Theor. Appl.Frature Mech*, 2000,33,173-184
- [30] Meguixl S A, Chen Z T. Transient response of a finite piezoelectric strip containing coplanar insulating cracks under electromechanical impact.*Mech.Mater*,200133,85-96
- [31] Wang X Y, Yu S W. Transient response of a crack in piezoelectric strip subjected to the mechanical and electrical impacts: mode-III problem. *Int.J. Solids Struct*,2000,37:5795-5808
- [32] Wang X Y, Yu S W. Transient response of a crack in piezoelectric strip subjected to the mechanical and electrical impacts mode-I problem. *Mech.Mater*,2001,33:11-20
- [33] Shen S P., Nishioka T, Kuang Z B. Impact interfacial fracture for piezoelectric ceramic. *Mech. Res.Comm.*,1999,26(3):347-352
- [34] 牛得泉. 功能梯度压电材料反平面裂纹动态问题的奇异积分方程方法.[硕士论文] 宁夏.宁夏大学
- [35] Qin Q H, Yu S W. Effective module of piezoelectric material with microcavities. *Int. J. Solids Struct*,1998,35(36):5085-5095
- [36] Qin Q H, Mai Y W, Yu S W. Effective module for thermopiezoelectric materials with microcracks. *Int.J.Fracture*,1998,91:359-371
- [37] Qin Q H. *Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials*. Southampton: WIT Press,2001
- [38] 申胜平,王旭,匡震邦. 热释电材料问题的通解与界面裂纹. *固体力学学报*,1995,16(4):283-293
- [39] Ashida F, Tauchert T R. An inverse problem for determination of transient surface temperature from piezoelectric sensor measurement *J.Appl.Mech*,1998,65:367-373
- [40] Fu R, Qian C F, Zhang T Y. Electrical fracture toughness for conductive cracks driven by electric fields in piezoelectric materials. *Appl.Phys.Letters*,2000,76:126-128
- [41] 胡宇达,白象忠. 脉冲电流在导电薄板裂纹止裂技术中的应用. *固体力学学报*,2000,21(4):335-

340

- [42] 白象忠,胡宇达. 电磁热效应在导电薄板裂纹中的应用.力学 2000-力学 2000 学术会议.主编:白以龙,杨卫.2000年8月22-24日,北京:331-333
- [43] 白象忠,乔桂英,栾金雨等. 电磁热效应裂纹止裂的实验研究.实验力学,2000, 15(3):354-360
- [44] Bastawros A F, Kim K S. Electric-current induced crack growth in thin films: Experimental observation and continuum description. *Int. J. Damage Mech*,2001,10:195-213
- [45] Bilyk S B, Ramesh K T, Wright T W. Numerical modeling of electro-mechanical interactions in mental cylinders, *Mechanics of Electro-magnetic Materials and Structures*, Eds: Yang J Y, Maugin G A,2000:1-16
- [46] Choi H J, Lee K Y, Jin T E. Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogenous interfacial zone Part II :thermal shock response. *International Journal of Fracture*. 1998,94,123-135
- [47] El-Borgi,s, Erdogan F, Hatira F B. Stresses intensity factors for an interface crack between a functionally graded coating and a homogeneous substrate.*International Journal of Fracture*. 2003,123,139-162
- [48] El-Borgi S, Erdogan F, Hidri L. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermal-mechanical loading. *International Journal of Engineering Science*. 2004,42,371-393
- [49] 周跃亭. 功能梯度材料中界面裂纹对弹性波的散射及热断裂问题. [博士论文].上海.上海交通大学 2007
- [50] 丁生虎. 功能梯度材料共线裂纹、任意角度裂纹断裂以及热应力问题研究. [博士论文].上海.上海交通大学,2009
- [52] Muskhelishvili N I. *Singular Integral Equations*. Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands,1953
- [53] 路见可. 解析函数边值问题.武汉:武汉大学出版社,2004
- [54] Li Xing. On the mathematical problems of composite materials with a doubly periodic set of cracks. *Applied Mathematics and Mechanics*,1993,12:11-24.
- [55] Li Xing. Complete plane strain problem of a nonhomogeneous elastic body with a doubly periodic set cracks. *ZAMM*,2001,81(6):377-391.
- [56] Li Xing. The effect of a homogenous cylindrical inlay on cracks in the doubly-periodic complete plane strain problem. *International Journal of Fracture*,2001,109(4):403-411.
- [57] Li Xing. Applications of doubly quasi-periodic boundary value problems in elasticity theory. *Shaker Verlag,Aachen*,2001.
- [58] Li Xing, Li Zhengxing. Effect of periodic elastic gasket on periodic cracks. *Engineering Fracture Mechanics*,1993,46(1):127-131.
- [59] Erdogan F, Gupta G,D. On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*,1972,1:525-534

致 谢

时光如白驹过隙，转眼即逝。非常感谢各位老师对我孜孜不倦的教诲和同窗好友对我的帮助，三年研究生的历程将使我终生难忘！

这篇论文的完成，得益于导师李星教授的悉心指导，本文从选题、大纲、撰写、修改到最后定稿的整个过程中，李老师倾注了大量的心血，老师广博的学识，严谨的治学态度和宽厚的师长风范令我深感敬佩，在此向尊师表示深深的感谢和崇高的敬意！

感谢在这三年中的每一位授课老师，尤其是韩惠丽老师在我的学习中给予了悉心的帮助和指导，在此表示最诚挚的谢意！

特别感谢我的家人，他们给了我太多的鼓励和支持，我的每一点进步都凝聚着他们的关注与期盼！

临别涕零，倍感同学与朋友的真情，祝愿他们身体健康、家庭幸福、事业有成！

还需特别指出是的，尽管我对本课题的全神贯注，但由于本人学识水平有限，难免有错漏之处，敬请各位老师和同学批评指正。

龙永义

2010年4月

附录

下面给出本文所用到的 Laplace 变换的数值反演方法的有关计算公式 (Miller and Guy)

函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换定义如下

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1)$$

Laplace 反演参数 p 在正实轴上取点

$$p_k = (\beta_i + 1 + k)\delta_i, \quad p_k = (\beta_i + 1 + k)\delta_i, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad \beta_i > -1, \quad \delta_i > 0 \quad (2)$$

函数 $f(t)$ 可用下式近似表示

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(0, \beta_i)} [2e^{-\delta_i t} - 1] \quad (3)$$

其中 $P_n^{(0, \beta_i)}$ 是如下定义的 Jacobi 多项式

$$P_n^{(0, \beta_i)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1+x)^{-\beta_i} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^n (1+x)^{\beta_i+n}] \quad (4)$$

系数 C_n 可由以下方程组来确定

$$\sum_{n=0}^k \frac{k(k-1)\cdots[k-(n-1)]}{(k+1+\beta_i)(k+2+\beta_i)\cdots(k+n+1+\beta_i)} C_n = \delta_i F(p_k) \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\frac{C_0}{\beta_i + 1} = \delta_i F(p_0) \quad (6)$$

参数 β_i, δ_i 和 N 的合理选取能使得 $f(t)$ 更好被近似。

个人简介

龙永义，男，汉族，1983年9月出生，湖南湘潭人，2003年本科毕业于湖南师范大学，2007年进入宁夏大学数学计算机学院攻读应用数学专业硕士学位研究生，研究方向为复分析理论及应用。

攻读硕士学位期间参与课题：国家自然科学基金资助项目“功能梯度压电材料断裂问题的积分方程方法”（2007.1-2009.12），批准号：10661009；973计划前期研究专项“Nb-Al合金基陶瓷等新型复合材料的制备和力学性能研究”（2008.1-2009.12），批准号：2008CB617613。