摘要

指派决策问题是人们在工程技术、科学研究和经济管理等诸多领域中经常遇到的问题。在实际应用中，对允许某些人完成多件工作或允许某件工作多人完成的广义指派问题以及模糊环境下多目标指派问题的解法研究，具有重要的理论和现实意义。本文讨论有广泛应用背景的广义指派模型和多目标模糊指派模型。具体包括以下三方面的内容：

1. 关于广义指派问题的解法研究

已有的广义指派问题或其推广问题都基于一个前提：每人做一件工作且每件工作一人去做，这显然没能更好地体现“择优”原则。本文通过对已有的广义指派问题的解法进行研究和比较，采取虚设工作件数或人数的方法建立扩充方阵将广义指派问题转化为传统的平衡指派问题求解，从而寻求到了一种广义指派问题的解法。

2. 关于模糊数排序方法的研究

在模糊环境下进行指派决策，对模糊数进行比较是不可避免的。本文给出了一种模糊数的排序方法。定义了一种模糊序关系，并证明了该序关系具有模糊互补性、模糊传递性以及平稳性，因而具有合理性。在此基础上定义了一个模糊评价函数，利用该评价函数对多个模糊数进行排序，方法简便、切实可行。

3. 关于多目标模糊指派问题的解法研究

本文针对目标值和权重均为模糊数的多目标指派问题提出和建立了相应的模型并给出了解法。根据专家意见确定模糊综合效益矩阵，利用本文的模糊数排序方法中定义的模糊评价函数将模糊指派模型转化为经典的指派决策模型，最后利用前面的广义指派问题的解法或平衡指派问题的解法进行指派决策。

关键词 指派问题；广义指派问题；模糊数；多目标；模糊指派；模糊评价函数

Abstract

Assignment decision is the problem that people have to deal with frequently in many fields including engineering technology, scientific researches, economic management, etc. It is important from the theoretical as well as the practical pointview that the algorithm researches of generalized assignment problem that allows some people to do a few tasks or some task to have done by a few persons and multi-objective fuzzy assignment problem. This dissertation deals with a generalized assignment modal and a multi-objective fuzzy assignment modal extensively applied in practice. The contents include following three parts:

1. The study of the algorithm of generalized assignment problem

The existing research of generalized assignment problem is based on the premise that a person does a work or a work is done by a person. Certainly, this can' t reflect "selecting excellence" principle. Studying and comparing the existing research of increasing false people or works to build expansive square and transform generalized assignment problem into traditional balance assignment problem to solve. Based on these, we find an algorithm of generalized assignment problem.

2. The study of comparing fuzzy numbers

It is necessary to assign for comparing fuzzy numbers in fuzzy environment. At first, we give a method of comparing fuzzy numbers. Secondly, we define a fuzzy order relation, and prove fuzzy reciprocal, fuzzy transmitting, smooth and rational quality of the fuzzy order relation. At last, based on these, we define a fuzzy evaluating function, and the method of using the function to compare fuzzy numbers is convenient and feasible.

3. The study of the algorithm of multi-objective fuzzy assignment problem

In this dissertation, we build a multi-objective fuzzy assignment modal and give an algorithm for objective valve and weight with fuzzy numbers. According to experts' opinion determining fuzzy comprehensive result square, we use the fuzzy appraising function that is defined in the disseertation of the comparing fuzzy numbers to transform it into traditional assignment modal. Then, by using the algorithm of the above generalized assignment problem or balance assignment problem, we can decide how to assign.

Key words: assignment problem; generalized assignment problem; fuzzy numbers; multi-objective; fuzzy assignment; fuzzy appraising function

第一章 绪论

1.1 指派决策

1.1.1 指派决策与最优化

广义地讲，最优化即是运筹，它涉及运筹学的各个方面，如规划、博弈、排队、库存、指派、网络等问题都属于决策科学的范畴。狭义地讲，优化决策研究一类特殊的博弈活动，它是以决策者为一方，以环境为另一方的博弈。随着生产、经济、技术的发展，工程技术、管理人员在实际工作中，肯定会经常面临优化决策问题。工程设计中怎样选择参数，使得设计既满足要求又能降低成本；资源分配中，怎样的分配方案既能满足各方面的基本要求，又能获得好的经济效益；生产计划安排中，选择怎样的计划方案才能提高产值和利润；在各个领域中，诸如此类问题，不胜枚举。可以说，最优化技术是推动科学技术向前发展的一个很重要的因素。

指派决策是最优化决策的一部分，人们在工程技术、科学研究和经济管理等诸多领域中会经常遇到。随着社会的发展，在生产、经济管理工作中，经常面临着给人分派工作，给机床指派加工任务，对工程进行选址等问题。由于每个人的专长不同，因此完成任务的效率（或所需时间、费用）也不相同，由此产生了应如何指派哪个人，哪台机床去完成任务或在哪个工地建哪个工程，从而使完成任务的总效率最大，或所需时间和费用最少的问题，即指派问题。

1.1.2 广义指派问题

指派问题是0-1规划的特例，也是运输问题的特例；当然可用整数规划，0-1规划或运输问题的解法去求解，这就如同用单纯形法求解运输问题一样是不合算的。利用指派问题的特点可有更简便的解法。对于有n项任务且正好有n个人去完成的指派问题(亦称平衡指派问题)，人们给出了很多解决方法，如匈牙利法[1,48]，削高排除法[40]等。而对于人数和任务数不等的指派，即广义指派问题，往往采用虚设假想任务数或人数的方法，使之转化为平衡指派问题[13]。在这些指派或其推广指派问题中往往都基于一个前提：每人完成一项任务且每项任务一人去做，这显然没能更好地体现“择优”原则。因此在广义指派问题中，允许某些人完成多项任务或

允许某项任务多人完成，更为实际与可行。

1.2 模糊集与优化决策

优化决策问题是一个古老的课题，早在17世纪已经提出极值问题。本世纪40年代以来，由于生产和科学研究突飞猛进的发展，特别是电子计算机日益广泛应用，使优化决策问题不仅成为一种迫切需要，而且有了求解的有力工具。优化决策理论和算法也就迅速发展起来，形成一个新的学科，并在实际应用中发挥着很大的作用。多年来，传统的优化技术和方法已经成功地应用于求解一类具有清晰定义结构的系统。此类优化方法的基础是清晰的数学模型和精确的数学方法。

尽管传统的优化方法有很多成功的例子，但不得不指出的是，在经典的决策模型中，各种数据和信息都被假定为绝对精确，目标和约束也都被严格地定义并有良好的数学表示。因而理论上存在着一个分明的解空间，找出其中的最优解，使系统的综合效用达到最大，便是通常"决策"的含义。但这种精确的数据结构和严格的优化准则往往令决策者无所适从，因为许多现实的优化问题，在社会、生产和经济系统中常常存在多种形式的非确定性信息。如事件发生的随机性、数据的非精确性、语言的含糊性、客观事物之间的差异在其中介过渡时的"不分明性"等，这些非确定性信息常来源于多种方式，其中包括测量误差、缺乏足够的统计数据、缺乏足够可用的理论来描述和支持、知识表达的方式、人类的主观性判断或偏好等。这些形式的非确定性可以归类为两种类型，即随机非确定性（stochastic uncertainty）和模糊性(fuzziness)。

一般来说，随机性是一种外在因果的不确定性，其特点是信息的描述是清晰的，但非确定性以频率形式表形出来，这类系统常用基于概率理论的随机优化方法求解，而模糊性是一种内在结构的不确定性。从信息观点看，随机性只涉及信息的量，模糊性则关系到信息的含义。可以说，模糊性是一种比随机性更深刻的不确定性。在现实生活中，模糊性的存在比随机性的存在更为广泛。尤其是在主观认识领域，模糊性的作用比随机性的作用重要得多。而具有模糊性信息的系统用基于精确数学理论的优化方法和基于概率理论的随机优化方法则不能准确地描述其行为和特性。

既然模糊性是事物客观存在的一种属性，因此是可以描述的。Zadeh首先提出了模糊集合的概念，用隶属函数来刻画元素对集合属于程度的连

续过渡性，即元素从属于集合到不属于集合的渐变过程，将经典集合的二值逻辑｛0，1｝推广到[0，1]区间内的连续值逻辑，从而诞生了模糊集合论，提供了对模糊现象进行定量描述和分析运算的方法。基于模糊集理论的模糊优化方法(fuzzy optimization)也由此为模糊环境下系统优化提供了有效的方法和技术。从应用角度看，模糊集合主要用于以下几类信息处理：分类和数据分析，决策问题，近似推理。相对于这三类问题，论域 U 上的模糊集 F 的元素 u 的隶属度有以下三种不同的解释：

1. 相似的程度：$\mu_F(u)$表示 u 与 F 中其它元素的接近程度，利用相似度来描述当前状态与规划中对应部分的匹配情况。

2. 偏好度：F 表示偏好目标集（或决策变量 x 的取值的集合），$\mu_F(u)$表示对目标值u的偏好强度(或者选择u作为抉择变量x的可信度)，模糊集则表示准则集或者可变的约束集（Flexible constraints）。

3. 不确定程度：这种解释是由 Zadeh 在提出可能性理论（Possibility theory）以及在发展不确定性推理的理论时提出来的，$\mu_F(u)$表示参数 x 取值 u 的可能性，常用于专家系统，人工智能等领域。

模糊集对于最优化方法的贡献在于：一是能够建立起更加符合实际的模型，特别适合对含有不确定参数的系统建模，如模糊决策及相应的多目标模型，模糊最优控制；二是为模型的求解带来了新的途径。

1.3 模糊指派问题

在经典的指派问题中，往往考虑的目标因素只有一个，考核的系数指标是明确的，通常用传统的匈牙利法求解。但是，实际管理工作中的指派问题往往远比此复杂，需要考虑的目标因素有若干个，不再仅仅局限于平衡指派问题，也需要考虑广义指派问题，且考核指标在实际问题中往往很难用精确值进行量化，这种情形下要完成对 n 个人的最优指派就被称为模糊环境下的指派问题，而用传统的匈牙利法不能有效地解决这类问题。

七十年代 Bellman 和 Zadeh 在多目标决策的基础上，提出了模糊决策的模型。在该模型中，凡决策者不能精确定义的参数、概念和事件等，都被处理成某种适当的模糊集合，蕴含着一系列具有不同置信水平的可能选

择。这种柔性的数据结构与灵活的选择方式大大增强了模型的表现力和适应性，被以后的研究人员引为发展和推广模糊决策的基础。迄今为此，模糊集理论的应用已经渗透到了决策科学的各个领域，从而也为模糊环境下的指派问题提供了相应的模型和优化的有效方法。

目前，把模糊集理论应用于模糊指派主要采用先将模糊性信息采取适当的方式，如隶属函数、可能性分布函数，以线性形式或非线性形式等来描述模糊信息并采用适当的数学工具和方法建立模糊优化模型，并进一步转化为清晰的优化模型，再运用匈牙利方法进行指派。应用范围也出给人分派工作、给机床指派加工任务扩展到了工程选址、排序问题等方面。但应当指出的是，现有的大多数文献关于模糊指派的讨论并没有脱出经典决策的范畴。尽管采用了隶属函数的表示形式，但伴随决策诸元的信息和结构在建模之前就已经被精确化了，故不是真正意义上的模糊指派问题。举例来说，当采用专家调查法确定各属性的相对重要性时，传统模式都假定每一位专家能够明确地给出各属性的相对重要程度，平均后即得到所谓的模糊权集。但事实上，这样的权集毫无模糊可言。从数据结构上看，只有元素为模糊集或模糊数的权集才是真正的模糊权集。类似地，模糊指标值矩阵中的元素也应该全部是或者至少部分是模糊集或模糊数才有意义，否则就不能称之为“模糊指派”。因此模糊指派理论还有待于进一步发展和完善，尤其是多目标有约束的模糊指派和多目标广义非平衡的模糊指派问题，而实际的生产管理工作中存在很多这样的情形。因此对多目标有约束的模糊指派和多目标广义非平衡的模糊指派问题的研究不仅具有理论价值，而且具有重要的实际意义。

1.4 本文的结构与研究的问题

本文主要讨论广义指派和多目标模糊指派问题，一共分为五章，具体安排如下：绪论，广义指派问题，模糊数的比较与排序，多目标模糊指派的解法研究，结论。

第一章绪论为全文知识背景，对指派决策与最优化、广义指派问题、模糊集与优化决策以及模糊指派问题做出简要的介绍和概述。

第二章介绍了广义指派问题的内容，给出了一种求解广义指派问题的方法，这种方法的本质在于把一个广义非平衡指派问题通过虚设工作件数或工作人数转化为平衡指派进行求解。

第三章以适当的面积差异为工具，采用序函数的形式将模糊集独立地映射到实数轴上，从而得到一个以实数大小为准则的模糊数的比较和排序的方法。

第四章对多目标权重的确定方法进行了介绍，并给出了一种基于专家的权重相对重要性比较的权重确定方法。给出了模糊环境下多目标模糊指派的模型和算法，并给出了实际应用例子。

第五章给出了文中得到的部分结论。

第二章 广义指派问题

2.1 引言

指派问题是运筹学领域0-1规划的特例，也是企业管理中的一类重要问题。在生活中，经常遇到要指派不同的工作人员去完成不同的工作。由于各人的专长不同，各人完成各项任务的效益（或所花时间或所花费用或创造价值）一般地也不相同。这样，就产生应指派何人去完成何任务而使总效益最好的问题。

对于有n项任务且正好有n个人，每个人完成其中的一项，则如何指派以使花费总时间最小的问题（亦称平衡指派问题），人们给出了很多解决方法，如匈牙利法[1,48]，削高排除法[40]等。

它的数学模型是：

$$\text{(AP)}\qquad \mathrm{Min}Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2.3}$$

$$x_{ij}=1\text{或}0,\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n \tag{2.4}$$

其中，

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$ 称为效率矩阵，其元素 $c_{ij}>0$

$(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示指派第i人去完成第j项任务时的时间或成本等；

x_{ij} 称为决策变量，

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\\0 & \text{当不指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\end{cases},\ (1\le i\le n,1\le j\le n)$$

我们指出，一般的平衡指派问题都可以化成（AP）这种形式，因此称它为指派问题的标准型。

由于指派问题具有特殊性质，“匈牙利算法”是求解这类问题的较有效解法。但是，传统的平衡指派问题是针对“n个人完成n项任务，每人完成其中一项”这样的问题的，实际工作中，由于种种原因，常常出现人数m与工作件数n不相同的情形，显然，这时“匈牙利算法”已经不再适用。

文献[21][18]中讨论了m≠n的不平衡指派问题的简单推广，其解法是通过虚设人（当m<n时）或虚设工作（当m>n时）的办法，即通过非方阵C补足若干行或列0使之化为方阵，具体地讲：

当m>n时，则在C中补足m—n列0；

当m<n时，则在C中补足n—m行0.接下去仍可使用匈牙利法。

我们注意到：上述指派问题或其推广问题都基于一个前提：每人做一件工作且每件工作一人去做。这显然没能更好地体现“择优”原则。

文献[14][19]中将这类问题作为运输问题来求解。众所周知，运输问题的解法远比“匈牙利算法”复杂。因此，研究一般广义指派问题最优分派的求解具有重要意义。

文献[15-17,22，33，41]对几类特殊的广义指派进行了讨论，本章将给出工作件数与工作人数不相等的一般广义指派问题的数学模型及其解法。

2.2 问题的提出及其数学模型

广义指派问题并非奇特和抽象的构想，相反，该问题可以从司空见惯的日常事务中引出。这里，我们考虑这样的两类广义指派问题：

（1） 设有n项工作欲安排m（m>n）个人去做，每个人安排且仅安排一项工作，做第 j 项工作可以由b_j个人共同去做，其中b_j是待求的未知数，$\sum_{j=1}^{n}b_j=m$.已知第 i 个人做 j 项工作的效益为c_{ij}（或时间、成本等）

（i=1, 2, …, m; j=1, 2, …, n），试确定总效益最好的最优指派。

（2）设有 n 项工作欲安排 m（m<n）个人去做，每件工作需安排且仅安排一人去做，第 i 人可以做 a_i 项工作，其中 a_i 是待求的未知数，$\sum_{i=1}^{m} a_i = n$. 已知第 i 人做第 j 项工作的效益为 c_{ij}（或时间、成本等）（i=1, 2, …, m; j=1, 2, …, n），试确定总效益最好的最优指派。

对于上述问题引入 0-1 型决策变量 x_{ij}，可以分别建立如下广义指派问题的数学模型：

（GAPI）

$$\text{Min (Max) } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.5}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = m, \tag{2.7}$$

$$x_{ij}=1 \text{ 或 } 0, \quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{2.8}$$

（GAPII）

$$\text{Min (Max) } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.9}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = n, \tag{2.11}$$

$$x_{ij}=1 \text{ 或 } 0, \quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{2.12}$$

其中，

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务} \\ 0 & \text{当不指派第}i\text{人去完成第}j\text{项任务}\end{cases} \quad (1\le i\le n, 1\le j\le n)$$

称 C=（c_{ij}）$_{m\times n}$ 为效率矩阵或决策矩阵。问题（GAPI）和（GAPII）是 0-1 型整数线性规划问题，直接求解比较费事，但可以将其转化为传统指派问题进行求解。

2.3 问题的转换

2.3.1 广义指派问题的思想

我们知道，(AP) 的最优解等价于从效率矩阵 C=（c_{ij}）$_{n\times n}$ 中选出 n 个元素满足：

（1） 每列中恰有一个元素被选出，以保证每项工作有且仅有一人去做；

（2） 每行中恰有一个元素被选出，以保证每人有且仅有一项工作要做；

（3）被选出的 n 个元素之和最小。

（AP）可用著名的“匈牙利算法”来求解。从这里我们还看不出广义指派问题（GAP）与一般指派问题（AP）之间有什么直接联系。下面先对 m>n 的情形进行讨论，将广义指派模型（GAPI）转化为标准指派模型（AP）。（以下以广义指派模型（GAPI）的极小化情形为例进行说明）

用矩阵 C 来描述，（ GAPI）的最优解等价于从矩阵 C 中选出 m 个元素满足条件：

（1）每列中至少有一个元素被选出，保证每项工作至少有一人做；

（2）每行中有且仅有一个元素被选出，保证每个人有且仅有一项工作要做；

（3）被选出的 m 个元素之和最小。

从 C 中选出 m 个元素满足以上三个条件的（GAPI）与（AP）选出元素的主要区别是：前者要求每列中至少有一个元素被选出，而后者要求每列有且仅有一个元素被选出。因此，如果能把（GAPI）的效率矩阵 C 扩充成一个方阵使每列有且仅有一个元素被选出且其和恰是（GAPI）的最优解，问题就解决了。故要求（GAPI）的最优解，我们的主要思想是通过扩充效率矩阵 C 将（GAPI）转化为（AP）。

2.3.2 解法

情形 1 工作人数 m 比工作件数 n 大 1，即 m=n+1 时，允许某件工作两人去做，一人须做且只能做一件工作。

定义 2.3.1 由两个矩阵 C 构成的矩阵

$$
\begin{aligned}
R &= (r_{ij}) \\
&= (C, C) \\
&= \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

是一个有 m 行、2n 列的矩阵，称为(GAPI)的扩展矩阵。

R 矩阵的意义相当于增加了 n 件工作，这样工作件数比人数多。因此，用扩展矩阵 R 来描述(GAPI)的最优解，等价于从矩阵 R 中选出 m 个元素满足：

（1）每列中至多有一个元素被选出，说明每项工作要么有人做，要么没人做；

（2）每行中有且仅有一个元素被选出，保证每个人被指派一项且仅一项工作；

（3）被选出的 m 个元素之和最小。

从 R 中选 m 个元素满足以上三个条件的问题 ，仍是一个非平衡指派问题，为此我们有：

定义 2.3.2 在 m×2n 的矩阵 R 中增加每一元素均为 0 的（n−1）行，得到的矩阵

$$
\begin{aligned}
A &= (a_{ij}) \\
&= \begin{pmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m2} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

称为（GAPI）的扩充方阵。

由定义 2.3.2 知 A 是 2n×2n 方阵，它相当于增加了（n—1）人，而由这些人去做任何项工作的效益（时间、成本等）均为 0。这样就将效率矩阵 C 扩充成方阵 A，使得原本只有一件工作两人去做变成为 n 件工作都分别有两人去做，只是有些人（虚设的人）做任何工作的效益均为 0。因此，从 R 中选出 m 个元素之和最小的问题就等价于从 A 中选出 2n 个元素满足：

（1）每列中恰有一个元素被选出，保证每项工作有且仅有一人去做；

（2）每行中恰有一个元素被选出，保证每个人被指派一项且仅一项工作；

（3）被选出的 2n 个元素之和最小。

从以上分析可得如下定理：

定理 2.3.1（GAPI）的最优解等价于以扩充矩阵 A 为效率矩阵的（AP）问题的最优解，因而可用“匈牙利算法”求最优解。

因此极小化的（GAPI）模型可以转化为：

(AP) $$\mathrm{Min}Z=\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}a_{ij}y_{ij} \tag{2.13}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{2n}y_{ij}=1\ ,\quad i=1,2,\cdots,2n \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{2n}y_{ij}=1\ ,\quad j=1,2,\cdots,2n \tag{2.15}$$

$$y_{ij}=1\text{或}0,\quad i,j=1,2,\cdots,2n \tag{2.16}$$

其中（a_{ij}）$_{2n\times2n}$ 等于定义 2.3.2 中的矩阵 A. 于是可得当 m=n+1 时（GAPI）的求解步骤为：

第一步：按定义 2.3.1 和定义 2.3.2 分别构造扩展矩阵 R 和扩充方阵 A；

第二步：用“匈牙利算法”求扩充方阵 A 对应的（AP）的最优解；

第三步：确定（GAPI）的最优解：

根据（y_{ij}）$_{2n\times2n}$ 前 m 行中等于 1 的元素来决定（GAPI）的最优解。

若 y_{ij}=1，且 j≤n ，则 $y_{ij}=x_{ij}$=1；若 y_{ij}=1，且 j>n ，则将 j 表示为 j=n+q， q为大于等于1且小于等于n的整数，此时$y_{ij}=1$对应$x_{iq}=1$，由此即求得（GAPI）的最优解。

情形2 工作人数m大于工作件数n且小于或等于2n，即$n<m\leq 2n$时，允许（m—n）件工作两人去做，一人须做且只能做一件工作。

在前面，我们已对情形1进行了较为详细地讨论，因此，我们很容易将其推广到情形2。类似于情形1，我们须考虑把情形2中原本只有（m—n）件工作两人去做，变成为n件工作都分别由两人去做。具体求解步骤为：

第一步：类似于情形1，分别构造扩展矩阵R

$$
\begin{aligned}
R &= (r_{ij}) \\
&= (C, C) \\
&= \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

和扩充方阵A为：

$$
\begin{aligned}
A &= (a_{ij}) \\
&= \begin{pmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中$C=(c_{ij})_{m\times n}$为模型（GAPI）的效率矩阵，A为$2n\times 2n$方阵，A中后（2n—m）行元素均为0，它相当于虚设了（2n—m）个人，由这些人去做

任何项工作的效益均为 0。

第二步：用“匈牙利算法”求矩阵 A 对应的（AP）的最优解。

第三步：类似于情形 1，仍根据标准指派模型（AP）的解矩阵中前 m 行里等于 1 的元素来确定广义指派模型（GAPI）的最优解。

情形 3 工作人数 m 大于工作件数 n 的 2 倍，即 m>2n 时，一人须做一件且只能做一件工作。

对于这种情形，即使我们允许（m−n）件工作两人去做，但仍有人没有工作可做，因此，此时必须考虑某些工作由三人去做甚至由更多的人去做。

设 m=kn+q，k≥2 且 1≤q≤n（k, q 为整数），则类似于情形 1 构造扩展矩阵

$$R=(r_{ij})$$

$$=\overbrace{(C,\cdots,C)}^{(k+1)\text{个}}$$

$$=\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{第}1\text{个}C}\qquad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{第}k+1\text{个}C}\\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \cdots & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \cdots & c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & \cdots & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}_{m\times(k+1)n}\end{array}$$

R 矩阵的意义相当于增加了 kn 件工作，这样工作件数比工作人数多，因此，为将非平衡指派问题转化为平衡指派问题可类似于情形 1 构造扩充方阵

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}\overbrace{C\quad\cdots\quad C}^{k+1\text{个}}\\ 0\quad\cdots\quad 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{第}1\text{个}C}\qquad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{第}k+1\text{个}C}\\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \cdots & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \cdots & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & \cdots & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

其中A为（k+1）n×（k+1）n方阵，它相当于虚设了[（k+1）n−m]个人，而由这些人去做任何工作的效益（或时间、成本等）均为0，这样使得n件工作都分别由（k+1）人去做。当然对于矩阵A所对应的标准指派问题（AP）而言，工作件数正好等于工作人数，刚好每人做一件工作，每件工作由一人去做，满足标准指派问题的要求。因此，从R中选出m个元素使这m个元素之和最小的问题就等价于从A中选出（k+1）n个元素，使这（k+1）n元素之和最小。从而将模型（GAPI）转化为标准指派问题（AP）.

情形3具体求解步骤类似于情形1、2。

至此，我们已对前面提出的（GAPI）的几种可能的情形给出了解法，这里的关键是将广义指派问题转化为标准的指派问题，再用“匈牙利算法”求解，从而得到广义指派问题的解法。

说明：（1）在实际应用中，尤其是市场经济环境下竞争机制的存在，当工作人数m大于工作件数n时，决策者若仅允许每件工作由一人来完成，此时问题较模型（GAPI）简单，但也不能直接用“匈牙利算法”来求解，为了能够应用“匈牙利算法”来求解，为此我们可虚设还有（m−n）件工作，并且每人完成这些工作所花费的时间为0，则效率矩阵可以写成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
A &= (a_{ij})_{m\times m} \\
&= (C\ 0) \\
&= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

对$A=(a_{ij})_{m\times m}$运用“匈牙利算法”来求解可得出每个人应分派的工作。若某人被分派去做虚设的工作，则说明他落选了，无工作可做，被分派到前n项工作的所有人，组成一个最优指派方案。

（2）当工作人数m大于工作件数n时，就完成工作任务所需总时间（或成本）最少而言，情形1、2、3所确定出的最小值肯定比从m个人中挑选出n个人（如（1）中，其它（m-n）个人落选）分别完成这n项任务

所需总时间的最小值大。事实上，当 m>n 时，其效率矩阵本身应相应地改变，但基于我们一般都把指派问题考虑成 0-1 规划的特例，即 $x_{ij}=1$ 或 0，加之需满足约束条件“一人一事”，故效率矩阵的改变将使问题变得更为复杂，因此当应用情形 1、2、3 的解法做出指派后，我们可以将两人（或多人）完成同一工作的效率求平均值，这样既满足约束条件“一人一事”且所得的目标值也比较符合实际。

对于模型（GAPII）的求解，与模型（GAPI）的解法相类似，也可通过虚设工作件数将模型（GAPII）转化为标准的指派问题模型（AP）来进行求解。下面以工作件数 n 大于工作人数 m 且小于或等于 2m 的情形为例进行讨论。

情形 4 工作件数 n 大于工作人数 m 且小于或等于 2m，即 m<n≤2m 时，允许某（n−m）人做两件工作（即不剩余工作）。

为了将广义指派模型（GAPII）转化为标准指派问题，假定每人先安排做一项工作，那么剩下的（n−m）项工作还可以由这 m 个人中的（n−m）个人来做。类似于模型（GAPI）的求解，可构造扩展矩阵

$$R=(r_{ij})=\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为（GAPII）的效率矩阵，这样工作人数大于或等于工作件数。因此，用扩展矩阵 R 来描述（GAPII）的最优解，等价于从矩阵 R 中选出 n 个元素满足：

（1）每行中至多有一个元素被选出，说明每人要么有工作可做，要么没工作可做；

（2）每列中有且仅有一个元素被选出，保证每项工作被指派且仅指

派给一人；

（3）被选出的n个元素之和最小。

从R中选n个元素满足以上三个条件的仍是一个非平衡指派问题，为此我们虚设（2m—n）项工作，它们由任何人来做时的效益均为0，进而构造出扩充方阵

$$A=(a_{ij})$$

$$=\begin{pmatrix} C & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中A为2m×2m方阵，A中后（2m—n）列的每一元素均为0。这样工作件数便等于工作人数（当然，实际上虚设后的工作件数等于工作人数m的2倍，相当于m个人都做两件工作），进一步可以保证每个人做一件工作，每件工作仅由一人去做，满足标准指派问题的要求。因此，从R中选出n个元素使这n个元素之和最小的问题就等价于从A中选出2m个元素使这2m个元素之和最小的问题，从而模型（GAPII）转化为标准指派模型（AP），运用与模型（GAPI）类似的求解步骤就可以求得模型（GAPII）的最优解。

以上对极小化的广义指派模型进行了较为详细地讨论，而对于极大化的广义指派问题的求解，我们可以先将其转化为极小化的广义指派问题，再运用上述方法进行求解。

2.4 数值例子

例 文献[1]中，求表2-1所示效率矩阵的指派问题的最小解。今情况有变，

（1）若任务 D、E 暂不执行，只执行任务 A、B 、C，人员甲、乙、丙、丁、戊须有一项任务从事，求最小解；

（2）若人员戊有事不能执行任何任务，由人员甲、乙、丙、丁来从事，任务 A、B、C、D、E 须分别有一人从事，求最小解。

表 2-1

人员＼任务	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

解（1）　第一步：因为 m=5，n=3，其效率矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}12 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6\\ 7 & 17 & 12\\ 15 & 14 & 6\\ 4 & 10 & 7\end{pmatrix},$$

属于模型（GAPI）且 $n<m\leq 2n$，由情形 2，可构造相应的扩展矩阵 R 和扩充方阵 A，分别为：

$$R=\begin{pmatrix}12 & 7 & 9 & 12 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6 & 8 & 9 & 6\\ 7 & 17 & 12 & 7 & 17 & 12\\ 15 & 14 & 6 & 15 & 14 & 6\\ 4 & 10 & 7 & 4 & 10 & 7\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}12 & 7 & 9 & 12 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6 & 8 & 9 & 6\\ 7 & 17 & 12 & 7 & 17 & 12\\ 15 & 14 & 6 & 15 & 14 & 6\\ 4 & 10 & 7 & 4 & 10 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

第二步：用“匈牙利算法”求出方阵 A 对应的标准指派问题（AP）的最优解。

$$A=\begin{pmatrix}12&7&9&12&7&9\\8&9&6&8&9&6\\7&17&12&7&17&12\\15&14&6&15&14&6\\4&10&7&4&10&7\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow A'=\begin{pmatrix}5&\underline{0}&2&5&0&2\\2&3&\underline{0}&2&3&0\\0&10&5&\underline{0}&10&5\\9&8&0&9&8&\underline{0}\\\underline{0}&6&3&0&6&3\\0&0&0&0&\underline{0}&0\end{pmatrix}$$

按照“匈牙利算法”由 A 可得矩阵A'，在矩阵中找出的不同行不同列上的 6 个零元素（矩阵中用下划线标出），从而得到方阵 A 对应的标准指派问题（AP）的解矩阵为：

$$(y_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

它们对应于 A 中元素为：$a_{12}=7$，$a_{23}=6$，$a_{34}=7$，$a_{46}=6$，$a_{51}=4$，$a_{65}=0$，所以（AP）的最优解对应的效益为 7+6+7+6+4=30。

第三步：考虑（y_{ij}）中前 5 行中等于 1 的元素。其中$y_{12}=1$，$y_{23}=1$，$y_{51}=1$，它们对应的列分别为第二列、第三列、第一列，均小于或等于 n（n=3），故$x_{12}=1$，$x_{23}=1$，$x_{31}=1$。又$y_{34}=1$，$y_{46}=1$，它们对应的列分别为第四列、第六列，均大于 n，由情形 2 解法，对应于$y_{34}=1$，4=3+1，则$x_{31}=1$；对应于$y_{46}=1$，6=3+3，则$x_{43}=1$。

由此可以得到一个最优指派为：指派丙和戊做第 A 项工作，指派甲做第 B 项工作，指派乙和丁做第 C 项工作，其最小解 MinZ=7+6+7+6+4=30。

（2）因为 m=4，n=5，效率矩阵为 $C=\begin{pmatrix}12&7&9&7&9\\8&9&6&6&6\\7&17&12&14&9\\15&14&6&6&10\end{pmatrix}$，属于模型（GAPII）且 $m<n\leqslant 2m$，由情形 4，可构造相应的扩展矩阵 R 和扩充方阵 A，并用“匈牙利算法”求出方阵 A 对应的标准指派问题（AP）的最优

解（y_{ij}）。

$$R=\begin{pmatrix}12&7&9&7&9\\8&9&6&6&6\\7&17&12&14&9\\15&14&6&6&10\\12&7&9&7&9\\8&9&6&6&6\\7&17&12&14&9\\15&14&6&6&10\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}12&7&9&7&9&0&0&0\\8&9&6&6&6&0&0&0\\7&17&12&14&9&0&0&0\\15&14&6&6&10&0&0&0\\12&7&9&7&9&0&0&0\\8&9&6&6&6&0&0&0\\7&17&12&14&9&0&0&0\\15&14&6&6&10&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(y_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

考虑（y_{ij}）中前5列中等于1的元素。由情形4解法，$x_{12}=1$，$x_{23}=1$，$x_{31}=1$，$x_{44}=1$，$x_{25}=1$. 由此可以得到一个最优指派为：指派甲做第 B 项，指派乙做第 C 项工作和第 E 项工作，指派丙做第 A 项工作，指派丁做第 D 项工作，其最小解为：MinZ=7＋7＋6＋6＋6=32.

实例表明：以上所讨论的广义指派问题的解法构思巧妙、简便有效，可以为决策者提供较为科学的决策依据。

第三章 模糊数的排序

3.1 引言

在决策理论中，决策者通过备选方案的目标或效用值来衡量，并进行排序和做出选择，因此备选方案的目标值尽可能是准确值。然而，如果评价方案的目标或效用值是模糊的，那么显然排序过程就不再是直接的了。这种情形尤其出现在多目标决策中。事实上，许多现实世界的问题，都需要处理和评估模糊数据然后再做出决策。要评判和比较不同的方案并做出选择，对模糊数进行比较和排序是不可避免的。从模糊集的定义及其性质中知道，模糊集之间的顺序关系不是通常意义下的全序关系，而是格结构下的半序关系，这就使模糊数的比较与判别成为模糊决策中既重要而又艰难的任务之一。

尽管在文献[4-11,50,51]中已有很多对模糊数进行比较的方法，但还没有一种方法能在所有情形下令人满意地对模糊数进行比较和排序，甚至这些方法中的大多数与人们的直觉相抵触或缺乏分辨力。鉴于模糊数的排序是模糊决策的基础，在这一章里，基于模糊数的左右 α_截集提出一种模糊数的排序方法，并给出数字例子来说明这一排序方法。

3.2 模糊数和模糊算术

3.2.1 模糊数的定义

定义 3.2.1[2]一个模糊数 $\tilde{A}$ 是定义在实数域 R 上的隶属函数为 $\mu_{\tilde{A}}$ 的模糊集，且满足以下条件：

（1） $\mu_{\tilde{A}}$ 是实数域 R 到闭区间[0,1]的连续函数；

（2） $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$，$\forall x\in(-\infty,a)$；

（3） $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 在闭区间[a,b]上严格递增；

（4）$\mu_{\tilde{A}}(x)=1$，$\forall x\in[b,c]$；

（5）$\mu_{\tilde{A}}(x)$在闭区间[c,d]上严格递减；

（6）$\mu_{\tilde{A}}(x)=0$，$\forall x\in[d,\infty]$.

其中a,b,c,d是实数，除非特别说明，假定A是凸的、正规的有界集。(即：$-\infty<a,d<\infty$).

为方便起见，定义3.2.1中的模糊数可以表示为[a,b,c,d;1]，并且$\tilde{A}$＝[a,b,c,d;1]的隶属函数$\mu_{\tilde{A}}$可以表示为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\mu_{\tilde{A}}^{L}(x) & , \quad a\le x\le b\\ 1 & , \quad b\le x\le c\\ \mu_{\tilde{A}}^{R}(x) & , \quad c\le x\le d\\ 0 & , \quad \text{其它}\end{cases} \tag{3.1}$$

其中$\mu_{\tilde{A}}^{L}$：$[a,b]\to[0,1]$，$\mu_{\tilde{A}}^{R}$：$[c,d]\to[0,1]$.由定义3.2.1，显然$\mu_{\tilde{A}}^{L}(x)$在[a,b]上严格递增，而$\mu_{\tilde{A}}^{R}(x)$在[c,d]上严格递减。

若$\mu_{\tilde{A}}^{L}(x)$和$\mu_{\tilde{A}}^{R}(x)$均为线性函数，且b=c，则$\tilde{A}$被称为三角模糊数，简记为$\tilde{A}$＝（l，m，r）.

3.2.2 模糊算术

用（*）（*∈｛＋，－，×，÷｝）表示相应的模糊运算，则模糊数的四则运算可以被确定如下：

定理3.2.1[12]设$\tilde{A}$和$\tilde{B}$为两个模糊数，对任意二元运算（*）：R（*）R→R，模糊数$\tilde{A}$（*）$\tilde{B}$的隶属函数被给定为

$$\mu_{\tilde{A}(*)\tilde{B}}(x)=\sup_{x,y:z=x*y}\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}. \tag{3.2}$$

上面的定理给出了模糊数四则运算的 max-min 卷积形式，但式(3.2)的实际操作并不方便，$\tilde{A}(*)\tilde{B}$ 的隶属函数的实际确定常在 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 的 α 截集上进行。依据分解定理，有

$$\tilde{A}=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha[A_\alpha^L,A_\alpha^R] \tag{3.3}$$

和

$$\tilde{B}=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha B_\alpha=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha[B_\alpha^L,B_\alpha^R] \tag{3.4}$$

式中，A_α^L，A_α^R 和 B_α^L，B_α^R 分别表示模糊数 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 的 α 截集的左、右边界。从式（3.2）不难导出

$$\begin{aligned}\tilde{A}(*)\tilde{B}&=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha[A(*)B]_\alpha\\&=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha([A_\alpha^L,A_\alpha^R](*)[B_\alpha^L,B_\alpha^R])\end{aligned} \tag{3.5}$$

据此，可得到模糊数四则运算的具体表示式为：

（1）模糊数加法[A（+）B]$_\alpha$=[$A_\alpha^L+B_\alpha^L,A_\alpha^R+B_\alpha^R$]，

（2）模糊数减法[A（−）B]$_\alpha$=[$A_\alpha^L-B_\alpha^R,A_\alpha^R-B_\alpha^L$]，

（3）模糊数乘法[A（*）B]$_\alpha$=[$A_\alpha^L*B_\alpha^L,A_\alpha^R*B_\alpha^R$]，

（4）模糊数除法[A（÷）B]$_\alpha$=[$A_\alpha^L/B_\alpha^R,A_\alpha^R/B_\alpha^L$]，$B_\alpha^L>0$.

如果 $\tilde{A}$ =（l_1，m_1，r_1），$\tilde{B}$ =（l_2，m_2，r_2）是三角模糊数，则二者的和、差也是三角模糊数，记为

$$\tilde{A}(+)\tilde{B}=(l_1+l_2,\ m_1+m_2,\ r_1+r_2) \tag{3.6}$$

$$\tilde{A}(-)\tilde{B}=(l_1-r_2,\ m_1-m_2,\ r_1-l_2) \tag{3.7}$$

3.3 模糊数排序方法

3.3.1 模糊数的左、右α截集

考虑 F(X) 上正规的凸模糊数 $\tilde{A}$，$\tilde{A}$ 的 α 水平截集 $A_\alpha=\{x\in X:\mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}$ 是 X 上的凸子集，其左、右 α 截集表示为

$$\underset{\sim}{a_\alpha}=\inf\{x\in X:\mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}$$

和

$$\bar{a}_\alpha=\sup\{x\in X:\mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}，(0\le\alpha\le1)$$

由定义 3.2.1 和分析知识可知，$\underset{\sim}{a_\alpha}$ 和 $\bar{a}_\alpha$ 有以下性质。

性质 3.3.1 因为 $\mu_{\tilde{A}}^{L}$：[a,b]→[0,1]连续且严格递增，故 $\underset{\sim}{a_\alpha}$ 在[0，1]上也连续且严格递增；类似地，$\bar{a}_\alpha$ 在[0，1]上连续且严格递减。

性质 3.3.2 因为 $\underset{\sim}{a_\alpha}$ 和 $\bar{a}_\alpha$ 在[0，1]上连续，故 $\underset{\sim}{a_\alpha}$ 和 $\bar{a}_\alpha$ 在[0，1]上可积。也就是说，积分 $\int_0^1\underset{\sim}{a_\alpha}d\alpha$ 和 $\int_0^1\bar{a}_\alpha d\alpha$ 存在。

3.3.2 模糊数排序思想

定义 3.3.1[2] 直积空间 X×Y={(x, y) | x∈X, y∈Y} 上的模糊关系是 X×Y 的一个模糊子集 $\tilde{R}$，$\tilde{R}$ 的隶属函数 $\tilde{R}$ (x, y) 表示了 X 中的元素 x 与 Y 中的元素 y 具有这种关系的程度。X 到 X 的模糊关系称为 X 上的模糊关系。

在[4]中，作者提出了一种基于面积补偿的两个模糊数的排序方法。本节中，我们将提出一种相对比较模糊数而不是一个模糊数绝对优于另一个模糊数的方法。在这种方法里，定义基于模糊数左右 α 截集的面积差异

的一个模糊数 $\tilde{A}$ 优于另一个模糊数 $\tilde{B}$ 的模糊优先关系 $R_1(\tilde{A},\tilde{B})$，通过计算 $R_1(\tilde{A},\tilde{B})$ 的值知道 $\tilde{A}$ 优于 $\tilde{B}$ 的程度。定义：当 $R_1(\tilde{A},\tilde{B})>0.5$ 时，$\tilde{A}\succ\tilde{B}$；当 $R_1(\tilde{A},\tilde{B})\geq 0.5$ 时，$\tilde{A}\geq\tilde{B}$。

3.3.3 模糊数排序方法

首先我们定义：

$$S_L(\tilde{A}\geq\tilde{B})=\int_{U(\tilde{A},\tilde{B})}[\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha \tag{3.8}$$

$$S_R(\tilde{A}\geq\tilde{B})=\int_{V(\tilde{A},\tilde{B})}[\bar{a}_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha \tag{3.9}$$

其中，

$$U(\tilde{A},\tilde{B})=\{\alpha\mid 0\leq\alpha\leq 1,\underline{a}_\alpha\geq\underline{b}_\alpha\} \tag{3.10}$$

$$V(\tilde{A},\tilde{B})=\{\alpha\mid 0\leq\alpha\leq 1,\bar{a}_\alpha\geq\bar{b}_\alpha\} \tag{3.11}$$

图 3.1 中 s_1, s_2, s_3, s_4 分别表示 $S_L(\tilde{A}\geq\tilde{B})$，$S_L(\tilde{B}\geq\tilde{A})$，$S_R(\tilde{A}\geq\tilde{B})$，$S_R(\tilde{B}\geq\tilde{A})$

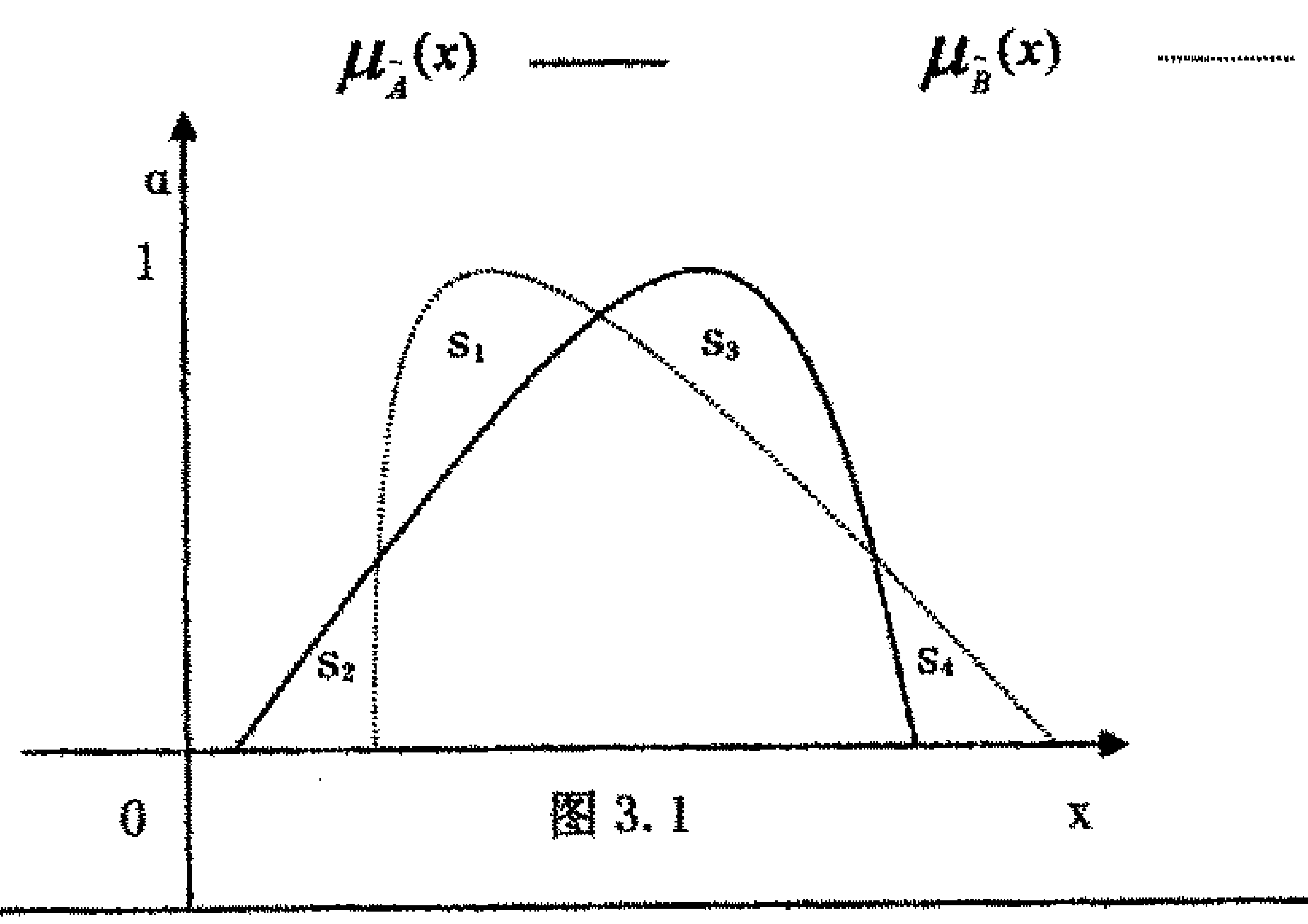

图 3.1

定义 3.3.2 设$\tilde{A}$和$\tilde{B}$是论域 X 上的两个模糊数，定义模糊数$\tilde{A}$优于模糊数$\tilde{B}$的模糊优先关系$R_1(\tilde{A},\tilde{B})$：F(X)×F(X)→R

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B})=\begin{cases}\dfrac{S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})}{S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_L(\tilde{B}\ge\tilde{A})+S_R(\tilde{B}\ge\tilde{A})} & \\ 0.5 & 若\tilde{A}=\tilde{B}\end{cases} \tag{3.12}$$

定义 3.3.3 设$\tilde{A}$，$\tilde{B}$是论域 X 上的两个模糊数，$R_1(\tilde{A},\tilde{B})$是模糊数$\tilde{A}$优于模糊数$\tilde{B}$的模糊优先关系，我们定义序对（$\tilde{A},\tilde{B}$）的三种关系：

（1）$\tilde{A}\ge\tilde{B}\Leftrightarrow R_1(\tilde{A},\tilde{B})\ge 0.5$ （3.13）

（2）$\tilde{A}\succ\tilde{B}\Leftrightarrow R_1(\tilde{A},\tilde{B})\succ 0.5$ （3.14）

（3）$\tilde{A}\approx\tilde{B}\Leftrightarrow R_1(\tilde{A},\tilde{B})=R_1(\tilde{B},\tilde{A})=0.5$ （3.15）

注：$\tilde{A}=\tilde{B}$一定有$\tilde{A}\approx\tilde{B}$，反之则不然。

3.3.4 模糊优先关系的模糊互补性和传递性

由定义 3.3.2 以及 3.3.3 于是我们得到两个模糊数进行比较的方法。下面证明式（3.12）定义的$R_1(\tilde{A},\tilde{B})$是一个模糊序关系。

定义 3.3.4[12]设 R 是全集 F（X）上的模糊二元关系，则 R 是模糊序关系的充要条件是它具有下面的性质：

（1） F 互补性：$R(\tilde{A},\tilde{B})=1-R(\tilde{B},\tilde{A}),\forall\tilde{A},\tilde{B}\in F(X)$

（2） F 可传递性：

$$R(\tilde{A},\tilde{B})\ge 0.5,R(\tilde{B},\tilde{C})\ge 0.5\Rightarrow R(\tilde{A},\tilde{C})\ge 0.5,\forall\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\in F(X)$$

定理 3.3.1 式（3.12）定义的模糊优先关系 R_1 是模糊互补的，即

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B}) = 1 - R_1(\tilde{B},\tilde{A}), \quad \forall \tilde{A},\tilde{B} \in F(X),$$

且有

$$R_1(\tilde{A},\tilde{A}) = 0.5, \quad \forall \tilde{A} \in F(X).$$

证明：根据定义 3.3.2，分别有

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{S_L(\tilde{A} \ge \tilde{B}) + S_R(\tilde{A} \ge \tilde{B})}{S_L(\tilde{A} \ge \tilde{B}) + S_R(\tilde{A} \ge \tilde{B}) + S_L(\tilde{B} \ge \tilde{A}) + S_R(\tilde{B} \ge \tilde{A})}$$

或

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B}) = 0.5, \quad \text{当 } \tilde{A} = \tilde{B} \text{ 时}.$$

$$R_1(\tilde{B},\tilde{A}) = \frac{S_L(\tilde{B} \ge \tilde{A}) + S_R(\tilde{B} \ge \tilde{A})}{S_L(\tilde{A} \ge \tilde{B}) + S_R(\tilde{A} \ge \tilde{B}) + S_L(\tilde{B} \ge \tilde{A}) + S_R(\tilde{B} \ge \tilde{A})}$$

或

$$R_1(\tilde{B},\tilde{A}) = 0.5, \quad \text{当 } \tilde{B} = \tilde{A} \text{ 时}.$$

故

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B}) = 1 - R_1(\tilde{B},\tilde{A}) \text{ 且 } R_1(\tilde{A},\tilde{A}) = 0.5$$

定理 3.3.2 $R_1(\tilde{A},\tilde{B}) \ge 0.5 \Leftrightarrow f(\tilde{A}) - f(\tilde{B}) \ge 0 \Leftrightarrow f(\tilde{A}) \ge f(\tilde{B})$

其中，

$$f(\tilde{A}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha)\,d\alpha \tag{3.16}$$

证明：$R_1(\tilde{A},\tilde{B}) \ge 0.5 \Leftrightarrow R_1(\tilde{B},\tilde{A}) \le 0.5$

$$\Leftrightarrow R_1(\tilde{A},\tilde{B}) \ge R_1(\tilde{B},\tilde{A})$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})}{S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_L(\tilde{B}\ge\tilde{A})+S_R(\tilde{B}\ge\tilde{A})}$$

$$\ge \frac{S_L(\tilde{B}\ge\tilde{A})+S_R(\tilde{B}\ge\tilde{A})}{S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_L(\tilde{B}\ge\tilde{A})+S_R(\tilde{B}\ge\tilde{A})}$$

$$\Leftrightarrow S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})\ge S_L(\tilde{B}\ge\tilde{A})+S_R(\tilde{B}\ge\tilde{A})$$

$$\Leftrightarrow S_L(\tilde{A}\ge\tilde{B})-S_L(\tilde{B}\ge\tilde{A})+S_R(\tilde{A}\ge\tilde{B})-S_R(\tilde{B}\ge\tilde{A})\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{I(\tilde{A},\tilde{B})}[\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha-\int_{I(\tilde{B},\tilde{A})}[\underline{b}_\alpha-\underline{a}_\alpha]d\alpha$$

$$+\int_{I(\tilde{A},\tilde{B})}[\bar{a}_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha-\int_{I(\tilde{B},\tilde{A})}[\bar{b}_\alpha-\bar{a}_\alpha]d\alpha\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1[\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha+\int_0^1[\bar{a}_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1[\underline{a}_\alpha+\bar{a}_\alpha]d\alpha-\int_0^1[\underline{b}_\alpha+\bar{b}_\alpha]d\alpha\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(f(\tilde{A})-f(\tilde{B})\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(\tilde{A})-f(\tilde{B})\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(\tilde{A})\ge f(\tilde{B})$$

定理 3.3.3 模糊优先关系 R_1 是可传递的，即 $\forall \tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\in F(X)$，如果 $R_1(\tilde{A},\tilde{B})\ge 0.5$， $R_1(\tilde{B},\tilde{C})\ge 0.5$，则 $R_1(\tilde{A},\tilde{C})\ge 0.5$.

证明：由定理 3.3.2 可知

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B})\ge 0.5\Leftrightarrow f(\tilde{A})\ge f(\tilde{B})$$

$$R_1(\tilde{B},\tilde{C})\ge 0.5\Leftrightarrow f(\tilde{B})\ge f(\tilde{C})$$

由

$$f(\tilde{A}) \geq f(\tilde{B}) \text{和} f(\tilde{B}) \geq f(\tilde{C})$$

有

$$f(\tilde{A}) \geq f(\tilde{C}).$$

而由定理 3.3.2 $f(\tilde{A}) \geq f(\tilde{C}) \Leftrightarrow R_1(\tilde{A},\tilde{C}) \geq 0.5$，故结论成立。

由定理 3.3.1 和定理 3.3.3，式 3.12 定义的模糊优先关系满足模糊互补性和模糊传递性，因而模糊优先关系 R_1 是合理的，它能保证模糊数排序结果的协调一致。

3.3.5 模糊优先关系的平稳性

在模糊数的比较中，模糊数排序方法应能容许对模糊事件隶属函数估计的细微偏差。这就要求模糊优先关系的度量结果当模糊数隶属函数出现微小变动时，不应该发生戏剧性的变化，即模糊优先关系的平稳性。

定义 3.3.5[12]设 $\tilde{A}$，$\tilde{A}'$ 是 F(X) 上的两个模糊数，分别具有分段连续的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 和 $\mu_{\tilde{A}'}(x)$，则 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}'$ 之间的最大偏差被定义为

$$d(\tilde{A},\tilde{A}') = \max_{\alpha>0}\{\, |\underline{a}_\alpha - \underline{a}'_\alpha|,\ |\bar{a}_\alpha - \bar{a}'_\alpha| \,\}.$$

如果 $\mu_{\tilde{A}'}(x)$ 是 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 的近似估计，则估计误差就可以用 $d(\tilde{A},\tilde{A}')$ 来表示。因此，模糊优先关系的平稳性也可表述为：如果 $\tilde{A}'$ 非常地接近于 $\tilde{A}$，则对任意模糊数 $\tilde{B}$，$\tilde{A}'$ 优于 $\tilde{B}$ 的程度应该非常地接近 $\tilde{A}$ 优于 $\tilde{B}$ 的程度。

定义 3.3.6[12]模糊优先关系 R 是平稳的，当且仅当 $\forall \tilde{A},\tilde{B} \in F(X)$，$\eta>0$，$\exists\, \delta>0$，

$$|R(\tilde{A},\tilde{B}) - R(\tilde{A}',\tilde{B})| < \eta,\quad \forall \tilde{A}' \in F(X),\ d(\tilde{A},\tilde{A}') < \delta,$$

式中 $\tilde{A}'$ 是 $\tilde{A}$ 的近似估计，$d(\tilde{A},\tilde{A}')$ 是 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}'$ 之间的最大偏差。

定理 3.3.4 式 3.12 定义的模糊优先关系 R_1 是平稳的，即 $\forall \tilde{A},\tilde{B}\in F(X)$，η>0，∃δ>0，

$$|R_1(\tilde{A},\tilde{B})-R_1(\tilde{A}',\tilde{B})|<\eta,\ \forall \tilde{A}'\in F(X),\ d(\tilde{A},\tilde{A}')<\delta.$$

证明：$\forall \tilde{A},\tilde{B},\tilde{A}'\in F(X)$

$$R_1(\tilde{A},\tilde{B})=\lambda_1\Big/\lambda_1+\lambda_2,\qquad R_1(\tilde{A}',\tilde{B})=\lambda_1'\Big/\lambda_1'+\lambda_2'.$$

式中

$$\lambda_1=S_L(\tilde{A}\geq\tilde{B})+S_R(\tilde{A}\geq\tilde{B})=\int_{U(\tilde{A},\tilde{B})}[\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha+\int_{V(\tilde{A},\tilde{B})}[\bar{a}_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha$$

$$\lambda_2=S_L(\tilde{B}\geq\tilde{A})+S_R(\tilde{B}\geq\tilde{A})=\int_{U(\tilde{B},\tilde{A})}[\underline{b}_\alpha-\underline{a}_\alpha]d\alpha+\int_{V(\tilde{B},\tilde{A})}[\bar{b}_\alpha-\bar{a}_\alpha]d\alpha$$

$$\lambda_1'=S_L(\tilde{A}'\geq\tilde{B})+S_R(\tilde{A}'\geq\tilde{B})=\int_{U'(\tilde{A}',\tilde{B})}[\underline{a}'_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha+\int_{V'(\tilde{A}',\tilde{B})}[\bar{a}'_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha$$

$$\lambda_2'=S_L(\tilde{B}\geq\tilde{A}')+S_R(\tilde{B}\geq\tilde{A})=\int_{U'(\tilde{B},\tilde{A}')}[\underline{b}_\alpha-\underline{a}'_\alpha]d\alpha+\int_{V'(\tilde{B},\tilde{A}')}[\bar{b}_\alpha-\bar{a}'_\alpha]d\alpha$$

记

$$U_1=\{\alpha\mid 0\leq\alpha\leq1,\ \underline{a}_\alpha\geq\underline{b}_\alpha\text{ 且 }\underline{a}'_\alpha\geq\underline{b}_\alpha\}$$

$$U_2=\{\alpha\mid 0\leq\alpha\leq1,\ \underline{a}'_\alpha\geq\underline{b}_\alpha\geq\underline{a}_\alpha\}$$

$$U_3=\{\alpha\mid 0\leq\alpha\leq1,\ \underline{a}_\alpha\geq\underline{b}_\alpha\geq\underline{a}'_\alpha\}$$

则

$$\int_{U(\tilde{A},\tilde{B})}[\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha-\int_{U'(\tilde{A}',\tilde{B})}[\underline{a}'_\alpha-\underline{b}_\alpha]d\alpha$$

$$=\int_{J_1}(\underline{a}_\alpha-\underline{a}'_\alpha)d\alpha+\int_{J_3}(\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha)d\alpha-\int_{J_2}(\underline{a}'_\alpha-\underline{b}_\alpha)d\alpha$$

$$\le\int_{J_1}|\underline{a}_\alpha-\underline{a}'_\alpha|d\alpha+\int_{J_3}|\underline{a}_\alpha-\underline{b}_\alpha|d\alpha-\int_{J_2}|\underline{a}'_\alpha-\underline{b}_\alpha|d\alpha$$

$$\le\int_J\max\{|\underline{a}_\alpha-\underline{a}'_\alpha|\}d\alpha$$

$$\le\max\{|\underline{a}_\alpha-\underline{a}'_\alpha|\}$$

$$\le d(\tilde{A},\tilde{A}')$$

类似地 $\int_{J(\tilde{A},\tilde{B})}[\bar{a}_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha-\int_{J'(\tilde{A}',\tilde{B})}[\bar{a}'_\alpha-\bar{b}_\alpha]d\alpha\le d(\tilde{A},\tilde{A}')$

故

$$|\lambda_1-\lambda_1'|\le 2d(\tilde{A},\tilde{A}')$$

同理可证

$$|\lambda_2-\lambda_2'|\le 2d(\tilde{A},\tilde{A}')$$

若 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 不是同一模糊数，则 $\lambda_1+\lambda_2\succ 0$.

$$|R_1(\tilde{A},\tilde{B})-R_1(\tilde{A}',\tilde{B})|=\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'+\lambda_2'}\right|$$

$$=\left|\frac{\lambda_1\lambda_2'-\lambda_2\lambda_1'}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1'+\lambda_2')}\right|$$

$$=\left|\frac{\lambda_1\lambda_2'-\lambda_1'\lambda_2'+\lambda_1'\lambda_2'-\lambda_2\lambda_1'}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1'+\lambda_2')}\right|$$

$$\le\frac{2[\lambda_2'd(\tilde{A},\tilde{A}')+\lambda_1'd(\tilde{A},\tilde{A}')]}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1'+\lambda_2')}=\frac{2d(\tilde{A},\tilde{A}')}{\lambda_1+\lambda_2}<\eta$$

因此 $\forall\ \eta>0$,

$\exists\delta=\dfrac{\eta(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$，使得 $d(\tilde{A},\tilde{A}')<\delta$ 时，$|R_1(\tilde{A},\tilde{B})-R_1(\tilde{A}',\tilde{B})|<\eta$

成立.

3.3.6 例子

在文献[4]中，Fortemps 和 Roubens 用模糊数的 α 截集平均值的面积来定义序函数并进行排序；在[7]中，Yao 和 Wu 用模糊数离开 O_1 的距离来进行排序。这一节里，我们通过两个模糊数的左、右 α 截集围成的面积差异来定义模糊优先关系，用它来排序，并证明这一模糊优先关系是模糊序关系，同时它还具有平稳性，因而是一个较好的排序方法。下面用这一方法对几组模糊数进行排序，并比较文[5][7][8]的排序结果。（见表 3.1）

第一组：$\tilde{A}=(0.4, 0.5, 1)$，$\tilde{B}=(0.4, 0.7, 1)$，$\tilde{C}=(0.4, 0.9, 1)$

第二组：$\tilde{A}=(0.3, 0.4, 0.7, 0.9)$，$\tilde{B}=(0.3, 0.7, 0.9)$，

$\tilde{C}=(0.5, 0.7, 0.9)$

第三组：$\tilde{A}=(0.3, 0.5, 0.7)$，$\tilde{B}=(0.3, 0.5, 0.8, 0.9)$，

$\tilde{C}=(0.3, 0.5, 0.9)$

由式 3.12 定义的模糊优先关系及其定义 3.3.3 易得：

第一组：$R_1(\tilde{A},\tilde{B})=0$，$R_1(\tilde{B},\tilde{C})=0$，$R_1(\tilde{A},\tilde{C})=0$，

则 $\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$

第二组：$R_1(\tilde{A},\tilde{B})=0$，$R_1(\tilde{B},\tilde{C})=0$，$R_1(\tilde{A},\tilde{C})=0$，

则 $\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$

第三组：$R_1(\tilde{A},\tilde{B})=0$，$R_1(\tilde{B},\tilde{C})=1$，$R_1(\tilde{A},\tilde{C})=0$，

则 $\tilde{A}\prec\tilde{C}\prec\tilde{B}$

表 3.1

组数	模糊数	Chooinech 和 Li (1)	Yao 和 Wu (2)	liu 和 Wang 取乐观指标值为 0.5 (3)
1	$\tilde{A}$	0.333	0.6	0.6
	$\tilde{B}$	0.50	0.7	0.7
	$\tilde{C}$	0.667	0.8	0.8
		$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$	$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$	$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$
2	$\tilde{A}$	0.458	0.575	0.575
	$\tilde{B}$	0.583	0.65	0.65
	$\tilde{C}$	0.667	0.7	0.7
		$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$	$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$	$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$
3	$\tilde{A}$	0.333	0.5	0.5
	$\tilde{B}$	0.4167	0.625	0.625
	$\tilde{C}$	0.5417	0.55	0.55
		$\tilde{A}\prec\tilde{B}\prec\tilde{C}$	$\tilde{A}\prec\tilde{C}\prec\tilde{B}$	$\tilde{A}\prec\tilde{C}\prec\tilde{B}$

3.4 模糊数排序方法的扩展

在上一节里，我们已成功地定义了一个模糊序关系来对模糊数进行排

序，但对 n 个模糊数排序，我们要计算 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个指标值。在这一节里，我们将定义一个模糊序函数，用以解决多个模糊数存在的排序问题，而当只有两个模糊数存在时，该模糊序函数将自动退化为相应的模糊序关系。

对实数域上的 n 个正规凸模糊数 $\tilde{A}_1$，$\tilde{A}_2$，…，$\tilde{A}_n$，

记 $\tilde{M}=\min(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)$，$\tilde{N}=\max(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\cdots,\tilde{A}_n)$

则 $M_\alpha=[\underline{m}_\alpha,\bar{m}_\alpha]$，$N_\alpha=[\underline{n}_\alpha,\bar{n}_\alpha]$

其中，$\underline{m}_\alpha=\min(\underline{a}_{1\alpha},\underline{a}_{2\alpha},\cdots,\underline{a}_{n\alpha})$，$\bar{m}_\alpha=\min(\bar{a}_{1\alpha},\bar{a}_{2\alpha},\cdots,\bar{a}_{n\alpha})$.

$\underline{n}_\alpha=\max(\underline{a}_{1\alpha},\underline{a}_{2\alpha},\cdots,\underline{a}_{n\alpha})$，$\bar{n}_\alpha=\max(\bar{a}_{1\alpha},\bar{a}_{2\alpha},\cdots,\bar{a}_{n\alpha})$.

定义 3.4.1 设 $\tilde{A}_1$，$\tilde{A}_2$，…，$\tilde{A}_n$ 是实数域上的 n 个正规凸模糊数，对于 $\forall\tilde{A}_i$，i=1, 2, …, n，定义模糊评价函数为

$$F(\tilde{A}_i)=\begin{cases}\dfrac{\int_{U(\tilde{A}_i,\tilde{M})}(\underline{a}_{i\alpha}-\underline{m}_\alpha)d\alpha+\int_{V(\tilde{A}_i,\tilde{M})}(\bar{a}_{i\alpha}-\bar{m}_\alpha)d\alpha}{\int_{U(\tilde{N},\tilde{M})}(\underline{n}_\alpha-\underline{m}_\alpha)d\alpha+\int_{V(\tilde{N},\tilde{M})}(\bar{n}_\alpha-\bar{m}_\alpha)d\alpha} & \text{其它}\\ 0.5 & \tilde{M}=\tilde{N}\end{cases}\tag{3.17}$$

定理 3.4.1 式 3.17 中的模糊评价函数 $F(\tilde{A}_i)$ 具有以下性质：

（1）若 $\tilde{A}_i=\tilde{M}$，则 $F(\tilde{A}_i)=0$.

（2）若 $\tilde{A}_i=\tilde{N}$，则 $F(\tilde{A}_i)=1$.

（3）若 $\tilde{A}_i\neq\tilde{M}\neq\tilde{N}$，则 $F(\tilde{A}_i)\in[0,1]$.

（4）当 n=2 时，模糊评价函数 $F(\tilde{A}_i)$ 退化为模糊优先关系 $R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j)$.

（5） $F(\tilde{A}_i) \ge F(\tilde{A}_j) \Leftrightarrow \tilde{A}_i \ge \tilde{A}_j$.

证明：由定义 3.4.1 和定义 3.3.2 易证。

图 3.2 显示了只有两个模糊数存在时 $F(\tilde{A}_i)$ 的几何意义。图中，

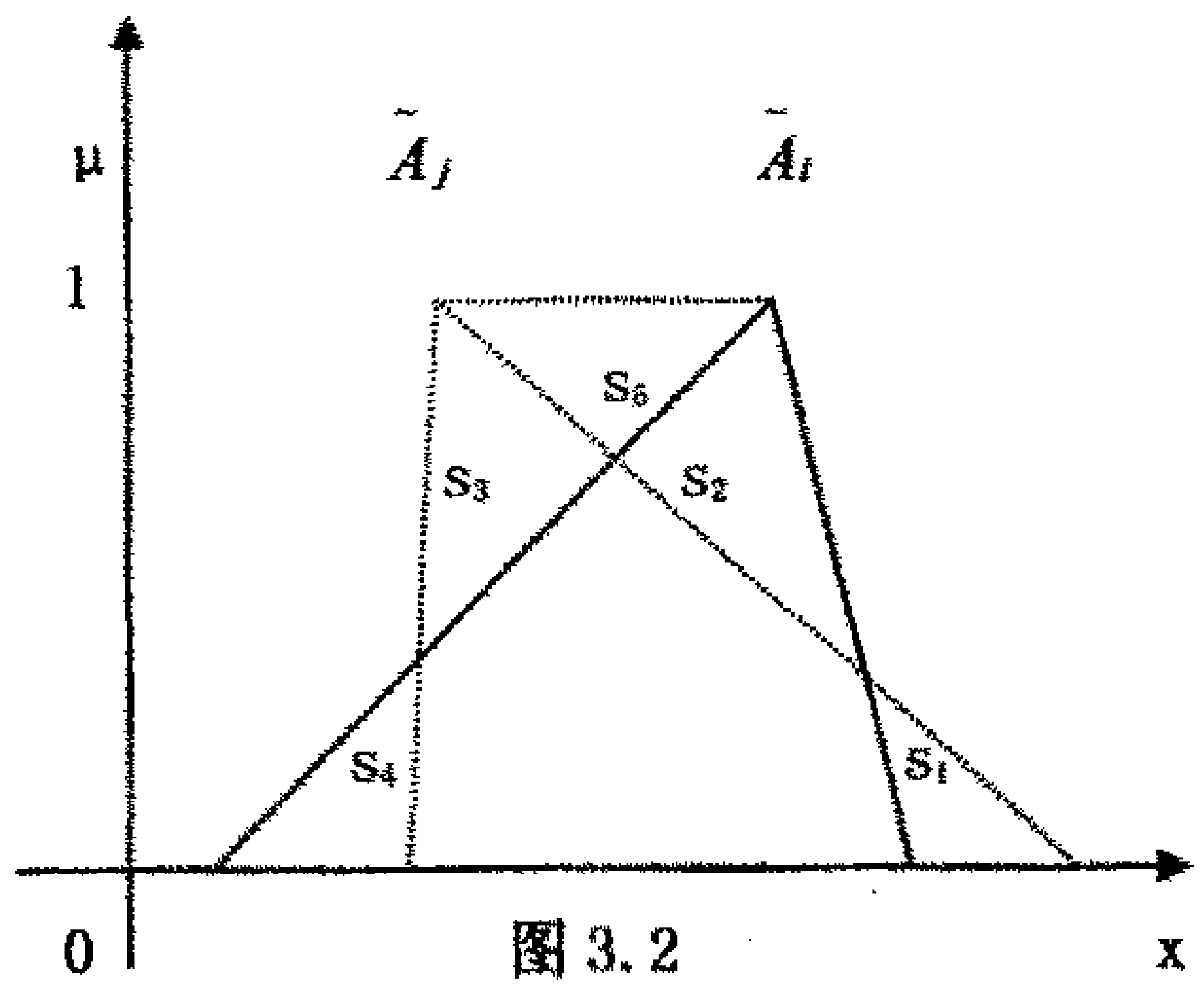

图 3.2

$$F(\tilde{A}_i) = R_1(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$$

$$= \frac{s_2 + s_3 + 2s_5}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 2s_5}$$

由定义 3.4.1 对 n 个模糊数的排序问题，采用式 3.17 定义的模糊评价函数，只要计算 n 个指标值就可以了。

第四章 多目标模糊指派的解法研究

指派问题在工业、农业、经济管理及军事领域具有十分广泛的应用价值，指派模型也是运筹学、系统工程、决策科学等交叉学科的研究课题。对于传统的平衡指派问题，已有一些通用的求解方法，如匈牙利法，削高排除法等；对于广义指派问题的解法我们也在第二章中进行了讨论。当然，这两类指派模型一般考虑的目标因素只有一个，考核的系数指标是明确的，都主要是在分明环境下求解问题的解。然而，实际管理中的指派问题往往远比此复杂，需要考虑的目标因素有若干个，且考核指标在实际问题中往往很难用精确值进行量化，在这种情形下，通过专家咨询采用模糊数或语言变量来刻画它们则显得更为合理。本章将针对这种目标值和权重均为模糊数的多目标指派问题提出和建立相应的模型并寻求其解法。

本章第一节介绍在经典的多目标决策中常用的权重分配方法及其相关理论依据，第二节讨论模糊环境下模糊权重矢量的确定，第三节讨论多目标模糊指派模型的建立及其求解方法，第四节是应用举例。

4.1 权重分配方法

在多目标的指派决策问题中，常需要对描述方案的各个指标赋予相应的权重，权重不同就有可能导致最终结果的差异，因此权重的确定是相当重要的。

在经典的多目标决策中，常用的权值分配方法有：专家调查法[43, 44]，二项系数法[45]，特征矢量法[12]，层次分析法[28, 30-32, 36]等。在确定目标权重 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 时，由于 n 常常较大，且要求满足 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，所以，通过专家调查的方法来确定 w_i 很难有统计稳定性，运用二项系数法又不能充分利用信息。然而对于两两因素的重要性程度的比较，因为参照点相对稳定，判断矩阵容纳信息量大，综合性强，故使得确定的权重分配比较客观，因而特征矢量法应用范围较广。

4.1.1 特征矢量法

设权重矢量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$，根据因素 c_i,c_j 的权重比 w_i/w_j，i, j=1, 2, …, n, 可构造下面的权重比矩阵 M：

$$M=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

其中，矩阵元素 $w_{ii}=1, w_{ij}=1/w_{ji}$，且 $w_{ij}=w_{ik}/w_{jk}$，M 被称为相容矩阵，将权重矢量 W 右乘 M，则有

$$MW=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix}=nW$$

由矩阵理论可知，n 是 M 唯一非零的也是最大的特征根，记为 λ_{max}，而 W 是 n 所对应的特征矢量。虽然权重矢量 W 是未知的，但可通过两两比较的方法得到 M 的一个估计矩阵 M'，M' 也被称为初始判断矩阵，然后求解 M' 的最大特征根 λ_{max}，将求出的最大特征根 λ_{max} 代入齐次线性方程组：

$$(M'-\lambda I)\ W'=0$$

从而解出 λ_{max} 的特征矢量

$$W'=(w_1',w_2',\cdots,w_n')^T$$

如果判断矩阵 M' 是相容矩阵，则特征矢量 W' 也就是因素的权重矢量 W。但一般来说，M' 未必是相容矩阵。为了度量判断矩阵的相容性，Saaty 教授定义了不相容指标：

$$C(M')=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}.$$

当 $C(M')\le 0.1$ 时，认为初始判断矩阵 M' 的相容性好，可令 $W=W'$，否则，需要对估计矩阵 M' 重新调整。

4.1.2 构造几何平均判断矩阵

由特征矢量法我们知道，当判断矩阵不满足一致性条件时，需要调整判断矩阵，在实际应用中，一般都凭着大致的估计来调整判断矩阵，虽然往往行之有效，但毕竟带有盲目性，且人为增加工作量，而且不排除需要经过多次调整才能通过一致性检验的可能性。事实上，专家所作出的二元比较矩阵是符合客观实际的，导致整个判断矩阵不满足相容性，责任不在专家。由于思维的模糊性，判断矩阵不严格满足传递性也在所难免，在文献[29]中，作者认为对一个由专家审慎给出的初始判断矩阵，没有必要期望或诱导专家对它进行再修改，并由此构造出几何平均判断矩阵。

定义 4.1.1 设 A=$(a_{ij})_{n\times n}$ 是由专家给出的初始判断矩阵，$\forall i,j$，$a_{ii}=1$，

$a_{ij}\times a_{ji}=1$，$b_{ij}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}}$ i, j=1, 2, ……, n, 则称由 A 构造出的新的判断矩阵 B=$(b_{ij})_{n\times n}$ 为几何平均判断矩阵。

定理 4.1.1 几何平均判断矩阵 B=$(b_{ij})_{n\times n}$ 是相容矩阵。

证明：由定义 4.1.1，A=$(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}\times a_{ji}=1$，$B=(b_{ij})_{n\times n}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}}$

故

$$b_{ii}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}}=1$$

$$b_{ij}b_{ji}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}}\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{jk}a_{ki}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}a_{jk}a_{ki}}=1$$

$$b_{ik}b_{kj}=\sqrt[n]{\prod_{m=1}^{n}a_{im}a_{mk}}\cdot\sqrt[n]{\prod_{m=1}^{n}a_{km}a_{mj}}=\sqrt[n]{\prod_{m=1}^{n}a_{im}a_{mk}a_{km}a_{mj}}=\sqrt[n]{\prod_{m=1}^{n}a_{im}a_{mj}a_{mk}a_{km}}$$

$$=\sqrt[n]{\prod_{m=1}^{n} a_{im} a_{mj}} = b_{ij}$$

因此，由 b_{ij} 构成的判断矩阵是相容矩阵。

4.1.3 几何平均判断矩阵与初始判断矩阵的关系

由定义 4.1.1 可知 $b_{ij}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}}$，实质上是 n 个乘积 $a_{ik}a_{kj}$（k=1, 2⋯, n）的几何平均数。当 A 为相容矩阵时，由定义易知对任意 i, j, 均有 $b_{ij}=a_{ij}$；当 A 为不相容矩阵时，引进随机变量 δ，对任意 k，令

$a_{ik}a_{kj}=(1+\delta^{(k)})a_{ij}$，则 $b_{ij}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+\delta^{(k)})a_{ij}}=a_{ij}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+\delta^{(k)})}$

由上式可见当专家的思维或判断矩阵之间存在相互修正关系时，就随机变量 δ 而言，它是由于专家在作出评判时，许多作用微小的因素在专家头脑中反映的体现，因此可合理假定 δ 服从正态分布 δ~ N（0， δ）.

忽略高阶小量，则上式为：

$$b_{ij}=a_{ij}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+\delta^{(k)})}=a_{ij}(1+\sum_{k=1}^{n}\delta^{(k)})^{\frac{1}{n}},$$

两边取极限

$$\lim_{n\to\infty} b_{ij}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta^{(k)}+\frac{(n^{-1}-1)n^{-1}}{2!}(\sum_{k=1}^{n}\delta^{(k)})^{2}+\frac{n^{-1}(n^{-1}-1)(n^{-1}-2)}{3!}(\sum_{k=1}^{n}\delta^{(k)})^{3}+\ldots\right]a_{ij}=a_{ij}$$

，所以当 $n\to\infty$ 时，b_{ij} 实质上就是 a_{ij}.

综上， b_{ij} 完全可以替代 a_{ij}，且由 b_{ij} 所组成的矩阵是相容矩阵。

设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为相容矩阵，则其特征向量理论值为

$$W=\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}b^{i1}},\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}b^{i2}},\ldots\ldots,\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}b^{in}}\right]$$，其中 $w_j=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}b^{ij}}$，j=1，2，…，n

定理 4.1.2 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是相容矩阵，令 $w_j'=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{ki}})^{-1}$，

则 $w_j'=w_j$

证明：

$$w_j'=\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{ik}}}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{ik}}}{\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}b_{ik}}}\right]^{-1}=\left[\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{ik}}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{nk}}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}}\right]^{-1}$$

取分母第 m 项，令 $c_m=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{mk}}(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}})^{-1}$，则 $w_j'=\frac{1}{c_1+c_2+\ldots+c_n}$，又

$(b_{ij})_{n\times n}$ 为相容矩阵，则 $b_{mk}=b_{mj}\times b_{jk},\forall m,k,j$，所以

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{mk}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{mj}b_{jk}}=\sqrt[n]{(b_{mj})^n\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}=b_{mj}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{mk}}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_{jk}}}=b_{mj}.$$

而 $w_j'=\frac{1}{c_1+c_2+\ldots+c_n}=\frac{1}{b_{1j}+b_{2j}+\ldots+b_{nj}}=\frac{1}{\sum_{m=1}^{n}b_{mj}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}b_{ij}}=w_j$.从而

$c_m=b_{mj}$，即 $w_j'=w_j$，$(j=1,2,\ldots n)$ 得证。

定理 4.1.3 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中，$a_{ii}=1$，$a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}$，令

$B=(b_{ij})_{n\times n}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}}$， $w_i^{(A)}=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}},w_i^{(B)}=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}b_{ij}}$ 则 $w_i^{(A)}=w_i^{(B)}$。

证明：

$$w_i^{(B)}=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}b_{ij}}=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}}}=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_{kj}}}=\left[\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{ik}}\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{kj}}\right]$$

$$=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}w_i^{(A)}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{kj}}}=w_i^{(A)}\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_{kj}}}=w_i^{(A)}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}a_{kj}}}=w_i^{(A)}$$

即 $w_i^{(A)}=w_i^{(B)}$.

由定理 4.1.3 可知，按方根法求解，A 与 B 判断矩阵具有相同的特征向量，而 B 为相容矩阵，由定理 4.1.2 可知，B 的特征向量理论值等于方根法求得的特征向量，因此通过上述定理及证明，给出了初始判断矩阵直接寻求特征向量的精确计算公式 $w_i=(\prod_{j=1}^{n}a_{ij})^{\frac{1}{n}},(i=1,2,....,n)$.

4.2 模糊权重矢量的确定

4.2.1 模糊互逆矩阵

由 Saaty 教授提出的为求解目标权值的特征矢量法，模糊性是通过互逆矩阵中权重两两比较的不相容性来间接表示的，并没有直接用到模糊集的相关理论，既然专家的意见本质上是模糊的，两两比较的结果就应该表示成模糊数，而不应该是实数比的形式，故权重两两比较的矩阵，应该是模糊互逆矩阵 $\widetilde{M}$：

$$\widetilde{M}=\begin{pmatrix}\tilde{w}_{11} & \tilde{w}_{12} & \cdots & \tilde{w}_{1n}\\ \tilde{w}_{w} & \tilde{w}_{22} & \cdots & \tilde{w}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{w}_{m} & \tilde{w}_{n2} & \cdots & \tilde{w}_{nn}\end{pmatrix}$$

式中 $\tilde{w}_{ij}$ 是三角模糊数或梯形模糊数，表示目标之间相对重要程度两两比

较的结果，$\tilde{w}_{ij}$ 与 $\tilde{w}_{ji}$ 互为倒数。

4.2.2 模糊权重矢量的确定

若 $\tilde{w}_{ij}$ 为梯形模糊数，$\tilde{w}_{ii}$ =（1，1，1，1），i=1，…，n，

$\tilde{w}_{ij}=(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$， i, j=1, …, n, i≠j,

定义

$$a_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}},\quad b_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} b_{ij}},\quad c_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} c_{ij}},\quad d_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}$$

则与上一节中有关由初始判断矩阵利用方根法求得特征向量的精确计算公式相类似，可得：

$\tilde{w}_i$ =（a_i，b_i，c_i，d_i）． i=1, 2, …, n.

与经典的权重矢量的归一化一样，模糊权重矢量之间的比较也存在归一化问题，因为权重如果不经过归一化处理，依然会存在不可比性问题，为此，将模糊权重矢量进行归一化处理：

$$\tilde{w}=\{(\frac{a_1}{d},\frac{b_1}{c},\frac{c_1}{b},\frac{d_1}{a}),\cdots,(\frac{a_i}{d},\frac{b_i}{c},\frac{c_i}{b},\frac{d_i}{a}),\cdots,(\frac{a_n}{d},\frac{b_n}{c},\frac{c_n}{b},\frac{d_n}{a})\}\quad(4.1)$$

其中，

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_i,\quad b=\sum_{i=1}^{n}b_i,\quad c=\sum_{i=1}^{n}c_i,\quad d=\sum_{i=1}^{n}d_i.$$

若 $\tilde{w}_{ij}$ 为三角形模糊数，$\tilde{w}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij})$，则模糊权重矢量为：

$$\tilde{w}=\{(\frac{a_1}{c},\frac{b_1}{b},\frac{c_1}{a}),\cdots,(\frac{a_i}{c},\frac{b_i}{b},\frac{c_i}{a}),\cdots,(\frac{a_n}{c},\frac{b_n}{b},\frac{c_n}{a})\}\quad(4.2)$$

其中，

$$a_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}},\quad a=\sum_{i=1}^{n}a_i;$$

$$b_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} b_{ij}}, \quad b = \sum_{i=1}^{n} b_i ;$$

$$c_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} c_{ij}}, \quad c = \sum_{i=1}^{n} c_i .$$

4.3 多目标模糊指派模型及其求解

前面已经提到，在多目标指派问题的建模阶段，会遇到大量的模糊信息和随机信息，为得到一个确定的指派问题的模型，决策者事先对这些模糊信息和随机信息进行处理，比如用与之相近的确定信息取代它们，但这样会导致建立的模型与实际的问题存在一定的差距，甚至会导致出现错误的结论。因此，如何建立能反映模糊性和随机性等不确定性的指派问题模型，使得更加符合实际是建模阶段的一个重要问题。模糊集合论无疑为这种不确定性模型的建立提供了强有力的工具，在文献[34, 35, 38]中，作者也就具有模糊信息的指派问题进行了讨论。下面我们将针对目标值和权重均为模糊数的多目标模糊指派模型作进一步讨论。

4.3.1 模糊综合效益矩阵

在多目标模糊指派问题中，设有 m 个人（$A_1, A_2, \cdots, A_m$）被指派去做 n 项任务（ B_1, B_2, …, B_n ），指派决策需要考虑的因素或目标有 T（T≥2）个（ F_1, F_2, …, F_T ）， 决策者为了获取指派信息，咨询了 K 个专家（$E_1, E_2, \cdots, E_K$）。

专家 E_k(k=1, 2, …, K)对目标 F_t(t=1, 2, …T)能够给出 A_i(i=1, 2, …m)去做 B_j（j=1, 2, …n）的模糊评价值为 $\tilde{c}_{ijk}^{t}$（$\tilde{c}_{ijk}^{t}$ 为梯形模糊数或三角形模糊数）。这样 $m\times n$ 个 $\tilde{c}_{ijk}^{t}$ 构成在目标 F_t 下专家 E_k 对指派问题的模糊效益矩阵 $\tilde{R}_k^t = (\tilde{c}_{ijk}^t)_{m\times n}$．假定各专家在决策评价中处于平等地位，利用 $\tilde{R}_k^t$（k=1,2,…,K）运用模糊算法求出所有专家在目标 F_t 下的平均模糊效益矩阵 $\tilde{R}^t$ $(t=1,\ldots,T)$.

$$\tilde{R}^{t}=(1/K)\otimes(\tilde{R}_1^{t}\oplus\tilde{R}_2^{t}\oplus\ldots\oplus\tilde{R}_K^{t}) \tag{4.3}$$

其中 $\otimes,\oplus$ 分别为模糊数乘与模糊加运算，$\tilde{R}^{t}$ 中的元素 $\tilde{c}_{ij}^{t}(i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n,t=1,2,\ldots,t)$ 为

$$\tilde{c}_{ij}^{t}=(1/K)\otimes(\tilde{c}_{ij1}^{t}\oplus\tilde{c}_{ij2}^{t}\oplus\ldots\oplus\tilde{c}_{ijk}^{t}). \tag{4.4}$$

通过上面的运算，$\tilde{c}_{ij}^{t}$ 仍为模糊数。若 $\tilde{c}_{ijk}^{t}$ 为三角模糊数（$\alpha_{ijk}^{t},\beta_{ijk}^{t},\gamma_{ijk}^{t}$），则

$$\tilde{c}_{ij}^{t}=(\alpha_{ij}^{t},\beta_{ij}^{t},\gamma_{ij}^{t}).$$

其中，$\tilde{\alpha}_{ij}^{t}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\alpha_{ijk}^{t},\beta_{ij}^{t}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\beta_{ijk}^{t},\gamma_{ij}^{t}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\gamma_{ijk}^{t}$.

由于模糊性的客观存在，专家有的时候不一定能给出目标权重矢量，正如4.2节中讨论的一样，专家给出的仅仅是目标权重两两比较的模糊互逆矩阵。假定专家 E_k（k=1, 2, ..., K）给出的模糊互逆矩阵为

$$\tilde{M}_k=\begin{pmatrix}\tilde{w}_{11k} & \tilde{w}_{12k} & \cdots & \tilde{w}_{lTk}\\ \tilde{w}_{21k} & \tilde{w}_{22k} & \cdots & \tilde{w}_{2Tk}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{w}_{T1k} & \tilde{w}_{T2k} & \cdots & \tilde{w}_{TTk}\end{pmatrix}_{T\times T}$$

利用式（4.1）或（4.2）可求得 $\tilde{w}_k=(\tilde{w}_{tk},\tilde{w}_{2k},\cdots,\tilde{w}_{Tk})$，T×K 个 $\tilde{w}_{tk}$ 构成专家对各目标权系数的评价值矩阵

$$\tilde{M}=(\tilde{w}_{tk})_{T\times K}$$

运用模糊算法求出所有专家对目标 F_t 的平均权系数评价值

$$\tilde{w}^{t}=(1/K)\otimes(\tilde{w}_{t1}\oplus\tilde{w}_{t2}\oplus\cdots\oplus\tilde{w}_{TK}) \tag{4.5}$$

通过上面的运算，$\tilde{w}^{t}$ 仍是模糊数。若 $\tilde{w}_{tk}$ 为三角模糊数（$\varepsilon_{tk},\eta_{tk},\theta_{tk}$），

则

$$\tilde{w}^t=(\varepsilon^t,\eta^t,\theta^t),$$

其中，

$$\varepsilon^t=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_{tk},\eta^t=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\eta_{tk},\theta^t=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\theta_{tk}.$$

将目标权重作归一化，若$\tilde{w}^t$为三角形模糊数（$\varepsilon^t,\eta^t,\theta^t$），则归一化的目标权重矢量为

$$\tilde{W}=\{\tilde{w}^1,\cdots,\tilde{w}^t,\cdots,\tilde{w}^T\}$$

$$=\{(\varepsilon_1,\eta_1,\theta_1),\cdots,(\varepsilon_t,\eta_t,\theta_t),\cdots,(\varepsilon_T,\eta_T,\theta_T)\} \quad (4.6)$$

其中，

$$\varepsilon_t=\frac{\varepsilon^t}{\sum_{t=1}^{T}\theta^t},\quad \eta_t=\frac{\eta^t}{\sum_{t=1}^{T}\eta^t},\quad \theta_t=\frac{\theta^t}{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon^t}.$$

这样，可确定多目标模糊指派问题的模糊综合效益矩阵$\tilde{R}$

$$\tilde{R}=(\tilde{c}_{ij})_{mn}=(1/T)\otimes\{(\tilde{w}^1\times\tilde{R}^1)\oplus(\tilde{w}^2\times\tilde{R}^2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{w}^T\times\tilde{R}^T)\}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha_{11},\beta_{11},\gamma_{11}) & (\alpha_{12},\beta_{12},\gamma_{12}) & \cdots & (\alpha_{1m},\beta_{1m},\gamma_{1m})\\ (\alpha_{21},\beta_{21},\gamma_{21}) & (\alpha_{22},\beta_{22},\gamma_{22}) & \cdots & (\alpha_{2m},\beta_{2m},\gamma_{2m})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_{m1},\beta_{m1},\gamma_{m1}) & (\alpha_{m2},\beta_{m2},\gamma_{m2}) & \cdots & (\alpha_{mn},\beta_{mn},\gamma_{mn})\end{pmatrix}_{m\times n} \quad (4.7)$$

其中，“×”表示模糊乘运算，由扩张原理，两个三角形或梯形模糊数的乘积已不再是三角形或梯形模糊数，此时可采用近似计算。若$\tilde{w}^t,\tilde{R}^t$是三角形模糊数（$\varepsilon_t,\eta_t,\theta_t$），（$\alpha_{ij}^t,\beta_{ij}^t,\gamma_{ij}^t$）

则

$\tilde{c}_{ij}=(\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij})=(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\cdot\alpha_{ij}^t,\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\eta_t\cdot\beta_{ij}^t,\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\theta_t\cdot\gamma_{ij}^t)$．（i=1, 2, ..., m；j=1, 2, ..., n）

4.3.2 多目标模糊指派问题的求解

通过模糊综合效益矩阵的确定，引入 0-1 型决策变量x_{ij}，可将原来的多目标模糊指派问题转化为单目标模糊指派问题，建立如下的数学模型：

$$\text{Max (Min) } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\tilde{c}_{ij}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}x_{ij})=n\\ \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}x_{ij})=m\\ x_{ij}=1\text{或}0,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{4.8}$$

其中，$x_{ij}=1$表示指派人员 A_i 去做任务 B_j，否则$x_{ij}=0$；$x_{ij}\tilde{c}_{ij}$表示x_{ij}与$\tilde{c}_{ij}$的模糊数乘运算，目标函数中的Σ表示模糊和运算。

为了求解上述模糊指派模型，应用第三章模糊数的排序中定义的模糊评价函数

$$F(\tilde{A}_i)=\begin{cases}\dfrac{\int_{U(\tilde{A}_i,\tilde{M})}(\underline{a}_{i\alpha}-\underline{m}_{\alpha})d\alpha+\int_{V(\tilde{A}_i,\tilde{M})}(\bar{a}_{i\alpha}-\bar{m}_{\alpha})d\alpha}{\int_{U(\tilde{N},\tilde{M})}(\underline{n}_{\alpha}-\underline{m}_{\alpha})d\alpha+\int_{V(\tilde{N},\tilde{M})}(\bar{n}_{\alpha}-\bar{m}_{\alpha})d\alpha} & \text{其它}\\ 0.5 & \tilde{M}=\tilde{N}\end{cases}$$

构造新模型如下：

$$\text{Max (Min)}\ Z'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}F(\tilde{c}_{ij})$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}x_{ij})=n\\ \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}x_{ij})=m\\ x_{ij}=1\text{或}0,\ i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{4.9}$$

其中，$x_{ij}=1$表示指派人员 A_i 去做任务 B_j，否则$x_{ij}=0$。

定理 4.3.1 设 X 是模糊指派模型（4.9）的可行解矩阵，若$x'\in X$是模型（4.9）的最优解矩阵，则x'也是模型（4.8）的最优解矩阵。

证明：设$x'=(x_{ij}^{'})_{m\times n}$，由于$x'\in X$是（4.9）的最优解矩阵，则任给

$x=(x_{ij})_{m\times n}\in X$，有$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{'}F(\tilde{c}_{ij})\geq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}F(\tilde{c}_{ij})$，

进而，

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}F(x_{ij}^{'}\tilde{c}_{ij})\geq\sum\sum F(x_{ij}\tilde{c}_{ij})\ ,$$

再由定理 3.4.1，有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{'}\tilde{c}_{ij}\geq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\tilde{c}_{ij}.$$

即$x'=(x_{ij})_{m\times n}$是（4.8）的最优解矩阵。

由定理 4.3.1，多目标模糊指派问题可通过模型（4.8）转化为模型（4.9）求解得出，其具体求解程序为：

第一步：利用式（4.1）—（4.7）确定多目标模糊综合效益矩阵$\tilde{R}$；

第二步：根据多目标模糊综合效益矩阵$\tilde{R}$建立模糊指派模型（4.8）；

第三步：运用模糊评价函数计算每一个$\tilde{c}_{ij}$对应的$F(\tilde{c}_{ij})$的值；

第四步：将模型（4.8）转化为模型（4.9）；

第五步：求解模型（4.9）

（1） 若m=n，模型（4.9）为标准的平衡指派问题，可运用匈牙利法求解；

（2） 若 m≠n，模型（4.9）为广义指派问题，可运用第二章中给出的广义指派问题的解法来求解。

4.4 应用举例

在工程设计中，经常会遇到多工程选址的多目标决策问题，这类问题主要是确定几个工程的位置使整个系统的经济、社会效益最大，而环境污染最轻。如果将位置看成是指派问题中的任务，而把工程看成是指派问题中完成任务的人，则可把工程选址决策问题转化为指派问题进行求解。当然，在这里，我们还是有必要规定在工程数少于或等于位置数时，每个位置最多只能建一个工程；而在工程数多于位置数时，每个位置可以建多个工程，这是比较符合实际的。

例 设某市政府要在其所辖的三个地区（记为 $B=\{B_1,B_2,B_3\}$）修建四项大的工程（记为 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$）。选址决策所要考虑的目标因素有三个：F_1经济效益最大；F_2环境污染最小；F_3社会效益最大。为此，市政府邀请各方面的专家组成两个专家组进行考察，两个专家组 E_1，E_2在三个目标因素下分别给出在不同地区建不同工程的模糊评价值见表 4.1——表4.6以及目标权重两两比较的模糊互逆矩阵$\tilde{M}_1,\tilde{M}_2$.

表4.1 E_1在F_1下的模糊评价值$\tilde{c}_{ij1}^{1}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	(4,5,6)	(7,8,9)	(3,4,5)
A_2	(3,4,5)	(6,7,8)	(1,2,3)
A_3	(2,3,4)	(5,6,7)	(6,6,6)
A_4	(9,9,10)	(3,5,7)	(5,6,7)

表4.2 E_2在F_1下的模糊评价值$\tilde{c}_{ij2}^{1}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	(3,5,6)	(6,7,8)	(5,6,7)
A_2	(4,5,6)	(7,7,7)	(2,3,4)
A_3	(1,2,3)	(8,9,10)	(4,5,6)
A_4	(6,7,8)	(6,7,8)	(3,4,5)

表4.3 E_1在F_2下的模糊评价值 $\tilde{c}_{ij1}^{2}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	(2,3,4)	(5,6,7)	(6,7,8)
A_2	(6,7,8)	(4,5,6)	(3,4,5)
A_3	(3,5,7)	(7,8,9)	(3,4,5)
A_4	(7,8,9)	(4,5,6)	(4,5,6)

表4.4 E_2在F_2下的模糊评价值 $\tilde{c}_{ij2}^{2}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	(1,2,3)	(3,4,5)	(9,9,10)
A_2	(7,8,9)	(2,2,2)	(3,5,7)
A_3	(5,6,7)	(6,7,8)	(1,2,3)
A_4	(3,5,6)	(6,7,8)	(6,6,6)

表4.5 E_1在F_3下的模糊评价值 $\tilde{c}_{ij1}^{3}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	(7,7,7)	(4,5,7)	(2,3,4)
A_2	(5,6,7)	(2,3,4)	(8,9,10)
A_3	(7,8,9)	(1,2,3)	(6,7,8)
A_4	(3,4,5)	(2,3,4)	(4,5,6)

表4.6 E_2在F_3下的模糊评价值 $\tilde{c}_{ij2}^{3}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	(2,3,4)	(4,5,6)	(3,4,5)
A_2	(6,7,8)	(3,4,5)	(3,3,3)
A_3	(3,4,5)	(3,4,5)	(4,5,6)
A_4	(7,8,9)	(4,5,6)	(7,8,9)

表4.1——4.6中，i=1,2,3,4;j=1,2,3.

$$\tilde{M}_1=\begin{pmatrix} (1,1,1) & (\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5}) & (\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ (5,6,7) & (1,1,1) & (3,3,3) \\ (2,2,3) & (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}_2=\begin{pmatrix} (1,1,1) & (\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4}) & (3,4,5) \\ (4,5,6) & (1,1,1) & (2,3,4) \\ (\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}) & (\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

解：第一步利用式（4.1）——（4.7）确定多目标模糊综合效益矩阵 $\tilde{R}$.

由表4.1——4.6可知，

$$\tilde{R}_1^1=(\tilde{c}_{ij1}^1)_{4\times3} \qquad \tilde{R}_2^1=(\tilde{c}_{ij2}^1)_{4\times3}$$

$$\tilde{R}_1^2=(\tilde{c}_{ij1}^2)_{4\times3} \qquad \tilde{R}_2^2=(\tilde{c}_{ij2}^2)_{4\times3}$$

$$\tilde{R}_1^3=(\tilde{c}_{ij1}^3)_{4\times3} \qquad \tilde{R}_2^3=(\tilde{c}_{ij2}^3)_{4\times3}$$

由式（4.3）、（4.4）

$$\tilde{R}^1=(1/2)\otimes(\tilde{R}_1^1\oplus\tilde{R}_2^1)$$

$$=\begin{pmatrix}(3.5,5,6) & (6.5,7.5,8.5) & (4,5,6)\\ (3.5,4.5,5.5) & (6.5,7,7.5) & (1.5,2.5,3.5)\\ (1.5,2.5,3.5) & (6.5,7.5,8.5) & (5,5.5,6)\\ (7.5,8,9) & (4.5,,6,7.5) & (4,5,6)\end{pmatrix}$$

$$\tilde{R}^2=(1/2)\otimes(\tilde{R}_1^2\oplus\tilde{R}_2^2)$$

$$=\begin{pmatrix}(1.5,2.5,3.5) & (4,5,6) & (7.5,8,9)\\ (6.5,7.5,8.5) & (3,3.5,4) & (3,4.5,6)\\ (4,5.5,7) & (6.5,7.5,8.5) & (2,3,4)\\ (5,6.5,7.5) & (5,6,7) & (5,5.5,6)\end{pmatrix}$$

$$\tilde{R}^3=(1/2)\otimes(\tilde{R}_1^3\oplus\tilde{R}_2^3)$$

$$=\begin{pmatrix}(3.5,5,5.5) & (4,5,6.5) & (2.5,3.5,4.5)\\ (5.5,6.5,7.5) & (2.5,3.5,4.5) & (5.5,6,6.5)\\ (5,6,7) & (2,3,4) & (5,6,7)\\ (5,6,7) & (3,4,5) & (5.5,6.5,7.5)\end{pmatrix}$$

由式（4.1）

$$\tilde{w}_1=\{(2.154,2.289,2.759),(0.362,0.381,0.406),(1,1.145,1.145)\}$$

$$\tilde{w}_2=\{(0.928,1.077,1.26),(0.161,0.406,0.794),(1.817,2.289,2.714)\}$$

由式（4.5）

$$\tilde{w}^1=(1.541,1.683,2.01),\tilde{w}^2=(0.262,0.394,0.6),\tilde{w}^3=(1.4.09,1.717,1.93)$$

由式（4.6）将目标作归一化处理，则

$$\tilde{W}=\{\tilde{w}^1,\tilde{w}^2,\tilde{w}^3\}$$
$$=\{(0.339,0.446,0.626),(0.058,0.104,0.187),(0.310,0.453,0.601)\}$$

由式（4.7）

$$\tilde{R}=(\tilde{c}_{ij})_{4\times3}$$
$$=\begin{pmatrix}(0.786,1.581,2.572) & (1.225,2.038,3.449) & (0.855,1.546,2.728)\\ (1.090,1.907,3.180) & (1.051,1.686,2.716) & (0.796,1.432,2.407)\\ (0.764,1.467,2.569) & (1.067,1.823,3.105) & (1.120,1.824,2.904)\\ (1.461,2.315,3.748) & (0.915,1.700,3.003) & (1.117,1.912,3.129)\end{pmatrix}$$

第二步根据 $\tilde{R}=(\tilde{c}_{ij})_{4\times3}$ 建立形如（4.8）的模糊指派模型.

第三步运用式（3.20）定义的模糊评价函数计算 $F(\tilde{c}_{ij})$.

$F(\tilde{c}_{11})=0.417$， $F(\tilde{c}_{12})=0.562$， $F(\tilde{c}_{13})=0.469$

$F(\tilde{c}_{21})=0.518$， $F(\tilde{c}_{22})=0.459$， $F(\tilde{c}_{23})=0.423$

$F(\tilde{c}_{31})=0.401$， $F(\tilde{c}_{32})=0.503$， $F(\tilde{c}_{33})=0.535$

$F(\tilde{c}_{41})=0.630$， $F(\tilde{c}_{42})=0.470$， $F(\tilde{c}_{43})=0.563$

第四步根据 $F(\tilde{c}_{ij})$ 建立形如（4.9）的模型.

其中，

$$(F(\tilde{c}_{ij}))_{4\times3}=\begin{pmatrix}0.417 & 0.562 & 0.469\\ 0.518 & 0.459 & 0.423\\ 0.401 & 0.503 & 0.535\\ 0.630 & 0.470 & 0.563\end{pmatrix}$$

第五步将模型转化为最小化问题，由于 m=4，n=3，即 m≠n，运用第二章中给出的广义指派问题的解法，属于模型（GAPI）且 m=n+1，出情形 1，可求出解矩阵为：

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

这样，在该决策指派问题中，应在地区 B_1 修建工程 A_2，A_4，在地区 B_2 修建工程 A_1，在地区 B_3 修建工程 A_3 .

实例表明，针对模糊环境下的多目标指派问题，通过利用专家意见确定模糊效益矩阵，并利用第三章中的模糊数排序方法，将问题转化为单目标指派，从而可以进行最优指派。该方法思路清晰、合理，为实际应用提供了科学的依据。

结论

指派决策问题是人们在工程技术、科学研究和经济管理等诸多领域中经常遇到的问题。本文就两类有实际应用背景的指派决策问题——广义指派问题以及多目标模糊指派问题的解法进行了探讨。

广义指派问题是0-1型整数线性规划问题，直接求解比较费事，但由于工作件数与工作人数不相等也不能直接运用“匈牙利算法”来求解，故设法将其转化为传统指派问题并进行求解。对现有的广义指派问题的解法进行了研究和比较。采取虚设工作件数或人数的方法建立扩充方阵将广义指派问题转化为标准的指派问题进行求解，从而寻求到了一种广义指派问题的解法。在实际应用中表明该方法具有合理性和有效性。

在模糊决策理论中，许多现实世界的问题，都需要处理和评估模糊数据然后再做出决策。要评判和比较不同的方案并做出选择，对模糊数进行比较和排序是不可避免的。从模糊集的定义及其性质中知道，模糊集之间的顺序关系不是通常意义下的全序关系，而是格结构下的半序关系，这就使模糊数的比较与判别成为模糊决策中既重要而又艰难的任务之一。本文给出了一种模糊数的排序方法。定义了一种模糊序关系，从理论上证明了该模糊序关系具有模糊互补性、模糊传递性以及平稳性，因而具有合理性；在模糊序关系的基础上定义了一个模糊评价函数，利用模糊评价函数对n个模糊数进行排序方法简便，它可以应用于实际问题的模糊决策中。

对于目标值和权重均为模糊数且考虑的目标因素不止一个的多目标指派问题，本文给出了一个多目标模糊指派问题的解法。根据专家意见确定模糊综合效益矩阵，建立单目标模糊指派模型，利用模糊评价函数将模糊环境下的指派模型转化为经典的指派决策模型，最后利用广义指派问题的解法或标准指派问题的解法进行指派决策。数值例子验证了解法的合理性和可行性。

由于广义指派可以从许多不同的问题中引出，而不同问题所满足的约束条件也不尽相同，因此如何寻求不同约束条件下广义指派的一般解法值得进一步研究。

尽管在现有的文献中已有很多对模糊数进行比较的方法，但还没有一种方法在所有情形中令人满意地对模糊数进行比较和排序，甚至这些方法

中的大多数与人们的直觉相抵触或缺乏分辨力。对此，可以预计今后这方面的研究将是进一步完善这些方法，以使这些方法更具有分辨力及其合理性。

致谢

时光荏苒，三年的校园生活即将过去。三年的校园生活虽然短暂，但这段美好的学习生活经历必将深深地映在我的脑海中，使我终身难忘。在我即将离开这片美丽的热土的时刻，我要特别感谢我的导师黄天民教授，本文是在导师黄天民教授的悉心指导下完成的，论文中凝聚着导师三年来精心培养所付出的大量心血和汗水，导师认真求实、严谨治学的作风，崇高的敬业精神，将使我终身受益；同时，我还要感谢我的任课老师陈滋利教授、宋振明教授、秦克云教授、吴建乐副教授、张爱丽副教授，是他们的言传身教为我开启了知识殿堂的大门，他们为追求真知忘我拼搏的敬业精神永远是我学习的榜样；另外，我要感谢三年来和我并肩学习的同窗学友，他们刻苦学习、崇尚科技的学风同样值得我学习；最后，我要感谢给予我指导、帮助的所有领导和老师，并对所有曾经关心我的人表示我诚挚的感谢。

参考文献

[1]运筹学教材编写组编，运筹学，清华大学出版社，1990

[2]张曾科编著，模糊数学在自动化技术中的应用，清华大学出版社，1997

[3]中国科学院数学研究所运筹室编，最优化方法，科学出版社，1980

[4]P.Fortemps and M.Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation, Fuzzy Sets and Systems 82 (1996) 319-330.

[5]T-S.Liou and M-J.Wang, Ranking fuzzy numbers with integral value, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 247-255.

[6]C-H.Cheng, A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, Fuzzy Sets and Systems 95 (1998) 307-317.

[7]J-S.Yao and K.Wu, Ranking fuzy numbers based on decomposition principle and signed distance, Fuzzy Sets and Systems 116 (2000) 275-288.

[8]F.Choobinech and H.Li, An index for ordering fuzzy numbers, Fuzzy Sets sndSystems 54 (1993) 287-294.

[9]A.Sengupta and T-k.Pal, On comparing interval numbers, European Journal of Operational Research 127 (2000) 28-43.

[10]P.Anand Raj and D.Nagesh Kumar, Ranking alternatives with fuzzy weighs using maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems 105 (1999) 365-375.

[11]S.Bodjanova, Comparision of fuzzy partions based on their α-cuts, Fuzzy Sets and Systems 105 (1999) 99-112.

[12]李荣均著，模糊多准则决策理论与应用，科学出版社，2002

[13]邹开其等编著，模糊系统与专家系统，西南交通大学出版社，1990

[14]石忠民.广义指派问题.运筹与管理，1999 (1): 21-26.

[15]宋业新，陈绵云，张曙红.两类多目标广义指派问题的有效算法及其应用.华中科技大学学报，2001 (1): 70-72.

[16]张新辉.任务数多于人数的指派问题.运筹与管理，1997 (3): 20-25.

[17]吴振奎.一类广义指派问题及其解法.天津商学院学报，1995 (4): 80-82.

[18]代修筑，乞建勋.指派问题的推广及其解法.华北电力学院学报，1992（4）：74-79.
[19]白国仲，毛经中.C 指派问题.系统工程理论与实践，2002（3）：107-111.
[20]夏少刚.分派问题一种标号算法.运筹与管理，1999（1）：17-20.
[21]李兴华.关于指派问题求解过程的改进.山东矿业学院学报,1996(4)：34-38.
[22]黄德才.求广义指派决策问题最优解的有效算法.控制与决策，1999（3）：272-275.
[23]周良泽.最短时限最少耗费的缺省指派问题及决策求解.运筹与管理，1998（4）：1-7.
[24]杨辉.关于一类自由作业机器排序问题.运筹与管理,1998(3):24-28.
[25]项国明,唐国春.加工时间依赖于机器的自由作业排序问题.运筹学学报，1998（1）：71-77.
[26]周汉良，范玉妹编著，数学规划及其应用，冶金工业出版社，1995
[27]钟乃元.模糊综合评判的因素集及权重的确定.广西大学梧州分校学报，1998（2）：19-26.
[28]C-H.Ching,K-L.Yang and C-L.Hwang, Evaluating attack helicopters by AHP based on linguistic variable weight, European Journal of Operational Research 116(1999)423-435.
[29]谢崇宝，袁宏源，郭元裕.多指标权重模型研究.华北水利水电学院学报，1996（4）；30-36.
[30]李登峰,周明.含模糊数的模糊多目标多人优选决策方法.辽宁工程技术大学学报，2001（5）：662-665.
[31]庞彦军，刘开第，张博文.综合评价系统客观性指标权重的确定方法.系统工程理论与实践，2001（8）：37-42.
[32]孙树江，丛树民，郭嗣琮.模糊排序在矿井设计方案综合评价中的应用.阜新矿业学院学报，1991（1）.
[33]Silvano Martello and Paolo Toth, The bottleneck generalized assignment problem, European Journal of Operational Research 83(1995)621-638.
[34]宋业新，吴晓平，陈绵云.具有模糊信息的多目标指派问题求解.系统工程，2001（1）：28-33.

[35]宋业新等.有约束多目标系统的模糊匈牙利决策及其应用.系统工程与电子技术，2001（2）：78-81.
[36]宋光兴，邹平.多属性决策中决策者权重的确定方法.系统工程，2001（4）：84-89.
[37]陈守煜.多目标有约束模糊关系优选决策理论及其在港口工程选址中的应用.系统工程理论与实践，1995（2）：41-48.
[38]宋业新，陈绵云，张曙红.基于模糊指派的多目标多工程选址决策.系统工程理论与实践，2002（1）：108-111.
[39]胡劲松.模糊指派问题求解方法研究.系统工程理论与实践，2001(9)：94-97.
[40]周良泽.削高排除法求解指派问题.系统工程学报，1992(2)：97-105.
[41]Mohammad M. Amini and Michael Racer, A hybrid heuristic for the generalized assignment problem, European Journal of Operational Research 87（1995）343-348.
[42]Avraham Shtub and Konstantin Kogan, Capacity planning by the dynamic multi-resource generalized assignment problem, European Journal of Operation Research 105（1998）91-98.
[43]马国瑜.专家综合评判方法.北京化工学院学报，1989（2）.
[44]镇常清.多目标决策中的权重调查确定方法.系统工程理论与实践，1987（2）.
[45]程明熙.处理多目标决策问题的二项系数加权和法.系统工程理论与实践，1983（4）.
[46]薛嘉庆编，最优化原理与方法，冶金工业出版社，1983
[47]刑文训，谢金星编，现代优化计算方法，清华大学出版社，1999
[48]黄天民等编著，格、序引论及其应用，西南交通大学出版社，1998
[49]汪培庄，模糊集理论及其应用，上海科学技术出版社，1983
[50]C.H.Cheng, Evaluating weapon systems using ranking fuzzy numbers, submitting to Fuzzy Sets and Systems（1996）.
[51]S.H.Chen, Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems 17（1985）113-129.
[52] 郭耀煌等编著，运筹学原理与方法，西南交通大学出版社，1997
[53]王梦兰，黄天民.生产管理中一类排序问题的扩展模型及通用算法.西南交通大学学报，2002（4）：459-462.

攻读硕士学位期间发表的论文

[1]谢海英.多层次模糊综合评判课堂教学质量.攀枝花学院学报，2003（4）：49-51.

[2]谢海英，陈勇明.多目标模糊指派在学校学科竞赛选派优生中的应用.昆明理工大学学报，2003（6）：165-168.