独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果．据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东北师范大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料．与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意．

学位论文作者签名：张祖民　　日期：2010.5.31

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解东北师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：东北师范大学有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅．本人授权东北师范大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文．

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：张祖民　　指导教师签名：

日　　期：2010.5.31　　日　　期：2010.5.31

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：＿＿＿＿　　电话：＿＿＿＿

通讯地址：＿＿＿＿　　邮编：＿＿＿＿

摘 要

时标动力学方程是一个新兴的研究领域，具有广阔的应用前景．其研究历史最早可以追溯到 1988 年，德国数学家 Stefan Hilger 建立了时标理论，目的是整合和统一连续与离散的分析．此文发表后受到了各国数学家的广泛关注．时标上的动力学方程更为一般，包含微分方程与差分方程作为特例．不仅可以描绘连续变化过程和离散变化过程，同时也可以刻画连续与离散混合的过程，更具现实意义．对时标动力学方程进行研究，不仅对微分方程 (连续) 和差分方程 (离散) 的某些问题进行统一的处理，而且有助于探讨微分方程 (连续) 和差分方程 (离散) 的本质差异，揭示不同时标的选取对系统的动力学问题及实际问题解决的影响．目前关于时标动力学方程的研究绝大多数限于边值问题和振动性，而对于周期性问题的研究较少．因此，本文主要目的是研究时标动力学方程的周期解问题．

本文首先利用著名的重合度理论，建立了某些非自治时标动力学方程周期解存在的判别准则．这些时标动力学方程具有广泛的应用背景，它们能够退化为微分方程与差分方程情况下的捕食者 - 食饵系统，竞争系统，单种群系统，单种群反馈控制系统．不仅能够对以前的微分方程 (连续) 与差分方程 (离散) 的周期解问题进行统一的处理，而且还能包括连续与离散混合的过程，进而有助于揭示微分方程 (连续) 和差分方程 (离散) 的本质差异．其次，通过压缩映像原理，我们讨论了一类半线性时标动力学方程周期解的存在性和渐近稳定性．其中，我们也探讨了这类半线性时标动力学方程解的有界性和零解的稳定性．最后，利用线性时标动力学方程指数型二分性理论，我们获得了高维时标动力学方程周期解的存在性．在这个过程中，我们也讨论了指数型二分性的一些基本性质，给出了指数型二分性存在的充要条件，并进一步探讨了指数型二分性的粗糙度理论，证明了如果一个线性系统具有指数型二分性，那么这个线性系统的所有邻域系统都具有相似的指数型二分性．同时利用行占优 (列占优) 等条件, 建立了线性时标动力学方程指数型二分性存在的判别准则．

关键词: 时标；动力学方程；周期解；重合度；压缩映像原理；指数型二分性；粗糙度

Abstract

The theory of calculus on time scales, essentially introduced in seminal work of Stefan Hilger, is a new studying field and has tremendous potential for applications. The two main features of the calculus on time scales are unification and extension. A dynamic equation on a time scales is not only related to continuous process or discrete process but those pertaining to the mixture of continuousness and discreteness. Many results concerning differential equations (continuousness) carry over quite easily to corresponding results for difference equations (discreteness), while other results seem to be completely different from their continuous counterparts. The study of dynamic equations on general time scales can reveal such discrepancies and help avoid proving results twice – once for differential equations (continuousness) and once again for difference equations (discreteness). Recently, in the studying of dynamic equations on time scales, most of problems have been focused on boundary value and oscillation. However, there are few studies to consider the effects of periodicity. Therefore, the principle aim of this paper is to explore periodic solutions of dynamic equations on time scales.

In this paper, we systematically explore the periodicity of some non-autonomous dynamic equations on time scales, which incorporate as special cases many population models (e.g., predator-prey systems, competition systems, single species systems and feedback control systems) in mathematical biology governed by differential equations and difference equations. The main approach is based on a continuation theorem in coincidence degree theory, which has been extensively applied in studying existence problems in differential equations and difference equations but rarely applied in dynamic equations on time scales. Explicit verifiable sufficient criteria are established for the existence of periodic solutions of such dynamic equations, which generalize many known results for continuous and discrete population models. This study shows that it is unnecessary to explore the existence of periodic solutions of continuous and discrete population models in separate way, and one can unify such studies in the sense of dynamic equations on general time scales. And second, with the help of the contraction mapping principle, and based on a kind of semi-linear dynamic equations on time scales, an asymptotically stable periodic solution is obtained. In addition, we also study the boundedness and asymptotic stability of solutions. Finally, as applications of exponential dichotomies of linear dynamic equations on time scales, we investigate the existence of periodic solutions of semi-linear and nonlinear higher-dimensional dynamic equations on time scales, and obtain new sufficient criteria for the existence of periodic solutions for such systems. Meanwhile, we also explore some basic properties of exponential dichotomies on time scales, establish some necessary and sufficient criteria for the existence of an exponential dichotomy, and present perturbation theorems on the roughness of exponential dichotomies. An explicit sufficient criteria for linear dynamic equations to be exponentially dichotomous will be developed.

Key Words: Time scales; Dynamic equations; Periodic solution; Coincidence degree; Contraction mapping principle; Exponential dichotomy; Roughness

目 录

第一章 绪 论

§1.1 研究背景及现状

数学家的理想是用数学来描述整个客观世界，分析万物的发展规律，预测将来的走向．这样就诞生了各种各样的数字，函数，公式等．微分方程和差分方程就是其中著名的代表．微分方程刻画了事物的连续变化过程，是近代数学中最有生命力的数学分支之一，在力学、天文学、物理学、生物学、化学等科学中有着广泛的应用．差分方程是在离散时段上描述现实世界中的变化过程，一般情况下可以由微分方程经过不同的差分化得到．因此，在微分方程和差分方程之间有着千丝万缕的联系．经验表明，微分方程的许多性质经过差分化后在其相应的差分方程中被保留下来．但是，也有许多例子表明微分方程与其相应的差分方程的性质会有显著的差异．如著名的单种群 Logistic 方程的正解都是单调的 [1]，而它的差分化虫口方程则有可能出现混沌 [2]．一个挑战性的问题是：如何建立一种数学工具去刻画微分方程与差分方程之间的相似性和差异性．

在现实世界中，有些特殊事物自身的发展可能既有连续变化又有离散变化，如在某个地区一类昆虫种群 (如蚊子) 的世代中，在夏天，昆虫的幼虫长成成虫，可以用连续平滑的曲线来描述整个夏季昆虫的数量．但是在冬天成虫产下卵后，全部死亡，曲线降到零，直到第二年新的一代昆虫出现．在描述昆虫的种群变化时，就会出现一系列跳跃的曲线，其中，连续的曲线可以用微分方程来刻画，而间断的地方就必须由差分方程来计算．因此，单独的微分方程或差分方程都不能准确的描述这类昆虫种群的变化，于是有必要在一个新的时间尺度上建立动力学方程去刻画昆虫种群的这种发展变化．

1988 年，德国数学家 Stefan Hilger 开始寻找一种新的方法去研究连续分析和离散分析的相似性．在总结了二者基本性质的基础上，发现了微积分算法和差分演算法之间的深层关系，最终建立了一种新的分析理论 - 时标 (Time Scales) 统一和整合了连续分析和离散分析，并发表在他的博士论文 [3] 中．在此基础上，Hilger 还建立了测度链 (Measure Chains) 上的动力系统 [4]．这两篇论文发表后受到了各国数学家的广泛关注，掀起了世界研究时标理论的新纪元．

1997 年，德国数学家 Martin Bohner 详细探讨了时标理论，并与 Ravi Agarwal, Allan Perterson 等总结和发表了一系列评述性文章 [5, 6, 7, 8]. 2001 年，Bohner 和 Peterson 共同出版了时标动力学方程 (Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications)[5]. 在此书中，作者系统地分析了时标动力学方程 [5]，详细总结了许多深刻的理论结果，如时标的微积分理论 [3, 4]，时标上的指数函数, 三角函数和双曲函数 [9], 非线性时标动力学方程解的存在唯一性 [10] 等，并列举了现实世界中时标动力学方程应用的一些实例，为进一步研究时标动力学方程奠定了坚实的理论基础和提供了广阔的应用前景.

时标覆盖了各种形式的时间尺度. 因此，建立在时标上的动力学方程不仅包含微分方程与差分方程作为特例，描绘连续变化过程或离散变化过程，而且也可以刻画连续与离散混合的过程，更具现实意义. 时标动力学方程在现实世界中，有着广泛的应用前景. 在生态系统中，刻画一类昆虫种群时，如蚊子，蝉 magicicada septendecim(作为卵生活了 17 年，而作为成虫仅是一周)[11] 和飞蛾 stenonma canadense(为卵存活时间为一年，而作为成虫存活时间不足一天) [11] 等，时标动力学方程可能更准确描述出昆虫种群的变化规律. 在研究纽约西尼罗河病毒时，人们一直采用微分方程进行模拟研究 [12, 13]. 然而，最近通过数据发现，用连续和离散混合的时间尺度模拟西尼罗河病毒可能是最理想的. 美国著名学者 Peterson 和 Thomas 利用时标动力学方程弥合了西尼罗河病毒传播在离散方面和连续方面之间的空隙，并且认为时标动力学方程模型是理解和控制这种疾病的有效工具 [14]. 人们在研究传染性的单核细胞减少症滞后效应时，也认识到连续和离散混合的模型可能会达到更好的模拟效果 [15]. 同时，基于全球气候变暖，陆地的覆盖物 (冰川，积雪等) 随着时间逐渐消融. 如果用动力学模型代替 GIS (地理信息系统) 模拟这种变化时，在时间尺度上应该是连续和离散的混合. 此外，时标动力学方程在物理 [5], 经济 [14, 16] 等领域也有着潜在的应用价值.

目前关于时标动力学方程的研究，绝大多数限于边值问题和振动性. Erbe 和 Peterson [17] 在 1999 年讨论了时标动力学方程的边值问题及相应的格林函数，获得了许多有趣的结论，避免了边值问题在微分方程和差分方程之间的重复研究. 此后，世界各国学者投入到时标边值理论的研究当中，讨论了在各种边值条件下时标动力学方程解的存在性问题 [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. 振动性理论也是时标动力学方程的一个重要的研究领域. 关于各种时标动力学方程振动或非振动的判别准则被获得 [26, 27, 28, 29, 30, 31]. 中国许多学者也在时标动力学方程边值问题和振动性方

面进行了广泛的讨论和系统的研究，获得了丰富的理论结果．如在边值问题方面，葛渭高教授 [32, 33, 34]，何智敏教授 [35, 36, 37]，李万同教授 [38, 39, 40, 41, 42]，翁佩萱教授 [43, 44]，朱德明教授 [45, 46]，孙建平教授 [47] 等；在振动性方面，时宝教授 [48]，王其如教授 [49, 50]，朱思铭教授 [51]，张炳根教授 [52, 53, 54] 等，为整个时标动力学方程边值问题和振动性问题的发展做出了卓越的贡献．

时标动力学方程理论的发展还处于初始阶段，很多理论体系还不完善．现阶段，关于时标动力学方程周期解问题的理论结果还很少，仅有少数的文章涉及到了这方面的问题．非自治方程的周期解相当于自治方程的平衡点，于是在整个方程领域的研究中周期解问题占有非常重要的地位．因此，非常有必要对时标动力学方程的周期解进行系统的研究和详细的讨论．

重合度理论是研究方程周期解存在性的最常用工具之一，已经被广泛应用到证明微分方程和差分方程周期解存在性的研究之中 [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]．众所周知，导出差分方程一个好的方法就是通过微分方程的差分化．一般情况下，有两种方法最为常用．一种方法是利用带有逐段常值的微分方程的方法 [55]，一种方法是在微分方程中直接将导数离散化 [1]．例如，考虑一个 Logistic 微分方程模型

$$\dot{x}(t) = r(t)x(t)(1 - x(t)/K(t)).$$

基于上面两种差分的方法，分别能够得到

$$x(t+1) = x(t)\exp\{r(t)(1 - x(t)/K(t))\}$$

和

$$\Delta x(t) = r(t)x(t)(1 - x(t)/K(t)).$$

通过细致的观察，我们发现了一些有趣的现象，即利用重合度理论，研究非自治的微分方程和其经过差分化得到的差分方程周期解存在性的方法步骤，以及主要的结论都非常相似．因此，是否可以找到一种统一的方法去研究这类问题．时标动力学方程的出现为这类问题的统一研究提供了新的契机．时标动力学方程包括微分方程和差分方程作为特例，既可以描绘连续变化过程和离散变化过程，又可以刻画连续与离散混合的过程，更具现实意义．正是基于上述思考，2006 年，利用重合度理论，我们探讨了可以退化为捕食者 - 食饵系统和竞争系统的非自治时标动力学方程周期解存在性问题 [64]．这类方程统一和推广了微分方程及其经过第一种差分化得到的差分方程．随后，2007 年研究了另一类时标动力学方程的周期解存在

性[65]，它能够退化为许多单种群生物模型．此后国内外的一些学者开始探讨一些时标动力学方程的周期解，并获得了许多很好的理论结果[66, 67, 68, 69, 70, 71]．对于微分方程及其经过第二种差分化得到的差分方程，我们首先讨论了一类单种群时标动力学方程，使之能够在这类方程上进行统一处理[72]．另外，对于第二种形式，我们也讨论了一类带有反馈控制的时标动力学方程．

时标动力学方程周期解的另一个重要的方面就是它的稳定性．周期解的稳定性就相当于自治方程平衡点的稳定性，因此无论在方程理论中还是在实际应用中周期解稳定性问题都具有及其重要的价值．一直以来，Liapunov 直接方法是证明各种稳定性问题最常用的方法，已经大量应用于微分方程和差分方程周期解稳定性的讨论中．在时标动力学方程中，Liapunov 直接方法也被用来去讨论一些时标方程的稳定性问题[5, 73, 74, 75, 76, 77]．然而，建立 Liapunov 函数或泛函需要大量的经验和技巧，有时并不实用．特别是在讨论周期解的稳定性时，由于非自治时标动力学方程与时间尺度有密切的关系，于是很难建立起相应的 Liapunov 函数或泛函去研究其周期解稳定性问题．这样需要去找到一种新的方法去研究时标方程周期解的稳定性．近来，不动点定理已经成为探讨稳定性问题一种新的工具和方法，并已经被应用到稳定性问题研究之中[78]．因此，本文将利用压缩映像原理去研究一类半线性时标动力学方程周期解稳定性．其中，也通过这一方法探讨了这类半线性时标动力学方程解的有界性和零解的稳定性．

高维方程周期解存在性是一个非常困难的研究领域，一直困扰着广大学者．线性方程指数型二分性的出现为这一问题的解决提供了一个新的契机．指数型二分性理论是自治线性系统的双曲率概念在非自治线性系统的推广，在非自治动力系统分析中占有重要的地位，并广泛被应用到周期解[79, 80]．概周期解[79, 81, 82, 83]，伪概周期解[83, 84]，混沌理论[85, 86, 87]等研究之中．最近，指数型二分性理论已经被著名学者 Pötzsche[88, 89]推广到了线性时标动力学方程，其后一批优秀的结果被获得，如谱概念[90]，通常二分性[91]，不变流形[92, 93, 94]，Hartman-Grobman 定理[95, 96]等．沿着如此的框架，我们在这方面也做了一些基础性的工作[97]．利用线性时标动力学方程的指数型二分性理论，研究了高维时标动力学方程周期解存在性．同时，虽然一些学者已经讨论了线性时标动力学方程指数型二分性的一些性质，但是时标动力学方程指数型二分性理论还有许多基本理论工作没有完成．因此，在讨论周期解存在性的过程中，也讨论了指数型二分性的一些基本性质，利用一些方法和技巧给出了指数型二分性存在的充要条件，并进一步探讨了指数型二分性最重

要的理论 - 粗糙度理论，证明了如果一个线性系统具有指数型二分性，那么这个线性系统的所有邻域系统都具有相似的指数型二分性。对比于文献 [98]，我们获得了更加准确的粗糙度指数估计。同时利用行占优 (列占优) 等条件，建立了线性时标动力学方程指数型二分性存在的判别准则。

§1.2 时标的基本知识

本节将给出本文所需要的有关时标的定义和一些基本定理，更详细的内容可参考 Hilger[3, 4]，Bohner 和 Peterson[5]。

§1.2.1 时标定义和时标上的微积分

定义1.1. 时标定义为实数集 $\mathbb{R}$ 的任意一个非空闭子集，记为 $\mathbb{T}$.

若 $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ 中的区间 $[a, b]_{\mathbb{T}} := [a, b] \cap \mathbb{T}$. 简记为 $[a, b]$. 一个时标既可以是联通的，也可以是不联通的. 因此，我们引入向前跳跃算子和向后跳跃算子的概念.

定义1.2. 定义向前跳跃算子 $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

定义向后跳跃算子 $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

定义函数 $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 为

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

若 $\sigma(t) = t$，则称 t 是右稠的 (否则称为右散的)；若 $\rho(t) = t$，则称 t 是左稠的 (否则称为左散的)；若 $\rho(t) < t < \sigma(t)$，则称 t 是孤立点；若 $\rho(t) = t = \sigma(t)$，则称 t 是稠密点。如果 $\mathbb{T}$ 有一个左散的最大值，则定义

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T} & \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

在整篇文章中，为了讨论的方便，总是假设 $\sup \mathbb{T} = \infty$。

定义1.3. 设 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$。若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 t 的邻域 U(即：对于 $\delta > 0$, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$)，使得对所有的 $s \in U$，都有

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \le \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

成立，则称 f 在 t 点是 Δ- 可微的 (简记为可微)，$f^{\Delta}(t)$ 被称为 f 在 t 点的 Δ(或 Hilger) 导数。若对所有的 $t \in \mathbb{T}$, f 在 t 点都是 Δ- 可微的，则称 f 在 $\mathbb{T}$ 上是 Δ- 可微的。

显然，当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 时，$f^{\Delta}(t)=f'(t)$ 与通常的导数一致；当 $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ 时，$f^{\Delta}(t)=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$。

下面给出时标上 Δ 导数的一些性质.

定理1.1. 假设 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 且 $t\in\mathbb{T}$，则

(i) 若 f 在 t 点是可微的，则 f 在 t 点是连续的；

(ii) 若 t 是右散的且 f 在 t 点是连续的，则 f 在 t 点是可微的，并且

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)};$$

(iii) 若 t 是右稠的，则 f 在 t 可微当且仅当

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

存在，并且

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s};$$

(iv) 若 f 在 t 点是可微的，则

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t).$$

定理1.2. 假设 $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 在 t 点都是可微的，则

(i) $f+g$ 在 t 点也是可微的，且

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t);$$

(ii) 对任意常数 α, $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 在 t 点也是可微的，且

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t);$$

(iii) $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 在 t 点是可微的，且

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t));$$

(iv) 若 $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f}$ 在 t 点是可微的，且

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))};$$

(v) 若 $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在 t 点是可微的，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

为了引入时标上的积分理论，首先介绍 rd- 连续的概念。

定义1.4. 如果一个函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{T}$ 的右稠点是连续的，在左稠点的左极限存在，则称 f 是 $\mathbb{T}$ 上的 rd- 连续函数。所有 rd- 连续函数所组成的集合记为

$$\mathrm{C_{rd}}=\mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})=\mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R}).$$

若函数 $f:\mathbb{T}-\mathbb{R}$ 是可微的且它的导数是 rd- 连续的，则所有这样的函数所组成的集合记为

$$\mathrm{C^1_{rd}}=\mathrm{C^1_{rd}}(\mathbb{T})=\mathrm{C^1_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R}).$$

定理1.3. 假设 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, 则

(i) 若 f 是连续的，则 f 是 rd- 连续的；

(ii) 向前跳跃算子 σ 是 rd- 连续的；

(iii) 若 f 是 rd- 连续的，则 f^{σ} 也是 rd- 连续的；

(iv) 若 f 是连续的且 $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 是 rd- 连续的，则 $f\circ g$ 也是 rd- 连续的。

定义1.5. 设 $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 和 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, 若对所有的 $t\in\mathbb{T}$，有

$$F^{\Delta}(t)=f(t),$$

则称 F 是 f 的原函数。此时，定义 f 的积分为

$$\int_r^s f(t)\Delta t=F(s)-F(r),\quad s,r\in\mathbb{T}.$$

引理1.1. 每个 rd- 连续函数都有原函数。

定理1.4. 假设 $f\in\mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$, 则

(i) 对于 $t\in\mathbb{T}$, 有

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau=\mu(t)f(t);$$

(ii) 若 $f^{\Delta}\geq 0$, 则 f 是非减函数。

定理1.5. 若 $a,b,c\in\mathbb{T}$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $f,g\in\mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$, 则

(i) $\displaystyle\int_a^b[\alpha f(t)+\beta g(t)]\Delta t=\alpha\int_a^b f(t)\Delta t+\beta\int_a^b g(t)\Delta t;$

(ii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$ 和 $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$;

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;

(iv) 若对于所有的 $a \le t < b$, 有 $f(t) \ge 0$, 则 $\int_a^b f(t)\Delta t \ge 0$;

(v) 在 $[a,b) := \{t \in \mathbb{T} : a \le t < b\}$ 上，有 $|f(t)| \le g(t)$, 则

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \le \int_a^b g(t)\Delta t.$$

定义1.6. 若 $a \in \mathbb{T}$, $\sup\mathbb{T} = \infty$, 并且在 $[a,\infty)$ 上，f 是 rd- 连续的，则定义广义积分为

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)\Delta t.$$

如果这个极限存在，就称这个不定积分是收敛的；如果这个极限不存在，就称这个不定积分是发散的.

§1.2.2 时标上的指数函数

这一节将引入时标上指数函数的概念和一些性质，首先介绍 Hilger 复平面.

定义1.7. 对于 $h > 0$, 定义 Hilger 复数，Hilger 实轴，Hilger 交错轴，Hilger 虚圆为

$$\mathbb{C}_h := \left\{z \in \mathbb{C} : z \ne -\frac{1}{h}\right\}, \quad \mathbb{R}_h := \left\{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ and } z > -\frac{1}{h}\right\},$$
$$\mathbb{A}_h := \left\{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ and } z < -\frac{1}{h}\right\}, \quad \mathbb{I}_h := \left\{z \in \mathbb{C}_h : \left|z + \frac{1}{h}\right| = \frac{1}{h}\right\}.$$

对于 $h = 0$, 则令 $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}, \mathbb{R}_0 := \mathbb{R}, \mathbb{I}_0 := i\mathbb{R}$, $\mathbb{A}_0 := \emptyset$.

定义1.8. 令 $h > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}_h$. 定义 z 的 Hilger 实部为

$$\mathrm{Re}_h(z) := \frac{|zh+1| - 1}{h},$$

Hilger 虚部为

$$\mathrm{Im}_h(z) := \frac{\mathrm{Arg}(zh+1)}{h},$$

在这里，$\mathrm{Arg}(z)$ 是 z 的辐角主值 (即：$-\pi < \mathrm{Arg}(z) \le \pi$).

定义1.9. 在 $\mathbb{C}_h$ 内，定义加法 $\oplus$ 为

$$z \oplus \omega := z + \omega + z\omega h;$$

定义减法 $\ominus$ 为

$$z \ominus \omega := z \oplus (\ominus\omega),$$

这里 $\ominus\omega := -\dfrac{\omega}{1+\omega h}$.

令 $h > 0$, 定义 $\mathbb{Z}_h$ 为

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}_h(z) \le \frac{\pi}{h} \right\},$$

对于 $h = 0$, 定义 $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{C}$.

定义1.10. 对于 $h > 0$, 定义柱变换 $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ 为

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1 + zh),$$

这里, Log 是主对数. 对于 $h = 0$ 和所有的 $z \in \mathbb{C}$, 定义 $\xi_0(z) = z$.

定义1.11. 如果 $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 且对于所有的 $t \in \mathbb{T}$ 有

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0,$$

则称 p 是回归的。所有回归且 rd- 连续的函数组成的集合定义为

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

定义1.12. 若 $p \in \mathcal{R}$, 则时标上的指数被定义为

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right), \quad s, t \in \mathbb{T},$$

在这里, $\xi_h(z)$ 是定义 1.10 中的柱变换.

定理1.6. 如果 $p \in \mathcal{R}$ 且 $t, s, r \in \mathbb{T}$, 则

(i) $e_0(t,s) \equiv 1, \quad e_p(t,t) \equiv 1$;

(ii) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t,s)$;

(iii) $\dfrac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$;

(iv) $e_p(t,s) = \dfrac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$;

(v) $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$;

(vi) $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s), \quad \dfrac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$;

(vii) $[e_p(\cdot,s)]^\Delta = pe_p(\cdot,s)$;

(viii) 若 $1 + \mu p > 0$, 则对所有的 $t \in \mathbb{T}$, 有 $e_p(t,s) > 0$.

定理1.7. 令 $p \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$, $b \geq 0$, 且 $a \in \mathbb{R}$。如果对所有的 $t \in \mathbb{T}$,

$$p(t) \leq a + b\int_{t_0}^{t} p(\tau)\Delta\tau,$$

则对于所有的 $t \in \mathbb{T}$, 有

$$p(t) \leq ae_b(t, t_0).$$

§1.2.3 时标上的矩阵函数

定义1.13. 令 A 是 $\mathbb{T}$ 上一个 $m \times n$ 阶矩阵函数。若 A 中的每一项都是 rd- 连续的, 则称 A 是 rd- 连续的。所有 $m \times n$ 阶 rd- 连续矩阵函数组成的集合 (相似于定义 1.4) 记为

$$\mathrm{C_{rd}} = \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}) = \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{m\times n}).$$

若 A 的每一项都是可微的, 则称 A 是可微的, 记为

$$A^{\Delta} = (a_{ij}^{\Delta})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

定理1.8. A, B 是可微的 $n \times n$ 阶矩阵函数, α, β 是常值, 则

(i) $A^{\sigma}(t) = A(t) + \mu(t)A^{\Delta}(t)$;

(ii) $(\alpha A + \beta B)^{\Delta} = \alpha A^{\Delta} + \beta B^{\Delta}$;

(iii) $(AB)^{\Delta} = A^{\Delta}B^{\sigma} + AB^{\Delta} = A^{\sigma}B^{\Delta} + A^{\Delta}B$.

定义1.14. 若一个 $n \times n$ 阶矩阵函数 A 对所有 $t \in \mathbb{T}$ 满足

$$I + \mu(t)A(t) \quad \text{是可逆的},$$

则称 A 是回归的。所有回归且 rd- 连续矩阵函数所组成的集合 (相似于定义 1.11) 记为

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}).$$

定义1.15. 如果 $A, B \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, 则定义 $A \oplus B$ 为

$$(A \oplus B)(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t);$$

$\ominus A$ 为

$$(\ominus A)(t) = -[I + \mu(t)A(t)]^{-1}A(t).$$

定理1.9. 若 $A, B \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, 则

(i) $e_0(t, s) \equiv I, \quad e_A(t, t) \equiv I$;

(ii) $e_A(\sigma(t),s)=(I+\mu(t)A(t))e_A(t,s)$;

(iii) $e_A(t,s)e_A(s,r)=e_A(t,r)$;

(vi) 若 $e_A(t,s)$ 与 $B(t)$ 是可交换的，则 $e_A(t,s)e_B(t,s)=e_{A\oplus B}(t,s)$.

定义1.16. 如果对任意 $x\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$($\mathbb{T}$ 上连续函数组成的集合), $g(t)=f(t,x(t))$ 是 rd- 连续的，则称 $f:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 rd- 连续的.

§1.3 本文的工具

本文中，将作如下的假设：

- 存在常值 χ 使得 $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}}\mu(t)=\chi$;
- $\mathbb{T}^+=[0,\infty)\cap\mathbb{T}$, $\vartheta=\min\{\mathbb{T}^+\}$, $I_\omega=[\vartheta,\vartheta+\omega]\cap\mathbb{T}$;
- 定义 $\mathbb{R}^n$ 中的范数是 l^∞ 范数，即：$|x|=\sup\limits_i|x_i|$, $x\in\mathbb{R}^n$.

现在给出一个本文需要用到的引理

引理1.2. *设 $t_1,t_2\in I_\omega$ 且 $t\in\mathbb{T}$。若 $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 是 ω- 周期的，则*

$$g(t)\le g(t_1)+\int_\kappa^{\kappa+\omega}|g^\Delta(s)|\Delta s \quad 和 \quad g(t)\ge g(t_2)-\int_\kappa^{\kappa+\omega}|g^\Delta(s)|\Delta s.$$

证明. 我们只证明第一个不等式，第二个不等式同理可证。因为 g 是 ω- 周期的，不失一般性，仅需要证明不等式对于 $t\in I_\omega$ 成立。若 $t=t_1$，则不等式显然成立。若 $t>t_1$，则有

$$\begin{aligned}g(t)-g(t_1)\le|g(t)-g(t_1)|&=\left|\int_{t_1}^t g^\Delta(s)\Delta s\right|\\&\le\int_{t_1}^t|g^\Delta(s)|\Delta s\le\int_\kappa^{\kappa+\omega}|g^\Delta(s)|\Delta s,\end{aligned}$$

从而

$$g(t)\le g(t_1)+\int_\kappa^{\kappa+\omega}|g^\Delta(s)|\Delta s.$$

若 $t<t_1$，可得

$$\begin{aligned}g(t_1)-g(t)\ge-|g(t_1)-g(t)|&=-\left|\int_t^{t_1} g^\Delta(s)\Delta s\right|\\&\ge-\int_t^{t_1}|g^\Delta(s)|\Delta s\ge-\int_\kappa^{\kappa+\omega}|g^\Delta(s)|\Delta s,\end{aligned}$$

这说明

$$g(t)\le g(t_1)+\int_\kappa^{\kappa+\omega}|g^\Delta(s)|\Delta s.$$

注1.1. *若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$，则不等式中的积分就是标准的黎曼积分，若 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$，则引理 1.2 能够退化为文献 [55] 中的引理 3.2。*

下面将给出本文用到的一些定理。首先介绍重合度理论。

设 X,Z 是赋范向量空间，$L:\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Z$ 为线性映射，$N:X\to Z$ 为连续映射。如果 $\dim\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,L<+\infty$ 且 $\mathrm{Im}\,L$ 为 Z 中闭子集，则称映射 L

为指标为零的 Fredholm 映射．如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影 $P: X \to X$ 及 $Q: Z \to Z$ 使得 $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I-Q)$, 则 $L|\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P: (I-P)X \to \operatorname{Im} L$ 可逆. 设其逆映射为 K_P。设 Ω 为 X 中的有界开集. 如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界且 $K_P(I-Q)N: \overline{\Omega} \to X$ 是紧的, 则称 N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L- 紧的。由于 $\operatorname{Im} Q$ 与 $\operatorname{Ker} L$ 同构, 因而存在同构映射 $J: \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Ker} L$。

定理1.10 (重合度延拓定理 [99]). 设 L 是一个指标为零的 Fredholm 映射且 N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L- 紧的, 如果

(a) 对于任意 $\lambda \in (0,1)$, 方程 $Lz = \lambda Nz$ 的解满足 $z \notin \partial\Omega$;

(b) 对于任意 $z \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L$, 有 $QNz \neq 0$, 并且 $\deg\{JQN, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \neq 0$;

那么算子方程 $Lz = Nz$ 在 $\operatorname{Dom} L \cap \overline{\Omega}$ 内至少存在一个解。

设 X 是一个实的 Banach 空间, P 是 X 的一个锥. 在 P 中引入一个序关系 $\leq$, 即 $x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in P$。如果一个映射 $\rho: P \to [0,\infty)$ 是连续的且对所有的 $x \leq y (x, y \in P)$ 有 $\rho(x) \leq \rho(y)$, 则称 ρ 是连续增泛函. 对于正常数 d, 定义下面的集合

$$P(\rho, d) = \{x \in P : \rho_1(x) < d\};$$
$$\partial P(\rho, d) = \{x \in P : \rho(x) = d\};$$
$$\overline{P(\rho, d)} = \{x \in P : \rho(x) \leq d\}.$$

如果一个映射 $\rho: P \to [0,\infty)$ 是连续的且对所有的 $x, y \in P$, $t \in [0,1]$, 有 $\rho(tx + (1-t)y) \geq t\rho(x) + (1-t)\rho(y)$, 则称 ρ 是连续凹泛函. 对于正常数 r, R 且 $r < R$, 定义下面的集合

$$P_r = \{x \in P : \|x\| < r\};$$
$$\bar{P}_r = \{x \in P : \|x\| \leq r\};$$
$$P(\rho_2, r, R) = \{x \in P : r \leq \rho_2(x), \|x\| \leq R\}.$$

定理1.11 (Avery–Henderson[100]). 令 P 是 *Banach* 空间 X 中的一个锥. 设 α 和 γ 是 P 上的连续增泛函, β 是 P 上的非负连续泛函, $\beta(0) = 0$, 且存在 $c > 0$ 和 $M > 0$, 对于任意的 $x \in \overline{P(\gamma, c)}$, 有

$$\gamma(x) \leq \beta(x) \leq \alpha(x) \quad 和 \quad \|x\| \leq M\gamma(x).$$

假设存在一个全连续算子 $T:\overline{P(\gamma,c)}\to P$ 和 $0<a<b<c$ 使得对于任意的 $\pi\in[0,1]$ 和 $x\in\partial P(\beta,b)$，都有

$$\beta(\pi x)\leq\pi\beta(x)$$

以及

(i) 对于任意 $x\in\partial P(\gamma,c)$，$\gamma(Tx)>c$;

(ii) 对于任意 $x\in\partial P(\beta,b)$，$\beta(Tx)<b$;

(iii) $P(\alpha,a)\neq\emptyset$ 且对于任意 $x\in\partial P(\alpha,a)$, $\alpha(Tx)>a$。

则 T 在 $\overline{P(\gamma,c)}$ 内至少存在两个不动点 x_1 和 x_2 且满足

$$a<\alpha(x_1),\quad \beta(x_1)<b,\quad b<\beta(x_2),\quad \gamma(x_2)<c.$$

下面是 Avery and Henderson 不动点定理的一个推论 [101]

定理1.12. 令 P 是 *Banach* 空间 X 中的一个锥。设 α 和 γ 是 P 上的连续增泛函, β 是 P 上的非负连续泛函，$\beta(0)=0$，且存在 $c>0$ 和 $M>0$，对于任意的 $x\in\overline{P(\gamma,c)}$, 有

$$\gamma(x)\leq\beta(x)\leq\alpha(x)\quad 和\quad \|x\|\leq M\gamma(x).$$

假设存在一个全连续算子 $T:\overline{P(\gamma,c)}\to P$ 和 $0<a<b<c$ 使得对于任意的 $\pi\in[0,1]$ 和 $x\in\partial P(\beta,b)$，都有

$$\beta(\pi x)\leq\pi\beta(x)$$

以及

(i) 对于任意 $x\in\partial P(\gamma,c)$，$\gamma(Tx)<c$;

(ii) 对于任意 $x\in\partial P(\beta,b)$，$\beta(Tx)>b$;

(iii) $P(\alpha,a)\neq\emptyset$ 且对于任意 $x\in\partial P(\alpha,a)$, $\alpha(Tx)<a$。

则 T 在 $\overline{P(\gamma,c)}$ 内至少存在两个不动点 x_1 和 x_2 且满足

$$a<\alpha(x_1),\quad \beta(x_1)<b,\quad b<\beta(x_2),\quad \gamma(x_2)<c.$$

定理1.13 (Leggett–Williams [102]). 令 $T:\bar{P}_R\to\bar{P}_R$ 是全连续算子，ϕ 为 P 上非负连续凹泛函且对于任意 $x\in\bar{P}_R$，$\phi(x)\leq\|x\|$。假设存在 $0<r<r_1<r_2\leq R$ 使得

(i) $\{x\in P(\phi,r_1,r_2):\phi(x)>r_1\}\neq\emptyset$, 且对于任意 $x\in P(\phi,r_1,r_2)$, $\phi(Tx)>r_1$;

(ii) 若 $x\in\bar{P}_r$，则 $\|Tx\|<r$;

(iii) $x\in P(\phi,r_1,R)$ 且 $\|Tx\|>r_2$ 暗含 $\phi(Tx)>r_1$。

则 T 在 $\bar{P}_R$ 内至少有三个不动点 x_1, x_2, x_3 满足

$$x_1 \in P_r,\ x_2 \in \{x \in P(\phi, r_1, R) : \phi(x) > r_1\} \quad 和 \quad x_3 \in \bar{P}_R \backslash (P(\phi, r_1, R) \cup \bar{P}_r).$$

定理1.14 (压缩映像原理 [103]). 设 (X, d) 是一个完备的度量空间，$P : X \to X$ 是一个压缩映射 (即：存在一个 $0 \leq \lambda < 1$ 使得 $d(P(x), P(y)) \leq \lambda d(x, y), x, y \in X$)，则 P 在 X 内有唯一的不动点。

定理1.15 (Schauder 不动点定理 [104]). 设 E 是一个 *Banach* 空间，Ω 为 E 中非空的有界闭凸集，$\Phi : \Omega \to \Omega$ 是全连续算子，则 Φ 在 Ω 中存在一个不动点。

§1.4 本文的主要工作

本文主要研究时标动力学方程的周期解.

具体章节安排如下:

第一章是绪论, 综述了时标动力学方程的发展历史, 研究现状, 以及取得的主要成果, 列举了时标动力学方程在实际生活中的一些具体实例, 指出了它在生物, 物理, 经济等领域具有广阔的应用前景, 介绍了当前时标动力学方程在边值问题和振动性方面的主要研究成果, 着重讨论了时标动力学方程在周期解方面的一些工作以及目前理论缺陷, 说明了本文研究工作的重要意义. 我们还介绍了本文需要用到的一些时标上的定义和定理, 如时标上的微积分理论, 指数函数, 矩阵函数等, 并且给出本文需要的一些主要工具, 如重合度理论, 不动点定理等, 为本文周期解的研究提供了必要的理论基础.

第二章是重合度和时标动力学方程周期解存在性. 基于重合度理论, 主要讨论了一些时标动力学方程周期解存在性. 这些时标动力学方程不仅统一和扩展了微分方程与其两种不同的差分化 (利用带有逐段常值的微分方程的方法和在微分方程中直接将导数离散化的方法) 得到的差分方程, 而且还可以退化为许多生物种群模型. 如具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应, Holling 型功能性反应, 半比率依赖功能性反应的捕食者 - 食饵系统, 带有偏差变元的一般 n 种群 Gilpin–Ayala 竞争系统, 以及一些单种群模型. 避免了在这些微分方程和差分方程模型周期解问题的重复讨论, 同时还可以在更丰富的时间尺度上探索生物种群或群落. 此外, 利用重合度理论和一些不动点定理, 也研究了一类带有反馈控制的非自治时标动力学方程多个周期解存在性问题.

第三章是压缩映像原理和时标动力学方程周期解稳定性. 这一章中利用压缩映像原理证明一类半线性时标动力学方程存在一个渐近稳定的周期解. 在这个过程中, 也探索了这类半线性时标动力学方程解的有界性和稳定性. 一致有界, 一致最终有界的判别准则被建立. 特别是, 讨论了这类时标动力学方程零解渐近稳定的充要条件. 最后, 作为应用, 研究了一些在实际中已经被广泛讨论的具体实例.

第四章是指数型二分性和高维时标动力学方程周期解存在性. 利用线性时标动力学方程的指数型二分性, 建立了高维时标动力学方程周期解存在的判别准则. 我们定义了线性时标动力学方程指数型二分性, 并探讨了它的一些基本性质, 如线性时标动力学方程指数型二分性存在的充要条件, Liapunov 函数与指数型二分性之间的关系, 及非齐次线性时标动力学方程有界解与其相应的齐次线性时标动

力学方程指数型二分性的关系等．通过不同的方法和手段，着重讨论了指数型二分性最重要的粗糙度理论，获得了线性时标系统的所有邻域系统都具有相似的指数型二分性的结论．同时，利用行占优 (列占优) 等条件建立了线性时标动力学方程指数型二分性存在的判别准则．最后，作为指数型二分性的应用，获得了高维时标动力学方程周期解存在的充分条件．

最后，在总结和展望中，系统的概述了本文所获得的主要研究成果和创新点，提出了将来有待进一步研究的问题．

第二章　重合度和时标动力学方程周期解存在性

§2.1 引　言

近十年来，数学生物学已经取得了辉煌成就，特别是在种群动力学方面. 种群动力学最早开始于 1920s, 主要研究种群是怎样和为什么随着时间和空间的变化而变化，详细讨论了它与外界物质环境的复杂关系 [105]. 广大学者收集了大量种群变化的实际数据，尽力去揭示其内在的机制. 数学模型能够表现和描述单个种群或者生物群落某些方面的现象，特征和状况. 一个复杂的生物种群问题可借助数学模型转变成一个数学问题，通过对数学模型的逻辑推理、求解和运算，就能够揭示其内在的本质规律，达到对生命现象进行研究的目的 [1]. 例如描述单个生物种群增长的 Logistic 方程；描述捕食者与食饵两个种群相互关系的 Lotka-Volterra 方程等. 此外，大多数自然环境是高度变化的，如季节等. 越来越多的证据显示一些种群或生物群落在其生物因素和变化的物理环境之间有着复杂的关系 [106]. 因此，单个种群或生物群落的数学模型不仅依赖于自身的种群密度或其它生物种群密度的变化，还依赖于外界物理环境的变化. 当外界环境被考虑进去时，数学模型必须是非自治的. 考虑外界环境的因素，可以利用模型参数随时间变化的性质. 例如，可以假定参数随季节的变化是周期的或是概周期的. 当认识到物理环境随着时间的振荡是影响种群或生物群落的一个关键的因素时，就必须从理论上去预测生物种群振荡的特征.

一个基本而重要的问题是证明一个带有周期环境变化的生物种群模型是否存在一个全局稳定的周期解，这就相当于证明一个自治模型是否存在一个全局稳定的平衡点. 因此，有必要寻找在什么条件下非自治系统存在一个全局稳定的周期解. 在这方面，许多优秀的理论结果已经被获得. 然而，通过细致的观察，发现了一些有趣的现象，即利用非自治的微分方程和其经过两种形式的差分化得到的差分方程 (见 1.1 节) 描述生物种群变化时，研究它们各自数学模型周期解存在性的方法，采用的工具，以及主要的结论都非常相似. 其中，重合度理论就是二者在证明周期解存在性时所采用的最重要的一种方法和工具. 在非自治微分方程及其相应的差分方程中，重合度理论已经被广泛地应用到周期解存在性的讨论中 [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]，并且证明方法，步骤都及其类似. 因此，基于重合度理

论，对于微分方程及其相应的差分方程，是否可以找到一种统一的方法或工具去研究二者周期解存在性问题．

时标动力学方程的出现为这类问题的统一研究提供了新的契机．时标方程包括微分方程和差分方程作为特例，既可以描绘连续变化过程和离散变化过程，又可以刻画连续与离散混合的过程，更具现实意义．特别是在现实世界中，有很多生物种群无论用连续时间或者离散时间都不能很好的描述其变化的性质 (见 1.1 节)．时标动力学方程为我们提供了在更丰富的时间尺度上探索各种客观事物的平台．

本章将基于重合度理论，讨论一些时标动力学方程周期解存在性．这些时标动力学方程具有广阔的应用背景，它们能够退化为在微分方程与差分方程情况下的捕食者 - 食饵系统，竞争系统，一些单种群系统，单种群反馈控制系统．不仅能够对以前的微分方程 (连续) 与差分方程 (离散) 的周期解问题进行统一的处理，而且还能包括连续与离散混合的过程，进而有助于揭示微分方程 (连续) 和差分方程 (离散) 的本质差异．

§2.2 捕食者 - 食饵系统和竞争系统时标动力学方程

在这一节，将利用重合度理论去讨论一些可以退化为微分方程或差分方程情况下的捕食者 - 食饵系统和竞争系统的时标动力学方程周期解的存在性。因此，这一节分为两个部分进行讨论：捕食者 - 食饵系统时标动力学方程和竞争系统时标动力学方程。

§2.2.1 捕食者 - 食饵系统时标动力学方程

捕食现象在自然界中几乎无处不在，是构成整个生物群落的最基本的关系之一。捕食者 - 食饵系统的动力学关系已经被广泛地讨论，并一直在生态学以及数学生物学研究中占据最核心的地位 [107]. 理解捕食者 - 食饵动力学关系是生态研究中的一个核心目标，其中捕食者的功能性反应是捕食者 - 食饵关系中最重要的部分. 一般情况下，功能性反应被分成两种类型：食饵 - 依赖型和捕食者 - 依赖型. 食饵依赖型意味着功能性反应仅与食饵有关系，而捕食者依赖型意味着功能性反应与捕食者和食饵都有关系. 虽然捕食者依赖型跟实际数据更加相近一些，但是到现在为止还没有一种功能性反应能适合所有的捕食者 - 食饵系统，并且理论研究已经显示具有捕食者依赖的功能性反应与具有食饵依赖的功能性反应的捕食者 - 食饵系统具有本质的不同. 因此，将基于重合度理论去研究可以退化为具有不同功能性反应的捕食者 - 食饵系统的时标动力学方程周期解的存在性.

为了研究时标动力学方程的周期解问题，本章假设时标 $\mathbb{T}$ 为 ω- 周期的, 即, $t\in\mathbb{T}$ 意味着 $t\pm\omega\in\mathbb{T}$。一些周期时标的例子如下：

$$\mathbb{R},\quad \mathbb{Z},\quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k,2k+1],\quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{k+\frac{1}{n}\right\}.$$

由已有的结论 [66], 知

$$\sigma(t\pm\omega)=\sigma(t)\pm\omega,\quad \rho(t\pm\omega)=\rho(t)\pm\omega,\quad \mu(t\pm\omega)=\mu(t).$$

令

$$g^u=\sup_{t\in\mathbb{T}}g(t),\quad g^l=\inf_{t\in\mathbb{T}}g(t),$$
$$\overline{g}=\frac{1}{\omega}\int_{I_\omega}g(s)\Delta s=\frac{1}{\omega}\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}g(s)\Delta s,\quad ,$$

其中 $g\in C_{rd}(\mathbb{T})$ 是 ω 周期函数.

首先，讨论下面的时标动力学方程

$$
\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &= a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \frac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}},\\
y^{\Delta}(t) &= -d(t) + \frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}},
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

其中 $a, b, c, d, f, \alpha, \beta, \gamma \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 都是 ω- 周期的且对任意 $t \in \mathbb{T}$，有

$$
\overline{a}, \overline{d}, \gamma^{l} > 0 \quad 和 \quad b(t), c(t), f(t), \alpha(t), \beta(t) \geq 0. \tag{2.2}
$$

注2.1. 设 $\tilde{x}(t) = \exp\{x(t)\}$ 和 $\tilde{y}(t) = \exp\{y(t)\}$. 如果 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, 则 (2.1) 能够简化为用微分方程描述的具有 Beddington–DeAngelis 功能性反应的捕食者 - 食饵系统

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}'(t) &= \tilde{x}(t)\left[a(t) - b(t)\tilde{x}(t) - \frac{c(t)\tilde{y}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right],\\
\tilde{y}'(t) &= \tilde{y}(t)\left[-d(t) + \frac{f(t)\tilde{x}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right],
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

其中 $\tilde{x}(t)$ 和 $\tilde{y}(t)$ 定义为食饵和捕食者种群的密度 [108]. 若 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, 则 (2.1) 变换为

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(t+1) &= \tilde{x}(t)\exp\left[a(t) - b(t)\tilde{x}(t) - \frac{c(t)\tilde{y}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right],\\
\tilde{y}(t+1) &= \tilde{y}(t)\exp\left[-d(t) + \frac{f(t)\tilde{x}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right].
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

这是一个离散的具有 Beddington–DeAngelis 功能性反应的捕食者 - 食饵系统，我们已经研究了它的周期解存在性问题 [109]. 因为 (2.1) 包含 (2.3) 和 (2.4) 作为特例，因此称 (2.1) 为具有 Beddington–DeAngelis 功能性反应的捕食者 - 食饵系统时标动力学方程.

为了研究时标动力学方程的周期解，本章做如下假设

$$
\begin{aligned}
I_{\omega} &= [\vartheta, \vartheta+\omega] \cap \mathbb{T},\\
\overline{g} &= \frac{1}{\omega}\int_{I_{\omega}} g(s)\Delta s = \frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} g(s)\Delta s,
\end{aligned}
$$

其中 $g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 是一个 ω 周期函数, 即，$g(t+\omega) = g(t)$.

为了研究 (2.1) 的周期解，首先把问题嵌入到重合度理论框架中. 定义

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\omega} &= \{(u,v) \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2):\ u(t+\omega) = u(t), v(t+\omega) = v(t), \forall t \in \mathbb{T}\},\\
\|(u,v)\| &= \max_{t\in I_{\omega}}|u(t)| + \max_{t\in I_{\omega}}|v(t)|, \quad (u,v) \in \mathscr{L}^{\omega},
\end{aligned}
$$

易证 $\mathscr{L}^\omega$ 是一个 Banach 空间. 令

$$\mathscr{L}_0^\omega = \{(u,v) \in \mathscr{L}^\omega : \overline{u} = 0, \overline{v} = 0\},$$

$$\mathscr{L}_c^\omega = \left\{(u,v) \in \mathscr{L}^\omega : (u(t), v(t)) \equiv (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{T}\right\},$$

则易推出 $\mathscr{L}_0^\omega$ 和 $\mathscr{L}_c^\omega$ 都是 $\mathscr{L}^\omega$ 的闭线性子空间, $\mathscr{L}^\omega = \mathscr{L}_0^\omega \oplus \mathscr{L}_c^\omega$, 且 $\dim \mathscr{L}_c^\omega = 2$.

定理2.1. 假设 (2.2) 成立. 若

$$\overline{a - c/\gamma} > 0 \quad 和 \quad (\overline{f} - \overline{d}\beta^u)(\overline{a - c/\gamma}) \exp\{-(\overline{a + |a|})\omega\} - \overline{b}\,\overline{d}\alpha^u > 0, \tag{2.5}$$

则 (2.1) 至少有一个 ω 周期解.

证明. 令 $X = Z = \mathscr{L}^\omega$, 并且定义

$$N\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}} \\ -d(t) + \dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}} \end{bmatrix},$$

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\Delta \\ y^\Delta \end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}.$$

则

$$\operatorname{Ker} L = \mathscr{L}_c^\omega, \quad \operatorname{Im} L = \mathscr{L}_0^\omega, \quad \dim \operatorname{Ker} L = 2 = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L.$$

因为 $\mathscr{L}_0^\omega$ 在 $\mathscr{L}^\omega$ 中是闭的, 所以 L 是一个指标为零的 Fredholm 映射. 同时, 易推出 P 和 Q 是连续投影且有

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L, \quad \operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I - Q).$$

进一步, 可推得逆映射 (对于 L) $K_P : \operatorname{Im} L \to \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Dom} L$ 存在且满足

$$K_p\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - \overline{X} \\ Y - \overline{Y} \end{bmatrix}, \quad 其中 \quad X(t) = \int_\vartheta^t x(s)\Delta s \ 和 \ Y(t) = \int_\vartheta^t y(s)\Delta s.$$

则

$$QN\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} \left[a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} \left[-d(t) + \dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t \end{bmatrix},$$

和

$$K_p(I-Q)N\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\int_{\vartheta}^{t}N_1(s)\Delta s-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\int_{\vartheta}^{t}N_1(s)\Delta s\Delta t-\left(t-\vartheta-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}(t-\vartheta)\Delta t\right)\overline{N_1}\\ \int_{\vartheta}^{t}N_2(s)\Delta s-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\int_{\vartheta}^{t}N_2(s)\Delta s\Delta t-\left(t-\vartheta-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}(t-\vartheta)\Delta t\right)\overline{N_2}\end{bmatrix}.$$

显然, QN 和 $K_p(I-Q)N$ 是连续的. 因为 X 是一个 Banach 空间, 利用 Arzelà–Ascoli 定理, 对于任意有界开集 $\Omega\subset X$, 能够推出 $\overline{K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})}$ 是紧的. 而且 $QN(\overline{\Omega})$ 是有界的, 这样对于任意有界开集 $\Omega\subset X$, N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的.

为了应用定理 1.10, 现在必须找到一个恰当的有界开集 Ω. 对于算子方程

$$Lx=\lambda Nx,\quad Ly=\lambda Ny,\quad \lambda\in(0,1),$$

有

$$\begin{aligned}x^{\Delta}(t)&=\lambda\left[a(t)-b(t)\exp\{x(t)\}-\frac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right],\\ y^{\Delta}(t)&=\lambda\left[-d(t)+\frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right].\end{aligned}\tag{2.6}$$

对于任意 $\lambda\in(0,1)$, 假设 $(x,y)\in X$ 是 (2.6) 的任意一个解. 在 $[\vartheta,\vartheta+\omega]$ 上, 积分 (2.6), 得到

$$\begin{aligned}\overline{a}\omega&=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\left[b(t)\exp\{x(t)\}+\frac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t,\\ \overline{d}\omega&=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\left[\frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t.\end{aligned}\tag{2.7}$$

由 (2.6) 和 (2.7) 推得

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|x^{\Delta}(t)|\Delta t &\le \lambda\left[\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|a(t)|\Delta t+\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}b(t)\exp\{x(t)\}\Delta t\right.\\ &\quad\left.+\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\Delta t\right]\\ &=\lambda(\overline{a+|a|})\omega \;<\; (\overline{a+|a|})\omega,\\ \int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|y^{\Delta}(t)|\Delta t &\le \lambda\left[\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|d(t)|\Delta t\right.\\ &\quad\left.+\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\Delta t\right]\\ &=\lambda(\overline{d+|d|})\omega \;<\; (\overline{d+|d|})\omega.\end{aligned}$$

因为 $(x,y)\in X$, 所以存在 $\xi_i,\eta_i\in[\vartheta,\vartheta+\omega]$, $i\in\{1,2\}$, 使得

$$\begin{aligned}x(\xi_1)&=\min_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]}x(t), &\quad x(\eta_1)&=\max_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]}x(t),\\ y(\xi_2)&=\min_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]}y(t), &\quad y(\eta_2)&=\max_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]}y(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

由 (2.8) 和 (2.7) 的第一个等式推知

$$\overline{a}\omega\le\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\left[b(t)\exp\{x(\eta_1)\}+\frac{c(t)}{\gamma(t)}\right]\Delta t=\overline{b}\omega\exp\{x(\eta_1)\}+\overline{(c/\gamma)}\omega.$$

根据条件 (2.5) 的第一部分, $\overline{b}>0$ 必须成立, 并且有

$$x(\eta_1)\ge\ln\left\{\frac{\overline{a-c/\gamma}}{\overline{b}}\right\}=:l_1.$$

利用引理 1.2 的第二个不等式, 得到

$$x(t)\ge x(\eta_1)-\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|x^{\Delta}(t)|\Delta t>l_1-(\overline{a+|a|})\omega=:H_2.\tag{2.9}$$

另一方面, 根据 (2.8) 和 (2.7) 的第一个等式, 可获得

$$\overline{a}\omega\ge\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}b(t)\exp\{x(\xi_1)\}\Delta t=\overline{b}\omega\exp\{x(\xi_1)\},$$

即 $x(\xi_1)\le\ln\left\{\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}=:L_1$. 利用引理 1.2 的第一个不等式, 有

$$x(t)\le x(\xi_1)+\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|x^{\Delta}(t)|\Delta t<L_1+(\overline{a+|a|})\omega=:H_1,$$

同时，由 (2.9) 可知

$$\max_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]}|x(t)|\leq\max\{|H_1|,|H_2|\}=:B_1.$$

从 (2.8) 和 (2.7) 的第二个等式可知

$$\begin{aligned}\overline{d}\omega&\leq\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\beta^l\exp\{x(t)\}+\gamma^l\exp\{y(t)\}}\Delta t\leq\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)e^{H_1}}{\beta^le^{H_1}+\gamma^l\exp\{y(\xi_2)\}}\Delta t\\&=\frac{\omega\overline{f}e^{H_1}}{\beta^le^{H_1}+\gamma^l\exp\{y(\xi_2)\}},\end{aligned}$$

于是

$$\exp\{y(\xi_2)\}\leq\frac{(\overline{f}-\overline{d}\beta^l)e^{H_1}}{\overline{d}\gamma^l}.$$

由此可推出 $\overline{f}-\overline{d}\beta^l>0$ 成立，进而可得

$$y(\xi_2)\leq\ln\left\{\frac{(\overline{f}-\overline{d}\beta^l)e^{H_1}}{\overline{d}\gamma^l}\right\}=:L_2.$$

因此，通过引理 1.2 的第一个不等式，有

$$y(t)\leq y(\xi_2)+\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|y^{\Delta}(t)|\Delta t<L_2+(\overline{d+|d|})\omega=:H_3.\tag{2.10}$$

由 (2.7) 的第二个等式可得

$$\begin{aligned}\overline{d}\omega&\geq\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha^u+\beta^u\exp\{x(t)\}+\gamma^u\exp\{y(\eta_2)\}}\Delta t\\&\geq\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)e^{H_2}}{\alpha^u+\beta^ue^{H_2}+\gamma^u\exp\{y(\eta_2)\}}\Delta t.\end{aligned}$$

由此可得

$$\exp\{y(\eta_2)\}\geq\frac{(\overline{f}-\overline{d}\beta^u)\overline{\frac{a-c/\gamma}{b}}\exp\{-(\overline{a+|a|})\omega\}-\overline{d}\alpha^u}{\overline{d}\gamma^u}=:l_2^*.$$

通过 (2.5) 的第二个部分，可推知 $l_2^*>0$ 且 $y(\eta_2)\geq\ln(l_2^*)=:l_2$。由引理 1.2 的第二个不等式，有

$$y(t)\geq y(\eta_2)-\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|y^{\Delta}(t)|\Delta t>l_2-\omega(\overline{d+|d|})=:H_4.$$

由 (2.10) 可导出

$$\max_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]}|y(t)|\leq\max\{|H_3|,|H_4|\}=:B_2.$$

显然，B_1 和 B_2 都与 λ 无关。令 $B=B_1+B_2+B_3$，其中 B_3 充分大以至于

$$B_3 \geq |l_1|+|L_1|+|l_2|+|L_2|.$$

下面考虑代数方程

$$\begin{aligned} &\bar{a}-\bar{b}\exp\{x\}-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{\nu c(t)\exp\{y\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t=0, \\ &-\bar{d}+\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)\exp\{x\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t=0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$\nu\in[0,1]$ 是一个参数。类似上面讨论可得对于 $\nu\in[0,1]$，(2.11) 的任意解 (x^*,y^*) 都满足

$$l_1 \leq x^* \leq L_1 \quad 和 \quad l_2 \leq y^* \leq L_2. \tag{2.12}$$

现在定义

$$\Omega=\{(x,y)\in X:\ \|(x,y)\|<B\}.$$

则容易推知 Ω 满足引理 1.10 的条件 (a)。若 $(x,y)\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L=\partial\Omega\cap\mathbb{R}^2$，则 (x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个常值向量且满足 $\|(x,y)\|=|x|+|y|=B$。利用 (2.12) 与 B 的定义，可知

$$QN\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{a}-\bar{b}\exp\{x\}-\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{c(t)\exp\{y\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t\\ -\bar{d}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)\exp\{x\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

因为 $\operatorname{Im}Q=\operatorname{Ker}L$，所以 $J=I$。为了计算 Brouwer 度，考虑同论映射

$$H_\nu(x,y)=\nu QN(x,y)+(1-\nu)G(x,y),\quad \nu\in[0,1],$$

其中

$$G(x,y)=\begin{bmatrix}\bar{a}-\bar{b}\exp\{x\}\\ \bar{d}-\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\frac{f(t)\exp\{x\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t\end{bmatrix}.$$

由 (2.12) 容易证明对于 $\nu\in[0,1]$，有 $0\notin H_\nu(\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L)$。而且可以推出代数方程 $G(x,y)=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内有唯一的一个解。根据同论不变性，直接计算可得

$$\deg(JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(QN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(G,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)\neq 0,$$

其中 $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是 Brouwer 度. 到现在为止，已经证明了 Ω 满足定理 1.10 的所有条件. 从而 $Lz = Nz$ 至少有一个解在 $\operatorname{Dom} L \cap \overline{\Omega}$ 中，也就是说，(2.1) 在 $\operatorname{Dom} L \cap \overline{\Omega}$ 内至少有一个 ω 周期解. 定理证毕.

注2.2. *若 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. 则 (2.1) 就是连续或者离散的具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应的捕食者 - 食饵系统. 定理 2.1 转化为文献 [108] 中定理 3.2 和文献 [109] 中定理 2.1.*

注2.3. *若 $\alpha(t) \equiv 0$, 则 (2.1) 简化为具有比率依赖功能性反应的捕食者 - 食饵系统. 此时，若再令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. 则 (2.1) 能够转化为连续或者离散的具有比率依赖功能性反应的捕食者 - 食饵系统. 这时定理 2.1 统一和扩展了以前的一些结论 [55, 58].*

例2.1. *考虑两个昆虫种群 (一个是捕食者，一个是食饵), 它们在一年中温暖的时间都是连续生存的 (一年中温暖的六个月), 而在冬季死亡. 这时它们产下卵 (或者蛋), 直到第二年开始孵化，从而开始新的一代. 因此，这两个种群可以用下面的时标表示*

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k+1] \quad \text{周期} \quad \omega = 1.$$

如果这个捕食者 - 食饵系统具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应，并且参数满足 (2.2) 和 (2.5), 则由定理 2.1 可推得这个系统存在一个 1 周期解.

下面考虑可以退化为具有 Holling 型功能性反应的捕食者 - 食饵系统的时标动力学方程

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \frac{c(t)\exp\{y(t)\}}{1+m(t)\exp\{x(t)\}}, \\ y^{\Delta}(t) &= -d(t) + \frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{1+m(t)\exp\{x(t)\}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

和

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \frac{c(t)\exp\{y(t)+x(t)\}}{1+m(t)\exp\{2x(t)\}}, \\ y^{\Delta}(t) &= -d(t) + \frac{f(t)\exp\{2x(t)\}}{1+m(t)\exp\{2x(t)\}}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 $a, b, c, d, m \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 是非负的 ω 周期函数.

注2.4. *在 (2.13) 和 (2.14) 中，若令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, 则 (2.13) 和 (2.14) 可变为连续或离散的具有 Holling II 型或者 III 型功能性反应的捕食者 - 食饵系统，这些系统已经被广泛地研究 [61, 63].*

通过类似于文献 [110, 111] 的讨论，容易得到下面的结论。因为证明过程中的许多细节与 Beddington-DeAngelis 功能性反应相似，在这里具体细节被省略。

定理2.2. 若 $\overline{f} > m^{\nu}\overline{d}$ 和 $\overline{a} > \dfrac{\overline{b}\,\overline{d}}{\overline{f} - m^{\nu}\overline{d}}\exp\{2\overline{a}\omega\}$，则 (2.13) 至少有一个 ω 周期解。

定理2.3. 若 $\overline{f} > m^{\nu}\overline{d}$ 和 $\overline{a} > \overline{b}\left[\dfrac{\overline{d}}{\overline{f} - m^{\nu}\overline{d}}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\{2\overline{a}\omega\}$，则 (2.14) 至少有一个 ω 周期解。

考虑可以退化为具有半比率依赖功能性反应的捕食者 - 食饵系统的时标动力学方程

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - c(t, \exp\{x(t)\})\exp\{y(t) - x(t)\}, \\ y^{\Delta}(t) &= d(t) - e(t)\exp\{y(t) - x(t)\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $c(t, x)$ 是食饵依赖的功能性反应, 它包含下面的五种功能性反应

$$m(t)x;\ \frac{m(t)x}{A + x};\ \frac{m(t)x^n}{A + x^n},\ n \geq 2;\ \frac{m(t)x^2}{(A + x)(B + x)};\ m(t)(1 - \exp\{-Ax\}).$$

在 (2.15) 中, 假设下列条件成立.

(H_1) $a, b, d, e \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ 都是 ω 周期函数;

(H_2) $c : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是 rd- 连续的，关于第一个变量是 ω- 周期的，关于第二个变量是可微的，对于任意 $t \in \mathbb{T}$, $\dfrac{\partial c}{\partial x}(t, x) > 0$, 且 $\dfrac{\partial c}{\partial x}(t, x)$ 是有界的；

(H_3) 存在一个 ω 周期函数 $C_0 \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 满足 $c(t, x) \leq C_0(t)x$;

(H_4) 存在一个 ω 周期函数 $C_1 \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 满足 $c(t, x) \leq C_1(t)$。

利用类似于文献 [59, 62] 的讨论，可以得到下面的两个结论。

定理2.4. 假设 (H_1), (H_2), 和 (H_3) 成立。若 $\overline{b}\,\overline{e} > \overline{C_0}\,\overline{d}\exp\{\overline{a + |a| + d + |d|})\omega\}$，则 (2.15) 至少有一个 ω 周期解。

定理2.5. 假设 (H_1), (H_2), 和 (H_4) 成立。若 $e^l\overline{a} > C_1^u\overline{d}$. 则 (2.15) 至少有一个 ω 周期解。

注2.5. 若令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$，则 (2.15) 可以转化为连续或者离散的半比率依赖功能性反应的捕食者 - 食饵系统 [59, 60, 62]，定理 2.4 和定理 2.5 统一和扩展了以前的一些结果 [59, 62]。

§2.2.2 竞争系统时标动力学方程

竞争系统也是构成整个生物群落的最基本关系之一，并且已经被广泛地讨论和研究。

考虑可以退化为带有偏差变元的一般 n 种群 Gilpin–Ayala 竞争系统的时标动力学方程

$$y_i^{\Delta}(t)=r_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\exp\{\theta_{ij}y_j(t)\},\quad i\in\{1,2,\dots,n\},\tag{2.16}$$

其中 $r_i,a_{ij}\in C_{\rm rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ 都是 ω 周期函数且带有正的上下确界.

注2.6. 若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ 且设 $\tilde{y}_i(t)=\exp\{y_i(t)\}$, 则 (2.16) 简化为连续或者离散的带有偏差变元的一般 n 种群 Gilpin–Ayala 竞争系统

$$\tilde{y}_i'(t)=\tilde{y}_i(t)\left[r_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)(\tilde{y}_j(t))^{\theta_{ij}}\right],\ i\in\{1,2,\dots,n\},\quad t\in\mathbb{R}$$

或

$$\tilde{y}_i(t+1)=\tilde{y}_i(t)\exp\left\{r_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)(\tilde{y}_j(t))^{\theta_{ij}}\right\},\ i\in\{1,2,\dots,n\},\quad t\in\mathbb{Z}.$$

因此, 我们可以把 (2.16) 看做带有偏差变元的一般 n 种群 Gilpin–Ayala 竞争系统时标动力学方程。这个模型具有普遍性, 包含许多时标生态模型作为特例, 例如, 若 $n=1$ 和 $\theta_{ij}\equiv1$, 则 (2.16) 是一个 logistic 时标动力学方程; 若 $\theta_{ij}\equiv1$, 则 (2.16) 是一个经典的 n 种群 Lotka–Volterra 竞争系统时标动力学方程; 若对于 $i\neq j$, $\theta_{ij}\equiv1$, 则 (2.16) 是经典的 Gilpin–Ayala 竞争系统时标动力学方程。

为了获得结论, 我们延续类似于定理 2.1 的讨论, 定义下面的形式:

$$\mathscr{L}^{\omega}=\{y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n):\ y(t+\omega)=y(t),\ \ \forall t\in\mathbb{T}\},$$
$$\|y\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{t\in I_\omega}|y_i(t)|\right)^2\right\}^{1/2},\quad y\in\mathscr{L}^{\omega}.$$

容易证明 $\mathscr{L}^{\omega}$ 是一个 Banach 空间。令

$$\mathscr{L}_0^{\omega}=\{y\in\mathscr{L}^{\omega}:\ \overline{y}=0\},\quad \mathscr{L}_c^{\omega}=\{y\in\mathscr{L}^{\omega}:\ y(t)\equiv h\in\mathbb{R}^n,\ \ t\in\mathbb{T}\}.$$

则 $\mathscr{L}_0^{\omega}$ 和 $\mathscr{L}_c^{\omega}$ 都是 $\mathscr{L}^{\omega}$ 的闭线性子空间, $\mathscr{L}^{\omega}=\mathscr{L}_0^{\omega}\oplus\mathscr{L}_c^{\omega}$, 且 $\dim\mathscr{L}_c^{\omega}=n$. 通过与定理 2.1 和文献 [57] 中定理 2.1 类似的讨论，有

定理2.6. 若代数方程

$$g(u)=\left(\overline{r}_i-\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}u_j^{\theta_{ij}}\right)_{n\times1}=0$$

存在有限个解 $u^*=(u_1^*,\dots,u_n^*)\in\mathbb{R}_+^n$ 满足 $u_i^*>0$ 且 $\sum_{u^*}\operatorname{sgn}J_g(u^*)\neq 0$, 又假设

$$r_i>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\overline{a}_{ij}\left(\frac{\overline{r}_j}{\overline{a}_{jj}}\right)^{\theta_{ij}/\theta_{jj}}\exp\{\theta_{ij}2\overline{r}_j\omega\},$$

成立，则 (2.16) 至少有一个 ω 周期解。

§2.3 单种群时标动力学方程

这一节，将证明两类一维时标动力学方程周期解存在性. 第一类时标动力学方程可以统一和扩展微分方程和它经过第一种差分化得到的差分方程，第二类时标动力学方程能够统一和扩展微分方程和它经过第二种差分化得到的差分方程. 同时，这两类一维时标动力学方程都可以退化为一些单种群模型.

§2.3.1 第一类单种群时标动力学方程

考虑一维时标动力学方程

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) = G\Big(t, &\exp\{x(g_1(t))\}, \exp\{x(g_2(t))\}, \dots, \\ &\exp\{x(g_n(t))\}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\Big), \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中

(H_1) $G: \mathbb{T}\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$, $G(t,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内是连续的，对于 t 是 ω- 周期的，即对于任意 $u\in\mathbb{R}^{n+1}$，$t\in\mathbb{T}$，$G(t+\omega,u)=G(t,u)$.

(H_2) $g_i:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $1\le i\le n$, $c:\mathbb{T}\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 满足 $g_i(t+\omega)=g_i(t)$ 和 $c(t+\omega,s+\omega)=c(t,s)$，且 $\int_{-\infty}^{t} c(t,s)\Delta s$ 是一个 rd- 连续函数.

注2.7. 设 $\tilde{x}(t)=\exp\{x(t)\}$. 令 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$. 则 (2.17) 能够变为具有偏差变元的非自治微分方程

$$\tilde{x}'(t)=\tilde{x}(t)G\left(t,\tilde{x}(g_1(t)),\tilde{x}(g_2(t)),\dots,\tilde{x}(g_n(t)),\int_{-\infty}^{t}c(t,s)\tilde{x}(s)\mathrm{d}s\right),$$

令 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, 则 (2.17) 可变为差分方程

$$\tilde{x}(t+1)=\tilde{x}(t)\exp\left\{G\left(t,\tilde{x}(g_1(t)),\tilde{x}(g_2(t)),\dots,\tilde{x}(g_n(t)),\sum_{s=-\infty}^{t-1}c(t,s)\tilde{x}(s)\right)\right\}.$$

上述带有偏差变元的连续和离散系统已经被一些学者很好的研究 [112].

为了研究 (2.17) 周期解的存在性，首先把问题嵌入到重合度理论框架中. 定义

$$\mathscr{L}^{\omega}=\{u\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}):\ u(t+\omega)=u(t),\forall t\in\mathbb{T}\},\quad \|u\|=\max_{t\in I_\omega}|u(t)|, u\in\mathscr{L}^{\omega}.$$

不难证明 $(\mathscr{L}^{\omega},\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间. 令

$$\mathscr{L}_0^{\omega}=\{u\in\mathscr{L}^{\omega}:\ \overline{u}=0\},\quad \mathscr{L}_c^{\omega}=\{u\in\mathscr{L}^{\omega}:\ u(t)\equiv h\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{T}\}.$$

则易证 $\mathscr{L}_0^{\omega}$ 和 $\mathscr{L}_c^{\omega}$ 都是 $\mathscr{L}^{\omega}$ 的闭线性子空间，且 $\mathscr{L}^{\omega}=\mathscr{L}_0^{\omega}\oplus\mathscr{L}_c^{\omega}$, 和 $\dim\mathscr{L}_c^{\omega}=1$.

定理2.7. 令 (H_1) 和 (H_2) 成立。假设

(H_3) 存在一个常数 $M>0$ 使得对于任意 ω 周期函数 $x:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$. 若

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G\left(t,\exp\{x(g_1(t))\},\dots,\exp\{x(g_n(t))\},\int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right)\Delta t=0,$$

则

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} \left|G\left(t,\exp\{x(g_1(t))\},\dots,\exp\{x(g_n(t))\},\int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right)\right|\Delta t\le M;$$

(H_4) 存在常数 $A_2>A_1>0$ 使得若 $u_i\ge A_2$, $1\le i\le n+1$, 则

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G\left(t,u_1,\dots,u_n,\int_{-\infty}^{t} c(t,s)u_{n+1}\Delta s\right)\Delta t<0;$$

若 $0<u_i\le A_1$, $1\le i\le n+1$, 则

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G\left(t,u_1,\dots,u_n,\int_{-\infty}^{t} c(t,s)u_{n+1}\Delta s\right)\Delta t>0.$$

则 (2.17) 至少有一个 ω 周期解。

证明. 令 $X=Z=\mathscr{L}^{\omega}$, 定义

$$Nx=G\left(t,\exp\{x(g_1(t))\},\dots,\exp\{x(g_n(t))\},\int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right),$$
$$Lx=x^{\Delta},\qquad Px=Qx=\overline{x}.$$

则

$$\operatorname{Ker}L=\mathscr{L}_c^{\omega},\ \ \operatorname{Im}L=\mathscr{L}_0^{\omega},\ \ \dim\operatorname{Ker}L=1=\operatorname{codim}\operatorname{Im}L.$$

因为 $\mathscr{L}_0^{\omega}$ 在 $\mathscr{L}^{\omega}$ 中是闭的, 所以 L 是一个指标为零的 Fredholm 映射。同时，易证 P 和 Q 都是连续投影且满足

$$\operatorname{Im}P=\operatorname{Ker}L,\ \ \operatorname{Im}L=\operatorname{Ker}Q=\operatorname{Im}(I-Q).$$

进而, 可逆映射 (对于 L) $K_P:\operatorname{Im}L\to\operatorname{Ker}P\cap\operatorname{Dom}L$ 存在且满足

$$K_Px=\hat{x}-\overline{\hat{x}},\quad 其中\quad \hat{x}(t)=\int_{\vartheta}^{t}x(s)\Delta s.$$

则

$$QNx=\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G\left(t,\exp\{x(g_1(t))\},\dots,\exp\{x(g_n(t))\},\int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right)\Delta t$$

和

$$K_P(I-Q)Nx = \int_{\vartheta}^{t}(Nx)(s)\Delta s - \frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\int_{\vartheta}^{t}(Nx)(s)\Delta s\Delta t$$
$$-\left(t-\vartheta-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}(t-\vartheta)\Delta t\right)\overline{Nx}.$$

显然, QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续的. 因为 X 是一个 Banach 空间, 根据 Arzelà–Ascoli 定理, 容易证明对于任意有界开集 $\Omega \subset X$, $\overline{K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})}$ 是紧的. 而且, $QN(\overline{\Omega})$ 是有界的. 因此, 对于任意有界开集 $\Omega \subset X$, N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的.

为了应用定理 1.10, 现在必须找到一个恰当的有界开集 Ω. 对于算子方程 $Lx = \lambda Nx$, $\lambda \in (0,1)$, 有

$$x^{\Delta}(t) = \lambda G\left(t, \exp\{x(g_1(t))\}, \dots, \exp\{x(g_n(t))\}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right). \tag{2.18}$$

假设 $x \in X$ 是 (2.18) 的任意一个解. 在区间 $[\vartheta, \vartheta+\omega]$ 上积分 (2.18), 可得

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G\left(t, \exp\{x(g_1(t))\}, \dots, \exp\{x(g_n(t))\}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right)\Delta t = 0. \tag{2.19}$$

由 (2.18) 和 (H_3) 可知

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|x^{\Delta}(t)|\Delta t \le \lambda\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\Big|G\Big(t, &\exp\{x(g_1(t))\}, \dots,\\ &\exp\{x(g_n(t))\}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\Big)\Big|\Delta t \le M.\end{aligned} \tag{2.20}$$

注意到 $x \in X$, 所以存在 $\xi, \eta \in I_\omega$ 使得

$$x(\xi) = \min_{t\in I_\omega} x(t) \quad 和 \quad x(\eta) = \max_{t\in I_\omega} x(t). \tag{2.21}$$

下面, 假定 $x(\xi) \ge \ln(A_2)$. 则由 (2.21) 可推知对于任意 $t \in I_\omega$, $x(t) \ge \ln(A_2)$. 根据条件 (H_4), 得到

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G\left(t, \exp\{x(g_1(t))\}, \dots, \exp\{x(g_n(t))\}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\right)\Delta t < 0,$$

这与 (2.19) 相矛盾. 因此, 有

$$x(\xi) < \ln(A_2) \quad 和 \quad x(\eta) > \ln(A_1). \tag{2.22}$$

利用 (2.20), (2.22), 和引理 1.2, 有

$$x(t) \le x(\xi) + \int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|x^{\Delta}(t)|\Delta t < \ln(A_2) + M,$$
$$x(t) \ge x(\eta) - \int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}|x^{\Delta}(t)|\Delta t > \ln(A_1) - M,$$

于是

$$\max_{t\in\mathbb{R}}|x(t)| = \max_{t\in I_\omega}|x(t)| < \max\Big\{\big|\ln(A_2)+M\big|, \big|\ln(A_1)-M\big|\Big\} := A_3.$$

定义

$$\Omega := \{x\in X : \|x\| < B\},$$

其中

$$B := \max\Big\{A_3, \big|\ln(A_1)\big|, \big|\ln(A_2)\big|\Big\}.$$

显然，Ω 满足定理 1.10 的条件 (a)。若 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$，则通过 (H_4)，可得

$$\begin{aligned} QNx = \frac{1}{\omega}\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} G\big(t, &\exp\{x(g_1(t))\},\ldots, \\ &\exp\{x(g_n(t))\}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)\exp\{x(s)\}\Delta s\Big)\Delta t \neq 0. \end{aligned}$$

由 $\operatorname{Im}Q = \operatorname{Ker}L$ 可知 $J = I$。为了计算 Brouwer 度，考虑同论映射

$$H(\nu,x) = \nu x - (1-\nu)QNx,\ \nu\in[0,1].$$

对于任意 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$, $\nu\in[0,1]$, 有 $xH(\nu,x)>0$, 从而 $H(\nu,x)\neq 0$。通过拓扑度的同论不变性，可得

$$\deg\{JQN, \Omega\cap\operatorname{Ker}L, 0\} = \deg\{QNx, \Omega\cap\operatorname{Ker}L, 0\} = \deg\{x, \Omega\cap\operatorname{Ker}L, 0\} \neq 0,$$

其中 $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是 Brouwer 度。现在已经证明了 Ω 满足定理 1.10 的所有条件。因此，$Lx = Nx$ 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解. 即, (2.17) 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个 ω 周期解。定理证毕。

通过类似的讨论, 还可以获得下面的两个结论。

定理2.8. *令* (H_1)-(H_3) *成立。假设*

(H_5) *存在常数* $A_2 > A_1 > 0$ *使得若* $u_i \geq A_2$, $1\leq i\leq n+1$, *则*

$$\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} G\Big(t, u_1, \ldots, u_n, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)u_{n+1}\Delta s\Big)\Delta t > 0;$$

若 $0 < u_i \leq A_1$, $1\leq i\leq n+1$, *则*

$$\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} G\Big(t, u_1, \ldots, u_n, \int_{-\infty}^{t} c(t,s)u_{n+1}\Delta s\Big)\Delta t < 0.$$

则 (2.17) *至少有一个* ω *周期解。*

推论2.1. 令 (H_1)-(H_3) 成立。假设存在一个常数 $A>0$ 使得若 $u_i \le A, 1 \le i \le n+1$, 则对于任意 $t \in I_\omega$, 有

$$G\left(t, e^{u_1}, \ldots, e^{u_n}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s) e^{u_{n+1}} \Delta s\right) > 0,$$
$$G\left(t, e^{-u_1}, \ldots, e^{-u_n}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s) e^{-u_{n+1}} \Delta s\right) < 0$$

或

$$G\left(t, e^{u_1}, \ldots, e^{u_n}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s) e^{u_{n+1}} \Delta s\right) < 0,$$
$$G\left(t, e^{-u_1}, \ldots, e^{-u_n}, \int_{-\infty}^{t} c(t,s) e^{-u_{n+1}} \Delta s\right) > 0.$$

则 (2.17) 至少有一个 ω 周期解。

下面, 考虑一个更加简单的纯量时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = G\left(t, \exp\{x(g(t))\}\right), \tag{2.23}$$

其中 $G: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 都是 ω- 周期的。

通过与文献 [112] 相似的证明, 得到

定理2.9. 假设存在常数 $B, \alpha, \beta > 0$ 使得

(H_6) 若 $|x| \le B$, 则 $\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} |G(t, e^x)| \Delta t < \beta$; 或者, 若 $|x| > B$, 则 $xG(t, e^x) > 0$;

(H_7) 若 $x < -B$, 则 $\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G(t, e^x) \Delta t > -\alpha$; 或者若 $x > B$, 则 $\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} G(t, e^x) \Delta t \le \alpha$.

则 (2.23) 至少有一个 ω- 周期解。

最后, 为了解释主要定理的一些特征, 考虑下面的时标动力学方程

$$N^{\Delta}(t) = a(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \exp\{N(g_i(t))\} - \int_{-\infty}^{t} c(t,s) \exp\{N(s)\} \Delta s, \tag{2.24}$$

$$N^{\Delta}(t) = a(t) - \prod_{i=1}^{n} b_i(t) \exp\{N(g_i(t))\}, \tag{2.25}$$

$$N^{\Delta}(t) = r(t) \frac{K(t) - \exp\{N(g(t))\}}{K(t) + c(t) \exp\{N(g(t))\}}, \tag{2.26}$$

$$N^{\Delta}(t) = r(t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t) \exp\{N(g_i(t))\}}{1 + c_i(t) \exp\{N(g_i(t))\}}, \tag{2.27}$$

$$N^{\Delta}(t) = a(t) + b(t) \exp\{pN(g(t))\} - c(t) \exp\{qN(g(t))\}, \tag{2.28}$$

$$N^{\Delta}(t) = r(t) - \frac{\exp\{\theta N(g(t))\}}{K(t)^{\theta}}, \tag{2.29}$$

其中 $a, a_i, b, b_i, c, c_i, r, K: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 都是 rd- 连续，ω- 周期函数且满足 $\overline{a} > 0$, $c(t) > 0$, $a_i(t) \geq 0$, $b_i(t) \geq 0$, $c_i(t) \geq 0$, $K(t) > 0$, $r(t) > 0$，$g: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 和 $g_i: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 都是 ω- 周期的. 且 p, q, θ 都是正常数满足 $q > p$, 而且，$c: \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ 满足 $c(t+\omega, s+\omega) = c(t, s)$, $\int_{-\infty}^{t} c(t, s)\Delta s$ 是 rd- 连续的。

根据定理 2.7, 定理 2.8, 和定理 2.9, 可推出

定理2.10. (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) *都至少有一个 ω- 周期解.*

注2.8. *令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 且 $\tilde{x}(t) = \exp\{x(t)\}$. 则时标动力学方程 (2.24)-(2.29) 能够简化为连续或离散的带有偏差变元的非自治 Logistic 方程* [113, 114]*, 带有偏差变元的乘法 Logistic 型方程* [115, 116]*, 带有偏差变元的食物限制单种群模型* [117, 118]*, 带有偏差变元的 Michaelis-Menton 型单种群增长模型* [113, 119]*, 带有偏差变元的 Lotka-Volterra 型单种群增长模型* [114, 120]*, 和非自治 Gilpin-Ayala 单种群模型* [121]*.*

§2.3.2 第二类单种群时标动力学方程

这一小节，研究第二类单种群时标动力学方程的周期解，它统一和扩展了微分方程与其第二种差分化得到的差分方程。

考虑下面的单种群时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = x(t)[a(t) - g(t, x(t - \tau_1(t)), \cdots, x(t - \tau_n(t)))], \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2.30}$$

其中

(H_1) $a: \mathbb{T} \to (0, \infty)$ 和 $g: \mathbb{T} \times (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R}^+$ 都是 rd- 连续，ω- 周期函数. 而且, $g(t, \cdot)$ 对于固定的 $t \in \mathbb{T}$，在 $(\mathbb{R}^+)^n$ 内是连续的。

(H_2) $\tau_i: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ 和 $\tau_i(t + \omega) = \tau_i(t)$ 满足 $t - \tau_i(t) \in \mathbb{T}$，$1 \leq i \leq n$.

若 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, 则 (2.30) 可以简化为下面的连续 [122] 或离散 [123] 的模型

$$\dot{x}(t) = x(t)[a(t) - g(t, x(t - \tau_1(t)), \cdots, x(t - \tau_n(t)))], \quad t \in \mathbb{R},$$

和

$$\Delta x(t) = x(t)[a(t) - g(t, x(t - \tau_1(t)), \cdots, x(t - \tau_n(t)))], \quad t \in \mathbb{Z}.$$

为了研究 (2.30) 周期解的存在性，首先把问题嵌入到重合度理论框架中. 定义

$$\mathscr{L}^{\omega} = \left\{u \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+): \ u(t+\omega) = u(t), \ \forall t \in \mathbb{T}\right\}, \quad \|u\| = \max_{t \in I_{\omega}} |u(t)|, \ u \in \mathscr{L}^{\omega}.$$

易证. $(\mathscr{L}^{\omega},\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。令

$$\mathscr{L}_0^{\omega}=\{u\in\mathscr{L}^{\omega}:\ \overline{u}=0\},\quad \mathscr{L}_c^{\omega}=\left\{u\in\mathscr{L}^{\omega}:\ u(t)\equiv h\in\mathbb{R}^+,\ \ t\in\mathbb{T}\right\}.$$

则 $\mathscr{L}_0^{\omega}$ 和 $\mathscr{L}_c^{\omega}$ 都是 $\mathscr{L}^{\omega}$ 的闭线性子空间且满足 $\mathscr{L}^{\omega}=\mathscr{L}_0^{\omega}\oplus\mathscr{L}_c^{\omega}$, 和 $\dim\mathscr{L}_c^{\omega}=1$. 为了获得 (2.30) 的先验估计，我们介绍几个引理.

引理2.1. 假设 g 是 rd- 连续. ω- 周期的, 则

$$\int_t^{t+\omega}g(s)\Delta s=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}g(s)\Delta s,\quad t\in\mathbb{T}.$$

证明. 令 $t=\vartheta+n\omega+r, 0\le r<\omega$, 则由此推得

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\omega}g(s)\Delta s&=\int_{\vartheta+n\omega+r}^{\vartheta+n\omega+r+\omega}g(s)\Delta s=\int_{\vartheta+r}^{\vartheta+r+\omega}g(s)\Delta s\\&=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}g(s)\Delta s+\int_{\vartheta+\omega}^{\vartheta+r+\omega}g(s)\Delta s-\int_{\vartheta}^{\vartheta+r}g(s)\Delta s\\&=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}g(s)\Delta s.\end{aligned}$$

引理2.2. 若 $x(t)$ 是 (2.30) 的一个非负 ω 周期解, 则

$$\min_{t\in I_\omega}x(t)\ge\delta\|x\|,\quad 其中\quad \delta=e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta).$$

证明. 因为 $x(\sigma(t))=x(t)+\mu(t)x^{\Delta}(t)$, 所以有

$$x^{\Delta}(t)=a(t)(x(\sigma(t))-\mu(t)x^{\Delta}(t))-x(t)g[t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))].$$

这个时标方程等价于下面的系统

$$(1+a(t)\mu(t))x^{\Delta}(t)-a(t)x(\sigma(t))=-x(t)g[t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))].$$

由 $1+a(t)\mu(t)\neq0$ 可得

$$x^{\Delta}(t)-\frac{a(t)}{1+a(t)\mu(t)}x(\sigma(t))=-\frac{x(t)}{1+a(t)\mu(t)}g[t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))].$$

则

$$x^{\Delta}(t)+\ominus ax(\sigma(t))=-\frac{x(t)}{1+a(t)\mu(t)}g[t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))].$$

在上面方程的两边同时乘以 $e_{\ominus a}(t,\vartheta)$, 可得

$$(e_{\ominus a}(t,\vartheta)x(t))^{\Delta}=-\frac{e_{\ominus a}(t,\vartheta)x(t)}{1+a(t)\mu(t)}g[t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))].$$

从 t 到 $t+\omega$ 积分, 则有

$$x(t)e_{\ominus a}(t,\vartheta)(e_{\ominus a}(t+\omega,t)-1)=$$
$$-\int_t^{t+\omega}\frac{e_{\ominus a}(s,\vartheta)x(s)}{1+a(s)\mu(s)}g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(s-\tau_n(s)))\Delta s,$$

从而

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_t^{t+\omega}\frac{e_{\ominus a}(s,t)}{1-e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)}\frac{x(s)}{1+a(s)\mu(s)}g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(s-\tau_n(s)))\Delta s\\&=\int_\vartheta^{\vartheta+\omega}\frac{e_{\ominus a}(s,t)}{1-e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)}\frac{x(s)}{1+a(s)\mu(s)}g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(s-\tau_n(s)))\Delta s.\end{aligned}\tag{2.31}$$

令

$$G(t,s)=\frac{e_{\ominus a}(s,t)}{1-e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)},\quad t\le s\le t+\omega,$$

则可推出

$$\begin{aligned}A_1:=\frac{e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)}{1-e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)}&=\frac{e_{\ominus a}(t+\omega,t)}{1-e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)}\\\le G(t,s)\le\frac{1}{1-e_{\ominus a}(\vartheta+\omega,\vartheta)}&=:A_2.\end{aligned}$$

根据 (2.31), 得到

$$\|x\|\le A_2\int_\vartheta^{\vartheta+\omega}\frac{x(s)}{1+a(s)\mu(s)}g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(t-\tau_n(s)))\Delta s$$

和

$$\min_{t\in I_\omega}x(t)\ge A_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega}\frac{x(s)}{1+a(s)\mu(s)}g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(t-\tau_n(s)))\Delta s.$$

因此, 有

$$\min_{t\in I_\omega}x(t)\ge\frac{A_1}{A_2}\|x\|=\delta\|x\|.$$

现在考虑 (2.30) 的正周期解存在性.

定理2.11. *假设* (H$_1$) *和* (H$_2$) *成立. 若*

(H$_3$) *存在常数* $M_2>M_1>0$ *使得若* $u_i\ge M_2$, $1\le i\le n$, *则*

$$g(t,u_1,u_2,\cdots,u_n)>a(t),\quad t\in I_\omega$$

和若 $0<u_i\le M_1$, $1\le i\le n$, *则*

$$g(t,u_1,u_2,\cdots,u_n)<a(t),\quad t\in I_\omega.$$

则 (2.30) 至少有一个正 ω 周期解。

证明. 令 $X=Z=\mathscr{L}^{\omega}$ 且定义

$$Nx=x(t)[a(t)-g(t,x(t,\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t)))],$$
$$Lx=x^{\Delta},\qquad Px=Qx=\overline{x}.$$

则

$$\operatorname{Ker}L=\mathscr{L}_c^{\omega},\ \operatorname{Im}L=\mathscr{L}_0^{\omega},\ \dim\operatorname{Ker}L=1=\operatorname{codim}\operatorname{Im}L.$$

因为 $\mathscr{L}_0^{\omega}$ 在 $\mathscr{L}^{\omega}$ 中是闭的, 所以 L 是一个指标为零的 Fredholm 映射。同时，易证 P 和 Q 都是连续投影且满足

$$\operatorname{Im}P=\operatorname{Ker}L,\ \operatorname{Im}L=\operatorname{Ker}Q=\operatorname{Im}(I-Q).$$

进一步, 可逆映射 (对于 L)$K_P:\operatorname{Im}L\to\operatorname{Ker}P\cap\operatorname{Dom}L$ 存在且满足

$$K_P(x)=\hat{x}-\overline{\hat{x}},\quad 其中\quad \hat{x}(t)=\int_{\vartheta}^{t}x(s)\Delta s.$$

则

$$QNx=\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}x(s)[a(s)-g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(s-\tau_n(s)))]\Delta s$$

和

$$\begin{aligned}K_P(I-Q)Nx=&\int_{\vartheta}^{t}(Nx)(s)\Delta s-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}\int_{\vartheta}^{t}(Nx)(s)\Delta s\Delta t\\&-\left(t-\vartheta-\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}(t-\vartheta)\Delta t\right)\overline{Nx}.\end{aligned}$$

显然, QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续的。因为 X 是一个 Banach 空间, 根据 Arzelà–Ascoli 定理, 容易证明对于任意有界开集 $\Omega\subset X$, $\overline{K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})}$ 是紧的。而且, $QN(\overline{\Omega})$ 是有界的。因此, 对于任意有界开集 $\Omega\subset X$, N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的。

为了应用定理 1.10, 现在必须找到一个恰当的有界开集 Ω. 对于算子方程

$$Lx=\lambda Nx,\quad Ly=\lambda Ny,\quad \lambda\in(0,1),$$

有

$$x^{\Delta}(t)=\lambda x(t)[a(t)-g(t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t)))].\tag{2.32}$$

假设 $x\in X$ 是 (2.32) 的任意一个解。利用引理 2.2, 可以得到

$$\min_{t\in I_\omega}x(t)\geq\|x\|e_{\ominus\lambda a}(\vartheta+\omega,\vartheta).$$

因此, 有

$$\min_{t\in I_\omega} x(t) \geq \delta\|x\|. \tag{2.33}$$

在区间 $[\vartheta,\vartheta+\omega]$ 上积分 (2.32), 则有

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} x(t)[a(t)-g(t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t)))]\Delta t = 0. \tag{2.34}$$

下面, 将证明 $\|x(t)\| < \frac{M_2}{\delta}$. 假设这个结论不成立, 即, $\|x\| \geq \frac{M_2}{\delta}$, 则由 (2.33) 可知

$$\min_{t\in\mathbb{T}} x(t) = \min_{t\in I_\omega} x(t) \geq \delta\|x\| \geq M_2.$$

根据条件 (H_3), 有

$$g(t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))) > a(t), \quad t\in\mathbb{T}.$$

这与 (2.34) 相矛盾, 于是可得 $\|x(t)\| < \frac{M_2}{\delta}$. 同理, 利用 (2.33), (2.34) 和 (H_3), 有 $\min\limits_{t\in I_\omega} x(t) > \delta M_1$.

定义

$$\Omega := \{x\in X : \delta M_1 < x(t) < \frac{M_2}{\delta_2}, t\in I_\omega\}.$$

易证 Ω 满足定理 1.10 的条件 (a). 若 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$, 则 $x=\delta M_1$ 或 $x=\frac{M_2}{\delta}$, 于是有

$$QNx = \frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} x(s)\Big[a(s)-g(s,x(s-\tau_1(s)),\cdots,x(s-\tau_n(s)))\Big]\Delta s \neq 0$$

而且, 由 $\operatorname{Im}Q=\operatorname{Ker}L$ 推知 $J=I$. 为了计算 Brouwer 度, 考虑同论映射

$$H(\nu,x) = \nu(\frac{1}{2}(\delta M_1+\frac{M_2}{\delta})-x)+(1-\nu)QNx, \quad \nu\in[0,1].$$

对于任意 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$, $\nu\in[0,1]$, 有 $H(\nu,x)\neq 0$. 根据拓扑度的同论不变性, 可得

$$\begin{aligned}\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\} &= \deg\{QNx,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}\\ &= \deg\{\frac{1}{2}(\delta M_1+\frac{M_2}{\delta})-x,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}\\ &\neq 0,\end{aligned}$$

其中 $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是 Brouwer 度. 现在已经证明了 Ω 满足定理 1.10 的所有条件. 因此 $Lx=Nx$ 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 内至少有一个解, 即 (2.30) 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个正 ω 周期解. 定理证毕.

通过与上面类似的讨论, 我们可得到下面的结论.

定理2.12. 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立。若

(H_3) 存在 $M_4 > M_3 > 0$ 使得如果 $u_i \geq M_4$, $1 \leq i \leq n$, 那么

$$g(t, u_1, u_2, \cdots, u_n) < a(t), \quad t \in I_\omega$$

和如果 $0 < u_i \leq M_3$, $1 \leq i \leq n$, 那么

$$g(t, u_1, u_2, \cdots, u_n) > a(t), \quad t \in I_\omega.$$

则 (2.30) 至少有一个正 ω 周期解。

为了解释主要定理的一些特征，我们研究一些单种群模型的正周期解存在性。考虑下面的单种群模型

$$x^\Delta(t) = a(t)x(t)\left[1 - \frac{x(t-\tau(t))}{K(t)}\right], \tag{2.35}$$

$$x^\Delta(t) = x(t)[a(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x(t-\tau_i(t))], \tag{2.36}$$

$$x^\Delta(t) = a(t)x(t)\left[1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{x(t-\tau_i(t))}{K(t)}\right], \tag{2.37}$$

$$x^\Delta(t) = a(t)x(t)\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t)x(t-\tau_i(t))}{1 + c_i(t)x(t-\tau_i(t))}\right], \tag{2.38}$$

$$x^\Delta(t) = x(t)\left[a(t) - \left(\frac{x(t)}{K(t)}\right)^\theta\right], \tag{2.39}$$

其中 $a, a_i, c_i, K : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 是 rd- 连续，ω- 周期的且满足 $a(t) > 0, a_i(t) \geq 0, c_i(t) \geq 0, K(t) > 0, \theta > 0$。同时，对于 $1 \leq i \leq n$, 有 $\tau_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$, $\tau_i(t+\omega) = \tau_i(t)$, $t - \tau_i(t) \in \mathbb{T}$。

令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, (2.35)-(2.39) 能够简化为连续或者离散的带有时滞的 Logistic 模型 [1]，带有多个时滞的 Logistic 模型 [122, 123]，带有偏差变元的 Michaelis-Menton 型单种群增长模型 [113, 119]、非自治 Gilpin-Ayala 单种群模型 [121]。根据定理 2.11，能够推出

定理2.13. (2.35)-(2.39) 都至少有一个正 ω 周期解。

§2.4 带有反馈控制的时标动力学方程

在真实世界中的客观事物总会受到各种意想不到的外界因素的干扰，从而会导致一些数学模型参数的变化，如生物种群的内禀增长率等. 一个重要的问题就是一个客观事物是否能够抵制这些无法预料的外界扰动。这样带有反馈控制的数学模型具有重要的现实意义，并在微分方程中已经被广泛地讨论 [124, 101, 125, 126]. 因此，本节首先利用 Avery-Henderson 不动点定理和 Leggett-Williams 不动点定理建立下面带有反馈控制的非自治时标动力学方程多个正周期解存在的判别准则

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= r(t)x(t) - f(t, x(t), u(t)), \\ u^{\Delta}(t) &= -\delta(t)u^{\sigma}(t) + \eta(t)x(t), \end{aligned} \tag{2.40}$$

其中 $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 和 $r, \delta, \eta: \mathbb{T} \to (0, \infty)$ 都是 rd- 连续，ω- 周期的.

另外，基于重合度理论，我们也将考虑一个更一般的带有反馈控制的非线性时标动力学方程 (2.41) 的周期解存在性

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ u^{\Delta}(t) &= -\delta(t)u^{\sigma}(t) + \eta(t)x(t), \end{aligned} \tag{2.41}$$

其中 $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 和 $\delta, \eta: \mathbb{T} \to (0, \infty)$ 都是 rd- 连续，ω- 周期的.

为了获得 (2.40) 两个正周期解存在性，我们做一些必要的准备.

引理2.3. *若 $u(t)$ 是 (2.40) 第二个方程的任意一个 ω 周期解, 则有*

$$u(t) = \int_t^{t+\omega} K(t,s)\eta(s)x(s)\Delta s \triangleq (\Psi x)(t), \tag{2.42}$$

其中

$$K(t,s) = \frac{e_{\delta}(s,t)}{e_{\delta}(\vartheta+\omega, \vartheta) - 1}, \quad t \le s \le t+\omega.$$

证明. 首先, 考虑系统

$$u^{\Delta}(t) + \delta(t)u^{\sigma}(t) = \eta(t)x(t).$$

在上面方程的两边同时乘以 $e_{\delta}(t,\vartheta)$, 易证

$$(e_{\delta}(t,\vartheta)u(t))^{\Delta} = e_{\delta}(t,\vartheta)\eta(t)x(t).$$

从 t 到 $t+\omega$ 积分，有

$$u(t+\omega)e_{\delta}(t+\omega,\vartheta) - u(t)e_{\delta}(t,\vartheta) = \int_t^{t+\omega} e_{\delta}(s,\vartheta)\eta(s)x(s)\Delta s,$$

根据条件, 可获得

$$u(t)=\int_t^{t+\omega}K(t,s)\eta(s)x(s)\Delta s.$$

同时, 可得

$$A_2:=\frac{\eta^s}{e_\delta(\vartheta+\omega,\vartheta)-1}\le K(t,s)\eta(s)\le \frac{e_\delta(t+\omega,t)\eta^l}{e_\delta(\vartheta+\omega,\vartheta)-1}=\frac{e_\delta(\vartheta+\omega,\vartheta)\eta^l}{e_\delta(\vartheta+\omega,\vartheta)-1}=:A_1.$$

显然, (2.40) 有正 ω 周期解等价于

$$x^\Delta(t)=r(t)x(t)-f(t,x(t),(\Psi x)(t)), \tag{2.43}$$

存在正 ω 周期解. 现在, 假设如下的条件成立.

(H_1) 对于 $(t,v,\Psi v)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 有 $f(t,v,\Psi v)\ge 0$.

(H_2) 对于任意 $\epsilon>0$, 存在常数 $\lambda>0$ 使得对于任意 $v_1,v_2\in\mathbb{R}$, $|v_1-v_2|\le\lambda$ 有

$$|f(t,v_1,\Psi v_1)-f(t,v_2,\Psi v_2)|<\epsilon,\quad t\in I_\omega.$$

为了研究 (2.40) 周期解的存在性, 必须把问题嵌入到定理 1.11 和定理 1.12 的框架中. 定义

$$X=\{x\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}):x(t+\omega)=x(t),t\in\mathbb{T}\}.$$

如果定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in I_\omega}|x(t)|$, 那么 X 是一个 Banach 空间. 由 (2.43) 推知

$$(e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t))^\Delta=-e_{\ominus r}(\sigma(t),\vartheta)f(t,x(t),(\Psi x)(t)).$$

则 $x(t)e_{\ominus r}(t,\vartheta)$ 在 $\mathbb{T}$ 上是减函数. 对于 $x\in X$, 从 t 到 $t+\omega$ 积分, 有

$$x(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s,$$

其中

$$G(t,\sigma(s))=\frac{e_{\ominus r}(\sigma(s),t)}{1-e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta)},\quad t\le s\le t+\omega$$

和

$$B_2\triangleq\frac{e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta)}{(1+r^l\mu^l)(1-e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta))}\le G(t,\sigma(s))\le\frac{1}{1-e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta)}\triangleq B_1.$$

设

$$P=\{x\in X:x(t)\ge\theta\|x\|,t\in I_\omega\ \text{和}\ x(t)e_{\ominus r}(t,\vartheta)\ \text{在}\ \mathbb{T}\ \text{上是减函数}\},$$

其中 $\theta = \dfrac{e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta)}{1+r^l\mu^l}$. 显然，$P$ 在 X 内是一个锥. 对于 $x\in P$ 和 $t\in\mathbb{T}$, 定义一个算子 T 为

$$(Tx)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s.$$

引理2.4. $T: P\to P$.

证明. 显然，$(Tx)(t)$ 是一个连续函数且 $(Tx)(t+\omega)=(Tx)(t)$。同时，有

$$\|Tx\| \le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s$$

和

$$(Tx)(t) \ge B_2\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s \ge \frac{B_2}{B_1}\|Tx\| = \theta\|Tx\|.$$

此外, 能够得到

$$\begin{aligned}((Tx)(t)e_{\ominus r}(t,\vartheta))^\Delta &= f(t,x(t),(\Psi x)(t))\left[\frac{e_{\ominus r}(\sigma(t+\omega),\vartheta)}{1-e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta)} - \frac{e_{\ominus r}(\sigma(t),\vartheta)}{1-e_{\ominus r}(\vartheta+\omega,\vartheta)}\right]\\ &= -e_{\ominus r}(\sigma(t),\vartheta)f(t.x(t),(\Psi x)(t))\end{aligned}$$

因此, $Tx\in P$.

易证 x 是 (2.43) 的一个正 ω 周期解的充要条件是 x 是 T 在 P 内的一个不动点。选取 $\xi,\zeta\in\mathbb{T}$ 满足 $\vartheta\le\xi<\zeta\le\vartheta+\omega$. 定义 P 上非负连续增泛函 α, β 和 γ 如下：

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \max_{\zeta\le t\le\vartheta+\omega} e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta);\\ \beta(x) &= \min_{\xi\le t\le\zeta} e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta);\\ \alpha(x) &= \min_{\vartheta\le t\le\xi} e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t) = e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)x(\xi).\end{aligned}$$

显然, 对于任意 $x\in P$, 有

$$\gamma(x) = \beta(x)\le\alpha(x).$$

此外, 对于任意 $x\in P$, 还有

$$\gamma(x) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta)\ge e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\theta\|x\|,$$

于是

$$\|x\|\le e_r(\zeta,\vartheta)\frac{1}{\theta}\gamma(x),\quad x\in P.$$

最后, 能够得到

$$\beta(\pi x) = \pi\beta(x),\quad 0\le\pi\le1,\quad x\in P.$$

定理2.14. 假设存在常数 a, b 和 c 满足 $0<a<b<c$ 使得

$$0<a<\frac{\Upsilon_\xi}{\Lambda_\zeta}b<\frac{A_2\theta^2\Upsilon_\xi}{A_1\Lambda_\zeta}c$$

或

$$0<a<\frac{A_2\theta^2}{A_1}e_r(\zeta,\xi)b<\left(\frac{A_2\theta^2}{A_1}\right)^2 e_r(\zeta,\xi)c,$$

且 f 满足如下的条件:

(V_1) 对于

$$\begin{aligned}\theta c e_r(\zeta,\vartheta)\le x(t)\le \frac{c}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta),\\ A_2\omega\theta c e_r(\zeta,\vartheta)\le(\Psi x)(t)\le A_1\omega\frac{c}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta),\end{aligned}\qquad t\in[\zeta,\vartheta+\omega]$$

有 $f(t,x(t),(\Psi x)(t))>\dfrac{c}{\Lambda_\zeta}$;

(V_2) 对于

$$\begin{aligned}\theta b e_r(\zeta,\vartheta)\le x(t)\le \frac{b}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta),\\ A_2\omega\theta b e_r(\zeta,\vartheta)\le(\Psi x)(t)\le A_1\omega\frac{b}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta),\end{aligned}\qquad t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]$$

有 $f(t,x(t),(\Psi x)(t))<\dfrac{b}{\Gamma_\zeta}$;

(V_3) 对于

$$\begin{aligned}\theta a e_r(\xi,\vartheta)\le x(t)\le \frac{a}{\theta}e_r(\xi,\vartheta),\\ A_2\omega\theta a e_r(\xi,\vartheta)\le(\Psi x)(t)\le A_1\omega\frac{a}{\theta}e_r(\xi,\vartheta),\end{aligned}\qquad t\in[\xi,\vartheta+\omega]$$

有 $f(t,x(t),(\Psi x)(t))>\dfrac{a}{\Upsilon_\xi}$,

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_\zeta&=e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\int_\zeta^{\vartheta+\omega}G(\zeta,\sigma(s))\Delta s,\\ \Upsilon_\xi&=e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)\int_\xi^{\vartheta+\omega}G(\xi,\sigma(s))\Delta s,\\ \Gamma_\zeta&=e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\left[\int_\zeta^{\vartheta+\omega}G(\zeta,\sigma(s))\Delta s+\int_\vartheta^{\zeta}G(\zeta-\omega,\sigma(s))\Delta s\right].\end{aligned}$$

则 (2.43) 至少有两个正 ω 周期解.

证明. 为了将我们的问题嵌入到定理 1.11 的框架中, 将证明分为如下的几步.

1. 算子 $T:\overline{P(\gamma,c)}\to P$ 是全连续的.

根据 (H_2), 对于任意 $\epsilon>0$, 存在常数 $\lambda>0$ 使得对于任意 $v_1,v_2\in\mathbb{R}$, $|v_1-v_2|\le\lambda$, 有

$$|f(t,v_1,\Psi v_1)-f(t,v_2,\Psi v_2)|<\frac{\epsilon}{B_1\omega}\quad t\in I_\omega.$$

对于上面的 $\epsilon>0$ 和 $\lambda>0$, 若 $x,y\in P$ 且 $\|x-y\|<\lambda$, 则对于 $t\in I_\omega$, 有

$$|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega}|f(s,x(s),(\Psi x)(s))-f(s,y(s),(\Psi y)(s))|\Delta s<\epsilon$$

这说明 T 是连续的.

现在, 证明 T 是一致有界和等度连续的。对于 $x\in\overline{P(\gamma,c)}$, 可得 $\gamma(x)=e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta)\le c$. 则

$$\|x\|\le\theta x(\zeta)\le\theta e_r(\zeta,\vartheta)c:=L.$$

利用 (H_2), 对于 $\epsilon=1$ 和 $x,y\in\overline{P(\gamma,c)}$, 存在常数 $\lambda>0$ 使得当 $\|x-y\|<\lambda$ 时, 可知

$$|f(t,x(t),(\Psi x)(t))-f(t,y(t),(\Psi y)(t))|<1,\quad t\in I_\omega.$$

选择常数 $N>0$ 使得 $L/N<\lambda$. 对于 $x\in\overline{P(\gamma,c)}$, 定义 $x^i(t)=(x(t)i)/N$, $i=0,1,\cdots,N$, 则

$$\|x^i-x^{i-1}\|=\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\frac{x(t)i}{N}-\frac{x(t)(i-1)}{N}\right|=\|x\|\frac{1}{N}\le\frac{L}{N}<\lambda$$

和

$$|f(t,x^i(t),(\Psi x^i)(t))-f(t,x^{i-1}(t),(\Psi x^{i-1})(t))|<1,\quad t\in I_\omega.$$

因此, 对于 $t\in I_\omega$, 可以得到

$$\begin{aligned}|f(t,x(t),(\Psi x)(t))|&\le\sum_{i=1}^N|f(t,x^i(t),(\Psi x^i)(t))-f(t,x^{i-1}(t),(\Psi x^{i-1})(t))|+|f(t,0,0)|\\&<N+\sup_{t\in I_\omega}|f(t,0,0)|\triangleq Q.\end{aligned}$$

由此可得

$$\|Tx\|\le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega}f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s<B_1\omega Q.$$

同时, 有

$$\begin{aligned}((Tx)(t))^\Delta&=\int_\vartheta^{\vartheta+\omega}G^\Delta(t,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\&\quad+G(\sigma(t),\sigma(t+\omega))f(t+\omega,x(t+\omega),(\Psi x)(t+\omega))\\&\quad-G(\sigma(t),\sigma(t))f(t,x(t),(\Psi x)(t))\\&=r(t)(Tx)(t)-f(t,x(t),(\Psi x)(t)).\end{aligned}$$

因此, 有

$$|((Tx)(t))^{\Delta}| \le r^l\|Tx\| + |f(t,x(t),(\Psi x)(t))| \le r^l B_1\omega Q + Q$$

这说明 T 是一致有界和等度连续的. 由 Arzelà–Ascoli 定理可推出算子 T 是全连续的。

2. 定理 1.11 的条件 (i) 成立.

设 $x \in \partial P(\gamma,c)$, 则 $\gamma(x) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta) = c$。因为 $\|x\| \le (1/\theta)x(t)$, 对于 $t \in [\zeta,\vartheta+\omega]$, 有

$$x(t) \ge \theta\|x\| \ge \theta x(\zeta) \ge \theta c e_r(\zeta,\vartheta)$$

和

$$x(t) \le \|x\| \le e_r(\zeta,\vartheta)\frac{1}{\theta}\gamma(x) = \frac{c}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta).$$

同时, 易证

$$A_2\omega\theta c e_r(\zeta,\vartheta) \le (\Psi x)(t) \le A_1\omega\frac{c}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta), \quad t \in [\zeta,\vartheta+\omega].$$

根据 (V_1), 得到

$$\begin{aligned}\gamma(Tx) &= e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)(Tx)(\zeta) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\int_{\zeta}^{\zeta+\omega} G(\zeta,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &> e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\frac{c}{\Lambda_\zeta}\int_{\zeta}^{\vartheta+\omega} G(\zeta,\sigma(s))\Delta s = c.\end{aligned}$$

3. 定理 1.11 的条件 (ii) 成立.

对于 $x \in \partial P(\beta,b)$, $\beta(x) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta) = b$ 和 $t \in [\vartheta,\vartheta+\omega]$, 容易获得

$$\begin{gathered}x(t) \ge \theta\|x\| \ge \theta x(\zeta) \ge \theta b e_r(\zeta,\vartheta),\\ x(t) \le \|x\| \le e_r(\zeta,\vartheta)\frac{1}{\theta}\beta(x) = \frac{b}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta)\end{gathered}$$

和

$$A_2\omega\theta b e_r(\zeta,\vartheta) \le (\Psi x)(t) \le A_1\omega\frac{b}{\theta}e_r(\zeta,\vartheta).$$

由 (V_2) 推得

$$\begin{aligned}\beta(Tx) &= e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)(Tx)(\zeta) = e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\int_{\zeta}^{\zeta+\omega} G(\zeta,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &= e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\left[\left(\int_{\zeta}^{\vartheta+\omega} + \int_{\vartheta+\omega}^{\zeta+\omega}\right) G(\zeta,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\right]\\ &< e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\left[\int_{\zeta}^{\vartheta+\omega} G(t,\sigma(s))\Delta s + \int_{\vartheta}^{\zeta} G(\zeta-\omega,\sigma(s))\Delta s\right]\frac{b}{\Gamma_\zeta} = b.\end{aligned}$$

4. 定理 1.11 的条件 (iii) 成立。

显然, $P(\alpha,a)\neq\emptyset$。对于 $x\in\partial P(\alpha,a)$ 和 $\alpha(x)=e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)x(\xi)=a$, 类似于上面的讨论, 对于 $t\in[\xi,\vartheta+\omega]$, 可有

$$x(t)\geq\theta\|x\|\geq\theta x(\xi)\geq\theta ae_r(\xi,\vartheta),\quad x(t)\leq\|x\|\leq e_r(\xi,\vartheta)\frac{1}{\theta}\alpha(x)=\frac{a}{\theta}e_r(\xi,\vartheta)$$

和

$$A_2\omega\theta ae_r(\xi,\vartheta)\leq(\Psi x)(t)\leq A_1\omega\frac{a}{\theta}e_r(\xi,\vartheta).$$

根据 (V_3), 有

$$\begin{aligned}\alpha(Tx) &= e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)(Tx)(\xi)=e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)\int_{\xi}^{\xi+\omega}G(\xi,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &> e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)\frac{a}{\Upsilon_\xi}\int_{\xi}^{\vartheta+\omega}G(\xi,\sigma(s))\Delta s=a.\end{aligned}$$

综上所述, 定理 1.11 的所有条件都成立。因此, T 至少有两个不动点, 也就是说, (2.43) 在 $\overline{P(\gamma,c)}$ 内至少有两个正周期解 x_1 和 x_2 使得

$$x_1(\xi)>ae_r(\xi,\vartheta),\quad x_1(\zeta)<be_r(\zeta,\vartheta),\quad x_2(\zeta)>be_r(\zeta,\vartheta),\quad x_2(\zeta)<ce_r(\zeta,\vartheta).$$

类似于上面的讨论, 令 $\xi,\zeta\in\mathbb{T}$ 满足 $\vartheta\leq\xi<\zeta\leq\vartheta+\omega$, 并且在 P 上定义非负连续增泛函 α, β 和 γ 如下:

$$\begin{aligned}\gamma(x)&=\min_{\xi\leq t\leq\zeta}e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t)=e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta);\\ \beta(x)&=\max_{\zeta\leq t\leq\vartheta+\omega}e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t)=e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)x(\zeta);\\ \alpha(x)&=\max_{\xi\leq t\leq\vartheta+\omega}e_{\ominus r}(t,\vartheta)x(t)=e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)x(\xi).\end{aligned}$$

对于任意 $x\in P$, 容易证明

$$\gamma(x)=\beta(x)\leq\alpha(x),\ \|x\|\leq e_r(\zeta,\vartheta)\frac{1}{\theta}\gamma(x),\ \beta(\pi x)=\pi\beta(x),\quad 0\leq\pi\leq1.$$

根据定理 1.12, 可以得到下面的结论

定理2.15. *假设存在 a,b 和 c 满足 $0<a<b<c$ 使得*

$$0<a<\frac{A_2\theta^2}{A_1}e_r(\zeta,\xi)b<\frac{A_2\theta^2\Gamma_\zeta^*}{A_1\Lambda_\zeta^*}e_r(\zeta,\xi)c$$

或者

$$0<a<\frac{A_2\theta^2}{A_1}e_r(\zeta,\xi)b<\left(\frac{A_2\theta^2}{A_1}\right)^2e_r(\zeta,\xi)c,$$

且 f 满足如下的条件:

(V_1^*) 对于

$$\begin{aligned}\theta c e_r(\zeta,\vartheta) \le x(t) \le \frac{c}{\theta} e_r(\zeta,\vartheta),\\ A_2\omega\theta c e_r(\zeta,\vartheta) \le (\Psi x)(t) \le A_1\omega\frac{c}{\theta} e_r(\zeta,\vartheta),\end{aligned} \qquad t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]$$

有 $f(t,x(t),(\Psi x)(t)) < \dfrac{c}{\Lambda_\zeta^*}$;

(V_2^*) 对于

$$\begin{aligned}\theta b e_r(\zeta,\vartheta) \le x(t) \le \frac{b}{\theta} e_r(\zeta,\vartheta),\\ A_2\omega\theta b e_r(\zeta,\vartheta) \le (\Psi x)(t) \le A_1\omega\frac{b}{\theta} e_r(\zeta,\vartheta),\end{aligned} \qquad t\in[\zeta,\vartheta+\omega]$$

有 $f(t,x(t),(\Psi x)(t)) > \dfrac{b}{\Gamma_\zeta^*}$;

(V_3^*) 对于

$$\begin{aligned}\theta a e_r(\xi,\vartheta) \le x(t) \le \frac{a}{\theta} e_r(\xi,\vartheta),\\ A_2\omega\theta a e_r(\xi,\vartheta) \le (\Psi x)(t) \le A_1\omega\frac{a}{\theta} e_r(\xi,\vartheta),\end{aligned} \qquad t\in[\vartheta,\vartheta+\omega]$$

有 $f(t,x(t),(\Psi x)(t)) < \dfrac{a}{\Upsilon_\xi^*}$,

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_\zeta^* &= e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\left[\int_\zeta^{\vartheta+\omega} G(\zeta,\sigma(s)) + \int_\vartheta^\zeta G(\zeta-\omega,\sigma(s))\Delta s\right],\\ \Gamma_\zeta^* &= e_{\ominus r}(\zeta,\vartheta)\int_\zeta^{\vartheta+\omega} G(\zeta,\sigma(s))\Delta s,\\ \Upsilon_\xi^* &= e_{\ominus r}(\xi,\vartheta)\left[\int_\xi^{\vartheta+\omega} G(\xi,\sigma(s))\Delta s + \int_\vartheta^\xi G(\xi-\omega,\sigma(s))\Delta s\right].\end{aligned}$$

则 (2.43) 至少有两个正 ω 周期解。

由定理 2.14 和定理 2.15 可推得 (2.40) 至少有两个正周期解。

考虑时标动力学方程 (2.40) 三个正 ω 周期解存在性问题。首先，假设下面的条件成立。

(H_3) $f(t,v_1,v_2)$ 对于 $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $t\in\mathbb{T}$, 是非减的。

设

$$P^* = \{x\in X : x(t)\ge\theta\|x\|\}.$$

显然，P^* 是 X 的一个锥。

定理2.16. 假设 (H_1)-(H_3) 成立。而且存在正常数 r, r_1, R 满足 $0<r<r_1<R$ 使得

$$B_1\omega\sup_{t\in I_\omega} f(t,R,A_1\omega R)\le R,\ B_1\omega\sup_{t\in I_\omega} f(t,r,A_1\omega r)<r,\ B_2\omega\inf_{t\in I_\omega} f(t,r_1,A_2\omega r_1)>r_1.$$

则 (2.40) 至少有三个正 ω 周期解。

证明. 定义一个泛函 $\phi : P^* \to [0,\infty)$ 且 $\phi(x)=\min_{t\in I_\omega} x(t)$。显然，$\phi$ 是一个非负连续凹泛函且对于任意 $x\in \bar{P}_R^*$，有 $\phi(x)\le \|x\|$。同时，定义一个算子 T^* 为

$$(T^*x)(t)=\int_t^{t+\omega} G(t,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s,\quad x\in \bar{P}^*.$$

对于 $x\in \bar{P}_R^*$，有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &\le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s,R,A_1\omega R)\Delta s\\ &\le B_1\omega \sup_{t\in I_\omega} f(t,R,A_1\omega R)\le R.\end{aligned}$$

通过类似于上面的讨论，可推出 $T^* : \bar{P}_R^* \to \bar{P}_R^*$ 是全连续的。

首先，验证定理 1.13 的条件 (ii) 成立。对于 $x\in \bar{P}_r^*$，获得

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &\le B_1\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s,r,A_1\omega r)\Delta s\\ &\le B_1\omega \sup_{t\in I_\omega} f(t,r,A_1\omega r)< r.\end{aligned}$$

选择一个正常数 r_2 满足 $0<r_1<\theta r_2<r_2\le R$。下面，验证定理 1.13 的条件 (i) 成立。显然，$\{x\in P(\phi,r_1,r_2) : \phi(x)>r_1\}\ne\emptyset$。对于 $x\in P(\phi,r_1,r_2)$，有

$$r_1\le \phi(x)=\min_{t\in I_\omega} x(t)\le \|x\|\le r_2.$$

则

$$\begin{aligned}\phi(Tx) &= \min_{t\in I_\omega}(Tx)(t)=\min_{t\in I_\omega}\int_t^{t+\omega} G(t,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &\ge B_2\min_{t\in I_\omega}\int_t^{t+\omega} f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &\ge B_2\omega \inf_{t\in I_\omega} f(t,r_1,A_2\omega r_1)>r_1.\end{aligned}$$

最后，证明定理 1.13 的条件 (iii) 成立。对于 $x\in P(\phi,r_1,R)$ 和 $\|Tx\|>r_2$，可推出

$$\begin{aligned}\phi(Tx) &= \min_{t\in I_\omega}\int_t^{t+\omega} G(t,\sigma(s))f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &\ge B_2\min_{t\in I_\omega}\int_t^{t+\omega} f(s,x(s),(\Psi x)(s))\Delta s\\ &\ge \frac{B_2}{B_1}\|Tx\|>\theta r_2>r_1.\end{aligned}$$

因此, 根据定理 1.13, (2.43) 至少有三个正 ω 周期解. 这意味着 (2.40) 至少有三个正 ω 周期解.

现在, 将利用重合度理论证明带有反馈控制的非线性时标动力系统 (2.41) 至少存在一个 ω 周期解. 为了获得结论, 把问题嵌入到重合度理论框架中. 定义

$$\mathscr{L}^{\omega} = \{y \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) : \ y(t+\omega) = y(t), \ \forall t \in \mathbb{T}\}, \quad \|y\| = \max_{t \in I_{\omega}} |y(t)|, \ y \in \mathscr{L}^{\omega}.$$

容易证明 $(\mathscr{L}^{\omega}, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间. 令

$$\mathscr{L}_0^{\omega} = \{y \in \mathscr{L}^{\omega} : \ \overline{y} = 0\}, \quad \mathscr{L}_c^{\omega} = \{y \in \mathscr{L}^{\omega} : \ y(t) \equiv h \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{T}\}.$$

由此可推知 $\mathscr{L}_0^{\omega}$ 和 $\mathscr{L}_c^{\omega}$ 都是 $\mathscr{L}^{\omega}$ 的闭线性子空间且满足 $\mathscr{L}^{\omega} = \mathscr{L}_0^{\omega} \ominus \mathscr{L}_c^{\omega}$, $\dim \mathscr{L}_c^{\omega} = 1$.

定理2.17. 假设

(H_4) *存在常数 $M_* > 0$ 使得对于 ω 周期函数 $x, u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, 若*

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} f(t, x(t), u(t)) \Delta t = 0,$$

则

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} |f(t, x(t), u(t)| \Delta t \le M_*;$$

(H_5) *存在常数 $M^* > 0$ 使得若 $v_i \ge M^*$, $i = 1, 2$, 则*

$$f(t, v_1, v_2) > 0, \quad f(t, -v_1, -v_2) < 0, \quad t \in I_{\omega};$$

或

$$f(t, v_1, v_2) < 0, \quad f(t, -v_1, -v_2) > 0, \quad t \in I_{\omega}.$$

则 (2.41) 至少存在一个 ω 周期解.

证明. 根据引理 2.3, 为了获得 (2.41) 周期解存在性, 仅需要出示下面的系统存在周期解

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t), (\Psi x)(t)). \tag{2.44}$$

设 $X = Z = \mathscr{L}^{\omega}$, 定义

$$Nx = f(t, x(t), (\Psi x)(t)), \quad Lx = x^{\Delta}, \quad Px = Qx = \overline{x}.$$

则

$$\operatorname{Ker} L = \mathscr{L}_c^{\omega}, \ \operatorname{Im} L = \mathscr{L}_0^{\omega}, \ \dim \operatorname{Ker} L = 1 = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L.$$

因为 $\mathscr{L}_0^\omega$ 在 $\mathscr{L}^\omega$ 中是闭的, 所以 L 是一个指标为零的 Fredholm 映射。同时，易证 P 和 Q 都是连续投影且满足

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L,\ \operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I-Q).$$

进一步, 可逆映射 (对于 L)$K_P: \operatorname{Im} L \to \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Dom} L$ 存在且满足

$$K_P(x) = \hat{x} - \overline{\hat{x}}, \quad 其中 \quad \hat{x}(t) = \int_\vartheta^t x(s)\Delta s.$$

则

$$QNx = \frac{1}{\omega}\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s, x(s), (\Psi x)(s))\Delta s.$$

显然, QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续的。因为 X 是一个 Banach 空间, 根据 Arzelà-Ascoli 定理, 容易证明对于任意有界开集 $\Omega \subset X$ $\overline{K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})}$ 是紧的。而且, $QN(\overline{\Omega})$ 是有界的。因此, 对于任意有界开集 $\Omega \subset X$, N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的。

为了应用定理 1.10, 现在必须找到一个恰当的有界开集 Ω. 对于算子方程

$$Lx = \lambda Nx, \quad Ly = \lambda Ny, \quad \lambda \in (0,1),$$

有

$$x^\Delta(t) = \lambda f(t, x(t), (\Psi x)(t)). \tag{2.45}$$

假设 $x \in X$ 是 (2.45) 的任意一个解, 在 $[\vartheta, \vartheta+\omega]$ 上积分 (2.45), 可有

$$\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(t, x(t), (\Psi x)(t))\Delta t = 0 \tag{2.46}$$

利用条件 (H_4), (H_5), (2.45) 和 (2.46), 存在常数 $M_* > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, 和 $t_1, t_2 \in I_\omega$ 使得

$$\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} |x^\Delta(t)| \le \int_\vartheta^{\vartheta+\omega} |f(t, x(t), (\Psi x)(t))|\Delta t \le M_*$$

和

$$x(t_1) < M_1, \quad (\Psi x)(t_1) < M_1, \quad -M_2 < x(t_2), \quad -M_2 < (\Psi x)(t_2).$$

由引理 1.2 可知

$$\begin{aligned} x(t) &\le x(t_1) + \int_\vartheta^{\vartheta+\omega} |x^\Delta(t)|\Delta t < M_1 + M_*, \\ x(t) &\ge x(t_2) - \int_\vartheta^{\vartheta+\omega} |x^\Delta(t)|\Delta t > -M_2 - M_*. \end{aligned}$$

现在定义

$$\Omega \triangleq \{x \in X : |x(t)| < H, t \in I_\omega\},$$

其中

$$H = M_* + M^* + M_1 + M_2 + \frac{M_* + M^* + M_1 + M_2}{\omega A_2} + \frac{M_* + M^* + M_1 + M_2}{\omega A_1}.$$

显然，Ω 满足定理 1.10 的条件 (a)。若 $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L$，则对于 $t \in I_\omega$，$x(t) > M^*$，$(\Psi x)(t) > M^*$ 或 $x(t) < -M^*$，$(\Psi x)(t) < -M^*$，并且有

$$QNx = \frac{1}{\omega}\int_\vartheta^{\vartheta+\omega} f(s, x(s), (\Psi x)(s))\Delta s \neq 0.$$

而且，由 $\operatorname{Im} Q = \operatorname{Ker} L$ 可得 $J = I$。为了计算 Brouwer 度，考虑同论映射

$$H(\nu, x) = \nu x + (1-\nu)QNx, \quad \nu \in [0,1].$$

对于任意 $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} L$, $\nu \in [0,1]$, 有 $H(\nu, x) \neq 0$。利用拓扑度的同论不变性，可得

$$\deg\{JQN, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} = \deg\{QNx, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} = \deg\{x, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \neq 0,$$

其中 $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是 Brouwer 度。因此，我们已经证明了 Ω 满足定理 1.10 的所有条件。这样 $Lx = Nx$ 在 $\operatorname{Dom} L \cap \overline{\Omega}$ 内至少有一个解，也就说，(2.41) 在 $\operatorname{Dom} L \cap \overline{\Omega}$ 内至少有一个 ω 周期解。定理证毕。

注2.9. 本章中，§ 2.2 和 § 2.3 的主要结果发表在文献 [64, 65, 72] 中。

第三章 压缩映像原理和时标动力学方程周期解稳定性

§3.1 引 言

稳定性理论一直是数学研究中的一个主要领域，在整个数学发展过程中有着不可替代的作用，特别是在方程领域中。随着数学理论的发展，各种各样研究稳定性的方法被建立，其中最就是 Liapunov 直接方法 (或 Liapunov 第二方法)。1892 年，俄国著名的数学家和力学家 Liapunov 创立了用于分析系统稳定性的理论，其中最主要的就是 Liapunov 直接方法 (或 Liapunov 第二方法)。此方法在分析线性系统和非线性系统、定常系统和时变系统稳定性问题中有着重要的作用，是更为一般的稳定性分析方法。在方程领域中，Liapunov 直接方法是讨论各种方程稳定性问题的最主要的工具，例如，微分方程 [127]，差分方程 [128]，时标动力学方程 [5, 73, 74, 75] 等。因此，从 19 世纪末以来，Liapunov 直接方法一直指导着稳定性的研究和应用。然而，在实际应用中，Liapunov 函数或者泛函的建立需要大量的技巧和经验，有时并不能广泛的适用，并且在计算中也是非常复杂且需要一些技巧，特别是在证明非自治时标动力学方程周期解稳定性。由于时标动力学方程与时间尺度有着密切的关系，这样利用 Liapunov 直接方法就很难去讨论时标动力学方程周期解稳定性。因此，需要一些新的方法或工具去克服这些困难。

近来，不动点理论已经被证明是讨论微分方程稳定性问题的一种很好的工具。数学家 Burton 首次利用不动点理论讨论了微分方程的稳定性问题 [78]。同时，利用不动点研究稳定性的方法避免了采用 Liapunov 直接方法遭遇的一些困难，并且有时会获得更加宽松的稳定性条件。虽然不动点方法已经被广泛应用到微分方程稳定性研究之中 [129, 130]，但是到现在为止，还没有见到采用不动点的方法研究时标动力学方程的周期解稳定性。

在这一章中，将基于压缩映像原理来探索一类半线性时标动力学方程周期解的稳定性。在这个过程中，我们建立了这类半线性时标动力学方程解的一致有界和一致最终有界的判别准则，同时，也给出了零解渐近稳定的充要条件。最后，作为应用，研究了一些具体的实例。

§3.2 周期解稳定性

这一节, 将考虑下面的半线性时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = -a(t)x(\sigma(t)) + f(t, x(t)), \tag{3.1}$$

其中 $a \in \mathcal{R}^+$, $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 rd- 连续的. 为了研究 (3.1) 周期解稳定性, 有必要讨论 (3.1) 解的有界性和零解的渐近稳定性. 首先, 给出时标动力学方程解的稳定性和有界性的概念. 考虑时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = F(t, x), \tag{3.2}$$

其中 $F: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 rd- 连续函数.

定义3.1. 若对于任意 $\alpha > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}^+$, 存在常数 $\beta_1(\alpha) > 0$ 使得对于任意 $t \geq t_0$, 当 $|x_0| \leq \alpha$ 时, 有 $|x(t, x_0, t_0)| < \beta_1$, 则称 (3.2) 的解是一致有界的.

定义3.2. 若存在常数 $\beta_2 > 0$, 对于任意 $\alpha > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}^+$, 存在一个 $T(\alpha) > \vartheta$ 使得对于任意 $t \geq t_0 + T$, 当 $|x_0| \leq \alpha$ 时, 有 $|x(t, x_0, t_0)| < \beta_2$, 则称 (3.2) 的解对于 β_2 是一致最终有界的.

定义3.3. 若对于 $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}$, 存在常数 $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ 使得对于任意 $t \geq t_0$, 当 $|x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|x(t, x_0, t_0)| < \varepsilon$, 则称 (3.2) 的零解是稳定的.

定义3.4. 若 (3.2) 的零解是稳定的, 并且存在常数 $\delta(t_0) > 0$ 使得当 $|x_0| \leq \delta$, $t \to \infty$ 时, 有 $x(t, x_0, t_0) \to 0$, 则称 (3.2) 的零解是渐近稳定的.

通过类似于文献 [5] 中定理 2.74 的证明, 能够得到

定理3.1. 假定 $a \in \mathcal{R}$, $u \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ 和 $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 rd- 连续的. 令 $t_0 \in \mathbb{T}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则时标方程

$$x^{\Delta}(t) = -a(t)x(\sigma(t)) + f(t, u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.3}$$

存在唯一满足初始条件的解为

$$x(t) = e_{\ominus a}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(t, \tau) f(\tau, u(\tau)) \Delta\tau.$$

定理3.2. 假设

(i) 存在一个函数 $b: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ 使得

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq b(t)|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{T};$$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\vartheta}^{t}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau=\infty$ 且存在常数 $0<\ell<1$, $M>0$ 使得

$$\int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)|f(\tau,0)|\Delta\tau<M,\qquad \int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\Delta\tau\le\ell,\ \ t\ge\vartheta.$$

则 (3.1) 的解是一致有界的.

证明. 根据条件 (ii), 对于任意 $t_0\ge\vartheta$, 有

$$\int_{t_0}^{t}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau=\int_{\vartheta}^{t}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau-\int_{\vartheta}^{t_0}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau\to\infty,\ \ t\to\infty$$

和

$$e_{\ominus a}(t,t_0)=\frac{1}{e_a(t,t_0)}\to 0,\ \ t\to\infty.$$

因此, 能够找到一个正常数 b_1 使得对于 $t\ge t_0$, 有 $e_{\ominus a}(t,t_0)\le b_1$。对于任意 α_1, 令 $\beta_1=(\alpha_1b_1+M)/(1-\ell)$ 且定义

$$S_1=\{u\in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})|u(t_0)=x_0,\ 和\ |u(t)|<\beta_1,\ \ t\ge t_0,\ |x_0|\le\alpha_1\},$$

则容易证明当定义度量 $d(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|=\sup\limits_{t\in[t_0,\infty)}|u_1(t)-u_2(t)|$ 时, S_1 是一个完备的度量空间. 通过定理 3.1, 对于任意 $u\in S_1$, 考虑下面的系统

$$Z_u(t)=e_{\ominus a}(t,t_0)u(t_0)+\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)f(\tau,u(\tau))\Delta\tau.$$

显然, $Z_u(t_0)=u(t_0)=x_0$ 且满足 $Z_u\in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})$. 此外, 对于任意 $t\ge t_0$, 有

$$\begin{aligned}|Z_u(t)|&\le e_{\ominus a}(t,t_0)|x_0|+\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)|u(\tau)|\Delta\tau+\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)|f(\tau,0)|\Delta\tau\\&<b_1\alpha_1+\ell\beta_1+M=\beta_1.\end{aligned}$$

因此, 定义映射 $P:S_1\to S_1$ 为 $(Pu)(t)=Z_u(t)$。根据条件 (i), 对于任意 $u_1,u_2\in S_1$, $t\ge t_0$, 可得

$$\begin{aligned}|(Pu_1-Pu_2)(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)(f(\tau,u_1(\tau))-f(\tau,u_2(\tau)))\Delta\tau\right|\\&\le\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\|u_1-u_2\|\Delta\tau\le\ell\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

从而 P 是一个压缩映射, 于是在 S_1 内有唯一一个不动点. 这意味着 (3.1) 有唯一一个解在 S_1 中, 即对于任意 $\alpha_1>0$ 和 $t_0\in\mathbb{T}^+$, 存在常数 $\beta_1(\alpha_1)>0$ 使得对于任意 $|x_0|\le\alpha_1$. (3.1) 的解满足

$$|x(t,x_0,t_0)|<\beta_1,\ \ t\ge t_0,$$

即, (3.1) 的解是一致有界的. 定理证毕.

定理3.3. 假设定理 3.2 中的条件 (i) 和 (ii) 成立。则 (3.1) 的解对于界 β_2 是一致最终有界的，其中 $\beta_2=\dfrac{M}{1-\ell}+c$, c 是任意一个正常数。

证明. 根据定理 3.2, 对于任意 $\alpha_2>0$ 和 $t_0\geq\varsigma$, 存在常数 $\beta_1(\alpha_2)>0$ 使得对于任意 $t\geq t_0$, 当 $|x_0|\leq\alpha_2$ 时, 有 $|x(t,x_0,t_0)|<\beta_1$。为了获得结论，定义

$$S_2=\left\{u\in C_{\rm rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})\;\middle|\;\begin{array}{l} u(t_0)=x_0,\ |x_0|\leq\alpha_2,\ |u(t)|<\beta_1,\ t\geq t_0,\\ \rho(u(t),B(0,\beta_3))\to 0,\ \ t\to\infty. \end{array}\right\},$$

其中 $\beta_3=\dfrac{M}{1-\ell}(<\beta_1)$, $B(0,\beta_3)$ 是一个以 0 为中心，β_3 为半径的一个球。则当定义度量 $d(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|=\sup\limits_{t\in[t_0,\infty)}|u_1(t)-u_2(t)|$ 时，S_2 是一个完备的度量空间。

对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $u\in S_2$, 存在一个 T_1 使得对于任意 $t\geq T_1$, $|u(t)|<\beta_3+\dfrac{\varepsilon}{2}$。由条件 (ii) 可推出对于充分大的 $T_2>T_1$，有

$$\alpha_2e_{\ominus a}(t,t_0)<\frac{\varepsilon}{4}\quad\text{和}\quad\beta_1\ell e_{\ominus a}(t,T_1)<\frac{\varepsilon}{4},\ \ t\geq T_2.$$

对于 $u\in S_2$, 考虑

$$Z_u(t)=e_{\ominus a}(t,t_0)u(t_0)+\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)f(\tau,u(\tau))\Delta\tau.$$

显然, $Z_u(t_0)=u(t_0)=x_0$ 和 $Z_u(t)\in C_{\rm rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$。而且，类似于定理 3.2 的证明，得到对于任意 $t\geq t_0$, $|Z_u(t)|<\beta_1$, 若 $t\geq T_2$, 则

$$\begin{aligned}
|Z_u(t)|&\leq e_{\ominus a}(t,t_0)|u(t_0)|+\left|\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)f(\tau,u(\tau))\Delta\tau\right|\\
&=e_{\ominus a}(t,t_0)|u(t_0)|+\int_{t_0}^{T_1}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)|u(\tau)|\Delta\tau\\
&\quad+\int_{T_1}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)|u(\tau)|\Delta\tau+\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)|f(\tau,0)|\Delta\tau\\
&\leq\frac{\varepsilon}{4}+\beta_1e_{\ominus a}(t,T_1)\int_{t_0}^{T_1}e_{\ominus a}(T_1,\tau)b(\tau)\Delta\tau\\
&\quad+(\beta_3+\frac{\varepsilon}{2})\int_{T_1}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\Delta\tau+\beta_3(1-\ell)\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+\beta_1\ell e_{\ominus a}(t,T_1)+(\beta_3+\frac{\varepsilon}{2})\ell+\beta_3(1-\ell)\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\beta_3+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon+\beta_3.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得

$$\rho(Z_u(t),B(0,\beta_3))\to 0,\quad t\to\infty.$$

现在定义一个映射 $P: S_2 \to S_2$ 为 $(Pu)(t) = Z_u(t)$。通过与定理 3.2 类似的讨论，可推知 P 是一个压缩映射，于是 P 有唯一的不动点在 S_2 中，它是 (3.1) 的一个解。因此, 对于任意固定的常数 c, 我们能够选择 $\beta_2 = \beta_3 + c$ 做为一致最终有界的界。定理证毕。

定理3.4. 假设

(i) $\liminf\limits_{t\to\infty} \int_{\vartheta}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau > -\infty$ 和对于任意 $t \in \mathbb{T}$, 有 $f(t,0) = 0$;

(ii) 存在一个函数 $b: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ 和常数 $N > 0$ 使得

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le b(t)|x_1 - x_2|, \quad |x_1|, |x_2| \le N, t \in \mathbb{T};$$

(iii) 存在一个常数 $0 < \ell < 1$ 使得

$$\int_{\vartheta}^{t} e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\Delta\tau \le \ell, \quad t \ge \vartheta.$$

则 (3.1) 的零解是一致渐近稳定的充要条件是

$$\text{(iv)} \qquad \int_{\vartheta}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau \to \infty, \quad t \to \infty.$$

证明. (充分性) 若条件 (iv) 成立, 则存在一个常数 $b_2 > 0$ 使得对于每个固定的 $t_0 \ge \vartheta$, $\forall t \ge t_0$, 有 $|e_{\ominus a}(t,t_0)| \le b_2$。现在, 选择一个常数 $\delta_1 > 0$ 使得 $\delta_1 b_2 + \ell N \le N$。对于任意 $|x_0| \le \delta_1$, 定义

$$S_3 = \{u \in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})|, u(t_0) = x_0, \forall t \ge t_0, |u(t)| \le N, \text{当 } t \to \infty \text{ 时}, u(t) \to 0,\}.$$

易证当定义度量 $d(u_1,u_2) = \|u_1 - u_2\| = \sup\limits_{t\in[t_0,\infty)} |u_1(t) - u_2(t)|$ 时, S_3 是一个完备的度量空间。

对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $u \in S_3$, 可以找到一个 $T_3 > t_0$ 使得对于任意 $t \ge T_3$, $|u(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$。由条件 (iv) 可推得存在一个 $T_4 > T_3$, 有

$$\delta_1 e_{\ominus a}(t,t_0) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{和} \quad N\ell e_{\ominus a}(t,T_3) < \frac{\varepsilon}{3}, \ t \ge T_4.$$

定义

$$Z_u(t) = e_{\ominus a}(t,t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(t,\tau)f(\tau,u(\tau))\Delta\tau,$$

则 $Z_u(t_0)=u(t_0)=x_0$ 和 $Z_u(t)\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$。若 $t\geq T_4$, 则可求出

$$\begin{aligned}|Z_u(t)| &\leq e_{\ominus a}(t,t_0)|u(t_0)|+\left|\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)f(\tau,u(\tau))\Delta\tau\right|\\ &= e_{\ominus a}(t,t_0)|u(t_0)|+\int_{t_0}^{T_3}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)|u(\tau)|\Delta\tau+\int_{T_3}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)|u(\tau)|\Delta\tau\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+Ne_{\ominus a}(t,T_3)\int_{t_0}^{T_3}e_{\ominus a}(T_3,\tau)b(\tau)\Delta\tau+\frac{\varepsilon}{3}\int_{T_3}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\Delta\tau\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+N\ell e_{\ominus a}(t,T_3)+\frac{\varepsilon}{3}\ell\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

定义一个映射 $P:S_3\to S_3$ 为 $(Pu)(t)=Z_u(t)$, 则 P 是一个压缩映射。这样 P 有唯一一个不动点在 S_3 内, 它是 (3.1) 的一个解且满足当 $t\to\infty$ 时, 有 $x(t)=x(t,t_0,x_0)\to 0$。

现在证明 (3.1) 的零解是稳定的。对于任意 $\varepsilon>0(\varepsilon<b_2)$, 选择常数 $\delta_2>0(\delta_2<\varepsilon)$ 使得 $\delta_2b_2+\ell\varepsilon<\varepsilon$。为了获得结论，将证明对于任意 $t\geq t_0$，当 $|x_0|<\delta_2$ 时，有 $|x(t,x_0,t_0)|<\varepsilon$。假设存在一个 $t^*>t_0$ 使得 $|x(t^*)|=\varepsilon$ 且对于 $t_0\leq\tau<t^*$，有 $|x(\tau)|<\varepsilon$。根据定理 3.1, (3.1) 的解能够表示为

$$x(t)=e_{\ominus a}(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)f(\tau,x(\tau))\Delta\tau. \tag{3.4}$$

因此,

$$\begin{aligned}|x(t^*)| &\leq \delta_2 e_{\ominus a}(t^*,t_0)+\int_{t_0}^{t^*}e_{\ominus a}(t^*,\tau)b(\tau)|x(\tau)|\Delta\tau\\ &\leq \delta_2b_2+\ell\varepsilon<\varepsilon,\end{aligned}$$

这与 t^* 的定义相矛盾，这说明 (3.1) 的零解是稳定的。因此, 若 (iv) 成立, 则 (3.1) 的零解是渐近稳定的。

(必要性) 若 (iv) 不成立, 则存在一个序列 $\{t_n\}(t_n\to\infty,\ n\to\infty)$ 和某个实数 m_1 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\vartheta}^{t_n}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau=m_1.$$

由此可推得存在一个正常数 L 使得

$$\left|\int_{\vartheta}^{t_n}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau\right|\leq L,\quad e_a(t_n,\vartheta)\leq e^L,\quad n=1,2,\cdots.$$

因此, 由条件 (iii) 可知

$$\int_{\vartheta}^{t_n} e_a(\tau,\vartheta)b(\tau)\Delta\tau = \int_{\vartheta}^{t_n} e_a(t_n,\vartheta)e_{\ominus a}(t_n,\tau)b(\tau)\Delta\tau \le \ell e_a(t_n,\vartheta) \le e^L.$$

这意味着存在一个收敛的子序列，不失一般性，仍假设为 $\{t_n\}$ 使得对于某个常数 m_2，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\vartheta}^{t_n} e_a(\tau,\vartheta)b(\tau)\Delta\tau = m_2.$$

这样能够找到一个充分大的 k^* 使得

$$\int_{t_{k^*}}^{t_n} e_a(\tau,\vartheta)b(\tau)\Delta\tau < \frac{1-\ell}{2Q^2},\quad n\ge k^*,$$

其中 $Q=\sup\limits_{t\ge\varsigma} e_{\ominus a}(t,\varsigma)$。因为 (3.1) 的零解是渐近稳定的，所以对于给定的一个实数 $B>0$, 存在常数 $\delta_0>0(\delta_0<B)$ 使得

$$|x(t,x(t_{k^*}),t_{k^*})|<B,\quad t\ge t_{k^*},\quad |x(t_{k^*})|=\delta_0.$$

对于任意 $t\ge t_{k^*}$, 有

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le x(t_{k^*})e_{\ominus a}(t_n,t_{k^*}) + \int_{t_{k^*}}^{t} e_{\ominus a}(t,\tau)|f(\tau,x(\tau))|\Delta\tau\\ &\le \delta_0 Q + \ell\sup_{t\ge t_{k^*}}|x(t)|.\end{aligned}$$

这说明对于 $\forall t\ge t_{k^*}$, 有 $|x(t)|\le \dfrac{\delta_0 Q}{1-\ell}$。同时, 也可推出

$$\begin{aligned}|x(t_n)| &\ge \delta_0 e_{\ominus a}(t_n,t_{k^*}) - \int_{t_{k^*}}^{t_n} e_{\ominus a}(t_n,\tau)b(\tau)|x(\tau)|\Delta\tau\\ &\ge \delta_0 e_{\ominus a}(t_n,t_{k^*}) - \frac{\delta_0 Q}{1-\ell}e_{\ominus a}(t_n,\vartheta)\int_{t_{k^*}}^{t_n} e_a(\tau,\vartheta)b(\tau)\Delta\tau\\ &\ge e_{\ominus a}(t_n,t_{k^*})\left[\delta_0 - \frac{\delta_0 Q}{1-\ell}Q\int_{t_{k^*}}^{t_n} e_a(\tau,\vartheta)b(\tau)\Delta\tau\right]\\ &\ge \frac{1}{2}\delta_0 e_{\ominus a}(t_n,t_{k^*}) \ge \frac{1}{2}\delta_0 e^{-2L},\ n\ge k^*.\end{aligned}$$

这说明当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\nrightarrow 0$，这显然是一个矛盾。也就说，(iv) 是 (3.1) 零解渐近稳定的必要条件。定理证毕。

下面, 利用压缩映像原理，考虑 (3.1) 周期解的存在性和稳定性。因此, 假定时标 $\mathbb{T}$ 是 ω- 周期的, 即 $t\in\mathbb{T}$ 意味着 $t\pm\omega\in\mathbb{T}$。同时，假定 $a(t), f(t,x)$ 都是 ω 周期函数。

定理3.5. 假设定理3.4中的条件(ii), (iii) 和 (iv) 成立。而且,

$$\text{(v)} \quad A\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} b(\tau)\Delta\tau < 1,$$

其中 $A = \dfrac{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)}{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)-1}$。则 (3.1) 有唯一一个渐近稳定的周期解。

证明. 若 $x(t)$ 是 (3.1) 的 ω 周期解,则通过与引理 2.3 类似的证明,有

$$x(t) = \int_t^{t+\omega} \frac{e_a(\tau,t)}{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)-1} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau.$$

现在,定义

$$S_4 = \{u \in C(\mathbb{T},\mathbb{R}) |\ u(t+\omega) = u(t),\ \forall t \in \mathbb{T}\}, \quad \|u\| = \max_{t\in I_\omega} |u(t)|,\ u \in S_4.$$

能够证得 $(S_4, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。定义一个映射 T 如下:

$$Tu(t) = \int_t^{t+\omega} \frac{e_a(\tau,t)}{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)-1} f(\tau, u(\tau))\Delta\tau.$$

显然, $T: S_4 \to S_4$。同时, $\forall u_1, u_2 \in S_4$,得到

$$\begin{aligned}
|Tu_1(\tau) - Tu_2(\tau)| &= \int_t^{t+\omega} \frac{e_a(\tau,t)}{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)-1} |f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_2(\tau))|\Delta\tau \\
&\le A\int_t^{t+\omega} b(\tau)|u_1(\tau)-u_2(\tau)|\Delta\tau \\
&\le A\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega} b(\tau)\Delta\tau \|u_1-u_2\|.
\end{aligned}$$

由此可得 T 是一个压缩映射且有唯一一个不动点在 S_4 中,从而它是 (3.1) 唯一一个周期解。利用与定理 3.4 相似的讨论,容易推出这个周期解是渐近稳定的。因此, (3.1) 有唯一一个渐近稳定的周期解。定理证毕。

§3.3 应 用

作为这一章主要定理的应用，考虑一些时标动力学方程. 当时标是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Z}$ 时，它们可以包含一些在实际中广泛应用的数学模型.

例3.1. *考虑自治时标动力学方程*

$$x^{\Delta}(t) = -rx(\sigma(t)) + \eta e^{-\gamma x(t)} \tag{3.5}$$

其中 r, η, γ 都是正常数，并且 (3.5) 的初始值是正的.

定理3.6. *若 $\eta\gamma < r$，则 (3.5) 的解是一致有界的，并且也是一致最终有界的.*

证明. 根据定理 3.1, 能够得到 (3.5) 的解对于正的初始条件总是正的. 显然, $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\vartheta}^{t}\xi_{\mu(\tau)}(r)\Delta\tau = \infty$ 且对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, 有 $|\eta e^{-\gamma x_1} - \eta e^{-\gamma x_2}| \le \eta\gamma|x_1 - x_2|$. 而且,

$$\eta\gamma\int_{\vartheta}^{t} e_{\ominus r}(t,\tau)\Delta\tau = \frac{\eta\gamma}{r}(1 - e_{\ominus r}(t,\vartheta)) < \frac{\eta\gamma}{r} < 1,\quad \eta\int_{\vartheta}^{t} e_{\ominus r}(t,\tau)\Delta\tau \le \frac{\eta}{r},\quad t \ge \vartheta.$$

由定理 3.2 和定理 3.3 可推出 (3.5) 的解是一致有界的，并且也是一致最终有界的.

注3.1. *令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$，则 (3.5) 能够退化为没有时滞的连续或离散的 Lasota-Wazewska 模型. 这类模型在微分方程 [131, 132] 和差分方程 [133] 中已经被广泛地研究.*

例3.2. *考虑非自治时标动力学方程*

$$x^{\Delta}(t) = -a(t)x(\sigma(t)) + b(t), \tag{3.6}$$

其中 $a, b \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ 和 b 是有界的.

(3.6) 包含了一些单种群模型作为特例. 例如，若令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 和 $x(t) = 1/N(t)$，则 (3.6) 就变为 Verhulst Logistic 方程 [1]

$$\dot{N}(t) = N(t)(a(t) - b(t)N(t)).$$

若 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 和 $x(t) = 1/N(t)$，则 (3.6) 能够退化为 Beverton-Holt 方程 [134, 135].

$$N(t+1) = \frac{(1 + a(t))N(t)}{1 + b(t)N(t)}.$$

若 $b(t) = a(t)\ln(c(t))$ 和 $x(t) = \ln(N(t))$，对于 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$，则 (3.6) 退化为连续的 Gompertz 单种群模型 [136, 137]

$$\dot{N}(t) = a(t)N(t)\ln(c(t)/N(t)),$$

对于 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$，为离散的 Gompertz 单种群模型 [1]

$$N(t+1)=N(t)^{\frac{1}{1+a(t)}}c(t)^{\frac{a(t)}{1+a(t)}}.$$

应用这一章获得的定理，可以推知

定理3.7. 若 $\bar{a}=\inf\limits_{t\in\mathbb{T}}(a(t))>0$，则 (3.6) 的解是一致有界和一致最终有界的。而且，若 a,b 是 ω- 周期的，则 (3.6) 存在唯一一个渐近稳定的周期解为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\Delta\tau.$$

例3.3. 考虑时标方程

$$x^{\Delta}(t)=-a(t)x(\sigma(t))+\frac{b(t)}{1+x^2(t)}, \tag{3.7}$$

其中 $a,b\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$ 且 b 在 $\mathbb{T}$ 上是有界的。当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 时，(3.7) 是生理控制系统的一个特殊情况 [138, 139]。

定理3.8. 令 $\bar{a}=\inf\limits_{t\in\mathbb{T}}(a(t))>0$ 和 $\|b\|=\sup\limits_{t\in\mathbb{T}}(b(t))$。若 $\|b\|<\bar{a}$，则 (3.7) 的解是一致有界和一致最终有界的。

证明. 显然可得

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\vartheta}^{t}\xi_{\mu(\tau)}(a(\tau))\Delta\tau=\infty.$$

对于 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$，可得

$$\left|\frac{1}{1+x_1^2}-\frac{1}{1+x_2^2}\right|\le|x_1-x_2|.$$

此外，对于任意 $t\ge\vartheta$，有

$$\int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus a}(t,\tau)b(\tau)\Delta\tau=\frac{\|b\|}{\bar{a}}(1-e_{\ominus a}(t,\vartheta))<\frac{\|b\|}{\bar{a}}<1.$$

由定理 3.2 和定理 3.3 可推得 (3.7) 的解是一致有界和一致最终有界的。

根据定理 3.5，容易得到

定理3.9. 假设 a,b 都是 ω- 周期的且定理3.8的条件成立。若

$$\frac{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)}{e_a(\vartheta+\omega,\vartheta)-1}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}b(\tau)\Delta\tau<1,$$

则 (3.7) 有唯一一个渐近稳定的周期解。

例3.4. *考虑时标动力学方程*

$$x^{\Delta}(t) = -a(t)x(\sigma(t)) + b(t)\tanh(x(t)) + \gamma(t) \tag{3.8}$$

其中 $a, b, \gamma \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{+})$, b, r 在 $\mathbb{T}$ 上都是有界的.

当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时, (3.8) 可以退化为带有扩散的单个人工神经元系统 [136, 140]. 对于 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 可推得 $|\tanh(x_1) - \tanh(x_2)| \le |x_1 - x_2|$. 应用定理 3.2, 定理 3.3 和定理 3.5 到 (3.8) 上, 能够推出对于 (3.8), 有定理3.8 和定理3.9 成立.

第四章 指数型二分性和高维时标动力学方程周期解存在性

§4.1 引 言

众所周知，指数型二分性理论是自治线性系统的双曲率概念在非自治线性系统的推广，并且在非自治动力系统分析中占有重要的地位. 线性微分方程的指数型二分性理论最早可以追溯到 Perron[141] 利用指数型二分性研究了线性系统的稳定性问题. 此后，指数型二分性理论受到各国学者的关注并且被广泛地应用到微分方程的研究当中，例如 Bellman[142], Massera-Schäffer[143], Sacker-Sell[144], Coppel[145, 146], Chow[147, 148] 等. 在 1934 年，Li[149] 首先建立了差分动力系统的指数型二分性理论. 其后，一些学者详细探讨了指数型二分性在差分方程研究中的重要作用，获得了许多重要的结论 [85, 150, 151, 152, 153, 154, 155].

在上个世纪，指数型二分性已经成为讨论经典的非自治连续或者离散动力系统的一种非常重要的方法. 指数型二分性在非自治动力系统研究中的重要作用主要体现在它是考虑线性系统的非线性扰动问题的一个强有力的工具, 如积分流形的持久性等. 除了稳定性外，指数型二分性理论还被应用到周期解 [79, 80], 概周期解 [79, 81, 82, 83], 伪概周期解 [83, 84], 混沌理论 [85, 86, 87] 等研究之中. 因此，指数型二分性在理论研究和实际应用中都具有重要的意义.

高维时标动力学方程周期解，一直是一个很困难的领域. 一些学者已经利用 Krasnosel'skii 不动点定理 [156, 157, 158], 非线性 Leray–Schauder 选择性定理 [159], 有界解 [160] 等方法，在这方面进行了初步的探讨. 但是，所得结论往往不能令人满意. 近来，线性微分方程和差分方程上的指数型二分性理论已经被 Pötzsche 统一在时标动力学方程上进行研究 [88, 89]. 鉴于指数型二分性的重要作用，本章将利用指数型二分性来研究高维时标动力学方程周期解的存在性.

此外，虽然关于时标动力学方程指数型二分性已经获得了一些结论，但是指数型二分性还有许多基本理论工作没有完成，其中，最重要的就是指数型二分性的粗糙度理论，即如果一个线性系统具有指数型二分性，那么这个线性系统的所有邻域系统是否具有相似的指数型二分性. 指数型二分性的粗糙度理论首先被 Massera-Schäffer[143] 证明是正确的. 此后在连续和离散动力系统中被详尽的研究和广泛的讨论 [145, 147, 161, 162, 163, 164]. 因此，本章将在时标动力学方程中讨论这方面的问题.

关于时标上指数型二分性的其它一些性质也没有被研究，如，Liapunov 函数是研究稳定性理论的一种重要的方法，指数型二分性也是讨论稳定性问题一个主要的工具，Liapunov 函数与指数型二分性之间在微分方程和差分方程中已经被证明存在着密切的联系．同时在微分方程研究中，已经证明非齐次线性微分方程的一个有界解暗示齐次线性微分方程存在指数型二分性，特别是利用行占优 (列占优) 给出线性系统指数型二分性存在的判别准则，但是这些性质在时标动力学方程中并没有被详细的讨论．因此，有必要对时标动力学方程在这些方面进行系统的研究和广泛的探讨．

这一章结构安排如下，在 4.2 和 4.3 节中，主要定义线性时标动力学方程指数型二分性，探讨一些基本的性质，建立线性时标动力学方程指数型二分性存在的充分必要条件．将在 4.4 节中，讨论指数型二分性的粗糙度理论．在 4.5 节中，利用行占优 (列占优) 等条件建立线性时标动力学方程指数型二分性存在的判别准则．最后，基于线性时标动力学方程指数型二分性，在 4.6 节讨论高维时标动力学方程周期解的存在性问题．

§4.2 指数型二分性的定义

考虑下面的线性时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \tag{4.1}$$

这里, $A(t) \in \mathcal{R}$ 是 $\mathbb{T}$ 上一个 $n \times n$ 阶矩阵函数.

现在给出线性时标动力学方程指数型二分性的定义:

定义4.1. *如果存在投影 P $(P^2 = P)$ 和正常数 K_i, α_i, $i = 1, 2$ 对于 (4.1) 的基本解矩阵 $X(t)$, 满足*

$$\begin{aligned} &|X(t)PX^{-1}(s)| \le K_1 e_{\ominus\alpha_1}(t, s), && t \ge s, \\ &|X(t)(I - P)X^{-1}(s)| \le K_2 e_{\ominus\alpha_2}(s, t), && t \le s. \end{aligned} \tag{4.2}$$

则称 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性. 如果 (4.2) 中 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 则称 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足通常二分性.

注4.1. *若令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, 定义 4.1 与经典的线性微分方程指数型二分性定义相一致* [146]. *若令 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, 则能够转化为线性差分方程的指数型二分性* [153, 154].

$$\begin{aligned} &|X(t)PX^{-1}(s)| \le K_1 \left(\frac{1}{1+\alpha_1}\right)^{t-s}, && t \ge s, \\ &|X(t)(I - P)X^{-1}(s)| \le K_2 \left(\frac{1}{1+\alpha_2}\right)^{s-t}, && t \le s. \end{aligned}$$

若选择一个恰当的基本解矩阵 $X(t)$, 则投影 P 和 $I - P$ 能够分别写成下面的形式

$$I_{k0} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{0(n-k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

这里, I_k 是一个 $k \times k$ 阶单位矩阵, I_{n-k} 是一个 $(n-k) \times (n-k)$ 阶单位矩阵. 实际上, 一定存在一个非奇异的矩阵 T 使得 $P = TI_{k0}T^{-1}$, 那么 (4.2) 变为下面的形式

$$\begin{aligned} &|X(t)TI_{k0}T^{-1}X^{-1}(s)| \le K_1 e_{\ominus\alpha_1}(t, s), && t \ge s, \\ &|X(t)TI_{0(n-k)}T^{-1}X^{-1}(s)| \le K_2 e_{\ominus\alpha_2}(s, t), && t \le s. \end{aligned}$$

设 $X_0(t) = X(t)T$. 显然, $X_0(t)$ 也是一个基本解矩阵.

此外, 也能够得到下面的结论: 若 $\chi = \sup\limits_{t\in\mathbb{T}} \mu(t) > 0$, 则对于任意的 $x \in (0, \chi]$ 且 $\alpha > 0$, $f_1(x) := \frac{1}{x} log\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)$ 是一个严格增函数且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = -\alpha$, 而 $f_2(x) :=$

$\frac{1}{x}log\,(1+\alpha x)$ 是一个严格的减函数且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)=\alpha$。因此，对于 $t\geq s$，我们有

$$\begin{aligned} e^{\alpha(t-s)} &\geq e_\alpha(t,s) \geq (1+\alpha\chi)^{\frac{t-s}{\lambda}}, \\ e^{-\alpha(t-s)} &\leq e_{\ominus\alpha}(t,s) \leq (\frac{1}{1+\alpha\chi})^{\frac{t-s}{\chi}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

§4.3 指数型二分性的基本性质

在这一节，主要讨论线性时标动力学方程指数型二分性的一些基本性质.

§4.3.1 指数型二分性存在的充要条件

定理4.1. (4.1) 具有指数型二分性的充要条件是 $P(t)=X(t)PX^{-1}(t)$ 是一致有界的且存在正常数 B_i，α_i $(i=1,2)$ 使得对于任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$，有

$$\begin{aligned} &|X(t)P\xi|\le B_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|X(s)P\xi|, && t\ge s,\\ &|X(t)(I-P)\xi|\le B_2e_{\ominus\alpha_2}(s,t)|X(s)(I-P)\xi|, && t\le s. \end{aligned}\tag{4.4}$$

证明. (必要性) 若 (4.1) 满足指数型二分性，则当 $s=t$ 时，$P(t)$ 显然是一致有界的. 对于任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有能够得到

$$|X(t)P\xi|\le|X(t)PX^{-1}(s)X(s)P\xi|\le K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|X(s)P\xi|,\quad t\ge s,$$

和

$$|X(t)(I-P)\xi|\le K_2e_{\ominus\alpha_2}(s,t)|X(s)(I-P)\xi|,\quad t\le s.$$

(充分性) 因为 $P(t)$ 是一致有界的，所以存在 $N_0>0$ 使得

$$|P(t)|\le N_0,\quad |I-P(t)|\le N_0+1.$$

在 (4.4) 中，设 $\xi=X^{-1}(s)x_0$, 则对于任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)x_0|&\le B_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|X(s)PX^{-1}(s)x_0|\\ &\le N_0B_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|x_0|,\quad t\ge s. \end{aligned}$$

由于 x_0 是任意的, 由此推知

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\le K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s),\quad t\ge s,$$

这里 $K_1=N_0B_1$。通过相似的证明, 有

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|\le K_2e_{\ominus\alpha_2}(s,t),\quad t\le s,$$

这里 $K_2=(N_0+1)B_2$。

定理4.2. 假设下面的条件成立：

(i) 存在正常数 B_i, α_i $(i=1,2)$ 使得对于任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}&|X(t)P\xi|\le B_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|X(s)P\xi|, && t\ge s,\\ &|X(t)(I-P)\xi|\le B_2e_{\ominus\alpha_2}(s,t)|X(s)(I-P)\xi|, && t\le s.\end{aligned}\tag{4.5}$$

(ii) (4.1) 是有界增长的, 即存在正常数 $C\ge 1$, $\beta>0$ 使得

$$|X(t)X^{-1}(s)|\le Ce_\beta(t,s),\quad t\ge s.\tag{4.6}$$

则 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性.

证明. 根据定理 4.1, 只需要证明 $P(t)=X(t)PX^{-1}(t)$, $I-P(t)$ 都是一致有界的.

当 $P=0$ 或 $P=I$, 结论显然成立. 因此, 我们假设 $P\neq 0$ 且 $P\neq I$. 对于任意 $t\in\mathbb{T}, h>0, t+h\in\mathbb{T}$, 由 (4.5) 知

$$\begin{aligned}|X(t+h)PX^{-1}(t)|&\le B_1e_{\ominus\alpha_1}(t+h,t)|X(t)PX^{-1}(t)|\\&=B_1e_{\ominus\alpha_1}(t+h,t)|P(t)|,\\|X(t+h)(I-P)X^{-1}(t)|&\ge B_2^{-1}e_{\alpha_2}(t+h,t)|X(t)(I-P)X^{-1}(t)|\\&=B_2^{-1}e_{\alpha_2}(t+h,t)|I-P(t)|.\end{aligned}$$

若 $\chi=0$, 则选取 $h_1>0$ 使得

$$\begin{aligned}B_2^{-1}e_{\alpha_2}(t+h_1,t)-B_1e_{\ominus\alpha_1}(t+h_1,t)=&B_2^{-1}e^{\alpha_2h_1}-B_1e^{-\alpha_1h_1}\\\ge&\gamma_1>0.\end{aligned}$$

若 $\chi>0$, 由 (4.3) 选取 $h_2>0$ 使得

$$\begin{aligned}B_2^{-1}e_{\alpha_2}(t+h_2,t)-B_1e_{\ominus\alpha_1}(t+h_2,t)\ge&B_2^{-1}(1+\alpha_2\chi)^{\frac{h_2}{\chi}}-B_1\left(\frac{1}{1+\alpha_1\chi}\right)^{\frac{h_2}{\chi}}\\\ge&\gamma_2>0.\end{aligned}$$

设 $h_0=\max\{h_1,h_2\}$ 和 $\gamma_0=\min\{\gamma_1,\gamma_2\}>0$。有

$$\left|\frac{X(t+h_0)(I-P)X^{-1}(t)}{|I-P(t)|}+\frac{X(t+h_0)PX^{-1}(t)}{|P(t)|}\right|\ge\gamma_0.$$

对于上面的 h_0，由 (4.6) 可推出

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(t)}{|P(t)|}+\frac{I-P(t)}{|I-P(t)|}\right| &= \left|X(t)X^{-1}(t+h_0)\left[\frac{X(t+h_0)(I-P)X^{-1}(t)}{|I-P(t)|}\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{X(t+h_0)PX^{-1}(t)}{|P(t)|}\right]\right|\\ &\geq \frac{\gamma_0}{C}e_{\ominus\beta}(t+h_0,t)\\ &\geq \frac{\gamma_0}{C}e^{-\beta h_0}:=N>0,\end{aligned}$$

因此,

$$\min\left\{\left|\frac{P(t)}{|P(t)|}+\frac{I-P(t)}{|I-P(t)|}\right|\right\}\geq N>0, t\in\mathbb{T}.$$

利用不等式

$$\left|\frac{\xi_1}{|\xi_1|}+\frac{\xi_2}{|\xi_2|}\right|\cdot\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}\leq 2|\xi_1+\xi_2|,\quad \xi_1\neq 0,\ \xi_2\neq 0,$$

得到

$$\max\{|P(t)|,|I-P(t)|\}\leq\frac{2}{N}|P(t)+[I-P(t)]|=\frac{2}{N},\ t\in\mathbb{T}.$$

定理证毕.

引理4.1. 若 (4.1) 在 $[t_0,\infty)$ 上满足指数型二分性，其中 $t_0\geq\vartheta$, 则它在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性且具有相同的投影 P 和指数估计 α_1,α_2.

证明. 选取 $L_0\geq 1$ 使得 $L_0\geq e_{|A|}(t_0,\vartheta)$, 则对于 $\vartheta\leq s,t\leq t_0$, 得到 $|X(t)X^{-1}(s)|\leq L_0$. 若 $\vartheta\leq s\leq t_0\leq t$, 则容易推出

$$\begin{aligned}|X(t)PX^{-1}(s)| &\leq L_0|X(t)PX^{-1}(t_0)|\leq L_0K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,t_0)\\ &= L_0K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)e_{\ominus\alpha_1}(s,\vartheta)e_{\ominus\alpha_1}(\vartheta,t_0)\\ &\leq L_0K_1e_{\alpha_1}(t_0,\vartheta)e_{\ominus\alpha_1}(t,s).\end{aligned}$$

若 $\vartheta\leq s\leq t\leq t_0$, 则有

$$\begin{aligned}|X(t)PX^{-1}(s)| &\leq L_0^2|X(t_0)PX^{-1}(t_0)|\leq L_0^2K_1\leq L_0^2K_1e_{\alpha_1}(t_0,t)\\ &= C_0^2K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)e_{\ominus\alpha_1}(s,\vartheta)e_{\ominus\alpha_1}(\vartheta,t_0)\\ &\leq L_0^2K_1e_{\alpha_1}(t_0,\vartheta)e_{\ominus\alpha_1}(t,s).\end{aligned}$$

因此, 对于 $\vartheta\leq s\leq t$, 能够得到

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\leq K_1^*e_{\ominus\alpha_1}(t,s),$$

其中，$K_1^* = L_0^2 K_1 e_{\alpha_1}(t_0, \vartheta)$。对于 $\vartheta \le t \le s$，类似讨论可推出

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \le K_2^* e_{\ominus\alpha_2}(s,t),$$

其中，$K_2^* = L_0^2 K_2 e_{\alpha_2}(t_0, \vartheta)$。

定理4.3. 假设 $A(t)$ 是一致有界的，(4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性的充要条件是存在正常数 $0 < \theta < 1, T > 0$ 使得 (4.1) 的任意一个解对于 $t \ge T$ 满足

$$|x(t)| \le \theta \sup_{|\tau - t| \le T} |x(\tau)|. \tag{4.7}$$

证明. (必要性) 若 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性，则由定理 4.1 知 (4.4) 在 $\mathbb{T}^+$ 上成立。设 $x(t)$ 是 (4.1) 的任意一个解，并且

$$x_1(t) = X(t)PX^{-1}(t)x(t), \quad x_2(t) = X(t)(I-P)X^{-1}(t)x(t).$$

因此，我们有

$$x(t) = X(t)PX^{-1}(s)x_1(s) + X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s).$$

考虑下面两种情况：

情况 1. 若 $|x_2(s)| \ge |x_1(s)|$，则对于 $t \ge s$，有

$$|x(t)| \ge |X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)| - |X(t)PX^{-1}(s)x_1(s)|.$$

由 (4.4) 的第二个不等式，对于 $t \ge s \ge \vartheta$，易知

$$|X(t)(I-P)\xi| \ge B_2^{-1}|X(s)(I-P)\xi| e_{\alpha_2}(t,s).$$

对于 $t \ge s \ge \vartheta$，选取 $\xi = X^{-1}(s)x_2(s)$，可推出

$$\begin{aligned} |X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)| &\ge B_2^{-1}|X(s)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)| e_{\alpha_2}(t,s) \\ &= B_2^{-1}|x_2(s)| e_{\alpha_2}(t,s). \end{aligned}$$

对于充分大的 t，有

$$\begin{aligned} |x(t)| &\ge B_2^{-1} e_{\alpha_2}(t,s)|x_2(s)| - B_1 e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|x_1(s)| \\ &\ge (B_2^{-1} e_{\alpha_2}(t,s) - B_1 e_{\ominus\alpha_1}(t,s))|x_2(s)| \\ &\ge \frac{1}{2}(B_2^{-1} e_{\alpha_2}(t,s) - B_1 e_{\ominus\alpha_1}(t,s))|x(s)|. \end{aligned}$$

情况 2. 若 $|x_1(s)| \geq |x_2(s)|$, 类似于情况 1 推知, 对于 $s \geq t \geq \vartheta$, 有

$$|x(t)| \geq \frac{1}{2}(B_1^{-1}e_{\alpha_1}(s,t) - B_2 e_{\ominus\alpha_2}(s,t))|x(s)|.$$

因此, 根据 (4.3), 对于 $\chi = 0$, 能够选取 $T_1 > 0$ 和 $0 < \theta_1 < 1$ 使得

$$B_2^{-1}e^{\alpha_2 T_1} - B_1 e^{-\alpha_1 T_1} \geq 2\theta_1^{-1},$$
$$B_1^{-1}e^{\alpha_1 T_1} - B_2 e^{-\alpha_2 T_1} \geq 2\theta_1^{-1}.$$

对于 $\chi > 0$, 选取 $T_2 > 0$ 和 $0 < \theta_2 < 1$ 使得

$$B_2^{-1}(1+\alpha_2\chi)^{\frac{T_2}{\chi}} - B_1\left(\frac{1}{1+\alpha_1\chi}\right)^{\frac{T_2}{\chi}} \geq 2\theta_2^{-1},$$
$$B_1^{-1}(1+\alpha_1\chi)^{\frac{T_2}{\chi}} - B_2\left(\frac{1}{1+\alpha_2\chi}\right)^{\frac{T_2}{\chi}} \geq 2\theta_2^{-1}.$$

令 $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$ 且 $T = \max\{T_1, T_2\}$, 对于 $t \geq T$, 易证

$$|x(t)| \leq \theta \sup_{|\tau - t| \leq T} |x(\tau)|.$$

(充分性) 假设 (4.7) 成立. 首先证明存在常数 $c > 1$ 使得对于 $\vartheta \leq s \leq t \leq s+T$ 有 $|x(t)| \leq c|x(s)|$, 其中 $x(t)$ 是 (4.1) 的任意一个非平凡解. 因为 $A(t)$ 是一致有界的, 所以能够选取 $M > 0$ 使得对于任意 $t \in \mathbb{T}$ 有 $|A(t)| \leq M$, 并且对于 $t \geq s$, 有 $|X(t)X^{-1}(s)\xi| \leq e_M(t,s)|\xi|$。设 $\xi = X(s)\xi^*$。对于 $\vartheta \leq s \leq t \leq s+T$, 由 (4.3) 推知 $|X(t)\xi^*| \leq e^{MT}|X(s)\xi^*|$. 即, $|x(t)| \leq c|x(s)|$, 其中 $c = e^{MT}$.

假设 $x(t)$ 是 (4.1) 的一个非平凡有界解. 对于 $s \geq \vartheta$. 令 $\pi(s) = \sup\limits_{\tau \geq s}|x(\tau)|$, 容易得到

$$|x(t)| \leq \theta \sup_{|\tau - t| \leq T} |x(\tau)| \leq \theta\pi(s), \quad t \geq s+T,$$

且

$$|\pi(s)| = \sup_{s \leq \tau \leq s+T} |x(\tau)|.$$

对于 $\vartheta \leq s \leq t < \infty$, 能够得到 $|x(t)| \leq c|x(s)|$. 若 $s + nT \leq t \leq s + (n+1)T$, 则

$$|x(t)| \leq \theta^n \sup_{|\tau - t| \leq nT} |x(\tau)| \leq \theta^n c|x(s)| \leq \theta^{-1}c\theta^{\frac{1}{T}(t-s)}|x(s)|.$$

令 $K = \theta^{-1}c$ 且 $\alpha = -\frac{1}{T}\log\theta$, 由 (4.3) 推知

$$|x(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|x(s)| \leq Ke_{\ominus\alpha}(t.s)|x(s)|, \quad \vartheta \leq s \leq t < \infty.$$

类似于文献 [146] 中命题 2.1 的证明方法容易看出存在一个 $T^* > \vartheta$ 使得

$$|x(t)| \le K e_{\ominus\alpha}(s,t)|x(s)|, \quad T^* \le t \le s < \infty.$$

因为 $A(t)$ 是一致有界的，因此，(4.1) 是有界增长的。利用引理 4.1 和定理 4.2, (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性。定理证毕。

§4.3.2 指数型二分性与 Liapunov 函数

现在我们将要讨论线性时标动力学方程的指数型二分性与 Liapunov 函数之间的关系。

定理4.4. 假设 $A(t)$ 是一致有界的。(4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性的充要条件是存在一个二次型 $V(t,x) = x^T G(t) x$ 使得 $V^\Delta(t,x)|_{(4.1)}$ 是正定的，其中 $G(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ 是一个对称的，有界的正则矩阵。

证明. (必要性) 若 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性，则能够选取 $P = I_{k0}$ 和

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} |X(\tau)(I-P)X^{-1}(t)|^2 \Delta\tau - \int_{t}^{\infty} |X(\tau)PX^{-1}(t)|^2 \Delta\tau,$$

其中 $X(t)$ 是 (4.1) 的一个基本解矩阵。由此可推出

$$\begin{aligned}|G(t)| &\le \int_{-\infty}^{t} K_2^2 e_{\ominus(\alpha_2\oplus\alpha_2)}(t,\tau)\Delta\tau + \int_{t}^{\infty} K_1^2 e_{\ominus(\alpha_1\oplus\alpha_1)}(\tau,t)\Delta\tau \\ &\le \frac{K_2^2}{2\alpha_2} + \frac{K_1^2(1+\alpha_1\chi)^2}{2\alpha_1}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}G(t) &= (X^{-1})^T(t)[(I-P)\int_{-\infty}^{t} X^T(\tau)X(\tau)(I-P)\Delta\tau \\ &\quad - P\int_{t}^{\infty} X^T(\tau)X(\tau)P\Delta\tau]X^{-1}(t) \\ &= G^T(t).\end{aligned}$$

对于任意 $t \in \mathbb{T}$，易证 $\det(G(t)) \ne 0$。因此，$G(t)$ 是一个对称的，有界的正则矩阵。设 $V(t,x) = x^T G(t) x$。如果 $x(t)$ 是 (4.1) 满足初始条件 x_0 的任意一个解，那么我们有 $x(t) = X(t)X^{-1}(\vartheta)x_0$ 和

$$V(t,x(t)) = \int_{-\infty}^{t} |X(\tau)(I-P)X^{-1}(\vartheta)x_0|^2 \Delta\tau - \int_{t}^{\infty} |X(\tau)PX^{-1}(\vartheta)x_0|^2 \Delta\tau.$$

容易证明

$$\begin{aligned} V^{\Delta}(t,x(t)) &= |X(t)(I-P)X^{-1}(\vartheta)x_0|^2 + |X(t)PX^{-1}(\vartheta)x_0|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}|X(t)(I-P)X^{-1}(\vartheta)x_0 + X(t)PX^{-1}(\vartheta)x_0|^2 \\ &= \frac{1}{2}|x(t)|^2. \end{aligned}$$

这说明 $V^{\Delta}(t,x)|_{(4.1)}$ 是正定的.

(充分性) 假设 $V(t,x) = x^T G(t) x$ 满足定理 4.4 的条件, 则存在正常数 b_1, b_2 使得

$$|V(t,x)| \leq b_1^2|x|^2, \quad V^{\Delta}(t,x)|_{(4.1)} \geq (2b_1b_2 + b_2^2\mu(t))|x|^2, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{4.8}$$

令 $\lambda_i(t), i = 1, \cdots, n$ 是 $G(t)$ 的特征值。因为 $G(t)$ 是一个正则矩阵, 所以存在一个 $b_3 > 0$ 使得 $\lambda_i(t) \leq -b_3$, $i = 1, \cdots, k$, 且 $\lambda_i(t) \geq b_3$, $i = k+1, \cdots, n$, 于是能够找到 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子空间 V_1 和一个 $(n-k)$ 维子空间 V_2 使得

$$V(t,x_0) \leq -b_3|x_0|^2, x_0 \in V_1, \quad V(t,x_0) \geq b_3|x_0|^2, x_0 \in V_2, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{4.9}$$

设 $x(t,s,x(s))$ 是 (4.1) 满足初值条件 $x(s) \in V_1$ 的一个解. 若 $t \geq s$, 由 $V^{\Delta}(t,x)|_{(4.1)} > 0$ 可推知

$$V(s,x(t,s,x(s))) \leq V(t,x(t)) \leq -b_3|x(t)|^2, \quad t \geq s.$$

注意到对于 $t \geq s$ 有 $V(t,x(t,s,x(s))) \leq 0$, 则

$$\begin{aligned} V^{\Delta}(t,x(t,s,x(s))) &\geq (2b_1b_2 + b_2^2\mu(t))|x(t,s,x(s))|^2 \\ &\geq \frac{(2b_1b_2 + b_2^2\mu(t))}{b_1^2}|V(t,x(t,s,x(s))| \\ &\geq \frac{(2b_1b_2 + b_2^2\mu(t))}{(b_1 + b_2\mu(t))^2}|V(t,x(t,s,x(s))| \\ &= -\frac{2b_1b_2 + b_2^2\mu(t)}{(b_1 + b_2\mu(t))^2}V(t,x(t,s,x(s)) \\ &= \ominus\left(\frac{b_2}{b_1} \oplus \frac{b_2}{b_1}\right)V(t,x(t,s,x(s)). \end{aligned}$$

从 s 到 t 积分上面的不等式, 可推出

$$V(t,x(t,s,x(s)) \geq V(s,x(s))e_{\ominus(\frac{b_2}{b_1}\oplus\frac{b_2}{b_1})}(t,s), \quad t \geq s. \tag{4.10}$$

由 (4.8) 和 (4.9) 推知对于 $t \geq s$, 有

$$V(s,x(s)) \geq -b_1^2|x(s)|^2 \quad 且 \quad V(t,x(t)) \leq -b_3|x(t)|^2.$$

那么我们有

$$-b_3|x(t)|^2 \geq -b_1^2|x(s)|^2 e_{\ominus(\frac{b_2}{b_1}\oplus\frac{b_2}{b_1})}(t,s),\quad t\geq s.$$

令 $K=\frac{b_1}{\sqrt{b_3}}$ 和 $\alpha=\frac{b_2}{b_1}$. 对于 $t\geq s$, 易得

$$|x(t)|\leq K|x(s)|e_{\ominus\alpha}(t,s).$$

令 $X(t)$ 是 (4.1) 的一个基本解矩阵，并且选取一个序列 $\{s_m\}\subset\mathbb{T}$ 使得当 $m\to\infty$ 时，有 $s_m\to-\infty$. 定义 $U_m=X^{-1}(s_m)V_1$, 显然 U_m 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子空间. 定义 $\xi_m^1,\xi_m^2,\cdots,\xi_m^k$ 为 U_m 的一个标准正交基底. 由单位球的紧性知存在整数序列 $\{m_v\}$(当 $v\to+\infty$ 时，$m_v\to+\infty$), 和单位正交向量 $\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^k$ 使得当 $v\to+\infty$ 时，有 $\xi_{m_v}^i\to\xi^i(i=1,2,\cdots,k)$. 令 $x^j(t)$ 是 (4.1) 满足初值条件 $x^j(\vartheta)=\xi^j$, $j=1,2,\cdots,k$ 的一个解，则 $x^1(t),x^2(t),\cdots,x^k(t)$ 是线性无关的. 考虑 (4.1) 的任意一个非平凡解

$$x(t)=a_1x^1(t)+a_2x^2(t)+\cdots+a_kx^k(t),\quad a_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\cdots,k),$$

我们将证明当 $t\geq s$ 时, $|x(t)|\leq K|x(s)|e_{\ominus\alpha}(t,s)$ 成立. 若 $x_{m_v}(t)$ 是 (4.1) 的一个解且满足 $x_{m_v}(\vartheta_1)=\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\xi_{m_v}^j(t)$, 则当 $v\to+\infty$, $t\in\mathbb{T}$, 有 $x_{m_v}(t)\to x(t)$. 根据 $x_{m_v}(\vartheta_1)\in U_{m_v}$, 可以得到对于 $t\geq s\geq s_{m_v}$, 有 $x_{m_v}(s_{m_v})\in V_1$ 且 $|x_{m_v}(t)|\leq K|x_{m_v}(s)|e_{\ominus\alpha}(t,s)$ 成立. 因此, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子空间 V_1^* 使得对于 $t\geq s$ 且 $x(t)\in V_1^*$, 有 $|x(t)|\leq K|x(s)|e_{\ominus\alpha}(t,s)$.

通过与上面相似的推理, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $(n-k)$ 维子空间 V_2^* 使得, 当 $x(t)\in V_2^*$ 时. 可推得

$$|x(t)|\leq K|x(s)|e_{\ominus\alpha}(s,t),\quad s\geq t,$$

其中 $V_1^*\bigoplus V_2^*=\mathbb{R}^n, V_1^*\bigcap V_2^*=\emptyset$. 由 $A(t)$ 是一致有界的可推出存在 $M_0>0$ 使得 $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}}|A(t)|\leq M_0$, 则

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leq e_{M_0}(t,s),\quad t\geq s.$$

根据定理 4.2, (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性. 定理证毕.

§4.3.3 指数型二分性与有界解

这一小节，我们将研究非齐次线性时标动力学方程的有界解和相对应的齐次线性时标动力学方程满足指数型二分性的关系. 考虑下面的非齐次线性时标动力

学方程

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.11}$$

其中 $A(t) \in \mathcal{R}, f(t) \in C_{rd}(\mathbb{T})$. 为了后面讨论的方便，我们定义如下的函数空间 BC, C, M 和 L:

$$\begin{aligned}
BC &:= \{f \in BC(\mathbb{T}) : \|f\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|, \text{ 其中} \\
&\qquad BC(\mathbb{T}) \text{ 是 } \mathbb{T} \text{ 上有界连续函数组成的集合}\}; \\
C &:= \{f \in C_{rd}(\mathbb{T}) : \|f\| = \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|\}; \\
L &:= \{f \in C_{rd}(\mathbb{T}) : \|f\|_L = \int_{\vartheta}^{\infty} |f(\tau)|\Delta\tau\}; \\
M &:= \{f \in C_{rd}(\mathbb{T}) : \|f\|_M = \sup_{t\in\mathbb{T}^+} \frac{1}{\omega}\int_t^{t+\omega} |f(\tau)|\Delta\tau, \text{ 其中时标} \\
&\qquad \mathbb{T} \text{ 被假设是 } \omega \text{ 周期的}(\omega > 0), \text{ 即, } t \in \mathbb{T} \text{ 意味着 } t \pm \omega \in \mathbb{T}\}.
\end{aligned}$$

容易验证 BC, C, L 和 M 都是 Banach 空间. 在证明主要定理以前，我们做一些必要的准备工作.

引理4.2. *若 $g \in M$ 是一个非负函数且*

$$\frac{1}{\omega}\int_t^{t+\omega} g(\tau)\Delta\tau \le N_2, \quad t \ge \vartheta,$$

则对于 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 和 $t \ge \vartheta$, 有

$$\int_{\vartheta}^{t} e_{\ominus\alpha_1}(t, \sigma(\tau))g(\tau)\Delta\tau \le \frac{N_2\omega(1+\alpha_1\chi)}{1 - e_{\ominus\alpha_1}(\vartheta+\omega, \vartheta)},$$
$$\int_t^{\infty} e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau), t)g(\tau)\Delta\tau \le \frac{N_2\omega}{1 - e_{\ominus\alpha_2}(\vartheta+\omega, \vartheta)}.$$

证明. 首先, 易见

$$e_{\ominus\alpha_1}(t, \sigma(\tau)) = e_{\alpha_1}(\sigma(\tau), t) = (1+\mu(\tau)\alpha_1)e_{\alpha_1}(\tau, t) = (1+\mu(\tau)\alpha_1)e_{\ominus\alpha_1}(t, \tau).$$

由此可推出

$$\begin{aligned}
\int_{t-(n+1)\omega}^{t-n\omega} (1+\mu(\tau)\alpha_1)e_{\ominus\alpha_1}(t,\tau)g(\tau)\Delta\tau &\le (1+\alpha_1\chi)e_{\ominus\alpha_1}(t, t-n\omega)\int_{t-(n+1)\omega}^{t-n\omega} g(\tau)\Delta\tau \\
&= N_2\omega(1+\alpha_1\chi)e_{\ominus\alpha}(t, t-n\omega).
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\vartheta}^{t} e_{\ominus\alpha_1}(t,\sigma(\tau))g(\tau)\Delta\tau \le \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{t-(n+1)\omega}^{t-n\omega}(1+\mu(\tau)\alpha_1)e_{\ominus\alpha_1}(t,\tau)g(\tau)\Delta\tau$$
$$\le N_2\omega(1+\alpha_1\chi)\sum_{n=0}^{+\infty}e_{\ominus\alpha_1}(t,t-n\omega)$$
$$=\frac{N_2\omega(1+\alpha_1\lambda)}{1-e_{\ominus\alpha_1}(\vartheta+\omega,\vartheta)}.$$

对于第二个不等式, 能够得到

$$e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau),t)=(1+u(\tau)\cdot\ominus\alpha_2)e_{\ominus\alpha_2}(\tau,t)=(1+\mu(\tau)\alpha_2)^{-1}e_{\ominus\alpha_2}(\tau,t).$$

类似于上面的讨论可知

$$\int_{t}^{+\infty}e_{\ominus\alpha}(\sigma(\tau),t)g(\tau)\Delta s\le\frac{N_2\omega}{1-e_{\ominus\alpha_2}(\vartheta+\omega,\vartheta)}.$$

下面我们介绍一个非常重要的引理. 首先, 令 (4.1) 的所有有界解的初始值组成的空间为 U_1. 显然, U_1 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间. 令 U_2 为 U_1 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补空间, 这意味着 $\mathbb{R}^n=U_1\bigoplus U_2$. 通过类似于文献 [146] 中命题 3.4 的证明, 我们得到

引理4.3. *如果 (4.11) 对于每个函数 $f\in B$ 都有一个有界解, 其中 B 为 C,L,M 空间中的任意一个, 则存在一个正常数 $r_B>0$ 使得 (4.11) 有唯一的有界解 $y(t)$ 满足 $y(\vartheta)\in U_2$ 且 $\|y\|_0\le r_B\|f\|_B$.*

定理4.5. *假设 $A(t)$ 是一致有界的. 则 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足通常二分性的充要条件是对于每个函数 $f\in L$, (4.11) 都至少有一个有界解.*

证明. (必要性) 若 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足通常二分性, 则容易验证

$$x(t)=\int_{\vartheta}^{t}X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau-\int_{t}^{\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \tag{4.12}$$

是 (4.11) 的一个解. 同时, 对于每个函数 $f\in L$, 能够得到

$$|x(t)|\le\int_{\vartheta}^{t}|X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)|\Delta\tau+\int_{t}^{\infty}|X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)|\Delta\tau$$
$$\le\max\{K_1,K_2\}\|f\|_L.$$

因此, $x(t)$ 是 (4.11) 的一个有界解.

(充分性) 假设对于每个函数 $f\in L$, (4.11) 都至少有一个有界解. 设

$$G(t,s)=\begin{cases}X(t)PX^{-1}(s), & t>s\ge\vartheta,\\ -X(t)(I-P)X^{-1}(s), & s>t\ge\vartheta,\end{cases}$$

其中 $X(t)$ 是满足 $X(\vartheta)=I$ 的一个基本解矩阵，P 是一个投影。令

$$y(t)=\int_{\vartheta}^{\infty}G(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

对于一个固定 $t_1\in\mathbb{T}^+$. 选取一个函数 $f\in L$ 满足当 $t\geq t_1$ 时为零. 因为

$$y(t)=X(t)P\int_{\vartheta}^{t_1}X^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau,\quad t\geq t_1$$

和

$$y(\vartheta)=-(I-P)\int_{\vartheta}^{t_1}X^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\in U_2,$$

所以 $y(t)=\displaystyle\int_{\vartheta}^{t_1}G(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$ 是 (4.11) 的一个有界解。由引理 4.3 知 $\|y\|_0\leq r_L\|f\|_L$。

对于任意固定的 $s\in\mathbb{T}^+$, 我们考虑下面的三种情况：

情况 1: 若 s 是右稠的, 则存在一个时标点序列 $s_k\in\mathbb{T}(s_k>s)$, $k\in\mathbb{N}$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=s$. 令 $h_k=s_k-s$, 定义 f 为

$$f(t)=\begin{cases}\xi, & s\leq t\leq s+h_k,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $s\geq\vartheta$. 因此,

$$|y(t)|=|\int_{s}^{s+h_k}G(t,\sigma(\tau))\xi\Delta\tau|\leq r_Lh_k|\xi|.$$

由定理 1.1, 在上面不等式的两端同时除以 h_k 且令 $k\to\infty$, 对于 $t\neq s$, 有

$$|G(t,\sigma(s))\xi|=|G(t,s)\xi|\leq r_L|\xi|.$$

则

$$|G(t,s)|\leq r_L. \tag{4.13}$$

情况 2: 若 s 是孤立点, 定义

$$f(t)=\begin{cases}\xi, & \rho(s)\leq t\leq s,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

由 $\|f\|_L=\mu(\rho(s))|\xi|$, 推得

$$|y(t)|=|\int_{\rho(s)}^{s}G(t,\sigma(\tau))\xi\Delta\tau|\leq r_L\mu(\rho(s))|\xi|.$$

则

$$|G(t,\sigma(\rho(s)))\xi| = |G(t,s)| \le r_L|\xi|. \tag{4.14}$$

情况 3: 若 s 是右散左稠的, 定义 f 为

$$f(t) = \begin{cases} \xi, & s \le t \le \sigma(s), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

由 $\|f\|_L = \mu(s)|\xi|$ 可推出

$$|y(t)| = |\int_s^{\sigma(s)} G(t,\sigma(\tau))\xi\Delta\tau| \le r_L\mu(s)|\xi|.$$

在上面不等式的两边同时除以 $\mu(s)$, 可得到

$$|G(t,\sigma(s))\xi| = |G(t,s)(I+u(s)A(s))^{-1}\xi| \le r_L|\xi|.$$

因此,

$$|G(t,s)| \le r_L(1+\chi\|A\|). \tag{4.15}$$

由 $G(t,s)$ 的定义有

$$\begin{aligned} &|X(t)PX^{-1}(s)| \le r_L(1+\chi\|A\|) \quad t > s \\ &|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \le r_L(1+\chi\|A\|) \quad s < t. \end{aligned} \tag{4.16}$$

此外, 由连续性知, $s = t$ 时, (4.16) 也成立。令 $K_1 = K_2 = r_L(1+\chi\|A\|)$, 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时, (4.2) 成立。因此, (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足通常二分性。定理证毕。

定理4.6. *假设 (4.1) 是有界增长的。则 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性的充要条件是对于每个函数 $f \in C$, (4.11) 都至少有一个有界解。*

证明. (必要性) 假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性。则对于 $f \in C$, 可推知

$$\begin{aligned} |x(t)| &\le \int_\vartheta^t |X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)|\Delta\tau + \int_t^\infty |X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)|\Delta\tau \\ &\le \|f\|\left(K_1\int_\vartheta^t e_{\ominus\alpha_1}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau + K_2\int_t^\infty e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau),t)\Delta\tau\right) \\ &\le \|f\|\left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2}\right). \end{aligned}$$

这意味着 (4.12) 是 (4.11) 的一个有界解。

(充分性) 若对于每个函数 $f \in C$, (4.11) 都至少有一个有界解, 则对于一个固定的 $t_1 \in \mathbb{T}^+$, 选取一个 rd- 连续函数 $\psi(t)$ 满足

$$\begin{cases} 0 \le \psi(t) \le 1, & t \ge \vartheta, \\ \psi(t) = 0, & t \ge t_1. \end{cases}$$

令 $f_0(t)=\dfrac{\psi(t)x(t)}{|x(t)|}$, 其中 $x(t)=X(t)\xi$ 是 (4.11) 的任意一个非平凡解. 显然, $f_0\in C$ 且 $\|f_0\|\le 1$. 通过类似于定理 4.5 必要性的讨论和 ψ 的任意性知

$$\left|\int_{t_0}^{t_1} G(t,\tau)x(\tau)|x(\tau)|^{-1}\Delta\tau\right|\le r_C,\quad \vartheta\le t_0\le t_1 \quad \text{和} \quad t\ge\vartheta.$$

设 $t_1=t$ 和 $t_0=t$, 有

$$\begin{aligned}&|X(t)P\xi|\int_{t_0}^{t}|X(\tau)\xi|^{-1}\Delta\tau\le r_C,\quad t\ge t_0\ge\vartheta,\\ &|X(t)(I-P)\xi|\int_{t}^{t_1}|X(\tau)\xi|^{-1}\Delta\tau\le r_C,\quad t\le t_1\le\infty.\end{aligned}\tag{4.17}$$

用 $P\xi$ 或 $(I-P)\xi$ 取代 ξ, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{s}|X(\tau)P\xi|^{-1}\Delta\tau\le e_{\ominus r_C^{-1}}(t,s)\int_{t_0}^{t}|X(\tau)P\xi|^{-1}\Delta\tau,\quad t\ge s\ge t_0,\\ &\int_{s}^{t_1}|X(\tau)(I-P)\xi|^{-1}\Delta\tau\le e_{\ominus r_C^{-1}}(s,t)\int_{t}^{t_1}|X(\tau)(I-P)\xi|^{-1}\Delta\tau,\quad t\le s\le t_1.\end{aligned}\tag{4.18}$$

因为 (4.1) 是有界增长的, 则存在一个 $C\ge 1$ 和 $\beta>0$ 使得

$$|X(t)X^{-1}(s)|\le Ce_\beta(t,s),\quad t\ge s.$$

假设 $x(t)$ 是 (4.1) 的任意解且

$$x_1(t)=X(t)PX^{-1}(t)x(t),x_2(t)=X(t)(I-P)X^{-1}(t)x(t).$$

将证明下面的结论: 若对于某个固定的 $s\ge\vartheta$ 且 $s\le t\le s+r_C$ 满足 $|x_1(t)|\le C|x(s)|$, 则对于 $s\le t<\infty$, 有 $|x_1(t)|\le eC|x(s)|e_{\ominus r_C^{-1}}(t,s)$。因为 $x(t)$ 是 (4.1) 的一个有界解, 则 $x(t)=X(t)\xi$, 其中 ξ 是一个向量. 在 (4.18) 的第一个不等式中, 用 s 取代 t_0 且 t^* 取代 s 有

$$\frac{r_C}{C|x(s)|}\le\int_s^{t^*}|x_1(\tau)|^{-1}\Delta\tau\le ee_{\ominus r_C^{-1}}(t,s)\int_s^t|x_1(\tau)|^{-1}\Delta\tau,\quad t\ge s+r_C.$$

利用 (4.17) 的第一个不等式, 获得

$$|x_1(t)|\le r_C\left(\int_s^t|x(\tau)|^{-1}\Delta\tau\right)^{-1}\le eC|x(s)|e_{\ominus r_C^{-1}}(t,s),\quad t\ge s+r_C.$$

由 (4.3) 可知

$$ee_{\ominus r_C^{-1}}(t,s)\ge ee^{-r_C^{-1}(t-s)}\ge 1,\quad s\le t\le s+r_C.$$

这暗示

$$|x_1(t)| \le eC|x(s)|e_{\ominus r_C^{-1}}(t,s), \quad s \le t < \infty.$$

类似的可证明, 若对于固定的 $s \ge \vartheta$ 且 $\max\{\vartheta, s - r_C\} \le t \le s$, 则对于 $\vartheta \le t \le s$, 有

$$|x_2(t)| \le eC|x(s)|e_{\ominus r_C^{-1}}(s,t).$$

用 $X^{-1}(s)\xi$ 取代 ξ, 并且在 (4.17) 的第二个不等式中, 令 $t_1 = \infty$, 当 $t \le s$ 时, 则

$$\begin{aligned}|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\xi| &\le r_C\left(\int_s^\infty |X(\tau)X^{-1}(s)\xi|^{-1}\Delta\tau\right)^{-1}\\ &\le r_C\left(C^{-1}|\xi|^{-1}\int_s^\infty e_\beta(s,\tau)\Delta\tau\right)^{-1}.\end{aligned}$$

由 ξ 的任意性, 可推出

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \le r_C\beta C, \quad t \le s.$$

同理, 可得

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \le r_C\beta Ce_\beta(t,s), \quad t \ge s.$$

因此

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \le (1 + r_C\beta)Ce_\beta(t,s), \quad t \ge s.$$

在 (4.17) 的第一个不等式中, 令 $t_0 = s$, 可求得

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \le r_C\beta C[1 - e_{\ominus\beta}(t,s)]^{-1}, \quad t > s.$$

因此, 考虑下面两种情况:

(1). 若 $\chi = 0$, 类似于文献 [146], 可推出

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \le (1 + 2r_C\beta)C, \quad t \ge s.$$

(2). 若 $\chi > 0$, 由 (4.3) 可求得

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \le r_C\beta C\left[1 - \left(\frac{1}{1+\beta\chi}\right)^{\frac{t-s}{\chi}}\right]^{-1}, \quad t > s.$$

于是

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \le \frac{r_C C(1+\beta\chi)}{\chi}, \quad t - s \ge \chi.$$

同时, 对于 $t-s\le\chi$, 有

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\le C(1+r_C\beta)e_\beta(t,s)\le C(1+r_C\beta)e^{\beta(t-s)}$$
$$\le C(1+r_C\beta)e^{\beta\chi}.$$

由此可求出

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\le\max\{\frac{r_CC(1+\beta\chi)}{\chi},C(1+r_C\beta)e^{\beta\chi}\},\quad t\ge s.$$

因此

$$K(\chi)=\begin{cases}(1+2r_C\beta)C & 若\quad \chi=0,\\ \max\{\dfrac{r_CC(1+\beta\chi)}{\chi},C(1+r_C\beta)e^{\beta\chi}\} & 若\quad \chi>0.\end{cases}$$

那么对于 $t\ge s$, 能够得到 $|X(t)PX^{-1}(s)|\le K(\chi)$. 根据上面的讨论, 可得

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\le eK(\chi)e_{\ominus r_C^{-1}}(t,s),\quad t\ge s\ge\vartheta,$$
$$|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|\le er_C\beta Ce_{\ominus r_C^{-1}}(s,t),\quad s\ge t\ge\vartheta.$$

这说明 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性. 定理证毕.

定理4.7. *假设 $A(t)$ 是一致有界的. 则 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性的充要条件是对于每个函数 $f\in M$, (4.11) 都至少有一个有界解.*

证明. (必要性) 若 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性, 则由引理 4.2 可得

$$|x(t)|\le\int_\vartheta^t|X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)|\Delta\tau+\int_t^\infty|X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))f(\tau)|\Delta\tau$$
$$\le K_1\frac{N_2\omega(1+\alpha_1\chi)}{1-e_{\ominus\alpha_1}(\vartheta+\omega,\vartheta)}+K_2\frac{N_2\omega}{1-e_{\ominus\alpha_2}(\vartheta+\omega,\vartheta)}.$$

因此, (4.12) 是 (4.11) 的一个有界解.

(充分性) 若时标是 ω 周期的, 则 $C\subset M$ 且 $L\subset M$. 通过定理 4.5 和定理 4.6, 可令 $\alpha_1=\alpha_2=r_C^{-1}$ 且 $K_1=K_2=e(r_L+\chi\|A\|)$ 使得 (4.2) 成立. 定理证毕.

注4.2. *若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, 则定理 4.5 和定理 4.7 中, $A(t)$ 是一致有界的条件能够被去掉.*

§4.4 指数型二分性的粗糙度理论

为了研究时标动力学方程指数型二分性的粗糙度理论，我们首先考虑扰动的线性时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = (A(t) + B(t))x(t), \tag{4.19}$$

其中 $A(t) + B(t) \in \mathcal{R}$. 考虑 (4.1) 在 $B(t)$ 扰动下指数型二分性的粗糙度，即找到一个恰当的条件使得 (4.19) 也具有指数型二分性.

定理4.8. 假设 $A(t)$ 是一致有界的且 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性. 则存在 $\delta_* > 0$ 使得当 $\|B\| < \delta_*$ 时，(4.19) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性.

证明. 由定理 4.4 推知存在一个对称的，有界的，正则矩阵 $G(t)$ 使得二次型 $V(t,x) = x^T G(t) x$ 满足

$$\begin{aligned} V^{\Delta}(t, x(t)) &= x^T(t)[A^T(t)G(t) + (1 + \mu(t)A^T(t))(G^{\Delta}(t) + G(\sigma(t))A(t))]x(t) \\ &\geq \rho_1 |x(t)|^2, \end{aligned}$$

其中 $x(t)$ 是 (4.1) 的任意一个解. 令 $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}} |G(t)| \leq \rho_2$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}} |A(t)| \leq \rho_3$, 且选择 $\delta_* > 0$ 使得

$$2\rho_2\delta_*(1 + \chi\rho_3) + \chi\rho_2\delta_*^2 \leq \frac{\rho_1}{2}.$$

则对于 (4.19) 的任意解 $y(t)$, 可求得

$$\begin{aligned} V^{\Delta}(t, y(t)) &= (y^T(t))^{\Delta} G(t) y(t) + y^T(\sigma(t)) G^{\Delta}(t) y(t) + y^T(\sigma(t)) G(\sigma(t)) y^{\Delta}(t) \\ &= y^T(t)[(A(t) + B(t))^T G(t) \\ &\quad + (1 + \mu(t)(A(t) + B(t))^T)(G^{\Delta}(t) + G(\sigma(t))(A(t) + B(t)))]y(t) \\ &= y^T(t)[A^T(t)G(t) + (1 + \mu(t)A^T(t))(G^{\Delta}(t) + G(\sigma(t))A(t)) \\ &\quad + B^T(t)G(t) + \mu(t)B^T(t)G^{\Delta}(t) + \mu(t)B^T(t)G(\sigma(t))B(t) \\ &\quad + \mu(t)B^T(t)G(\sigma(t))A(t) + (1 + \mu(t)A^T(t))G(\sigma(t))B(t)]y(t) \\ &= y^T(t)[A^T(t)G(t) + (1 + \mu(t)A^T(t))(G^{\Delta}(t) + G(\sigma(t))A(t)) \\ &\quad + B^T(t)G(\sigma(t))(I + \mu(t)A(t)) + (I + \mu(t)A^T(t))G(\sigma(t))B(t) \\ &\quad + \mu(t)B^T(t)G(\sigma(t))B(t)]y(t) \\ &\geq \rho_1|y(t)|^2 - (2\rho_2\delta_*(1 + \chi\rho_3) + \chi\rho_2\delta_*^2)|y(t)|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\rho_1|y(t)|^2. \end{aligned}$$

这说明 (4.19) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性. 定理证毕.

下面, 我们采用另外一种方法研究指数型二分性的粗糙度理论. 为了获得一些有用的引理, 考虑非齐次线性时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t) = [A(t) + B(t)]x(t) + f(t) \tag{4.20}$$

其中, $A(t), A(t) + B(t) \in \mathcal{R}$, 且 $f \in L$.

引理4.4. *假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性, 且若*

$$\|B\| \left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right) < 1, \tag{4.21}$$

则对于每个 $f \in L$, (4.20) 都有唯一的有界解.

证明. 对于任意 $y \in BC$, 定义映射 T 为

$$\begin{aligned}(Ty)(t) = &\int_{\vartheta}^{t} X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))(B(\tau)y(\tau) + f(\tau))\Delta\tau \\ &- \int_{t}^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))(B(\tau)y(\tau) + f(\tau))\Delta\tau.\end{aligned}$$

显然, $(Ty)(t)$ 是连续的. 并且,

$$\begin{aligned}|(Ty)(t)| \le\ & \|B\|\|y\| \left(\int_{\vartheta}^{t} |X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))|\Delta\tau \right. \\ & \left. + \int_{t}^{\infty} |X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))|\Delta\tau \right) \\ & + \int_{\vartheta}^{t} |X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))||f(\tau)|\Delta\tau + \int_{t}^{\infty} |X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))||f(\tau)|\Delta\tau \\ \le\ & \|B\|\|y\| \left(K_1 \int_{\vartheta}^{t} e_{\ominus\alpha_1}(t, \sigma(\tau))\Delta\tau + K_2 \int_{t}^{\infty} e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau), t)\Delta\tau \right) \\ & + \max(K_1, K_2) \int_{\vartheta}^{\infty} |f(\tau)|\Delta\tau \\ =\ & \|B\|\|y\| \left(K_1 \int_{\vartheta}^{t} (1+\mu(\tau)\alpha_1)e_{\alpha_1}(\tau, t)\Delta\tau + K_2 \int_{t}^{\infty} (1+\ominus\alpha_2\mu(\tau))e_{\ominus\alpha_2}(\tau, t)\Delta\tau \right) \\ & + \max(K_1, K_2) \int_{\vartheta}^{\infty} |f(\tau)|\Delta\tau \\ =\ & \|B\|\|y\| \left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} \int_{\vartheta}^{t} \alpha_1 e_{\alpha_1}(\tau, t)\Delta\tau - \frac{K_2}{\alpha_2} \int_{t}^{\infty} \ominus\alpha_2 e_{\ominus\alpha_2}(\tau, t)\Delta\tau \right) \\ & + \max(K_1, K_2) \int_{\vartheta}^{\infty} |f(\tau)|\Delta\tau \\ \le\ & \|B\|\|y\| \left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right) + \max(K_1, K_2) \int_{\vartheta}^{\infty} |f(\tau)|\Delta\tau.\end{aligned}$$

则 T 是 BC 到 BC 的一个映射。而且，对于任意 $y_1, y_2 \in BC$，我们有

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \|B\| \left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right) \|y_1 - y_2\|.$$

因此，T 是一个压缩映射。通过压缩映像原理，存在唯一一个不动点 $y(t) \in BC$ 使得 $y(t) = (Ty)(t)$，这样 $y(t)$ 是 (4.20) 唯一一个有界解。

类似于引理 4.3 的讨论，令 (4.1) 的所有有界解的初始值组成的空间为 U_1，显然，U_1 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，令 U_2 为 U_1 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补空间，这意味着 $\mathbb{R}^n = U_1 \bigoplus U_2$。

引理4.5. 如果 (4.20) 对于每个函数 $f \in L$ 都有一个有界解，则存在一个正常数 r 使得 (4.20) 有唯一的有界解 $y(t)$ 满足 $y(\vartheta) \in U_2$ 且 $\|y\| \leq r\|f\|_L$。

定理4.9. 假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性且基本解矩阵满足 $X(\vartheta) = I$。若 (4.21) 成立，则 (4.19) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足通常二分性，且相应的投影 Q 相似于投影 P。

证明. 考虑一个矩阵函数 $Z(t) \in BC$，并且定义映射 T 为

$$\begin{aligned}(TZ)(t) = X(t)P &+ \int_{\vartheta}^{t} X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Z(\tau)\Delta\tau \\ &- \int_{t}^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Z(\tau)\Delta\tau.\end{aligned}$$

由此可求出

$$|(TZ)(t)| \leq K_1 + \|B\|\|Z\| \left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right)$$

和

$$\|TZ_1 - TZ_2\| \leq \|B\| \left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2} \right) \|Z_1 - Z_2\|, \quad Z_1, Z_2 \in BC.$$

这说明了 $T: BC \to BC$ 是一个压缩映射，于是存在唯一一个不动点 $Y_1(t)$ 使得

$$\begin{aligned}Y_1(t) = X(t)P &+ \int_{\vartheta}^{t} X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)\Delta\tau \\ &- \int_{t}^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)\Delta\tau.\end{aligned} \tag{4.22}$$

易证 $Y_1(t)$ 是 (4.19) 的一个有界解。此外，也能得到

$$\begin{aligned}Y_1(t)P = X(t)P &+ \int_{\vartheta}^{t} X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)P\Delta\tau \\ &- \int_{t}^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)P\Delta\tau.\end{aligned}$$

则 $Y_1(t)P$ 也是 T 的一个不动点，于是有 $Y_1(t)P=Y_1(t)$. 现在令 $Q=Y_1(\vartheta)$, 可获得 $QP=Q$. 设 $t=s$, 且在 (4.22) 的两边同时乘以 $X(t)PX^{-1}(s)$, 则可得

$$X(t)PX^{-1}(s)Y_1(s)=X(t)P+\int_{\vartheta}^{s}X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)\Delta\tau. \tag{4.23}$$

若在上面的等式中，令 $t=s=\vartheta$, 可得到 $PQ=P$. 容易证明 $Y_1(t)Q$ 也是 T 的一个不动点且使得 $Y_1(t)Q=Y_1(t)$. 设 $t=\vartheta$, 则有 $Y_1(\vartheta)Q=Y_1(\vartheta)$, 即, $Q^2=Q$. 这意味着 Q 是一个投影. 由 $QP=Q$ 和 $PQ=P$ 可推知 $L=I-P+Q$ 是可逆的且满足 $Q=LPL^{-1}$. 因此, 投影 Q 相似于投影 P.

假设 $Y(t)$ 是 (4.19) 的一个基本解矩阵满足 $Y(\vartheta)=I$, 则可推出 $Y_1(t)=Y(t)Q$, 于是有 $Q[\mathbb{R}^n]\subseteq U_1^0$. 定义

$$G(t,s)=\begin{cases} Y(t)QY^{-1}(s), & t>s\geq\vartheta,\\ -Y(t)(I-Q)Y^{-1}(s), & s>t\geq\vartheta.\end{cases}$$

类似于定理 4.5 的讨论, 易获得

$$\begin{aligned}&|Y(t)QY^{-1}(s)|\leq r(1+\chi(\|A\|+\|B\|)),\quad t>s\\ &|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(s)|\leq r(1+\chi(\|A\|+\|B\|)),\quad s<t\end{aligned} \tag{4.24}$$

且 $Q(U)=U_1^0$. 同时, 由连续性推知 (4.24) 在 $s=t$ 也是成立的. 定理证毕.

为了获得指数型二分性的粗糙度，我们需要下面的不等式估计.

引理4.6. *假设 u 在 $[t_0,\infty)$ 上是正的有界连续函数，并且满足*

$$u(t)\leq be_{\ominus\gamma_1}(t,t_0)u(t_0)+\delta b_1\int_{t_0}^{t}e_{\ominus\gamma_1}(t,\tau)u(\tau)\Delta\tau+\delta b_2\int_{t}^{\infty}e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t)u(\tau)\Delta\tau, \tag{4.25}$$

其中 $b,b_1,b_2,\delta,\gamma_1,\gamma_2$ 都是正常数. 若

$$\kappa=\delta\left(\frac{b_1}{\gamma_1}+\frac{b_2(1+\gamma_2\chi)}{\gamma_2}\right)<1,\quad \theta_1=1-\frac{\delta b_1}{\gamma_1(1-\kappa)}>0,$$

则

$$u(t)\leq\frac{b}{1-\kappa}u(t_0)e_{\{(\ominus\alpha_1)(\theta_1)\}}(t,t_0),\quad t\geq t_0.$$

证明. 假设当 $t\to\infty$ 时, 有 $u(t)\to 0$. 定义

$$\rho_1(t)=\max_{\tau\in[t,\infty)}u(\tau).$$

易证 $\rho_1(t)$ 是减函数. 由此可推出存在 $t_1^*\geq t$ 使得对于任意 $t\geq t_0$, 有 $\rho_1(t)=u(t_1^*)$. 根据 (4.25), 证得

$$u(t_1^*)\leq be_{\ominus\gamma_1}(t_1^*,t_0)u(t_0)+\delta b_1\int_{t_0}^{t_1^*}e_{\ominus\gamma_1}(t_1^*,\tau)u(\tau)\Delta\tau+\delta b_2\int_{t_1^*}^{\infty}e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t_1^*)u(\tau)\Delta\tau.$$

这说明

$$\begin{aligned}\rho_1(t) \le\ & be_{\ominus\gamma_1}(t_1^*, t_0)u(t_0) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t_1^*} e_{\ominus\gamma_1}(t_1^*, \tau)u(\tau)\Delta\tau + \delta b_2 \int_{t_1^*}^{\infty} e_{\ominus\gamma_2}(\tau, t_1^*)u(\tau)\Delta\tau \\ =\ & be_{\ominus\gamma_1}(t_1^*, t_0)u(t_0) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t} e_{\ominus\gamma_1}(t_1^*, \tau)u(\tau)\Delta\tau + \delta b_1 \int_{t}^{t_1^*} e_{\ominus\gamma_1}(t_1^*, \tau)u(\tau)\Delta\tau \\ & + \delta b_2 \int_{t_1^*}^{\infty} e_{\ominus\gamma_2}(\tau, t_1^*)u(\tau)\Delta\tau \\ \le\ & be_{\ominus\gamma_1}(t, t_0)u(t_0) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t} e_{\ominus\gamma_1}(t, \tau)u(\tau)\Delta\tau \\ & + \delta\rho_1(t)\left(b_1 \int_{t}^{t_1^*} e_{\ominus\gamma_1}(t_1^*, \tau)\Delta\tau + b_2 \int_{t_1^*}^{\infty} e_{\ominus\gamma_2}(\tau, t_1^*)\Delta\tau\right) \\ \le\ & be_{\ominus\gamma_1}(t, t_0)u(t_0) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t} e_{\ominus\gamma_1}(t, \tau)u(\tau)\Delta\tau + \delta\rho_1(t)\left(\frac{b_1}{\gamma_1} + \frac{b_2(1+\gamma_2\chi)}{\gamma_2}\right).\end{aligned}$$

故可得

$$(1-\kappa)u(t) \le (1-\kappa)\rho_1(t) \le be_{\ominus\gamma_1}(t, t_0)u(t_0) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t} e_{\ominus\gamma_1}(t, \tau)u(\tau)\Delta\tau.$$

令 $\phi_1(t) = e_{\gamma_1}(t, \vartheta)u(t)$, 上面的不等式可变为

$$\phi_1(t) \le \frac{b}{1-\kappa}\phi_1(t_0) + \frac{\delta b_1}{1-\kappa}\int_{t_0}^{t}\phi_1(\tau)\Delta\tau.$$

根据定理 1.7, 可得

$$\phi_1(t) \le \frac{b}{1-\kappa}\phi_1(t_0)e_{\{\gamma_1(1-\theta_1)\}}(t, t_0),$$

即,

$$u(t) \le \frac{b}{1-\kappa}u(t_0)e_{\{(\ominus\gamma_1)(\theta_1)\}}(t, t_0).$$

注意到已经证明了当 $u(t) \to 0$ 时, 引理 4.6 成立。若 $u(t)$ 没有这种性质, 则我们能够定义一个新的函数

$$u_\beta(t) = u(t)e_{\ominus\beta}(t, \vartheta),$$

其中 $0 < \beta < \gamma_2$. 由 $u(t)$ 的有界性能够得到对于 $t \to \infty$, 有 $u_\beta(t) \to 0$。利用不等式 (4.25), 易得

$$\begin{aligned}u_\beta(t) \le\ & be_{\{(\ominus\gamma_1)\ominus(\ominus\beta)\}}(t, t_0)u_\beta(t_0) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t} e_{\{(\ominus\gamma_1)\oplus(\ominus\beta)\}}(t, \tau)u_\beta(\tau)\Delta\tau \\ & + \delta b_2 \int_{t}^{\infty} e_{\{(\ominus\gamma_2)\ominus(\beta)\}}(\tau, t)u_\beta(\tau)\Delta\tau.\end{aligned}$$

同理可证, 若

$$\kappa_\beta = \delta\left(\frac{b_1}{\gamma_1+\beta} + \frac{b_2(1+\gamma_2\chi)}{\gamma_2-\beta}\right) < 1$$

且

$$\theta_\beta = 1 - \frac{\delta b_1}{(\gamma_1 \ominus \beta)(1-\kappa_\beta)} > 0,$$

则

$$u_\beta(t) \le \frac{b}{1-\kappa_\beta} u_\beta(t_0) e_{\{(\ominus(\gamma_1\oplus\beta))(\theta_\beta)\}}(t,t_0), \quad t \ge t_0.$$

若令 $\beta \to 0$, 对于任意 $t \ge t_0$, 能够得到

$$u(t) \le \frac{b}{1-\kappa} u(t_0) e_{\{(\ominus\gamma_1)(\theta_1)\}}(t,t_0).$$

引理4.7. *若 u 在 $[t_0,\infty)$ 上是正的有界连续函数, 并且满足*

$$\begin{aligned} u(t) \le{}& b e_{\ominus\gamma_2}(s,t)u(s) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t} e_{\ominus\gamma_1}(t,\tau)u(\tau)\Delta\tau \\ &+ \delta b_2 \int_{t}^{s} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t)u(\tau)\Delta\tau, \ s \ge t \ge t_0, \end{aligned} \tag{4.26}$$

其中 $b, b_1, b_2, \delta, \gamma_1, \gamma_2$ 都是正常数, 则

$$u(t) \le \frac{b}{1-\kappa} u(s) e_{\{(\ominus\gamma_2)(\theta_2)\}}(s,t), \quad s \ge t \ge t_0,$$

其中

$$\kappa = \delta\left(\frac{b_1}{\gamma_1} + \frac{b_2(1+\gamma_2\chi)}{\gamma_2}\right) < 1, \quad \theta_2 = 1 - \frac{\delta b_2}{\gamma_2(1-\kappa)} > 0.$$

证明. 定义 $\rho_2(t) = \max_{\tau\in[t_0,t]} u(\tau)$. 显然, $\rho_2(t)$ 是一个增函数, 且存在一个 t_2^* 使得 $\rho_2(t) = u(t_2^*)$, $t \ge t_0$. 根据 (4.26), 能够推得

$$\begin{aligned} u(t_2^*) \le{}& b e_{\ominus\gamma_2}(s,t_2^*)u(s) + \delta b_1 \int_{t_0}^{t_2^*} e_{\ominus\gamma_1}(t_2^*,\tau)u(\tau)\Delta\tau + \delta b_2 \int_{t_2^*}^{s} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t_2^*)u(\tau)\Delta\tau \\ ={}& b e_{\ominus\gamma_2}(s,t_2^*)u(s) + \delta b_2 \int_{t}^{s} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t_2^*)u(\tau)\Delta\tau + \delta b_2 \int_{t_2^*}^{t} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t_2^*)u(\tau)\Delta\tau \\ &+ \delta b_1 \int_{t_0}^{t_2^*} e_{\ominus\gamma_1}(t_2^*,\tau)u(\tau)\Delta\tau \\ \le{}& b e_{\ominus\gamma_2}(s,t)u(s) + \delta b_2 \int_{t}^{s} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t)u(\tau)\Delta\tau \\ &+ \delta\rho_2(t)\left(b_2 \int_{t_2^*}^{t} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t_2^*)\Delta\tau + b_1 \int_{t_0}^{t_2^*} e_{\ominus\gamma_1}(t_2^*,\tau)\Delta\tau\right) \\ \le{}& b e_{\ominus\gamma_2}(s,t)u(s) + \delta b_2 \int_{t}^{s} e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t)u(\tau)\Delta\tau + \delta\left(\frac{b_2(1+\gamma_2\chi)}{\gamma_2} + \frac{b_1}{\gamma_1}\right). \end{aligned}$$

进而得到

$$(1-\kappa)u(t) \le (1-\kappa)\rho_2(t) \le be_{\ominus\gamma_2}(s,t)u(s) + \delta b_2 \int_t^s e_{\ominus\gamma_2}(\tau,t)u(\tau)\Delta\tau.$$

令 $\phi_2(t) = e_{\ominus\gamma_2}(t,\vartheta)u(t)$, 易证

$$\phi_2(t) \le \frac{b}{1-\kappa}\phi_2(s)e_{\{\gamma_2(1-\theta_2)\}}(s,t),$$

即,

$$u(t) \le \frac{b}{1-\kappa}u(s)e_{\{(\ominus\gamma_2)(\theta_2)\}}(s,t).$$

定理4.10. 假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足指数型二分性且 $X(\vartheta) = I$. 若

$$\kappa^* = \|B\|\left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1} + \frac{K_2(1+\alpha_2\chi)}{\alpha_2}\right) < 1,$$

则扰动方程 (4.19) 也具有指数型二分性. 而且, 它的基本解矩阵 $Y(t)$ 满足 $Y(\vartheta) = I$ 且

$$\begin{aligned} |Y(t)QY^{-1}(s)| &\le \frac{K_1(K_1+K_2)}{(1-2\zeta)(1-\kappa^*)}e_{(\ominus\alpha_1)(\theta_1^*)}(t,s), \quad t \ge s \ge \vartheta, \\ |Y(t)(I-Q)Y^{-1}(s)| &\le \frac{K_2(K_1+K_2)}{(1-2\zeta)(1-\kappa^*)}e_{(\ominus\alpha_2)(\theta_2^*)}(s,t), \quad s \ge t \ge \vartheta, \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 $\zeta = \max\{\zeta_1, \zeta_2\}$, $1-2\zeta > 0$,

$$\zeta_1 = \|B\|\left(\frac{K_1K_2(1+\alpha_2\chi)}{\alpha_2(1-\kappa^*)}\right), \qquad \zeta_2 = \|B\|\left(\frac{K_1K_2(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1(1-\kappa^*)}\right),$$
$$\theta_1^* = 1 - \|B\|\left(\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1(1-\kappa^*)}\right) > 0, \qquad \theta_2^* = 1 - \|B\|\left(\frac{K_2}{\alpha_2(1-\kappa^*)}\right) > 0.$$

同时, 投影 Q 相似于投影 P。

证明. 类似于定理 4.9 的讨论, 能够得到一个映射 Q 相似于 P 且 $Y_1(t) = Y(t)Q$. 由 (4.22) 和 (4.23) 可知

$$\begin{aligned} Y_1(t) = X(t)PX^{-1}(s)Y_1(s) &+ \int_s^t X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)\Delta\tau \\ &- \int_t^\infty X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)\Delta\tau. \end{aligned} \tag{4.28}$$

另一方面, 设 $Y_2(t) = Y(t)(I-Q)$ 使得 $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$. 根据常数变易公式得

$$Y_2(t) = X(t)(I-Q) + \int_\vartheta^t X(t)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_2(\tau)\Delta\tau.$$

因为 $(I-P)(I-Q)=I-Q$, 设 $t=s$ 且在上面等式两边同时乘以 $X(t)(I-P)X^{-1}(s)$ 得到

$$X(t)(I-P)X^{-1}(s)Y_2(s)=X(t)(I-Q)+\int_{\vartheta}^{s}X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_2(\tau)\Delta\tau.$$

因此, 可推知

$$\begin{aligned}Y_2(t)&=X(t)(I-P)X^{-1}(s)Y_2(s)+\int_{\vartheta}^{t}X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau)B(\tau)Y_2(\tau)\Delta\tau\\&\quad-\int_{t}^{s}X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_2(\tau)\Delta\tau.\end{aligned}\tag{4.29}$$

对任意向量 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 根据 (4.28) 和 (4.29), 对于 $t\geq s\geq\vartheta$, 我们有

$$\begin{aligned}|Y_1(t)\xi|&\leq K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|Y_1(s)\xi|+\|B\|K_1\int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus\alpha_1}(t,\sigma(\tau))|Y_1(\tau)\xi|\Delta\tau\\&\quad+\|B\|K_2\int_{t}^{\infty}e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau),t)|Y_1(\tau)\xi|\Delta\tau\\&\leq K_1e_{\ominus\alpha_1}(t,s)|Y_1(s)\xi|+\|B\|K_1(1+\alpha_1\chi)\int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus\alpha_1}(t,\tau))|Y_1(\tau)\xi|\Delta\tau\\&\quad+\|B\|K_2\int_{t}^{\infty}e_{\ominus\alpha_2}(\tau,t)|Y_1(\tau)\xi|\Delta\tau,\end{aligned}$$

同时, 对于 $s\geq t\geq\vartheta$, 有

$$\begin{aligned}|Y_2(t)\xi|&\leq K_2e_{\ominus\alpha_2}(s,t)|Y_2(s)\xi|+\|B\|K_1\int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus\alpha_1}(t,\sigma(\tau))|Y_2(\tau)\xi|\Delta\tau\\&\quad+\|B\|K_2\int_{t}^{s}e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau),t)|Y_2(\tau)\xi|\Delta\tau\\&\leq K_2e_{\ominus\alpha_2}(s,t)|Y_1(s)\xi|+\|B\|K_1(1+\alpha_1\chi)\int_{\vartheta}^{t}e_{\ominus\alpha_1}(t,\tau))|Y_2(\tau)\xi|\Delta\tau\\&\quad+\|B\|K_2\int_{t}^{s}e_{\ominus\alpha_2}(\tau,t)|Y_2(\tau)\xi|\Delta\tau.\end{aligned}$$

由引理 (4.6) 和引理 (4.7) 可得

$$\begin{aligned}|Y_1(t)\xi|&\leq\frac{K_1}{1-\kappa^*}e_{(\ominus\alpha_1)(\theta_1^*)}(t,s)|Y_1(s)\xi|,\quad t\geq s\geq\vartheta,\\|Y_2(t)\xi|&\leq\frac{K_2}{1-\kappa^*}e_{(\ominus\alpha_2)(\theta_2^*)}(s,t)|Y_2(s)\xi|,\quad s\geq t\geq\vartheta.\end{aligned}\tag{4.30}$$

为了完成定理证明, 根据定理 4.1, 我们仅需要证得 $Y(t)QY^{-1}(t)$ 是一致有界的. 在

(4.28) 的两边同时乘以 $X(t)(I-P)X^{-1}(t)$，由 (4.30) 的第一个不等式可获得

$$
\begin{aligned}
&|X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y_1(t)\xi| \\
&= \left|-\int_t^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_1(\tau)\xi\Delta\tau\right| \\
&\le \|B\|\left(\frac{K_1K_2}{1-\kappa^*}\right)|Y_1(t)\xi|\int_t^{\infty} e_{(\ominus\alpha_1)(\theta_1^*)}(\tau,t)e_{\ominus\alpha_2}(\sigma(\tau),t)\Delta\tau \\
&\le \|B\|\left(\frac{K_1K_2}{1-\kappa^*}\right)|Y_1(t)\xi|\int_t^{\infty} e_{((\ominus\alpha_1)(\theta_1^*))\oplus(\ominus\alpha_2)}(\tau,t)\Delta\tau \\
&\le \|B\|\left(\frac{K_1K_2(1+\alpha_2\chi)}{\alpha_2(1-\kappa^*)}\right)|Y_1(t)\xi| = \zeta_1|Y_1(t)\xi|.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

同理可证，由 (4.29) 和 (4.30) 的第二个不等式可得

$$
\begin{aligned}
&|X(t)PX^{-1}(t)Y_2(t)\xi| \\
&= \left|\int_{\vartheta}^{t} X(t)PX^{-1}(\sigma(\tau))B(\tau)Y_2(\tau)\xi\Delta\tau\right| \\
&\le \|B\|\left(\frac{K_1K_2}{1-\kappa^*}\right)|Y_2(t)\xi|\int_{\vartheta}^{t} e_{(\ominus\alpha_2)(\theta_2^*)}(t,\tau)e_{\ominus\alpha_1}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau \\
&\le \|B\|\left(\frac{K_1K_2(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1(1-\kappa^*)}\right)|Y_2(t)\xi|\int_{\vartheta}^{t} e_{((\ominus\alpha_2)(\theta_2^*))\oplus(\ominus\alpha_1)}(t,\tau)\Delta\tau \\
&\le \|B\|\left(\frac{K_1K_2(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1(1-\kappa^*)}\right)|Y_2(t)\xi| = \zeta_2|Y_2(t)\xi|.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

直接可证得

$$
\begin{aligned}
Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t) &= X(t)(I-P)X^{-1}(t)Y(t)QY^{-1}(t) \\
&\quad - X(t)PX^{-1}(t)Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t), \\
Y(t)QY^{-1}(t) - X(t)PX^{-1}(t) &= X(t)(I-P)X^{-1}(t) - Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t).
\end{aligned}
$$

因为在 (4.31) 和 (4.32) 中，ξ 是任意的，则

$$
\begin{aligned}
|Y(t)QY^{-1}(t)| &\le \zeta_1|Y(t)QY^{-1}(t)| + \zeta_2|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| \\
&\quad + |X(t)PX^{-1}(t)|, \\
|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| &\le \zeta_1|Y(t)QY^{-1}(t)| + \zeta_2|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| \\
&\quad + |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
|Y(t)QY^{-1}(t)| + |Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)| &\le 2\zeta(|Y(t)QY^{-1}(t)| \\
&\quad + |Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)|) + K_1 + K_2,
\end{aligned}
$$

即，

$$\max\{|Y(t)QY^{-1}(t)|,|Y(t)(I-Q)Y^{-1}(t)|\} \le \frac{K_1+K_2}{1-2\zeta}.$$

因此，(4.27) 成立，定理证毕.

注4.3. *在定理 4.10 中，(4.19) 指数型二分性的指数率是随着时标的变化而变化的，一旦时标取定，指数率则保持定值.*

下面我们研究 (4.1) 和 (4.20) 解之间的关系. 通过类似于文献 [146] 中命题 2.2 的证明，可以推出下面的引理

引理4.8. *若 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足二分性 (指数型二分性或者通常二分性) 且 $X(\vartheta)=I$，则存在一个具有投影 P_0 的二分性 (指数型二分性或者通常二分性) 使得 $P_0[\mathbb{R}^n]=U_0$，其中 $U_0\subset\mathbb{R}^n$ 是满足当 $t\to\infty$ 时，轨线就趋于零的 (4.1) 的解的初始值组成的空间.*

定理4.11. *若 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足通常二分性，且 $B(t),f(t)\in L$，则在 (4.1) 和 (4.20) 的有界解之间存在一个一一映射使得当 $t\to\infty$ 时，二者有界解之间的距离趋于零.*

证明. 根据引理 4.8, (4.1) 有投影为 P_0 的通常二分性且满足 $P_0[\mathbb{R}^n]=U_0$，即对于任意向量 $\xi\in\mathbb{R}^n$，当 $t\to\infty$ 时，有 $|X(t)P_0\xi|\to 0$. 选取一个足够大的 $t_N\in\mathbb{T}^+$ 使得

$$\hbar=\max\{\frac{K_1(1+\alpha_1\chi)}{\alpha_1},\frac{K_2}{\alpha_2}\}\int_{t_N}^{\infty}|B(\tau)|\Delta\tau<1.$$

对于 $y(t)\in BC$，定义映射 T 为

$$\begin{aligned}(Ty)(t)=&\int_{t_N}^{t}X(t)P_0X^{-1}(\sigma(\tau))(B(\tau)y(\tau)+f(\tau))\Delta\tau\\&-\int_{t}^{\infty}X(t)(I-P_0)X^{-1}(\sigma(\tau))(B(\tau)y(\tau)+f(\tau))\Delta\tau.\end{aligned}$$

重复引理 4.4 的讨论，可推得 $T:BC\to BC$ 且 $\|Ty_1-Ty_2\|\le\hbar\|y_1-y_2\|$. 假设 $x(t)$ 是 (4.1) 的任意一个解，我们考虑如下的系统

$$y(t)=x(t)+(Ty)(t). \tag{4.33}$$

利用压缩映像原理可知 (4.33) 有唯一一个有界解 $y(t)$. 显然，有界解 $y(t)$ 是 (4.20) 的一个解. 另一方面，如果 $y(t)$ 是 (4.20) 的一个有界解，那么 $x(t)=y(t)-(Ty)(t)$ 是 (4.1) 的一个有界解. 这说明我们可以在 (4.1) 和 (4.20) 的有界解之间建立一个一

一映射。此外，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个足够大的 $t_\epsilon \geq t_N$ 使得

$$\frac{K_2}{\alpha_2}\int_{t_\epsilon}^{\infty}|B(\tau)|(|y(\tau)| + |f(\tau)|)\Delta\tau \leq \epsilon.$$

因此，

$$|(Ty)(t)| \leq |X(t)P_0\int_{t_N}^{t_\epsilon} X^{-1}(\sigma(\tau))[B(\tau)y(\tau) + f(\tau)]\Delta\tau| + \epsilon < 2\epsilon.$$

这意味着当 $t \to \infty$ 时，有 $y(t) - x(t) \to 0$. 定理证毕.

在 (4.20) 中，令 $B(t) \equiv 0$，则我们得到

推论4.1. *假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}^+$ 上满足通常二分性，则非齐次时标动力学方程 $y^\Delta(t) = A(t)y + f(t)$ 至少有一个有界解且满足对于每个固定 $f \in L$，当 $t \to \infty$ 时，这个有界解趋于零.*

§4.5 指数型二分性存在的判别准则

为了研究高维时标动力学方程周期解存在性，现在我们给出线性时标动力学方程指数型二分性存在的判别准则。为了利于下面的讨论，不失一般性，在定义4.1中，令

$$K=\max\{K_1,K_2\},\quad \alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}.$$

§4.5.1 判别准则 I

现在利用行占优，列占优条件建立线性时标动力学方程 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性的充分条件。

定理4.12. *若 $A(t)$ 是一致有界的，并且存在 $\delta>0$ 使得*

$$|a_{ii}(t)|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}(t)|-\frac{1}{2}\mu(t)\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|\right)^2\geq 2\delta+\delta^2\mu(t),\quad t\in\mathbb{T}, i=1,2,\cdots,n, \tag{4.34}$$

则 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性。

证明. 由 (4.34) 能够看出对于 $i=1,2,\cdots,n$, a_{ii} 在 $\mathbb{T}$ 上保持常号. 不妨可以假设存在一个整数 $1\leq k\leq n$ 使得

$$a_{ii}\begin{cases}>0, & 1\leq i\leq k,\\ <0, & n\geq i>k.\end{cases}$$

令 $x(t)$ 是 (4.1) 的任意一个非平凡解，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|x_i(t)|^2)^{\Delta}&=\frac{1}{2}(x_i(t)+x_i^{\sigma}(t))x_i^{\Delta}(t)=\frac{1}{2}(2x_i(t)+\mu(t)x_i^{\Delta}(t))x_i^{\Delta}(t)\\ &=x_i(t)x_i^{\Delta}(t)+\frac{1}{2}\mu(t)(x_i^{\Delta}(t))^2\\ &=a_{ii}(t)|x_i(t)|^2+\sum_{j\neq i}a_{ij}(t)x_i(t)x_j(t)\\ &\quad+\frac{1}{2}\mu(t)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)\right)^2.\end{aligned}\tag{4.35}$$

首先，我们将要证明 $|x(t)|$ 在 $\mathbb{T}$ 上不存在局部极大值。如若不然，假设 $|x(t)|$ 在某个 $s\in\mathbb{T}$ 达到局部极大值。则对于某个 $1\leq i\leq n$，令 $|x(s)|=|x_i(s)|$，由 (4.35) 推

得

$$\left[a_{ii}(s)-\sum_{j\neq i}|a_{ij}(s)|-\frac{1}{2}\mu(s)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)\right)^2\right]|x_i(s)|^2\leq\frac{1}{2}(|x_i(s)|^2)^{\Delta}$$
$$\leq\left[a_{ii}(s)+\sum_{j\neq i}|a_{ij}(s)|+\frac{1}{2}\mu(s)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s)\right)^2\right]|x_i(s)|^2.$$

根据 (4.34), 有

$$\frac{1}{2}(|x_i(s)|^2)^{\Delta}\geq(2\delta+\delta^2\mu(s))|x_i(s)|^2>0. \tag{4.36}$$

显然，这是一个矛盾。因此, $|x(t)|$ 在 $\mathbb{T}$ 上不存在局部极大值.

其次，对于任意给定的 $s\in\mathbb{T}$, 我们将要出示对于所有 $t\geq s, t\in\mathbb{T}$, $|x(t)|$ 是一个严格增加函数的充要条件是存在某个 $i\leq k$ 使得 $|x(s)|=|x_i(s)|$. 实际上, 若存在一个 $i_0\leq k$ 且 $s\in\mathbb{T}$ 使得 $|x(s)|=|x_{i_0}(s)|$, 那么由 (4.36) 推得对于充分小的 h 且 $s+h\in\mathbb{T}$, 有 $|x_{i_0}(s)|<|x_{i_0}(s+h)|$, 从而

$$|x(s)|=|x_{i_0}(s)|<|x_{i_0}(s+h)|\leq|x(s+h)|.$$

若存在 $t_1,t_2\in\mathbb{T}$, $t_2>t_1\geq s$ 使得 $|x(t_1)|\geq|x(t_2)|$, 则可推得 $|x(t)|$ 在 $(s,t_2)\subset\mathbb{T}$ 上有局部极大值. 这个矛盾说明了对于任意 $t_1,t_2\in\mathbb{T}$, $t_2>t_1\geq s$, $|x(t_2)|>|x(t_1)|$. 反之, 假设 $|x(t)|$ 是严格增加函数. 则对于所有 $i\leq k, s\in\mathbb{T}$, $|x(s)|\neq|x_i(s)|$, 于是对于充分小的 $h>0$, $s+h\in\mathbb{T}$, 可以找到一个 $i_0>k$ 使得 $|x(s+h)|=|x_{i_0}(s+h)|$. 类似上面讨论，可求得

$$\frac{1}{2}(|x_{i_0}(s+h)|^2)^{\Delta}\leq-(2\delta+\delta^2\mu(s+h))|x_{i_0}(s+h)|^2<0. \tag{4.37}$$

由 (4.37) 可知 $|x_{i_0}(s+h)|<|x_{i_0}(s)|$, 从而有 $|x(s+h)|<|x(s)|$. 这显然是一个矛盾.

现在证明存在一个 k 维子空间 $V_1\in\mathbb{R}^n$ 使得 $x(t)\in V_1$ 是一个严格增加函数. 令 $X(t)$ 是 (4.1) 的一个基本解矩阵, V_1 是由一切向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,0,\cdots,\cdots,0)^T$ 所组成的 k 维子空间. 取一个序列 $\{s_m\}\subset\mathbb{T}$ 使得 $s_m\to-\infty(m\to\infty)$. 定义 $U_m=X^{-1}(s_m)V_1$, 则 U_m 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子空间. 定义 $\xi_m^1,\xi_m^2,\cdots,\xi_m^k$ 为 U_m 的一个标准正交基底. 通过单位球的紧性, 可得存在一个整数序列 $\{m_v\}(m_v\to+\infty(\ v\to+\infty))$ 和正交单位向量 $\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^k$ 使得当 $v\to+\infty$ 时, 有 $\xi_{m_v}^i\to\xi^i(i=1,2,\cdots,k)$. $x^j(t)$ 是 (4.1) 满足初始条件 $x^j(\vartheta)=\xi^j$ 的一个解, $j=1,2,\cdots,k$, 则 $x^1(t),x^2(t),\cdots,x^k(t)$ 是线性无关的. 考虑 (4.1) 的任一非平凡解的线性组合

$$x(t)=a_1x^1(t)+a_2x^2(t)+\cdots+a_kx^k(t),\quad a_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\cdots,k),$$

将证明 $|x(t)|$ 在 $\mathbb{T}$ 上是严格增加函数。若 $x_{m_v}(t)$ 是 (4.1) 满足初值条件 $x_{m_v}(\vartheta)=\sum_{j=1}^{k}a_j\xi^j_{m_v}(t)$ 的一个解，则当 $v\to+\infty$，对于任意 $t\in\mathbb{T}$，有 $x_{m_v}(t)\to x(t)$。因为 $x_{m_v}(\vartheta)\in U_{m_v}$，所以可得 $x_{m_v}(s_{m_v})\in V_1$ 且对于 $t\geq s_{m_v}$，$|x_{m_v}(t)|$ 是一个严加增加函数。对于 $t_1,t_2\in\mathbb{T}$ 且 $t_2>t_1$，和充分大的 v，有 $|x_{m_v}(t_2)|>|x_{m_v}(t_1)|$，进而得 $|x(t_2)|\geq|x(t_1)|$。因为 t_1,t_2 是任意的，可推知在 $\mathbb{T}$ 上 $|x(t)|$ 是非减的。如果 $|x(t)|$ 在 $\mathbb{T}$ 上不是严格增加函数，则存在 $t_1<t_2$ 使得 $x(t_1)=x(t_2)$，从而将能够找到一个区间 $I\subset\mathbb{T}$ 使得 $|x(t)|$ 在 I 上是常值。因此，$|x(t)|$ 有一个局部极大值，这是一个矛盾。因此，$|x(t)|$ 在 $\mathbb{T}$ 上是严格增加的。这意味着存在一个 k 维子空间 V_1 使得 $x(t)\in V_1$ 是一个严格增加函数。

若 $x(t)\in V_1$ 是 (4.1) 的一个非平凡解，则存在一个 $i\leq k$ 使得对于 $\tau\in\mathbb{T}$，有 $|x(\tau)|=|x_i(\tau)|$。若 τ 是右散的，由 (4.36) 可知

$$\begin{aligned}(2\delta+\delta^2\mu(\tau))(|x(\tau)|^2)&=(2\delta+\delta^2\mu(\tau))(|x_i(\tau)|)\leq(|x_i(\tau)^2|)^{\Delta}\\&=\frac{|x_i(\sigma(\tau))|^2-|x_i(\tau)|^2}{\mu(\tau)}\\&\leq\frac{|x(\sigma(\tau))|^2-|x(\tau)|^2}{\mu(\tau)}=(|x(\tau)|^2)^{\Delta}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

若 τ 是右稠的，则

$$\begin{aligned}(2\delta+\delta^2\mu(\tau))(|x(\tau)|^2)&=(2\delta+\delta^2\mu(\tau))(|x_i(\tau)|)\leq(|x_i(\tau)^2|)^{\Delta}\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{|x_i(\tau+h)|^2-|x_i(\tau)|^2}{h}\\&\leq\lim_{h\to0^+}\frac{|x(\tau+h)|^2-|x(\tau)|^2}{h}=(|x(\tau)|^2)^{\Delta}.\end{aligned}\tag{4.39}$$

由 (4.38) 和 (4.39) 可得

$$(2\delta+\delta^2\mu(\tau))(|x(\tau)|^2)\leq(|x(\tau)|^2)^{\Delta},\quad\forall\tau\in\mathbb{T}.\tag{4.40}$$

从 s 到 t 积分 (4.40)，有

$$|x(t)|\geq e_{\delta}(t,s)|x(s)|,\quad t\geq s.$$

对于 $x(t)\in\mathbb{R}^n/V_1$，类似可得

$$|x(t)|\leq e_{\ominus\delta}(t,s)|x(s)|,\quad t\geq s.$$

令

$$x(t)=X(t)PX^{-1}(s)x_0,\quad x(s)=X(s)PX^{-1}(s)x_0,\quad i>k$$

和

$$x(t)=X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_0,\ \ x(s)=X(s)(I-P)X^{-1}(s)x_0,\ \ i\le k,$$

其中 P 是一个投影和 x_0 是 (4.1) 的任意一个初始值。因为 $A(t)$ 是一致有界的，所以存在一个常数 $N_1>0$ 使得 $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}}|A(t)|\le N_1$, 从而得到

$$|X(t)X^{-1}(s)|\le e_{N_1}(t,s),\ \ t\ge s.$$

因此, 根据定理 4.2, (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性。定理证毕。

因为 $A^T(t)$ 和 $A(t)$ 具有相同的特征值，同理可证

定理4.13. 若 $A(t)$ 是一致有界的. 且存在 $\delta_0>0$ 使得

$$|a_{ii}(t)|-\sum_{j\ne i}|a_{ji}(t)|-\frac{1}{2}\mu(t)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}(t)|\right)^2\ge 2\delta_0+\delta_0^2\mu(t),\ \ t\in\mathbb{T},\ i=1,2,\cdots,n, \tag{4.41}$$

则 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性。

§4.5.2 判别准则 II

现在我们考虑另一种线性时标动力学方程

$$x^{\Delta}(t)=A(t,u(t))x(t), \tag{4.42}$$

其中 $u\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$, $A(t,u(t))\in\mathcal{R}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵函数。

定理4.14. 假设 $A(t,u)$ 在 $\mathbb{T}\times S$ 上是一致有界的，其中 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是紧的。而且，存在一个对称的，非奇异矩阵函数 $H(t)\in C^1_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{n\times n})$ 满足

(i) 存在一个正常数 ρ 使得 $|H(t)|\le\rho^2$;

(ii) 矩阵 $H(t)$ 的所有特征值 $\lambda_i(t)$ 都大于某个正常数 η, 也就是说, $|\lambda_i(t)|\ge\eta>0$, $i=1,2,\cdots,n$;

(iii) 存在 $\nu>0$ 使得矩阵

$$N(t,u)=A^T(t,u)H(t)+[1+\mu(t)A^T(t,u)][H(t)^{\Delta}+H(\sigma(t))A(t,u)]$$

的所有特征值 $\lambda_i^*(t,u)$ 都小于 $-[2\nu\rho+\nu^2\mu(t)]$, 即, $\lambda_i^*(t,u)\le-[2\nu\rho+\nu^2\mu(t)]<0(i=1,2,\cdots,n)$,

则 (4.42) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性，即存在一个投影 P 和正常数 α, K 使得

$$|X_u(t)PX_u(s)|\le Ke_{\ominus\alpha}(t,s),\ \ t\ge s;\qquad |X_u(t)(I-P)X_u(s)|\le Ke_{\ominus\alpha}(s,t),\ \ t\le s,$$

其中 $X_u(t)$ 是 (4.42) 的一个基本解矩阵且满足 $X_u(\vartheta)=I$.

证明. 定义 $V(t,x)=x^T(t)H(t)x(t)$, 则

$$|V(t,x)|\le \rho^2|x(t)|^2,\quad t\in\mathbb{T}. \tag{4.43}$$

设 $x(t)$ 是 (4.42) 满足初始值 $x(t_0)=x_0$ 的一个有界解, 则

$$\begin{aligned}
V^{\Delta}(t,x) &= (x^T(t))^{\Delta}H(t)x(t)+x^T(\sigma(t))H^{\Delta}(t)x(t)+x^T(\sigma(t))H(\sigma(t))x^{\Delta}(t)\\
&= x^T(t)A^T(t,u)H(t)x(t)+[x^T(t)+\mu(t)(x^T(t))^{\Delta}]H^{\Delta}(t)x(t)\\
&\quad +[x^T(t)+\mu(t)(x^T(t))^{\Delta}]H(\sigma(t))A(t,u)x(t)\\
&= x^T(t)A^T(t,u)H(t)x(t)+x^T(t)[1+\mu(t)A^T(t,u)]H^{\Delta}(t)x(t)\\
&\quad +x^T(t)[1+\mu(t)A^T(t,u)]H(\sigma(t))A(t,u)x(t)\\
&= x^T(t)\{A^T(t,u)H(t)\\
&\quad +[1+\mu(t)A^T(t,u)][H^{\Delta}(t)+H(\sigma(t))A(t,u)]\}x(t)\\
&\le -[2\nu\rho+\nu^2\mu(t)]|x(t)|^2.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

不失一般性. 对于 $H(t)$, 可以假设

$$\lambda_i\le-\eta<0,\ i=1,2,\cdots,k;\qquad \lambda_j\ge\eta>0,\ j=k+1,k+2,\cdots,n,$$

则存在子空间 V_1 和 V_2 使得 $\mathbb{R}^n=V_1\bigoplus V_2$. 而且,

$$V(t,x_0)\le-\eta|x_0|^2,\ x_0\in V_1;\qquad V(t,x_0)\ge\eta|x_0|^2,\ x_0\in V_2.$$

假定 $x_0\in V_1$, 由 (4.44) 可得 (4.42) 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 满足

$$V(t,x)\le V(t_0,x_0)\le-\eta|x_0|^2,\quad t\ge t_0. \tag{4.45}$$

类似于定理 4.12 的讨论, 我们能够推出存在一个 k 维子空间 $Q_1\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$V(t,x(t))\le 0,\quad x(t)\in Q_1.$$

因为 $V(t,x)$ 是一个二次型, 我们有

$$V(t,x)\le-\eta|x(t)|^2\quad x(t)\in Q_1. \tag{4.46}$$

注意到对于 $x(t)\in Q_1$, $V(t,x)\le 0$, 由 (4.43) 和 (4.44) 可求出对于 $x(t)\in Q_1$ 有

$$\begin{aligned}
V^{\Delta}(t,x) &\le -(2\nu\rho+\nu^2\mu(t))|x(t)|^2\le-\frac{[2\nu\rho+\nu^2\mu(t)]}{\rho^2}|V(t,x)|\\
&= \left(\frac{\nu}{\rho}\oplus\frac{\nu}{\rho}\right)V(t,x),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

从 s 到 t 积分 (4.47), 对于 $t \geq s$, 得到

$$V(t, x(t)) \leq e_{\frac{\nu}{\rho} \oplus \frac{\nu}{\rho}}(t, s) V(s, x(s)). \tag{4.48}$$

利用 (4.43), (4.46) 和 (4.48), 可证得

$$|x(t)|^2 \geq \frac{|V(t, x(t))|}{\rho^2} \geq \frac{e_{\frac{\nu}{\rho} \oplus \frac{\nu}{\rho}}(t, s)|V(s, x(s))|}{\rho^2} \geq \frac{\eta}{\rho^2} e_{\frac{\nu}{\rho} \oplus \frac{\nu}{\rho}}(t, s)|x(s)|^2, \quad t \geq s;$$

即

$$|x(s)| \leq \frac{\rho}{\sqrt[2]{\eta}} e_{\ominus \frac{\nu}{\rho}}(t, s)|x(t)|, \quad t \geq s.$$

因此,

$$|x(t)| \leq \frac{\rho}{\sqrt[2]{\eta}} e_{\ominus \frac{\nu}{\rho}}(s, t)|x(s)|, \quad s \geq t.$$

通过类似的讨论, 容易证得存在一个 $n-k$ 维子空间 $Q_2 \in \mathbb{R}^n$ 使得对于 $x(t) \in Q_2$, 有

$$|x(t)| \leq \frac{\rho}{\sqrt[2]{\eta}} e_{\ominus \frac{\nu}{\rho}}(t, s)|x(s)|, \quad t \geq s,$$

其中 $Q_1 \bigoplus Q_2 = \mathbb{R}^n, Q_1 \bigcap Q_2 = \emptyset$.

$A(t,u)$ 在 $\mathbb{T} \times S$ 上是一致有界的, 所以存在一个正常数 N_2 使得 $\sup\limits_{t \in \mathbb{T}, u \in S} |A(t,u)| \leq N_2$. 因此, 对于任意 $s \in \mathbb{T}$, 可得 $|X_u(t) X_u^{-1}(s)| \leq e_{N_2}(t, s)$. 令

$$x(t) = X(t) P X^{-1}(s) x_0, \quad x(s) = X(s) P X^{-1}(s) x_0, \quad x_0 \in Q_2$$

和

$$x(t) = X(t)(I - P) X^{-1}(s) x_0, \quad x(s) = X(s)(I - P) X^{-1}(s) x_0, \quad x_0 \in Q_1,$$

其中 P 是一个投影, x_0 是 (4.42) 的任意一个初始值. 根据定理 4.2, (4.42) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性. 定理证毕.

§4.6 高维时标动力学方程的周期解

现在，我们将利用指数型二分性讨论高维时标动力学方程的周期解存在性. 为了研究时标动力学方程的周期解问题，本节我们都假设时标 $\mathbb{T}$ 为 ω- 周期的, 即, $t\in\mathbb{T}$ 意味着 $t\pm\omega\in\mathbb{T}$. 考虑半线性和非线性时标动力学方程

$$x^{\Delta}=A(t)x+f(t,x) \tag{4.49}$$

和

$$x^{\Delta}=A(t,x)x+f(t,x), \tag{4.50}$$

其中 $A(t),A(t,x(t))\in\mathcal{R}$ 是 ω 周期函数，并且 $f\in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 也是 ω 周期的. 根据文献 [5] 的第八章, 易知 (4.49) 和 (4.50) 的解在整个 $\mathbb{T}$ 上都存在.

在证明 (4.49) 和 (4.50) 周期解存在性以前，我们需要做一些必要的准备.

引理4.9. *若 $X(t)$ 是 (4.1) 的一个基本解矩阵，则 $X(t+\omega)$ 也是 (4.1) 的一个基本解矩阵，而且，对于 $t,s\in\mathbb{T}$, 有*

$$\begin{aligned}X(t+\omega)PX^{-1}(s+\omega)&=X(t)PX^{-1}(s)\\X(t+\omega)(I-P)X^{-1}(s+\omega)&=X(t)(I-P)X^{-1}(s).\end{aligned} \tag{4.51}$$

证明. $detX(t)\neq0$ 且 $X^{\Delta}(t)=A(t)X(t)$, 能够推出

$$detX(t+\omega)\neq0,\quad X(t+\omega)^{\Delta}=A(t+\omega)X(t+\omega)=A(t)X(t+\omega),$$

于是 $X(t+\omega)$ 也是 (4.1) 的一个基本解矩阵. 由基本解矩阵的性质知存在一个 n 维常向量 C_0 使得

$$X(t+\omega)=X(t)C_0,\quad t\in\mathbb{T}.$$

则

$$X(t+\omega)PX^{-1}(s+\omega)=X(t)C_0PC_0^{-1}X^{-1}(s)=X(t)PX^{-1}(s)$$

和

$$X(t+\omega)(I-P)X^{-1}(s+\omega)=X(t)C_0(I-P)C_0^{-1}X^{-1}(s)=X(t)(I-P)X^{-1}(s).$$

引理4.10. *假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性，且 $g\in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T})$ 也是一个 ω 周期函数，则*

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s-\int_{t}^{+\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s$$

是方程 $x^{\Delta}(t)=A(t)x(t)+g(t)$ 的一个 ω 周期解.

证明. 显然, $x(t)$ 是 $x^{\Delta}(t)=A(t)x(t)+g(t)$ 的一个解。因为 $g(t)$ 是 ω 周期的,由引理 4.9 知, 对于任意 $t\in\mathbb{T}$, 可求得

$$\begin{aligned}
x(t+\omega)&=\int_{-\infty}^{t+\omega}X(t+\omega)PX^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s\\
&\quad-\int_{t+\omega}^{+\infty}X(t+\omega)(I-P)X^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s\\
&=\int_{-\infty}^{t}X(t+\omega)PX^{-1}(\sigma(s+\omega))g(s+\omega)\Delta s\\
&\quad-\int_{t}^{+\infty}X(t+\omega)(I-P)X^{-1}(\sigma(s+\omega))g(s+\omega)\Delta s\\
&=\int_{-\infty}^{t}X(t+\omega)PX^{-1}(\sigma(s)+\omega)g(s+\omega)\Delta s\\
&\quad-\int_{t}^{+\infty}X(t+\omega)(I-P)X^{-1}(\sigma(s)+\omega)g(s+\omega)\Delta s\\
&=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s-\int_{t}^{+\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s\\
&=x(t).
\end{aligned}$$

引理4.11. 假设 (4.42) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性, $g(t)\in C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T})$ 是 ω 周期的,则

$$x_u(t)=\int_{-\infty}^{t}X_u(t)PX_u^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s-\int_{t}^{+\infty}X_u(t)(I-P)X_u^{-1}(\sigma(s))g(s)\Delta s$$

是方程 $x^{\Delta}(t)=A(t,u(t))x(t)+g(t)$ 的一个 ω 周期解。

类似于引理 4.2 的讨论, 可知

引理4.12. 对于任意 $t\in\mathbb{T}$, $\alpha>0$, 下面的不等式成立

$$\int_{-\infty}^{t}e_{\ominus\alpha}(t,\sigma(s))\Delta s\le\frac{R_1}{1-e_{\ominus\alpha}(\vartheta+\omega,\vartheta)},\quad \int_{t}^{+\infty}e_{\ominus\alpha}(\sigma(s),t)\Delta s\le\frac{R_2}{1-e_{\ominus\alpha}(\vartheta+\omega,\vartheta)},$$

其中

$$R_1=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}(1+\mu(s)\alpha)\Delta s,\quad R_2=\int_{\vartheta}^{\vartheta+\omega}(1+\mu(s)\alpha)^{-1}\Delta s.$$

现在我们给出 (4.49) 和 (4.50) 周期解存在性定理。

定理4.15. 假设 (4.42) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性。而且, 存在 $M_1>0$ 使得

$$\frac{K(R_1+R_2)}{1-e_{\ominus\alpha}(\vartheta+\omega,\vartheta)}\sup_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega],|x|\le M_1}|f(t,x)|\le M_1,$$

则 (4.50) 有一个 ω 周期解。

证明. 定义

$$B = \{u \in \mathrm{C}(\mathbb{T}):\ u(t+\omega) = u(t),\ t \in \mathbb{T}\},\quad |u| = \sup_{t\in\mathbb{T}} |u(t)|.$$

易证 B 是一个 Banach 空间。取

$$B_0 = \{u \in B:\ |u| \le M_1\},$$

显然, B_0 是 B 的一个凸闭集。对于 $u \in B_0$, 考虑下面的系统

$$x^{\Delta}(t) = A(t, u(t))x(t) + f(t, u(t)). \tag{4.52}$$

因为 (4.42) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性, 根据引理 4.11, (4.52) 有一个 ω 周期解 $x_u(t)$ 满足

$$x_u(t) = \int_{-\infty}^{t} X_u(t)PX_u^{-1}(\sigma(s))f(s,u(s))\Delta s - \int_{t}^{+\infty} X_u(t)(I-P)X_u^{-1}(\sigma(s))f(s,u(s))\Delta s$$

由指数型二分性和引理 4.12 得

$$\begin{aligned}
|x_u(t)| &\le \int_{-\infty}^{t} |X_u(t)PX_u^{-1}(\sigma(s))f(s,u(s))|\Delta s \\
&\quad + \int_{t}^{+\infty} |X_u(t)(I-P)X_u^{-1}(\sigma(s))f(s,u(s))|\Delta s \\
&\le \left(\int_{-\infty}^{t} Ke_{\ominus\alpha}(t,\sigma(s))\Delta s + \int_{t}^{+\infty} Ke_{\ominus\alpha}(\sigma(s),t)\Delta s\right) \sup_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega],\|u\|\le M_1} |f(t,u)| \\
&\le \frac{K(R_1+R_2)}{1-e_{\ominus\alpha}(\vartheta+\omega,\vartheta)} \sup_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega],\|u\|\le M_1} |f(t,u)| \\
&\le M_1.
\end{aligned}$$

因此, 我们能够定义一个映射 $T: B_0 \to B_0$ 为 $Tu(t) = x_u(t)$。对于任意一个序列 $\{u_n(t)\} \subseteq B_0$, 重复上面的讨论, 可推得 $\{Tu_n(t)\}$ 是一致有界的。而且, 我们有

$$\begin{aligned}
|x_{u_n}^{\Delta}(t)| &= |A(t,u_n(t))x_{u_n}(t) + f(t,u_n(t))| \\
&\le |A(t,u_n(t))||x_{u_n}(t)| + |f(t,u_n(t))| \\
&\le \left(N^* + \frac{1-e_{\ominus\alpha}(\vartheta+\omega,\vartheta)}{K(R_1+R_2)}\right)M_1,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

其中

$$N^* = \sup_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega],\|u_n\|\le M_1} |A(t,u_n(t))|.$$

因此，$\{Tu_n(t)\}$ 是等度连续的。通过 Arzelà-Ascoli 定理, 序列 $\{x_{u_n}(t)\}$ 中存在一个一致收敛的子序列，不妨仍设为 $\{Tu_n(t)\}$。因为 $\{Tu_n(t)\}$ 是连续，ω 周期的, 则 $\{Tu_n(t)\}$ 是一致收敛的，于是可推得 $T(B_0)$ 在 B_0 中是相对紧的。

现证 T 是连续的。假设 $\{u_n(t)\} \subseteq B_0$ 且 $u_n(t) \to u(t)(n \to +\infty)$。因为 $u_n(t)$ 是连续，ω 周期的, 从而 $u_n(t)$ 一致收敛于 $u(t)$。由于 $x_{u_n}(t)$ 是连续的，易证 $x_{u_n}(t)$ 收敛于 $x_u(t)$, 即, $Tu_n \to Tu$, 这意味着 T 是一个连续映射。因此, 根据 Schauder's 不动点定理, T 在 B_0 中有一个不动点, 这说明存在一个 $u_0 \in B_0$ 使得 $Tu_0 = u_0$。因此, (4.50) 有一个 ω 周期解。定理证毕。

同理可证,

定理4.16. *假设 (4.1) 在 $\mathbb{T}$ 上满足指数型二分性。而且，存在 $M_2 > 0$ 使得*

$$\frac{K(R_1 + R_2)}{1 - e_{\ominus\alpha}(\vartheta + \omega, \vartheta)} \sup_{t\in[\vartheta,\vartheta+\omega],|x|\le M_2} |f(t,x)| \le M_2,$$

则 (4.49) 有一个 ω 周期解。

注4.4. *本章中, § 4.4, § 4.5 和 § 4.6 的主要结果发表在文献 [97] 中。*

第五章 总结与展望

本文主要研究和讨论了时标动力学方程周期解。分为三个部分，重合度和时标动力学方程周期解存在性，压缩映像原理和时标动力学方程周期解稳定性，以及指数型二分性和高维时标动力学方程周期解存在性。

本文首先基于重合度理论，建立了一些时标动力学方程周期解存在的判别准则，包括捕食者－食饵系统时标动力学方程，竞争系统时标动力学方程，单种群时标动力学方程和带有反馈控制的时标动力学方程。讨论了具有 Beddington–DeAngelis 功能性反应 (定理 2.1)，Holling 型功能性反应 (定理 2.2, 2.3)，半比率依赖功能性反应 (定理 2.4, 2.5) 的捕食者－食饵系统，带有偏差变元的一般 n 种群 Gilpin–Ayala 竞争系统 (定理 2.6)，两类单种群系统 (定理 2.7, 2.8, 2.9, 定理 2.11, 2.12)，带有反馈控制的单种群系统 (定理 2.14, 2.15, 2.16, 2.17) 周期解存在性。这些时标动力学方程不仅统一和扩展了微分方程与其两种不同的差分化 (利用带有逐段常值的微分方程的方法和在微分方程中直接将导数离散化的方法) 得到的差分方程的周期解存在性的研究，避免了重复讨论，而且还可以在更丰富的时间尺度上探索客观事物。其次，利用压缩映像原理，我们研究了一类半线性时标动力学方程周期解的渐近稳定性 (定理 (3.5))，和这类方程解的一致有界性 (定理 3.2)，一致最终有界性 (定理 3.3)，以及零解的渐近稳定性 (定理 3.4)。最后，我们通过指数型二分性讨论了高维时标动力学方程周期解的存在性 (定理 4.15, 4.16)。在这个过程中，我们给出了线性时标动力学方程指数型二分性的定义 (定义 4.1)，并得到了指数型二分性存在的充要条件 (定理 4.1, 4.3)，也研究了 Liapunov 函数与指数型二分性之间的关系 (定理 4.4)，以及非齐次线性时标方程的有界解与其相应的齐次线性时标动力学方程指数型二分性的关系 (定理 4.5, 4.6, 4.7)，其中着重讨论了指数型二分性中最重要的粗糙度理论，获得了具有指数型二分性的线性系统在一定条件的扰动下得到的线性系统仍具有指数型二分性的结论 (定理 4.8, 4.9, 4.10)。同时，建立了在行占优 (列占优) 条件下线性动力学方程指数型二分性存在的判别准则 (定理 4.12, 4.13, 4.14)。

本文对时标动力学方程的研究提出了一些新的想法，也得到了一些新的研究成果。然而时标动力学方程还是一门年轻的学科，还有无数的工作需要我们用毕生的精力去完成。虽然本文研究了时标动力学方程的周期解问题，然而，关于更加

复杂的回复性问题，如概周期，伪概周期等都还没有讨论。本文也对线性时标动力学方程的指数型二分性理论进行了系统的讨论。但是还有一些重要的结果没有被研究，如利用指数型二分性探讨非自治时标动力学方程的拓扑等价性和结构稳定性等。还有一个重要的问题是微分方程和差分方程之间具有显著的差异，如著名的单种群 Logistic 方程的正解都是单调的，而它的差分化虫口方程则有可能出现混沌。而到目前为止所有关于时标动力学方程的研究成果都是对微分方程和差分方程相类似的结论进行统一和推广，并没有利用时标动力学方程去刻画二者之间的差异性。一个挑战性的问题是：如何利用时标动力学方程去刻画微分方程与差分方程之间的差异性。此外，时标动力学方程具有广阔的应用前景，在生物学，物理学，经济学中都有潜在的应用价值，一个值得深思的问题是如何更好的利用时标动力学方程去描述和探讨客观事物。特别是在生物学中，种群动力学 [1]，传染病问题 [165]，生物入侵问题 [166, 167] 等都与时间尺度有密切的关系，如何利用时标动力学方程对于具有不同时间尺度的种群进行建模，讨论在生态系统中具有重要作用的生态机制，如 Allee 效应 [1]，共位群内捕食 [168]，中间捕食者释放效应 [166, 169]，似然竞争 [167, 170] 等在处于不同时间尺度时的生物框架是否会发生本质性变化，所有的这些都要求在时标动力学方程基础上进行系统性的研究。

参考文献

[1] Turchin P. Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis[M]. Princeton: Princeton University Press, 2003.

[2] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature, 1976, 261(5560): 459-467.

[3] Hilger S. Ein MaßKettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten[D]: [PhD thesis]. Germany: Universität Würzburg, 1988.

[4] Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results Math, 1990, 18: 18-56.

[5] Bohner M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications[M]. Boston: Birkhäuser, 2001.

[6] Agarwal R P, Bohner M. Basic calculus on time scales and some of its applications[J]. Results Math, 1999, 35(1-2): 3-22.

[7] Agarwal R P, Bohner M, O'Regan D, et al. Dynamic equations on time scales: a survey[J]. J Comput Appl Math, 2002, 141(1-2): 1-26.

[8] Bohner M, Guseinov G, Peterson A. Introduction to the Time Scales Calculus, Advances in Dynamic Equations on Time Scales[M]. Boston: Birkhäuser, 2003.

[9] Hilger S. Special functions, Lapalace and Fourier transform on measure chains[J]. Dynam System Appl, 1999, 8(3-4): 471-488.

[10] Lakshmikantham V, Sivasundaram S, Kaymakçalan B. Dynamic Systems on Measure Chains[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[11] Christiansen F B, Fenchel T M. Theories of Populations in Biological Communities, volume 20 of Lecture Notes in Ecological Studies[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[12] Barraclough R K. (Editor)Current Topics in Avian Disease Research: Understanding Endemic and Invasive Diseases[M]. American Ornithologists' Union: Ornithological Monographs No. 2006, Chapter 3.

[13] Bowman C, Gumel A B, Driessche P van den, et al. A mathematical model for assessing control strategies against West Nile virus[J]. Bull Math Biol, 2005, 67(5): 1107-1133.

[14] Spedding V. Taming nature's numbers, New Scientist: The Global Science and Technology Weekly[J]. 2003, 2404: 28-31

[15] McKellar R C, Knight K. A combined discrete-continuous model describing the lag phase of *Listeria monocytogenes*[J]. Int J Food Microbiol, 2000, 54(3): 171-180.

[16] Tisdell C, Zaidi A. Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear, dynamic equations on time scales with an application to economic modelling[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 68(11): 3504-3524.

[17] Erbe L, Peterson A. Green's functions and comparison theorems for differential equations on measure chains[J]. Dynam Contin Discrete Impuls Systems, 1999, 6(1): 121-137.

[18] Erbe L, Peterson A. Positive solutions for a nonlinear differential equation on a measure chain[J]. Math Comput Model, 2000, 32(5-6): 571-585.

[19] Agarwal R P, O'Regan D. Nonlinear boundary value problems on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2001, 44(4): 527-535.

[20] Agarwal R P, Bohner M, O'Regan D. Time scale boundary value problems on infinite intervals[J]. J Comput Appl Math, 2002, 141(1-2): 27-34.

[21] Wong P J Y. Abel-Gontscharoff boundary value problems on measure chains[J]. J Comput Appl Math, 2002, 142(2): 331-355.

[22] Anderson D R. Eigenvalue intervals for a two-point boundary value problem on a measure chain[J]. J Comput Appl Math, 2002, 141(1) 57-64.

[23] Cabada A. Extremal solutions and Green's functions of higher order periodic boundary value problems in time scales[J]. J Math Anal Appl, 2004, 290(1): 35-54.

[24] Merdivenci Atici F, Biles D C. First order dynamic inclusions on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2004, 292(1): 222-237.

[25] Amster P, Rogers C, Tisdell C C. Existence of solutions to boundary value problems for dynamic systems on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2005, 308(2): 565-577.

[26] Dolyšlý O, Hilger S. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm-Liouville dynamic equation on time scales[J]. J Comput Appl Math, 2002, 141(1-2): 147-158.

[27] Erbe L, Peterson A. Averaging techniques for self-adjoint matrix equations on a measure chain[J]. J Math Anal Appl, 2002, 271(1): 31-58.

[28] Erbe L, Peterson A. Boundedness and oscillation for nonlinear dynamic equations

on a time scale[J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132(3): 735-744.

[29] Bohner M, Erbe L, Peterson A. Oscillation for nonlinear second order dynamic equations on a time scale[J]. J Math Anal Appl, 2005, 301(2): 491-507.

[30] Saker S H. Oscillation of second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales[J]. J Comput Appl Math, 2006, 187(2): 123-141.

[31] Hassan T S. Oscillation criteria for half-linear dynamic equations on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2008, 345(1), 176-185.

[32] Feng M Q, Zhang X M, Ge W G. Positive solutions for a class of boundary value problems on time scales[J]. Comput Math Appl, 2007, 54(4): 467-475.

[33] Tian Y, Ge W G. Existence and uniqueness results for nonlinear first-order three-point boundary value problems on time scale[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 69(9): 2833-2842.

[34] Feng M Q, Feng H Y, Zhang X M, Ge W G. Triple positive solutions for a class of m-point dynamic equations on time scales with p-Laplacian[J]. Math Comput Model, 2008, 48(7-8): 1213-1226.

[35] He Z M. Existence of two solutions of m-point boundary value problem for second order dynamic equations on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2004, 296(1): 97-109.

[36] He Z M. Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales[J]. J Comput Appl Math, 2005, 182(2): 304-315.

[37] He Z M, Long Z W. Three positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 69(2): 569-578.

[38] Sun H R, Li W T. Positive solutions for nonlinear three-point boundary value problems on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2004, 229(2): 508-524.

[39] Sun J P, Li W T. Positive solution for system of nonlinear first-order PBVPs on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2005, 62(1): 131-139.

[40] Sun H R, Li W T. Existence theory for positive solutions to one-dimensional p-Laplacian boundary value problems on time scales[J]. J Differ Equations, 2007, 240(2): 217-248.

[41] Sun J P, Li W T. Positive solutions to nonlinear first-order PBVPs with parameter on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 70(3): 1133-1145.

[42] Su Y H, Li W T. Triple positive solutions of m-point BVPs for p-Laplacian dynamic equations on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 69(11): 3811-3820.

[43] Song C X, Weng P X. Multiple positive solutions for p-Laplacian functional dynamic equations on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 68(1): 208-215.

[44] Wang Z Y, Weng P X. Existence of solutions for first order PBVPs with impulses on time scales[J]. Comput Math Appl, 2008, 56(8): 2010-2018.

[45] Geng F J, Zhu D M. Multiple results of p-Laplacian dynamic equations on time scales[J]. Appl Math Comput, 2007, 193(2): 311-320.

[46] Geng F J, Xu Y C, Zhu D M. Periodic boundary value problems for first-order impulsive dynamic equations on time scales[J]. Nonlinear Analy-Theor, 2008, 69(11): 4074-4087.

[47] 孙建平. 测度链上的动力方程边值问题 [D]: [博士论文]. 兰州: 兰州大学数学与统计学院, 2007.

[48] Han Z L, Sun S R, Shi B. Oscillation criteria for a class of second-order Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(2): 847-858.

[49] Zhu Z Q, Wang Q R. Frequency measures on time scales with applications[J]. J Math Anal Appl, 2006, 319(2): 398-409.

[50] Zhu Z Q, Wang Q R. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2007, 335(2): 751-762.

[51] Liu A L, Wu H, Zhu S M, et al. Oscillation for nonautonomous netral dynamic delay equations on time scales[J]. Acta Math Sci, 2006, 26(1): 99-106.

[52] Zhang B G, Deng Xinghua. Oscillation of delay diferential eq uations on time Scales [J]. Math Comput Model, 2002, 36: 1307-1318.

[53] 张炳根，测度链上微分方程的进展，中国海洋大学学报，2004, 34: 907-912.

[54] Zhang B G, Fu Y L. The distribution of generalized zeros of solutions of delay diferential equations on time scales[J]. J Differ Equations Appl, 2004, 9: 637-650.

[55] Fan M, Wang K. Periodic solutions of a discrete time nonautonomous ratio-dependent predator-prey system[J]. Math Comput Model, 2002, 35(9-10): 951-961.

[56] Fan M, Agarwal S. Periodic solutions for a class of discrete time competition systems[J]. Nonlinear Stud, 2002, 9(3): 249-261.

[57] Fan M, Wang K. Global periodic solutions of a generalized n-species Gilpin–Ayala

competition model[J]. Comput Math Appl. 2000, 40(10-11): 1141-1151.

[58] Fan M, Wang K. Periodicity in a delayed ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Anal Appl, 2001, 262(2): 179-190.

[59] Fan M, Wang Q. Periodic solutions of a class of nonautonomous discrete time semi-ratio-dependent predator-prey systems[J]. Discrete Contin Dynam Systems Ser B, 2004, 4(3): 563-574.

[60] Huo H F. Periodic solutions for a semi-ratio-dependent predator-prey system with functional responses[J]. Appl Math Lett, 2005, 18(3): 313-320.

[61] Li Y K. Periodic solutions of a periodic delay predator-prey system[J]. Proc Amer Math Soc, 1999, 127(5): 1331-1335.

[62] Wang Q, Fan M, Wang K. Dynamics of a class of nonautonomous semi-ratio-dependent predator-prey systems with functional responses[J]. J Math Anal Appl, 2003, 278(2): 443-471.

[63] Xu R, Chaplain M A J, Davidson F A. Periodic solutions for a predator-prey model with holling-type functional response and time delays[J]. Appl Math Comput, 2005, 161(2): 637-654.

[64] Bohner M, Fan M, Zhang J M. Existence of periodic solutions in predator-prey and competition dynamic systems[J]. Nonlinear Anal-Real, 2006, 7(5): 1193-1204.

[65] Bohner M, Fan M, Zhang J M. Periodicity of scalar dynamic equations and applications to population models[J]. J Math Anal Appl, 2007, 330(1): 1-9.

[66] Bi L, Bohner M, Fan M. Periodic solutions of functional dynamic equations with infinite delay[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 68(5): 1226-1245.

[67] Kaufmann E R, Raffoul Y N. Periodic solutions for a neutral nonlinear dynamical equation on a time scale[J]. J Math Anal Appl, 2006, 319(1): 315-325.

[68] Fazly M, Hesaaraki M. Periodic solutions for predator-prey systems with Beddington-DeAngelis functional response on time scales[J]. Nonlinear Anal-real, 2008, 9(3): 1224-1235.

[69] Li Y K, Zhang H T. Existence of periodic solutions for a periodic mutualism model on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2008, 343(2): 1818-1825.

[70] Zhang H T, Li Y K. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations with impulse effects on time scales[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(1): 19-26.

[71] Zhang W P, Liu P, Zhu D M. Periodicity in a ratio-dependent predator-prey system with stage-structured predator on time scales[J]. Nonlinear Analy-Real, 2008, 9(2): 344-353.

[72] Zhang J M, Fan M, Zhu H P. Periodic solution of single population models on time scales[J]. Math. Comput. Model. 2010, in press.

[73] Čermák J, Urbánek M. On the asymptotics of solutions of delay dynamic equations on time scales[J]. Math Comput Model, 2007, 46(3-4): 445-458.

[74] DaCunha J J. Stability for time varying linear dynamic systems on time scales[J]. J Comput Appl Math, 2005, 176(2): 381-410.

[75] Hoffacker J, Tisdell C C. Stability and instability for dynamic equations on time scales[J]. Comput Math Appl, 2005, 49(9-10): 1327-1334.

[76] Wang P G, Liu X. Practical stability of impulsive hybrid differential systems in terms of two measures on time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2006, 65(11): 2035-2042.

[77] Wang P G, Liu X. ϕ_0-Stability of hybrid impulsive dynamic systems on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(2): 1220-1231.

[78] Burton T A. Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations[M]. New York: Mineola, 2006.

[79] Hino Y, Naito T, Nguyen V M, et al. Almost periodic solutions of differential equations in Banach spaces[M]. London: Taylor & Francis, 2002.

[80] Schäffer J J. Exponential dichotomies for linear differential equations with delays: periodic and autonomous equations[J]. Ann Mat Pura Appl, 1984, 138(4): 105-149.

[81] Fink A M. Almost Periodic Differneital Equation[M]. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1974.

[82] Lin Z S. Almost periodic linear system and exponential dichotomics[J]. Chinese Ann Math, 1982, 3(2): 131-146.

[83] Zhang C Y. Almost Periodic Type Functions and Ergodicity[M]. Beijing/New York: Science Press, 2003.

[84] Ait Dads E, Arino O. Exponential dichotomy and existence of pseudo almost-periodic solutions of some differential equations[J]. Nonlinear Anal-Theor, 1996, 27(4): 369-386.

[85] Palmer K J. Exponential dichotomies, the shadowing lemma and transerval homo-

clinic points, in Dynamics Reported[M]. Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singpore: Kirchgraber U, Walther H O eds, John Wiley & Sons, 1988.

[86] Henrard M. Exponential dichotomy for uniformly almost periodic equations, shadowing lemma and application to chaos[J]. Bull Soc Math Belg(B), 1992, 44(1): 67-81.

[87] Kalkbrenner J. Exponential Dichotomy and Chaotic Dynamic of Noninvertible Difference Equations[D]: [Ph.D. thesis]. Germany University of Augsburg, 1994.

[88] Pötzsche C. Langsame Faserbündel dynamischer Gleichungen auf Maßketten[M]. Berlin: Logos, 2002.

[89] Pötzsche C. Exponential dichotomies for dynamic equations on measure chains[J]. Noninear Anal-Theor, 2001, 479(2): 873-884.

[90] Siegmund S. A spectral notion for dynamic equations on time scales[J]. J Comput Appl Math, 2002, 141: 255-265.

[91] Bohner M, Lutz D A. Asymptotic behavior of dynamic equations on time scales[J]. J Difference Equations Appl, 2001, 7: 21-50.

[92] Pötzsche C. Pseudo-stable and pseudo-unstable fiber bundles for dynamic equations on measure chains[J]. J Difference Equations Appl, 2003, 9: 947-968.

[93] Pötzsche C. Invariant foliations and stability in critical cases[J]. Adv Difference Equations, 2006, 2006:19.

[94] Pötzsche C, Siegmund S. C^m-smoothness of invariant fiber bundles for dynamic equations on measure chains[J]. Adv Difference Equations, 2004, 2: 141-182.

[95] Pötzsche C. Topological decoupling, linearization and perturbation on inhomogeneous time scales[J]. J Differ Equations, 2008, 245(5): 1210-1242.

[96] Xia Y H, Cao J D, Han M A. A new analytical method for the linearization of dynamic equation on measure chains[J]. J Differ Equations, 2007, 235(2): 527-543.

[97] Zhang J M, Fan M, Zhu H P. Existence and roughness of exponential dichotomies of linear dynamic equations on time scales[J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 2658-2675.

[98] Pötzsche C. Exponential dichotomies of linear dynamic equations on measure chains under slowly varying coefficients[J]. J Math Anal Appl, 2004, 289(1): 317-335.

[99] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.

[100] Avery R I, Henderson J. Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 2001, 8(1): 27-36.

[101] Liu P, Li Y K. Multiple positive periodic solutions of nonlinear functional differential system with feedback control[J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 819-832.

[102] Leggett R, Williams L. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28: 673-688.

[103] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

[104] 钟承奎, 范先令, 陈文源. 非线性泛函分析引论 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998.

[105] Kingsland S E. Modeling nature: Episodes in the history of population ecology (2nd edition)[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1995.

[106] Chesson P. Understanding the role of environmental variation in population and community dynamics[J]. Theor Pop Biol, 2003, 64(3): 253-254.

[107] Berryman A A. The origins and evolution of predator-prey theory[J]. Ecology, 1999, 73: 1530–1535.

[108] Fan M, Kuang Y. Dynamics of a nonautonomous predator-prey system with the Beddington–DeAngelis functional response[J]. J Math Anal Appl, 2004, 295(1): 15-39.

[109] Zhang J M, Wang J. Periodic solutions for discrete predator-prey systems with the Beddington-DeAngelis functional response[J]. Appl Math Lett, 2006, 19(12): 1361-1366.

[110] Fan M, Wang K. Global existence of a positive periodic solution to a predator-prey system with Holling type II functional response[J]. Acta Math Sci Ser A Chin Ed, 2001, 21(4): 492-497.

[111] Yuan S L, Jin Z, Ma Z. Global existence of a positive periodic solution to a predator-prey system[J]. J Xi'an Jiaotong Univ, 2000, 34(10): 80-83.

[112] Fan M, Ye D, Wong P J Y, Agarwal R P. Periodicity in a class of non-autonomous scalar equations with deviating arguments and applications to population models[J]. Dyn Syst, 2004, 19(3): 279-301.

[113] Kuang Y. Global stability for a class of nonlinear nonautonomous delay logistic equations[J]. Nonlinear Anal-Theor, 1991, 17(7): 627-634.

[114] Li Y K, Kuang Y. Periodic solutions in periodic state-dependent delay equations and population models[J]. Proc Amer Math Soc, 2002, 19(3): 279-301.

[115] Gopalsamy K, Lalli B S. Oscillatory and asymptotic behavior of a multiplicative delay logictic equation[J]. Dynam Stab Syst, 1992, 7: 735-742.

[116] Zhang B G, Gopalsamy K. Global attractivity in the delay logistic equation[J]. J Math Anal Appl, 1990, 150(2): 274-283.

[117] Fan M, Wang K. Periodicity in a food-limited population model with toxicants and time delays[J]. Acta Math Appl, 2002, 18(2): 309-314.

[118] Freedman H I, Shukla J B. Models for the effect of toxicant in single species and predator-prey system[J]. J Math Biol, 1991, 30: 15-30.

[119] Kubiaczyk I, Saker S H. Oscillation and stability in nonlinear delay differential equations of population dynamics[J]. 2002, Math Comput Model, 35(3-4): 295-301.

[120] Ladas G, Qian C. Oscillation and global stability in a delay logistic equation[J]. Dynam Stab Syst, 1994, 9: 153-162.

[121] Gilpin M E, Ayala F J. Global models of growth and competition[J]. P Nat Acad Sci USA, 1973, 70: 3590-3593.

[122] Li Y K. Existence and global attractivity of positive periodic solution for a class of delay differential equations[J]. Sc China Ser A, 1998, 28: 108-118.

[123] Jiang D Q, Agarwal R P. Existence of positive periodic solutions for a class of difference equations with several deviating arguments[J]. Comput Math Appl, 2003, 45: 1303-1309.

[124] Gopalsamy K, Weng P X. Feedback regulation of logistic growth[J]. Int J Maths Math Sci, 1993, 16:177-192.

[125] Chen X X, Chen F D, Stable periodic solution of a discrete periodic Lotka-Volterra competition system with a feedback control[J]. Appl Math Comput, 2006, 181: 1446-1454.

[126] Huo H F, Li W T. Positive periodic solutions of a class of delay differential system with feedback control[J]. Appl Math Comput, 2004, 148: 35-46.

[127] Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method[M]. Japan: The Mathematical Society of Japan, 1966.

[128] Agarwal R.P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications, Second Edition, Revised and Expand[M]. New York: Marcel Dekker, 2000.

[129] Zhang B. Contraction mapping and stability in a delay-differential equation[J]. Dynam Syst Appl, 2004, 4: 183-190.

[130] Zhang B. Fixed points and stability in differential equations with variable delays[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2005, 63: 233-242.

[131] Chow S N. Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations[J]. J Differ Equations, 1974, 15: 350-378.

[132] Wazewska-Czyzewskam M, Lasota A. Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells[J]. Ann Polish Math Soc Ser III Appl Math, 1976, 17: 23-40.

[133] Li W T, Cheng S S. Asymptotic properties of the positive equilibrium of a discrete survival model[J]. Appl Math Comput, 2004, 157: 29-38.

[134] Beverton R J, Holt S J. The theory of fishing, in: M. Graham (Ed.), Sea Fisheries: Their Investigation in the United Kingdom[M]. London: Edward Arnold, 1956.

[135] Tang S, Cheke R A, Xiao Y. Optimal impulsive harvesting on non-autonomous Beverton-Holt difference equations[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2006, 65: 2311-2341.

[136] Fan M, Ye D. Convergence dynamics and pseudo almost periodicity of a class of nonautonomous RFDEs with applications[J]. J Math Anal Appl, 2005, 309, 598-625.

[137] Tsoularis A, Wallace J. Analysis of logistic growth models[J]. Math Biosci, 2002, 179: 21-55.

[138] Mackey M C, Glass L. Oscillation and chaos in physiological control system[J]. Science, 1977, 197: 287-289.

[139] Ye D, Fan M, Wang H Y. Periodic solutions for scalar functional differential equations[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2005, 62: 1157-1181.

[140] Gopalsamy A, Sariyasa S. Time delays and stimulus dependent pattern formation in periodic enviroments in isolated neurons[J]. Dyn Contin Discrete Impuls syst B, 2002, 9: 39-58.

[141] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen[J]. Math Z, 1930, 32: 703-728.

[142] Bellman R. On the application of a Banach-Steinhaus theorem to the study of the boundedness of the solutions of nonlinear differential equations[J]. Ann Math, 1948, 49: 515-522.

[143] Massera J L, Schäffer J J. Linear differential equations and functional analysis[J]. I: Ann Math, 1958, 67: 517-573; II. Equation with periodic coefficients[J]. Ann Math, 1959, 69: 88-104; III. Lyapunov's second method in the case of conditional stability[J]. Ann Math, 1959, 69: 535-574.

[144] Sacker R J, Sell G R. Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems[J]. I: J Differ Equations, 1974, 15(2): 429-458; II: J Differ Equations, 1976, 22(2): 478-496; III: J Differ Equations, 1976, 22(2): 497-522.

[145] Coppel W A. Dichotomies and reducibility[J]. I: J. Differ. Equations, 1967, 3(4): 500-521; II: J Differ Equations, 1968, 4(3): 386-398.

[146] Coppel W A. Dichotomies in stability theory, Lecture Notes in Mathematics[M]. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1978.

[147] Chow S N, Leiva H. Existence and roughness of the exponential dichotomy for skew-product semiflows in Banach spaces[J]. J Differ Equations, 1995, 120(2): 429-477.

[148] Chow S N, Leiva H. Unbounded perturbation of the exponential dichotomy for evolution equations[J]. J Differ Equations, 1996, 129(2): 509-531.

[149] Li T. Die Stabilitäsfrage bei Differenzengleichungen[J]. Acta Math, 1934, 63: 99-141.

[150] Aulbach B, Van Minh N. The concept of spectral dichotomy for linear difference equations[J]. I: J Math Anal Appl, 1994, 185(2): 275-287; II: J Differ Equations Appl, 1996, 2: 251-262.

[151] Berezansky L, Braverman E. On exponential dichotomy, Bohl-Perron type theorems and stability of difference equations[J]. J Math Anal Appl, 2005, 304(2): 511-530.

[152] Coffman C V, Schäffer J J. Dichotomies for linear difference equations[J]. Math Ann, 1967, 172: 139-166.

[153] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[154] Papaschinopoulos G, Schinas J. Criteria for an exponential dichotomy of difference equations[J]. Czech Math J, 1985, 35: 295-299.

[155] Papaschinopoulos G. Dichotomies in terms of Lyapunov functions for linear difference equations[J]. J Math Anal Appl, 1990, 152(3): 524-535.

[156] Anderson D R. Multiple periodic solutions for a second-order problem on periodic

time scales[J]. Nonlinear Anal-Theor, 2005, 60: 101-115.

[157] Anderson D R, Hoffacker J. Positive periodic time-scale solutions for functional dynamic equations[J]. Australian J Math Anal Appl, 2006, 3: 1-14.

[158] Anderson D R, Hoffacker J. Higher-dimensional functional dynamic equations on periodic time scales[J]. J Difference Equations Appl, 2008, 14: 83-89.

[159] Dai Q Y, Tisdell C C. Existence of solutions to first-order dynamic boundary value problems[J]. Int J Difference Equations, 2006, 1: 1-17.

[160] Aulbach B, Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems (G.A. Leonov, V. Reitmann, and W. Timmermann, eds.)[J]. Mathematical Research, 1990, 59: 9-20.

[161] Alonso A I, Hong J L, Obaya R. Exponential dichotomy and trichotomy for difference equations[J]. Comput Math Appl, 1999, 38(1): 41-49.

[162] Ju N, Wiggins S. On roughness of exponential dichotomy[J]. J Math Anal Appl, 2001, 262(1): 39-49.

[163] Naulin R, Pinto M. Admissible perturbations of exponential dichotomy roughness[J]. Nonlinear Anal-Theor, 1998, 31(5-6): 559-571.

[164] Popescu L H. Exponential dichotomy roughness on Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2006, 314(2): 436-454.

[165] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 靳祯. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[166] Fan M, Kuang Y, Feng Z L. Cats protecting birds revisited[J]. B Math Biol, 2005, 67: 1081-1106.

[167] Zhang J M, Fan M, Kuang Y. Rabbits killing birds revisited[J]. Math Biosci, 2006, 203(1): 100-123.

[168] Holt R D, Polis G A. A theoretical framework for intraguild predation[J]. Am Nat, 1997, 149(4): 745-764.

[169] Crooks K R, Soulé M E. Mesopredator release and avifaunal extinctions in a fragmented system[J]. Nature, 1999, 400: 563-566.

[170] Holt R D. Predation, apparent competition, and the structure of prey communities [J]. Theor Popul Biol, 1977, 12: 275-294.

在学期间公开发表论文情况

文章名称	发表刊物	刊发时间	刊物级别	第几作者
Rabbits killing birds revisited	Mathematical Biosciences	2006 年 9 月	SCI	1
Existence of periodic solutions in predator-prey and competition dynamic systems	Nonlinear Analysis: RWA	2006 年 9 月	SCI	3 [按姓氏英文字母排序]
Periodic solutions for discrete predator-prey systems with the Beddington-DeAngelis functional response	Applied Mathematics Letters	2006 年 12 月	SCI	1
Periodicity of scalar dynamic equations and applications to population models	Journal of Mathematical Analysis and Applications	2007 年 1 月	SCI	3 [按姓氏英文字母排序]
Existence and roughness of exponential dichotomies of linear dynamic equations on time scales	Computers and Mathematics with Applications	2010 年 4 月	SCI	1
Periodic solution of single population models on time scales	Mathematical and Computer Modelling	2010 年 4 月	SCI	1

致　谢

本文是在导师范猛教授耐心指导，不断启发和严格要求下完成的. 整个研究生学习阶段，范老师用渊博的知识和对国际数学研究进展的准确判断指导着我的研究工作，老师的许多思路和建议为本文课题研究的顺利进行奠定了坚实的基础. 在我攻读博士学位期间，范老师的悉心专研、实事求是、不骄不躁的科研精神及一丝不苟的治学态度，孜孜不倦的工作热情，诚恳宽厚的待人风格以及积极的人生态度都给我留下了深刻的印象，使我受益匪浅，终生难忘. 范老师的所有优良品质对我以后的人生必将产生极大的影响, 将成为我今后学习和追求的目标. 在此特向范老师表示最衷心的感谢!

同时，还要衷心感谢郭建华教授, 蒋达清教授, 张凯军教授, 吴奋韬副教授，王静副教授, 李晓月副教授和已故的潘家齐教授, 张入元教授等多位任课教师和系内其它教师的指导和帮助, 在此论文完成之际, 特向以上专家致以最诚挚的谢意!

衷心感谢师姐张伟鹏副教授，师兄曾志军博士，师妹毕利，隋光宇，郝丽娜，师弟周林华，夏治南, 妹妹季春燕，死党于佳佳等在学习，生活各方面给予我的帮助和支持.

在攻读博士学位期间，同时得到了加拿大 York 大学数学与统计学院的朱怀平教授和美国 Missouri–Rolla 大学数学与统计学院的 Martin Bohner 教授的指导和帮助，使作者得以顺利完成论文的写作. 在此，谨向他们表示我由衷的感激和敬意.

最后，衷心感谢我的哥哥，姐姐们，特别是姐夫等所有的家人对我的鼓励和全心的支持，使我能够安心求学. 我的成长和任何一点进步都有着他们的无私奉献.

张继民

2010 年 5 月