

压缩传感测量矩阵优化的研究

摘 要

压缩传感是一门新兴的数字信号处理理论，突破了奈奎斯特采样定律。它于 2006 年由 Candès、Tao、Romberg、Donoho 等人提出。压缩传感充分运用了大部分信号在预知的一组基上可以稀疏表示这一先验信息，采用非自适应线性投影来最大程度地保持原始信号的信息量，接收端通过数值凸优化解析准确重构信号。该方法不仅为降低采样频率提供了一种新思路，也为其他科学领域的研究提供了新的契机。发展至今，该理论仍然存在诸多问题值得研究，其中关于最优化重建算法和构造测量矩阵两方面的研究最为突出。而相比之下，前者的工作成果颇丰，后者相关的理论研究则需要进一步加强。

本文介绍了压缩传感理论的发展框架，详尽地学习和分析了现有的压缩传感测量矩阵的优化算法。在此基础上，提出了基于框架理论的优化测量矩阵的算法。主要工作和创新有：

1. 研究了压缩传感理论的基础知识，从信号的稀疏表示、测量矩阵、重构算法等几个方面展开，并着重研究了测量矩阵的构造原则、常用的测量矩阵以及优化测量矩阵的关键点。

2. 研究了 Michael Elad 提出的以降低传感矩阵的互相关性为突破点从而优化测量矩阵的算法和 Vo Dinh Minh Nhat 等人提出的以尽量使测量矩阵保持与稀疏基类似结构为突破点从而优化测量矩阵的算法，着重分析了两种算法的设计思想、设计步骤，并结合 MATLAB 平台，进行大量的实验仿真。

3. 提出了基于框架理论的优化测量矩阵的算法，介绍了紧框架、等角框架的概念，及详细地分析了该算法的设计步骤。同时，对以上提及的算法从相关性、测量长度即压缩比、信号稀疏度及信号的重构误差等方面进行了全面的性能测试。实验结果表明，在相同条件下，基于框架理论的测量矩阵优化算法的主客观重构效果均优于现有同类算法。

4. 综合上述的算法，考虑传感矩阵相关性与测量矩阵的关系，进一步的探讨了若仅仅降低相关性对信号误差的影响，为今后的深入研究奠定基础。

关键词： 压缩传感，测量矩阵，传感矩阵，互相关性，性能优化

On Optimization of the Measurement Matrix for Compressed Sensing Systems

ABSTRACT

Compressed sensing (CS) is a great paradigm that goes against the traditional wisdom, the so-called Nyquist Sampling, in the signal processing field. It was proposed in 2006 by Candès, Tao, Romberg and Donoho. By exploring the compressibility of signals, CS employs non-adaptive linear projections that nearly preserve all the information of the signals, and then such signals can be exactly reconstructed under some certain conditions. CS not only offers a new way to lower the sample frequency, but also stimulates the work in other areas. CS still has many unsolved problems which need further study, such as the issues of developing signal reconstruction algorithms and optimizing measurement matrices. There are many results available related with the former one, while less with the later.

This thesis introduces the theoretical framework of CS, analyze two algorithms on optimizing the measurement matrices, and propose a new algorithm. The main contributions are given as follows:

1. The theory of CS is introduced in terms of the sparse representation of signals, measurement matrices, signal reconstruction algorithms. The key-points of measurement matrices, such as the principles, the common matrices and the coherence of optimization and analyzed.

2. Two methods for optimizing the measurement matrices are discussed. In the first one, Michael Elad aims to minimize the mutual coherence of sensing matrix, while in the second one, Vo Dinh Minh Nhat aims to let the measurement matrix have the structure as much similar as the original dictionary.

3. A new method is proposed. The theories of tight frame and equiangular tight frame are introduced. Meanwhile, the methods mentioned above have been fully tested and evaluated in some terms of compression ratio, the sparsity of signals and the reconstruction error. Numerical experiments have shown our proposed methods yields a better performance.

4. Based on the work mentioned above, the relation between mutual coherence and the optimization of the measurement matrix is analyzed, and thus prepare for further work.

Key Words:

compressed sensing, measurement matrix, sensing matrix, mutual coherence, optimization

符 号 说 明

BP	Basic Pursuit	基追踪
CS	Compressed Sensing Compressive Sensing	压缩传感
HHS	Heav Hitters on Steroids	HHS追踪
MDS	Multi-Dimensional Scaling	互不相关性
MIP	Mutual Incoherence Property	多维度分析法
MP	Matching Pursuit	匹配追踪
MRI	Magnetic Resonance Imaging	核磁共振成像
OMP	Orthogonal Matching Pursuit	正交匹配追踪
PSNR	Peak Signal-to-Noise Ratio	峰值信噪比
RIP	Restricted Isometry Property	受限等距性质
ROMP	Regularized Orthogonal Matching Pursuit	正则化正交匹配追踪
SNR	Signal to Noise Ratio	信噪比
STOMP	Stagewise Orthogonal Match- ing Pursuit	分段正交匹配追踪
SVD	Singular Value Decomposi- tion	奇异值分解
UUP	Uniform Uncertainty Princi- ple	一致不确定原理

注：在文中除非有特殊说明，一般情况下，大写字母 T 表示矩阵转置，符号 \tilde{A} 表示对矩阵 A 归一化。

插图

1-1 传统的信号获取与处理流程	1
1-2 压缩传感理论框架	2
2-1 压缩传感的测量过程	9
2-2 压缩传感的测量及重构示意图	10
2-3 (a)原始信号 (b)原始信号在 Harr 小波基下的系数	16
2-4 (a) 原始信号 (b) $M = 256$ 时重构信号 (c) $M = 380$ 时重构信号	16
2-5 Lena 在不同压缩比下的重构图	17
2-6 Boat 在不同压缩比下的重构图	17
3-1 \tilde{G} 非对角元素的收缩曲线	20
3-2 $\mu_i(\Phi, \Psi)$ 的迭代曲线	22
3-3 格莱姆矩阵优化前后非对角元素绝对值分布	22
3-4 BP 重构出原始信号的成功率	23
3-5 OMP 重构出原始信号的成功率	23
3-6 不同 γ 值下, OMP 重构出原始信号的误差	24
3-7 不同 M 下信号的重构误差	27
4-1 基于框架理论的测量矩阵的优化算法的流程图	30
4-2 格莱姆矩阵 G 非对角元素的绝对值分布	31
4-3 相关性 μ 的曲线	31
4-4 BP 重构出原始信号的成功率	32
4-5 OMP 重构出原始信号的成功率	33
4-6 BP 算法重构信号的误差比较	34
4-7 OMP 算法重构信号的误差比较	34
4-8 BP 算法恢复信号的误差比较	35
4-9 OMP 算法恢复信号的误差比较	35

5-1 μ 值的迭代曲线	38
5-2 优化前后格莱姆矩阵的非对角元素绝对值的分布	39
5-3 BP 重构信号的误差	39
5-4 OMP 重构信号的误差	40
5-5 BP 重构信号的误差	40
5-6 OMP 重构信号的误差	41

第1章 绪论

1.1 引言

1928年,美国电信工程师奈奎斯特(H. Nyquist)通过研究采样带限信号过程所遵循的规律,首先提出采样定理,即奈奎斯特采样定理。1948年,信息论的创始人香农(C.E. Shannon)对这一定理加以明确说明并正式作为定理引用,即香农采样定理。传统的信号获取与处理流程图 1-1。

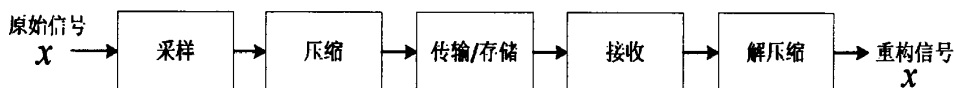


图 1-1 传统的信号获取与处理流程

随着科技的发展,该理论指导下的信息获取、存储、融合、处理及传输等方式与现代的信号处理理论和需求的代沟与日俱增,已然阻碍了信息技术的再一次飞跃。当前信号处理领域中存在两个关键难点。

1. 现代信息技术的飞跃式发展使得人们对于信息的需求与日俱增。实际生活中各种电子设备决定了模拟信号必须转化为数字信号。而奈奎斯特(Nyquist)采样频率过高,导致采样数据量太大,即只有当采样速率不小于信号带宽的两倍时,才能由采样信号准确重构原始信号。而实际应用中,随着科技的突飞猛进,需要处理的数据量也以惊人的速度膨胀,高清数字视频、高质量的图像都已然成为人们生活的重点。由此,传统的奈奎斯特采样定理在应对这些需求时往往捉襟见肘。
2. 为了缓解对信号传输速度和存储空间的压力,当前常见的解决方案是信号压缩,如基于小波变换的 JPEG 2000 标准。但是,信号压缩实际上严重的浪费了资源,因为大量的采样数据在压缩过程中被丢弃了,而它们对于信号来说是不重要的或者只是冗余信息。这在某种程度上严重地制约了信号与信息处理的发展。

寻求新的数据采集和处理理论已成为一种必然:是否存在或者能否提出一种基于信息的采样理论框架,突破以 Nyquist 采样理论为支撑的信息获取、处理、融合、存

储及传输等方式；是否可以将数据的采集和压缩合二为一，且接收端能精确或近似精确重建出原始信号。

1.2 研究背景和意义

2006年，由 D. Donoho (美国科学院院士)、E. Candès (Ridgelet, Curvelet 创始人) 及华裔科学家 T. Tao (2006 年菲尔兹奖获得者) 等人提出了压缩传感 (Compressed Sensing, Compressive Sensing, CS) 的概念 [1]-[4]。

压缩传感理论从根本上打破了传统理论的框架，如图 1-2。

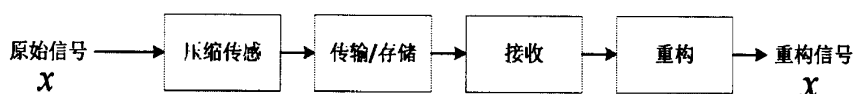


图 1-2 压缩传感理论框架

压缩传感理论最大的优点在于获取信号的同时，就对数据进行高效的压缩，大大的节省存储空间和发送数据量。信号接收端可采用重构算法从压缩传感的测量数据中恢复出原始信号。该方法不但可以有效的减少传感元数量，而且同时可降低成本和能耗，方便采用小型器件实现，为传感方式提供了新思路。目前 CS 理论的研究尚属于起步阶段，但已表现出了强大的生命力。

压缩传感技术是一种抽象的数学概念，而不是具体的操作方案，它可以应用到成像以外的许多领域。以下只是其中几个例子：

1. 磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging, MRI): 医学上，核磁共振的工作原理是做很多次 (但次数仍是有限的) 测量 (基本上就是对人体图像进行离散余弦变换)，然后对数据进行整理来生成图像 (这里就是指人体内水的密度分布图像)。由于测量必须很多次，整个过程对患者来说太过漫长。压缩传感技术可以显著地减少次数，快速成像 (如果实验设备允许，几乎可以实现成像的实时性，呈现出来数据是视频而不再是传统的静态图像)。除此之外，我们还可以用与原来相同的测量次数可以得到分辨率更好的图像。
2. 线性编码: 压缩传感技术提供了一个简单的方法，让很多个传送者可以将其信号带合并传送，这样一来纵使输出信号的丢失或毁坏大部分，解码端仍然可以精确

的重构出原始信号。例如，可以选用任意方式的线性编码，把信息量为 1000 比特的信息编码进一个信息量为 3000 比特的流；那么，即使其中 300 位比特的信息被（恶意）毁坏，解码端也能完全无损失的重构出原始信号。

3. 天文学：许多天文现象（如脉冲星）具有多种频率震荡特性，使其在频域上具有高度稀疏性，也就是可压缩的。压缩传感技术将使我们能够在时域内测量这些现象并能够精确重建原始信号，即使原始数据部分信息丢失或者干扰严重。

1.3 国内外研究现状

压缩传感理论是应用数学与信号处理领域中一个极具吸引力的研究领域。自 2006 年起，加州大学洛杉矶分校的 Terence Tao、加州理工大学的 Emmanuel Candès、斯坦福大学的 David Donoho、以及莱斯大学的 Richard Baraniuk 等正式发表相关论文成果，标志着压缩传感理论研究的新纪元。该理论一经提出，就在医疗成像、光学/雷达成像、信息论、信号/图像处理、模式识别、地质勘探、无线通信等领域受到了高度关注和评价，并被美国科技评论界评为 2007 年度十大科技进展。至今压缩传感理论已经结合不同的应用领域发展出了多个分支，分布 CS 理论（Baron 等提出），1-BIT CS 理论（Baraniuk 等提出），Bayesian CS 理论（Carin 等提出），变形 CS 理论（Meyer 等提出），无限维 CS 理论（Elad 等提出）等等，并成为工程应用和数学领域最炙手可热的研究课题 [5]。

国外有很多著名的学府，例如美国的 Princeton University、Massachusetts Institute of Technology、Duke University、Rice University、Stanford University，英国的 University of Edinburgh 和德国的 Technical University of Munich，都设立了 CS 的专门课题组。2008 年贝尔实验室，谷歌，西雅图的英特尔等世界著名公司纷纷不约而同的组织研究人员，开始深入的学习和研究 CS；近来两大巨头强强联手，即美国空军实验室和杜克大学，共同召开了有关 CS 的专题研讨会 [6]。

2007 年 5 月 30 日到 6 月 1 日，加州大学洛杉矶分校开展了关于 Sparse Representations and High Dimensional Geometry 的学习讨论班，众多知名学者聚集，讨论现有 CS 已取得的成果和今后的发展方向。2007 年 6 月 4 日到 15 日，美国明尼苏达大学举办了主题为 Compressive sampling and frontiers in signal processing 的讨论班，邀请了南卡罗纳大学的 DeVore、Candès、Baraniuk、密歇根大学的 Gilbert 等该领域的先驱者做了系统深入的讲座。2009 年 2 月 25 日和 26 日，AFRL ATR 中心主办的有关压缩传感理

论的研习班在 Duke 大学举行, 本次讨论班汇集了压缩传感领域的知名学术专家, 集中讨论压缩传感理论、算法及其应用等。这些足以看出该领域的研究内容已经引起众多学术机构和学者的兴趣。此外, 莱斯大学还建立了专门的 Compressive Sensing 网站, 及时报道和更新该方向的最新研究成果, 成为该领域研究者的一个重要交流平台 [7]。

国内关于压缩传感理论的研究则刚起步。不过近两年来, 相关的科研项目和论文层出不穷, 例如浙江大学, 西安交通大学, 西安电子科技大学等知名院校都开始了压缩传感理论的学术研究。同时, 不少高新企业也加入了研究队伍, 2011 年 12 月斯凯、思科、虹软及其他企业举行了小型技术研讨会, 紧跟国际最新技术成果。中国压缩传感资源网站和研学论坛网站都专门开辟了压缩传感的专题, 方便国内师生交流学习。

1.4 公开的研究问题

压缩传感理论是一门新兴理论, 其相关的研究还不是很成熟。目前国内外公开的研究问题主要以下几个方面。

1. l_p -范数优化问题: 压缩传感理论在高清图像的应用领域有着广泛的前景, 但由于原始信号的重构算法基本是建立在 l_1 范数意义下, 数据之间仍然有很大的冗余性没有去除。由此, 较之传统的小波变换编码而言, 压缩传感理论应用于图像压缩的效果不是很可观。 l_p 范数的优化则是改善压缩传感理论的重构算法的必经之路。 l_p 范数的优化算法的研究是国内外一个公开的研究问题, 对它的研究具有推进压缩传感理论实用化的深远意义。 l_1 范数意义下的优化是一个凸优化问题, 目前已有比较成熟和完善的算法。 l_p 范数的优化则是一个非凸优化问题, 相关的理论研究存在很多数学问题需要解决。

2. 含噪信号的重构算法: 在实际应用中, 原始信号都会受到不同程度的干扰, 造成原始信号不再满足稀疏性或可压缩性, 进而极大地影响解码端重构原始信号的误差。现有的压缩传感理论中, 重构算法的最基本要求是原始信号可以在某个稀疏字典的空间中稀疏表示, 而噪声的存在则破坏了这一特性。在使用优化算法重构信号时, 如果对含噪的原始信号采用单一的约束原则, 则无法保证解码端能有效地重构原始信号。贪婪算法是比较常用的重构算法之一。对噪声的抑制方法基本都采用 l_2 范数意义下的约束, 但是重构出的稀疏信号无法精确的达到原本的稀疏度, 而且信号的系数幅度也无法达到原信号的系数幅度值。这就是压缩传感理论重构原始信号通常存在的现象-幅度损失, 成为一大研究问题。

3. 测量矩阵和压缩传感理论性能的关系: 测量矩阵和稀疏字典基是压缩传感理论

能否成功的关键。由于随机矩阵具有与其他固定基都不相关的特性，而一般被选用测量矩阵。但是实际应用中，随机矩阵却存在很多缺点，例如：所需要的存储元素容量巨大、计算复杂度高。现在国内外就如何构造测量矩阵，如何寻找到不相关性最大的测量矩阵和稀疏字典基展开了很多有价值的研究。但是，现在仍然无法明确不相关性是否是压缩传感理论成功的必要条件，该课题吸引很多研究人的目光。

本文正是充分的学习并研究了测量矩阵与相关性之间的联系，从降低相关性入手而优化测量矩阵，最终实现压缩传感性能的改善。

1.5 研究目标和内容

本文首先对压缩传感理论进行了系统的阐述，并对其中存在的难点进行了探讨，主要介绍了信号的稀疏表示、测量矩阵的构造及其满足的必要条件、不同类型的重构算法，并给出了压缩传感应用于一维信号和二维图像信号的实例。研究了现有的测量矩阵优化算法，如 Michael Elad、Vo Dinh Minh Nhat 分别提出的测量矩阵优化算法，结合 MATLAB 平台，对两种算法展开了详细地分析，包括设计思想、设计步骤和性能分析。提出了基于框架理论的测量矩阵优化算法。全面介绍了该算法的理论依据，即框架、紧框架和等角框架等概念，给出并分析了实验结果。该算法迭代次数少，并且能够在测量值数目比较少的情况下，更加高效地重构出原始信号。实验结果表明，该算法明显优于同类优化算法。最后，考虑传感矩阵相关性与测量矩阵的关系，进一步的探讨了若仅仅降低相关性对信号误差的影响，为今后的深入研究奠定基础。

1.6 章节安排

基于上述研究内容，本文共分为五章，具体的结构安排如下：

第 1 章 绪论。首先介绍了本文的研究背景和研究意义，国内外关于压缩传感的研究现状及研究上存在的一些公开问题，并对全文的研究内容和结构安排进行了说明。

第 2 章 压缩传感理论。系统并详细地论述了压缩传感理论，并探讨了该理论存在的重难点，介绍了压缩传感理论的关键点：信号的稀疏表示、测量矩阵的构造、重构算法的实现，其中重点介绍了为实现信号精确重构而测量矩阵需要满足的条件，为后续工作做了充分的理论准备。

第 3 章 现有的测量矩阵优化算法。首先介绍了 Michael Elad 的优化算法，重点介

绍了该算法的设计思想、设计步骤，并结合 MATLAB 平台进行仿真实验，验证算法的可行性。其次介绍了 Vo Dinh Minh Nhat 的优化算法，论述了其设计思想和核心步骤。

第 4 章 基于框架理论的测量矩阵的优化算法。针对 Michael Elad 算法存在耗时长，及 Vo Dinh Minh Nhat 算法性能改善不明显，本文提出一种基于框架理论的测量矩阵优化算法。该算法迭代次数少，使初始的测量矩阵经过优化后极大的改善压缩传感的性能。最后通过 MATLAB 仿真实验，进一步验证该算法的优越性。

第 5 章 测量矩阵优化研究的问题。进一步分析了降低相关性与优化测量矩阵之间的关系，探讨了若仅仅降低相关性对信号误差的影响，为今后的深入研究奠定基础。

第 6 章 总结和展望。对本文的工作进行了总结，并对今后的研究给出了建议。

第 2 章 压缩传感理论

压缩传感理论的核心思想在于合并采样和压缩。首先采集信号经过非自适应性投影从而得到测量值，然后根据相应的重构算法由测量值重构出原始信号。压缩传感理论成功与否的关键点在于：稀疏性 (Sparsity)、非自适应性 (Non-Adaptivity)、不相关性 (Incoherence)、随机性 (Randomness)、非线性 (Non-Linearity)。这些词语已然体现出压缩传感理论区别于传统奈奎斯特采样定律的特点。这种区别是激动人心的，压缩传感理论实现了能以随机采样或随机测量的方式用更少的数据采样点来精确的重构出原始信号。

概括地说，压缩传感理论主要包括：信号稀疏表示、稀疏信号非相关测量和恢复/重构算法三个方面。

2.1 预备知识

为方便下文的阐述，先给出信号的稀疏表示的定义。

信号的稀疏表示就是将信号投影到正交变换基时，绝大多数变换系数的绝对值很小，进而可忽略这些值，则所得到的变换向量可近似的认为是稀疏的，且可看作是对原始信号的一种简洁的表示。而信号的可压缩/稀疏表示正是压缩传感的先验条件。

l_0 范数 [8], [9]: 任意取一维离散时间信号 x ，记作 $x \in \mathcal{R}^N$ 。能够通过一组正交基线性组合，即

$$x = \sum_{i=1}^L \psi_i s_i \quad \text{or} \quad x = \Psi s \quad (2-1)$$

其中， $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_L]$ ， $\psi_i \in \mathcal{R}^N$ 列向量。向量 s 等价于 x 的权重系数， $s_i = \langle x, \psi_i \rangle = \psi_i^T x$ 。可见 x 的等价表示是 s 。如果 s 的系数值都比较小，只能少量几个幅度值比较大，则称信号 x 是可压缩的。如果 s 的系数中仅仅有 K 个非零值，而其余的基本很小，以至于可忽略，即 $\|s\|_0 = K$ ，这种情况下，称 s 为信号 x 的 K 阶稀疏线性表示。(本文若无特殊说明，稀疏信号采用 l_0 范数。长度 L 且稀疏度 K 的稀疏信号 s 的非零系数的位置可随机产生，构造稀疏信号。)

信号在稀疏字典基上仅有 K 个系数值非零属于严格意义下的稀疏信号，而通常实际中的信号无法真正的满足 l_0 稀疏信号，但是仍然具有可压缩性，即信号在某个稀疏

字典基下的变换系数值按从大到小排序后可以呈现指数级衰减并趋近为零，则称信号可 l_p 范数下的稀疏表示。

l_p 范数 [10], [11]:

$$\|s\|_p = (\sum_i |s_i|^p)^{1/p}, \quad 0 < p \leq 1 \quad (2-2)$$

可见 l_p 范数意义下的稀疏信号 s ，则其元素值从大到小排呈指数级递减，即 $|s_1| \geq |s_2| \geq \dots \geq |s_L|$ ，满足 $|s_i| \leq R i^{-\frac{1}{p}}$ ， $i = 1, 2, \dots, L$ 。

然而常见的自然信号在时域内几乎都是不稀疏的，但是根据稀疏表示理论指出，自然界中绝大多数信号可以通过某种变换 Ψ 稀疏表示。变换基的选取通常依据信号本身的特点，常用的稀疏基主要有离散余弦变换基、离散小波变换基、快速傅里叶变换基、Gabor 基、Curvelet 基以及冗余字典等。

2.2 压缩传感的理论模型

不同于传统的采样方式，压缩传感理论的核心是非线性测量过程。在该理论支持下，采样的速率不是由原始信号的带宽决定的，而是取决于信号本身的结构和内容。事实上，压缩传感理论的部分抽象结论可追溯于 Kashin 开创的泛函分析和稀疏逼近论。

首先考虑一般的信号重构问题，即已知测量矩阵 $\Phi \in \mathcal{R}^{M \times N}$ ($M \ll N$) 以及某未知原始信号 x ，记作 $x \in \mathcal{R}^N$ 。则矩阵下的线性测量值 $y \in \mathcal{R}^M$

$$y = \Phi x \quad (2-3)$$

方程 (2-3) 也可以看作原始信号 x 在 Φ 下的线性投影，现在考虑由 y 重构 x 。从 y 中直接重构出原始信号 x 是不可能的。因为方程式为欠定线性方程。换句话说，由 M 个方程，求解 N 个未知数。而依据线性代数理论，该解存在无穷大的范围，无法求得信号 x 。但是，当信号具有稀疏性或可压缩性时，就有望找到方程 (2-3) 的最优解，而且信号越稀疏重构效果越好。实际中的信号或图像一般都是具有稀疏性或可压缩性。则方程 (2-3) 可改写为

$$y = \Phi \Psi s \triangleq \Theta s \quad (2-4)$$

图 2-1 中 Φ 为 $M \times N$ 维的测量矩阵， Ψ 为 $N \times L$ 维的稀疏字典， y 为 $M \times 1$ 维的测量值， x 是 $N \times 1$ 维的原始信号， s 为 x 在 Ψ 下 $L \times 1$ 维的稀疏信号， $\Theta = \Phi \times \Psi$ 为 $M \times L$ 维的传感矩阵。

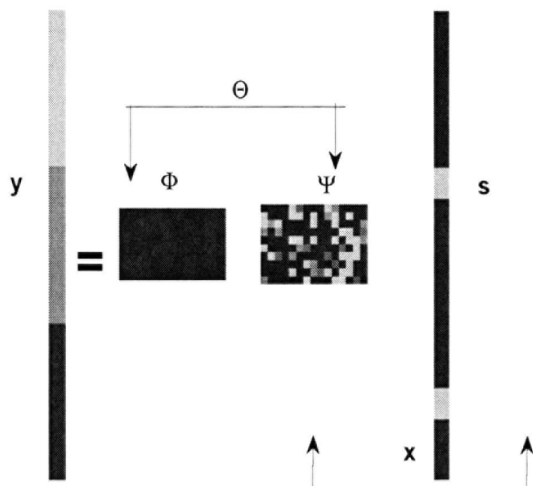


图 2-1 压缩传感的测量过程

目前在压缩传感理论中，稀疏基大多集中于固定的正交基空间。但是考虑到信号越稀疏，重构信号的误差越小。压缩传感理论成功的前提就是找到一个能使原始信号稀疏度最大的基空间，因为它直接关系着解码端重构出原始信号的精度问题。大量的研究证实超完备冗余字典下的信号稀疏表示更加有效：用超完备的冗余字典取代正交基函数，字典的选择应该尽可能的符合原始信号的结构，从而找到最佳的线性组合来稀疏表示原始信号，增大原始信号的稀疏度，提高信号的重构精度。

理论证明，原始信号 x 可以由测量值 y 通过求解最优 l_0 范数问题精确重构：求解式 (2-4) 的逆问题得到稀疏信号 s ，再根据 $x = \Psi s$ 得到原始信号 x 。

$$(l_0) \min_s \|s\|_0 \quad \text{subject to } y = \Theta s \quad (2-5)$$

求解 (2-5) 过程是一个 NP 问题 [12], [13]，算法的时间复杂度太大。那么可不可以找它的近似解呢？采用传统意义的求 l_2 范数最小的方法求得的解并不稀疏，而采用 l_1 最小化求得的解却为稀疏向量，非常接近最小化 l_0 范数所得的真实解。因此，Donoho 提出了基于线性规划的方法求解，即

$$(l_1) \min_s \|s\|_1 \quad \text{subject to } y = \Theta s \quad (2-6)$$

然而实际中，测量过程引入噪声是不可避免的，于是上述问题改为

$$(l_1) \min_s \|s\|_1 \quad \text{subject to } \|y - \Theta s\| < \varepsilon \quad (2-7)$$

由此，完整的压缩传感的测量及重构过程示意图，如图 2-2。

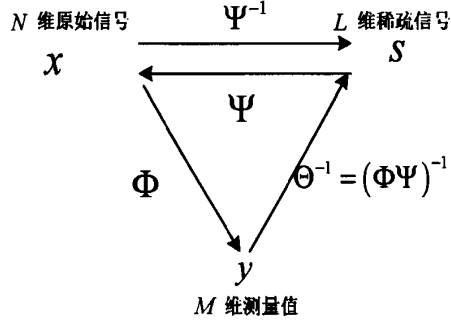


图 2-2 压缩传感的测量及重构示意图

压缩传感理论存在诸多的亮点。首先，因为对原始信号只需要进行随机测量，并不需要测量所有的原始信号，与稀疏基上的系数相比，重要位置不再显得如此重要。其次，解码端对于部分丢失的信息量具有良好的鲁棒性，因为每个投影系数对于重构信号的误差的影响度相同。

通过上述综合分析可以发现，若希望成功地实现压缩传感理论，就必须注意以下三个关键点：

1. 设计稀疏字典基。对于信号 x 如何找到某个最优的字典，使得其在 Ψ 上的表示是稀疏的，即信号的稀疏表示问题。
2. 设计测量矩阵。稳定可靠的测量矩阵使得测量值 $y \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 包含了原始信号 $x \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 的所有信息量，不会因为维数的减少而丢失，即信号低速率采样问题；
3. 设计重构算法。高效快捷的重构算法以极大的概率重构原始信号，这对于压缩传感理论应用于高维信号十分重要，例如核磁共振成像，即信号重构问题。

2.3 测量矩阵

测量矩阵 Φ 与原始信号 x 相乘得到测量值 y ，解码端能否成功的重构原始信号，很大程度取决于测量值是否包含了重构信号所需要的足够的信息量。通常，根据原始信号的特点，其稀疏字典基的选择相对固定。由此，压缩传感理论的成功与否很大程度上依赖于 Φ 的选择。 Φ 的选择合适与否，不仅仅关系到能否成功的实现压缩传感，而且直接影响着解码端对原始信号的重构精度。那么测量矩阵 Φ 究竟需要符合怎样的条件才可以保证重精确地重构出原始信号？如何构造符合条件的 Φ 满足实际应用中不同的信号特点？这成为压缩传感理论中的关键问题之一。

2.3.1 测量矩阵的准则

Candès 和 Tao 给出并证明了为保证压缩传感的性能, 测量矩阵 Φ 所需满足的条件。

RIP 准则 (Restricted Isometry Property): 存在距离常数 $\delta \in (0, 1)$, 使得矩阵 $\Theta = \Phi\Psi \in \mathcal{R}^{M \times L}$ 且 $M \ll L$, 对任意给定信号 K 稀疏信号 $s \in \mathcal{R}^{L \times 1}$, 如果满足方程

$$(1 - \delta)\|s\|_2^2 \leq \|\Theta s\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|s\|_2^2 \quad (2-8)$$

其中 $\delta \in (0, 1)$ 。则称 Θ 遵循集合大小为 K 的约束等距性, 有些文献中, 也将之称为一致不确定原理 (Uniform Uncertainty Principle, UUP)。等价的说法是, 所有传感矩阵 Θ 对应的 s 列向量近似正交。由此, 测量值数目 M 满足不等式 $M \geq K \log_2(L/K)$, $M = 4K$ 时, 解码端可以很高的概率重构出原始信号。

该算法的物理意义是, 对于一个初始给定的稀疏字典基 Ψ , 测量矩阵 Φ 保证不会把两个不同的 K 阶稀疏信号映射到同一个 y 上。已经证明, 如果 $\Phi\Psi$ 是 $(2K, \delta)$ -RIP 的, 对一个 y , 则至多只有一个 K 阶稀疏信号 s 满足式子 (2-8)。

事实上, RIP 理论与许多已有的统计理论拥有相同的特征, 例如, Johanson-Lindenstrauss 定理, Kashin-Garnaev-Gkyskin 理论等。另一方面, 尽管 RIP 完美的特性, 然而很难用它判断某以测量矩阵 (除 Fourier 测量矩阵, 高斯随机矩阵) 是否满足这种特性。为了减低问题的复杂性, 试图找寻一个易于实现并替代 RIP 的方法成为构造 Φ 的准则。

其次, Donoho 提出的相关性 MIP 判别理论, 要求测量矩阵 Φ 和稀疏表示的基 Ψ 不相关, 即要求 Φ 的行不能由 Ψ 的列稀疏表示, 且 Ψ 的列不能由 Φ 的行稀疏表示。

MIP 准则 (Mutual Incoherence Property): 矩阵 $\Theta = \Phi\Psi$, Θ_i ($i = 1, 2, \dots, L$) 为矩阵 Θ 的列向量。

$$\mu(\Phi, \Psi) = \max_{1 \leq i, j \leq L, i \neq j} |(\Theta_i^T \Theta_j)| \quad (2-9)$$

可见矩阵 Φ 、 Ψ 的相关性实质上为矩阵 Θ 的列与列之间的内积的最大值。通常, 计算矩阵相关性时, 需进行矩阵归一化, 所以矩阵的相关性的取值为 $[\frac{1}{\sqrt{L}}, 1]$ 。而矩阵 Θ 为 $M \times L$ 的随机正交矩阵时, Donoho 和 Huo 指出 $\Phi\Psi$ 趋向不相关, 即当 $L \rightarrow \infty$ 时, $\mu(\Phi, \Psi)$ 约等于 $\sqrt{\log(ML)/M}$ 。

再者, Donoho [14] 从定性和定量的角度指出了测量矩阵需要满足的三个特征: 1) 测量矩阵的列向量需要满足一定的不相关性; 2) 测量矩阵的列向量需要满足类似于噪声的独立随机性; 3) 稀疏度的解需要满足 l_1 范数意义下最小的向量。

RIP 是目前公认的一个充分条件, 但测量矩阵不一定非要满足 RIP 特性, 其具备的条件可以降低。而 Donoho 的 MIP 准则在许多实际应用中无法使用, 很难用来判别某种测量矩阵的形态。因此, 如何得到测量矩阵需满足的必要条件或充要条件, 成为该领域亟待解决的一个难点。

初步研究表明, Φ 必须是一个有界线性算子, 具有近似紧特性, 至少要满足框架特性, 但不一定是紧框架。 Φ 的矩阵应具有近似对称分布特性, 三阶中心距应该为零。

2.3.2 常用的测量矩阵

第一类压缩量矩阵是指高斯随机矩阵和一致球测量矩阵 (或者概括地说, 高斯随机矩阵的子矩阵)。它们的优点在于通常随机矩阵与任何稀疏基不连贯, 换句话说, 则精确恢复原始信号所需的采样点数最小。但是, 它们在实际应用中存在两大缺点, 需要很大的内存储存矩阵元素, 很高的计算复杂度。

第二类压缩测量矩阵是指局部正交矩阵, 例如局部傅里叶矩阵和局部哈达玛矩阵。它们的优点在于局部正交矩阵大大的降低的计算的复杂度, 缩短了采样的时间。但是, 举例来说, 局部傅里叶矩阵当且仅当信号为时域稀疏信号时, 才能通过压缩传感精确恢复, 这一点在一定程度上限制了该类型矩阵的适用范围。

目前, 对于测量矩阵的研究是压缩传感理论的一个关键点。综上所述可以发现, 对于如何让构造测量矩阵的准则没有定论, 比较宽泛, 但是很多研究都证实大部分一致分布的随机矩阵都具备所有准则的基本要求 [15], 均可作为测量矩阵, 例如: 部分 Fourier 矩阵 (Partial Fourier Ensemble)、部分 Hadamard 矩阵 (Partial Hadamard Ensemble)、一致球矩阵 (Uniform Spherical Ensemble, USE) 等。但是使用这些矩阵都仅仅能保证解码端能以极大地概率成功地重构出原始信号, 而不是完全无误差的重构。所以对于任何稳定的重构算法而言, 是否存在一个稳定可靠的测量矩阵极其重要。本文旨在研究当测量矩阵为随机矩阵时, 如何通过优化算法, 提高精确重构信号的成功率, 或降低信号的重构误差。

2.3.3 测量矩阵的相关研究

在不同的应用场合, 原始信号所对应的字典 Ψ 具有不同的固定结构。因此, 针对各异的字典, 如何构造测量矩阵以保证对可压缩信号或稀疏信号进行成功的重构。

由此, 现阶段关于测量矩阵的研究工作主要包括: 构造除高斯矩阵和贝努利矩阵

外的新型测量矩阵 Φ ；构造确定性的测量矩阵 Φ ；构造利于硬件实现的测量矩阵 Φ 。

1. 首先考虑对现在常用的测量矩阵加以改造，力求使其性质在原有基础上更加的符合测量矩阵的构造准则，进而改善解码端信号的重构误差。比如传感矩阵中奇异值的最小值与矩阵的线性相关性有着非常紧密的联系，该值越大，则矩阵的不相关性越大；而当该值接近 0 时，矩阵的相关性增大。理论和实验证实，若对现有的传感矩阵分解，一方面可以增大矩阵的奇异值，另一方面不会改变传感矩阵原有的性质。
2. 根据特定的应用条件，构造特殊的测量矩阵，使其即满足 UUP 特性的同时也满足稀疏信号的重构特性。这一方面的探索目前已取得的初步的研究成果，因为不同领域的研究人员方便将压缩传感理论与自己擅长的领域探做结合，相对而言无论是理论研究还是实验仿真都比较容易出成绩。
3. 从某一正交矩阵出发，根据某一些要求，对其进行适当的改善，例如删除一些行列，从而得到一个具有新特质的测量矩阵，并在实际使用中不断检测其性能的改善幅度和代价。

本文对测量矩阵的研究以上述方法中第一条为突破口，对现有常用的随机矩阵进行优化，以增强传感矩阵的互不相关性为目标。由此，有必要介绍相关性 μ 在压缩传感理论中的意义所在。

设线性系统 $\Theta s = y$ 的 K 阶非零稀疏解为 s ，i.e., $\|s\|_0 = K$ 。那么 OMP、BP 算法能否成功地重构原始信号？显然，并不是所有的稀疏度 K 和所有的矩阵 Θ 都能成立。毕竟，原信号的求解通常涉及 NP 问题。然而，如果不等式 (2-10) 成立，则恢复算法 OMP、BP 就可以保证通过 l_1 范数精确地重构 l_0 原始信号 [16]。

定理： 对于一个线性系统 $\Theta s = y$ ($\Theta \in \mathbb{R}^{M \times L}$, $M \ll L$)，则 OMP、BP 稀疏解存在且唯一，若 s 满足不等式

$$\|s\|_0 < \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\mu(\Theta)} \right\} \quad (2-10)$$

另外，换一个角度理解 (2-9) μ 的意义。记 $\Theta = \Phi \times \Psi$ ，构造格莱姆矩阵 $G = (\Theta)^T (\Theta)$ 并作归一化，则矩阵 \tilde{G} 的非对角元素的绝对值是 (2-9) 的集合，而其最大值 $g_{i,j}$ 等于 μ ，格莱姆矩阵 G 的对角元素为 1。类似地， G 也有助于理解 RIP 准则。如果等距常量 δ 和稀疏信号 K 个非零元素值都足够小（远小于 1），则传感矩阵 Θ 一定满足 K 阶的 RIP 准则。

)算法 [20] 为主 (此类算法的特点在于计算速度快, 但结果精确度不高)。还有其他改进类算法如分段正交匹配算法 (StOMP) [21]、正则化匹配追踪 (ROMP) [22] 等算法;

2. 凸松弛类算法: 这类算法在已知要最小化的目标情况下, 通过将非凸问题转化为凸问题求解找到信号的逼近。比较常用的算法有 BP 法 [23]、内点法 [24] (其特点在于计算时间长, 复杂度高, 但得到的结果非常好)、梯度投影法 [25] (其特点在于计算时间比较短) 和迭代阈值法 [26] (其特点在于对于计算量比较少的问题, 计算迅速而且结果准确);
3. 组合类算法: 这类算法基本包括链式追踪 (Chain Pursuit) [27] 和 HHS 追踪 [28]、Cormode-Muthukrishnan [29] 等 (其特点在于计算速度快, 但是其缺点是采样点需要结构化), 该方法通常获取高度结构化的信号采样, 并且支持采取分组测试的方法从而快速实现信号的重构。

2.5 CS 理论的应用举例

2.5.1 一维信号情况下的实验仿真

构造 Block 信号, 特点是局部光滑。采用 Harr 小波基为稀疏字典, 所以原始信号的长度和其稀疏信号的长度相等, 即 $L = N$ 。实验数据表明, 如图 2-3, Block 信号长度 $N = 2048$ 时, 稀疏度 $K = 77$ 。

信号重构算法采用 OMP 算法。经过试验, 参见图 2-4, 当 M 取值为 256 时, 信号的重构会出现很大的误差; 当 M 取值为 380 时, 实验可得出稳定精确的重构 (原始信号和重建信号完全重合)。同时当测量值的数量 M 增加时, 信号成功恢复的概率同步增加, 而且当样本数目 $M \approx 4K$ 时, 信号已经能够准确恢复。

2.5.2 二维图像情况下的实验仿真

选取典型的图像, 如 Lena (512×512) 图、Boats (256×256) 图作为处理对象。采用部分傅里叶矩阵为测量矩阵, 选离散余弦基为稀疏基。首先根据不同 M/N 的比值, 即 $M/N \in [0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6]$, 得到测量值, 然后解码端采用 GPSR [30] 算法重构出原始图像。图像质量采用峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 作为客观的评价标准。结果分别如图 2-5、图 2-6 所示。

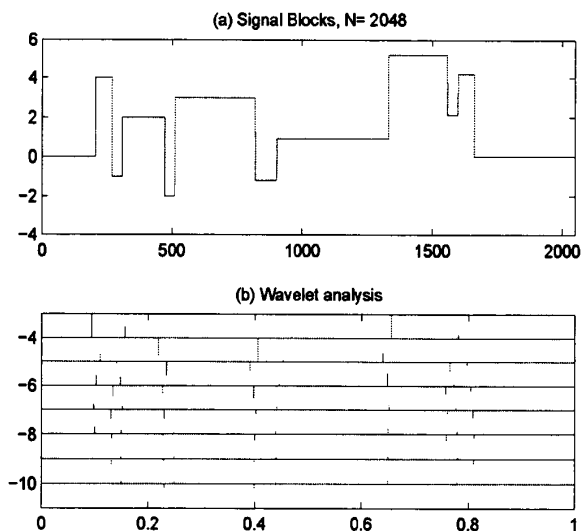
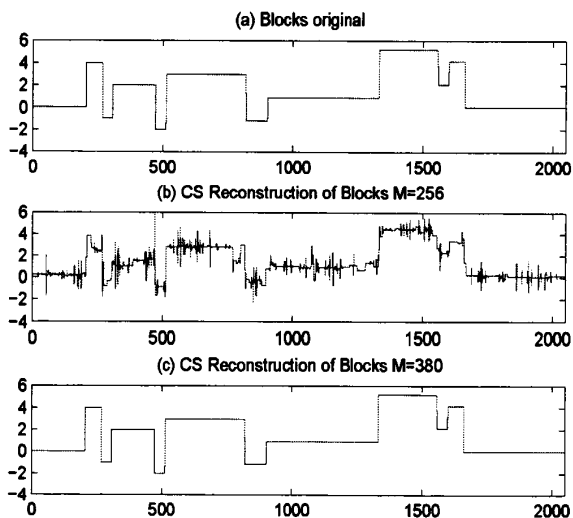


图 2-3 (a)原始信号 (b)原始信号在 Harr 小波基下的系数

图 2-4 (a) 原始信号 (b) $M = 256$ 时重构信号 (c) $M = 380$ 时重构信号

综合上述的两幅图发现，当 M/N 取值仅为 0.2 时，GPSR 已基本能重构出原始图像，保持了图像的重要信息。而随着 M/N 值的不断增大，换句话说，就是测量数目 M 不断的增多，重构出的图像质量随之加强，已然能精确地重构出原始图像的所有信息。仔细的观察还能发现，当压缩比仅为 0.4 时，重构出的图像视觉上已基本与原始图像重合。

不论是一维信号还是二维图像信号，压缩传感理论均能有效的对原始信号实现压缩。由于本文所考虑的信号都是离散时间信号，所以采样过程无法体现。但是通过实



图 2-5 Lena 在不同压缩比下的重构图



图 2-6 Boat 在不同压缩比下的重构图

验，至少已证明了压缩传感理论确实可以从低维的测量信号中重构出高维的信号。

2.6 本章小结

本章介绍了压缩传感理论的基础知识和理论框架：信号的稀疏性、压缩传感测量矩阵、重构算法等；并举例说明将压缩传感理论运用于一维信号和二维图像信号。实验仿真结果显示压缩传感能极大地减少信号的采样点数而在解码端重构出原始信号。

第 3 章 现有的测量矩阵优化算法

考虑到测量矩阵 Φ 极大地影响压缩传感的性能，如何构造新型测量矩阵，如何优化现有常用的随机测量矩阵，都已成为研究压缩传感理论的热点之一。但是由于测量矩阵的具体构造仍然缺乏可以参照的充要条件，所以前者的研究有一定的难度。而优化测量矩阵 Φ 使其更加满足 MIP 特性，则解码端能以极大的概率精确地重构出原始信号。该研究课题吸引了众多国内外学者的兴趣。

3.1 Michael Elad 的优化算法

Michael Elad 是最早提出测量矩阵的优化算法的学者。由于 Φ 和 Ψ 的互相关性直接影响到解码端重构算法能否精确地重构出原始信号，Elad [31] 试图通过扩大 Φ 和 Ψ 之间的不相关性优化 Φ 。

3.1.1 算法设计思想

Elad 并没有以 μ 为目标函数，而是重新构造了一个新的目标函数 μ_t 。该目标函数涉及到格莱姆矩阵的构造，所以首先简单介绍格莱姆矩阵 (Gram Matrix) 的概念。

定义：在 \mathfrak{R} 域上， M 维欧氏空间中任意 N ($M \leq N$) 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 的内积所组成的矩阵

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_N) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_N, \alpha_1) & (\alpha_N, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_N, \alpha_N) \end{bmatrix}$$

称为 N 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 的格莱姆矩阵。

定义：任意字典 $\Theta \in \mathfrak{R}^{M \times L}$ ，则相应地格莱姆矩阵 $G = \Theta^T \Theta$ 并做归一化后，记 \tilde{G} 。 Θ 的 t 平均相关性等于 \tilde{G} 矩阵中非对角且绝对值不小于阈值 t 的所有元素值取平均。

数学表达式如下：

$$\mu_t(\Theta) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq L \text{ and } i \neq j (|g_{i,j}| \geq t)} |g_{i,j}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq L \text{ and } i \neq j (|g_{i,j}| \geq t)} 1} \quad (3-1)$$

式子中 $g_{i,j}$ 是 \tilde{G} 矩阵中的元素值。

Elad 根据 Φ 和 Ψ 尽量不相关这一要求, 试图通过不断的迭代收缩 \tilde{G} 的非对角元素值, 从而实现目标函数 μ_t 值的减小。

\tilde{G} 中非对角元素的收缩 (shrinkage) 函数, 如下:

$$g_{ij} = \begin{cases} \gamma g_{ij} & |g_{ij}| \geq t \\ \gamma t \text{sign}(g_{ij}) & t > |g_{ij}| \geq \gamma t \\ g_{ij} & \gamma t > |g_{ij}| \end{cases} \quad (3-2)$$

其相应的收缩曲线, 参见图 3-1:

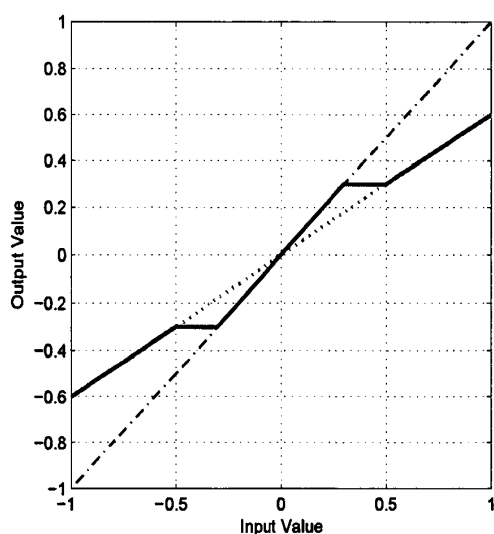


图 3-1 \tilde{G} 非对角元素的收缩曲线

图 3-1 中参数设置为 $\gamma = 0.6$, $t = 0.5$ 。同时为了方便理解, $y = x$ 和 $y = \gamma x$ 曲线也画了出来。 γ 对应的就是收缩曲线的斜率, 而阈值 t 就是收缩曲线的转折点。由此, 当参数 γ , t 取值越小, 则 μ_t 势必会收敛的更快。

3.1.2 算法设计步骤

Elad 的测量矩阵的优化算法的具体设计步骤如下:

目标: 优化测量矩阵 Φ

输入: 参数设置:

- t - 相关性阈值

- $\Psi \in \mathfrak{R}^{N \times L}$ - 稀疏字典
- $\Phi \in \mathfrak{R}^{M \times N}$ - 测量矩阵
- iter - 迭代次数

初始化: 设 Φ_0 为任意随机矩阵。

循环: 设 $l = 0$ 并重复迭代 iter 次。

1. 构造格莱姆矩阵 $G_l = (\Phi_l \Psi)^T (\Phi_l \Psi)$, 并作归一化 \tilde{G} ;
2. 收缩格莱姆矩阵的非对角元素值。若格莱姆矩阵的非对角元素的绝对值小于 t , 则根据收缩曲线计算, 见图 3-1; 记新得到的格莱姆矩阵 \tilde{G} ;
3. 对 \tilde{G} 矩阵进行奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD), 即 $SVD(\tilde{G}) = USU^T$;
4. 计算 Φ_{l+1} , 根据

$$\min_{\Phi} \|(\sqrt{S}U^T) - \Phi\Psi\|_2^2$$

5. 更新 $\Phi_l = \Phi_{l+1}$;
6. 当且仅当 μ_t 收敛, 结束循环。

3.1.3 算法性能分析

首先分析参数 γ 对于目标函数 μ_t 的关系。假设取任意一随机字典矩阵 $\Psi \in \mathfrak{R}^{60 \times 80}$, $\Phi \in \mathfrak{R}^{20 \times 60}$, 构造格莱姆矩阵 $G = (\Phi\Psi)^T (\Phi\Psi)$, 然后 G 归一化。设参数 $\gamma \in [0.55 : 0.2 : 0.95]$, 阈值 $t = 0.2$, $\mu_t(\Phi, \Psi)$ 对应的收缩曲线参见图 3-2。

显然 γ 值为 0.95 时 μ_t 的收敛速度是最慢的, 需要迭代 1000 次, 而 γ 值为 0.55 时 μ_t 只需要 300 次。由此可推出, γ 和 t 值越小, μ_t 势必越小。

给定初始的 Φ 、 Ψ , 则经过 Elad 算法优化后, 其格莱姆矩阵的非对角元素前后究竟发生怎样的变化呢? 设 $\Psi \in \mathfrak{R}^{100 \times 200}$, $\Phi \in \mathfrak{R}^{20 \times 100}$, 参数 $\gamma = 0.5$, 且 $t = 0.2$ 时的情况。

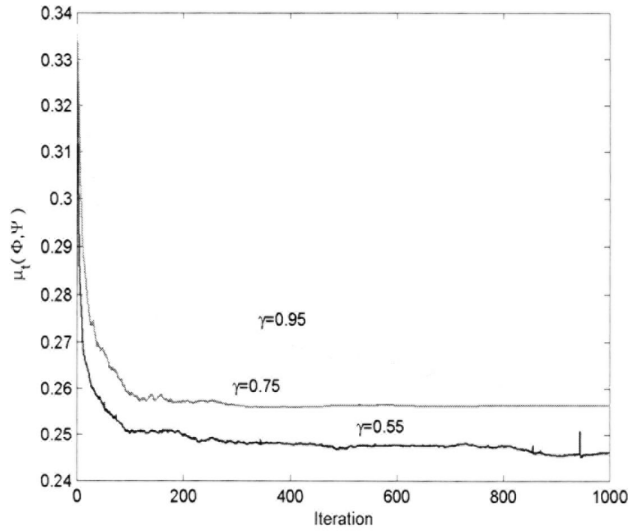
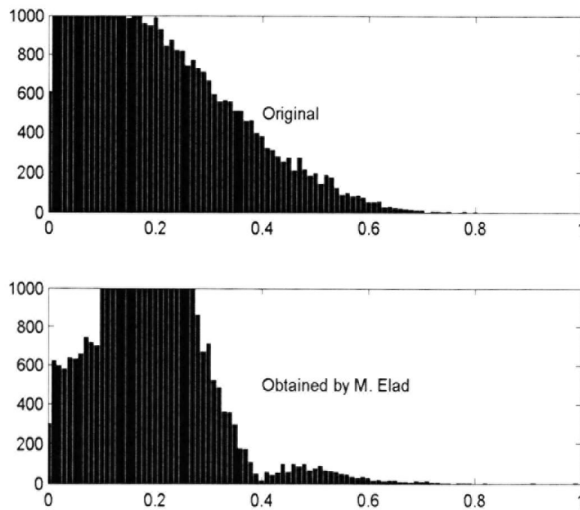
图 3-2 $\mu_t(\Phi, \Psi)$ 的迭代曲线

图 3-3 格莱姆矩阵优化前后非对角元素绝对值分布

图 3-3 的横轴表示元素值的大小，而纵轴则表示相同元素值大小的数目。证实了 Elad 的优化算法的确如同预期的那样，减小了大于阈值 $t = 0.2$ 元素的数量，使绝大多数的元素的绝对值都落在了区间 $[0.1, 0.4]$ 之间。仔细观察还发现，初始的格莱姆矩阵的元素值全都小于 0.8，而优化后的格莱姆矩阵元素值却有极少一部分落在了大于 0.8 的区间。这样一来，反而增大了矩阵的 μ ，可能影响到该优化算法能否成功。

3.1.4 实验结果与分析

首先观察 CS 理论下测量数目 M 对信号重建效果的影响。设一维离散稀疏信号 s ，长度 $L = 128$ ，稀疏个数 $K = 5$ ， $\Psi \in \mathbb{R}^{128 \times 128}$ 的随机矩阵，则原始信号 $x = \Psi s$ 。 Φ 采用一致球矩阵。Elad 优化算法参数 $\gamma = 0.5$ ，且 $t = 0.2$ 。采用 BP、OMP 重构。实验次数 $T_{number} = 100$ 次。当且仅当信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 大于 50，则认为恢复成功，恢复成功率 = 恢复成功次数 / T_{number} 。

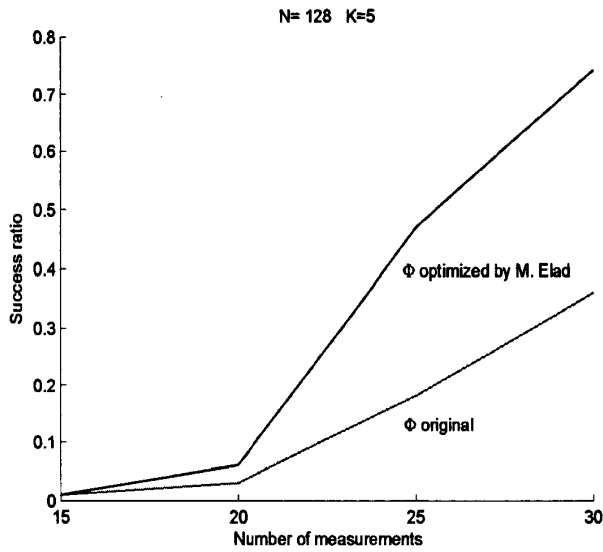


图 3-4 BP 重构出原始信号的成功率

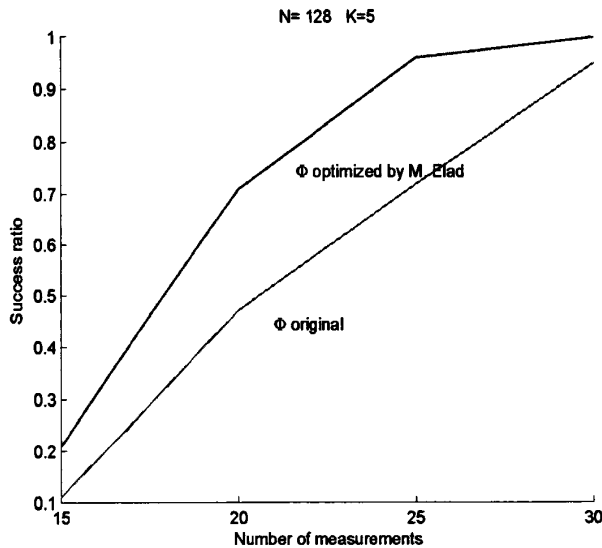


图 3-5 OMP 重构出原始信号的成功率

观察图 3-4 和图 3-5 的实验结果。1) 当 $M = 15$, 即 $M = 3K$ 时, 重构的成功率都非常低。这说明了若希望压缩传感理论成功, 测量数目与稀疏度间的比值至少不小于 4 倍; 2) Elad 的优化算法可以明显地降低信号的重构误差, 提升成功率, 改善幅度达到 10%。

综合分析, Elad 的优化算法存在以下两点不足:

1. Elad 降低的是矩阵 G 的非对角元素绝对值中所有不小于阈值 t 的元素, 即 μ_t 。可是, 至今为止, 很多文献仅仅指出 Φ 和 Ψ 的相关性 μ , 即矩阵 G 中非对角元素的最大绝对值, 与压缩传感理论的性能有着直接的影响, 而不是 Elad 设计的 μ_t 。作者在文中并未说明弃用 μ 的原因, 及降低 μ_t 为何能成功地降低信号误差。
2. Elad 算法的参数 γ , t 对于不同大小的矩阵该如何设置, 他也并未作详细的解释。而本文的实验发现, μ_t 很小时, 该算法没有如预期更好的改善信号误差。

由图 3-2 可预测, $\gamma = 0.5$ 较之 $\gamma = 0.95$ 时目标函数 μ_t 值更小, 结合图 3-4 和图 3-5 的结果, 有理由猜想前者的信号重构误差理应更小, 可结果却出人意料。举例说明, 设 $\Psi \in \mathbb{R}^{100 \times 200}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{20 \times 100}$, $t = 0.2$ 。该实验进行 300 次, 最后的信号误差取平均值。见图 3-6, 比较两种情况下的 OMP 重构出原始信号的误差。

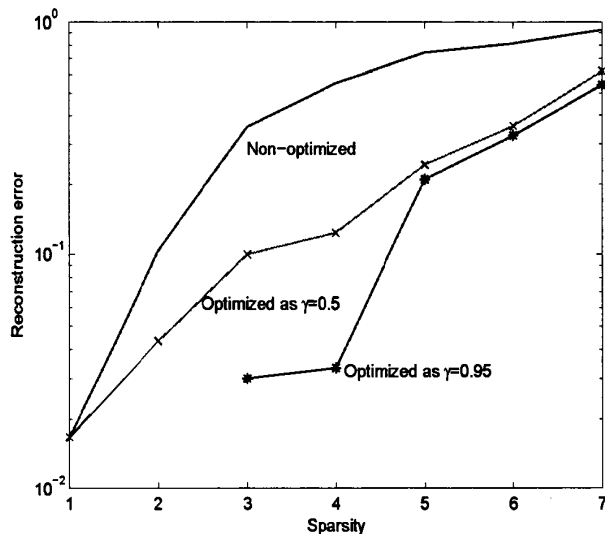


图 3-6 不同 γ 值下, OMP 重构出原始信号的误差

图 3-6 证实了 μ_t 并不是越小越好, 其与信号误差之间的数学联系究竟怎样, 不得而知。所以, 一般采用 Elad 算法优化测量矩阵时通常设 $\gamma = 0.95$, $t = 0.2$ 。

令 $\Lambda_M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ 是矩阵 B 的前 M 个最大非零的特征值, $U_M = [u_1, \dots, u_M]$ 是相对应地特征向量。然后新的坐标矩阵 $\hat{A} = \Lambda_M^{1/2} U_M^T$ 。现在观察矩阵 A 和 \hat{A} , 它们存在怎样的投影关系。发现:

$$A^T A = U_M \Lambda_M U_M^T = (U_M \Lambda_M^{1/2} V^T)(V \Lambda_M^{1/2} U_M^T) \quad (3-7)$$

从而得到 $\hat{A} = V^T A$

3.2.2 算法设计步骤

Vo Dinh Minh Nhat 优化算法的设计步骤如下:

目标: 优化测量矩阵 Φ

输入: 参数设置:

- $\Psi \in \mathcal{R}^{N \times L}$ - 稀疏字典
- $\Phi \in \mathcal{R}^{M \times N}$ - 测量矩阵

初始化: 设 Φ 为任意一随机矩阵。

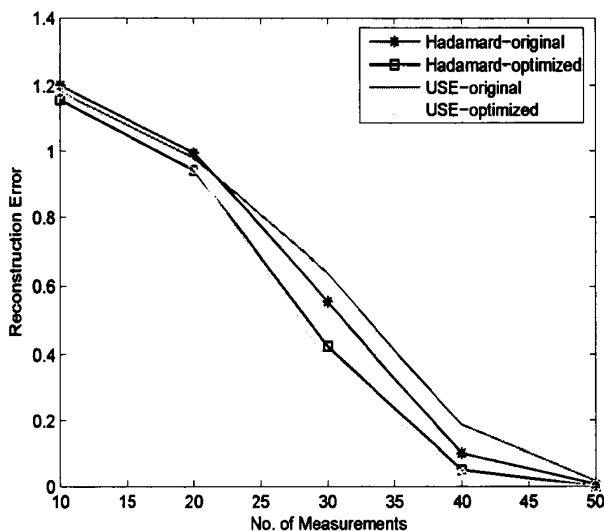
1. 对稀疏字典进行奇异值分解 (SVD), 即 $\Psi = A \Lambda B^T$;
2. 采用多维尺度分析法 (MDS), 得到优化新的传感矩阵 $\Theta = A_M^T \Psi$; 其中 A_M 是与前 M 个奇异值相对应的矩阵 A 的 M 列。或者说, 测量矩阵 $\Phi = A_M^T$ 。

3.2.3 实验结果与分析

为检验该算法的可行性, 设任意取一随机矩阵为稀疏字典基 $\Psi \in \mathcal{R}^{128 \times 128}$, 测量矩阵 $\Phi \in \mathcal{R}^{M \times 128}$: 随机矩阵和部分傅里叶矩阵。稀疏信号 $s \in \mathcal{R}^{128 \times 1}$, 构造原始信号 $x_0 = \Psi s$ 。重构算法选用 OMP 算法。信号重构误差定义为 $\sqrt{\frac{\|x - x_0\|_2^2}{\|x_0\|_2^2}}$ 。每次实验独立进行, 取 200 次实验误差平均值。

图 3-7 表明 EP 优化传感矩阵对提升压缩传感性能的有效性。测量矩阵的选择无论是正交基矩阵还是随机矩阵, OMP 重构出原始信号的平均均有所改善。

Vo Dinh Minh Nhat 优化算法较之 Elad 算法最大的优点在于, 其极大地缩减了矩阵的优化时间, 不需要迭代, 简化了运算量。不过, 其也存在的不足之处: 作者虽然简单的介绍了多维尺度法的概念, 但是并未结合压缩传感理论, 给出严格的数学证明, 而仅仅是通过实验仿真结果说明问题。

图 3-7 不同 M 下信号的重构误差

3.3 小结

压缩传感理论仍然处于不断发展完善，自然存在诸多问题。其中关于如何优化传感矩阵改善压缩传感性能就是其中极具吸引力的研究课题之一。本章以算法为核心，着重介绍了 Michael Elad 提出的基于减小传感矩阵相关性的优化传感矩阵的算法，Vo Dinh Minh Nhat 等人提出的采用多维尺度法的 EP 优化算法，详细地分析各自的算法设计思想、设计步骤、算法性能分析，并在 MATLAB 平台，通过实验验证算法的可行性和有效性，其中指出了上述两种算法存在的不足之处。

第 4 章 基于框架理论的测量矩阵优化算法

Michael Elad 提出研究测量矩阵优化算法的课题后, 国内外有很多的学者也相继发表了很多文章, 从很多数学角度做尝试。他们的出发点一般可以归结为两类: 其一, 希望在 Elad 的研究基础上, 通过其他的收缩条件来降低 μ_t , 增大测量矩阵和稀疏字典基的不相关性; 其二, 考虑到稀疏表示理论中强调稀疏基具有正交性质, 试图使测量矩阵极大地满足正交性质。而本文则结合框架理论, 提出了一种新的优化算法。

4.1 算法设计思想

方便对本文提出的测量矩阵的优化算法的理解, 有必要简单介绍紧框架结构 (Tight Frame) 和等角框架结构 (Equiangular Tight Frame) 的概念。

框架的概念最早是在 1952 年由 Duffin 和 Schaeffer 研究非调和 Fourier 级数时提出的 [35]。随后由于 Gabor 框架、小波框架和有限框架在信号与图像处理、数据压缩、采样理论等领域的广泛应用, 其理论研究也相应得到重视。

定义4-1: 在 \mathfrak{R}^M 维的 Hilbert 空间, 对任意 N 个向量 $a_i, i = 1, 2, \dots, N$, 其中 $a_i \in \mathfrak{R}^M$, 存在正的常量 α, β , 使得下述不等式成立:

$$\alpha \|v\|^2 \leq \sum | \langle v, a_i \rangle |^2 \leq \beta \|v\|^2 \quad (4-1)$$

定义通常的 Hermitian 内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。参数 α, β 称作框架的上下界限。向量 a_i 的个数不小于该向量的维度, 即 $N \geq M$ 。

若 $\alpha = \beta$, 则称此框架为紧框架, 或 α -紧框架。当每个向量值的范数值为 1, 即 $\|a_i\|_2 \equiv 1$, 则称此为单位范数框架。若 $\alpha = \beta = 1$, 称之为正规紧框架 [36]。

推论4-1: 矩阵 A 当且仅当满足以下任一条件时是 α 紧框架:

- 1) 矩阵 A 的所有非零非奇异值等于 $\sqrt{\alpha}$;
- 2) 格莱姆矩阵 $G = A^*A$ 的所有非零特征值等于 α ;
- 3) $\alpha^{-\frac{1}{2}}A$ 的列正交。

定义4-2: 设 A 是 $M \times N$ 的复数矩阵 ($M \leq N$), 其列向量为 a_1, a_2, \dots, a_N 。矩阵 F 称为等角紧框架 (简称 N 元 ETF) [37], 如果满足下列条件:

- 1) 每一列都是单位模, 即 $\forall l = 1, 2, \dots, N, \|a_l\| = 1$;
- 2) 列向量是等角的, 即存在某一常数 α , 使得 $\forall l \neq k, |\langle a_k, a_l \rangle| = \alpha$;
- 3) 列向量形成一个紧框架, 即 $AA^* = \frac{N}{M}I$, 其中 A^* 是 A 的共轭转置。

如果仅有条件 1) 和 2) 满足, 则称 A 是角度为 α 的等角边。

定义4-3: 设 $a_l, l = [1, 2, \dots, N]$ 是 E^M 一个框架, 且 $\forall l, \|a_l\| = 1$, 则

$$\max_{k, l, k \neq l} |\langle a_k, a_l \rangle| \geq \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}} \quad (4-2)$$

等号成立当且仅当 A 是一个等角框架。更多地, 若 $E = R$, 则仅当 $N \leq \frac{M(M+1)}{2}$ 时, (4-2) 式中等号成立。

已经证明, 当整数 M 取较小值时, 对大多数整数对 (M, N) 来说不存在等角框架, 并且实等角框架是相当稀少的 [38]-[40]。对于实等角框架, 研究人员已通过不断的数学分析和实验仿真, 得到了一些数据和结果, 其中主要包括实等角框架的性质和其构造原则、当 (M, N) 应满足怎样的条件才使实等角框架成立等等, 由于本文涉及到的矩阵都是实数值, 所以有关复等角框架的知识点, 可参考 [41]。

4.2 算法描述

结合框架理论的知识, 本文提出了一个新型高效的压缩传感测量矩阵的优化算法。该算法主要分为两步: 1) 构建紧框架; 2) 构建等角框架。

4.2.1 如何构建紧框架

观察紧框架理论的推论, 发现若令一矩阵的格莱姆矩阵的非零特征值相等, 则该矩阵将很大程度上逼近紧框架, 从而得到新的矩阵。由此, 本文设计通过如下几步, 优化测量矩阵 Φ , 使其具有紧框架的性质, 从而能更好的对原信号稀疏表示, 进而改善解码端信号的重构误差:

- 令 $\Theta = \Phi\Psi$, 定义格莱姆矩阵 $G = (\Theta)^T(\Theta)$;
- 对 G 做奇异值分解, 即 $G = USU^T$;
- 重新构造格莱姆矩阵 $G_1 = UU^T$, 即 $\alpha = 1$, 使传感矩阵逼近正规紧框架。

4.2.2 如何构建等角框架

由等角框架的数学定义可以发现，严格意义上的等角框架理论要求由某一矩阵构造的格莱姆矩阵的非对角元素的绝对值都相等。根据公式 (4-2)，不难发现该式子说明了某特定矩阵的相关性的取值范围存在下界限，记 μ_{min} 。可是，学习 Elad 的文献中提及的收缩函数，及压缩传感理论关于相关性的要求，发现倘若按照严格意义的等角框架来优化测量矩阵，解码端原始信号的重构效果并不理想，甚至没有改善。由此，本文所提到的构建的等角框架，只是令格莱姆矩阵中部分非对角元素相等，其判断依据完全取决于非对角元素的绝对值是否大于阈值 μ_{min} 。

本文所提出的优化算法的代价函数 μ_t 定义与 Elad 的相同，即

$$\mu_t(\Theta) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq L \text{ and } i \neq j (|g_{i,j}| \geq t)} |g_{i,j}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq L \text{ and } i \neq j (|g_{i,j}| \geq t)}$$

具体设计如下：

- 对所得的格莱姆矩阵 G_1 归一化，记 \tilde{G}_1 ；
- 根据收缩公式，对 \tilde{G}_1 非对角且绝对值大于阈值 t 的元素迭代，其中 $g(i, j)$ 是 \tilde{G}_1 矩阵第 i 行， j 列元素：

$$g_{i \neq j}(i, j) = \begin{cases} g(i, j), & |g(i, j)| \leq \mu_{min} \\ \text{sign}(g(i, j))\mu_{min}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

综上所述，基于框架理论的压缩传感测量矩阵的优化算法，具体可概括如下：

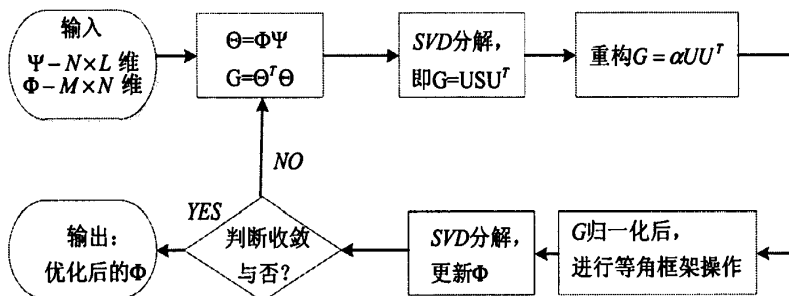


图 4-1 基于框架理论的测量矩阵的优化算法的流程图

4.3 算法性能分析

探讨初始传感矩阵的 μ 、优化后传感矩阵的 μ 以及其 μ_t 三者之间具体联系？任选一随机矩阵 $\Psi \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ ， $\Phi \in \mathbb{R}^{50 \times 100}$ ，根据公式 (4-2)，该矩阵 $\Theta \in \mathbb{R}^{50 \times 100}$ 相关性的下限 $\mu_{min} = \sqrt{\frac{1}{99}} = 0.1005$ 。

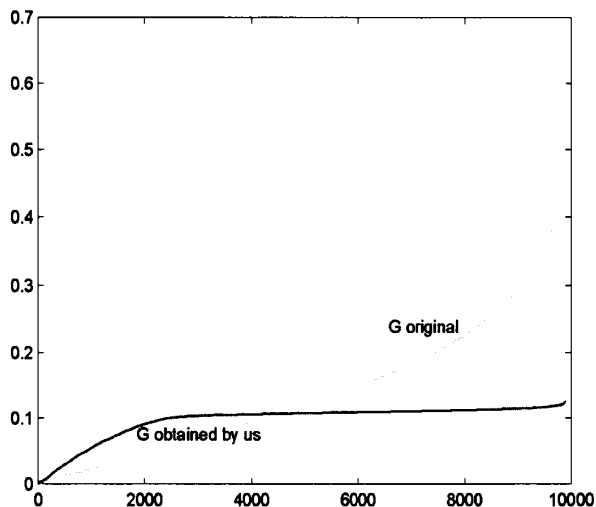


图 4-2 格莱姆矩阵 G 非对角元素的绝对值分布

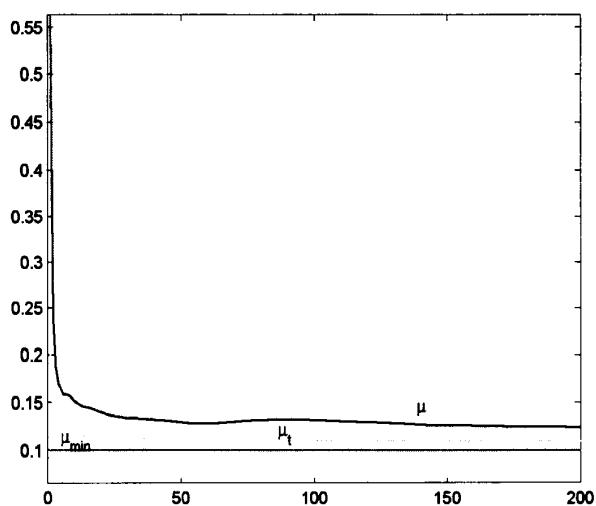


图 4-3 相关性 μ 的曲线

图 4-2 显示了初始格莱姆矩阵和经过 200 次迭代优化后的格莱姆矩阵中非对角元

素的绝对值的分布，可见，优化后的格莱姆矩阵的非对角元素的绝对值 80% 都近似的等于 0.1005，即极大地实现了优化后的传感矩阵满足等角框架理论。图 4-3 则更加细致地表示出优化后传感矩阵的 μ 、 μ_t 、 μ_{min} 。

4.4 实验结果与分析

上文只是给出了基于框架理论的压缩传感测量矩阵的优化算法对降低 μ 的可行性，不过，判断优化算法实际效果的重要依据应该是能否改善解码端原始信号的重构误差。

设 $N = L = 100$ ， $M = [15 : 5 : 30]$ ，稀疏信号 s 有 5 个 ± 1 非零点。随机矩阵为 Ψ ，而高斯随机矩阵为 Φ 。则原始信号 $x = \Psi s$ 。采用 OMP、BP 算法重构原始信号。实验累计统计 300，当且仅当信噪比 SNR 大于 50，则认为恢复成功。恢复成功率 = 恢复成功次数 / T_{number} 。

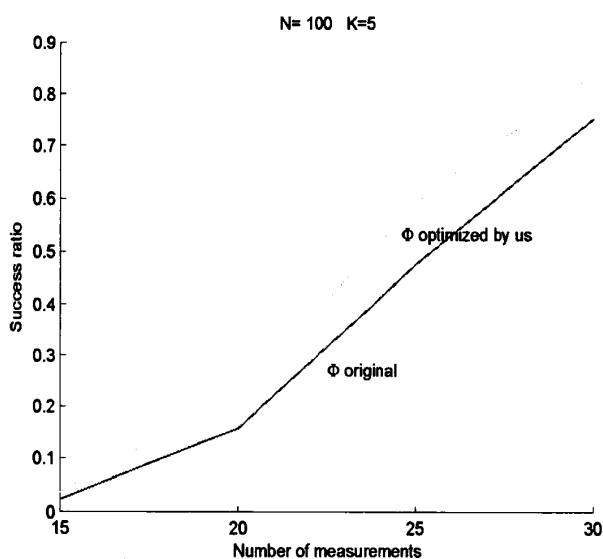


图 4-4 BP 重构出原始信号的成功率

观察图 4-4、图 4-5 发现，我们提出的算法具有很好改善了 BP、OMP 信号的重构误差，其中 BP 成功率提高了 10%，OMP 提高了近 20%，所以证实了该算法的可行性和可靠性。

其实如果单独优化测量矩阵使其逼近紧框架结构，而不对格莱姆矩阵的非对角元素值做改动，则最终仍然可以改善信号的重构误差。这种算法有利有弊：一方面，由于逼近紧框架并需要进行迭代，所以优化矩阵需要的时间代价非常小；另一方面，对

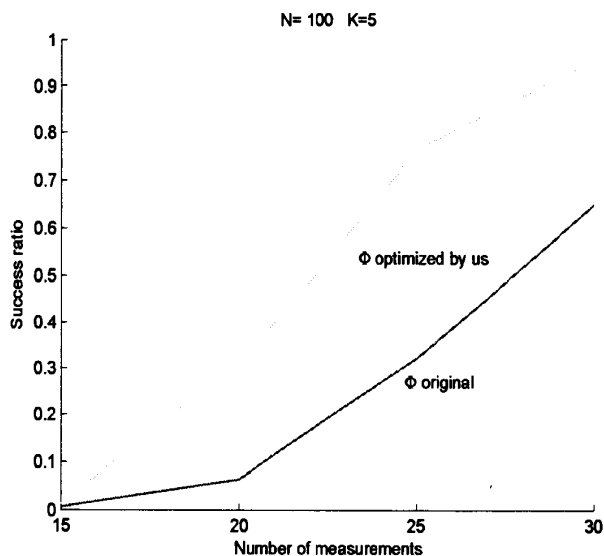


图 4-5 OMP 重构出原始信号的成功率

信号误差的改善程度有限，其性能不及完整的结合紧框架和等角框架两种理论优化后的测量矩阵所得到的结果。

基于框架理论的测量矩阵的优化算法当然比 Elad 方法消耗的时间则有所缩减，较之 Vo Dinh Minh Nhat 方法，则矩阵优化时消耗的时间代价相对比较大。不过，若考量信号重构误差和运算时间两者孰轻孰重的话，通常前者的权重大于后者，毕竟优化测量矩阵的研究课题的目标是尽可能地提高改善幅度。因为对于任何应用领域而言，减少传输信号带来的价值完全可以抵消由此时间增加的不足。

4.5 与其他算法的实验数据分析

压缩传感测量矩阵优化研究的目的是改善压缩传感理论中信号重构误差的大小。第 3 章已详实的论述了 Michael Elad、Vo Dinh Minh Nhat 分别提出的优化算法，而且证明了他们算法的有效性。本节内容重点是通过实验仿真，结合实验数据，对所有的算法进行全面的分析。

实验 1

任取 300 个稀疏信号 $s \in \mathcal{R}^{140 \times 1}$ ，且 $\|s\|_0 = K$ ；随机字典矩阵 $\Psi \in \mathcal{R}^{80 \times 140}$ ，则原信号 $x_0 = \Psi s$ ；测量矩阵为 USE 矩阵 $\Phi \in \mathcal{R}^{20 \times 80}$ ；恢复算法选择 BP、OMP。Michael Elad 的优化算法参数设置为 $\gamma = 0.95$ ，阈值 $t = 0.2$ ，稀疏度 $K = [1 : 1 : 7]$ 。信号的重构误

差 $\sqrt{\frac{\|x-x_0\|^2}{\|x_0\|^2}}$ 。统计结果取误差平均值，其中若平均值小于 0.001，则不显示。

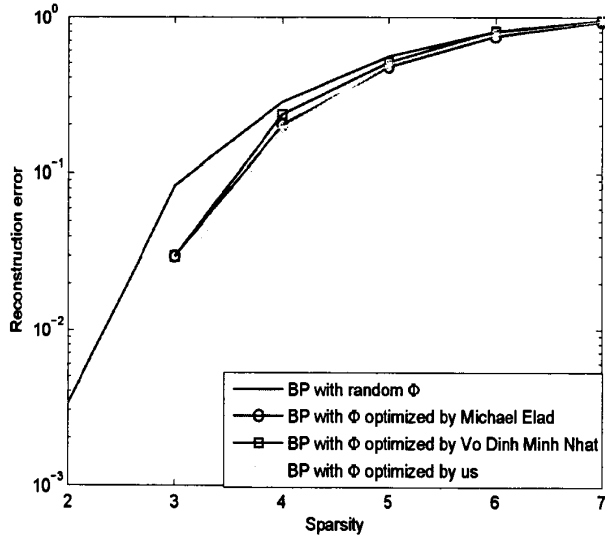


图 4-6 BP 算法重构信号的误差比较

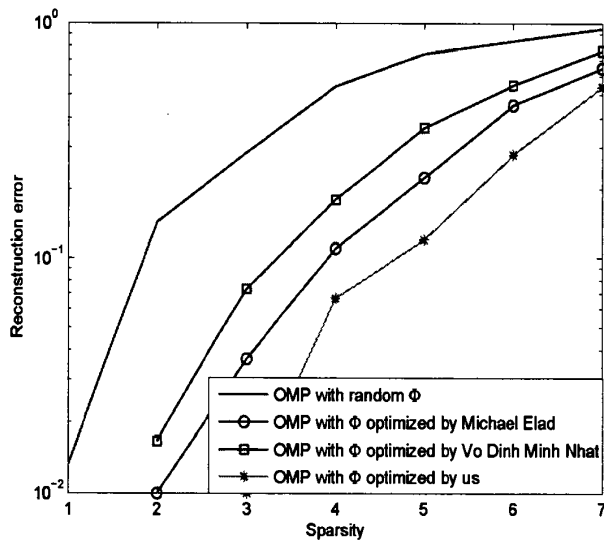


图 4-7 OMP 算法重构信号的误差比较

综合图 4-6和图 4-7 发现: 1) 对于测量矩阵优化前后信号的重构误差而言, BP 的重构误差改善程度不怎么明显。经由 Elad 方法优化后得到的误差与经由 Vo Dinh Minh Nhat 方法优化后得到的误差重合, 而经由我们的方法优化后的信号误差则稍微低点, 略胜一筹。2) 可采用 OMP 重构信号, 测量矩阵优化前后的信号误差改善情况良好, 可发现改善幅度排序: 我们的算法优于 Michael Elad 的算法优于 Vo Dinh Minh Nhat 的算法, 其中我们的算法可降低信号误差近一个数量级。

实验 2

再者，我们讨论当稀疏信号的稀疏度 $\|s\|_0 = K = 4$ 给定，而测量值的长度 $M = [15 : 5 : 35]$ 区间内变化，观察各优化算法对信号误差的改善情况。

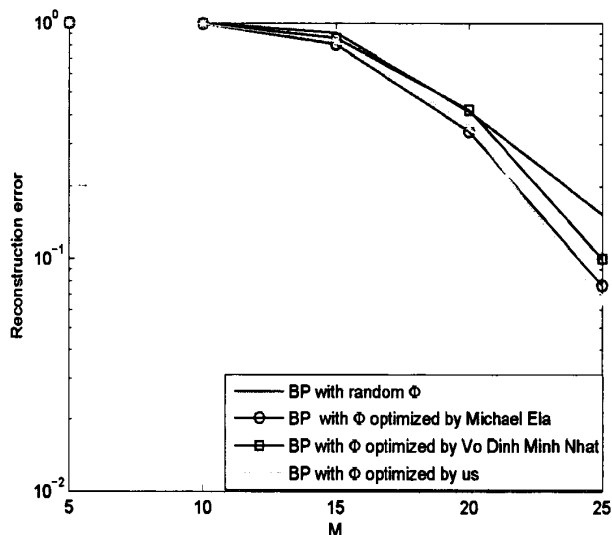


图 4-8 BP 算法恢复信号的误差比较

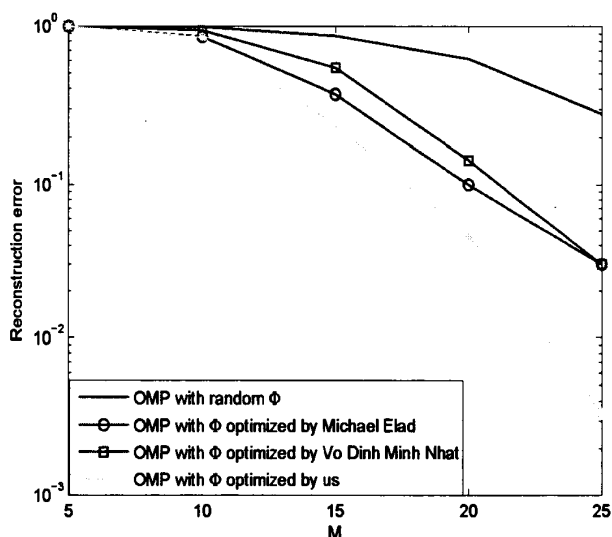


图 4-9 OMP 算法恢复信号的误差比较

图 4-8、图 4-9 得到的实验结果类似于实验 1，均说明我们方法的高效性。

试验中虽然是以 Φ 为 USE 为例，其实若选择其他的矩阵，如部分 Fourier 矩阵、部分 Hadamard 矩阵，可以得到同样的类似的实验结果。此处为了简单，省略了相关的实验仿真图。

4.6 小结

本章主要论述了一种基于框架的传感矩阵的优化算法的设计，包括其设计思想、设计步骤及实验结果的论证。通过 MATLAB 的实验仿真，发现该算法能有效地改善压缩传感性能，无论是 OMP、BP 恢复算法都能极大地提高原始信号的恢复成功率。与其他算法的实验仿真，则进一步验证本文所提出的基于框架理论的优化算法的优越性和可靠性。

第 5 章 测量矩阵优化研究的问题

第三章和第四章的算法分析中，我们发现了一些问题，没有详细的阐述。本章综合分析，做一些补充，进一步研究测量矩阵的优化工作。

5.1 相关性与测量矩阵优化

Michael Elad 和我们的测量矩阵优化算法的目标函数是一致的，都是希望降低传感矩阵的平均相关性 μ_t ，而不是真正数学意义上的 μ 。由此，便引发出一个问题：为什么不以 μ 目标函数，设计算法，从而直接优化测量矩阵呢？

5.1.1 算法设计思想

代价函数：

$$\Phi = \Phi - \lambda \frac{d\mu}{d\Phi} \quad (5-1)$$

其具体步骤如下：取任意稀疏字典基 Ψ ，测量矩阵 Φ 。构造格莱姆矩阵 $G = \Theta^T \Theta = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi$ 。

定义：

$$f_{i,j}(\Phi) \triangleq \frac{g_{i,j}^2}{g_{i,i}g_{j,j}} \quad (5-2)$$

由此推出：

$$\mu^2(\Theta) = \max_{1 \leq i,j \leq L, i \neq j} f_{i,j} \quad (5-3)$$

$$g_{i,j} = e_i^T G e_j = e_i^T \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi e_j$$

然后，对 $g_{i,j}$ 关于 $\phi_{k,l}$ 求导，即

$$\begin{aligned} \frac{dg_{i,j}}{d\phi_{k,l}} &= e_i^T \frac{dG}{d\phi_{k,l}} e_j \\ &= e_i^T \left[\Psi^T \frac{dG}{d\phi_{k,l}} \Phi \Psi + \Psi^T \Phi^T \frac{dG}{d\phi_{k,l}} \Psi \right] e_j \\ &= e_i^T \left[\Psi^T e_l e_k^T \Phi \Psi + \Psi^T \Phi^T e_k e_l^T \Psi \right] e_j \\ &= e_k^T \Phi \Psi e_j e_i^T \Psi^T e_l + e_k^T \Phi \Psi e_i e_j^T \Psi^T e_l \end{aligned} \quad (5-4)$$

得到格莱姆矩阵中每一个元素 $g_{i,j}$ 关于 Φ 的求导:

$$\frac{dg_{i,j}}{d\Phi} = \Phi\Psi[e_j e_i^T + e_i e_j^T]\Psi^T \in \mathfrak{R}^{M \times N} \quad (5-5)$$

综合式子 (5-2)、(5-3)、(5-5), 推出相关性 μ 关于测量矩阵 Φ 的导数:

$$\frac{d\mu}{d\Phi} = \frac{1}{2} f_{i,j}^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2 \frac{dg_{i,j}}{d\Phi} g_{i,j} g_{i,i} g_{j,j} - g_{i,j}^2 (g_{i,i} \frac{dg_{j,j}}{d\Phi} + \frac{dg_{i,i}}{d\Phi} g_{j,j})}{(g_{j,j} g_{i,i})^2} \right\}$$

5.1.2 算法性能分析

选随机字典 $\Psi \in \mathfrak{R}^{60 \times 80}$, 随机矩阵 $\Phi \in \mathfrak{R}^{20 \times 60}$, 则其相应的 μ 值迭代曲线, 和格莱姆矩阵的非对角元素的绝对值分布。

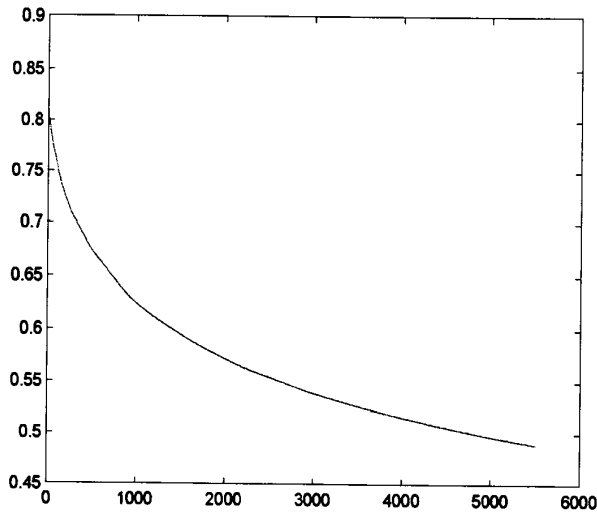


图 5-1 μ 值的迭代曲线

观察图 5-1 可发现, 经过不断的迭代, 传感矩阵的相关性 μ 随之减小, 完全符合预先设想。图 5-2 也相应的显示了优化后的格莱姆矩阵的非对角元素绝对值的分布, 证实了该算法确实完全减小了矩阵的相关性, 使 μ 由原来的 0.8 减小到 0.5。

5.1.3 实验结果分析

任取 300 个稀疏信号 $s \in \mathfrak{R}^{80 \times 1}$, 且 $\|s\|_0 = K$; 随机字典矩阵 $\Psi \in \mathfrak{R}^{60 \times 80}$, 则原信号 $x_0 = \Psi s$; 测量矩阵 $\Phi \in \mathfrak{R}^{20 \times 60}$; 恢复算法选择 BP、OMP。Michael Elad 的优化算法参数设置为 $\gamma = 0.95$, 阈值 $t = 0.2$, 稀疏度 $K = [1 : 1 : 7]$ 。信号的重构误差 $\sqrt{\frac{\|x - x_0\|^2}{\|x_0\|^2}}$ 。

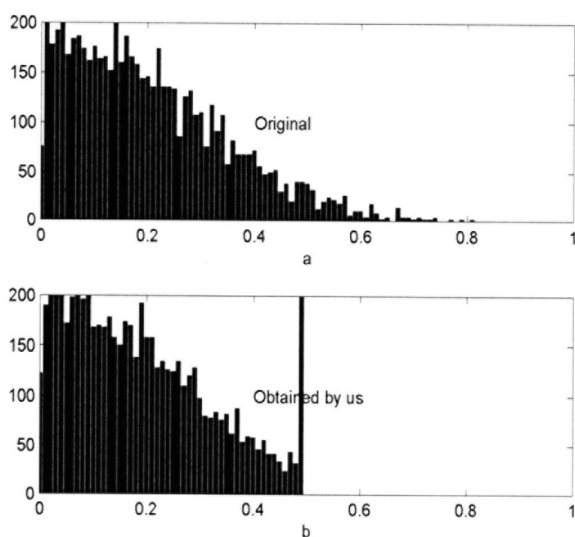


图 5-2 优化前后格莱姆矩阵的非对角元素绝对值的分布

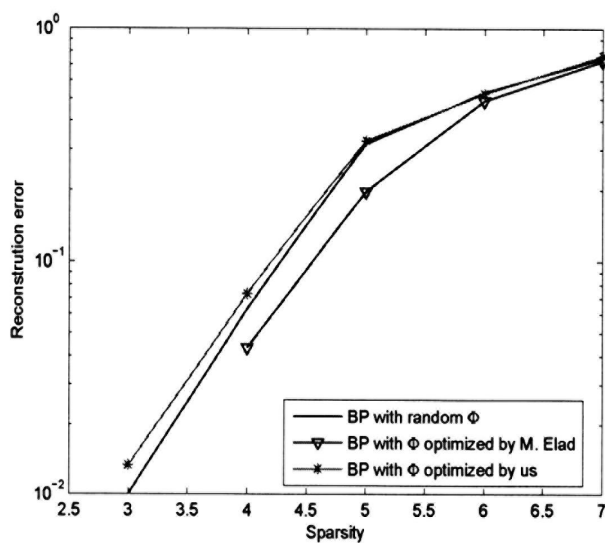


图 5-3 BP 重构信号的误差

统计结果取误差平均值，其中若平均值小于 0.001，则不显示。为使该实验结果与 Elad 方法的实验结果具有可比性，均分别保证目标函数收敛。

观察图 5-3、图 5-4 实验数据，采用 OMP 算法重构的信号误差较之初始的误差而言，有一定程度的改善，但是与 Elad 所得到的误差相比，两者之间的改善幅度存在不小的差距；而采用 BP 算法重构的信号误差不仅没有任何的改善，反而比未经任何优化时所得到的结果更加恶劣。由此，证实了通过降低 μ 而直接优化测量矩阵的思想不太行得通。

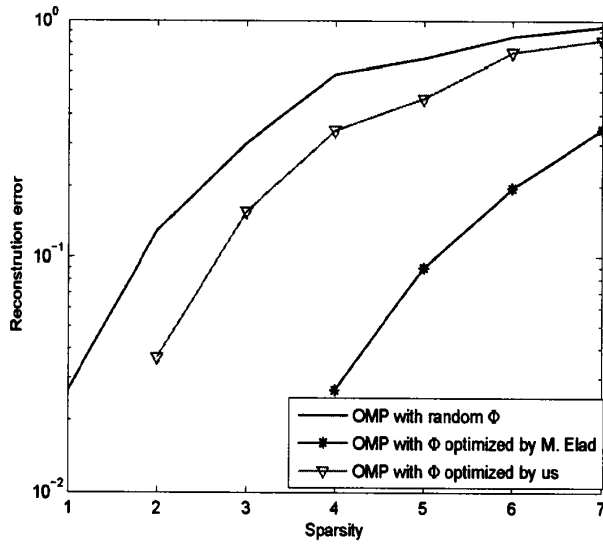


图 5-4 OMP 重构信号的误差

5.2 构造紧框架优化测量矩阵

在第四章中，本文详细地叙述了通过结合构造紧框架和等角框架从而优化测量矩阵的算法，实验结果证实该算法的有效性。其实，若仅仅构造紧框架优化测量矩阵也是可以降低解码端原始信号的重构误差，而且不需要进行迭代，缩减了优化的运行时间。至于性能如何，保持第一节中实验数据的设置，结合 Elad 的方法比较。

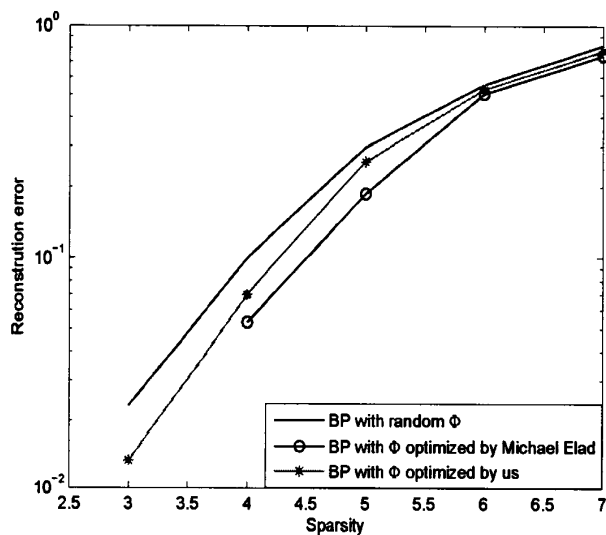


图 5-5 BP 重构信号的误差

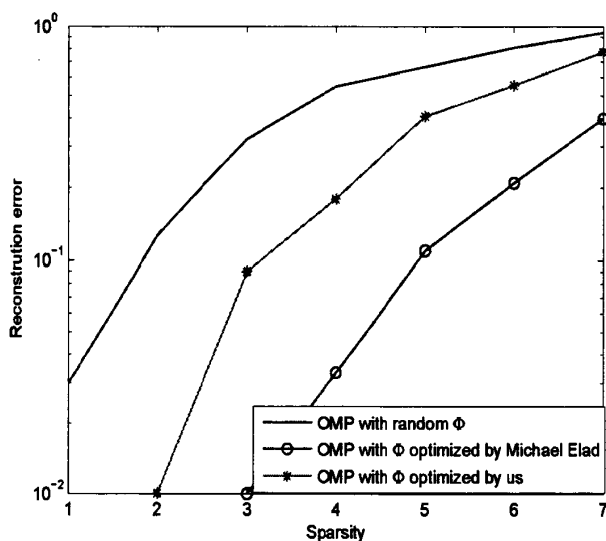


图 5-6 OMP 重构信号的误差

图 5-5和图 5-6, 构造紧框架结构确实能起到降低误差的效果, 但是较之 Elad 算法幅度不大, 不过该算法在优化运行时间上远远好于 Elad。因此, 如何更好的使测量矩阵逼近紧框架的研究也可以成为未来研究的一个方面。

5.3 小结

本章节主要是针对前面几章对于测量矩阵优化研究工作中存在的一些问题进行探讨; 具体分析并证明了若单独降低矩阵的相关性并不能有效的减小信号的重构误差, 另一方面, 如果仅仅运用紧框架同样能起到部分改善作用。这些工作都为进一步研究优化测量矩阵的工作奠定了基础。

第6章 总结与展望

6.1 工作总结

压缩传感理论充分利用了原始信号的稀疏性或可压缩性，将传统的奈奎斯特采样定理转化为随机采样/测量的过程，省去了高速采样产生的大量冗余信息，有效的缓解了高速采样的实现压力，节约了处理、存储和传输的成本，使得用低成本的传感器将模拟信号直接转化为数字信号成为可能。由于压缩传感理论的基础知识涉及范围广，需要深厚的数学底子，发展至今仍然存在很多问题亟待解决。

本文是作者两年多来研究工作的总结，深入分析了压缩传感理论的基础，研究和讨论了测量矩阵的优化算法。高效的测量矩阵是压缩传感理论能否成功的关键，关系到解码端精确重构原始信号时所需的采样点数能否进一步减小，重构信号误差能否进一步降低。主要工作总结如下：

1. 介绍了压缩传感理论的基础知识，并对其中存在的难点问题进行了探讨，主要包括对理论模型，测量矩阵，稀疏表示，多种重构算法，尤其是测量矩阵方面详细的研究了测量矩阵的构造准则、常用的测量矩阵。
2. 在对压缩传感理论研究的基础上，结合对现有的压缩传感测量矩阵的优化算法的研究、分析与实现，分别对 M. Elad 和 Vo Dinh Minh Nhat 的优化算法的设计思想、设计步骤和性能分析，结合 MATLAB 平台，展开大量的仿真实验，证实了两种方法的可行性和可靠性。
3. 提出了基于框架理论的测量矩阵的优化算法。简单介绍了紧框架和等角框架理论的概念，分析了该算法的设计思想、设计步骤和性能。实验结果表明，BP、OMP 重构原始信号的误差都低于现有的算法。
4. 综合上述的算法，考虑传感矩阵相关性与测量矩阵的关系，进一步的探讨了若仅仅降低相关性对信号误差的影响和单一基于构造紧框架优化测量矩阵算法有效性，为今后针对测量矩阵的相关深入研究奠定一定的基础。

6.2 展望

压缩传感理论目前仍然处于发展阶段，有很多关键问题尚待解决。如何优化测量矩阵的研究已然受到了国内外不少学者的注意。本文在研究现有的优化算法的基础上，提出了一些自己的想法，但是还有很多问题和方向有待商榷。本文存在不足和待深入研究的问题如下：

1. 虽然很多文献指出 μ 越小，则解码端成功重构出原始信号的概率就越大。可是，如果希望仅仅降低 μ 而提高 CS 性能似乎不能实现，相反若考虑 μ_t 则可以得到不错的改善。不足的是，Elad 在文中就为何选用 μ_t 而弃用 μ 作为目标函数未作任何数学意义上的说明，使得进一步深入研究优化测量矩阵的工作困难重重。
2. 本文也已经指出对于某一大小的传感矩阵而言，其 μ_t 值并不是越小越好，可是至于究竟 μ_t 值该如何确定仍待于进一步深入探讨。
3. 构造测量矩阵所需依据的准则有很多，所以设法通过其他的途径来优化测量矩阵也不失为一种可行的尝试。另一方面，至今为止仍然没有确定构造测量矩阵的充要条件，这在一定程度上也限制了优化测量矩阵的研究工作。

压缩传感理论是新诞生的，虽然仍然有很多的问题急需进一步的研究和深化，而且目前绝大多数的研究都只是理论性的，离真正的实际应用还有很长的一段路要走。但是无论如何压缩传感理论是对传统的信号处理的一个极好的补充和完善，其对开拓现代信号处理思路影响巨大，同时对为解决其他领域的问题提供了方案。

参考文献

- [1] E.J. Candès, J. Romberg and T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 52(2):489-509, 2006.
- [2] D.L. Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Trans. Inform. Theory. 52(4):1289-1306, 2006.
- [3] E.J. Candès and J. Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. Inverse Problems, 23(3):969-985, 2007.
- [4] E.J. Candes and M.B. Wakin. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 25(2):21-30, 2008.
- [5] 王宝贵. 压缩传感实现方法的研究[D]. 北京:北京交通大学, 2009.
- [6] 赵玉朗. 压缩传感在信号采集系统中的应用研究[D]. 天津:南开大学, 2010.
- [7] 赵瑞珍. 压缩传感与稀疏重构的理论及应用[DB/OL]. 中国科技论文在线 <http://www.paper.edu.cn>, 2009.
- [8] D.L. Donoho and M. Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. 100:2197-2201, 2003.
- [9] O.V. Holtz. Compressive sensing: a paradigm shift in signal processing[DB/OL]. <http://arxiv.org/abs/0812.3137>
- [10] D.L. Donoho. For most large underdetermined systems of equations the minimal l_1 norm near-solution approximates the sparsest near-solution[J]. Comm. Pure Appl. Math, 59:797-829, 2004.
- [11] A. Cohen, R. DeVore, and W. Dahmen. Compressed sensing and best k-term approximation[J]. J. Amer. Math. Soc, 22:211-231, 2009.
- [12] E.J. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Comm. Pure Appl. Math, 59(8):1207-1223, 2006.

- [13] T.T. Do, T.D. Tran, and Lu Gan. Fast compressive sampling with structurally random matrices[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp:3369-3372, 2008.
- [14] Y. Tsaig and D.L. Donoho. Extensions of compressed sensing[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 86(3):549-571, 2006.
- [15] E.J. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 51(12):4203-4215, 2005.
- [16] E.J. Candès and T. Tao. Error correction via liner programming[A]. Pro.of 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science FOCS[C], Pittsburgh, Pennsylvania, USA, pp:295-308, 2005.
- [17] 孙伟伟. 基于压缩传感的图像重构[D]. 北京:北京航空航天大学, 2009.
- [18] 程旺宗. 压缩传感理论及其在宽带阵列信号参数估计中的应用[D]. 四川:西南交通大学, 2010.
- [19] S. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans. Signal Proc, 41(12):3397-3415, 1993.
- [20] Y.C. Pati, R. Rezaifar, and P. Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]. The 27th Annual Asilomar Conference in Signals, System and Computers, vol.1, pp:40-44, 1993.
- [21] D.L. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori, and J.L. Starck. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. 3:1-39, 2006.
- [22] D. Needell and R. Vershynin. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[OB/OL].<http://arxiv.org/abs/0707.4203>, 2008.
- [23] S.S. Chen and D.L. Donoho. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 43(1):129-159, 2001.
- [24] K. Koh, S.J. Kim, and S. Boyd. An interior-point method for large-scale l_1 -regularized logistic regression[J]. Journal of Machine Learning Research, 8:1519-1555, 2007.

- [25] M. Figueiredo, R. Nowak, and S. Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. *IEEE J. Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing*, 1(4):586-598, 2007.
- [26] T. Blumensath and M.E. Davies. Iterative thresholding for sparse approximations[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 14(5-6):629-654, 2008.
- [27] D. Needell and J.A. Tropp. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Presented at *Information Theory and Applications*, 2008.
- [28] A.C. Gilbert, M.J. Strass, J.A. Tropp, and et al. One sketch for all: fast algorithms for compressed sensing[A]. *The 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*[C]. New York: Association for Computing Machinery, pp:237-246, 2007.
- [29] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于亚高斯随机投影的图像重建方法[J]. *计算机研究与发展*, 45(8):1402-1407, 2008.
- Fang Hong, Zhang Quanbing, and Wei Sui. A method of image reconstruction based on sub-Gaussian random projection[J]. *Journal of Computer Research and Development*, 45(8):1402-1407, (in Chinese), 2008.
- [30] J.A. Tropp. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Trans Info. Thry*, 50(11):2231-2242, 2004.
- [31] M. Elad. Optimized projections for compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(12):5695-5702, 2007.
- [32] V.D. MNhat, D. Vo, S. Challa and S.Y. Lee. Efficient projection for compressed sensing[C]. *Seventh IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science*, pp:322-327, 2008.
- [33] W.S. Torgerson. *Theory and Methods of Scaling*[M]. New York: Wiley, 1958
- [34] 朱宏磊. *流形学习算法的研究与应用*[D]. 天津:天津大学, 2007.
- [35] R.J. Duffin and A.C. Schaffer. A class of nonharmonic fourier series[J]. *Trans Amer Math Soc*, 72:341-366, 1952.

- [36] 李登峰, 薛明志. Banach 空间上的基和框架[M]. 北京:科学出版社, 2007.
- [37] O. Christensen. An Introduction to Frames and Riesz Bases[M]. Boston: Birknuser, 2002.
- [38] J.A. Tropp, I.S. Dhillon, and R.W. Heath. Designing structured tight frames via an alternating projection method[J]. IEEE Trans Inform Theory, 51(1):188-209, 2005.
- [39] M.A. Sustik, J.A. Tropp, and I.S. Dhillon. On the existence of equiangular tight frames[J]. Linear Alg Appl, 426(2-3):619-635, 2007.
- [40] 田新现, 李登峰. 复等角紧框架的性质[J]. 中国科学院研究生院学报, 28(6):715-721, 2011.
- [41] 张威. 复等角紧框架的若干结果[D]. 河南:河南大学, 2009.

致 谢

在论文完成之际，我谨向在攻读硕士期间所有给予关怀、支持和帮助的老师、同学及家人表示最诚挚的感谢。

本论文的主要工作是在导师李刚教授的细心指导下完成的。李老师的严谨的治学态度和科学的工作方法极大地帮助和影响了我。此外，李老师旺盛的工作热情、谦和的待人态度和严谨的治学之道都是我应该学习的。

研二期间有机会当李老师的助教，更进一步的感受到李老师治学、教学的态度。受益最大的一点在于，文档需要严密地逻辑性。说实在，大学四年的学习生涯里，大大小小的论文基本都写过二三十篇，可是每一次顶多是凑字数，大致的框框 OK 就行，几乎或者说根本就不太注意行文的逻辑性。由此，经常不符合要求，重新修改。慢慢地，我似乎理解了逻辑性的重要性，因为修改后的文档的可读性和美观度都有所提高。

感谢在研究生课程学习期间各位任课老师对我的指导和帮助！

感谢众多同学在学习、工作和生活上的关心和帮助。同时要感谢在本论文撰写时，万晓芳、唐磊、洪传荣和郭金强等同学对我论文中的研究工作给予了热情的帮助，和他们的讨论使我受益颇多，在此向他们表达我的感激之情。感谢师妹师弟，大家一起相处融洽和睦，可谓“一家亲”。

感谢通信研 09 级的全体同学，在这个团结、积极向上的集体里学习和生活，使我的研究生生活变得充实而有意义。

最后，要感谢我的家人。谢谢姐姐！谢谢哥哥！他们是我经济上最大的“股东”。当然，也要极度感谢爸爸、妈妈，他们永远是我最好的港湾。正是有了家人的支持和无私的奉献，我才得以安枕无忧地在校学习，享受简简单单的校园生活。

再次对所有关心和帮助我的人说一声谢谢！

攻读学位期间参加的科研项目和成果

参加的科研项目

- [1] 国家自然科学基金：高性能简洁数字系统结构理论及应用（NSFC-Grant 60872111）

录用和发表的论文

- [1] Lifeng Yu, Gang Li, and Liping Chang. Optimizing sensing matrix for compressed sensing systems[A]. The 8th International Conference on Information, Communications and Signal Processing-ICICS 2011[C]. Singapore, 2011, December.
- [2] Lifeng Yu, Huang Bai, and Xiaofang Wan. Optimal sensing matrix for compressed sensing[A]. Proc. 4th Int. Conf. on Electronics, Communications and Control-ICECC2011[C]. Ningbo, 2011, September.
- [3] Xiaofang Wan, Huang Bai, and Lifeng Yu. An improved weighted total variation algorithm for compressive sensing electronics[A]. Proc. 4th Int. Conf. on Electronics, Communications and Control-ICECC2011[C]. Ningbo, 2011, September.