A 佳教育·2020 年 3 月湖湘名校高三线上自主联合检测 理科数学

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	B	B	C	C	A	C	A	A	B

4.【解析】对任意的 $x\in\mathbf{R}$， $f\left(x_1\right)\le f(x)\le f\left(x_2\right)$ 成立，

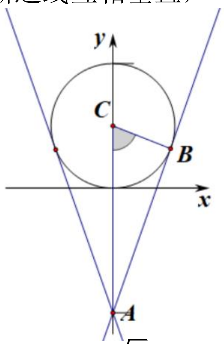
所以 $f(x_1)=f(x)_{\min}=-2, f(x_2)=f(x)_{\max}=2$，所以 $\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\dfrac{T}{2}=1$，故选 B.

5.【解析】圆的方程为（$x-2)^2+(y-2)^2=9$,过点E最长的弦长是直径，$AC=6$，最短的弦是与ME垂直的弦,$\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{r^2\text{-}ME^2}=2, BD=4$,四边形的面积$S=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$，故选 B

6.【解析】设大正方形的边长为 1，区域 2 直角三角形的三边分别为 $a,b(a<b)$，则 $a=1\times\sin\dfrac{\pi}{12},b=1\times\cos\dfrac{\pi}{12}$,则小正方形的面积为 $S=(b-a)^2=(\cos\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12})^2=1-\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，

所以飞镖落在区域 1 的概率为 $P=\dfrac{1}{2}$，则估计飞镖落在区域 1 的枚数最有可能是 $N=100\times\dfrac{1}{2}=50$

7.【解析】因为抛物线的准线与两条渐近线围成一个等腰直角三角形，所以两渐近线互相垂直，一条渐近线的斜率$\dfrac{b}{a}=1$,双曲线中$e^2=1+(\dfrac{b}{a})^2=2$,所以$e=\sqrt{2}$，故选 C



8.【解析】$n=10$ 设通项为 $T_{k+1}=C_{10}^{k}x^{10-k}a^{k}$，令 $10-k=7$，
$\therefore k=3$，$\therefore x^7$ 的系数为 $C_{10}^{3}a^3=15$，$\therefore a^3=\dfrac{1}{8}$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$.

10.【解析】$\dfrac{1-\cos2\alpha}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{1-\left(1-2\sin^2\alpha\right)}{-\sin\alpha}=-2\sin\alpha$，倾斜角 $\alpha\in\left[0,\pi\right)$，

故$\sin\alpha>0$,由图象可得$\alpha=\angle ACB$或$\pi-\angle ACB$,故$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,原式$=-2\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$,选 A.

12. 【解析】解：$f^{'}(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$，当 $a\le0$ 或 $0<a\le\dfrac{1}{e}$ 时，$f^{'}(x)<0$ 在 $x\in[1,e]$ 恒成立，

从而 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 单调递减，所以 $f_{\min}(x)=f(e)=ae-1=3$，解得 $a=\dfrac{4}{e}\notin(-\infty,\dfrac{1}{e}]$，不合题意

当 $\dfrac{1}{e}<a<1$ 时，易得 $f(x)$ 在 $(1,\dfrac{1}{a})$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},e)$ 单调递增，

所以 $f_{\min}(x)=f(\dfrac{1}{a})=1-\ln\dfrac{1}{a}=3$，解得 $a=e^2\notin(\dfrac{1}{e},1)$，不合题意

当 $a>1$ 时， $f(x)$ 在 $[1,e]$ 单调递增，所以 $f_{\min}(x)=f(1)=a=3>1$， 满足题意。综上知 $a=3$。
所以 $f(x)=3x-\ln x,x\in[1,e]$ 所以 $f_{\min}(x)=f(1)=3$， $f_{\max}(x)=f(e)=3e-1$

依题意有 $(n-1)f_{\min}(x)\le f_{\max}(x)$，即 $(n-1)3\le3e-1$, 得 $n\le e+\dfrac{2}{3}$，又 $n\in N^*$,所以 $n\le3$.从而 n 的最大值为 3.

A佳教育·2020年3月湖湘名校高三线上自主联合检测 理科数学

二、填空题（每题5分，共20分）

13、2

14、2【解析】$a^2\sin C=5\sin A$，$a^2c=5a$，$ac=5$因为$(a+c)^2=16+b^2$，

所以，$a^2+c^2-b^2=16-2ac=6$，从而△ABC的面积为$\sqrt{\frac{1}{4}\left[5^2-(\frac{6}{2})^2\right]}=2$.

15、16

16、-2，$-\frac{1}{2}\le a\le 1$【解析】(1) $f'(x)=-e^x-2$，曲线C_1在$x=0$处的切线的斜率$k_1=f'(0)=-3$，

$g'(x)=a-\sin x$ C_2在$x=\frac{\pi}{2}$处的切线的斜率$k_2=g'(\frac{\pi}{2})=a-1$，依题意有$a=-2$.

(2) 曲线C_1上任意一点处的切线的斜率$k_1=f'(x)=-e^x-2$，则与l_1垂直的直线的斜率为$\frac{1}{e^x+2}\in(0,\frac{1}{2})$，而过$C_2$上一点处的切线的斜率$k_2=g'(x)=a-\sin x\in[a-1.a+1]$

依题意必有$\begin{cases}a-1\le 0\\ a+1\ge\frac{1}{2}\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}\le a\le 1$

三、解答题（共70分）

17. 【解析】(I) 由$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\ge 2)$ 可知数列$\{a_n\}$是等差数列，设公差为d,

因$a_1=1$，由$a_3+a_4=12$，得d=2，……………………………………4分

所以$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=2n-1(n\in N^*)$ ……………………………6分

(Ⅱ) $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3})$ ……………………8分

所以数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+2}}\right\}$的前n项和：

$s_n=\frac{1}{4}[(1-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3})]$……………………9分

$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$ ……………………11分

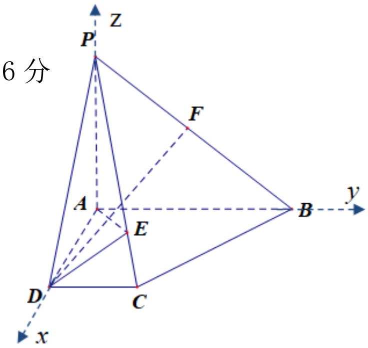
$=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$ ……………………12分

18. 【解析】(1) 证明：因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp AD$…………1分

又$AB\perp AD$，$PA\cap AB=A$，所以$AD\perp$平面PAB…………………… 2分

又 $AD \subset$ 平面 ADE，所以平面 $ADE \perp$ 平面 PAB..........................4 分

（2）建立如图空间直角坐标系………………………………5 分



则 $A(0,0,0),B(0,2,0),P(0,0,2),C(\sqrt{3},1,0),D(\sqrt{3},0,0),F(0,1,1)$ ……6 分

由（1）知 $AD \perp PB$，又 $PB \perp AF$

$\therefore PB \perp$ 平面 ADF

$\therefore$ 平面 ADF 的一个法向量为 $\overrightarrow{PB}=(0,2,-2)$ ....7 分

$\because PE=\lambda EC$

$$\therefore \overrightarrow{PE}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{PC}=(\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{-2\lambda}{\lambda+1})$$

$$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=(\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{2}{\lambda+1})$$

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AD}=0$ 且 $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AE}=0$

$$\therefore \sqrt{3}x=0 \text{且} \frac{\sqrt{3}\lambda x}{\lambda+1}+\frac{\lambda y}{\lambda+1}+\frac{2z}{\lambda+1}=0$$

$$\therefore x=0., \text{令} y=1, \text{则} z=-\frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \vec{n}=(0,1,-\frac{\lambda}{2})$$ 10分

$\because$ 二面角 $F-AD-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$\therefore \left|\cos\left(\overrightarrow{PB},\vec{n}\right)\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \frac{2+\lambda}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$\therefore \lambda=1$ 或 4..12分

19.【解析】解：（1）由已知得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},b=\sqrt{2},a^2=b^2+c^2$ …………………………3 分

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$ ………………………………4 分

所以，C_1 的方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ ………………………………5 分

（2）假设存在这样的直线，

由已知可知直线的斜率存在，设直线方程为 $y=kx+m$，

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ 6 分

$\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-8=0,\Delta=16\left(8k^2-m^2+2\right)>0(*)$， …………7 分

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1},x_1x_2=\dfrac{4m^2-8}{4k^2+1}$， …………8 分

$y_1y_2=\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=k^2x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2=\dfrac{m^2-8k^2}{4k^2+1}$， …………9 分

由 $\left|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|$ 得 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，

即 $\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$， …………11 分

故 $8k^2=5m^2-8\geq 0$，代入（*）式解得 $m^2>\dfrac{3}{2}$

又 $8k^2=5m^2-8\geq 0$，$\therefore m>\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 或 $m<-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$． …………12 分

20.【解析】（1）设甲选出的 3 道题答对的道数为 ξ，则 $\xi\sim B(3,\dfrac{2}{3})$，设甲第一轮答题的总得分为 x，则 $x=10\xi-5(3-\xi)=15\xi-15$，所以 $Ex=15E\xi-15=15\times3\times\dfrac{2}{3}-15=15$ ……………3 分

（或法二：设甲的第一轮答题的总得分为 x，则 x 的所有可能取值为 30,15,0，-15

且 $P(x=30)=C_3^3(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$，$P(x=15)=C_3^2\dfrac{1}{3}(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{12}{27}$，$P(x=0)=C_3^1(\dfrac{1}{3})^2(\dfrac{2}{3})=\dfrac{6}{27}$，

$P(x=-15)=C_3^0(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{1}{27}$，故得分为 x 的分布列为：

x	30	15	0	-15
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{1}{27}$

$Ex=30\times\dfrac{8}{27}+15\times\dfrac{12}{27}-15\times\dfrac{1}{27}=15$.…………………3 分）

设乙的第一轮得分为 y，则 y 的所有可能取值为 30,15,0

则，$P(y=30)=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，$P(y=15)=\dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}$，$P(y=0)=\dfrac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$

故 y 的分布列为：

y	30	15	0
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

故 $Ey=30\times\dfrac{1}{10}+15\times\dfrac{6}{10}=12$ 分…………………5 分

$\because Ex > Ey$，所以第二轮最先开始答题的是甲。…………………6 分

（2）①依题意知 $P_1 = 1, P_2 = \frac{1}{3}$， $P_3 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$， …………………7 分

②依题意有 $P_n = P_{n-1}\times\frac{1}{3}+(1-P_{n-1})\times\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{2}{3}\ (n\ge 2)$ …………………9 分

$\therefore P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(P_{n-1}-\frac{1}{2})$ ， $(n\ge 2)$ …………………10 分

又 $P_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

所以 $\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列…………………11 分

$\therefore P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})^{n-1}$， $\therefore P_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})^{n-1}\ (1\le n\le 20)$ …………………12 分

21. 【解析】（1）令 $f(x)=\log_a^x$（$a>0$ 且 $a\ne 1$），将定点 $P(\sqrt{e},\frac{1}{2})$ 代入得 $a=e$，

所以 $f(x)=\ln x$ …………………1 分

得 $g(x)=n-\frac{m}{x}-\ln x$， $g'(x)=\frac{m}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{m-x}{x^2}$ （ $x>0$ ）…………………2 分

当 $m\le 0$ 时， $g'(x)<0$ 在 $x>0$ 时恒成立，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；………3 分

当 $m>0$ 时 $g'(x)>0\Rightarrow 0<x<m$， $g'(x)<0\Rightarrow x>m$，

即 $g(x)$ 在 $(0,m)$ 单调递增，在 $(m,+\infty)$ 单调递减；

综上：当 $m\le 0$ 时， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

当 $m>0$ 时 $g(x)$ 在 $(0,m)$ 单调递增，在 $(m,+\infty)$ 单调递减；…………………5 分

（2）因为 $g(1)=n-m$，而 $\forall x\in(0,+\infty)$ 有 $g(x)\le n-m=g(1)$ 恒成立知 $g(x)$

当 x=1 时有最大值 $g(1)$，由（1）知必有 m=1，………………6 分

$\therefore g(x)=n-\frac{1}{x}-\ln x$ ， $h(x)=g(x)+2x-n=2x-\frac{1}{x}-\ln x$,…………………7 分

依 题 意 设 $h'(x_1)=h'(x_2)=k$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{{x_1}^2}-\frac{1}{x_1}+2-k=0\\ \frac{1}{{x_2}^2}-\frac{1}{x_2}+2-k=0\end{cases}$ $\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$， ………8 分

$\Rightarrow x_1+x_2=x_1x_2\ge 2\sqrt{x_1x_2}\Rightarrow x_1x_2>4$ …………………9 分

$\therefore h(x_1)+h(x_2)=2(x_1+x_2)-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})-(\ln x_1+\ln x_2)=2x_1x_2-1-\ln x_1x_2$ …………10 分

令 $t=x_1x_2>4$， $\varphi(t)=2t-1-\ln t$

$\therefore \varphi'(t)=2-\dfrac{1}{t}>0(t>4)$ $\therefore \varphi(t)$ 在 $t>4$ 单调递增…………………11 分

$\therefore \varphi(t)>\varphi(4)=7-2\ln 2$ …………………12 分

22. 【解析】曲线 C 的普通方程 $(x+1)^2+y^2=4$，l 的直角坐标方程 $x-y+2=0$ ……4 分

由已知，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t为参数) ………………5 分

代入曲线 C：$(x+1)^2+y^2=4$ 化简，得 $t^2-\sqrt{2}t-3=0$，设 A, B 对应的参数分别为 t_1,t_2

则 $t_1+t_2=\sqrt{2},t_1t_2=-3$ ………………………………………7 分

所以 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$ …………10 分

23. 【解析】（1） $f(x)\le 5$ 即 $|x-4|+|x-1|\le 5$，由绝对值的几何意义可得：$0\le x\le 5$

所以不等式的解集为：$\{x|0\le x\le 5\}$…………………………5 分（其他方法酌情给分）

(2) 因为 $f(x)=|x-4|+|1-x|\ge|(x-4)+(1-x)|=3$（当且仅当 $1\le x\le 4$ 等号成立）………………6 分

所以 $f(x)$ 的最小值 M=3，即 $a^2+b^2=3$，……………………………7 分

$$\text{所以}\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+1}=(\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+1})[(a^2+2)+(b^2+1)]\times\frac{1}{6}$$

$$=(2+\frac{b^2+1}{a^2+2}+\frac{a^2+2}{b^2+1})\times\frac{1}{6}$$

$$\ge\left(2+2\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+2}\bullet\frac{a^2+2}{b^2+1}}\right)\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{2}{3}(\text{当且仅当}a^2=1,\ b^2=2\text{等号成立})$$

……………………………………………10 分