例题详解

第一单元　集合与常用逻辑用语

第1讲　集合及其运算

例1　【解答】若 $1=a+2$，则 $a=-1$.
$\because a^2+3a+3=1=a+2$，$\therefore a=-1$ 不合题意.
若 $1=(a+1)^2$，则 $a=0$ 或 $a=-2$.
当 $a=0$ 时，$A=\{2,1,3\}$；
当 $a=-2$ 时，$a^2+3a+3=1$，
$\therefore a=-2$ 不合题意，$a=0$ 适合.
若 $1=a^2+3a+3$，则 $a=-1$ 或 $a=-2$.
由上面结论可知，此时没有 a 符合题意.
$\therefore$满足条件的 a 值为 0.

例1变式题　-1　【解析】根据集合中元素的确定性，我们不难得到两集合的元素是相同的，这样需要列方程组分类讨论，显然复杂又繁琐. 这时若能发现 0 这个特殊元素和 $\frac{b}{a}$ 中的 a 不为 0 的隐含信息，就能得到如下解法：

由已知得 $\frac{b}{a}=0$ 及 $a\neq0$，所以 $b=0$，于是 $a^2=1$，即 $a=1$ 或 $a=-1$，又根据集合中元素的互异性 $a=1$ 应舍去，因而 $a=-1$，故 $a^{2011}+b^{2011}=(-1)^{2011}=-1$.

例2　B　【解析】对于集合 $M:x=\frac{6m+1}{6}$，$m\in\mathbf{Z}$；对于集合 $N:x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6}$，$n\in\mathbf{Z}$；对于集合 $P:x=\frac{3p+1}{6}$，$p\in\mathbf{Z}$.
由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数，而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数，所以 $M\subsetneqq N=P$，故选 B.

例2变式题　D　【解析】由 $f(x)=x^2+x-1$，$x=f(x)$ 得 $x^2-1=0$，$x=\pm1$，$M=\{-1,1\}$.
$y=f(x)=x^2+x-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geqslant-\frac{5}{4}$，
故 $N=\left\{y\,\middle|\,y\geqslant-\frac{5}{4}\right\}$，故 $M\subsetneqq N$.

例3　【解答】由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$，故集合 $A=\{1,2\}$.
(1) $\because A\cap B=\{2\}$，
$\therefore 2\in B$，代入 B 中的方程，
得 $a^2+4a+3=0$，
$\therefore a=-1$ 或 $a=-3$.
当 $a=-1$ 时，$B=\{x|x^2-4=0\}=\{-2,2\}$，满足条件；
当 $a=-3$ 时，$B=\{x|x^2-4x+4=0\}=\{2\}$，满足条件.
综上，a 的值为 -1 或 -3.
(2)对于集合 B，
$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=8(a+3)$.
$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$.
①当 $\Delta<0$，即 $a<-3$ 时，$B=\varnothing$，满足条件；
②当 $\Delta=0$，即 $a=-3$ 时，$B=\{2\}$，满足条件；
③当 $\Delta>0$，即 $a>-3$ 时，$B=A=\{1,2\}$ 才能满足条件，则由根与系数的关系得
$\begin{cases}1+2=-2(a+1),\\1\times2=a^2-5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-\frac{5}{2},\\a^2=7,\end{cases}$ 矛盾.
综上，a 的取值范围是 $a\leqslant-3$.
(3) $\because A\cap(\complement_U B)=A$，
$\therefore A\subseteq\complement_U B$，$\therefore A\cap B=\varnothing$.
①若 $B=\varnothing$，则 $\Delta<0\Rightarrow a<-3$，适合；
②若 $B\neq\varnothing$，则 $a=-3$ 时，$B=\{2\}$，$A\cap B=\{2\}$，不合题意；
$a>-3$，此时需 $1\notin B$，且 $2\notin B$.
将 2 代入 B 的方程得 $a=-1$ 或 $a=-3$（舍去）；
将 1 代入 B 的方程得 $a^2+2a-2=0\Rightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$.
$\therefore a\neq-1$ 且 $a\neq-1\pm\sqrt{3}$.
综上，a 的取值范围是 $a<-3$ 或 $-3<a<-1-\sqrt{3}$ 或 $-1-\sqrt{3}<a<-1$ 或 $-1<a<-1+\sqrt{3}$ 或 $a>-1+\sqrt{3}$.

例4　112　【解析】$S_n=\{1,2,3,4\}$，所以 $S_n=\{1,2,3,4\}$ 的所有偶子集为 $\{2\}$，$\{4\}$，$\{1,2\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$.
$\therefore S_n$ 的所有偶子集的容量之和为 $2+4+2+4+6+8+12+6+8+24+12+24=112$.

例4变式题　D　【解析】取 $x=0\in A$ 时，
$\begin{cases}y=2,z=0\times2\times(0+2)=0,\\y=3,z=0\times3\times(0+3)=0,\end{cases}$
即 $z=0$. 取 $x=1\in A$ 时，
$\begin{cases}y=2,z=1\times2\times(1+2)=6,\\y=3,z=1\times3\times(1+3)=12,\end{cases}$
即 $z=6$ 或 12.
故 $A\odot B=\{0,6,12\}$，从而所有元素之和为 $0+6+12=18$.

第2讲　命题、量词、基本逻辑联结词

例1　【解答】(1) $p\wedge q$：1 既是素数又是方程 $x^2+2x-3=0$ 的根. 假命题.
$p\vee q$：1 是素数或是方程 $x^2+2x-3=0$ 的根. 真命题.
$\neg p$：1 不是素数. 真命题.
(2) $p\wedge q$：平行四边形的对角线相等且互相垂直. 假命题.
$p\vee q$：平行四边形的对角线相等或互相垂直. 假命题.
$\neg p$：有些平行四边形的对角线不相等. 真命题.

(3)$p\wedge q$:方程 $x^2+x-1=0$ 的两实根符号相同且绝对值相等.假命题.

$p\vee q$:方程 $x^2+x-1=0$ 的两实根符号相同或绝对值相等.假命题.

$\neg p$:方程 $x^2+x-1=0$ 的两实根符号不相同.真命题.

例2 【解答】p 真:$\Delta=a^2-4\times4\geqslant0$,

$\therefore a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant4$.

q 真:$-\frac{a}{4}\leqslant3$,$\therefore a\geqslant-12$.

由"p 或 q"是真命题,"p 且 q"是假命题得 p、q 两命题一真一假.

当 p 真 q 假时,$a<-12$;

当 p 假 q 真时,$-4<a<4$.

综上,a 的取值范围为$(-\infty,-12)\cup(-4,4)$.

例2变式题 【解答】p:$0<a<1$.

函数 $y=\lg(ax^2-x+a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 等价于 $\forall x\in\mathbf{R}$,$ax^2-x+a>0$,

所以 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=1-4a^2<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{2}$,即 q:$a>\frac{1}{2}$.

如果 $p\vee q$ 为真命题,$p\wedge q$ 为假命题,则 p 真 q 假或 p 假 q 真,

$\therefore\begin{cases}0<a<1,\\ a\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\leqslant0\text{ 或 }a\geqslant1,\\ a>\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant1$.

例3 【解答】(1)$\neg p$:存在一个末位数字是 0 的整数不能被 5 整除,假命题.

(2)$\neg q$:$\exists x_0\geqslant0$,$x_0^2\leqslant0$,真命题.

(3)$\neg r$:任意一个三角形的内角和不大于 $180°$,真命题.

(4)$\neg t$:每一个梯形的对角线都不互相平分,真命题.

例3变式题 【解答】由题意得 p:$-2\leqslant x-3\leqslant2$,

$\therefore 1\leqslant x\leqslant5$,

$\therefore\neg p$:$x<1$ 或 $x>5$.

q:$m-1\leqslant x\leqslant m+1$,

$\therefore\neg q$:$x<m-1$ 或 $x>m+1$,

又$\because\neg p$ 是 $\neg q$ 充分而不必要条件,

$\therefore\begin{cases}m-1\geqslant1,\\ m+1\leqslant5,\end{cases}$ $\therefore 2\leqslant m\leqslant4$.

第3讲 充分条件、必要条件与命题的四种形式

例1 【解答】(1)逆命题:全等三角形的面积相等,真命题.

否命题:面积不相等的两个三角形不是全等三角形,真命题.

逆否命题:两个不全等的三角形的面积不相等,假命题.

(2)逆命题:若方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根,则 $q\leqslant1$,真命题.

否命题:若 $q>1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根,真命题.

逆否命题:若方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根,则有 $q>1$,真命题.

(3)逆命题:若实数 x,y 全为零,则 $x^2+y^2=0$,真命题.

否命题:若 $x^2+y^2\neq0$,则实数 x,y 不全为零,真命题.

逆否命题:若实数 x、y 不全为零,则 $x^2+y^2\neq0$,真命题.

(4)逆命题:若 $a=0$ 或 $b=0$,则 $ab=0$,真命题.

否命题:若 $ab\neq0$,则 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,真命题.

逆否命题:若 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,则 $ab\neq0$,真命题.

例2 【解答】(1)在$\triangle ABC$ 中,显然有$\angle A>\angle B\Leftrightarrow BC>AC$,

$\therefore p$ 是 q 的充要条件.

(2)$\because$原命题的逆否命题成立,即 $x=2$ 且 $y=6\Rightarrow x+y=8$,

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

(3)取 $A=120°$,$B=30°$,则 $p\nRightarrow q$,

又取 $A=30°$,$B=120°$,则 $q\nRightarrow p$,

$\therefore p$ 是 q 的既不充分又不必要条件.

(4)$\because p$:$x=1$ 且 $y=2$,q:$x=1$ 或 $y=2$,

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

例2变式题 (1)$a\geqslant2$ (2)C **【解析】**(1)$|x-1|<2$ 的解集是 $A=\{x|-1<x<3\}$,$|x-1|<a$ 的解集是 $B=\{x|1-a<x<1+a\}$,由于 $A\subseteq B$,可得 $a\geqslant2$.

(2)由已知有 $p\Rightarrow r$,$q\Rightarrow r$,$r\Rightarrow s$,$s\Rightarrow q$.由此得 $r\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow r$,①正确,③不正确;$p\Rightarrow q$,②不正确;④等价于 $p\Rightarrow s$,正确;$r\Rightarrow s$ 且 $s\Rightarrow r$,⑤不正确.选 C.

例3 【解答】命题"$\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件"的等价命题即逆否命题为:p 是 q 的充分不必要条件.

p:$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2\Rightarrow-2\leqslant\frac{x-1}{3}-1\leqslant2$

$\Rightarrow-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant3\Rightarrow-2\leqslant x\leqslant10$.

q:$x^2-2x+1-m^2\leqslant0$

$\Rightarrow[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant0$.①

$\because p$ 是 q 的充分不必要条件,

$\therefore$不等式$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2$ 的解集是 $x^2-2x+1-m^2\leqslant0(m>0)$的解集的真子集.

又$\because m>0$,$\therefore$不等式①的解集为$\{x|1-m\leqslant x\leqslant1+m\}$,

$\therefore\begin{cases}1-m\leqslant-2,\\ 1+m\geqslant10,\end{cases}$ 且两个不等式不能同时取等号,

$\therefore m\geqslant9$.

$\therefore$实数 m 的取值范围是$[9,+\infty)$.

例3变式题 【解答】由 $2x^2-3x+1\leqslant0$ 得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$.

由 $x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant0$,得 $a\leqslant x\leqslant a+1$.

$\because p$ 是 q 的充分不必要条件,

$\therefore p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$.$\therefore\left[\frac{1}{2},1\right]\subsetneqq[a,a+1]$,

$\therefore\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2},\\ a+1\geqslant1,\end{cases}$ 且不同时取等号,$\therefore 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore a$ 的取值范围是$\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

例4 【解答】必要性:

$\because a+b=1$,$\therefore a+b-1=0$,

$\therefore a^3+b^3+ab-a^2-b^2$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0$.

充分性:

$\because a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$，

即$(a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0$，

又 $ab\neq0$，$\therefore a\neq0$ 且 $b\neq0$，

$\therefore a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$，

$\therefore a+b-1=0$，即 $a+b=1$.

综上可知，当 $ab\neq0$ 时，$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

例 4 变式题 【解答】$ax^2+2x-1=0(a\neq0)$没有负根$\Leftrightarrow$

$\Delta<0$ 或$\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\-\frac{2}{a}>0,\\\frac{-1}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow a<-1$ 或$-1\leqslant a<0\Leftrightarrow a<0$，

故 $ax^2+2x-1=0$ 至少有一负根的充要条件是 $a>0$.

第二单元　函数与导数

第 4 讲　函数的概念与表示方法

例 1　①③④　【解析】①令 $\lambda=\mu=1$，则 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b})$，故①是真命题，

同理，④令 $\lambda=k$，$\mu=0$，则 $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$，故④是真命题.

③$\because f(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$，则有 $f(\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}$，

$f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=-(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\cdot(-\boldsymbol{a})+\mu\cdot(-\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})$，是线性变换，故③是真命题.

②由 $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$，则有 $f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}$，

$\because \boldsymbol{e}$ 是单位向量，$\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$，故②是假命题.

例 1 变式题　B 【解析】根据函数的定义："集合 M 中的任一元素，在对应关系 f 作用下，在集合 N 中都有唯一元素与之对应."由此逐一进行判断.

对于图(a)：M 中属于$(1,2]$的元素，在 N 中没有象，不符合定义；

对于图(b)：符合 M 到 N 的函数关系；

对于图(c)：M 中有一部分的元素的象不属于集合 N，因此它不表示 M 到 N 的函数关系；

对于图(d)：其象不唯一，因此也不表示 M 到 N 的函数关系.

由上分析可知，应选 B.

例 2 【解答】(1)由$\begin{cases}1-x>0\\3x+1>0\\2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，得$-\frac{1}{3}<x<1$，

且 $x\neq\frac{\pi}{4}$，所以函数的定义域为$\left(-\frac{1}{3},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},1\right)$.

(2)由$\begin{cases}a<x<b\\a<-x<b\end{cases}(b>-a>0)$得，$\begin{cases}a<x<b\\-b<x<-a\end{cases}(b>-a>0)$，即 $a<x<-a$，所以定义域为$(a,-a)$.

例 2 变式题 【解答】(1)由函数解析式有意义，得

$\begin{cases}x^2-5x+6\geqslant0\\x-1\neq0\\x+|x|>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant3\text{ 或 }x\leqslant2\\x\neq1\\x>0\end{cases}\Rightarrow0<x<1$ 或 $1<x\leqslant2$ 或 $x\geqslant3$，

故函数的定义域是$(0,1)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$.

(2)令 $t=x-1$，因为 $f(x-1)$的定义域为$[1,2]$，

所以 $0\leqslant t\leqslant1$，故 $0\leqslant x^2\leqslant1$.

$\therefore|x|\leqslant1$，得$-1\leqslant x\leqslant1$.

所求定义域为$[-1,1]$.

例 3 【解答】(1)$y=4-\sqrt{-(x-1)^2+4}$.

$\because 0\leqslant-(x-1)^2+4\leqslant4$，

$\therefore 0\leqslant\sqrt{-(x-1)^2+4}\leqslant2$，

$\therefore 2\leqslant4-\sqrt{-(x-1)^2+4}\leqslant4$，

$\therefore$所给函数的值域为$[2,4]$；

(2)令 $\sqrt{1-2x}=t(t\geqslant0)$，则 $x=\frac{1-t^2}{2}$，

$\therefore y=\frac{1-t^2}{2}+t=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$，当 $t=1$ 时，$y_{\max}=1$，

$\therefore$所给函数的值域为$(-\infty,1]$.

例 3 变式题 【解答】(1)$y=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$，

所以二次函数的图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$.

①当 $x\in[-1,0]$时，函数在$[-1,0]$上单调递减，故所求值域为$[5,8]$；

②当 $x\in[-2,2]$时，函数在 $x=1$ 时取得最小值 4，在 $x=-2$时，取得最大值 13，故所求值域为$[4,13]$.

(2)(换元法)令 $t=\sqrt{1-2x}(t\geqslant0)$，则 $x=\frac{1-t^2}{2}$.

$\therefore y=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，$t\in[0,+\infty)$.

$\because\frac{1}{2}\in[0,+\infty)$，

$\therefore$当 $t=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{3}{8}$时，$y_{\max}=\frac{5}{4}$；无最小值，

故所求值域是$\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

例 4 【解答】(1)当 $x\leqslant0$ 时，$g(x)=x^2\geqslant0$，

故 $f[g(x)]=f(x^2)=(x^2)^2=x^4$.

(2)法一：令 $1-\sin x=t$，则 $t\in[0,2]$，

则 $\sin x=1-t$.

$\therefore f(1-\sin x)=f(t)=\cos^2x=1-\sin^2x$.

$=1-(1-t)^2=-t^2+2t$，

$\therefore f(x)=-x^2+2x(0\leqslant x\leqslant2)$.

法二：$\because f(1-\sin x)=\cos^2x=1-\sin^2x=-(1-\sin x)^2+2(1-\sin x)$，

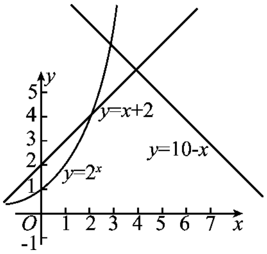
$\therefore f(x)=-x^2+2x(0\leqslant x\leqslant2)$.

例 5　C 【解析】方法一：函数 $f(x)=\begin{cases}2^x(0\leqslant x\leqslant2),\\x+2(2<x\leqslant4),\\10-x(x>4).\end{cases}$

由于函数在区间$[0,2]$上单调递增；在区间$(2,4]$单调递增，在点 $x=2$ 处两段的函数值相等，故函数在区间$[0,4]$上单调递增，函数在区间$(4,+\infty)$单调递减，又在点 $x=4$ 处两段上的函数值相等，故 $x=4$ 是函数的最大值点，故函数的最大值是 $f(4)=6$. 答案 C.

方法二：画出 $y=2^x$，$y=x+2$，$y=10-x$ 的图象，如图所示，

根据函数 $f(x)=\min\{2^x,x+2,10-x\}$ 的意义,函数 $f(x)$ 的图象是上面三个函数图象位于最下方的图象组成的,观察图象可知,当 $0\leqslant x\leqslant 2$,$f(x)=2^x$;当 $2<x\leqslant 4$ 时,$f(x)=x+2$;当 $x>4$ 时,$f(x)=10-x$. $f(x)$ 的最大值在 $x=4$ 时取得为 6,故选 C.



第 5 讲　函数的单调性与最值

例 1 【解答】设任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

则 $\Delta x=x_2-x_1>0$,

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$

$=(\sqrt{x_2^2+1}-ax_2)-(\sqrt{x_1^2+1}-ax_1)$

$=(\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1})-a(x_2-x_1)$

$=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-a(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)\left(\dfrac{x_2+x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-a\right)$.

$\because 0\leqslant x_1<x_2$,

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}<1$.

又 $a\geqslant 1$,

$\therefore (x_2-x_1)\left(\dfrac{x_2+x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-a\right)<0$.

所以 $\Delta y<0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调减函数.

例 1 变式题 【解答】设 $x_1>x_2>\sqrt{a}$,

则 $\Delta x=x_1-x_2>0$,

$\Delta y=f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\dfrac{a}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{a}{x_2}\right)=(x_1-x_2)\cdot\left(1-\dfrac{a}{x_1x_2}\right)=(x_1-x_2)\cdot\left(\dfrac{x_1x_2-a}{x_1x_2}\right)$,

当 $x_1>x_2>\sqrt{a}$ 时,

$x_1-x_2>0$,$x_1x_2>0$,$x_1x_2>a$,

所以 $\Delta y=f(x_1)-f(x_2)>0$.

所以函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.

例 2 【解答】由题意可知,$f(x)+f(x-3)=f(x^2-3x)$.

又 $2=2f(2)=f(2)+f(2)=f(4)$,

于是不等式 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$ 可化为

$f(x^2-3x)\leqslant f(4)$.

因为函数在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,

所以不等式可转化为 $\begin{cases}x^2-3x\leqslant 4,\\x>0,\\x-3>0,\end{cases}$

解得 $3<x\leqslant 4$.

所以 x 的取值范围是 $(3,4]$.

例 3 【解答】函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

令 $t=x^2-3x+2$,$y=\log_{0.7}t$,

显然 $y=\log_{0.7}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的,而 $t=x^2-3x+2$ 在 $(-\infty,1)$,$(2,+\infty)$ 上分别是单调递减和单调递增的,根据复合函数的单调性的规则可知:

函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$,单调递减区间为 $(2,+\infty)$.

例 3 变式题　C

例 4 【解答】(1)$\because f(-1)=0$,$\therefore a-b+1=0$,即 $b=a+1$.

又对任意实数 x 均有 $f(x)\geqslant 0$ 成立,$\therefore \Delta=b^2-4a\leqslant 0$ 恒成立,即 $(a-1)^2\leqslant 0$ 恒成立,$\therefore a=1,b=2$.

(2)由(1)可知 $f(x)=x^2+2x+1$,

$\therefore g(x)=x^2+(2-k)x+1$.

$\because g(x)$ 在 $x\in[-2,2]$ 时是单调函数,

$\therefore [-2,2]\subset\left(-\infty,\dfrac{k-2}{2}\right]$ 或 $[-2,2]\subset\left[\dfrac{k-2}{2},+\infty\right)$.

$\therefore 2\leqslant\dfrac{k-2}{2}$ 或 $\dfrac{k-2}{2}\leqslant -2$,

即实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$.

例 5 【解答】(1)$\because S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$,$\therefore \dfrac{1}{2}xt\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,得 $xt=2$.

$\because t\leqslant 2$,$\therefore \dfrac{2}{x}\leqslant 2$,$\therefore x\geqslant 1$. 又 $\because x\leqslant 2$,$\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$.

$\therefore t$ 关于 x 的函数关系式为 $t=\dfrac{2}{x}(1\leqslant x\leqslant 2)$.

(2)$\because y^2=x^2+t^2-2xt\cos 60^\circ=x^2+\dfrac{4}{x^2}-2$,

$\therefore y=\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^2}-2}(1\leqslant x\leqslant 2)$.

(3)令 $f(m)=m+\dfrac{4}{m}$,易证 $f(m)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数,在 $[2,+\infty)$ 为增函数.

$\because 1\leqslant x\leqslant 2$,$\therefore 1\leqslant x^2\leqslant 4$,$\therefore$ 当 $x^2=2$,即 $x=\sqrt{2}$ 时,$x^2+\dfrac{4}{x^2}$ 取得最小值 4,此时 y 取得最小值 $\sqrt{2}$;

当 $x^2=1$ 或 $x^2=4$,即 $x=1$ 或 $x=2$ 时,$x^2+\dfrac{4}{x^2}$ 取得最大值 5,此时 y 取得最大值 $\sqrt{3}$.

例 5 变式题 【解答】设 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$,去分母得 $yx^2-ax+y-b=0$,

当 $y=0$ 显然在函数值域 $[-1,4]$ 内;

当 $y\neq 0$ 时,$x\in\mathbf{R}$,$\therefore \Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$,

即 $4y^2-4by-a^2\leqslant 0$ 的解集为 $\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 4\}$.

因而方程 $4y^2-4by-a^2=0$ 的两个根分别为 -1 和 4.

由韦达定理知,$b=-1+4=3$,$-\dfrac{a^2}{4}=-1\times 4$.

$\therefore a=4,b=3$ 或 $a=-4,b=3$.

第 6 讲　函数的奇偶性

例 1 【解答】(1)函数定义域为 $\mathbf{R}$,

$f(-x)=\frac{\sqrt{16^{-x}+1}+2^{-x}}{2^{-x}}$

$=2^x\sqrt{\frac{1}{16^x}+1}+1$

$=2^x\cdot\frac{\sqrt{1+16^x}}{4^x}+1$

$=\frac{\sqrt{16^x+1}+2^x}{2^x}=f(x)$,

$\therefore f(x)$为偶函数;

(另解)先化简:$f(x)=\sqrt{\frac{16^x+1}{4^x}}+1=\sqrt{4^x+4^{-x}}+1$,

显然 $f(x)$为偶函数;

(2)$\because\begin{cases}1-x^2\geqslant0\\x^2-1\geqslant0\end{cases}\Rightarrow x^2=1$,

$\therefore$函数的定义域为 $x=\pm1$,

$\therefore f(x)=\log_2 1=0(x=\pm1)$,即 $f(x)$的图象由两个点 $A(-1,0)$与 $B(1,0)$组成,这两点既关于 y 轴对称,又关于原点对称,$\therefore f(x)$既是奇函数,又是偶函数;

(3)$\because x^2\leqslant a^2,a>0$.

$\therefore\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant a\\|x+a|\neq a\end{cases}\Rightarrow$函数的定义域为$[-a,0)\cup(0,a]$,

$\therefore|x+a|>0$,$\therefore f(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$,

$\therefore$当 $a>0$ 时,$f(x)$为奇函数.

例 2 【解答】需要分三种情况讨论:

①设 $x>0$,$\therefore -x<0$,

$\therefore f(-x)=\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})=\ln\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=-\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=-f(x)$;

②设 $x<0$,$\therefore -x>0$,

$\therefore f(-x)=\ln(\sqrt{-x+1}-\sqrt{-x})=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{-x}}$

$=-\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})=-f(x)$;

③当 $x=0$ 时,$f(x)=0$,也满足 $f(-x)=-f(x)$;

由①、②、③知,对 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(-x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)$为奇函数.

例 3 【解答】(1)证明:显然 $f(x)$的定义域是 R,它关于原点对称.

在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$中,令 $y=-x$,

得 $f(0)=f(x)+f(-x)$,

令 $x=y=0$,得 $f(0)=f(0)+f(0)$,

$\therefore f(0)=0$,$\therefore f(x)+f(-x)=0$,

即 $f(-x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)$是奇函数.

(2)解:由 $f(-3)=a$,$f(x+y)=f(x)+f(y)$及 $f(x)$是奇函数,

得 $f(12)=2f(6)=4f(3)=-4f(-3)=-4a$.

例 4 【解答】设 $x\in[-1,0]$,由 $f(x+1)=\frac{1}{f(x)}$得 $f(x+2)=f(x)$,所以函数 $f(x)$的周期为 2.因为 $x+4\in[3,4]$,所以 $f(x+4)=\log_3(x+4)=f(x)$,即当 $x\in[-1,0]$时,$f(x)=\log_3(x+4)$.$f(x)$为偶函数,当 $x\in[0,1]$,$-x\in[-1,0]$,所以 $f(-x)=f(x)=\log_3(4-x)$,综上可知,所求解析式为:

$f(x)=\begin{cases}\log_3(x+4),x\in[-1,0],\\\log_3(4-x).x\in(0,1]\end{cases}$

例 5 【解答】$\because$函数 $y=f(x)(x\neq0)$是奇函数,且当 $x\in(0,+\infty)$时,是增函数,

$\therefore$当 $x\in(-\infty,0)$时,y 也是增函数,

且 $f(-1)=-f(1)=0$.

$\therefore$不等式 $f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<0$ 可以转化为

$f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<f(1)$或 $f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<f(-1)$,即

$0<x\left(x-\frac{1}{2}\right)<1$①或 $x\left(x-\frac{1}{2}\right)<-1$②,

解①可得$\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$或$\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<0$;

解②可得$\varnothing$.

$\therefore$原不等式的解集为

$\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right.\text{或}\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<0\right\}$.

例 5 变式题 【解答】由函数 $y=f(x)$在 R 上是偶函数,当 $x\in(-\infty,0)$是增函数可知,$y=f(x)$在 $x\in(0,+\infty)$上递减.

$\because 2a^2+a+1=2\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$,

$3a^2-2a+1=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$,

且 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,

$\therefore 2a^2+a+1>3a^2-2a+1$,

即 $a^2-3a<0$,解得 $0<a<3$.

第 7 讲 一次函数和二次函数

例 1 【解答】(1)由题意,得$\begin{cases}1-3m=0,\\2m-1\neq0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m=\frac{1}{3},\\m\neq\frac{1}{2},\end{cases}\therefore m=\frac{1}{3}$.

(2)函数为一次函数,只需且必须 $2m-1\neq0$,即 $m\neq\frac{1}{2}$且 $m\in\mathbf{R}$.

(3)据题意,$2m-1<0$,$\therefore m<\frac{1}{2}$.

(4)由方程组$\begin{cases}y=(2m-1)x+1-3m,\\y=x+1,\end{cases}$

得$(2m-2)y=5m-2(*)$.

$\because 2m-2\neq0$(否则 * 式不成立).

$\therefore y=\frac{5m-2}{2m-2}$,令$\frac{5m-2}{2m-2}=0$,得 $m=\frac{2}{5}$.

例 1 变式题 【解答】方法一:当 $x>0$ 时,原方程化为 $ax+1=x$,

即$(a-1)x=-1$,

解得 $x=\frac{1}{1-a}$，

令 $\frac{1}{1-a}>0\Rightarrow a<1$.

当 $x<0$ 时，原方程化为 $ax+1=-x$，

即 $(a+1)x=-1$，解得 $x=-\frac{1}{1+a}$.

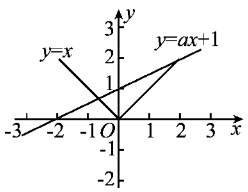
令 $-\frac{1}{1+a}<0\Rightarrow a>-1$.

综上所述，原方程有两个不同的实根，则 $-1<a<1$.

方法二：用图象法：设 $f(x)=ax+1$，$g(x)=|x|$.

问题转化为 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有两个不同的交点时确定 a 的取值范围.

∵$g(x)=|x|$ 的图象如图所示，函数 $y=ax+1$ 表示过定点 $(0,1)$，斜率为 a 的直线.



由图象可知 $-1<a<1$.

例 2 【解答】 $f(x)=x^2+2ax+3=(x+a)^2+3-a^2$.

当 $-a<1$，即 $a>-1$ 时，函数在区间 $[1,2]$ 上为增函数，故此时最小值为 $f(1)=2a+4$

当 $1\leqslant -a\leqslant 2$，即 $-2\leqslant a\leqslant -1$ 时，函数的最小值为 $f(-a)=-a^2+3$；

当 $-a>2$，即 $a<-2$ 时，函数在区间 $[1,2]$ 上为减函数，此时最小值为 $f(2)=4a+7$.

综上可知，当 $a<-2$ 时，最小值为 $4a+7$；当 $-2\leqslant a\leqslant -1$ 时，最小值为 $-a^2+3$；当 $a>-1$ 时，最小值为 $2a+4$.

例 2 变式题 【解答】 $f(x)=-x^2+2ax+1-a=-(x-a)^2+a^2-a+1$，

∵$0\leqslant x\leqslant 1$，

∴(1)当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\max}=f(a)=a^2-a+1$，

∴$a^2-a+1=2$，解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

∵$0\leqslant a\leqslant 1$，∴$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$舍去；

(2)当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=a=2>1$ 成立；

(3)当 $a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=1-a$，∴$1-a=2$，

∴$a=-1<0$ 成立.

综上可得 $a=-1$ 或 $a=2$.

例 3 【解析】 由 $f\left(-\frac{3}{2}+x\right)=f\left(-\frac{3}{2}-x\right)$知，函数 $y=f(x)$ 的图象的对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$，且 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=49$，所以设 $f(x)=a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+49(a\neq 0)$. 设方程 $a\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+49=0$ 的两个根为 x_1,x_2，则 $|x_1-x_2|=2\sqrt{-\frac{49}{a}}=7$，

∴$a=-4$，

$f(x)=-4x^2-12x+40$.

例 3 变式题 【解答】(1)由 $x\in(-3,2)$ 时 $f(x)>0$，$x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ 时，$f(x)<0$ 知，$-3,2$ 是方程 $ax^2+(b-8)x-a-ab=0$ 的两根，且 $a<0$，

故 $\begin{cases}-3+2=-\frac{b-8}{a},\\ -3\times 2=\frac{-a-ab}{a},\end{cases}$ 得 $a=-3,b=5$.

∴$f(x)=-3x^2-3x+18$.

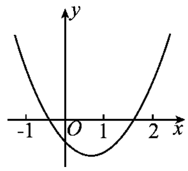
(2)由 $a<0$ 知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下，要使 $-3x^2+5x+c\leqslant 0$ 的解集为 R，只需 $\Delta\leqslant 0$，

即 $25+12c\leqslant 0$，∴$c\leqslant -\frac{25}{12}$，

∴当 $c\leqslant -\frac{25}{12}$时，$ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为 R.

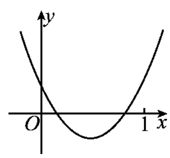
例 4 【解答】(1)条件说明抛物线 $f(x)=x^2+2mx+2m+1$ 与 x 轴的交点分别在区间 $(-1,0)$ 和 $(1,2)$ 内，画出示意图，得

$\begin{cases}f(0)=2m+1<0,\\ f(-1)=2>0,\\ f(1)=4m+2<0,\\ f(2)=6m+5>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<-\frac{1}{2},\\ m\in\mathbf{R},\\ m<-\frac{1}{2},\\ m>-\frac{5}{6},\end{cases}$



∴$-\frac{5}{6}<m<-\frac{1}{2}$.

(2)据抛物线与 x 轴交点落在区间 $(0,1)$ 内，列不等式组



$\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)>0,\\ \Delta\geqslant 0,\\ 0<-m<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>-\frac{1}{2},\\ m>-\frac{1}{2},\\ m\geqslant 1+\sqrt{2}\text{或 }m\leqslant 1-\sqrt{2},\\ -1<m<0.\end{cases}$

∴$-\frac{1}{2}<m\leqslant 1-\sqrt{2}$.

例 5 【解答】 由 $F(t)=f(t)g(t)$.

当 $0\leqslant t\leqslant 40$ 时，$F(t)=\left(\frac{t}{4}+22\right)\left(-\frac{t}{3}+\frac{112}{3}\right)=-\frac{1}{12}(t-12)^2+\frac{2500}{3}$.

∴当 $t=12$ 时，$F(t)$在区间 $[0,40]$ 上取最大值$\frac{2500}{3}$.

当 $40<t\leqslant 100$ 时，$F(t)=\left(-\frac{t}{2}+52\right)\left(-\frac{t}{3}+\frac{112}{3}\right)=\frac{1}{6}(t-108)^2-\frac{8}{3}$.

$F(t)$在 $(40,100]$ 上单调递减，且 t 取整数，

∴当 $t=41$ 时，$F(t)$在区间 $(40,100]$ 上取最大值$\frac{4473}{6}$.

∴$F(t)$在区间 $[0,100]$ 上取最大值为$\frac{2500}{3}$，

即销售额的最大值为$\frac{2500}{3}$元.

第 8 讲　指数与指数函数

例 1　【解答】(1) $(0.027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0.75}-|-3|^{-1}+(-5.55)^{0}-10(2-\sqrt{3})^{-1}$

$=[(0.3)^{3}]^{-\frac{1}{3}}-(-1)^{-2}(6^{-1})^{-2}+(4^{4})^{\frac{3}{4}}-3^{-1}+1-\frac{10}{2-\sqrt{3}}$

$=\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}-36+4^{3}-\frac{1}{3}+1-\frac{10(2+\sqrt{3})}{4-3}$

$=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}+29-20-10\sqrt{3}=12-10\sqrt{3}$；

(2)原式$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{a(a-8b)}{a-8b}=a$.

例 2　(1)C　(2)A　【解析】(1)函数 $f(x)=2^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$，作图易知 $f(x)\leqslant K=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，故在$(-\infty,-1]$上 $f_K(x)$是单调递增的，选 C.

(2)函数有意义，需使 $e^{x}-e^{-x}\neq0$，其定义域为$\{x|x\neq0\}$，排除 C，D. 又因为 $y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=1+\frac{2}{e^{2x}-1}$，所以当 $x>0$ 时函数为减函数，故选 A.

例 3　【解答】(1)奇函数.

(2)证明：$f(x)=\frac{10^{x}-10^{-x}}{10^{x}+10^{-x}}=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}=1-\frac{2}{10^{2x}+1}$.

令 $x_2>x_1$，则 $f(x_2)-f(x_1)$

$=\left(1-\frac{2}{10^{2x_2}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{10^{2x_1}+1}\right)$

$=2\times\frac{10^{2x_2}-10^{2x_1}}{(10^{2x_2}+1)(10^{2x_1}+1)}$.

∵ 10^{x} 为增函数，

∴当 $x_2>x_1$ 时，$10^{2x_2}-10^{2x_1}>0$.

又∵ $10^{2x_1}+1>0$，$10^{2x_2}+1>0$，

故当 $x_2>x_1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，

所以 $f(x)$是增函数.

(3)值域为$(-1,1)$.

例 4　【解答】(1)因为 $f(x)$是 R 上的奇函数，

所以 $f(0)=0$，即$\frac{-1+b}{2+a}=0$，解得 $b=1$.

从而有 $f(x)=\frac{-2^{x}+1}{2^{x+1}+a}$.

又由 $f(1)=-f(-1)$知$\frac{-2+1}{4+a}=-\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$，

解得 $a=2$.

(2)法一：由(1)知 $f(x)=\frac{-2^{x}+1}{2^{x+1}+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{x}+1}$，

由上式易知 $f(x)$在 R 上为减函数，又因 $f(x)$是奇函数，从而不等式 $f(t^{2}-2t)+f(2t^{2}-k)<0$

等价于 $f(t^{2}-2t)<-f(2t^{2}-k)=f(-2t^{2}+k)$.

因 $f(x)$是 R 上的减函数，

由上式推得 $t^{2}-2t>-2t^{2}+k$.

即对一切 $t\in\mathbf{R}$，有 $3t^{2}-2t-k>0$，从而 $\Delta=4+12k<0$，

解得 $k<-\frac{1}{3}$.

法二：由(1)知 $f(x)=\frac{-2^{x}+1}{2^{x+1}+2}$，

又由题设条件得$\frac{-2^{t^{2}-2t}+1}{2^{t^{2}-2t+1}+2}+\frac{-2^{2t^{2}-k}+1}{2^{2t^{2}-k+1}+2}<0$，

即$(2^{2t^{2}-k+1}+2)(-2^{t^{2}-2t}+1)+(2^{t^{2}-2t+1}+2)(-2^{2t^{2}-k}+1)<0$，

整理得 $2^{3t^{2}-2t-k}>1$，因底数 $2>1$，故 $3t^{2}-2t-k>0$，

上式对一切 $t\in\mathbf{R}$ 均成立，从而判别式 $\Delta=4+12k<0$，

解得 $k<-\frac{1}{3}$.

第 9 讲　对数与对数函数

例 1　(1)$-\frac{3}{2}$　(2)$\frac{1}{24}$　(3)$\frac{a+b}{2-a}$

【解析】(1)原式$=\log_2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{48}}+\log_2 12-\log_2\sqrt{42}-\log_2 2$

$=\log_2\frac{\sqrt{7}\times12}{\sqrt{48}\times\sqrt{42}\times2}=\log_2\frac{1}{2\sqrt{2}}=\log_2 2^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$.

(2)∵ $3<2+\log_2 3<4$，∴ $f(2+\log_2 3)=f(3+\log_2 3)$，且 $3+\log_2 3>4$，

∴ $f(2+\log_2 3)=f(3+\log_2 3)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{3+\log_2 3}=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3}=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$.

(3)由 $18^{b}=5$，得 $b=\log_{18}5$，又 $\log_{18}9=a$，

∴ $\log_{18}9+\log_{18}5=\log_{18}45=a+b$.

∴ $\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}=\frac{a+b}{2-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}$.

例 2　B　【解析】易得 $y=\frac{a^{3}}{x}$，在$[a,2a]$上单调递减，所以 $y\in\left[\frac{a^{2}}{2},a^{2}\right]$，故$\begin{cases}\frac{a^{2}}{2}\geqslant a\\ a>1\end{cases}\Rightarrow a\geqslant2$.

例 2 变式题　$\{2\}$　【解析】由已知得 $y=\frac{a^{c}}{x}$，单调递减，所以当 $x\in[a,2a]$时，$y\in\left[\frac{a^{c-1}}{2},a^{c-1}\right]$. 所以$\begin{cases}\frac{a^{c-1}}{2}\geqslant a\\ a^{c-1}\leqslant a^{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\geqslant2+\log_a 2\\ c\leqslant3\end{cases}$，因为有且只有一个常数 c 符合题意，所以 $2+\log_a 2=3$，解得 $a=2$，所以 a 的取值的集合为$\{2\}$.

例 3　(1)D　(2)A　【解析】(1)由已知结合对数函数图象和指数函数图象得到 $-1<a<0$，$0<c<1$，而 $b=\log_{\frac{1}{2}}3<-1$，因此选 D.

(2)由图易得 $a>1$，∴ $0<a^{-1}<1$；取特殊点 $x=0\Rightarrow-1<y=\log_a b<0\Rightarrow-1=\log_a\frac{1}{a}<\log_a b<\log_a 1=0$，∴ $0<a^{-1}<b$

<1.

例 4 【解答】$\because x+2y=\dfrac{1}{2}$，$\therefore 2y=\dfrac{1}{2}-x$.

令 $P=8xy+4y^2+1=4x\left(\dfrac{1}{2}-x\right)+\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2+1$,

$=-3x^2+x+\dfrac{5}{4}=-3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{4}{3}$.

又 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+2y=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}-x=2y\geqslant 0$，即 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\therefore 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$当 $x=\dfrac{1}{6}$时，P 的最大值为$\dfrac{4}{3}$；

当 $x=\dfrac{1}{2}$时，P 的最小值为 1.

因此，函数 $\log_{\frac{1}{2}}(8xy+4y^2+1)$的最大值是 $\log_{\frac{1}{2}}1=0$，最小值是 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{4}{3}$.

例 5 (1)$\begin{cases}x-1, x<1,\\ \ln x, x\geqslant 1\end{cases}$ (2)B **【解析】**(1)由 $y=x+1(x<0)$，得 $x=y-1(y<1)$；由 $y=e^x(x\geqslant 0)$，得 $x=\ln y(y\geqslant 1)$.

因此函数 $y=\begin{cases}x+1, x<0,\\ e^x, x\geqslant 0\end{cases}$的反函数是 $y=\begin{cases}x-1, x<1,\\ \ln x, x\geqslant 1.\end{cases}$

(2)由函数 $y=f(x-1)$的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，可知 $y=f(x-1)$与 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 互为反函数. 由 $y=\ln\sqrt{x}+1\Rightarrow\ln\sqrt{x}=y-1\Rightarrow\sqrt{x}=e^{y-1}\Rightarrow x=e^{2y-2}$，所以 $y=e^{2x-2}\Rightarrow y=f(x-1)=e^{2x-2}$，故 $f(x)=e^{2x}$，

$\therefore$选 B.

例 5 变式题 $f(x)=2^x+1$ **【解析】**$\because y=f^{-1}(x)$的图象过点$(2,0)$，

$\therefore y=f(x)$的图象过点$(0,2)$.

$\therefore 2=a^0-k$，$\therefore k=-1$，$\therefore f(x)=a^x+1$.

又$\because y=f(x)$的图象过点$(1,3)$，

$\therefore 3=a+1$，$\therefore a=2$，$\therefore f(x)=2^x+1$.

第 10 讲 幂函数与函数的图象

例 1 (1)A (2)$(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$ **【解析】**(1)观察四种幂函数的图象，并结合该函数的性质，确定选项 A 正确.

(2)方程的根显然 $x\neq 0$，原方程等价于 $x^3+a=\dfrac{4}{x}$，原方程的实根是曲线 $y=x^3+a$ 与曲线 $y=\dfrac{4}{x}$的交点的横坐标；而曲线 $y=x^3+a$ 是由曲线 $y=x^3$ 向上或向下平移$|a|$个单位而得到的. 若交点$\left(x_i,\dfrac{4}{x_i}\right)(i=1,2,\cdots,k)$均在直线 $y=x$ 的同侧，因直线 $y=x$ 与 $y=\dfrac{4}{x}$交点为$(-2,-2)$，$(2,2)$，所以结合图象可得：

$\begin{cases}a>0\\ x^3+a>-2\\ x\geqslant -2\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\ x^3+a<2\\ x\leqslant 2\end{cases}$

$\Rightarrow a\in(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$.

例 2 【解答】(1)设所求幂函数为 $y=x^{\alpha}$，则由已知可得，

当 $x=2\sqrt[3]{2}$时，$y=9-5=4$，

所以，$4=(2\sqrt[3]{2})^{\alpha}$，

解得 $\alpha=\dfrac{3}{2}$，

从而 $y=x^{\frac{3}{2}}$.

(2)当高脚杯上沿面的半径等于 3 cm 时，曲面部分的高度为$y=3^{\frac{3}{2}}\approx 5.2(\text{cm})$，

此时高脚杯的高度为 $5.2+5=10.2(\text{cm})$，

所以高脚杯的高度不应小于 10.2cm.

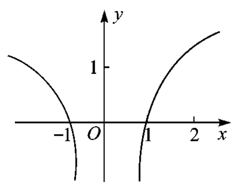
例 3 【解答】(1)$y=\log_2 x\xrightarrow{\text{作出其关于 }y\text{ 轴对称部分}}y=\log_2|x|$，图象如图(a)；

(2)$y=\log_2 x\xrightarrow{\text{右移一个单位}}y=\log_2(x-1)\xrightarrow{\text{把 }x\text{ 轴下方部分对称地翻折到上方}}y=|\log_2(x-1)|$，图象如图(b)；

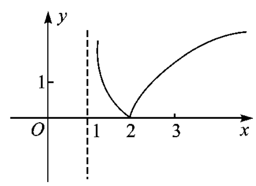
(3)$y=\dfrac{2-x}{x+1}=-1+\dfrac{3}{x+1}$，

$y=\dfrac{3}{x}\xrightarrow{\text{左移一个单位，下移一个单位}}y=\dfrac{3}{x+1}-1$，图象如图(c)；

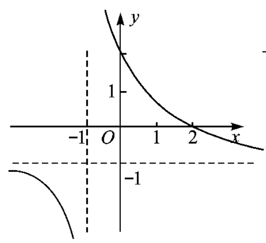
(4)$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{左移三个单位}}y=\sqrt{x+3}\xrightarrow{\text{关于 }y\text{ 轴对称}}y=\sqrt{3-x}\xrightarrow{\text{上移两个单位}}y=2+\sqrt{3-x}$，图象如图(d).



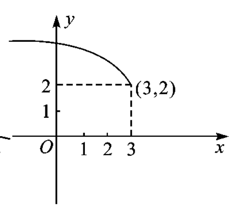
(a)



(b)



(c)



(d)

例 4 (1)A (2)B **【解析】**(1)$y=\ln\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$是偶函数，可排除 B、D，由 $\cos x\leqslant 1\Rightarrow\ln\cos x\leqslant 0$ 排除 C，选 A.

(2)由图可知，当质点 $P(x,y)$在两个封闭曲线上运动时，投影点 $Q(x,0)$的速度先由正到 0、到负数，再到 0，到正，故 A 错误；质点 $P(x,y)$在终点的速度是由大到小接近 0，故 D 错误；质点 $P(x,y)$在开始时沿直线运动，故投影点$Q(x,0)$的速度为常数，因此 C 是错误的，故选 B.

例 5 (1)B **【解析】**$f(0)=\dfrac{b}{c}=0$，

$\therefore b=0$. $f(1)=1$，$\therefore\dfrac{a}{1+c}=1$，$\therefore a=c+1$.

由图象看出 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $x>0$ 时，有 $\frac{ax}{x^2+c}>0$，$\therefore a>0$.

又 $f(x)=\frac{a}{x+\frac{c}{x}}$，当 $x>0$ 时，要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取最大值 1，需 $x+\frac{c}{x}\geqslant 2\sqrt{c}$，

当且仅当 $x=\sqrt{c}=1$ 时，$\therefore c=1$. 此时应有 $f(x)=\frac{a}{2}=1$，$\therefore a=2$.

(2)【解答】①连接 AA'、BB'、CC'，

则 $f(a)=S_{\triangle AB'C}=S_{梯形AA'C'C}-S_{\triangle AA'B'}-S_{\triangle CC'B'}=\frac{1}{2}(A'A+C'C)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a+2})$，

$g(a)=S_{\triangle A'BC'}=\frac{1}{2}A'C'\cdot B'B=B'B=\sqrt{a+1}$.

② $f(a)<g(a)$. 证明：$f(a)-g(a)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a+2}-2\sqrt{a+1})$

$=\frac{1}{2}[(\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1})-(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\right)<0$，

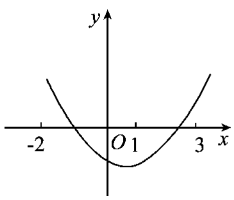
$\therefore f(a)<g(a)$.

第 11 讲　函数与方程

例 1　(1)D　(2)$a>1$　【解析】(1)由题得 $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=\frac{x-3}{3x}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>3$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<3$；$f'(x)=0$，得 $x=3$，故知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 上为减函数，在区间 $(3,+\infty)$ 为增函数，在点 $x=3$ 处有极小值 $1-\ln 3<0$. 又 $f(1)=\frac{1}{3}$，$f(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}}{3}-1<0$，$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{3\mathrm{e}}+1>0$，故选择 D.

(2)设函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 和函数 $y=x+a$，则函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点，就是函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 与函数 $y=x+a$ 有两个交点. 由图象可知当 $0<a<1$ 时，两函数只有一个交点，不符合；当 $a>1$ 时，因为函数 $y=a^x(a>1)$ 的图象过点 $(0,1)$，所以一定有两个交点. 所以实数 a 的取值范围是 $a>1$.

例 1 变式题　【解答】设 $f(x)=3x^2-5x+a$，则 $f(x)$ 为开口向上的抛物线(如图所示).



$\because f(x)=0$ 的两根分别在区间 $(-2,0)$，$(1,3)$ 内.

$$\therefore\begin{cases}f(-2)>0,\\ f(0)<0,\\ f(1)<0,\\ f(3)>0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}3\times(-2)^2-5\times(-2)+a>0,\\ a<0,\\ 3-5+a<0,\\ 3\times 9-5\times 3+a>0.\end{cases}$

解得 $-12<a<0$.

所以 a 的取值范围是 $-12<a<0$.

例 2　(1)D　(2)$(-2,-1)$　【解析】(1)设 $2^{|x|}=t\geqslant 1$，则方程 $4^{|x|}-2^{|x|+2}=k$ 的实根转化为二次方程 $t^2-4t-k=0$ 在 $[1,+\infty)$ 上的根的个数问题. 由图象知方程 $t^2-4t-k=0$ 不可能存在两个相等的实根 1，从而原方程根的个数不可能是 1.

(2)令 $f(x)=2x^3-x^2-4x+2$，

$\because f(-3)=-54-9+12+2=-49<0$，

$f(-2)=-16-4+8+2=-10<0$，

$f(-1)=-2-1+4+2=3>0$，

$f(0)=0-0-0+2=2>0$，

$f(1)=2-1-4+2=-1<0$，

$f(2)=16-4-8+2=6>0$.

根据 $f(-2)\cdot f(-1)<0$，$f(0)\cdot f(1)<0$，

$f(1)\cdot f(2)<0$，

可知 $f(x)$ 的零点分别在区间 $(-2,-1)$，$(0,1)$，$(1,2)$ 内.

又因为方程是一个一元三次方程，所以它最多有三个根，所以原方程的最小根在区间 $(-2,-1)$ 内.

例 3　【解答】$g(x)$ 在 $x=-1$ 取最小值，

$\therefore g(-1)=1-2+c=m-1$，$\therefore c=m$，

$\therefore f(x)=\frac{g(x)}{x}=x+\frac{m}{x}+2$.

又 $y=f(x)-kx=(1-k)x+\frac{m}{x}+2=0$，

得 $(1-k)x^2+2x+m=0$.　　(＊)

当 $k=1$ 时，方程(＊)有一解 $x=-\frac{m}{2}$，

函数 $y=f(x)-kx$ 有一零点 $x=-\frac{m}{2}$；

当 $k\neq 1$ 时，方程(＊)有二解 $\Leftrightarrow\Delta=4-4m(1-k)>0$.

若 $m>0$，$k>1-\frac{1}{m}$，

函数 $y=f(x)-kx$ 有两个零点

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4m(1-k)}}{2(1-k)}=\frac{1\pm\sqrt{1-m(1-k)}}{k-1}$；

若 $m<0$，$k<1-\frac{1}{m}$，函数 $y=f(x)-kx$ 有两个零点

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4m(1-k)}}{2(1-k)}=\frac{1\pm\sqrt{1-m(1-k)}}{k-1}$；

当 $k\neq 1$ 时，方程(＊)有一解 $\Leftrightarrow\Delta=4-4m(1-k)=0$，$k=1-\frac{1}{m}$.

函数 $y=f(x)-kx$ 有一零点 $x=\frac{1}{k-1}$.

综上，当 $k=1$ 时，函数 $y=f(x)-kx$ 有一零点 $x=-\frac{m}{2}$；

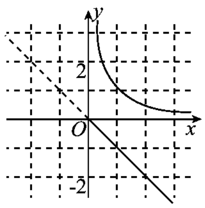
当 $k>1-\frac{1}{m}(m>0)$ 或 $k<1-\frac{1}{m}(m<0)$ 时，

函数 $y=f(x)-kx$ 有两个零点 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-m(1-k)}}{k-1}$;

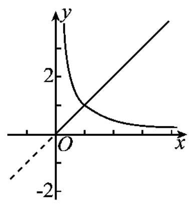
当 $k=1-\frac{1}{m}$时,函数 $y=f(x)-kx$ 有一零点 $x=\frac{1}{k-1}=-m$.

例 4 $\{a|a<0\}$ 【解析】法一(图象法):令 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}=0$,再将之转化为 $g(x)=-2ax$ 与 $h(x)=\frac{1}{x}$ 存在交点. 当 $a=0$ 不符合题意;当 $a>0$ 时,如图(a),数形结合可得,两曲线显然没有交点,当 $a<0$ 时,如图(b),此时正好有一个交点,故有 $a<0$. 应填$(-\infty,0)$或$\{a|a<0\}$.

法二(分离变量法):上述也可等价于方程 $2ax+\frac{1}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$内有解,显然可得 $a=-\frac{1}{2x^2}\in(-\infty,0)$.



(a)



(b)

第 12 讲 函数的应用

例 1 【解答】(1)证明:当 $x\geqslant 7$ 时,$f(x+1)-f(x)=\frac{0.4}{(x-3)(x-4)}$,

而当 $x\geqslant 7$ 时,函数 $y=(x-3)(x-4)$单调递增,

且$(x-3)(x-4)>0$,故 $f(x+1)-f(x)$单调递减.

∴当 $x\geqslant 7$ 时,掌握程度的增长量 $f(x+1)-f(x)$总是下降.

(2)由题意可知 $0.1+15\ln\frac{a}{a-6}=0.85$,

整理得$\frac{a}{a-6}=e^{0.05}$,

解得 $a=\frac{e^{0.05}}{e^{0.05}-1}\cdot 6\approx 20.5\times 6=123$,$123\in(121,127]$,由此可知,该学科是乙学科.

例 1 变式题 【解答】(1)由题意得$\begin{cases}\frac{1}{1+a\cdot 2^{-4b}}=0.5,\\ \frac{1}{1+a\cdot 2^{-8b}}=0.8,\end{cases}$整理得$\begin{cases}a\cdot 2^{-4b}=1,\\ a\cdot 2^{-8b}=\frac{1}{4},\end{cases}$解得 $a=4,b=0.5$,

所以“学习曲线”的关系式为 $f(t)=\frac{1}{1+4\cdot 2^{-0.5t}}\cdot 100\%$.

(2)设从第 x 个单位时间起的 2 个单位时间内的平均学习效率为 η,则

$$\eta=\frac{\frac{1}{1+4\cdot 2^{-0.5(x+2)}}-\frac{1}{1+4\cdot 2^{-0.5x}}}{(x+2)-x}$$

$$=\frac{2^{-0.5x}}{(1+2\cdot 2^{-0.5x})(1+4\cdot 2^{-0.5x})}.$$

令 $u=2^{-0.5x}$,则 $\eta=\frac{u}{(1+2u)(1+4u)}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{u}+8u+6}\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}+6},$$

当且仅当$\frac{1}{u}=8u$,即 $u=\frac{\sqrt{2}}{4}$时,η 最大,

将 $u=\frac{\sqrt{2}}{4}$代入 $u=2^{-0.5x}$,得 $x=3$,

所以在从第 3 个单位时间起的 2 个单位时间内的平均学习效率最高.

例 2 【解答】(1)如图所示,由题意知 $AC\perp BC$,$BC^2=400-x^2$,

$y=\frac{4}{x^2}+\frac{k}{400-x^2}(0<x<20)$,

其中当 $x=10\sqrt{2}$时,$y=0.065$,代入上式解得 $k=9$.

所以 y 表示成 x 的函数为

$y=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{400-x^2}(0<x<20)$.

(2)$y=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{400-x^2}$,$y'=-\frac{8}{x^3}-\frac{9\times(-2x)}{(400-x^2)^2}$

$=\frac{18x^4-8(400-x^2)^2}{x^3(400-x^2)^2}$.

令 $y'=0$ 得 $18x^4=8(400-x^2)^2$,解得 $x^2=160$,

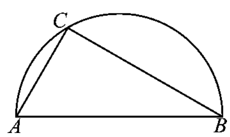
∴$x=4\sqrt{10}$,

当 $0<x<4\sqrt{10}$时,$18x^4<8(400-x^2)^2$,即 $y'<0$,所以函数为单调减函数,

当 $4\sqrt{10}<x<20$ 时,$18x^4>8(400-x^2)^2$,即 $y'>0$,所以函数为单调增函数.

即当 $x=4\sqrt{10}$时,函数 $y=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{400-x^2}(0<x<20)$有最小值.

所以当 C 点到城 A 的距离为 $4\sqrt{10}$km 时,建在此处的垃圾处理厂对城 A 和城 B 的总影响度最小.



例 2 变式题 【解答】(1)据题意,得

$$y=\begin{cases}39(2x^2-29x+107)(x-5),5<x<7,\\ \frac{198-6x}{x-5}(x-5),7\leqslant x<8,\\ [50-10(x-8)](x-5),x\geqslant 8\end{cases}$$

$$=\begin{cases}39(2x^3-39x^2+252x-535),5<x<7,\\ 6(33-x),7\leqslant x<8,\\ -10x^2+180x-650,x\geqslant 8.\end{cases}$$

(2)由(1)得:当 $5<x<7$ 时,$y=39(2x^3-39x^2+252x-535)$,

$y'=234(x^2-13x+42)=234(x-6)(x-7)$.

当 $5<x<6$ 时,$y'>0$,$y=f(x)$为增函数;

当 $6<x<7$ 时,$y'<0$,$y=f(x)$为减函数;

∴当 $x=6$ 时,$f(x)_{最大}=f(x)_{极大}=f(6)=195$;

当 $7\leqslant x<8$ 时,$y=6(33-x)\in(150,156]$;

当 $x\geqslant 8$ 时,$y=-10(x-9)^2+160$.

$\therefore$ 当 $x=9$ 时，$y_{最大}=160$.

综上知，当实际销售价为 6 元时，总利润最大，为 195 元.

例 3 【解答】(1)由图表可得

$P=\begin{cases}10-x, x\in[1,10]\\ x-10, x\in[11,20]\end{cases}$ $x\in\mathbf{N}^*$,

$Q=\sqrt{100-(x-10)^2}$, $x\in[1,20]$, $x\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore y=100QP=100\sqrt{(x-10)^2[100-(x-10)^2]}$, $x\in[1,20]$, $x\in\mathbf{N}^*$.

(2) $\because (x-10)^2[100-(x-10)^2]\leqslant\left(\dfrac{(x-10)^2+100-(x-10)^2}{2}\right)^2=2500$,

当且仅当 $(x-10)^2=100-(x-10)^2$，即 $x=10\pm5\sqrt{2}$ 时，y 有最大值.

$\because x\in\mathbf{N}^*$，$\therefore$ 取 $x=3$ 或 17 时，$y_{\max}=700\sqrt{51}\approx4999$(元)，此时，$P=7$(元/件).

答：第 3 天或第 17 天销售收入最高，此时应将单价 P 定为 7 元/件为好.

第 13 讲　导数及其运算

例 1 【解答】(1)原式 $=2\cdot\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$.

(2)原式 $=2\cdot\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=2f'(x_0)$.

例 1 变式题　B 【解析】根据导数定义，分子中 x_0 的增量应与分母相同，故选 B.

例 2 【解答】(1) $y'=(a^x)'+(x^3)'=a^x\ln a+3x^2$.

(2) $\because y=x^3+1+\dfrac{1}{x^2}$，$\therefore y'=3x^2-\dfrac{2}{x^3}$.

(3) $y'=\dfrac{(x^2)'\sin x-x^2(\sin x)'}{\sin^2x}=\dfrac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2x}$.

(4) $y'=(x+1)'\ln(x+1)+(x+1)[\ln(x+1)]'$

$=\ln(x+1)+(x+1)\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\ln(x+1)+1$.

例 2 变式题 【解答】(1) $\because y=\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=-x^{\frac12}+x^{-\frac12}$,

$\therefore y'=-\dfrac12x^{-\frac12}-\dfrac12x^{-\frac32}=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1+\dfrac1x\right)$.

(2) $\because y=x-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=x-\dfrac12\sin x$,

$\therefore y'=\left(x-\dfrac12\sin x\right)'=x'-\dfrac12(\sin x)'=1-\dfrac12\cos x$.

(3) $\because y=e^{\ln x}\cdot\log_ax=x\cdot\log_ax$,

$\therefore y'=(x\cdot\log_ax)'=\log_ax+x(\log_ax)'=\log_ax+\dfrac{1}{\ln a}$.

(4) $\because y=e^x\tan x=e^x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$,

$\therefore y'=e^x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)+e^x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{e^x\sin x}{\cos x}+e^x\left(\dfrac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}\right)$

$=\dfrac{e^x(\sin2x+2)}{2\cos^2x}$.

例 3 【解答】(1) $y'=[\ln(\sqrt{x^2+1})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'$

$=\dfrac{2x}{2(\sqrt{x^2+1})^2}=\dfrac{x}{x^2+1}$.

(2) $\because y=\cos^2(x^2-x)=\dfrac{1+\cos(2x^2-2x)}{2}=\dfrac12+\dfrac{\cos(2x^2-2x)}{2}$,

$\therefore y'=\left[\dfrac12+\dfrac{\cos(2x^2-2x)}{2}\right]'=-(2x^2-2x)'\cdot\dfrac12\sin(2x^2-2x)=(1-2x)\sin(2x^2-2x)$.

(3) $y'=(e^{-2x})'\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+e^{-2x}\left[\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=(-2x)'e^{-2x}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)'e^{-2x}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=-2e^{-2x}\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+3e^{-2x}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

例 3 变式题 【解答】(1)由题意可知球的体积为 $V(t)=\dfrac43\pi R^3(t)$，则 $c=V'(t)=4\pi R^2(t)R'(t)$,

由此可得 $\dfrac{c}{R(t)R'(t)}=4\pi R(t)$,

而球的表面积为 $S(t)=4\pi R^2(t)$,

所以 $v_{表}=S'(t)=(4\pi R^2(t))'=8\pi R(t)R'(t)$,

即 $v_{表}=8\pi R(t)R'(t)=2\times4\pi R(t)R'(t)=\dfrac{2c}{R(t)}$，故选 D.

(2)由题意可知球的体积为 $V(t)=\dfrac43\pi R^3(t)=\dfrac43\pi[\log_4(4^t+4)]^3$,

$V'(t)=4\pi[\log_4(4^t+4)]^2[\log_4(4^t+4)]'$

$=4\pi[\log_4(4^t+4)]^2\,\dfrac{4^t}{4^t+4}$

$=\dfrac{4^{t+1}\pi[\log_4(4^t+4)]^2}{4^t+4}$.

$V'(1)=\dfrac{4^2\pi[\log_48]^2}{4+4}=\dfrac{9\pi}{2}$，即球的体积的增长速度为 $\dfrac{9\pi}{2}$.

例 4 【解答】(1)把 $x=1$ 代入 C 的方程，求得 $y=-4$.

$\therefore$ 切点为 $(1,-4)$. 又 $y'=12x^3-6x^2-18x$.

$\therefore$ 切线斜率为 $k=12-6-18=-12$.

$\therefore$ 切线方程为 $y+4=-12(x-1)$.

即 $y=-12x+8$.

(2)由 $\begin{cases}y=3x^4-2x^3-9x^2+4,\\ y=-12x+8.\end{cases}$

得 $3x^4-2x^3-9x^2+12x-4=0$,

即 $(x-1)^2(x+2)(3x-2)=0$,

$\therefore x=1$ 或 $x=-2$ 或 $x=\dfrac23$,

代入 $y=3x^4-2x^3-9x^2+4$，分别求得 $y=-4,32,0$，即公共点为 $(1,-4)$(切点)，$(-2,32)$，$\left(\dfrac23,0\right)$.

∴除切点外,还有两个交点$(-2,32)$,$\left(\frac{2}{3},0\right)$.

例4 变式题 【解答】(1)$f'(x)=\frac{-1}{2-x}+2ax=\frac{2ax^2-4ax+1}{x-2}$,

∴$k=f'(1)=2a-1$,由切点坐标为$(1,a)$,

∴l的方程为$y-a=(2a-1)(x-1)$,即$(2a-1)x-y+(1-a)=0$.

∵l与圆$(x+1)^2+y^2=1$相离,

∴由点到直线的距离公式得$\frac{|(1-2a)+(1-a)|}{\sqrt{(2a-1)^2+1}}>1$,

注意到$a>0$,解得$a>\frac{4+\sqrt{6}}{5}$或$0<a<\frac{4-\sqrt{6}}{5}$.

(2)令$f'(x)=0$,则$\frac{-1}{2-x}+2ax=0$,

有$2ax^2-4ax+1=0$,$\Delta=8a(2a-1)$,

当$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时,$\Delta\leqslant 0$,∴$2ax^2-4ax+1\geqslant 0$,

$f'(x)\leqslant 0$,则$f(x)$在$[0,1]$内是减函数,故$f(x)_{最大值}=f(0)=\ln 2$;

当$a>\frac{1}{2}$时,方程$2ax^2-4ax+1=0$有两个实根,

$x_1=1-\sqrt{1-\frac{1}{2a}}<1<x_2=1+\sqrt{1-\frac{1}{2a}}$.

显然,$x_1\in[0,1]$,列表有:

x	0	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 2$	↘	极小值	↗	a

故:若$\frac{1}{2}<a<\ln 2$,则$f(x)$的最大值为$f(0)=\ln 2$;

若$a\geqslant\ln 2$,则$f(x)$的最大值为$f(1)=a$.

综上可知:$f(x)_{\max}=\begin{cases}\ln 2, 0<a<\ln 2,\\ a, a\geqslant\ln 2.\end{cases}$

第14讲 导数的应用

例1 【解答】$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$,$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+2}{x^2}$.

设$g(x)=x^2-ax+2$,二次方程$g(x)=0$的判别式$\Delta=a^2-8$.

①当$\Delta=a^2-8<0$,即$0<a<2\sqrt{2}$时,对一切$x>0$都有$f'(x)>0$,此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

②当$\Delta=a^2-8=0$,即$a=2\sqrt{2}$时,仅对$x=\sqrt{2}$有$f'(x)=0$,对其余的$x>0$都有$f'(x)>0$,此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上也是增函数.

③当$\Delta=a^2-8>0$,即$a>2\sqrt{2}$时,

方程$g(x)=0$有两个不同的实根$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$,$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$,且$0<x_1<x_2$.

当x变化时,$f'(x)$、$f(x)$变化情况如下表:

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

此时,$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty\right)$上是增函数,在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}\right)$上是减函数.

综上所述,当$0<a\leqslant 2\sqrt{2}$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数;

当$a>2\sqrt{2}$时,$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty\right)$上是增函数,在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}\right)$上是减函数.

例1 变式题1 D 【解析】$f'(x)=(x-3)'e^x+(x-3)\cdot(e^x)'=(x-2)e^x$,令$f'(x)>0$,解得$x>2$,故选D.

例1 变式题2 $(-1,11)$ 【解析】$f'(x)=3x^2-30x-33=3(x-11)(x+1)$,由$(x-11)(x+1)<0$解得$-1<x<11$.亦可填写闭区间或半开半闭区间.

例2 【解答】(1)$f'(x)=(1+kx)e^{kx}$,$f'(0)=1$,$f(0)=0$,曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=x$.

(2)由$f'(x)=(1+kx)e^{kx}=0$,得$x=-\frac{1}{k}(k\neq 0)$,

若$k>0$,则当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$时,$f'(x)<0$,函数$f(x)$单调递减,

当$x\in\left(-\frac{1}{k},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,函数$f(x)$单调递增;

若$k<0$,则当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$时,$f'(x)>0$,函数$f(x)$单调递增,

当$x\in\left(-\frac{1}{k},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$,函数$f(x)$单调递减.

综上所述,当$k>0$时,$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$上为减函数,在$\left(-\frac{1}{k},+\infty\right)$上为增函数;

当$k<0$时,$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{k}\right)$上为增函数,在$\left(-\frac{1}{k},+\infty\right)$上为减函数.

(3)由(2)知,若$k>0$,则当且仅当$-\frac{1}{k}\leqslant -1$,

即$k\leqslant 1$时,函数$f(x)$在$(-1,1)$内单调递增;

若$k<0$,则当且仅当$-\frac{1}{k}\geqslant 1$,

即$k\geqslant -1$时,函数$f(x)$在$(-1,1)$内单调递增,

综上可知,函数$f(x)$在$(-1,1)$内单调递增时,k的取值范围是$[-1,0)\cup(0,1]$.

例2 变式题 【解答】(1)∵$f'(x)=3x^2+2ax+1$,令$3x^2+2ax+1=0$,$\Delta=4a^2-12$,

当 $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ 时，$\Delta<0$，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 R 上是增函数；

当 $a=\pm\sqrt{3}$ 时，$\Delta=0$，方程 $f'(x)=0$ 有两相等的实根 $x_0=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$，

对于 $x>x_0$ 或 $x<x_0$ 都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 R 上是增函数；

当 $a>\sqrt{3}$ 或 $a<-\sqrt{3}$ 时，$\Delta>0$，由 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}$，$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}$，且 $x_1<x_2$。

当 x 变化时，$f'(x)$、$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由表可知，

$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$，$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3},+\infty\right)$ 上是增函数，在 $\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3},\frac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$ 上是减函数.

综上所述，当 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$ 时，$f(x)$ 在 R 上是增函数；

当 $a>\sqrt{3}$ 或 $a<-\sqrt{3}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$，$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3},+\infty\right)$ 上是增函数，

在 $\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3},\frac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$ 上是减函数.

(2) 因为 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 内是减函数，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在区间 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 内恒成立，则 $3x^2+2ax+1\leqslant 0$ 在区间 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 内恒成立.

令 $g(x)=3x^2+2ax+1$，只需 $\begin{cases}g\left(-\frac{2}{3}\right)\leqslant 0,\\ g\left(-\frac{1}{3}\right)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant\frac{7}{4},\\ a\geqslant 2,\end{cases}$ 得 $a\geqslant 2$，

所以 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

例 3 【解答】(1) 当 $m=-3$ 时，$g(x)=x^3-2x^2-2$，

令 $g'(x)=3x^2-4x=0$，

解得 $x_1=0$，$x_2=\frac{4}{3}$.

当 x 变化时，$g'(x)$、$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	-5	↗	极大值 -2	↘	极小值 $-\frac{86}{27}$	↗	$-\frac{25}{8}$

由表可知当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 取得最小值 -5；当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得最大值 -2.

(2) 因为 $g(x)=x^3-2x^2+x-2+\frac{1}{3}mx$，令 $g'(x)=3x^2-4x+1+\frac{1}{3}m=0$.

当函数有极值时，则 $\Delta\geqslant 0$，方程 $3x^2-4x+1+\frac{1}{3}m=0$ 有实数解，

由 $\Delta=4(1-m)\geqslant 0$，得 $m\leqslant 1$.

①当 $m=1$ 时，$g'(x)=0$ 有实数根 $x=\frac{2}{3}$，在 $x=\frac{2}{3}$ 左右两侧均有 $g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 无极值；

②当 $m<1$ 时，$g'(x)=0$ 有两个不等实数根 $x_1=\frac{1}{3}(2-\sqrt{1-m})$，$x_2=\frac{1}{3}(2+\sqrt{1-m})$，

当 x 变化时 $g'(x)$、$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以在 $m\in(-\infty,1)$ 时，函数 $g(x)$ 有极值；

综上，$g(x)$ 有极值时 m 的范围为 $(-\infty,1)$.

当 $x=\frac{1}{3}(2-\sqrt{1-m})$ 时，$g(x)$ 有极大值；当 $x=\frac{1}{3}(2+\sqrt{1-m})$ 时，$g(x)$ 有极小值.

例 4 【解答】(1) $f'(x)=a-\frac{1}{(x+b)^2}$，由题意，得 $\begin{cases}f(2)=3,\\ f'(2)=0,\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}2a+\frac{1}{2+b}=3,\\ a-\frac{1}{(2+b)^2}=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{9}{4},\\ b=-\frac{8}{3}.\end{cases}$

因为 $a,b\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$.

(2) 对于函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$，由于 $g(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-g(x)$，

可知函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 是奇函数，其图象是以原点为中心的中心对称图形.

而函数 $f(x)$ 可化为 $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}+1$.

故把函数 $g(x)$ 的图象向右平移 1 个单位，向上平移 1 个单位，即可得到函数 $f(x)$ 的图象，

所以函数 $y=f(x)$ 的图象是以点 $(1,1)$ 为中心的中心对称图形.

(3) 设曲线上任意一点为 $\left(x_0,x_0+\frac{1}{x_0-1}\right)$.

由 $f'(x_0)=1-\frac{1}{(x_0-1)^2}$ 知，过此点的切线方程为 $y-$

$\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=\left[1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)$.

令 $x=1$ 得 $y=\frac{x_0+1}{x_0-1}$,切线与直线 $x=1$ 的交点为 $\left(1,\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$.

令 $y=x$ 得 $y=2x_0-1$,切线与直线 $y=x$ 的交点为 $(2x_0-1,2x_0-1)$.

直线 $x=1$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $(1,1)$.

从而所围三角形的面积为 $\frac{1}{2}\left|\frac{x_0+1}{x_0-1}-1\right||2x_0-1-1|=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0-1}\right||2x_0-2|=2$.

所以所围三角形的面积为定值 2.

例 5 【解答】(1)①当时 $0<t\leqslant 10$,$V(t)=(-t^2+14t-40)\cdot e^{\frac{1}{4}t}+50<50$,

化简,得 $t^2-14t+40>0$,解得 $t<4$ 或 $t>10$,又 $0<t\leqslant 10$,故 $0<t<4$.

②当 $10<t\leqslant 12$ 时,$V(t)=4(t-10)(3t-41)+50<50$,化简,得 $(t-10)(3t-41)<0$,

解得 $10<t<\frac{41}{3}$,又 $10<t\leqslant 12$,故 $10<t\leqslant 12$,综上得,$0<t<4$,或 $10<t\leqslant 12$.

故知枯水期为 1 月,2 月,3 月,4 月,11 月,12 月共 6 个月.

(2)由(1)知,$V(t)$ 的最大值只能在 $(4,10)$ 内达到.

由 $V'(t)=e^{\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t+4\right)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}t}(t+2)(t-8)$,

令 $V'(t)=0$,解得 $t=8$($t=-2$ 舍去).

当 t 变化时,$V'(t)$ 与 $V(t)$ 的变化情况如下表:

t	$(4,8)$	8	$(8,10)$
$V'(t)$	+	0	−
$V(t)$	↗	极大值	↘

由上表,$V(t)$ 在 $t=8$ 时取得最大值 $V(8)=8e^2+50=108.32$(亿立方米).

故知一年内该水库的最大蓄水量是 108.32 亿立方米.

例 5 变式题 【证明】设 $f(x)=(1+x)^n-1-nx$,

当 $n=1$ 时,$(1+x)^n=1+nx$.

当 $n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$ 时 $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n[(1+x)^{n-1}-1]$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$,

当 $-2<x<0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(-2,0]$ 上为减函数;

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数;

∴当 $x>-2$ 时,$f(x)\geqslant f(0)=0$.

∴$(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

综上可知 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

第 15 讲　定积分与微积分基本定理

例 1 【解答】(1)函数 $y=2x^2-\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $y=\frac{2}{3}x^3-\ln x$,所以 $\int_1^2\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\ln x\right)\Big|_1^2$

$=\frac{16}{3}-\ln 2-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}-\ln 2$.

(2)函数 $y=\sin x-\sin 2x$ 的一个原函数是 $y=-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$,

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x-\sin 2x)dx=\left(-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

(3) $\int_1^2|3-2x|dx=\int_1^{\frac{3}{2}}|3-2x|dx+\int_{\frac{3}{2}}^2|3-2x|dx$

$=\int_1^{\frac{3}{2}}(3-2x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^2(2x-3)dx=(3x-x^2)\Big|_1^{\frac{3}{2}}+(x^2-3x)\Big|_{\frac{3}{2}}^2$

$=\frac{1}{2}$.

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

例 1 变式题 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(2) $\{a|0<a\leqslant 8\}$

【解析】(1) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2+c)dx=\frac{1}{3}ax^3+cx\Big|_0^1=\frac{a}{3}+c=ax_0^2+c$,

∴$x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)由 $\int_0^a(2x-8)dx=(x^2-8x)\Big|_0^a=a^2-8a\leqslant 0$,显然 $a\neq 0$,

故解集为 $\{a|0<a\leqslant 8\}$.

例 2 【解答】由定积分的几何意义知,$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ 的值就是函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[0,2]$ 上的图象与 x 轴围成图形的面积,而 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[0,2]$ 上的图象是圆 $x^2+y^2=4$ 的 $\frac{1}{4}$ 部分,所以其面积为 $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$,故 $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\pi$.

例 3 $\frac{32}{3}$ 【解析】由方程组 $\begin{cases}y=2x,\\ y=x^2-3,\end{cases}$ 解得 $x_1=-1$,$x_2=3$,故所求图形面积为 $S=\int_{-1}^3(2x-x^2+3)dx=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3+3x\right)\Big|_{-1}^3=\frac{32}{3}$.

例 3 变式题 $\frac{16}{3}$ 【解析】由方程组 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}y^2,\\ x=y+\frac{3}{2},\end{cases}$ 解得 $y_1=-1$,$y_2=3$,故所求图形的面积为

$S=\int_{-1}^3\left(y+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}y-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_{-1}^3=\frac{16}{3}$.

例 4 【解答】$v(t)=\begin{cases}2t,(0\leqslant t\leqslant 1)\\ 2,(1\leqslant t\leqslant 3)\\ \frac{1}{3}t+1,(3\leqslant t\leqslant 6)\end{cases}$

由变速直线运动的路程公式,可得 $s=\int_{\frac{1}{2}}^{6} v(t)\mathrm{d}t$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2t\mathrm{d}t+\int_{1}^{3} 2\mathrm{d}t+\int_{3}^{6}\left(\frac{1}{3}t+1\right)\mathrm{d}t$

$=t^2\left|_{\frac{1}{2}}^{1}+2t\right|_{1}^{3}+\left(\frac{1}{6}t^2+t\right)\bigg|_{3}^{6}=\frac{49}{4}(\mathrm{m})$.

所以物体在 $\frac{1}{2}$s~6s 间的运动路程是 $\frac{49}{4}$m.

例 4 变式题 【解答】设以 x 表示弹簧伸长的厘米数,$F(x)$ 表示加在弹簧上的力,则依题意,使弹簧伸长 5 cm,需力 100 N. 即 $100=5k$,$k=20$,于是现在需计算由 $x=0$ 到 $x=15$ 所做的功 $W=\int_{0}^{15} 20x\mathrm{d}x=10x^2\Big|_{0}^{15}=2250$ (N · cm) $=22.5$ (J).

第三单元 三角函数

第 16 讲 任意角的概念与弧度制

例 1 【解答】∵α 是第二象限角,

∴$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$,①

$-2k\pi-\pi<-\alpha<-2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $-\alpha$ 是第三象限角.

由①得 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

当 k 为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限;

当 k 为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限.

即 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一或第三象限.

例 1 变式题 1 【解答】∵α 是第三象限角,

∴$180^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

(1)∵$2k\cdot360^\circ+360^\circ<2\alpha<2k\cdot360^\circ+540^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

∴$(2k+1)\cdot360^\circ<2\alpha<(2k+1)\cdot360^\circ+180^\circ$,

∴2α 是第一或第二象限的角或终边落在 y 轴非负半轴上.

同理由 $180^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$得,

$60^\circ+k\cdot120^\circ<\frac{\alpha}{3}<90^\circ+k\cdot120^\circ$.

①当 $k=3m(m\in\mathbf{Z})$时,可得

$60^\circ+m\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<90^\circ+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$.

故 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一象限.

②当 $k=3m+1(m\in\mathbf{Z})$时,可得

$180^\circ+m\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<210^\circ+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$.

故 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第三象限.

③当 $k=3m+2(m\in\mathbf{Z})$时,可得

$300^\circ+m\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{3}<330^\circ+m\cdot360^\circ(m\in\mathbf{Z})$.

故 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第四象限.

综上可知,$\frac{\alpha}{3}$ 是第一、第三或第四象限的角.

例 1 变式题 2 【解答】(1)因为 $180^\circ=\pi$,所以有 $\alpha_1=-570^\circ=-\frac{570}{180}\pi=-\frac{19}{6}\pi=-2\times2\pi+\frac{5\pi}{6}$.

同理有 $\alpha_2=750^\circ=\frac{25}{6}\pi=2\times2\pi+\frac{\pi}{6}$.

故 α_1 是第二象限角,α_2 是第一象限角.

(2)因 $\pi=180^\circ$,所以 $\beta_1=\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\times180^\circ=108^\circ$.

设 $\theta=k\cdot360^\circ+\beta_1(k\in\mathbf{Z})$,由 $-720^\circ\leqslant\theta<0^\circ$,

所以 $-720^\circ\leqslant k\cdot360^\circ+108^\circ<0^\circ$,

所以 $k=-2$ 或 $k=-1$,

则在 -720°~0°间与 β_1 有相同终边的角是 -612°和 -252°.

同理 $\beta_2=-\frac{7}{3}\times180^\circ=-420^\circ$,且在 -720°~0°间与 β_2 有相同终边的角是 -60°.

例 2 【解答】设弧长为 l,弓形面积为 $S_{弓}$.

(1)由已知 $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$,$R=10(\mathrm{cm})$,

∴$l=\frac{10\pi}{3}(\mathrm{cm})$,$S_{弓}=S_{扇}-S_{\triangle OAB}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{10\pi}{3}\times10-\frac{1}{2}\times10^2\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=50\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\mathrm{cm}^2)$.

(2)令 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l,则 $l=4-2R$,

∵$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$,∴$\frac{1}{2}(4-2R)R=1$,

∴$R=1$,$l=2$.

设∠AOB 的弧度数为 α,则 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{2}{1}=2$.

过 O 作 $OH\perp AB$ 于 H,

则 $AB=2AH=2R\sin1=2\sin1$.

所以扇形的中心角为 2 弧度,弦 AB 的长为 $2\sin1$.

例 2 变式题 【解答】扇形周长 $c=2R+l=2R+\alpha R$.

∴$R=\frac{c}{2+\alpha}$,

∴$S_{扇}=\frac{1}{2}\alpha\cdot R^2=\frac{1}{2}\alpha\cdot\left(\frac{c}{2+\alpha}\right)^2$

$=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\alpha}{4+4\alpha+\alpha^2}$

$=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{1}{4+\frac{4}{\alpha}+\alpha}\leqslant\frac{c^2}{16}$.

当且仅当 $\alpha^2=4$,即 $\alpha=2$(弧度)时,扇形面积最大,最大值为 $\frac{c^2}{16}$.

例 3 【解答】∵角 α 的终边在直线 $3x+4y=0$ 上,

∴在角 α 的终边上任取一点 $P(4t,-3t)(t\neq0)$,

则 $x=4t$,$y=-3t$,

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(4t)^2+(-3t)^2}=5|t|$.

当 $t>0$ 时,$r=5t$,

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3t}{5t}=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{4t}{5t}=\dfrac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-3t}{4t}=-\dfrac{3}{4}$；

当 $t<0$ 时，$r=-5t$，$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3t}{-5t}=\dfrac{3}{5}$，

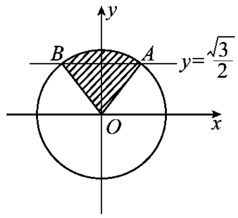
$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{4t}{-5t}=-\dfrac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-3t}{4t}=-\dfrac{3}{4}$.

综上可知，$t>0$ 时，$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$；

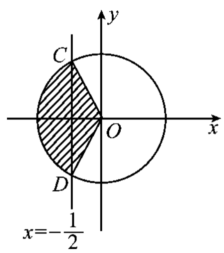
$t<0$ 时，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

例 4 【解答】(1)作直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 交单位圆于 A、B 两点，连接 OA、OB，则 OA 与 OB 围成的区域(如图所示阴影部分)即为角 α 的终边的范围，故满足条件的角 α 的集合为



$\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\dfrac{2}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)作直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 交单位圆于 C、D 两点，连接 OC、OD，则 OC 与 OD 围成的区域(图中阴影部分)即为角 α 终边的范围. 故满足条件的角 α 的集合为



$\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\dfrac{2}{3}\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\dfrac{4}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

第 17 讲 任意角的三角函数

例 1 【解答】∵ $f(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\dfrac{\sin\left(-\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}}{-\cos\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\dfrac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}}{-\cos\alpha}=-\cos\alpha$，

∴ $f\left(-\dfrac{31\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\dfrac{31\pi}{3}\right)=-\cos\left(-10\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

例 1 变式题 【解答】(1)原式 $=\sin(360^\circ+60^\circ)\cos(360^\circ-30^\circ)+\sin(-2\times360^\circ+30^\circ)\cos(-2\times360^\circ+60^\circ)$

$=\sin60^\circ\cos30^\circ+\sin30^\circ\cos60^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$.

(2)原式 $=\sqrt{1-2\sin(180^\circ+20^\circ)\cos(180^\circ-20^\circ)}$

$=\sqrt{1-2\sin20^\circ\cos20^\circ}$

$=\sqrt{(\cos20^\circ-\sin20^\circ)^2}$

$=\cos20^\circ-\sin20^\circ$.

例 2 【解答】由条件 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，$\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$，知 α 是第二象限角，则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

原式 $=\sqrt{\dfrac{\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\sqrt{\dfrac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}+1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\dfrac{2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=\begin{cases}\dfrac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{\alpha}{2}\text{是第一象限角}\right),\\ -\dfrac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{\alpha}{2}\text{是第三象限角}\right).\end{cases}$

例 3 【解答】方法一：(1)联立方程：

$\begin{cases}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}, & ①\\ \sin^2x+\cos^2x=1. & ②\end{cases}$

由①得 $\sin x=\dfrac{1}{5}-\cos x$，将其代入②，整理得

$25\cos^2x-5\cos x-12=0$.

∵ $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，∴ $\begin{cases}\sin x=-\dfrac{3}{5},\\ \cos x=\dfrac{4}{5}\end{cases}$，

∴ $\sin x-\cos x=-\dfrac{7}{5}$.

(2) $\dfrac{1}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{25}{7}$.

方法二：(1)∵ $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$，

∴ $(\sin x+\cos x)^2=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$，

即 $1+2\sin x\cos x=\dfrac{1}{25}$，

∴ $2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}$.

∴ $(\sin x-\cos x)^2=\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x$

$=1-2\sin x\cos x=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}$. ①

又∵ $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，∴ $\sin x<0$，$\cos x>0$，

∴ $\sin x-\cos x<0$. ②

由①②可知，$\sin x-\cos x=-\dfrac{7}{5}$.

(2) $\dfrac{1}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\dfrac{1}{\frac{7}{5}\times\frac{1}{5}}$

$=\dfrac{25}{7}$.

例 4 【解答】由已知 $\tan(-\pi-\alpha)=-2$ 可得，$\tan\alpha=2$.

(1)原式 $=\dfrac{2\tan\alpha-3}{4\tan\alpha-9}=\dfrac{2\times2-3}{4\times2-9}=-1$.

(2) $\dfrac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-9\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan^2\alpha-3}{4\tan^2\alpha-9}=\dfrac{2\times2^2-3}{4\times2^2-9}=\dfrac{5}{7}$.

(3) $\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$\therefore 4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$

$=\dfrac{4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{4\tan^2\alpha-3\tan\alpha-5}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{4\times4-3\times2-5}{4+1}=1$.

例 4 变式题 【解答】由已知得 $\cos(\theta+k\pi)\neq0$,

$\therefore \tan(\theta+k\pi)=-2(k\in\mathbf{Z})$,**即** $\tan\theta=-2$.

(1) $\dfrac{4\sin\theta-2\cos\theta}{5\cos\theta+3\sin\theta}=\dfrac{4\tan\theta-2}{5+3\tan\theta}=10$.

(2) $\dfrac{1}{4}\sin^2\theta+\dfrac{2}{5}\cos^2\theta=\dfrac{\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{2}{5}\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{\frac{1}{4}\tan^2\theta+\frac{2}{5}}{\tan^2\theta+1}$

$=\dfrac{7}{25}$.

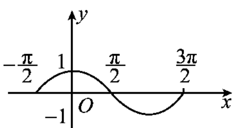
第 18 讲　三角函数的图象与性质

例 1 【解答】(1)**要使函数有意义,**

必须使 $\sin(\cos x)>0$.

$\because -1\leqslant\cos x\leqslant1$,

$\therefore 0<\cos x\leqslant1$.



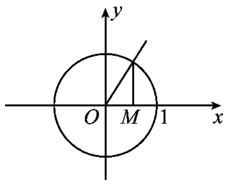
方法一:利用余弦函数的简图所示得知定义域为

$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

方法二:利用单位圆中的余弦线 OM,**依题意知** $0<OM\leqslant1$,

$\therefore OM$ **只能在** x **轴的正半轴上,**

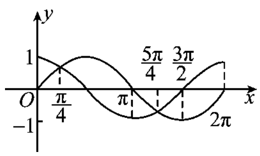
$\therefore$ **其定义域为**



$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)**要使函数有意义,必须使** $\sin x-\cos x\geqslant0$.

方法一:利用图象.在同一坐标系中画出$[0,2\pi]$**上** $y=\sin x$ **和** $y=\cos x$ **的图象,如图所示.**



在$[0,2\pi]$**内,满足** $\sin x=\cos x$ **的** x **为**$\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$,**再结合正弦、余弦函数的周期是** 2π,

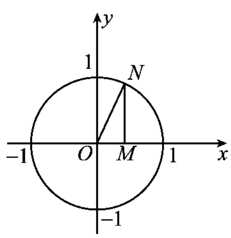
所以定义域为$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

方法二:利用三角函数线,

如图所示,MN **为正弦线,**OM **为余弦线,**

要使 $\sin x\geqslant\cos x$,**即** $MN\geqslant OM$,

则$\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$(**在**$[0,2\pi]$**内**).



$\therefore$ **定义域为**

$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

方法三:$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant0$,

将 $x-\dfrac{\pi}{4}$ **视为一个整体,由正弦函数** $y=\sin x$ **的图象和性质可知** $2k\pi\leqslant x-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi$,

解得 $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以定义域为$\left\{x\,\middle|\,2kx+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

例 1 变式题 【解答】由函数 $1-\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant0$,**得** $\sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,**利用单位圆或三角函数的图象,易得所求函数的定义域是**

$\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\dfrac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant2k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

当 $\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**时,**$y_{\min}=0$;

当 $\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-1$ **时,**$y_{\max}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

所以函数的值域为$[0,\sqrt{1+\sqrt{2}}]$.

例 2 【解答】(1) $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2x-4\cos^4x$

$=7-2\sin2x+4\cos^2x(1-\cos^2x)$

$=7-2\sin2x+4\cos^2x\sin^2x$

$=7-2\sin2x+\sin^22x$

$=(1-\sin2x)^2+6$.

令 $u=\sin2x$,**则** $u\in[-1,1]$.

由于函数 $z=(u-1)^2+6$ **在**$[-1,1]$**中的最大值为** $z_{\max}=(-1-1)^2+6=10$,

最小值为 $z_{\min}=(1-1)^2+6=6$,

故当 $\sin2x=-1$ **时,**y **取得最大值** 10,**当** $\sin2x=1$ **时,**y **取得最小值** 6.

(2)**令** $\sin x-\cos x=t$,**则** $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$,

$\therefore y=\dfrac{\frac{1-t^2}{2}}{t+1}=\dfrac{1-t}{2}$.

又 $x\in(0,\pi)$,**则** $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\in(-1,\sqrt{2}]$,

$\therefore y\in\left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2},1\right)$.

例 3 【解答】(1) $\because f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{4}\right)$

$=\sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\therefore f(x)$**的最小正周期** $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

当 $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ **时,**$f(x)$**取得最小值**-2;

当$\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ **时,**$f(x)$**取得最大值** 2.

(2)**由**(1)**知** $f(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

又 $g(x)=f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore g(x)=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$

$=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{x}{2}$.

$\because g(-x)=2\cos\left(-\frac{x}{2}\right)=2\cos\frac{x}{2}=g(x)$,

$\therefore$函数 $g(x)$是偶函数.

例 4 【解答】 方法一:$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$化成 $y=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because y=\sin u(u\in\mathbf{R})$的递增、递减区间分别为

$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$,

$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore$函数 $y=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的递增、递减区间分别由下面的不等式确定:

$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$;

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的单调递减区间、单调递增区间分别为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$,$\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

方法二:$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$可看作是由 $y=2\sin u$ 与 $u=\frac{\pi}{4}-x$ 复合而成的.

又$\because u=\frac{\pi}{4}-x$ 为减函数,

$\therefore$由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得$-2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant -2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

所以$\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$为 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的递减区间.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}-x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得$-2k\pi-\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant -2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $2k\pi-\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

所以$\left[2k\pi-\frac{5\pi}{4},2k\pi-\frac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$为 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的递增区间.

综上可知,$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的递增区间为$\left[2k\pi-\frac{5\pi}{4},2k\pi-\frac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$;递减区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

例 4 变式题 【解答】(1)方法一:令 $u=\frac{\pi}{3}-2x$,$y=\sin u$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant -2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant -2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

$-k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant -k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$原函数的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

方法二:由已知函数 $y=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,欲求函数的单调递减区间,只需求 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$原函数的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$y=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$

$=-3\tan\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore T=\frac{\pi}{|\omega|}=4\pi$,

$\therefore y=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$的周期为 4π.

由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,

得 $4k\pi-\frac{4\pi}{3}<x<4k\pi+\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $y=3\tan\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$的单调增区间是

$\left(4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore y=3\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$的单调递减区间是

$\left(4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

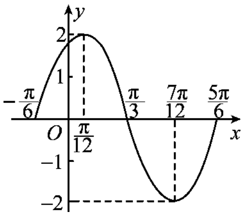
第 19 讲 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质

例 1 【解答】(1)$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的振幅 $A=2$,周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,初相 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)令 $X=2x+\frac{\pi}{3}$,则 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin X$.

列表,并描点画出图象:

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin X$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	2	0	-2	0



(3)方法一:把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,再把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上的点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,最后把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 上所有点的纵坐标变为原来的 2 倍(横坐标不变),即可得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

方法二:将 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标 x 变为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y=\sin 2x$ 的图象;

再将 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象;

再将 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上每一点的横坐标保持不变,纵坐标变为原来的 2 倍,得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

例 2 【解答】方法一:以 N 为第一个零点,则 $A<0,\omega>0$.

则 $A=-\sqrt{3},T=2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$,

$\therefore \omega=2$,此时解析式为 $y=-\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)$.

$\therefore$ 点 $N\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$,$\therefore -\frac{\pi}{6}\times 2+\varphi=0$,$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore$ 所求解析式为 $y=-\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ①

方法二:由图象知 $A=\sqrt{3}$,

以 $M\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 为第一个零点,$P\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 为第二个零点.

列方程组 $\begin{cases}\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=0,\\ \omega\cdot\frac{5\pi}{6}+\varphi=\pi,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}\omega=2,\\ \varphi=-\frac{2\pi}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 所求解析式为 $y=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$. ②

例 2 变式题 $\frac{9\pi}{10}$ 【解析】由图可知,$T=\frac{5\pi}{2}$,$\therefore \omega=\frac{4}{5}$,把 $(2\pi,1)$ 代入 $y=\sin\left(\frac{4}{5}x+\varphi\right)$ 有 $1=\sin\left(\frac{8}{5}\pi+\varphi\right)$,$\therefore \varphi=\frac{9\pi}{10}$.

例 3 【解答】(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)$

$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega x+\varphi)-\frac{1}{2}\cos(\omega x+\varphi)\right]$

$=2\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数,所以对 $x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,

因此 $\sin\left(-\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$.

即 $-\sin\omega x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\omega x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$,

整理得 $\sin\omega x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

因为 $\omega>0$,且 $x\in\mathbf{R}$,所以 $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

又因为 $0<\varphi<\pi$,故 $\varphi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\omega x$.

由题意得 $\frac{2\pi}{\omega}=2\cdot\frac{\pi}{2}$,所以 $\omega=2$,故 $f(x)=2\cos 2x$.

因此 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2)将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后,得到 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,再将所得图象横坐标伸长到原来的 4 倍,纵坐标不变,得到 $f\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

所以 $g(x)=f\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left[2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $2k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $4k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$g(x)$ 单调递减,因此 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi+\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

例 3 变式题 【解答】(1) $f(x)=A\sin\omega x+B\cos\omega x$

$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega x+\varphi)$,

由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2$ 知 $\omega=\pi$.

又因为 $f(x)$ 最大值为 2,所以 $f(x)=2\sin(\pi x+\varphi)$.

由 $x=\frac{1}{3}$ 时,$f(x)_{\max}=2$,得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$,

故可取 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,$\therefore f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)令 $\pi x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得对称轴方程为 $x=k+\frac{1}{3}$,由对称轴满足 $\frac{21}{4}\leqslant k+\frac{1}{3}\leqslant\frac{23}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $\frac{59}{12}\leqslant k\leqslant\frac{65}{12}$ 且 $k\in\mathbf{Z}$,得 $k=5$.

故在 $\left[\frac{21}{4},\frac{23}{4}\right]$ 上 $f(x)$ 只有一条对称轴 $x=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$,即对

称轴方程为 $x=\frac{16}{3}$.

例 4 【解答】(1)由题意可知 $A=50,h=60,T=3$,

$\therefore \omega=\frac{2}{3}\pi$,

则 $f(t)=50\sin\left(\frac{2}{3}\pi t+\varphi\right)+60$.

又$\because f(0)=10$,$\therefore \sin\varphi=-1$,故可取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,

$\therefore f(t)=50\sin\left(\frac{2}{3}\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+60$.

$\therefore f(2009)=85$,即在 2009min 时点 P 距离地面的高度为 85 m.

(2)由(1)知 $f(t)=50\sin\left(\frac{2}{3}\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+60$

$=60-50\cos\frac{2}{3}\pi t$.

$\therefore f(t)+f(t+1)+f(t+2)$

$=60-50\cos\frac{2}{3}\pi t+60-50\cos\frac{2}{3}\pi(t+1)+60-50\cos\frac{2}{3}\pi(t+2)$

$=180-50\left[\cos\frac{2}{3}\pi t+\cos\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{4}{3}\pi\right)\right]$

$=180-50\left[\cos\frac{2\pi}{3}t+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi t}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{3}t-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{3}t\right]$

$=180$.

故不论 t 为何值,$f(t)+f(t+1)+f(t+2)$是定值.

第 20 讲　两角和与差的正弦、余弦和正切

例 1 【解答】(1)由 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{7}{1}=4\sqrt{3}$,

于是 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times4\sqrt{3}}{1-(4\sqrt{3})^2}=-\frac{8\sqrt{3}}{47}$.

(2)由 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,得 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

又$\because \cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$,

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

由 $\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$得

$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{7}\times\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{1}{2}$,

又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

例 1 变式题 【解答】$\because \tan\alpha=4\sqrt{3}$,且 α 为锐角,

$\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=4\sqrt{3}$,即 $\sin\alpha=4\sqrt{3}\cos\alpha$.

又$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$\therefore \sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,$\cos\alpha=\frac{1}{7}$.

$\because 0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$,$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$,

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

而 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$,

$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

例 2 【解答】证明:$\dfrac{(1+\cos2\alpha)\cdot(2\sin^2\alpha-1)\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}-1}$

$=2\cos^2\alpha\cdot(-\cos2\alpha)\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}-1}$

$=\cos^2\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\tan\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha$

$=\frac{1}{4}\sin4\alpha$,

$\therefore$原等式成立.

例 3　2 **【解析】**$\tan70^\circ\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ\tan70^\circ-2\cos40^\circ$

$=\frac{\sin70^\circ\cos10^\circ}{\cos70^\circ}+\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ\sin70^\circ}{\cos70^\circ}-2\cos40^\circ$

$=\frac{\cos20^\circ\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ\cos20^\circ}{\sin20^\circ}-2\cos40^\circ$

$=\frac{\cos20^\circ(\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ)}{\sin20^\circ}-2\cos40^\circ$

$=\frac{2\cos20^\circ(\cos10^\circ\sin30^\circ+\sin10^\circ\cos30^\circ)}{\sin20^\circ}-2\cos40^\circ$

$=\frac{2\cos20^\circ\sin40^\circ-2\sin20^\circ\cos40^\circ}{\sin20^\circ}$

$=\frac{2\sin20^\circ}{\sin20^\circ}$

$=2$.

例 4 【解答】(1)$\because \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,$\therefore \frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$,

$\therefore$原式$=\dfrac{\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}$

$=\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=-\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha$.

(2)**原式**$=\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+$

$\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}+$

$\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}=-\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=$

$-\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=-\dfrac{2}{\sin\theta}$.

例5 【解答】解法一:

原式$=\dfrac{1-\cos40^\circ}{2}+\dfrac{1+\cos100^\circ}{2}+\sin20^\circ\cdot\cos50^\circ$

$=1-\frac{1}{2}(\cos40^\circ-\cos100^\circ)+\frac{1}{2}[\sin70^\circ+\sin(-30^\circ)]$

$=1-\frac{1}{2}\times(-2)\sin70^\circ\sin(-30^\circ)+\frac{1}{2}\sin70^\circ-\frac{1}{4}$

$=1-\frac{1}{2}\sin70^\circ+\frac{1}{2}\sin70^\circ-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$.

解法二:原式$=(\sin20^\circ+\cos50^\circ)^2-\sin20^\circ\cos50^\circ$

$=(\sin20^\circ+\sin40^\circ)^2-\frac{1}{2}(\sin70^\circ-\sin30^\circ)$

$=(2\sin30^\circ\cos10^\circ)^2-\frac{1}{2}\sin70^\circ+\frac{1}{4}$

$=\cos^2 10^\circ-\frac{1}{2}\cos20^\circ+\frac{1}{4}$

$=\frac{1+\cos20^\circ}{2}-\frac{1}{2}\cos20^\circ+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos20^\circ-\frac{1}{2}\cos20^\circ+\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$.

例5 变式题 【解答】$y=\sin x\left[\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sin x\cdot2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$.

$\because\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,

$\therefore$**当** $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$,**即** $x=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$ **时**,$y_{\max}=\frac{3}{4}$;

当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$,**即** $x=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,$y_{\min}=-\frac{1}{4}$.

第21讲 三角函数的求值、化简与证明

例1 【解答】(1)**由** $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{10}{3}$**得**

$3\tan^2\alpha+10\tan\alpha+3=0$,**即** $\tan\alpha=-3$ **或** $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$,

又$\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$,**所以** $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$**为所求**.

(2)$\dfrac{5\sin^2\frac{\alpha}{2}+8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+11\cos^2\frac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\dfrac{5\,\frac{1-\cos\alpha}{2}+4\sin\alpha+11\,\frac{1+\cos\alpha}{2}-8}{-\sqrt{2}\cos\alpha}$

$=\dfrac{5-5\cos\alpha+8\sin\alpha+11+11\cos\alpha-16}{-2\sqrt{2}\cos\alpha}$

$=\dfrac{8\sin\alpha+6\cos\alpha}{-2\sqrt{2}\cos\alpha}$

$=\dfrac{8\tan\alpha+6}{-2\sqrt{2}}$

$=-\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

例1 变式题 【解答】(1)**因为** $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{3}$,**所以** $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)**因为** $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

又 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$,

得 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$.

$\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{3}$

$=\frac{6\sqrt{2}+4}{15}$.

例2 【解答】由 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$,**得** $\tan2(\alpha-\beta)=\frac{4}{3}$,

又 $\tan\beta=-\frac{1}{7}$,

所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[2(\alpha-\beta)+\beta]=1$.

由 $\tan\beta=-\frac{1}{7}>-\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\beta\in(0,\pi)$**知**$\frac{5\pi}{6}<\beta<\pi$.

由 $\tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\alpha\in(0,\pi)$,

知 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$. $\therefore 2\alpha-\beta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore 2\alpha-\beta=-\dfrac{3\pi}{4}$.

例 3 【解答】方法一:复角→单角,从"角"入手.

原式$=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}\cdot(2\cos^2\alpha-1)\cdot(2\cos^2\beta-1)$

$=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}(4\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-2\cos^2\alpha-2\cos^2\beta+1)$

$=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}$

$=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}$

$=\sin^2\beta+\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

方法二:从"名"入手,异名化同名.

原式$=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+(1-\sin^2\alpha)\cdot\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos2\beta$

$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos2\beta$

$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos2\beta-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos2\beta$

$=\cos^2\beta-\cos2\beta\cdot\left(\sin^2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\right)$

$=\dfrac{1+\cos2\beta}{2}-\cos2\beta\cdot\left[\sin^2\alpha+\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)\right]$

$=\dfrac{1+\cos2\beta}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2\beta=\dfrac{1}{2}$.

方法三:从"幂"入手,利用降幂公式先降次.

原式$=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1-\cos2\beta}{2}+\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1+\cos2\beta}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos2\beta$

$=\dfrac{1}{4}(1+\cos2\alpha\cdot\cos2\beta-\cos2\alpha-\cos2\beta)+\dfrac{1}{4}(1+\cos2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha+\cos2\beta)-\dfrac{1}{2}\cdot\cos2\alpha\cdot\cos2\beta=\dfrac{1}{2}$.

方法四:从"形"入手,利用配方法,先对二次项配方.

原式$=(\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos2\beta$

$=\cos^2(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{2}\sin2\alpha\cdot\sin2\beta-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos2\beta$

$=\cos^2(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}\cdot\cos(2\alpha+2\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}\cdot[2\cos^2(\alpha+\beta)-1]=\dfrac{1}{2}$.

例 3 变式题 【解答】(1)$g(x)=\cos x\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\sin x\cdot\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$=\cos x\cdot\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^2x}}+\sin x\cdot\sqrt{\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2x}}$

$=\cos x\cdot\dfrac{1-\sin x}{|\cos x|}+\sin x\dfrac{1-\cos x}{|\sin x|}$.

$\because x\in\left(\pi,\dfrac{17\pi}{12}\right]$,$\therefore|\cos x|=-\cos x$,$|\sin x|=-\sin x$,

$\therefore g(x)=\cos x\cdot\dfrac{1-\sin x}{-\cos x}+\sin x\cdot\dfrac{1-\cos x}{-\sin x}$

$=\sin x+\cos x-2$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2$.

(2)**由** $\pi<x\leqslant\dfrac{17\pi}{12}$,**得**$\dfrac{5\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{3}$.

$\because\sin x$ **在**$\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right]$**上为减函数,在**$\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{3}\right]$**上为增函数,**

又 $\sin\dfrac{5\pi}{3}<\sin\dfrac{5\pi}{4}$,

$\therefore$**当** $x\in\left(\pi,\dfrac{17\pi}{2}\right]$**时**,$\sin\dfrac{3\pi}{2}\leqslant\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\sin\dfrac{5\pi}{4}$,

即$-1\leqslant\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore-\sqrt{2}-2\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2<-3$,

故 $g(x)$**的值域为**$[-\sqrt{2}-2,-3)$.

例 4 【解答】$\because\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,$\therefore\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$.

左边$=\dfrac{\left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}$

$=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}$

$=-\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$=\cos\alpha$.

右边$=1-\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cdot2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\cos\alpha$.

$\therefore$**左边=右边**,

$\therefore\dfrac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}=1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha$.

第 22 讲 解三角形

例 1 【解答】(1)$\because\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$,$\therefore\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{10\sin60^\circ}{5\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because b<c$,$\therefore B<C=60^\circ$,

$\therefore B=45^\circ$,$A=180^\circ-(B+C)=75^\circ$.

$\therefore a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{10\sin75^\circ}{\sin45^\circ}=\dfrac{10\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=5(\sqrt{3}+1)$.

$\therefore B=45^\circ$,$A=75^\circ$,$a=5(\sqrt{3}+1)$.

(2) $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin 30^\circ}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because b>a$，$\therefore B>A=30^\circ$，

$\therefore B=60^\circ$ 或 $B=120^\circ$.

当 $B=60^\circ$ 时，$C=90^\circ$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}=4\sqrt{3}$；

当 $B=120^\circ$ 时，$C=30^\circ$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sqrt{3}$.

$\therefore B=60^\circ$，$C=90^\circ$，$c=4\sqrt{3}$ 或 $B=120^\circ$，$C=30^\circ$，$c=2\sqrt{3}$.

(3) $\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(6+2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times(6+2\sqrt{3})\times 4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A=30^\circ$.

又 $\because \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\frac{(2\sqrt{6})^2+(4\sqrt{3})^2-(6+2\sqrt{3})^2}{2\times 2\sqrt{6}\times 4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<0$，

$\therefore B=105^\circ$，

$\therefore C=180^\circ-A-B=45^\circ$.

$\therefore A=30^\circ$，$B=105^\circ$，$C=45^\circ$.

例 2 【解答】(1) $\because b^2+c^2-a^2+bc=0$，

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，

又 $\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=120^\circ$.

(2)由 $a=\sqrt{3}$，得 $b^2+c^2=3-bc$.

又 $\because b^2+c^2\geqslant 2bc$（当且仅当 $c=b$ 时取等号），

$\therefore 3-bc\geqslant 2bc$（当且仅当 $c=b$ 时取等号）.

即当且仅当 $c=b=1$ 时，bc 取得最大值为 1.

(3)由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

$\therefore \frac{a\sin(30^\circ-C)}{b-c}=\frac{2R\sin A\sin(30^\circ-C)}{2R\sin B-2R\sin C}$

$=\frac{\sin A\sin(30^\circ-C)}{\sin B-\sin C}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)}{\sin(60^\circ-C)-\sin C}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cos C-\frac{3}{4}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}$

$=\frac{1}{2}$.

例 3 【解答】方法一：已知等式可化为

$a^2[\sin(A-B)-\sin(A+B)]$

$=b^2[-\sin(A+B)-\sin(A-B)]$，

$\therefore 2a^2\cos A\sin B=2b^2\cos B\sin A$.

由正弦定理可知，上式可化为

$\sin^2 A\cos A\sin B=\sin^2 B\cos B\sin A$，

$\therefore \sin A\sin B(\sin A\cos A-\sin B\cos B)=0$，

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$，由 $0<2A,2B<2\pi$，

得 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，

即 $A=B$ 或 $A=\frac{\pi}{2}-B$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰或直角三角形.

方法二：同方法一可得 $2a^2\cos A\sin B=2b^2\sin A\cos B$.

由正、余弦定理，可得

$a^2b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$\therefore a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$，

即 $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$，

$\therefore a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰或直角三角形.

例 3 变式题 解：(1) $\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ca\cos B$，

又 $\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=k$，

$\therefore bc\cos A=ac\cos B$，

$\therefore \sin B\cos A=\sin A\cos B$，

即 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$，

$\therefore \sin(A-B)=0$.

$\because -\pi<A-B<\pi$，

$\therefore A=B$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

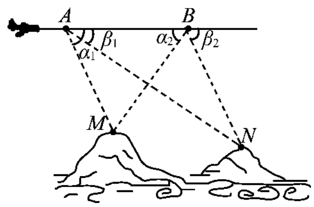
(2)由(1)知 $a=b$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2}{2}$.

$\because c=\sqrt{2}$，

$\therefore k=1$.

例 4 【解答】方案一：①需要测量的数据有：A 点到 M，N 点的俯角 α_1、β_1，B 点到 M，N 的俯角 α_2、β_2；A，B 的距离 d（如图所示）.



②第一步：计算 AM. 由正弦定理 $AM=\frac{d\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

第二步：计算 AN. 由正弦定理 $AN=\frac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$；

第三步：计算 MN. 由余弦定理 $MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM\times AN\cos(\alpha_1-\beta_1)}$.

方案二：①需要测量的数据有：

A 点到 M，N 点的俯角 α_1，β_1；B 点到 M，N 点的俯角 α_2，β_2；A，B 的距离 d（如图所示）.

②第一步：计算 BM. 由正弦定理 $BM=\frac{d\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$；

第二步：计算 BN. 由正弦定理 $BN=\frac{d\sin\beta_1}{\sin(\beta_2-\beta_1)}$；

第三步：计算 MN. 由余弦定理 $MN=\sqrt{BM^2+BN^2+2BM\times BN\cos(\beta_2+\alpha_2)}$.

例 4 变式题 【解答】在 $\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=180^\circ-15^\circ-30^\circ=135^\circ$，

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，

所以 $BC=\frac{30\sin30°}{\sin135°}=15\sqrt{2}$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$AB=BC\tan\angle ACB=15\sqrt{2}\cdot\tan60°=15\sqrt{6}$(米),

答:塔高 $15\sqrt{6}$米.

例 5 【解答】由已知条件得,$AB=2,AC=\sqrt{3}-1,\angle BAC=120°$,

$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}$

$=\sqrt{4+4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}=\sqrt{6}$.

在$\triangle ABC$ 中,$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$,解得 $\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\angle ACB=45°$,$\therefore BC$ 为水平线.

设经过时间 t 小时后,缉私船追上走私船,

则在$\triangle BCD$ 中,$BD=10t,CD=10\sqrt{3}t,\angle DBC=120°$,

$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$,

$\therefore\sin\angle BCD=\frac{BD\sin\angle DBC}{CD}=\frac{10t\sin120°}{10\sqrt{3}t}=\frac{1}{2}$.

由$\angle BCD$ 为锐角知$\angle BCD=30°$,

$\therefore$缉私船沿北偏西 60°的方向能最快追上走私船.

第四单元 数列

第 23 讲 数列的概念及其表示方法

例 1 【解答】(1)解法一:观察可得 $a_n=2^n-1$.

解法二:考虑数列$\{a_{n+1}-a_n\}$,有

$a_2-a_1=2,a_3-a_2=4,a_4-a_3=8,\cdots$,

$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$.

将这 $n-1$ 个式子累加,得

$a_n-a_1=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$.

$\therefore a_n=a_1+2^n-2=1+2^n-2=2^n-1$.

当 $n=1$ 时,此式仍成立,

故所求通项公式为 $a_n=2^n-1$.

(2)数列的项,有的是分数,有的是整数,可将数列的各项都统一成分数再观察:$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$,可得通项公式:$a_n=\frac{n^2}{2}$.

(3)这是一个分数数列,其分子构成偶数数列,而分母可分解成 $1\times3,3\times5,5\times7,7\times9,9\times11,\cdots$,每一项都是两个相邻奇数的乘积,各项符号可用$(-1)^{n+1}$表示,则所求数列的通项公式 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

(4)$a_n=\begin{cases}0(n\text{ 为奇数}),\\1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

又 $0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2},1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$,

$\therefore$也可以写为:$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

若考虑到三角函数的特征,此数列的通项公式也可以写为:

$a_n=\sin^2\frac{(n+1)\pi}{2}$或 $a_n=\frac{1+\cos n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(5)将数列变形为:$\frac{7}{9}(10-1),\frac{7}{9}(10^2-1),\frac{7}{9}(10^3-1),\frac{7}{9}(10^4-1),\cdots,\therefore a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

例 1 变式题 D

例 2 【解答】(1)$a_1=S_1=-1$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-5$.

由于 a_1 也适合此等式,所以 $a_n=4n-5$.

(2)$a_1=S_1=1$,

当 $n\geqslant2$ 时,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot3^{n-1}$.

经检验,a_1 不符合上式,$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\cdot3^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

例 3 【解答】(1)解法一:$\because a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1,a_{n-1}=\frac{1}{2}a_{n-2}+1$.两式作差得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$.

$\therefore\{a_n-a_{n-1}\}$是以 $a_2-a_1=\frac{1}{2}$为首项,公比为 $q=\frac{1}{2}$的等比数列.

$\therefore a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{2^{n-1}}$,

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{2}+1$

$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

解法二:由解法一知,$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$, ①

又 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$, ②

由①②消去 a_{n-1},得 $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

解法三:$\because a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$.令 $a_n+m=\frac{1}{2}(a_{n-1}+m)$,

则 $m=-2$.

$\therefore a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$.

$\therefore\{a_n-2\}$是首项 $a_1-2=-1$,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

$\therefore a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即 $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2)当 $n=1$ 时,$a_1=5a_1+1,\therefore a_1=-\frac{1}{4}$.

$\because a_n=5S_n+1,\therefore a_{n+1}=5S_{n+1}+1$,

$\therefore a_{n+1}-a_n=5a_{n+1}$,即 $a_{n+1}=-\frac{1}{4}a_n$.

数列$\{a_n\}$成等比数列,其首项 $a_1=-\frac{1}{4}$,

公比是 $q=-\frac{1}{4}$,

$\therefore a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

例 3 变式题 【解答】$\because$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

$\therefore S_n-S_{n-1}+2S_nS_{n-1}=0$，

即 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$，

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是公差为 2 的等差数列.

又 $S_1=a_1=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{S_1}=2$，

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=2+(n-1)\cdot 2=2n$，$\therefore S_n=\dfrac{1}{2n}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=-2S_nS_{n-1}=-2\cdot\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{1}{2(n-1)}$

$=-\dfrac{1}{2n(n-1)}$，

$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(n=1),\\ -\dfrac{1}{2n(n-1)}(n\geqslant 2).\end{cases}$

例 4 【解答】$\because a_n=(n+1)\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$，$\therefore a_{n+1}=(n+2)\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}$，

$\therefore a_{n+1}-a_n=(n+2)\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\dfrac{9}{10}\right)^n=\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\dfrac{8-n}{10}$.

当 $n<8$ 时有：$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\dfrac{8-n}{10}>0$，

$\therefore a_{n+1}>a_n$，此时数列递增；

当 $n=8$ 时有：$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\dfrac{8-n}{10}=0$，$\therefore a_9=a_8$；

当 $n>8$ 时有：$\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\dfrac{8-n}{10}<0$，$\therefore a_{n+1}<a_n$，此时数列递减.

所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时，$a_8=a_9$，这两项都是数列 $\{a_n\}$ 中的最大项.

例 4 变式题 C 【解析】$\because a_1=2,a_2=9$，$\therefore a_3=8,a_4=2,a_5=6,a_6=2,a_7=2,a_8=4,a_9=8,a_{10}=2,\cdots$，从第三项开始呈周期性变化，且周期为 6，所以有 $a_{2009}=a_{6\times 334+5}=a_5=6$，故选 C.

第 24 讲 等差数列

例 1 【解答】(1)解法一：设首项为 a_1，公差为 d，依条件得

$\begin{cases}33=a_1+14d,\\ 153=a_1+44d,\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}a_1=-23,\\ d=4.\end{cases}$

$\therefore a_{61}=-23+(61-1)\times 4=217$.

解法二：由 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$，得 $d=\dfrac{a_{45}-a_{15}}{45-15}=\dfrac{153-33}{30}=4$，

由 $a_n=a_m+(n-m)d$，

得 $a_{61}=a_{45}+16d=153+16\times 4=217$.

(2) $\because a_6=10,S_5=5$，$\therefore \begin{cases}a_1+5d=10,\\ 5a_1+10d=5.\end{cases}$

解方程组得 $a_1=-5,d=3$，

$\therefore a_8=a_6+2d=10+2\times 3=16$，$S_8=8\times\dfrac{(a_1+a_8)}{2}=44$.

(3)设数列的前三项分别为 $a-d,a,a+d$，依题意有：

$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=12,\\ (a-d)\cdot a\cdot(a+d)=48.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a=4,\\ a(a^2-d^2)=48,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=4,\\ d=\pm 2.\end{cases}$

$\because d>0$，$\therefore d=2,a-d=2$，

$\therefore$ 首项为 2，$\therefore a_1=2$.

例 2 【解答】(1)由已知得

$2b_n^2=a_n+a_{n+1}$， ①

$a_{n+1}^2=b_n^2\cdot b_{n+1}^2$. ②

$\because a_n>0,b_n>0$，

$\therefore a_{n+1}=b_nb_{n+1}$， ③

$a_n=b_{n-1}b_n$. ④

将③④代入①得：

$2b_n^2=b_{n-1}b_n+b_nb_{n+1}$，

$\therefore 2b_n=b_{n-1}+b_{n+1}$.

$\therefore \{b_n\}$ 是等差数列.

(2)由①得 $2b_1^2=a_1+a_2$，

$\therefore a_2=2b_1^2-a_1=3$.

又 $a_{n+1}=b_nb_{n+1}$，

$\therefore b_2=\dfrac{a_2}{b_1}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \{b_n\}$ 的公差 $d=b_2-b_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore b_n=b_1+(n-1)d$

$=\sqrt{2}+(n-1)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$.

$\therefore a_n=b_{n-1}b_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}n\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n+1)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

例 3 【解答】由条件 $S_9=S_{12}$ 可得

$9a_1+\dfrac{9\times 8}{2}d=12a_1+\dfrac{12\times 11}{2}d$，即 $d=-\dfrac{1}{10}a_1$.

由 $a_1<0$ 知 $d>0$，即数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

考虑常用方法，可找转折项或利用二次函数求解.

方法一：由 $\begin{cases}a_n=a_1+(n-1)d\leqslant 0,\\ a_{n+1}=a_1+nd\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}1-\dfrac{1}{10}(n-1)\geqslant 0,\\ 1-\dfrac{1}{10}n\leqslant 0\end{cases}$

解得 $10\leqslant n\leqslant 11$. $\therefore$ 当 n 为 10 或 11 时，S_n 取最小值，

$\therefore$ 该数列前 10 项或前 11 项的和最小.

方法二：$\because S_9=S_{12}$，

$\therefore a_{10}+a_{11}+a_{12}=3a_{11}=0$，

$\therefore a_{11}=0$.

又 $\because a_1<0$，$\therefore$ 公差 $d>0$，

从而前 10 项或前 11 项和最小.

方法三：$\because S_9=S_{12}$，

$\therefore S_n$ 的图象所在抛物线的对称轴为 $x=\dfrac{9+12}{2}=10.5$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_1<0$，$\therefore \{a_n\}$ 的前 10 项或前 11 项和最小.

方法四：由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，

结合 $d=-\frac{1}{10}a_1$ 得

$S_n=\left(-\frac{1}{20}a_1\right)\cdot n^2+\left(\frac{21}{20}a_1\right)\cdot n$

$=-\frac{a_1}{20}\left(n-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{441}{80}a_1(a_1<0)$,

由二次函数性质可知 $n=\frac{21}{2}=10.5$ 时,S_n 最小.

但 $n\in\mathbf{N}^*$,故 $n=10$ 或 11 时,S_n 取得最小值.

即该数列前 10 项或 11 项的和最小.

例 4 C 【解析】方法一:将 $S_m=30,S_{2m}=100$ 代入 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,得

$$\begin{cases}ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=30, & ①\\ 2ma_1+\frac{2m(2m-1)}{2}d=100. & ②\end{cases}$$

解得 $d=\frac{40}{m^2},a_1=\frac{10}{m}+\frac{20}{m^2}$,

$\therefore S_{3m}=3ma_1+\frac{3m(3m-1)}{2}d=210.$

方法二:由 $S_{3m}=3ma_1+\frac{3m(3m-1)}{2}d=3m\left[a_1+\frac{(3m-1)d}{2}\right]$知,

要求 S_{3m} 只需求$m\left[a_1+\frac{(3m-1)d}{2}\right]$,将方法一中②-①得 $ma_1+\frac{m(3m-1)}{2}d=70$,

$\therefore S_{3m}=210.$

方法三:由等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式知,S_n 是关于 n 的二次函数,即 $S_n=An^2+Bn(A、B$ 是常数).

将 $S_m=30,S_{2m}=100$ 代入,得

$$\begin{cases}Am^2+Bm=30,\\ A(2m)^2+B\cdot 2m=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{20}{m^2},\\ B=\frac{10}{m},\end{cases}$$

$\therefore S_{3m}=A\cdot(3m)^2+B\cdot 3m=210.$

方法四:根据等差数列性质知 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$也成等差数列,从而有 $2(S_{2m}-S_m)=S_m+(S_{3m}-S_{2m})$,

$\therefore S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=210.$

方法五:$\because S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,

$\therefore \frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}.$

$\therefore\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为 a_1,公差为$\frac{d}{2}$的等差数列.

$\therefore \frac{2S_{2m}}{2m}=\frac{S_m}{m}+\frac{S_{3m}}{3m}.$

$\therefore S_{3m}=210.$

方法六:令 $m=1$ 得 $S_1=30,S_2=100$,得 $a_1=30,a_1+a_2=100$,

$\therefore a_1=30,a_2=70.$

$\therefore a_3=70+(70-30)=110.$

$\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=210.$

第 25 讲 等比数列

例 1 【解答】(1)解法一:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q\neq0,a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{2}{q},a_4=a_3q=2q$,

$\therefore \frac{2}{q}+2q=\frac{20}{3}.$

解得 $q_1=\frac{1}{3},q_2=3.$

①当 $q=\frac{1}{3}$时,$a_1=18$,

$\therefore a_n=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{18}{3^{n-1}}=2\times3^{3-n}$;

②当 $q=3$ 时,$a_1=\frac{2}{9}$,

$\therefore a_n=\frac{2}{9}\times3^{n-1}=2\times3^{n-3}.$

综上所述,$a_n=2\times3^{3-n}$或 $a_n=2\times3^{n-3}$.

解法二:由 $a_3=2$,得 $a_2a_4=4$,又 $a_2+a_4=\frac{20}{3}$,

则 a_2,a_4 为方程 $x^2-\frac{20}{3}x+4=0$ 的两根,

解得$\begin{cases}a_2=\frac{2}{3},\\ a_4=6\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=6,\\ a_4=\frac{2}{3}.\end{cases}$

①当 $a_2=\frac{2}{3}$时,$q=3,a_n=a_3\cdot q^{n-3}=2\times3^{n-3}$;

②当 $a_2=6$ 时,$q=\frac{1}{3},a_n=2\times3^{3-n}$.

$\therefore a_n=2\times3^{n-3}$或 $a_n=2\times3^{3-n}$.

(2)解法一:设等比数列首项为 a_1,公比为 q,

若 $q=1$,则 $S_3+S_6\neq2S_9$,

故 $q\neq1$.

则 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q},S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q},S_9=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$,

由题知 $S_3+S_6=2S_9$,

$\therefore \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}.$

化简得 $2q^6-q^3-1=0$,解得 $q^3=1$(舍去)或 $q^3=-\frac{1}{2}$.

$\therefore q^3=-\frac{1}{2}$,即 $q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

解法二:令 $S_3=b_1,S_6-S_3=b_2,S_9-S_6=b_3$,

$\therefore S_3+S_6=S_3+S_3+b_2=2S_3+b_2$,

$2S_9=2(S_6+b_3)=2(S_3+b_2+b_3)$.

又 $S_3+S_6=2S_9$,$\therefore 2S_3+b_2=2(S_3+b_2+b_3)$,

即 $b_2+2b_3=0$,$\therefore q^3=\frac{b_3}{b_2}=-\frac{1}{2}$,$\therefore q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

例 2 【解答】(1)$a_2=\frac{3}{2},a_3=-\frac{5}{2},a_4=\frac{7}{4}$.

(2)由于 $b_n=a_{2n}-2,n\in\mathbf{N}^*$,

当 $n\geqslant2$ 时,

$b_n=a_{2n}-2=a_{(2n-1)+1}-2$

$=\frac{1}{2}a_{2n-1}+(2n-1)-2$

$=\frac{1}{2}[a_{2n-2}-2(2n-2)]+(2n-1)-2$

$=\frac{1}{2}[a_{2(n-1)}-2]=\frac{1}{2}b_{n-1}.$

又 $b_1=a_2-2=-\frac{1}{2}$，且易知 $b_n\neq 0$，

∴数列$\{b_n\}$为等比数列.

∴$b_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(3)∵$a_{2n}=b_n+2$，

∴$T_n=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

$=(b_1+b_2+\cdots+b_n+2n)$

$=-\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}+2n=\frac{1}{2^n}+2n-1$.

例 2 变式题 【解答】(1)由题意可得 $f'(x)=2x$.

所以曲线 $y=f(x)$在点$(x_n,f(x_n))$处的切线方程是

$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，

即 $y-(x_n^2-4)=2x_n(x-x_n)$.

令 $y=0$，得$-(x_n^2-4)=2x_n(x_{n+1}-x_n)$，

即 $x_n^2+4=2x_nx_{n+1}$. 显然 $x_n\neq 0$，

∴$x_{n+1}=\frac{x_n^2+4}{2x_n}$.

(2)由 $x_{n+1}=\frac{x_n^2+4}{2x_n}$，知 $x_{n+1}+2=\frac{x_n^2+4}{2x_n}+2=\frac{(x_n+2)^2}{2x_n}$，

同理 $x_{n+1}-2=\frac{(x_n-2)^2}{2x_n}$.

故 $a_{n+1}=\lg\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=2\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}=2a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$.

又 $a_1=\lg\frac{x_1+2}{x_1-2}=\lg 3$，

所以，数列$\{a_n\}$是首项为 $\lg 3$，公比为 2 的等比数列.

故 $a_n=2^{n-1}a_1=2^{n-1}\lg 3$.

即 $\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}=2^{n-1}\lg 3$.

从而$\frac{x_n+2}{x_n-2}=3^{2^{n-1}}$，

所以 $x_n=\frac{2(3^{2^{n-1}}+1)}{3^{2^{n-1}}-1}$.

例 3 (1)C (2)B **【解析】**(1)由 $a_5=\frac{1}{4}=a_2\cdot q^3=2\cdot q^3$，解得 $q=\frac{1}{2}$.

数列$\{a_na_{n+1}\}$仍是等比数列，其首项是 $a_1a_2=8$，公比为$\frac{1}{4}$.

所以，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{8\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})$.

(2)解法一：∵$a_7\cdot a_{12}=a_8\cdot a_{11}=a_9\cdot a_{10}=5$，

∴$a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=25$.

解法二：由已知得 $a_1q^6\cdot a_1q^{11}=a_1{}^2q^{17}=5$，

∴$a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=a_1q^7\cdot a_1q^8\cdot a_1q^9\cdot a_1q^{10}=a_1{}^4q^{34}=(a_1q^{17})^2=25$.

例 4 【解答】(1)由题意，得

$\begin{cases}a_{12}=a_{11}+d_1=1,\\a_{23}=a_{13}\cdot q=(a_{11}+2d_1)q=\frac{3}{4},\\\frac{a_{32}}{a_{12}}=q^2=\frac{1}{4},\\a_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,n),\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_{11}=\frac{1}{2},\\d_1=\frac{1}{2},\\q=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(2)$a_{nn}=a_{1n}q^{n-1}=[a_{11}+(n-1)d_1]q^{n-1}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

∴$S_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

$=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ①

$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$， ②

由①－②，得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

∴$S_n=2-(n+2)\frac{1}{2^n}$.

例 4 变式题 【解答】(1)由 $a_1=b_1,a_2=b_2$ 得$\begin{cases}a=b,\\a+b=ab,\end{cases}$

解得 $a=b=0$ 或 $a=b=2$，

∵$a,b\in\mathbf{N}^*$，∴$a=b=2$，从而 $a_n=2n,b_n=2^n$.

(2)由(1)得 $a_1=2,a_3=6$，∴$a_1,a_3,a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$构成以 2 为首项，3 为公比的等比数列，即 $a_{n_k}=2\cdot 3^{k+1}$.

又 $a_{n_k}=2n_k$，故 $2n_k=2\cdot 3^{k+1}$，∴$n_k=3^{k+1}$.

第 26 讲 数列求和

例 1 【解答】(1)令 $n=1$，则 $S_1=2a_1+1-3-2=a_1$，

∴$a_1=4$，

又 $S_n=2a_n+n^2-3n-2$， ①

则 $S_{n+1}=2a_{n+1}+(n+1)^2-3(n+1)-2$. ②

由②－①得，$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+2n-2$，

即 $a_{n+1}=2a_n-2n+2$，

∴$a_{n+1}-2(n+1)=2(a_n-2n)$，即$\frac{a_{n+1}-2(n+1)}{a_n-2n}=2$.

∴数列$\{a_n-2n\}$为等比数列.

(2)由(1)知 $a_n-2n=2^n$，∴$a_n=2^n+2n$，

∴$b_n=(2^n+2n)\cos n\pi=\begin{cases}2^n+2n,n\text{ 为偶数},\\-(2^n+2n),n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

$P_{2n}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n}$

$=(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=-\{(2+2\times1)+(2^3+2\times3)+\cdots+[2^{2n-1}+2(2n-1)]\}+[(2^2+2\times2)+(2^4+2\times4)+\cdots+(2^{2n}+2\times2n)]$

$=-[(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})+2(1+3+5+\cdots+2n-1)]+[(2^2+2^4+\cdots+2^{2n})+2(2+4+\cdots+2n)]$

$=-\left[\frac{2(1-4^n)}{1-4}+2\times\frac{n(1+2n-1)}{2}\right]+\left[\frac{2^2(1-4^n)}{1-4}+2\times\frac{n(2+2n)}{2}\right]$

$=\frac{2}{3}(4^n-1)+2n$.

例 2 【解答】(1)$a_n=1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\frac{4}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}$

$=1+\frac{1+2+3+4+\cdots+(n-1)}{n}=\frac{n+1}{2}$.

因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+2}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

(2)因为 $b_n=\frac{1}{a_{n+2}\cdot a_n}=\frac{4}{(n+1)(n+3)}=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$,

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $S_n=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{3}-\frac{4n+10}{(n+2)(n+3)}$.

例 2 变式题 【解答】(1)$\because S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$,$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$,

$\therefore S_n^2=(S_n-S_{n-1})\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$,

即 $2S_{n-1}S_n=S_{n-1}-S_n$, ①

由题意 $S_{n-1}\cdot S_n\neq 0$,

①式两边同除以 $S_{n-1}\cdot S_n$,得$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$,

$\therefore$数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是首项为$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$,公差为 2 的等差数列.

$\therefore \frac{1}{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$,$\therefore S_n=\frac{1}{2n-1}$.

(2)又 $b_n=\frac{S_n}{2n+1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

例 3 【解答】(1)因为 $F(x)+F(1-x)=\frac{3x-2}{2x-1}+\frac{3(1-x)-2}{2(1-x)-1}=3$,

所以设 $S=F\left(\frac{1}{2009}\right)+F\left(\frac{2}{2009}\right)+\cdots+F\left(\frac{2008}{2009}\right)$, ①

$S=F\left(\frac{2008}{2009}\right)+F\left(\frac{2007}{2009}\right)+\cdots+F\left(\frac{1}{2009}\right)$, ②

①+②得:

$2S=\left[F\left(\frac{1}{2009}\right)+F\left(\frac{2008}{2009}\right)\right]+\left[F\left(\frac{2}{2009}\right)+F\left(\frac{2007}{2009}\right)\right]+\cdots+\left[F\left(\frac{2008}{2009}\right)+F\left(\frac{1}{2009}\right)\right]$

$=3\times 2008=6024$,所以 $S=3012$.

(2)由 $a_{n+1}=F(a_n)$两边同减去 1,得

$a_{n+1}-1=\frac{3a_n-2}{2a_n-1}-1=\frac{a_n-1}{2a_n-1}$,

所以$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{2a_n-1}{a_n-1}=\frac{2(a_n-1)+1}{a_n-1}=2+\frac{1}{a_n-1}$,

所以$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=2$,$\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$是以 2 为公差,以$\frac{1}{a_1-1}=1$ 为首项的等差数列,

所以$\frac{1}{a_n-1}=1+(n-1)\times 2=2n-1\Rightarrow a_n=1+\frac{1}{2n-1}=\frac{2n}{2n-1}$.

例 4 【解答】(1)由题意知,$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\because b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n-2$,$b_1=3\log_{\frac{1}{4}}a_1-2=1$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_{n+1}-3\log_{\frac{1}{4}}a_n=3\log_{\frac{1}{4}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\log_{\frac{1}{4}}q=3$.

$\therefore$数列$\{b_n\}$是首项 $b_1=1$,公差 $d=3$ 的等差数列.

(2)由(1)知,$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$,$b_n=3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\therefore c_n=(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore S_n=1\times\frac{1}{4}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

于是$\frac{1}{4}S_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$,

两式相减得$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}+3\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}-(3n+2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

$\therefore S_n=\frac{2}{3}-\frac{12n+8}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 4 变式题 【解析】(1)$a=1$ 时,$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)$a\neq 1$ 时,$S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n}$, ①

$\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\cdots+\frac{n-1}{a^n}+\frac{n}{a^{n+1}}$, ②

由①-②得$\left(1-\frac{1}{a}\right)S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}$

$=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n+1}}$,$\therefore S_n=\frac{a(a^n-1)-n(a-1)}{a^n(a-1)^2}$.

综上所述,$S_n=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2} & (a=1),\\ \frac{a(a^n-1)-n(a-1)}{a^n(a-1)^2} & (a\neq 1).\end{cases}$

第五单元 不等式

第 27 讲 不等式的概念与性质

例 1 【解答】设购买 A 型汽车和 B 型汽车分别为 x 辆、y 辆,则

$\begin{cases}40x+90y\leqslant1000,\\x\geqslant5,\\y\geqslant6,\\x,y\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x+9y\leqslant100,\\x\geqslant5,\\y\geqslant6,\\x,y\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

例 1 变式题 $\begin{cases}\frac{4}{7}+\frac{4}{7k}<1,\\\frac{4}{7}+\frac{4}{7k}+\frac{4}{7k^2}\geqslant1\end{cases}$ **【解析】**敲击 2 次进入木板的部分为 $\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{k}<1$；敲击 3 次全部进入木板，则 $\frac{4}{7}+\frac{4}{7k}+\frac{4}{7k^2}\geqslant1$，

∴不等式组为 $\begin{cases}\frac{4}{7}+\frac{4}{7k}<1,\\\frac{4}{7}+\frac{4}{7k}+\frac{4}{7k^2}\geqslant1.\end{cases}$

例 2 【解答】(1)**解法一：**

$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[x^2+y^2-(x+y)^2]$

$=-2xy(x-y)$，

$\because x<y<0$，

$\therefore xy>0, x-y<0, \therefore -2xy(x-y)>0$，

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

解法二：$\because x<y<0$，

$\therefore x-y<0, x^2>y^2, x+y<0, xy>0$.

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)<0, (x^2-y^2)(x+y)<0$，

$\therefore 0<\frac{(x^2+y^2)(x-y)}{(x^2-y^2)(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+2xy}<1$，

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

(2)$\because a,b,c\in\mathbf{R}_+$，

$\therefore a^n, b^n, c^n>0$，

而 $\frac{a^n+b^n}{c^n}=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n$.

$\because a^2+b^2=c^2$，则 $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$，

$\therefore 0<\frac{a}{c}<1, 0<\frac{b}{c}<1$.

$\because n\in\mathbf{N}, n>2$，

$\therefore \left(\frac{a}{c}\right)^n<\left(\frac{a}{c}\right)^2, \left(\frac{b}{c}\right)^n<\left(\frac{b}{c}\right)^2$，

$\therefore \frac{a^n+b^n}{c^n}=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$，

$\therefore a^n+b^n<c^n$.

例 2 变式题 【解答】(1)$x^2+y^2+1-2(x+y-1)$

$=x^2-2x+1+y^2-2y+2$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+1>0$，

$\therefore x^2+y^2+1>2(x+y-1)$.

(2)由 $a-\frac{1}{a}=\frac{(a-1)(a+1)}{a}$.

当 $a=\pm1$ 时，$a=\frac{1}{a}$；

当 $-1<a<0$ 或 $a>1$ 时，$a>\frac{1}{a}$；

当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，$a<\frac{1}{a}$.

例 3 B **【解析】方法 1：**$a>b$ 推不出 $a-c>b-d$；但 $a-c>b-d\Rightarrow a>b+c-d>b$，所以"$a>b$"是"$a-c>b-d$"的必要而不充分条件. 故选 B.

方法 2：令 $a=2, b=1, c=3, d=-5$，则 $a-c=-1<b-d=1-(-5)=6$；由 $a-c>b-d$ 可得，$a>b+(c-d)$，因为 $c>d$，则 $c-d>0$，所以 $a>b$. 故"$a>b$"是"$a-c>b-d$"的必要而不充分条件. 选 B.

例 3 变式题 B **【解析】**由不等式的性质易知 A、C、D 不正确；对于 B：不等式 $a<b<0$ 同乘以 a 得，$a^2>ab$；不等式 $a<b<0$ 同乘以 b 得，$ab>b^2$，所以 $a^2>ab>b^2$. 选 B.

例 4 【解答】解法一：设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$（m、n 为待定系数），则 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$，

即 $4a-2b=(m+n)a+(n-m)b$，

于是得 $\begin{cases}m+n=4,\\n-m=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

又 $\because 1\leqslant f(-1)\leqslant2, 2\leqslant f(1)\leqslant4$，

$\therefore 5\leqslant3f(-1)+f(1)\leqslant10$，故 $5\leqslant f(-2)\leqslant10$.

解法二：

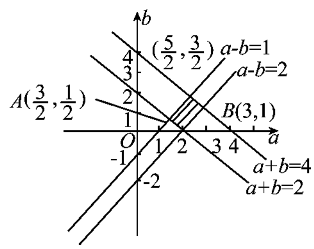
由 $\begin{cases}f(-1)=a-b,\\f(1)=a+b,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(-1)+f(1)],\\b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

$\therefore f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$.

又 $\because 1\leqslant f(-1)\leqslant2, 2\leqslant f(1)\leqslant4$，

$\therefore 5\leqslant3f(-1)+f(1)\leqslant10$，故 $5\leqslant f(-2)\leqslant10$.

解法三：由 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant2,\\2\leqslant a+b\leqslant4\end{cases}$ 确定的平面区域如图所示.



当 $f(-2)=4a-2b$ 过点 $A\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，

取得最小值 $4\times\frac{3}{2}-2\times\frac{1}{2}=5$；

当 $f(-2)=4a-2b$ 过点 $B(3,1)$ 时，

取得最大值 $4\times3-2\times1=10$.

$\therefore 5\leqslant f(-2)\leqslant10$.

例 5 【解答】证法一：$\because \frac{e}{a-c}-\frac{e}{b-d}=\frac{e(b-d-a+c)}{(a-c)(b-d)}$

$=\frac{e(b-a+c-d)}{(a-c)(b-d)}$，

$\because a>b>0, c<d<0$，

$\therefore b-a<0, c-d<0, \therefore b-a+c-d<0$，

又 $\because a>0, c<0, \therefore a-c>0$，

同理 $b-d>0, \therefore (a-c)(b-d)>0$.

$\because e<0, \therefore \frac{e(b-a+c-d)}{(a-c)(b-d)}>0$，即 $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

证法二：$\left.\begin{array}{r}c<d<0\Rightarrow -c>-d>0\\ a>b>0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow a-c>b-d>0\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-d}\\ e<0\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$.

第 28 讲　一元二次不等式的解法

例 1　【解答】(1)$\because \Delta=4^2-4\times 2\times 3<0$,

$\therefore$方程 $2x^2+4x+3=0$ 没有实数，

二次函数 $y=2x^2+4x+3$ 的图象开口向上，与 x 轴没有交点，$2x^2+4x+3>0$ 恒成立，

所以不等式 $2x^2+4x+3>0$ 的解集为 R.

(2)原不等式可化为 $3x^2+2x-8\leqslant 0$,

$\because \Delta=100>0$,

$\therefore$方程 $3x^2+2x-8=0$ 的两根为 $-2,\dfrac{4}{3}$,

结合二次函数 $y=3x^2+2x-8$ 的图象可知原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-2\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{3}\right\}$.

(3)原不等式可化为 $2x^2-3x-7\leqslant 0$.

$\because \Delta=(-3)^2-4\times 2\times(-7)=65>0$,

$\therefore$方程 $2x^2-3x-7=0$ 的两根分别为

$\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{65}}{4},\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{65}}{4}$,

$\therefore$结合二次函数 $y=2x^2-3x-7$ 知原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{65}}{4}\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{65}}{4}\right\}$.

例 2　【解答】(1)解法一：要求 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立.

当 $m=0$ 时，$f(x)=-1<0$，显然成立；

当 $m\neq 0$ 时，应有 $m<0,\Delta=m^2+4m<0$,

解得 $-4<m<0$.

综上，m 的取值范围是 $-4<m\leqslant 0$.

解法二：$f(x)<0$ 对于一切实数 x 恒成立$\Leftrightarrow mx^2-mx-1<0$ 恒成立.

①当 $m=0$ 时，$f(x)=-1<0$，显然成立；

②当 $m>0$ 时，$mx^2-mx-1<0$ 恒成立$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}>x^2-x$ 对于一切实数 x 恒成立，

$\because x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\geqslant -\dfrac{1}{4}$,

$\therefore$此时 $\dfrac{1}{m}>x^2-x$ 对于一切实数 x 不恒成立.

③当 $m<0$ 时，$mx^2-mx-1<0$ 恒成立$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}<x^2-x$ 对于一切实数 x 恒成立，

$\because x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\geqslant -\dfrac{1}{4}$,

$\therefore \dfrac{1}{m}<-\dfrac{1}{4}$，解得 $-4<m<0$.

综上可知，m 的取值范围是 $-4<m\leqslant 0$.

(2)将 $f(x)<-m+5$ 变换成关于 m 的不等式

$m(x^2-x+1)-6<0$,

则命题等价于 $m\in[-2,2]$时，

$g(m)=m(x^2-x+1)-6<0$ 恒成立.

$\because x^2-x+1>0$, $\therefore g(m)$在$[-2,2]$上单调递增，

$\therefore$只要 $g(2)=2(x^2-x+1)-6<0$,

即 $x^2-x-2<0$,

$\therefore -1<x<2$.

例 2 变式题　$m\leqslant -5$　**【解析】**解法一：设 $f(x)=x^2+mx+4$，则由二次函数的图象及一元二次方程 $x^2+mx+4=0$ 的根的分布知，

$\begin{cases}f(1)\leqslant 0,\\ f(2)\leqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}m+5\leqslant 0,\\ 2m+8\leqslant 0.\end{cases}$

解得 $m\leqslant -5$.

解法二：当 $x\in(1,2)$时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立

$\Leftrightarrow m<\dfrac{-x^2-4}{x}$，当 $x\in(1,2)$时恒成立

$\Leftrightarrow m<-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$，当 $x\in(1,2)$时恒成立.

令 $g(x)=-\left(x+\dfrac{4}{x}\right),x\in(1,2)$,

则 $g(x)_{\min}=g(1)=-5$,

$\therefore m\leqslant -5$.

例 3　【解答】原不等式变形为$(ax-1)(x-1)<0$,

又$\because a>0$,

$\therefore \left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

$\therefore$当 $a>1$ 时，解集为$\dfrac{1}{a}<x<1$；

当 $a=1$ 时，解集为$\varnothing$；

当 $0<a<1$ 时，解为 $1<x<\dfrac{1}{a}$.

综上，当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,1<x<\dfrac{1}{a}\right\}$；

当 $a=1$ 时，不等式的解集为$\varnothing$；

当 $a>1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{a}<x<1\right\}$.

例 3 变式题　【解答】(1)原不等式等价于$(ax-1)(x+1)>0$.

①当 $a>0$ 时，$(ax-1)(x+1)>0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x+1)>0$，且 $\dfrac{1}{a}>-1$,

$\therefore x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{a}$.

②当 $a<0$ 时，$(ax-1)(x+1)>0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x+1)<0$.

(i)当$\dfrac{1}{a}>-1$，即 $a<-1$ 时，$-1<x<\dfrac{1}{a}$；

(ii)当$\dfrac{1}{a}=-1$，即 $a=-1$ 时，原不等式无解；

(iii)当$\dfrac{1}{a}<-1$，即$-1<a<0$ 时，$\dfrac{1}{a}<x<-1$.

③当 $a=0$ 时，$(ax-1)(x+1)>0\Leftrightarrow x+1<0$,

$\therefore x<-1$.

综上可知，当 $a>0$ 时，原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x<-1\text{ 或 }x>\dfrac{1}{a}\right\}$；

当 $a<-1$ 时,原不等式的解集为 $\left\{x \left| -1<x<\frac{1}{a}\right.\right\}$;

当 $-1<a<0$ 时,原不等式的解集为 $\left\{x \left| \frac{1}{a}<x<-1\right.\right\}$;

当 $a=-1$ 时,原不等式无解;

当 $a=0$ 时,原不等式的解集为 $\{x|x<-1\}$.

(2)当 $x=-a$ 时,不等式 $\frac{ax-1}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{-a^2-1}{-a+1}>0$,

即 $\frac{a^2+1}{a-1}>0$.

$\because a^2+1>0$,

$\therefore a-1>0$,即 $a>1$.

例 4 【解答】(1)由题意得

$(100-x)\cdot 3000\cdot(1+2x\%)\geqslant 100\times 3000$,

即 $x^2-50x\leqslant 0$,解得 $0\leqslant x\leqslant 50$,

又 $\because x>0$,$\therefore 0<x\leqslant 50$.

(2)设这 100 万农民的人均年收入为 y 元,

则 $y=\frac{(100-x)\cdot 3000\cdot(1+2x\%)+3000ax}{100}$

$=\frac{-60x^2+3000(a+1)x+300000}{100}$

$=-\frac{3}{5}[x-25(a+1)]^2+3000+375(a+1)^2(0<x\leqslant 50)$.

(i)当 $0<25(a+1)\leqslant 50$,即 $0<a\leqslant 1$,$x=25(a+1)$ 时,y 最大;

(ii)当 $25(a+1)>50$,即 $a>1$ 时,函数 y 在 $(0,50]$ 单调递增,$\therefore$ 当 $x=50$ 时,y 取最大值.

答:在 $0<a\leqslant 1$ 时,安排 $25(a+1)$ 万人进入企业工作;在 $a>1$ 时,安排 50 万人进入企业工作,才能使这 100 万人的人均年收入最大.

第 29 讲 均值不等式

例 1 【解答】(1)方法一:由已知条件 $\lg x+\lg y=1$,可得 $xy=10$.

则 $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{2y+5x}{10}\geqslant\frac{2\sqrt{10xy}}{10}=2$.

$\therefore\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{y}\right)_{\min}=2$.

当且仅当 $2y=5x$,即 $x=2$,$y=5$ 时等号成立.

方法二:由 $\lg x+\lg y=1$,可得 $y=\frac{10}{x}$.

$\because \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\geqslant 2$,

$\therefore\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{y}\right)_{\min}=2$.

当且仅当 $\frac{2}{x}=\frac{5}{y}$,即 $x=2$,$y=5$ 时等号成立.

(2)$\because x>0$,

$\therefore f(x)=\frac{12}{x}+3x\geqslant 2\sqrt{\frac{12}{x}\cdot 3x}=12$,

等号成立的条件是 $\frac{12}{x}=3x$,即 $x=2$.

$\therefore f(x)$ 的最小值是 12.

(3)$\because x<3$,

$\therefore x-3<0$,

$\therefore 3-x>0$,

$\therefore f(x)=\frac{4}{x-3}+x$

$=\frac{4}{x-3}+(x-3)+3$

$=-\left[\frac{4}{3-x}+(3-x)\right]+3$

$\leqslant -2\sqrt{\frac{4}{3-x}\cdot(3-x)}+3=-1$,

当且仅当 $\frac{4}{3-x}=(3-x)$,即 $x=1$ 时,等号成立.

故 $f(x)$ 的最大值为 -1.

(4)令 $\sin^2 x+1=t$,则 $t\in[1,2]$,

故 $g(t)=t+\frac{5}{t}$.

任取 $t_1,t_2\in[1,2]$,且 $t_1<t_2$,则

$g(t_1)-g(t_2)=(t_1-t_2)-\left(\frac{5}{t_2}-\frac{5}{t_1}\right)$

$=(t_1-t_2)-\frac{5(t_1-t_2)}{t_1t_2}$

$=(t_1-t_2)\left(1-\frac{5}{t_1t_2}\right)$

$=(t_1-t_2)\cdot\frac{t_1t_2-5}{t_1t_2}$.

$\because t_1,t_2\in[1,2]$,$t_1<t_2$,

$\therefore t_1-t_2<0$,$t_1t_2-5<0$,

故 $g(t_1)-g(t_2)>0$,$\therefore g(t_1)>g(t_2)$,

$\therefore g(t)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数,

$\therefore g(t)_{\min}=g(2)=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$,

等号成立的条件是 $\sin^2 x+1=2$,即 $\sin x=\pm 1$.

$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$f(x)$ 有最小值 $\frac{9}{2}$.

例 1 变式题 B 【解析】因为 $3^a\cdot 3^b=3$,所以 $a+b=1$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ 即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时"="成立,故选择 B.

例 2 【解答】要证 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant a+\frac{1}{a}-2$,

只要证 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+2\geqslant a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}$.

$\because a>0$,故只要证 $\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+2\right)^2\geqslant\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}\right)^2$,

即 $a^2+\frac{1}{a^2}+4\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+4\geqslant a^2+2+\frac{1}{a^2}+2\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+2$,

从而只要证明 $2\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$,

只要证 $4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\geqslant 2\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)$,

即 $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$,而该不等式显然成立,

故原不等式成立.

例 2 变式题 【解答】∵x、y、z 是互不相等的正数,且 $x+y+z=1$,

∴$\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x}>\frac{2\sqrt{yz}}{x}$, ①

$\frac{1}{z}-1=\frac{x+y}{z}>\frac{2\sqrt{xy}}{z}$, ②

$\frac{1}{y}-1=\frac{x+z}{y}>\frac{2\sqrt{xz}}{y}$. ③

又∵$0<x<1$,∴$\frac{1}{x}>1$,同理 $\frac{1}{z}>1$,$\frac{1}{y}>1$.

将①②③三式相乘,得

$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)>8$.

例 3 【解答】(1)设该厂应隔 $x(x\in \mathbf{N}_+)$ 天购买一次饲料,平均每天支付的总费用为 y_1.

∵饲料的保管与其他费用每天比前一天少

$200\times 0.03=6$(元),

∴x 天饲料的保管与其他费用共是

$6(x-1)+6(x-2)+\cdots+6=3x^2-3x$(元).

从而有 $y_1=\frac{1}{x}(3x^2-3x+300)+200\times 1.8$

$=\frac{300}{x}+3x+357\geqslant 417$.

当且仅当 $\frac{300}{x}=3x$,即 $x=10$ 时,y_1 有最小值.

即每隔 10 天购买一次饲料才能使平均每天支付的总费用最少.

(2)若厂家利用此优惠条件,则至少 25 天购买一次饲料,设该厂利用此优惠条件,每隔 x 天($x\geqslant 25$)购买一次饲料,平均每天支付的总费用为 y_2,

则 $y_2=\frac{1}{x}(3x^2-3x+300)+200\times 1.8\times 0.85$

$=\frac{300}{x}+3x+303(x\geqslant 25)$.

∵$y_2'=-\frac{300}{x^2}+3$,

∴当 $x\geqslant 25$ 时,$y_2'>0$,即函数 y_2 在$[25,+\infty)$上是增函数,

∴当 $x=25$ 时,y_2 取得最小值为 390.

而 $390<417$,

∴该厂可以考虑利用此优惠条件.

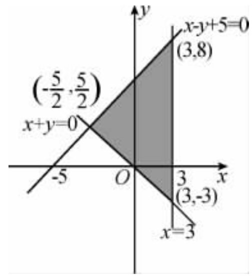
第 30 讲 简单的线性规划问题

例 1 【解答】(1)不等式 $x-y+5\geqslant 0$ 表示直线 $x-y+5=0$ 上及右下方的点的集合.

$x+y\geqslant 0$ 表示直线 $x+y=0$ 上及右上方的点的集合,

$x\leqslant 3$ 表示直线 $x=3$ 上及左方的点的集合.

所以不等式组 $\begin{cases}x-y+5\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 3\end{cases}$ 表示的平面区域如图所示.



结合图中可行域得 $x\in\left[-\frac{5}{2},3\right]$,$y\in[-3,8]$.

(2)由图形及不等式组知 $\begin{cases}-x\leqslant y\leqslant x+5,\\ -2\leqslant x\leqslant 3 \text{ 且 } x\in \mathbf{Z},\end{cases}$

当 $x=3$ 时,$-3\leqslant y\leqslant 8$,有 12 个整点;

当 $x=2$ 时,$-2\leqslant y\leqslant 7$,有 10 个整点;

当 $x=1$ 时,$-1\leqslant y\leqslant 6$,有 8 个整点;

当 $x=0$ 时,$0\leqslant y\leqslant 5$,有 6 个整点;

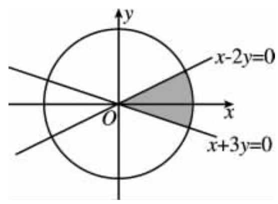
当 $x=-1$ 时,$1\leqslant y\leqslant 4$,有 4 个整点;

当 $x=-2$ 时,$2\leqslant y\leqslant 3$,有 2 个整点;

∴平面区域内的整点共有

$2+4+6+8+10+12=42$(个).

例 1 变式题 B 【解析】如图所示,图中阴影部分所在圆心角所对弧长即为所求.



易知图中两直线的斜率分别是 $\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{3}$,

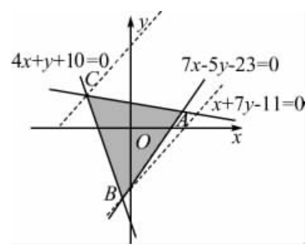
所以圆心角 α 即为两直线的所成夹角,

所以 $\tan\alpha=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=1$,

所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,而圆的半径是 2,所以弧长是 $\frac{\pi}{2}$,故选 B.

例 2 【解答】原不等式组表示的平面区域如图所示,其中 $A(4,1)$,$B(-1,-6)$,$C(-3,2)$.

(1)设 $z=4x-3y$,则 $y=\frac{4}{3}x-\frac{z}{3}$,作一组斜率为 $\frac{4}{3}$ 的平行线,由图可知,当它经过 C 点时,z 值最小,当它经过 B 点时,z 值最大.



$z_{\min}=4\times(-3)-3\times 2=-18$,

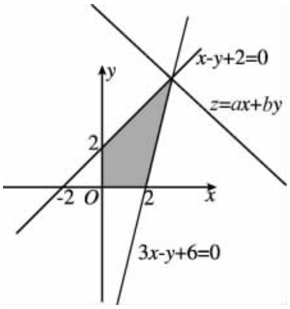
$z_{\max}=4\times(-1)-3\times(-6)=14$.

(2)设 $u=x^2+y^2$,则 u 就是点(x,y)与原点距离的平方,由图可知,B 点到原点的距离最大,而当(x,y)在原点时,距离为 0.

∴$u_{\max}=(-1)^2+(-6)^2=37$,$u_{\min}=0$.

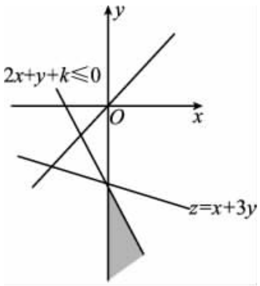
例 2 变式题 A 【解析】不等式表示的平面区域如图所示阴影部分,当直线 $ax+by=z(a>0,b>0)$过直线 $x-y+2$

$=0$ 与直线 $3x-y-6=0$ 的交点 $(4,6)$ 时，目标函数 $z=ax+by(a>0,b>0)$ 取得最大值 12，即 $4a+6b=12$，即 $2a+3b=6$，而 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\frac{2a+3b}{6}=\frac{13}{6}+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{13}{6}+2=\frac{25}{6}$，故选 A.



例 3 -6 **【解析】**作出可行域（如图所示），可得直线 $y=x$ 与直线 $2x+y+k=0$ 的交点使目标函数 $z=x+3y$ 取得最大值，

由 $\begin{cases}y=x,\\2x+y+k=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{k}{3},\\y=-\frac{k}{3}.\end{cases}$



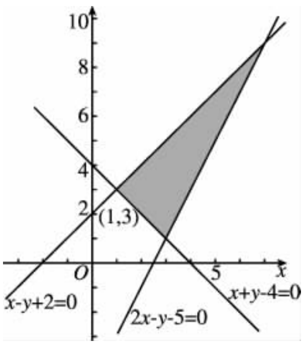
所以代入 $z=x+3y$ 得，

$-\frac{k}{3}+3\times\left(-\frac{k}{3}\right)=8$，

解得 $k=-6$.

例 3 变式题 $(1,+\infty)$ **【解析】**

$(1,3)$ 是直线 $x-y+2=0$ 与直线 $x+y-4=0$ 的交点，作出线性约束条件所表示的平面区域（如图所示），显然只有目标函数的斜率 a 比直线 $x-y+2=0$ 的斜率大时，目标函数在 $(1,3)$ 点才取得最大值，即 $a>1$.



例 4 【解答】设第一化工厂每天处理工业废水 x 万立方米，需满足 $\begin{cases}\frac{2-x}{500}\leqslant 0.2\%,\\0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

设第二化工厂每天处理工业废水 y 万立方米，需满足

$\begin{cases}\frac{0.8(2-x)+(1.4-y)}{700}\leqslant 0.2\%,\\0\leqslant y\leqslant 1.4.\end{cases}$

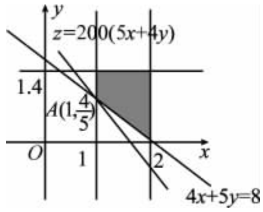
两个化工厂每天处理工业废水总的费用为 $1000x+800y$ 元. 问题即为在约束条件

$\begin{cases}\frac{2-x}{500}\leqslant 0.2\%,\\\frac{0.8(2-x)+(1.4-y)}{700}\leqslant 0.2\%\\0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 1.4\end{cases}$ 下

求目标函数 $z=200(5x+4y)$ 的最小值.

线性约束条件可化为 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\4x+5y\geqslant 8,\\0\leqslant x\leqslant 2,\\0\leqslant y\leqslant 1.4,\end{cases}$

作出其表示的平面区域（如图所示），可知当目标函数过图中点 $A\left(1,\frac{4}{5}\right)$ 时，目标函数取最小值.



即第一化工厂每天处理工业废水 1 万立方米，第二化工厂每天处理工业废水 0.8 万立方米，才能使这两个工厂总的工业废水处理费用最小.

第 31 讲　不等式的综合应用

例 1 【解答】(1) $f'(x)=\frac{(2x-a)'(x^2+2)-(2x-a)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-ax-2)}{(x^2+2)^2}$.

∵函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数，

∴ $f'(x)\geqslant 0$ 在区间 $[-1,1]$ 上恒成立，

即有 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 在区间 $[-1,1]$ 上恒成立.

构造函数 $g(x)=x^2-ax-2$，

∴满足题意的充要条件是 $\begin{cases}g(1)\leqslant 0,\\g(-1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-a-2\leqslant 0,\\1+a-2\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$，

∴所求的集合 $A=[-1,1]$.

(2) 由题意知 $\frac{2x-a}{x^2+2}=\frac{1}{x}$，得 $x^2-ax-2=0$.

∵ $\Delta=a^2+8>0$，∴方程恒有两个不等的实根为 x_1、x_2，由根与系数的关系有：

$\begin{cases}x_1+x_2=a,\\x_1x_2=-2\end{cases}\Rightarrow|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$.

∵ $a\in A$，即 $a\in[-1,1]$，∴ $|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$.

要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意的 $t\in[-1,1]$ 恒成立. 构造函数 $\varphi(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)\geqslant 0$ 对任意的 $t\in[-1,1]$ 恒成立的充要条件是

$\begin{cases}\varphi(1)\geqslant 0,\\\varphi(-1)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+m^2-2\geqslant 0,\\-m+m^2-2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

故存在实数 m 满足题意且 $\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$ 为所求.

例2 【解答】设 AN 的长为 x 米($x>2$),

$\because \frac{DN}{AN}=\frac{DC}{AM}$,$\therefore AM=\frac{3x}{x-2}$,

$\therefore S_{\text{矩形}AMPN}=AN\cdot AM=\frac{3x^2}{x-2}$.

(1)由 $S_{\text{矩形}AMPN}>32$ 得 $\frac{3x^2}{x-2}>32$,

$\because x>2$,$\therefore 3x^2-32x+64>0$,即$(3x-8)(x-8)>0$,

$\therefore 2<x<\frac{8}{3}$或 $x>8$,

即 AN 长的取值范围是$\left(2,\frac{8}{3}\right)\cup(8,+\infty)$.

(2)令 $y=\frac{3x^2}{x-2}$,则 $y'=\frac{6x(x-2)-3x^2}{(x-2)^2}=\frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}$.

$\because$当 $x\in[3,4)$,$y'<0$,

$\therefore$函数 $y=\frac{3x^2}{x-2}$在$[3,4)$上单调递减,

$\therefore$当 $x=3$ 时,$y=\frac{3x^2}{x-2}$取得最大值,

即$(S_{\text{矩形}AMPN})_{\max}=27$(平方米).

此时 $AN=3$ 米,$AM=9$ 米.

例3 【解答】由题意可知该直线存在斜率,设方程为 $y-1=k(x+2)(k>0)$,由方程知,直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{1+2k}{k}$,在 y 轴上的截距为 $1+2k$,得 $A\left(-\frac{1+2k}{k},0\right)$,$B(0,1+2k)$.

依题意得$\begin{cases}-\frac{1+2k}{k}<0,\\ 1+2k>0,\end{cases}$解得 $k>0$.

$\because S=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|$

$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1+2k}{k}\right|\cdot|1+2k|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2k)^2}{k}$

$=\frac{1}{2}\left(4k+\frac{1}{k}+4\right)\geqslant\frac{1}{2}(2\times2+4)=4$.

“=”成立的条件是 $k>0$ 且 $4k=\frac{1}{k}$,即 $k=\frac{1}{2}$,

$\therefore S_{\min}=4$,此时 $l:x-2y+4=0$.

例3变式题 【解答】(1)解法一:显然直线斜率存在.

设直线 l 的方程为:$y-1=k(x-2)(k<0)$,

令 $y=0$,得点 $A\left(2-\frac{1}{k},0\right)$;令 $x=0$,得点 $B(0,1-2k)$.

$\therefore |PA|\cdot|PB|=\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}+1\right)(4+4k^2)}=\sqrt{8+4\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)}$

$\geqslant4$,当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$,即 $k=-1$ 时取等号,

$\therefore$所求直线 l 的方程为 $y-1=-1(x-2)$,即 $x+y-3=0$.

解法二:设 $A(a,0)$,$B(0,b)(a>0,b>0)$,则 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,由于 l过点 P,

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$,$\overrightarrow{PA}=(a-2,-1)$,$\overrightarrow{PB}=(-2,b-1)$.

$\because \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\cos180°$,

$\therefore |\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|=-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=-[(a-2)\times(-2)+(-1)\times(b-1)]$

$=2a+b-5$

$=(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)-5$

$=\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}$

$=2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$

$\geqslant4\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4$,

此时 $a=b=3$,$\therefore l$ 的方程为 $x+y-3=0$.

(2)解法一:设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$,

$\because P\in l$,$\therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$,

$\therefore ab=2b+a\geqslant2\sqrt{2ab}$,

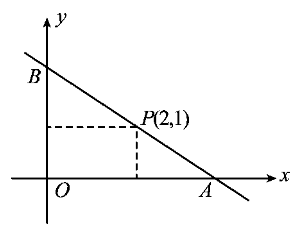
$\therefore ab\geqslant8$.

由题设知$|OA|\cdot|OB|=ab\geqslant8$,当且仅当 $a=2b$,

即 $a=4$,$b=2$ 时取等号.

所以所求直线 l 的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$,即 $x+2y-4=0$.

解法二:如图所示,设$\angle OAB=\alpha$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,



则$|OA|=2+\frac{1}{\tan\alpha}$,$|OB|=1+2\tan\alpha$.

则$|OA|\cdot|OB|=4+\frac{1}{\tan\alpha}+4\tan\alpha$

$\geqslant4+2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha}\cdot4\tan\alpha}=8$,

当且仅当$\frac{1}{\tan\alpha}=4\tan\alpha$,即 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$时等号成立,

则 l 的斜率 $k=-\frac{1}{2}$.

所以 l 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$,即 $x+2y-4=0$.

例4 【解答】(1)设污水处理池的宽为 x 米,则长为$\frac{162}{x}$米,

则总造价 $f(x)=400\times\left(2x+\frac{2\times162}{x}\right)+248\times2x+80\times162$

$=1296x+\frac{1296\times100}{x}+12960$

$=1296\left(x+\frac{100}{x}\right)+12960$

$\geqslant1296\times2\sqrt{x\cdot\frac{100}{x}}+12960=38880$(元),

当且仅当 $x=\frac{100}{x}(x>0)$,

即 $x=10$ 时取等号.

∴当长为 16.2 米,宽为 10 米时,总造价最低,最低总造价为 38880 元.

(2)由限制条件知$\begin{cases}0<x\leqslant 16,\\ 0<\dfrac{162}{x}\leqslant 16,\end{cases}$

∴$10\dfrac{1}{8}\leqslant x\leqslant 16$.

设 $g(x)=x+\dfrac{100}{x}\left(10\dfrac{1}{8}\leqslant x\leqslant 16\right)$.

∵$g(x)$在$\left[10\dfrac{1}{8},16\right]$上是增函数,

∴当 $x=10\dfrac{1}{8}$时$\left(\text{此时}\dfrac{162}{x}=16\right)$,$g(x)$有最小值,

即 $f(x)$有最小值.

$1296\times\left(10\dfrac{1}{8}+\dfrac{800}{81}\right)+12960=38882$(元).

∴当长为 16 米,宽为 $10\dfrac{1}{8}$米时,总造价最低,最低总造价为 38882 元.

例 4 变式题 【解答】(1)设矩形的另一边长为 a m,

则 $y=45x+180(x-2)+180\cdot 2a=225x+360a-360$,

由已知 $xa=360$,得 $a=\dfrac{360}{x}$,

所以 $y=225x+\dfrac{360^2}{x}-360(x>0)$.

(2)∵$x>0$,∴$225x+\dfrac{360^2}{x}\geqslant 2\sqrt{225\times 360^2}=10800$,

∴$y=225x+\dfrac{360^2}{x}-360\geqslant 10440$,

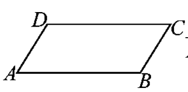
当且仅当 $225x=\dfrac{360^2}{x}$时,等号成立.

即当 $x=24$ m 时,修建围墙的总费用最小,最小总费用是 10440 元.

第六单元　平面向量

第 32 讲　向量的线性运算

例 1 【解答】(1)不正确,零向量方向任意;(2)不正确,只能说明模相等,还有方向;(3)不正确,单位向量的模为 1,方向很多;(4)不正确,有向线段是向量的一种表示形式;(5)正确;(6)正确,向量相等有传递性;(7)不正确,因若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则对不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 也有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}/\!/\boldsymbol{c}$;(8)不正确,如图



$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}\neq\overrightarrow{DA}$;(9)不正确,当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,且方向相反时,即使$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,也不能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

例 2 A 【解析】∵$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$,∴$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FC}$,得$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$,或$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$,故选 A.

例 2 变式题 B 【解析】因为$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$,所以点 P 为线段 AC 的中点,所以应该选 B.

例 3 【解答】(1)证明:∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

$=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$.

∴$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BD}$共线,

又∵它们有公共点 B,

∴A、B、D 三点共线.

(2)∵$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线,

∴存在实数 λ,使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,

即 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda k\boldsymbol{b}$.

∴$(k-\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda k-1)\boldsymbol{b}$.

∵$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个非零向量,

∴$k-\lambda=\lambda k-1=0$,∴$k^2-1=0$.

∴$k=\pm 1$.

例 3 变式题 【解答】设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=t\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

∴$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=t\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

要使 A、B、C 三点共线,

只需$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

即$-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}=\lambda t\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$,

∴有$\begin{cases}-\dfrac{2}{3}=-\lambda,\\ \dfrac{1}{3}=\lambda t,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}\lambda=\dfrac{2}{3},\\ t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

∴当 $t=\dfrac{1}{2}$时,三向量终点在同一直线上.

例 4 B 【解析】由向量加法的平行四边形法则,知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 可构成菱形的两条相邻边,且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 起点处的对角线长等于菱形的边长,故选择 B.

例 4 变式题 【解答】充分性,由$\overrightarrow{PC}=m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}$,$m+n=1$,得

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{PA}+n(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})$

$=(m+n)\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{AB}$,

∴$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AB}$.

∴A、B、C 三点共线.

必要性:由 A、B、C 三点共线知,存在常数 λ,使得$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

即$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}=\lambda(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})$,

$\overrightarrow{PC}=(\lambda-1)\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{PB}=(1-\lambda)\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PB}$,

取 $m=1-\lambda,n=\lambda,m+n=1$,

$\overrightarrow{PC}=m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}$.

第 33 讲　平面向量基本定理及向量坐标运算

例 1 【解答】作 $DF\perp AB$,交 AB 延长线于 F,设 $AB=AC=1\Rightarrow BC=DE=\sqrt{2}$,∵$\angle DEB=60°$,∴$BD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

由$\angle DBF=45°$,解得 $DF=BF=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

故 $x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

例1变式题 【解答】证明:设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,

则$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ})+\overrightarrow{AC}\right]$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AP}$,

由题设知$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AP}$,$\therefore\frac{7}{8}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{2}{7}\boldsymbol{a}+\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$.

由于$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是平面ABC的基向量,所以$\overrightarrow{AP}$是唯一的一个向量,即$\triangle ABC$所在平面内只有唯一的一点P使得S与P重合.

例2 C 【解析】$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,1+x^2)$,由$1+x^2\neq0$及向量的性质可知C正确.

例2变式题 C 【解析】$\because\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,2)$,

$\therefore\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(2+\lambda,1+2\lambda)$,

$\therefore|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2}$

$=\sqrt{5\left(\lambda+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$,

故当$\lambda=-\frac{4}{5}$时,$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$取得最小值$\frac{3\sqrt{5}}{5}$,选C.

例3 D 【解析】方法一:因为$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,x)$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,x+1)$,$4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}=(6,4x-2)$,由于$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$平行,得$6(x+1)-3(4x-2)=0$,解得$x=2$.

方法二:因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$平行,则存在实数$\lambda$,使$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(4\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$,即$(2\lambda+1)\boldsymbol{a}=(4\lambda-1)\boldsymbol{b}$,根据向量共线的条件知,向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线,故$x=2$.

例3变式题 【解答】方法一:设$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OB}=t(4,4)=(4t,4t)$,则

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(4t,4t)-(4,0)=(4t-4,4t)$.

$\overrightarrow{AC}=(2,6)-(4,0)=(-2,6)$.

由$\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AC}$共线的充要条件知$(4t-4)\times6-4t\times(-2)=0$,

解得$t=\frac{3}{4}$.

$\therefore\overrightarrow{OP}=(4t,4t)=(3,3)$.$\therefore P$点坐标为$(3,3)$.

方法二:设$P(x,y)$,则$\overrightarrow{OP}=(x,y)$,$\overrightarrow{OB}=(4,4)$.

$\because\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OB}$共线,$\therefore4x-4y=0$. ①

又$\overrightarrow{CP}=(x-2,y-6)$,$\overrightarrow{CA}=(2,-6)$,

且向量$\overrightarrow{CP}$、$\overrightarrow{CA}$共线.

$\therefore-6(x-2)+2(6-y)=0$. ②

解①②组成的方程组,得$x=3$,$y=3$,

$\therefore$点P的坐标为$(3,3)$.

例4 【解答】(1)因为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以$2\sin\theta=\cos\theta-2\sin\theta$,

于是$4\sin\theta=\cos\theta$,故$\tan\theta=\frac{1}{4}$.

(2)由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$知,$\sin^2\theta+(\cos\theta-2\sin\theta)^2=5$,

所以$1-2\sin2\theta+4\sin^2\theta=5$.

从而$-2\sin2\theta+2(1-\cos2\theta)=4$,即$\sin2\theta+\cos2\theta=-1$,

于是$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又由$0<\theta<\pi$知,$\frac{\pi}{4}<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{4}$,

所以$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$,或$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$.

因此$\theta=\frac{\pi}{2}$,或$\theta=\frac{3\pi}{4}$.

例4变式题 【解答】(1)$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1+3t,2+3t)$,若$P$在$x$轴上,只需$2+3t=0$,$\therefore t=-\frac{2}{3}$;若$P$在$y$轴上,只需$1+3t=0$,$\therefore t=-\frac{1}{3}$;若$P$在第二象限,只需$\begin{cases}1+3t<0,\\2+3t>0,\end{cases}$

$\therefore-\frac{2}{3}<t<-\frac{1}{3}$.

(2)$\because\overrightarrow{OA}=(1,2)$,$\overrightarrow{PB}=(3-3t,3-3t)$,若$OABP$为平行四边形,

则$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PB}$,

由于$\begin{cases}3-3t=1,\\3-3t=2\end{cases}$无解,故四边形$OABP$不能构成平行四边形.

第34讲 平面向量的数量积

例1 【解答】(1)错,应为零向量;(2)对;(3)错,数量积运算不满足“消去律”;(4)错,当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$垂直时也成立;(5)错,数量积不满足结合律;(6)对.

例1变式题 A 【解析】假设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,$|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle|=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\cos(90°\pm\theta)|=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\sin\theta$,即为以$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积,故选A.

例2 (1)3 (2)B 【解析】(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

(2)由已知$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4+4\times2\times1\times\cos60°+4=12$.$\therefore|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.

例2变式题 (1)A (2)D 【解析】(1)由已知$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$知,$P$为$\triangle ABC$的重心,根据向量的加法,$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PM}=2|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{PM}|\cos0°=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{4}{9}$.

(2)$\boldsymbol{F}_3^2=\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2-2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2\cos(180°-60°)=28$,

所以$|\boldsymbol{F}_3|=2\sqrt{7}$,选D.

例3 C 【解析】因为由条件得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+\boldsymbol{a}^2=3$,设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$夹角为$\alpha$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\alpha=1\times6\times\cos\alpha$,所以$\cos\alpha=\frac{1}{2}$,所以$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

例3变式题 B 【解析】由关于x的方程$x^2+|\boldsymbol{a}|x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$有实根,得$|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant0$,而$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

$\therefore\cos\theta\leqslant\frac{\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2}{\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{1}{2}$,$\therefore\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

例4 【解答】(1)证明:$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$,

$\therefore\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2)$\because\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$,$\therefore\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$,

$\therefore[\boldsymbol{a}+(t^2-3)\boldsymbol{b}]\cdot(-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})$

$=-ka^2+[t-k(t^2-3)]\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t(t^2-3)\boldsymbol{b}^2=0$.

$\because |\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1,\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

$\therefore -k\times4+t(t^2-3)=0$,即 $k=\frac{1}{4}(t^3-3t)(t\neq0)$.

(3)由(2)和 $f(t)=\frac{1}{4}(t^3-3t)$得

$f'(t)=\frac{1}{4}(3t^2-3)$,令 $f'(t)>0$ 得 $t>1$ 或 $t<-1$,

令 $f'(t)<0$ 得 $-1<t<1$ 且 $t\neq0$.

$\therefore$函数 $k=f(t)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$和$(-\infty,-1)$.

单调递减区间为$(-1,0)$和$(0,1)$.

例 4 变式题 1 C 【解析】由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$知,$O$ 为$\triangle ABC$ 的外心;由$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\boldsymbol{0}$ 知,N 为$\triangle ABC$ 的重心;$\because \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$,$\therefore(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{PB}=0$,$\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,$\therefore\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{PB}$,$\therefore BP\perp AC$,

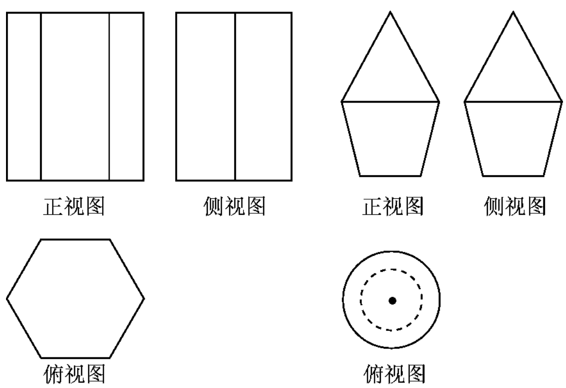
同理,$AP\perp BC$,$\therefore P$ 为$\triangle ABC$ 的垂心,选 C.

例 4 变式题 2 D 【解析】不妨设 $\boldsymbol{c}=(m,n)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(1+m,2+n)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-1)$,对于$(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/\!/\boldsymbol{b}$,则有$-3(1+m)=2(2+n)$;又 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则有 $3m-n=0$,则有 $m=-\frac{7}{9}$,$n=-\frac{7}{3}$.

第七单元 立体几何

第 35 讲 空间几何体的三视图和直观图

例 1 【解答】三视图如图所示:



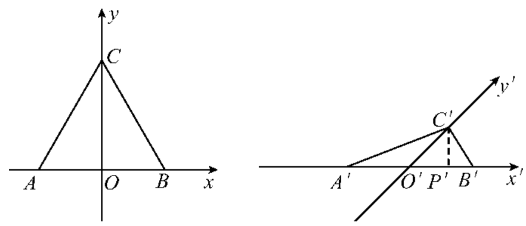
(1) (2)

例 2 C 【解析】该空间几何体由一圆柱和一正四棱锥组成,圆柱的底面半径为 1,高为 2,体积为 2π;四棱锥的底面边长为$\sqrt{2}$,高为$\sqrt{3}$,所以体积为$\frac{1}{3}\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 所以该几何体的体积为 $2\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 2 变式题 $\sqrt{3}$ 【解析】由三视图可知,该几何体为横放的三棱柱,底面是底边为 2,高为 a 的三角形,棱柱的高为 3.

$\therefore$由已知可得$\frac{1}{2}\times2\times a\times3=3\sqrt{3}$,$\therefore a=\sqrt{3}$.

例 3 $\frac{\sqrt{6}}{16}$ 【解析】如图(1)、(2)所示的为实际图形和直观图.



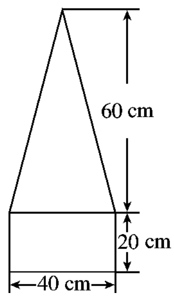
(1) (2)

由图(2)可知 $AB=A'B'=1$,$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{4}$,在图(2)中作 $C'P'\perp A'B'$于 P'点,则有 $C'P'=\frac{\sqrt{2}}{2}O'C'=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}|A'B'||C'P'|=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{6}}{16}$.

例 3 变式题 【解答】直观图中,三角形的底边为 1,高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore$平面图中,三角形的底边为 1,高为$\sqrt{6}$,$\therefore$平面图中三角形的面积为$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

例 4 【解答】(1)侧视图同正视图,如图所示.



(2)该安全标识墩的体积为

$V=V_{P-EFGH}+V_{ABCD-EFGH}$

$=\frac{1}{3}\times40^2\times60+40^2\times20=32000+32000=64000(\text{cm}^3)$.

第 36 讲 空间几何体的表面积与体积

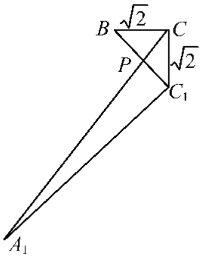
例 1 ①②③④ 【解析】由多面体的定义可知①②③均正确,而④棱台是由棱锥所截而得,所以④也正确.

例 1 变式题 ①② 【解析】注意到过球心的条件,易判断③④不合题意,①②正确.

例 2 20π 【解析】在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=2$,$\angle BAC=120°$,得角 $B=30°$,在$\triangle ABC$ 中由正弦定理得$\frac{AC}{\sin30°}=2r$,可得$\triangle ABC$ 外接圆半径 $r=2$,设此圆圆心为 O',球心为 O,在 $\text{Rt}\triangle OBO'$中,$OO'=1$,易得球半径 $R=\sqrt{5}$,故此球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.

例 2 变式题 C 【解析】由三视图可知,该几何体由一个半球和一个圆柱组成,球半径为 1,圆柱的高和底面半径均为 1,故该几何体的体积为$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times1^3+\pi\times1^2\times1=\frac{5}{3}\pi$.

例 3 $5\sqrt{2}$ 【解析】把面 A_1C_1B 沿 BC_1 展开与$\triangle CBC_1$ 在同一个平面上,连 A_1C,如图所示.



$\because\ \angle ACB=90°, AC=6, BC=C_1C=\sqrt{2}$,

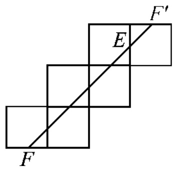
$\therefore \angle A_1C_1B=90°, A_1C_1=6$,

$\therefore \angle CC_1A_1=135°$.

在$\triangle CC_1A_1$中,利用余弦定理

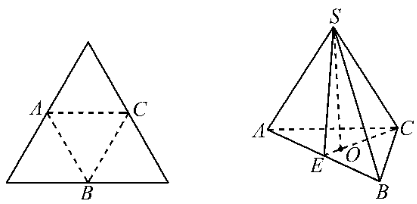
$A_1C^2=A_1C_1^2+CC_1^2-2CC_1\cdot A_1C_1\cos\angle CC_1A_1=50$.

$\therefore A_1C=5\sqrt{2}$,即$CP+PA_1$的最小值为$5\sqrt{2}$.



例3变式题 【解答】如图所示,将正方体六个面展开,从图中F到F',两点之间线段最短,而且依次经过棱BB_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1D、DA上的中点,所求的最小值为$3\sqrt{2}$.

例4 【解答】如图(a)所示,取等边三角形三边的中点A、B、C,连接AB、BC、CA(原三角形三条中位线)得$\triangle ABC$,以中位线为折线折起三角形,使三角形三顶点重合,则得侧棱长与底面边长都等于1的三棱锥$S-ABC$(如图(b)所示),作$SO\perp$平面ABC,则易证点O是$\triangle ABC$的重心,连接CO并延长交AB于E,则E是AB的中点,连接SE.



(a)　　　　(b)

$\because O$是$\triangle ABC$的重心,

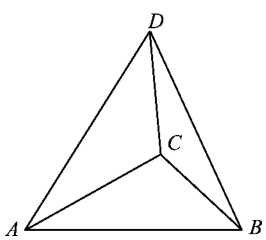
$\therefore OC=\dfrac{2}{3}CE=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

在$\mathrm{Rt}\triangle SOC$中,$SC=1$,$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

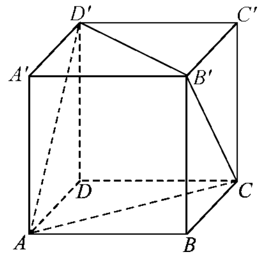
$\therefore V_{三棱锥S-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times SO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}CE\times AB\times SO=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

第37讲 平面的基本性质

例1 ④ **【解析】**由基本性质2知,不共线的三点才能确定一个平面,所以知命题①②均错,②中有可能出现两平面只有一条公共线(当这三个公共点共线时).③空间两两相交的三条直线有三个交点或一个交点,若为三个交点,则这三线共面;若只有一个交点,则可能确定一个平面或三个平面.⑤中平行四边形及梯形由基本性质2可得必为平面图形,而四边形有可能是空间四边形,如图所示.



⑥如图所示四边形$AD'B'C$中,$AD'=D'B'=B'C=CA$,但它不是平行四边形,所以⑥也错.正确的命题只有④.



例2 【解答】由已知AB的延长线交平面α于点P,根据基本性质3,平面ABC与面α必有交线,设为l.

$\because P\in$直线AB,

$\therefore P\in$面ABC.

又$\because AB\cap$面$\alpha=P$,

$\therefore P\in$面α,

$\therefore P$是面ABC与面α的公共点.

$\because$面$ABC\cap$面$\alpha=l$,

$\therefore P\in l$.同理$Q\in l$,$R\in l$,

$\therefore P$、Q、R三点共线.

例3 【解答】$\because E,F$分别是AB,AD的中点,

$\therefore EF/\!/BD, EF=\dfrac{1}{2}BD$,

又$\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{DH}{CH}=2$,

$\therefore GH/\!/BD, GH=\dfrac{1}{3}BD$,

$\therefore$四边形$EFHG$是梯形,设两腰EG,FH相交于点T.

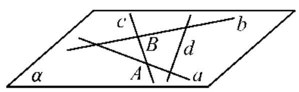
$\because EG\subset$平面ABC,$FH\subset$平面ACD,

$\therefore T\in$平面ABC,且$T\in$平面ACD,

又平面$ABC\cap$平面$ACD=AC$,

$\therefore T\in AC$,$\therefore$直线EG,FH,AC相交于一点T.

例4 【解答】已知:直线a、b、c、d,a与b相交,$a\cap c=A$,$b\cap c=B$(如图所示).



求证:直线a,b,c,d共面.

证明:$\because a$与b相交,

$\therefore$直线a、b确定一平面α.

又$\because a\cap c=A$,$\therefore A\in a$.

又$\because a\subset$平面α,$\therefore A\in$平面α.

同理$B\in$平面α.

又$\because A\in$直线c,$B\in$直线c,

$\therefore$直线$c\subset$平面α.

同理得直线$d\subset$平面α,

即a,b,c,d四条直线共面.

例5 C **【解析】**连接BA_1,因为A_1D_1与BC平行且相等,所以$CD_1/\!/BA_1$,因此$\angle A'BE$就是所求异面直线所成的角.在$\triangle EBA_1$中,易知$EB=\sqrt{2}AB$,$A_1E=AB$,$A_1B=\sqrt{5}AB$,故由余弦定理求得$\cos\angle A'BE=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

例5变式题1 D **【解析】**连接BD,因为M、N为棱AB与AD的中点,所以$MN/\!/BD$,所以$\angle DBD_1$为所求的角,设正方体的棱长为1,在直角三角形DBD_1中,易得

$\cos\angle DBD_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

例 5 变式题 2 【解答】假设 ME 与 BN 共面，则平面 $MBEN$ 交平面 $DCEF$ 于 EN，由已知，$DC/\!/MB$，所以 $DC/\!/$平面 $MBEN$，所以 $DC/\!/EN$，这与 N 为 DF 中点矛盾，所以假设不成立，所以 ME 与 BN 是异面直线.

第 38 讲 空间中的平行关系

例 1 【解答】证法一：在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，取 A_1B_1 的中点 F_1，连接 A_1D，C_1F_1，CF_1.

因为 $AB=2CD$，且 $AB/\!/CD$，

所以 $CD\underline{\underline{/\!/}}A_1F_1$，$A_1F_1CD$ 为平行四边形，

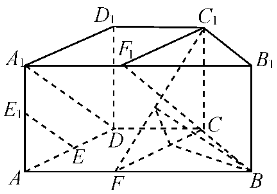
所以 $CF_1/\!/A_1D$.

又因为 E、E_1 分别是棱 AD、AA_1 的中点，

所以 $EE_1/\!/A_1D$，

所以 $CF_1/\!/EE_1$，又因为 $F_1C\subset$平面 FCC_1，

所以直线 $EE_1/\!/$平面 FCC_1.



证法二：由已知，$DD_1/\!/CC_1$，所以 $DD_1/\!/$平面 FCC_1.

又 $AB/\!/CD$，$AB=2CD$，所以 $DC\underline{\underline{/\!/}}AF$，

所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形，所以 $AD/\!/FC$，

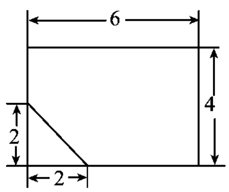
所以 $AD/\!/$平面 FCC_1.

又 $AD\cap DD_1=D$，所以平面 $A_1ADD_1/\!/$平面 FCC_1.

因为 $EE_1\subset$平面 A_1ADD_1，

所以 $EE_1/\!/$平面 FCC_1.

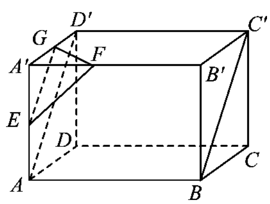
例 1 变式题 【解答】(1)俯视图如图所示.



俯视图

(2)所求多面体的体积 $V=V_{长方体}-V_{正三棱锥}=4\times4\times6-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\right)\times2=\dfrac{284}{3}(\mathrm{cm}^3)$.

(3)如图所示，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，连接 AD'，则 $AD'/\!/BC'$.



因为 E，G 分别为 AA'，$A'D'$ 的中点，

所以 $AD'/\!/EG$，从而 $EG/\!/BC'$，

又 $EG\subset$平面 EFG，$BC'\not\subset$平面 EFG，

所以 $BC'/\!/$平面 EFG.

例 2 【解答】$\because PM:MA=BQ:QA=5:8$，

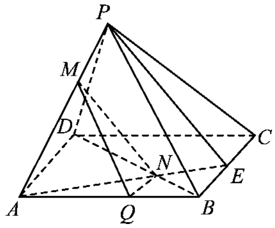
$\therefore MQ/\!/PB$，$\therefore MQ/\!/$平面 PBC.

连接 AN 并延长交 BC 于 E，连接 PE.

$\because AD/\!/BC$，$\therefore EN:NA=BN:ND=5:8$，

$\therefore EN:NA=PM:MA$，

$\therefore MN/\!/PE$，$\therefore MN/\!/$平面 PBC.



$\because MN\cap MQ=M$，$PE\cap PB=P$，

$MN\subset$平面 MNQ，$MQ\subset$平面 MNQ，

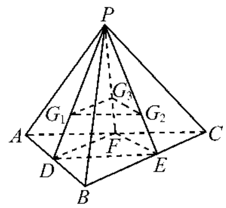
$\therefore$平面 $MNQ/\!/$平面 PBC.

例 2 变式题 【解答】(1)如图所示，连接 PG_1、PG_2、PG_3 并延长分别与边 AB、BC、AC 交于点 D、E、F，连接 DE、EF、FD.

则有 $PG_1:PD=2:3$，

$PG_2:PE=2:3$，

$\therefore G_1G_2/\!/DE$.



又 G_1G_2 不在平面 ABC 内，

$\therefore G_1G_2/\!/$平面 ABC.

同理 $G_2G_3/\!/$平面 ABC.

又$\because G_1G_2\cap G_2G_3=G_2$，

$\therefore$平面 $G_1G_2G_3/\!/$平面 ABC.

(2)由(1)知 $\dfrac{PG_1}{PD}=\dfrac{PG_2}{PE}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore G_1G_2=\dfrac{2}{3}DE$.

又 $DE=\dfrac{1}{2}AC$，$\therefore G_1G_2=\dfrac{1}{3}AC$.

同理 $G_2G_3=\dfrac{1}{3}AB$，$G_1G_3=\dfrac{1}{3}BC$.

$\therefore\triangle G_1G_2G_3\backsim\triangle CAB$，

其相似比为 $1:3$，

$\therefore S_{\triangle G_1G_2G_3}:S_{\triangle ABC}=1:9$.

第 39 讲 空间中的垂直关系

例 1 【解答】(1)取 AB 中点 E，连接 SE，DE.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 AC、AB 的中点，

故 $DE/\!/BC$，且 $DE\perp AB$，

$\because SA=SB$，

$\therefore\triangle SAB$ 为等腰三角形，

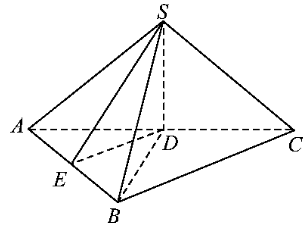
$\therefore SE\perp AB$.

$\because DE\perp AB$，$SE\cap DE=E$，

$\therefore AB\perp$面 SDE.

而 $SD\subset$面 SDE，

$\therefore AB\perp SD$.



在 $\triangle SAC$ 中，$SA=SC$，D 为 AC 的中点，

$\therefore SD\perp AC$.

又$\because SD\perp AB$，$AC\cap AB=A$，

$\therefore SD\perp$平面 ABC.

(2)若 $AB=BC$，则 $BD\perp AC$.

由(1)可知，$SD\perp$面 ABC，

而 $BD\subset$面 ABC，

$\therefore SD\perp BD$.

$\because SD\cap AC=D$,$\therefore BD\perp$平面SAC.

例1变式题 【解答】设$\odot O$所在平面为α,由已知条件知$PA\perp\alpha$,而BC在α内,所以$PA\perp BC$.

因为点C是圆周上不同于A,B的任意一点,AB是$\odot O$的直径,

所以$\angle BCA$是直角,即$BC\perp AC$.

又因为PA与AC是$\triangle PAC$所在平面内的两条相交直线,

所以$BC\perp$平面PAC,故$BC\perp AE$.

又$AE\perp PC$,$PC\cap BC=C$,

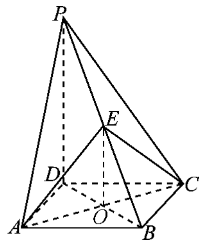
所以$AE\perp$平面PBC.

例2 【解答】(1)$\because$四边形$ABCD$是正方形,$\therefore AC\perp BD$.

$\because PD\perp$底面$ABCD$,

$\therefore PD\perp AC$,$\therefore AC\perp$平面PDB,

$\therefore$平面$AEC\perp$平面PDB.



(2)设AC交BD于点O,连接OE.

由(1)知$AC\perp$平面PDB于O,

$\therefore\angle AEO$为AE与平面PDB所的角.

$\because O,E$分别为DB、PB的中点,

$\therefore OE\parallel PD$,$OE=\frac{1}{2}PD$,

又$\because PD\perp$底面$ABCD$,

$\therefore OE\perp$底面$ABCD$,$OE\perp AO$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOE$中,$OE=\frac{1}{2}PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=AO$,

$\therefore\angle AEO=45^\circ$,即$AE$与平面$PDB$所成的角的大小为$45^\circ$.

例3 【解答】(1)在$\triangle ABD$中,$\because AB=2$,$AD=4$,$\angle DAB=60^\circ$,

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB}=2\sqrt{3}$,

$\therefore AB^2+BD^2=AD^2$,

$\therefore AB\perp DB$.

又$\because$平面$EBD\perp$平面ABD,

平面$EBD\cap$平面$ABD=BD$,$AB\subset$平面ABD,

$\therefore AB\perp$平面EBD,

$\because DE\subset$平面EBD,

$\therefore AB\perp DE$.

(2)由(1)知,$AB\perp AB$,$CD\parallel AB$,

从而$CD\perp BD$,即$DE\perp BD$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DBE$中,$\because DB=2\sqrt{3}$,$DE=DC=AB=2$,

$\therefore S_{\triangle DBE}=\frac{1}{2}DB\cdot DE=2\sqrt{3}$.

又$\because AB\perp$平面EBD,$BE\subset$平面EBD,

$\therefore AB\perp BE$,

$\because BE=BC=AD=4$,

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE=4$.

$\because DE\perp BD$,平面$EBD\perp$平面ABD,

$\therefore ED\perp$平面ABD,而$AD\subset$平面ABD,

$\therefore ED\perp AD$,

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE=4$.

综上所述,三棱锥$E-ABD$的侧面积$S=8+2\sqrt{3}$.

例3变式题 【解答】(1)$\because AB\perp$平面BCD,

$\therefore AB\perp CD$,

$\because CD\perp BC$且$AB\cap BC=B$,

$\therefore CD\perp$平面ABC.

又$\because\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AD}=\lambda(0<\lambda<1)$,

$\therefore$不论λ为何值,恒有$EF\parallel CD$,

$\therefore EF\perp$平面ABC,$\because EF\subset$平面BEF,

$\therefore$不论λ为何值恒有平面$BEF\perp$平面ABC.

(2)由(1)知,$BE\perp EF$,又平面$BEF\perp$平面ACD,

$\therefore BE\perp$平面ACD,$\therefore BE\perp AC$.

$\because BC=CD=1$,$\angle BCD=90^\circ$,$\angle ADB=60^\circ$,

$\therefore BD=\sqrt{2}$,$AB=\sqrt{2}\tan60^\circ=\sqrt{6}$,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{7}$,

由$AB^2=AE\cdot AC$得$AE=\frac{6}{\sqrt{7}}$,$\therefore\lambda=\frac{AE}{AC}=\frac{6}{7}$,

故当$\lambda=\frac{6}{7}$时,平面$BEF\perp$平面ACD.

例4 【解答】(1)$\because PA\perp$底面ABC,

$\therefore PA\perp BC$.

又$\angle BCA=90^\circ$,$\therefore AC\perp BC$.

$\therefore BC\perp$平面PAC.

(2)$\because D$为PB的中点,$DE\parallel BC$,

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$,

又由(1)知,$BC\perp$平面PAC,

$\therefore DE\perp$平面PAC,垂足为点E.

$\therefore\angle DAE$是AD与平面PAC所成的角,

$\because PA\perp$底面ABC,

$\therefore PA\perp AB$,又$PA=AB$,

$\therefore\triangle ABP$为等腰直角三角形,

$\therefore AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$,

$\because\angle ABC=60^\circ$,

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$中,$\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{BC}{2AD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\therefore AD$与平面PAC所成的角的正弦值是$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3)$\because DE\parallel BC$,又由(1)知,$BC\perp$平面PAC,

$\therefore DE\perp$平面PAC,

又$\because AE\subset$平面PAC,$PE\subset$平面PAC,

$\therefore DE\perp AE$,$DE\perp PE$,

$\therefore\angle AEP$为二面角$A-DE-P$的平面角,

$\therefore$在棱PC上存在一点E,使得$AE\perp PC$,这时$\angle AEP=90^\circ$,

故存在点E使得二面角$A-DE-P$是直二面角.

例 4 变式题 【解答】(1)∵ $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱,

∴$D_1D\perp$平面 $ABCD$,

∴$BC\perp D_1D$.

∵$AB\parallel CD$,$AB\perp AD$,

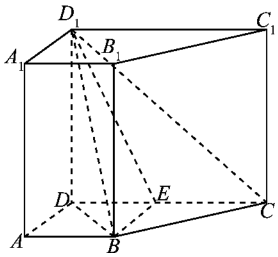
∴四边形 $ABCD$ 为直角梯形,

又∵$AB=AD=1$,$CD=2$,

可知 $BC\perp DB$.

∵$D_1D\cap DB=D$,

∴$BC\perp$平面 D_1DB.



(2)取 DC 中点 E,连接 BE,D_1E.

∵$DB=BC$,

∴$BE\perp CD$.

∵$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱,

∴平面 $ABCD\perp$平面 D_1DCC_1,

∴$BE\perp$平面 D_1DCC_1,

∴D_1E 为 D_1B 在平面 D_1DCC_1 上的射影,

∴$\angle BD_1E$ 为所求角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1BE$ 中,$BE=1$,$D_1E=\sqrt{5}$,

$\tan\angle BD_1E=\dfrac{BE}{D_1E}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

∴所求角的正切值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

第 40 讲 空间向量及运算

例 1 【解答】$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OM}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$,

∴$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

例 1 变式题 【解答】∵$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD_1}$

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,

∴$x=\dfrac{1}{2}$,$y=\dfrac{1}{2}$,∴$x-y=0$.

例 2 【解答】(1)设点 $D(x,y,z)$,

$\overrightarrow{DB}=(-x,1-y,-z)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{DC}=(-x,-y,2-z)$,$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$,

由已知可得$\overrightarrow{DB}\parallel\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{DC}\parallel\overrightarrow{AB}$,

即$\begin{cases}\dfrac{-x}{-1}=\dfrac{-z}{2},\\ \dfrac{-x}{-1}=\dfrac{-y}{1},\\ 1-y=0,\\ 2-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\ y=1,\\ z=2\end{cases}\Rightarrow D(-1,1,2)$.

(2)∵$\overrightarrow{AD}=(x-1,y,z)$,$\overrightarrow{BC}=(0,-1,2)$,

又∵$DB\perp AC$,$DC\perp AB$,且 $AD=BC$,

∴$\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AB}$,且$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$.

∴$\begin{cases}x-2z=0,\\ x-y=0,\\ (x-1)^2+y^2+z^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4+4\sqrt{10}}{9},\\ y=\dfrac{4+4\sqrt{10}}{9},\\ z=\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\end{cases}$或

$\begin{cases}x=\dfrac{4-4\sqrt{10}}{9},\\ y=\dfrac{4-4\sqrt{10}}{9},\\ z=\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}.\end{cases}$

∴$D\left(\dfrac{4+4\sqrt{10}}{9},\dfrac{4+4\sqrt{10}}{9},\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)$或

$D\left(\dfrac{4-4\sqrt{10}}{9},\dfrac{4-4\sqrt{10}}{9},\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)$.

例 2 变式题 【解答】(1)∵$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,故可设 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{a}$,

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 得

$\boldsymbol{a}\cdot k\boldsymbol{a}=k|\boldsymbol{a}|^2=k(\sqrt{4+1+4})^2=9k=-18$,

故 $k=-2$.

∴$\boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{a}=(-4,2,-4)$.

(2)设 $P(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$,

$\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$,$\overrightarrow{AC}=(-4,3,1)$,

∴$(x-2,y+1,z-2)=\dfrac{1}{2}[(2,6,-3)-(-4,3,1)]$

$=\dfrac{1}{2}(6,3,-4)=\left(3,\dfrac{3}{2},-2\right)$,

∴$\begin{cases}x-2=3,\\ y+1=\dfrac{3}{2},\\ z-2=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\ y=\dfrac{1}{2},\\ z=0.\end{cases}$

∴P 点坐标为$\left(5,\dfrac{1}{2},0\right)$.

(3)①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,5,-4)\cdot(2,1,8)$

$=3\times2+5\times1-4\times8=-21$.

②∵$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+5^2+(-4)^2}=\sqrt{50}$,

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+1^2+8^2}=\sqrt{69}$.

∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-21}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{69}}=-\dfrac{7\sqrt{138}}{230}$.

③取 z 轴上的单位向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,6,4)$.

依题意$\begin{cases}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ (\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=53,\end{cases}$

即$\begin{cases}(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-4\lambda+8\mu)\cdot(0,0,1)=0,\\ (3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-4\lambda+8\mu)\cdot(5,6,4)=53,\end{cases}$

故$\begin{cases}-4\lambda+8\mu=0,\\ 29\lambda+48\mu=53,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=1,\\ \mu=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

例 3 【解答】(1)依题意得 $B(0,1,0)$,$N(1,0,1)$,

∴$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$.

(2)$A_1(1,0,2)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,0)$,$B_1(0,1,2)$,

∴$\overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$,$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$,

∴$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=3$,$|\overrightarrow{BA_1}|=\sqrt{6}$,$|\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{5}$.

∴$\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

(3)∵$C_1(0,0,2)$,$M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2\right)$,

∴$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$,$\overrightarrow{C_1M}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$,

∴$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0$,

∴$A_1B\perp C_1M$.

第41讲 空间向量解决线面位置关系

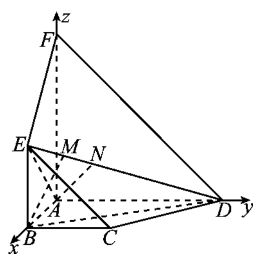
例1 【解答】由平面 $ABEF\perp$ 平面 $ABCD$,$AF\perp AB$,得 $AF\perp$ 平面$ABCD$,以 A 为坐标原点,射线 AB 为 x 轴正半轴,射线 AD 为 y 轴正半轴,射线 AF 为 z 轴正半轴,建立如图所示的直角坐标系 $A-xyz$.

设 $AB=a$,$BC=b$,$BE=c$,则

$B(a,0,0)$,$C(a,b,0)$,$E(a,0,c)$,

$D(0,2b,0)$,$F(0,0,2c)$,

$\overrightarrow{EC}=(0,b,-c)$,$\overrightarrow{FD}=(0,2b,-2c)$,



故$\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FD}$,从而由点 $E\notin FD$,

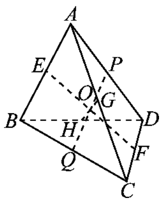
得 $EC/\!/FD$,

故 C、D、F、E 四点共面.

例1变式题 【解答】如图所示,∵E,G 分别为 AB,AC 的中点,

∴$EG\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}BC$,同理 $HF\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}BC$,∴$EG\underline{\parallel}HF$.

从而四边形 $EGFH$ 为平行四边形,故其对角线 EF,GH 相交于一点 O,且 O 为它们的中点,连接 OP,OQ.只要能证明向量$\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OQ}$就可以说明 P,O,Q 三点共线且 O 为 PQ 的中点.事实上,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GP}$,$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HQ}$,而 O 为 GH 的中点,



∴$\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}=\mathbf{0}$,$GP\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}CD$,$QH\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}CD$,

∴$\overrightarrow{GP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{QH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

∴$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{HQ}=\mathbf{0}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$.

∴$\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OQ}$,∴$PQ$ 经过 O 点,且 O 为 PQ 的中点.

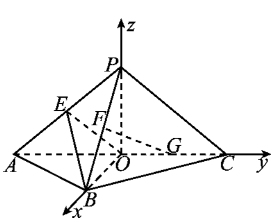
∴命题得证.

例2 【解答】如图所示,连接 OP,以 O 为坐标原点,分别以 OB、OC、OP 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $O(0,0,0)$,$A(0,-8,0)$,$B(8,0,0)$,$C(0,8,0)$,$P(0,0,6)$,

$E(0,-4,3)$,$F(4,0,3)$,

由题意得,$G(0,4,0)$,



∴$\overrightarrow{OB}=(8,0,0)$,$\overrightarrow{OE}=(0,-4,3)$,

设平面 BOE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}8x=0,\\ -4y+3z=0.\end{cases}$

取 $x=0$,$y=3$,$z=4$ 得平面 BOE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,3,4)$.

∵$\overrightarrow{FG}=(-4,4,-3)$,∴$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FG}=0$,

又直线 FG 不在平面 BOE 内,

∴$FG/\!/$平面 BOE.

例2变式题 【解答】以点 C 为原点,CA,CB,CF 所在直线为坐标轴,建立空间直角坐标系,

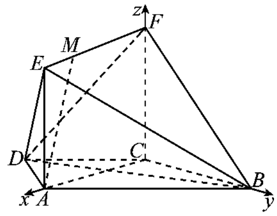
则 $C(0,0,0)$,$B(0,a,0)$,$A(\sqrt{3}a,0,0)$,

$D\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},-\dfrac{1}{2}a,0\right)$,$F(0,0,a)$,$E(\sqrt{3}a,0,a)$,

∵$AM\not\subset$平面 BDF,

∴$AM/\!/$平面 $BDF\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FD}$共面,

也等价于存在实数 m、n,使$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{FB}+n\overrightarrow{FD}$.



设$\overrightarrow{EM}=t\overrightarrow{EF}$,

∵$\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3}a,0,0)$,

∴$\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3}at,0,0)$,

∴ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3}at,0,a)$.

又$\overrightarrow{FD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,-\dfrac{1}{2}a,-a\right)$,$\overrightarrow{FB}=(0,a,-a)$,

从而要使得$(-\sqrt{3}at,0,a)=m(0,a,-a)+n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,-\dfrac{1}{2}a,-a\right)$成立,

需$\begin{cases}-\sqrt{3}at=\dfrac{\sqrt{3}}{2}an,\\ 0=ma-\dfrac{1}{2}an,\\ a=-am-an,\end{cases}$ 解得 $t=\dfrac{1}{3}$,

∴当 $EM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 时,$AM/\!/$平面 BDF.

例3 【解答】如图所示,以 D 为原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

设 $AB=a$,$PD=h$,

则 $A(a,0,0)$,$B(a,a,0)$,$C(0,a,0)$,$D(0,0,0)$,$P(0,0,h)$.

证法一:∵$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,0,h)$,$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$,

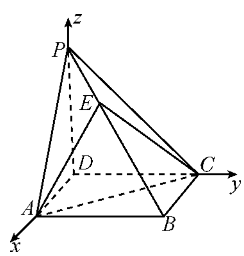
∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DP}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$,

∴$AC\perp DP$,$AC\perp DB$,

∴$AC\perp$平面 PDB,

又 $AC\subset$面 AEC,

∴平面 $AEC\perp$平面 PDB.



证法二:∵点 E 在 PB 上,可设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PB}$,

∴$E(\lambda a,\lambda a,(1-\lambda)h)$,

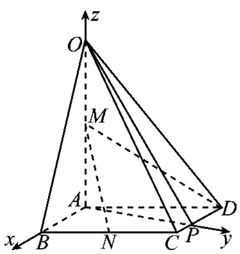
∴$\overrightarrow{AE}=((\lambda-1)a,\lambda a,(1-\lambda)h)$,

$\overrightarrow{CE}=(\lambda a,(\lambda-1)a,(1-\lambda)h)$.
设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0$,
∴可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\dfrac{(2\lambda-1)a}{(\lambda-1)h}\right)$,
又$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$是平面 PDB 的法向量,
$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,
∴平面 $AEC\perp$ 平面 PDB.

例 3 变式题 【解答】取 D 为原点,DA、DC、DD_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,取正方体棱长为 2,则 $A(2,0,0)$、$A_1(2,0,2)$、$D_1(0,0,2)$、$E(2,2,1)$、$F(0,1,0)$.
(1)证明:∵$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{D_1F}=(2,0,0)\cdot(0,1,-2)=0$,
∴$AD\perp D_1F$.
(2)∵$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=(0,2,1)\cdot(0,1,-2)=0$,
∴$AE\perp D_1F$,即 AE 与 D_1F 所成角为 $90°$.
(3)证明:∵$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=(2,2,1)\cdot(0,1,-2)=0$,
∴$DE\perp D_1F$.
又∵$AE\perp D_1F$,∴$D_1F\perp$面 AED.
∵$D_1F\subset$面 A_1D_1F,
∴面 $AED\perp$面 A_1D_1F.

第 42 讲 空间角与距离的求法

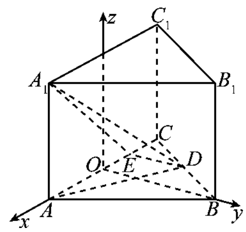
例 1 【解答】作 $AP\perp CD$ 于点 P,如图所示,分别以 AB,AP,AO 所在直线为 x,y,z 轴建立坐标系,
则有 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$P\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,
$O(0,0,2)$,$M(0,0,1)$,$N\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},0\right)$.



(1)$\overrightarrow{MN}=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},-1\right)$,$\overrightarrow{OP}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$,
$\overrightarrow{OD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$,
设平面 OCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0,\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0$,
即 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0,\\-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0.\end{cases}$
取 $z=\sqrt{2}$,解得 $\boldsymbol{n}=(0,4,\sqrt{2})$.
∵$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},-1\right)\cdot(0,4,\sqrt{2})=0$,
∴MN∥平面 OCD.
(2)设 AB 与 MD 所成的角为 θ.
∵$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{MD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$,
∴$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}=\dfrac{1}{2}$,
∴$\theta=\dfrac{\pi}{3}$,
∴AB 与 MD 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{3}$.

例 1 变式题 【解答】∵$\overrightarrow{CD}^2=|\overrightarrow{CD}|^2$,
∴$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\overrightarrow{CD}^2}=\sqrt{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2}=$
$\sqrt{\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}}$
$=\sqrt{6^2+4^2+8^2+2\times6\times8\cdot\cos120°}=2\sqrt{17}$,
故 $CD=2\sqrt{17}$.
由 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=$
$\dfrac{(\overrightarrow{AB})^2}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$,
∴AB 与 CD 所成角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$.

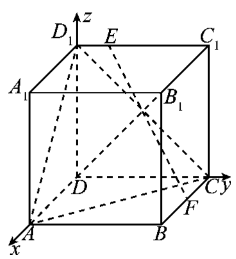
例 2 【解答】(1)由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的性质知 $AA_1\perp$平面 ABC.又 $DE\subset$平面 ABC,所以 $DE\perp AA_1$.
而 $DE\perp A_1E$,$AA_1\cap A_1E=A_1$,
所以 $DE\perp$平面 ACC_1A_1.
又 $DE\subset$平面 A_1DE,
故平面 $A_1DE\perp$平面 ACC_1A_1.
(2)如图所示,设 O 是 AC 的中点,以 O 为原点建立空间直角坐标系,则相关各点的坐标分别是$A(2,0,0)$,$A_1(2,0,\sqrt{7})$,$D(-1,\sqrt{3},0)$,$E(-1,0,0)$.



易知$\overrightarrow{A_1D}=(-3,\sqrt{3},-\sqrt{7})$,$\overrightarrow{DE}=(0,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AD}=(-3,\sqrt{3},0)$.
设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 A_1DE 的一个法向量,则
$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=-\sqrt{3}y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=-3x+\sqrt{3}y-\sqrt{7}z=0.\end{cases}$
解得 $x=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}z,y=0$.
故可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{7},0,-3)$.
于是 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{-3\sqrt{7}}{4\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.
由此即知,直线 AD 和平面 A_1DE 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

例 2 变式题 【解答】设正方体棱长为 1,以$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD_1}$为单位正交基底,建立如图所示坐标系 $D-xyz$,则各点的坐标分别为 $D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,$E\left(0,\dfrac{1}{4},1\right)$,$F\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$,
所以$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},-1\right)$,
因为$\overrightarrow{DB_1}$为平面 D_1AC 的法向量,

$\cos\langle\overrightarrow{DB_1},\overrightarrow{EF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{DB_1}||\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{4}-1\times1}{\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{16}+1}}=\dfrac{\sqrt{87}}{87}$.



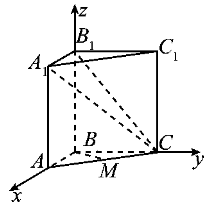
所以直线 EF 与平面 D_1AC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{87}}{87}$.

例 3　【解答】如图所示,建立空间直角坐标系,则 $A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$A_1(2,0,2)$,$B_1(0,0,2)$,$C_1(0,2,2)$,设 AC 的中点为 M,

$\because BM\perp AC,BM\perp CC_1$,

$\therefore BM\perp$ 平面 A_1C_1C,

即 $\overrightarrow{BM}=(1,1,0)$ 是平面 A_1C_1C 的一个法向量.



设平面 A_1B_1C 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\because\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-2)$,$\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,0,0)$,

$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=-2x=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-2x+2y-2z=0$,

令 $z=1$,解得 $x=0$,$y=1$,

$\therefore\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

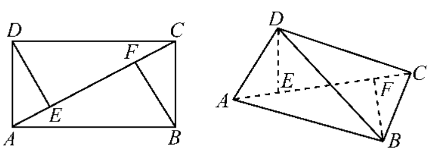
设法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{BM}$ 夹角为 φ,二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的大小为 θ,显然 θ 为锐角,

$\therefore\cos\theta=|\cos\varphi|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BM}|}=\dfrac{1}{2}$,

解得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore$二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

例 4　【解答】如图所示,过 D 作 $DE\perp AC$,垂足为 E,过 B 作 $BF\perp AC$,垂足为 F.



$\because AB=2\sqrt{3}$,$AD=2$,

$\therefore DE=BF=\sqrt{3}$,$EF=2$,

又二面角 $D-AC-B$ 为 $60°$,

$DE\perp AC$,$BF\perp AC$,

则 $\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{FB}\rangle=120°$,

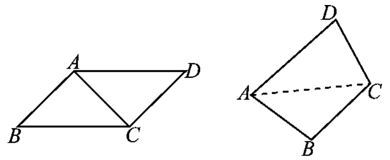
$\because\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$,

$\therefore|\overrightarrow{DB}|^2=(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})^2=|\overrightarrow{DE}|^2+|\overrightarrow{EF}|^2+|\overrightarrow{FB}|^2+2\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FB}+2\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{FB}$

$=3+4+3+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\cdot\cos120°=7$,

$\therefore|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{7}$.

例 4 变式题　【解答】如图所示,因为 $\angle ACD=90°$,



(1)　　(2)

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. 同理,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

因为 AB 与 CD 成 $60°$角,

所以 $\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$或 $120°$.

因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$,

所以 $\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=3+2\times1\times1\times\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=\begin{cases}4(\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60°),\\2(\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=120°).\end{cases}$

所以 $|\overrightarrow{BD}|=2$ 或 $\sqrt{2}$,

即 B、D 间的距离为 2 或 $\sqrt{2}$.

例 5　【解答】(1)依题设知,AC 是所作球面的直径,

则 $AM\perp MC$.

又因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,

则 $PA\perp CD$,又 $CD\perp AD$,

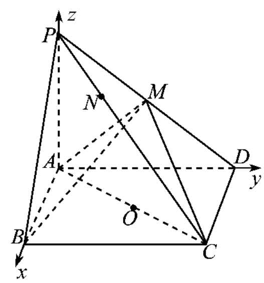
所以 $CD\perp$平面 PAD,

则 $CD\perp AM$.

又 $CM\cap CD=C$,

所以 $AM\perp$平面 PCD,

所以平面 $ABM\perp$平面 PCD.



(2)如图所示,建立空间直角坐标系,则 $A(0,0,0)$,$P(0,0,4)$,$B(2,0,0)$,$C(2,4,0)$,$D(0,4,0)$,$M(0,2,2)$.

设平面 ACM 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AM}$可得 $\begin{cases}2x+4y=0,\\2y+2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

设所求角为 α,因为 $\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$,

则 $\sin\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CD}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

所以所求角的正弦值的大小为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)由条件可得,$AN\perp NC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中,$PA^2=PN\cdot PC$,

所以 $PN=\dfrac{8}{3}$,

则 $NC=PC-PN=\dfrac{10}{3}$,$\dfrac{NC}{PC}=\dfrac{5}{9}$,

所以所求距离等于点 P 到平面 ACM 距离的 $\dfrac{5}{9}$,

设点 P 到平面 ACM 距离为 h,

则 $h=\left|\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,

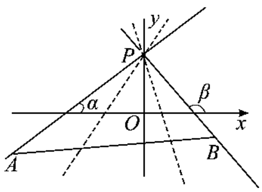
所以所求距离为$\frac{5}{9}h=\frac{10\sqrt{6}}{27}$.

第八单元　解析几何

第43讲　直线的方程

例1　①⑤　【解析】两平行线间的距离为$d=\frac{|3-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$,易知直线$m$与$l_1$的夹角为$30°$,直线$l_1$的倾斜角为$45°$,所以直线$m$的倾斜角等于$30°+45°=75°$或$45°-30°=15°$.

例1变式题　【解答】如图所示,直线l的倾斜角从直线PA的倾斜角α逐渐增大,到直线PB的倾斜角β.



由$k_{PA}=\tan\alpha=\frac{2-(-3)}{-1-(-6)}=1$,∴$\alpha=45°$.

由$k_{PB}=\tan\beta=\frac{2-(-2)}{-1-3}=-1$,∴$\beta=135°$.

∴l的倾斜角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

例2　【解答】(1)设直线的倾斜角为α,则$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,∴$\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$,直线的斜率$k=\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$,又直线在$y$轴上的截距为$-5$,由斜截式得直线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x-5$.

(2)由已知设直线$y=3x$的倾斜角为α,则所求直线的倾斜角为2α,∵$\tan\alpha=3$,∴$\tan2\alpha=-\frac{3}{4}$.又直线经过$(-1,-3)$,因此所求直线方程为$y+3=-\frac{3}{4}(x+1)$,即$3x+4y+15=0$.

(3)由直线l与x,y轴正半轴相交知斜率$k<0$.

设$l:y-1=k(x-2)$,则$A\left(2-\frac{1}{k},0\right)$,$B(0,1-2k)$,

∴$S=\frac{1}{2}(1-2k)\left(2-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\left[4+\left(-4k+\frac{1}{-k}\right)\right]\geqslant4$,

当且仅当$-4k=\frac{1}{-k}$,即$k=-\frac{1}{2}$时等号成立.

故$l:y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$,即$x+2y-4=0$.

例2变式题　【解答】(1)当纵横截距都为零时,设所求的直线方程为$y=kx$,将点$A(-5,2)$代入,得$k=-\frac{2}{5}$,直线方程为$2x+5y=0$;

当纵横截距均不为零时,设所求的方程为$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$,将点$A(-5,2)$代入,解得$a=-\frac{1}{2}$,直线方程为$x+2y+1=0$.

(2)设直线l_2的倾斜角为α,则$\tan\alpha=\frac{3}{4}$,则$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$,$\tan2\alpha=\frac{24}{7}$,所求直线$l_1$方程为:$x-3y+10=0$,$l_3$的方程为$24x-7y-150=0$.

例3　B、C　【解析】因为点$(0,2)$到M中每条直线的距离$d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$.

即M为圆$C:x^2+(y-2)^2=1$的全体切线组成的集合,从而M中存在两条平行直线,所以A错误;

又因为$(0,2)$点不在任何直线上,所以B正确;

对任意$n\geqslant3$,存在正n边形使其内切圆为圆C,故C正确;

M中直线能组成两个大小不同的正三角形ABC和AEF,故D错误,

故命题中正确的序号是B,C.

第44讲　两条直线的位置关系

例1　【解答】当$a=0$时,$A(2,0)$,$B(2,2)$,$C(0,1)$,$D(1,1)$.

此时k_{AB}不存在,而$k_{CD}=0$,∴$l_1\perp l_2$.

当$a=-1$时,

$A(0,0)$,$B(2,2)$,$C(0,0)$,$D(1,1)$.

$k_{AB}=k_{CD}=1$,

又都过原点$(0,0)$,∴l_1与l_2重合.

当$a\neq0$,且$a\neq-1$时,

$k_{AB}=\frac{2-0}{2-(2a+2)}=-\frac{1}{a}$,

$k_{CD}=\frac{1-(1+a)}{1-0}=-a$.

若$l_1/\!/l_2$,则$k_{AB}=k_{CD}$,

即$-\frac{1}{a}=-a$,得$a=1$或$a=-1$(舍);

若$l_1\perp l_2$,则$k_{AB}\cdot k_{CD}=-1$,

即$\left(-\frac{1}{a}\right)\times(-a)=-1$,$a$不存在.

综上知,当$a=1$时,$l_1/\!/l_2$;当$a=0$时,$l_1\perp l_2$.

例1变式题　【解答】设所求直线与l_1,l_2分别交于两点M,N,因为N在直线$l_2:2x+y-8=0$上,故可设$N(t,8-2t)$,因为点A是线段MN的中点,由中点坐标公式可得$M(-t,2t-6)$,

因为点M在直线$l_1:x-3y+10=0$上,

所以$-t-3(2t-6)+10=0$,解得$t=4$,

所以$M(-4,2)$,$N(4,0)$,

所求直线方程为$x+4y-4=0$.

例2　【解答】方法一:若直线l的斜率不存在,则直线l的方程为$x=3$,此时与l_1,l_2的交点分别为$A'(3,-4)$和$B'(3,-9)$.截得的线段$A'B'$的长$|A'B'|=|-4+9|=5$.符合题意.

若直线l的斜率存在,则设直线l的方程为

$y=k(x-3)+1$.

解方程组$\begin{cases}y=k(x-3)+1,\\y+x+1=0,\end{cases}$得$A\left(\frac{3k-2}{k+1},\frac{1-4k}{k+1}\right)$.

解方程组$\begin{cases}y=k(x-3)+1,\\y+x+6=0,\end{cases}$得$B\left(\frac{3k-7}{k+1},\frac{1-9k}{k+1}\right)$.

由$|AB|=5$得

$\left(\frac{3k-2}{k+1}-\frac{3k-7}{k+1}\right)^2+\left(\frac{1-4k}{k+1}+\frac{9k-1}{k+1}\right)^2=5^2$.

解得 $k=0$,即所求的直线方程为 $y=1$.

综上可知,所求直线 l 的方程为 $x=3$ 或 $y=1$.

方法二:由题意,直线 l_1,l_2 之间的距离为

$d=\frac{|1-6|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

且直线 l 被平行直线 l_1,l_2 所截得的线段 AB 的长为 5.

设直线 l 与直线 l_1 的夹角为 θ.

则 $\sin\theta=\frac{\frac{5}{2}\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $\theta=45°$.

由直线 l_1:$x+y+1=0$ 的倾斜角为 $135°$,知直线 l 的倾斜角为 $0°$或 $90°$.

又由直线 l 过点 $P(3,1)$,

故直线 l 的方程为 $x=3$ 或 $y=1$.

方法三:设直线 l 与 l_1、l_2 分别相交于

$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

则 $x_1+y_1+1=0$,$x_2+y_2+6=0$.

两式相减,得 $(x_1-x_2)+(y_1-y_2)=5$, ①

又 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=25$, ②

联立①②可得 $\begin{cases}x_1-x_2=5,\\y_1-y_2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1-x_2=0,\\y_1-y_2=5.\end{cases}$

由上可知,直线 l 的倾斜角分别为 $0°$或 $90°$.

故所求的直线方程为 $x=3$ 或 $y=1$.

例 2 变式题 【解答】当 $l\perp x$ 轴,l 与 A、B 的距离之比为 $1:3$,与题干矛盾,

故可设直线 l 的方程为 $y+5=k(x-2)$,

即 $kx-y-2k-5=0$.

∴$A(3,-2)$到直线 l 的距离

$d_1=\frac{|3k-(-2)-2k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$.

$B(-1,6)$到直线 l 的距离

$d_2=\frac{|-k-6-2k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3k+11|}{\sqrt{k^2+1}}$.

∵$d_1:d_2=1:2$,

∴$\frac{|k-3|}{|3k+11|}=\frac{1}{2}$,∴$k^2+18k+17=0$,

解得 $k_1=-1$,$k_2=-17$.

∴所求直线 l 的方程为

$x+y+3=0$ 和 $17x+y-29=0$.

例 3 【解答】(1)证明:原方程整理得 $(x-2y-3)m+2x+y+4=0$.

由 $\begin{cases}x-2y-3=0,\\2x+y+4=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$

所以不论 m 为何值,直线必过点定点 $M(-1,-2)$.

(2)设直线 l_1 的方程为 $y=k(x+1)-2(k<0)$.

令 $y=0$,$x=\frac{k-2}{-k}$,令 $x=0$,$y=k-2$.

所以 $S_\triangle=\frac{1}{2}\left|\frac{k-2}{-k}\right|\cdot|k-2|=\frac{1}{2}\left|-k+\frac{4}{-k}+4\right|\geqslant\frac{1}{2}(4+4)=4$.

当且仅当 $-k=\frac{4}{-k}$,即 $k=-2$ 时成立,即 $k=-2$ 时,

三角形面积最小,此时直线 l_1 的方程为 $2x+y+4=0$.

例 4 【解答】(1)设 $A'(x,y)$,再由已知

$\begin{cases}\frac{y+2}{x+1}\cdot\frac{2}{3}=-1,\\2\times\frac{x-1}{2}-3\times\frac{y-2}{2}+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{33}{13},\\y=\frac{4}{13},\end{cases}$

∴$A'\left(-\frac{33}{13},\frac{4}{13}\right)$.

(2)在直线 m 上取一点,如 $M(2,0)$,则 $M(2,0)$关于直线 l 的对称点必在 m'上.

设对称点为 $M'(a,b)$,则

$\begin{cases}2\times\left(\frac{a+2}{2}\right)-3\times\left(\frac{b+0}{2}\right)+1=0,\\\frac{b-0}{a-2}\times\frac{2}{3}=-1,\end{cases}$ 解 $M'\left(\frac{6}{13},\frac{30}{13}\right)$,

设 m 与 l 的交点为 N,则由 $\begin{cases}2x-3y+1=0,\\3x-2y-6=0,\end{cases}$

得 $N(4,3)$,又∵m'经过点 $N(4,3)$,

∴由两点式得直线方程为 $9x-46y+102=0$.

(3)在 l:$2x-3y+1=0$ 上任取两点.

如 $M(1,1)$,$N(4,3)$,则 M,N 关于点 $A(-1,-2)$的对称点 M',N'均在直线 l'上,

易得 $M'(-3,-5)$,$N'(-6,-7)$,

再由两点式可得 l'的方程为 $2x-3y-9=0$.

第 45 讲　圆的方程

例 1 A 【解析】方法一:设圆心坐标为$(0,b)$,则由题意知 $\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2}=1$,解得 $b=2$,故圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$. 方法二:由作图根据点$(1,2)$到圆心的距离为 1 易知圆心为$(0,2)$,故圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

例 1 变式题 【解答】(1)设所求圆的方程为

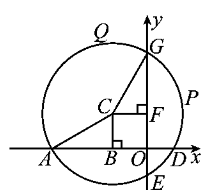
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,则由题意有

$\begin{cases}-D+5E+F+26=0,\\-2D-2E+F+8=0,\\5D+5E+F+50=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-4,\\E=-2,\\F=-20.\end{cases}$

故所求圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

(2)如图所示,由于圆 C 在两坐标轴上所截弦长相等,

即 $AD=EG$.



所以它们的一半也相等,

即 $AB=GF$.

又 $AC=GC$,

∴$\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle GFC$,

∴$BC=FC$.

设 $C(a,b)$,则$|a|=|b|$,①

又圆 C 过点 $P(1,2)$和 $Q(-2,3)$,

∴圆心在 PQ 的垂直平分线上,

即在 $y-\frac{5}{2}=3\left(x+\frac{1}{2}\right)$上,化简得 $y=3x+4$,

∴$b=3a+4$.②

由①知 $a=\pm b$,代入②得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-2.\end{cases}$

$\therefore r=\sqrt{5}$ 或 $r=5$.

故所求圆的方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ 或 $(x+2)^3+(y+2)^2=25$,

即 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ 或 $x^2+y^2+4x+4y-17=0$.

例 2 A 【解析】设圆上任一点为 $Q(s,t)$,PQ 的中点为 $A(x,y)$,则 $\begin{cases}x=\dfrac{4+s}{2},\\y=\dfrac{-2+t}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=2x-4,\\t=2y+2,\end{cases}$ 代入圆方程,得 $(2x-4)^2+(2y+2)^2=4$,整理,得 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

例 2 变式题 【解答】(1)令 $x=0$,得抛物线与 y 轴交点是 $(0,b)$;

令 $f(x)=x^2+2x+b=0$,由题意 $b\neq0$ 且 $\Delta>0$,解得 $b<1$,且 $b\neq0$.

(2)设所求圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

令 $y=0$,得 $x^2+Dx+F=0$,这与 $x^2+2x+b=0$ 是同一个方程,故 $D=2,F=b$.

令 $x=0$,得 $y^2+Ey+F=0$,此方程有一个根为 b,代入得出 $E=-b-1$.

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2+2x-(b+1)y+b=0$.

(3)圆 C 必过定点,证明如下:

假设圆 C 过定点 (x_0,y_0),$(x_0,y_0$ 不依赖于 $b)$将该点的坐标代入圆 C 的方程,

并变形为 $x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0+b(1-y_0)=0$. ①

为使①式对所有满足 $b<1(b\neq0)$ 的 b 都成立,必须有 $1-y_0=0$,结合①式得

$x_0^2+y_0^2+2x_0-y_0=0$,解得 $\begin{cases}x_0=0,\\y_0=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-2,\\y_0=1,\end{cases}$

经检验知,点 $(0,1)$,$(-2,1)$ 均在圆 C 上,因此圆 C 过定点.

例 3 【解答】(1)原方程化为 $(x-2)^2+y^2=3$,表示以点 $(2,0)$ 为圆心,以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆,设 $\dfrac{y}{x}=k$,即 $y=kx$,当直线 $y=kx$ 与圆相切时,斜率 k 取最大值和最小值,此时 $\dfrac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$,解之得 $k=\pm\sqrt{3}$,故 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$,最小值为 $-\sqrt{3}$.

(2)设 $y-x=b$,即 $y=x+b$,当 $y=x+b$ 与圆相切时,纵截距 b 取得最大值和最小值,此时 $\dfrac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,即 $b=-2\pm\sqrt{6}$. 故 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$,最小值为 $-2-\sqrt{6}$.

(3)x^2+y^2 表示圆上点与原点距离的平方,由平面几何知识和它在原点与圆心连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值,又圆心到原点的距离为 2,

故 $(x^2+y^2)_{\max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$,

$(x^2+y^2)_{\min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

例 3 变式题 【解答】(1)圆心 $C(-2,0)$ 到直线 $3x+4y+12=0$ 的距离为

$d=\dfrac{|3\times(-2)+4\times0+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{6}{5}$,

$\therefore P$ 点到直线 $3x+4y+12=0$ 的距离的最大值为 $d+r=\dfrac{6}{5}+1=\dfrac{11}{5}$,最小值为 $d-r=\dfrac{6}{5}-1=\dfrac{1}{5}$.

(2)设 $t=x-2y$,

则直线 $x-2y-t=0$ 与圆 $(x+2)^2+y=1$ 有公共点.

$\therefore \dfrac{|-2-t|}{\sqrt{1^2+2^2}}\leqslant1$,$\therefore -\sqrt{5}-2\leqslant t\leqslant\sqrt{5}-2$,

$\therefore t_{\max}=\sqrt{5}-2$,$t_{\min}=-2-\sqrt{5}$.

(3)设 $k=\dfrac{y-2}{x-1}$,

则直线 $kx-y-k+2=0$ 与圆 $(x+2)^2+y^2=1$ 有公共点.

$\therefore \dfrac{|-3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant1$,

$\therefore \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\leqslant k\leqslant\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore k_{\max}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$,$k_{\min}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

第 46 讲 直线与圆、圆与圆的位置关系

例 1 【解答】(1)设直线 l 的方程为:$y=k(x-4)$,

即 $kx-y-4k=0$,

由垂径定理,得:圆心 C_1 到直线的 l 距离

$d=\sqrt{4-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,

结合点到直线距离公式,得 $\dfrac{|-3k-1-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,

化简得 $24k^2+7k=0$,解得 $k=0$ 或者 $k=-\dfrac{7}{24}$.

所以直线 l 的方程为 $y=0$ 或 $y=-\dfrac{7}{24}(x-4)$,

即 $y=0$ 或 $7x+24y-28=0$.

(2)设点 P 坐标为 (m,n),直线 l_1、l_2 的方程分别为:

$y-n=k(x-m)$,$y-n=-\dfrac{1}{k}(x-m)$,

即:$kx-y+n-km=0$,$-\dfrac{1}{k}x-y+n+\dfrac{1}{k}m=0$.

因为直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等,两圆半径相等,

由垂径定理得:圆心 C_1 到直线 l_1 与 C_2 到直线 l_2 的距离相等.

故有,$\dfrac{|-3k-1+n-km|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{\left|-\dfrac{4}{k}-5+n+\dfrac{1}{k}m\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}}$,

化简得 $(2-m-n)k=m-n-3$,或 $(m-n+8)k=m+n-5$.

因为关于 k 的方程有无穷多解,所以有

$\begin{cases}2-m-n=0,\\m-n-3=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-n+8=0,\\m+n-5=0.\end{cases}$

解之得点 P 坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{13}{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

例 1 变式题 B 【解析】由已知,得 $S_{Ⅳ}-S_{Ⅱ}=S_{Ⅲ}-S_{Ⅰ}$,第Ⅱ,Ⅳ部分的面积是定值,所以 $S_{Ⅳ}-S_{Ⅱ}$ 为定值,即 $S_{Ⅲ}-S_{Ⅰ}$

为定值,当直线 AB 绕着圆心 C 移动时,只可能有一个位置符合题意,即直线 AB 只有一条,故选 B.

例 2 【解答】(1)∵切线在 x 轴,y 轴上的截距的绝对值相等,∴切线的斜率是 ± 1. 设切线的方程为 $y=x+b$ 或 $y=-x+b$,由点到直线的距离公式解得切线的方程为:$x+y-3=0$,$x+y+1=0$,$x-y+5=0$,$x-y+1=0$.

(2)将圆的方程化成标准式 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$,圆心 $C(-1,2)$,半径 $r=\sqrt{2}$,∵切线 PM 与 CM 垂直,∴$|PM|^2=|PC|^2-|CM|^2$,又∵$|PM|=|PO|$,坐标代入化简得 $2x_1-4y_1+3=0$. $|PM|$ 最小时 $|PO|$ 最小,而 $|PO|$ 最小即 O 点到点 P 所在的直线 $2x_1-4y_1+3=0$ 的距离,即 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. 从而得方程组 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=\frac{9}{20},\\2x_1-4y_1+3=0,\end{cases}$ 解得满足条件的点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{10},\frac{3}{5}\right)$.

例 2 变式题 4 【解析】可得圆方程是 $(x-3)^2+(y-4)^2=5$,切线长为 $d=\sqrt{25-5}=2\sqrt{5}$,解直角三角形的线段 PQ 的长为 $d_1=2\times\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5}=4$.

例 3 1 【解析】由已知,两个圆的方程作差可以得到相交弦的直线方程为 $y=\frac{1}{a}$,利用圆心 $(0,0)$ 到直线的距离 $d=\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1}}$ 为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$,解得 $a=1$.

例 3 变式题 【解答】方法一:

解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-2x+10y-24=0,\\x^2+y^2+2x+2y-8=0.\end{cases}$

得交点坐标分别为 $(0,2)$,$(-4,0)$,

设所求圆心坐标为

$(a,-a)$,则有

$\sqrt{a^2+(-a-2)^2}=\sqrt{(a+4)^2+a^2}=r$,

解得 $a=-3$,$r=\sqrt{10}$.

因此所求圆的方程为 $(x+3)^2+(y-3)^2=10$.

方法二:同方法一得已知两圆的交点坐标为 $(0,2)$,$(-4,0)$.

设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

则有 $\begin{cases}4+2E+F=0,\\16-4D+F=0,\\-\frac{D}{2}+\left(-\frac{E}{2}\right)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=6,\\E=-6,\\F=8,\end{cases}$

因此所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x-6y+8=0$.

方法三:设所求圆的方程为

$x^2+y^2-2x+10y-24+\lambda(x^2+y^2+2x+2y-8)=0$.

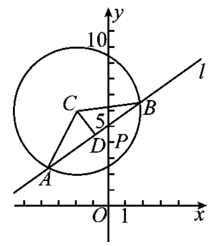
即 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(2\lambda-2)x+(2\lambda+10)y-8\lambda-24=0$,

因为这个圆的圆心在直线 $x+y=0$ 上,

∴$(2\lambda-2)+(2\lambda+10)=0$,∴$\lambda=-2$,

∴圆的方程为 $x^2+y^2+6x-6y+8=0$.

例 4 【解答】(1)解法一:如图所示,$AB=4\sqrt{3}$,D 是 AB 中点,



$CD\perp AB$,$AD=2\sqrt{3}$,$AC=4$,

在 $Rt\triangle ACD$ 中,可得 $CD=2$,

设所求直线的斜率为 k,

则直线的方程为 $y-5=kx$,

即 $kx-y+5=0$.

由点 C 到直线 AB 的距离为 $\frac{|-2k-6+5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$,

得 $k=\frac{3}{4}$,

又当直线 l 的斜率不存在时,也满足题意,

此时方程为 $x=0$. 当 $k=\frac{3}{4}$ 时,直线 l 的方程为 $3x-4y+20=0$.

∴所求直线的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y+20=0$.

解法二,设所求直线的斜率为 k,

则直线的方程为 $y=kx+5$,

联立直线与圆的方程 $\begin{cases}y=kx+5,\\x^2+y^2+4x-12y+24=0,\end{cases}$

消去 y,得 $(1+k^2)x^2+(4-2k)x-11=0$,①

设方程①的两根为 x_1,x_2,由韦达定理得 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2k-4}{1+k^2},②\\x_1x_2=-\frac{11}{1+k^2},③\end{cases}$

由弦长公式得 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=4\sqrt{3}$.

将②、③代入,解得 $k=\frac{3}{4}$,此时直线方程为 $3x-4y+20=0$.

又 k 不存在时也满足题意,此时直线方程为 $x=0$.

∴所求直线的方程 $x=0$ 或 $3x-4y+20=0$.

(2)设过 P 点的圆 C 的弦的中点为 $D(x,y)$,

则 $CD\perp PD$,

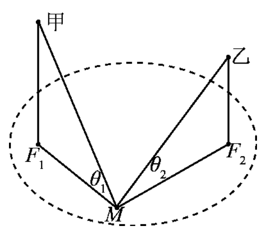
即 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PD}=0$.

$(x+2,y-6)\cdot(x,y-5)=0$.

化简得所求轨迹方程为 $x^2+y^2+2x-11y+30=0$.

第 47 讲　椭圆

例 1 $\frac{h_1}{\tan\theta_1}+\frac{h_2}{\tan\theta_2}\leqslant 2a$ 【解析】如图所示,依题意,$|MF_1|+|MF_2|\leqslant 2a\Rightarrow\frac{h_1}{\tan\theta_1}+\frac{h_2}{\tan\theta_2}\leqslant 2a$.



例 1 变式题 3 【解析】依题意,有

$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a,\\|PF_1|\cdot|PF_2|=18,\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2,\end{cases}$ 可得 $4c^2+36=4a^2$，即 $a^2-c^2=9$，

故有 $b=3$.

例 2 【解答】(1)若焦点在 x 轴上，设方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

∵椭圆过 $P(3,0)$，∴ $\frac{3^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$，∴ $a=3$.

又 $2a=3\times 2b$，∴ $b=1$，方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，

若焦点在 y 轴上，设方程 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

∵椭圆过点 $P(3,0)$，∴ $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$，∴ $b=3$.

又 $2a=3\times 2b=18$，∴ $a=9$，∴方程的 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$.

∴所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$.

(2)设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0$ 且 $m\neq n)$.

∵椭圆经过 P_1、P_2 点，P_1、P_2 点坐标适合椭圆方程，

代入得 $\begin{cases}6m+n=1,\\3m+2n=1.\end{cases}$

解得 $m=\frac{1}{9}$，$n=\frac{1}{3}$.

∴所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

例 3 【解答】(1)由题意可得，$k_{AB}=k_{OM}$，又因为直线 AB 的斜率 $k=-\frac{b}{a}$，所以直线 OM 的方程为：$y=-\frac{b}{a}x$. 又得 $|MF_1|=\frac{bc}{a}$，从而得到 $b=c$，∴ $a^2=b^2+c^2=2c^2$，

∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)设 $|F_1Q|=r_1$，$|F_2Q|=r_2$，$\angle F_1QF_2=\theta$，

∴ $r_1+r_2=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

$\cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-4c^2}{2r_1r_2}$

$=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}$

$=\frac{a^2}{r_1r_2}-1\geqslant\frac{a^2}{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2}-1=0$，

当且仅当 $r_1=r_2$ 时，$\cos\theta=0$，∴ $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

例 3 变式题 D 【解析】对于椭圆，因为 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则 $OA=2OF$，∴ $a=2c$，∴ $e=\frac{1}{2}$.

例 4 【解答】(1)由 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$ 得 $y=\frac{b^2}{a^2y_0}(a^2-x_0x)$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得

$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^4y_0^2}\right)x^2-\frac{2b^2x_0}{a^2y_0^2}x+\left(\frac{b^2}{y_0^2}-1\right)=0$.

将 $\begin{cases}x_0=a\cos\beta,\\y_0=b\sin\beta\end{cases}$ 代入上式，得 $x^2-2a\cos\beta\cdot x+a^2\cos^2\beta=0$，从而 $x=a\cos\beta$.

因此，方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1,\end{cases}$ 有唯一解 $\begin{cases}x=x_0,\\y=y_0,\end{cases}$ 即直线 l_1 与椭圆有唯一交点 P.

(2) $\tan\alpha=\frac{y_0}{x_0}=\frac{b}{a}\tan\beta$，$l_1$ 的斜率为 $-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$，l_2 的斜率为 $\tan\gamma=\frac{y_0a^2}{x_0b^2}=\frac{a}{b}\tan\beta$，

由此得 $\tan\alpha\tan\gamma=\tan^2\beta\neq 0$，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan\gamma$ 构成等比数列.

第 48 讲　双曲线

例 1 9 【解析】注意到 A 点在双曲线的两支之间，且双曲线右焦点为 $F_1(4,0)$. 于是由双曲线性质 $|PF|-|PF_1|=2a=4$，又 $|PA|+|PF_1|\geqslant|AF_1|=5$，两式相加得 $|PF|+|PA|\geqslant 9$，当且仅当 A、P、F_1 三点共线时等号成立.

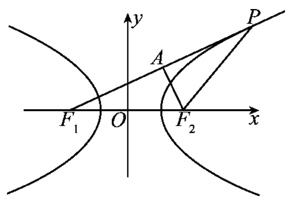
例 1 变式题 C 【解析】方法一：∵双曲线 C：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 中 $a=3$，

$b=4$，$c=5$，∴ $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$.

∵ $|PF_2|=|F_1F_2|$，

∴ $|PF_1|=2a+|PF_2|=6+10=16$.

作 PF_1 边上的高 AF_2，则 $AF_1=8$，∴ $AF_2=\sqrt{10^2-8^2}=6$.



∴△PF_1F_2 的面积为

$\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|AF_2|=\frac{1}{2}\times 16\times 6=48$，故选 C.

方法二：∵双曲线 C：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 中，$a=3$，$b=4$，$c=5$，

∴ $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，

设 $P(x_0,y_0)$，$(x_0>0)$，则由 $|PF_2|=|F_1F_2|$ 得

$(x_0-5)^2+y_0^2=10^2$，

又∵ P 为 C 的右支上一点，∴ $\frac{x_0^2}{9}-\frac{y_0^2}{16}=1$，

∴ $y_0^2=16\left(\frac{x_0^2}{9}-1\right)$，

∴ $(x_0-5)^2+16\left(\frac{x_0^2}{9}-1\right)=100$，

即 $25x_0^2-90x_0-819=0$.

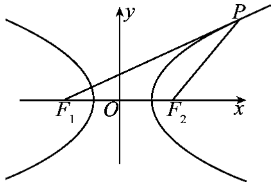
解得 $x_0=\frac{39}{5}$ 或 $x_0=-\frac{21}{5}<0$（舍去）.

∴ $y_0^2=16\left(\frac{x_0^2}{9}-1\right)=16\left[\left(\frac{39}{5}\right)^2\times\frac{1}{9}-1\right]=\frac{48^2}{5^2}$，

$y_0=\pm\frac{48}{5}$.

∴△PF_1F_2 的面积为

$\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{48}{5}=48$，故选 C.



例 2 【解答】方法一:(1)设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,由题意,得 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3},\\ \frac{(-3)^2}{a^2}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1,\end{cases}$

解得 $a^2=\frac{9}{4}$,$b^2=4$.

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

由题意易求 $c=2\sqrt{5}$,又双曲线过点 $(3\sqrt{2},2)$,

$\therefore \frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$.

又 $\because a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$,$\therefore a^2=12$,$b^2=8$.

故所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

方法二:(1)设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda(\lambda\neq 0)$,

将点 $(-3,2\sqrt{3})$ 代入得 $\lambda=\frac{1}{4}$,

所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$.

(2)设双曲线方程为 $\frac{x^2}{16-k}-\frac{y^2}{4+k}=1$,

将点 $(3\sqrt{2},2)$ 代入得 $k=4$,

所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

例 3 D 【解析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$,由方程组 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ y=x^2+1,\end{cases}$ 消去 y,得 $x^2-\frac{b}{a}x+1=0$ 有唯一解,所以 $\Delta=\left(\frac{b}{a}\right)^2-4=0$,

所以 $\frac{b}{a}=2$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$.

例 3 变式题 C 【解析】由已知得到 $b=1$,$c=\sqrt{3}$,$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{2}$,因为双曲线的焦点在 x 轴上,故渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

例 4 【解答】(1)由题意知,双曲线 C 的顶点 $(0,a)$ 到渐近线 $ax-by=0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\frac{ab}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由 $\begin{cases}\frac{ab}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2},\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{5}.\end{cases}$

所以曲线 C 的方程是 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$.

(2)方法一:由(1)知双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm 2x$.

设 $A(m,2m)$,$B(-n,2n)$,$m>0$,$n>0$.

由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 得 P 点的坐标为 $\left(\frac{m-\lambda n}{1+\lambda},\frac{2(m+\lambda n)}{1+\lambda}\right)$,

将 P 点的坐标代入 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$,化简得 $mn=\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}$,

设 $\angle AOB=2\theta$,则 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2$,$\tan\theta=\frac{1}{2}$,$\sin 2\theta=\frac{4}{5}$,

又 $|OA|=\sqrt{5}m$,$|OB|=\sqrt{5}n$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin 2\theta=2mn=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$,

记 $S(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$,$\lambda\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,

则 $S'(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$,由 $S'(\lambda)=0$ 得 $\lambda=1$.

又 $S(1)=2$,$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}$,$S(2)=\frac{9}{4}$.

所以当 $\lambda=1$ 时,$\triangle AOB$ 面积取到最小值 2,当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时,$\triangle AOB$ 面积取到最大值 $\frac{8}{3}$.

所以 $\triangle AOB$ 面积的取值范围是 $\left[2,\frac{8}{3}\right]$.

方法二:设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$,

由题意知 $|k|<2$,$m>0$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y=2x,\end{cases}$ 得 A 点的坐标为 $\left(\frac{m}{2-k},\frac{2m}{2-k}\right)$,

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y=-2x,\end{cases}$ 得 B 点的坐标为 $\left(\frac{-m}{2+k},\frac{2m}{2+k}\right)$,

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,得 P 点的坐标为

$\left(\frac{m}{1+\lambda}\left(\frac{1}{2-k}-\frac{\lambda}{2+k}\right),\frac{2m}{1+\lambda}\left(\frac{1}{2-k}+\frac{\lambda}{2+k}\right)\right)$,

将 P 点的坐标代入 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$,得 $\frac{4m^2}{4-k^2}=\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$,

设 Q 为直线 AB 与 y 轴的交点,

则 Q 点的坐标为 $(0,m)$.

$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOQ}+S_{\triangle BOQ}$.

$=\frac{1}{2}|OQ|\cdot|x_A|+\frac{1}{2}|OQ|\cdot|x_B|=\frac{1}{2}m(x_A-x_B)$

$=\frac{1}{2}m\left(\frac{m}{2-k}+\frac{m}{2+k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4m^2}{4-k^2}$

$=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+1$,

则 $S'(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$,

由 $S'(\lambda)=0$ 得 $\lambda=1$.

又 $S(1)=2$，$S\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}$，$S(2)=\frac{9}{4}$，

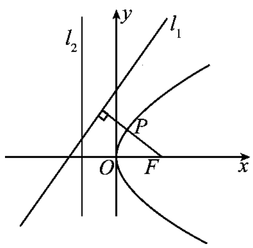
所以当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AOB$ 面积取到最小值 2，当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$\triangle AOB$ 面积取到最大值 $\frac{8}{3}$.

所以 $\triangle AOB$ 面积的取值范围是 $\left[2,\frac{8}{3}\right]$.

第 49 讲　抛物线

例 1　A　【解析】直线 $l_2:x=-1$ 为抛物线 $y^2=4x$ 的准线，由抛物线的定义知，P 到 l_2 的距离等于 P 到抛物线的焦点 $F(1,0)$ 的距离，故本题化为在抛物线 $y^2=4x$ 上找一个点 P 使得 P 到点 $F(1,0)$ 和直线 l_2 的距离之和最小，最小值为 $F(1,0)$ 到直线 $l_1:4x-3y+6=0$ 的距离，

即 $d_{\min}=\frac{|4-0+6|}{5}=2$.



例 1 变式题　B　【解析】∵抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，准线为 $x=-2$，∴$K(-2,0)$，设 $A(x_0,y_0)$，过 A 点向准线作垂线 AB，则 $B(-2,y_0)$.

∵ $|AK|=\sqrt{2}|AF|$，

又 $AF=AB=x_0-(-2)=x_0+2$，

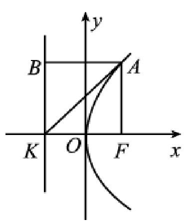
∴由 $BK^2=AK^2-AB^2$ 得 $y_0^2=(x_0+2)^2$，

即 $8x_0=(x_0+2)^2$，

解得 $A(2,\pm4)$.

∴$\triangle AFK$ 的面积为

$\frac{1}{2}|KF|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，故选 B.



例 2　B　【解析】抛物线 $y^2=ax(a\neq0)$ 的焦点 F 坐标为 $\left(\frac{a}{4},0\right)$，则直线 l 的方程为 $y=2\left(x-\frac{a}{4}\right)$，它与 y 轴的交点为 $A\left(0,-\frac{a}{2}\right)$，所以 $\triangle OAF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\left|\frac{a}{4}\right|\cdot\left|\frac{a}{2}\right|=4$，解得 $a=\pm8$. 所以抛物线方程为 $y^2=\pm8x$，故选 B.

例 2 变式题　【解答】(1)方法一：设所求的抛物线方程为

$y^2=-2p_1x$ 或 $x^2=2p_2y(p_1,p_2>0)$，

∵过点 $(-3,2)$，

∴$4=-2p_1\times(-3)$ 或 $9=2p_2\cdot2$.

∴$p_1=\frac{2}{3}$ 或 $p_2=\frac{9}{4}$.

∴所求的抛物线方程为

$y^2=-\frac{4}{3}x$ 或 $x^2=\frac{9}{2}y$，

$y^2=-\frac{4}{3}x$ 的准线方程是 $x=\frac{1}{3}$，

$x^2=\frac{9}{2}y$ 的准线方程是 $y=-\frac{9}{8}$.

方法二：设所求的抛物线方程为

$y^2=mx$ 或 $x^2=ny$，

∵过点 $(-3,2)$，

∴$4=-3m$ 或 $9=2n$.

∴$m=-\frac{4}{3}$ 或 $n=\frac{9}{2}$.

∴所求的抛物线方程为

$y^2=-\frac{4}{3}x$ 或 $x^2=\frac{9}{2}y$，

$y^2=-\frac{4}{3}x$ 的准线方程是 $x=\frac{1}{3}$，

$x^2=\frac{9}{2}y$ 的准线方程是 $y=-\frac{9}{8}$.

(2)令 $x=0$ 得 $y=-2$，令 $y=0$ 得 $x=4$，

∴抛物线的焦点为 $(4,0)$ 或 $(0,-2)$.

当焦点为 $(4,0)$ 时，$\frac{p}{2}=4$，

∴$p=8$，此时抛物线方程 $y^2=16x$；

当焦点为 $(0,-2)$ 时，$\frac{p}{2}=-2$，

∴$p=-4$，此时抛物线方程为 $x^2=-8y$.

∴所求抛物线的方程为

$y^2=16x$ 或 $x^2=-8y$，

对应的准线方程分别是 $x=-4$，$y=2$.

例 3　【解答】(1)由抛物线方程得其准线方程：$y=-\frac{p}{2}$，根据抛物线定义点 $A(m,4)$ 到焦点的距离等于它到准线的距离，即 $4+\frac{p}{2}=\frac{17}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$，

∴抛物线方程为：$x^2=y$，将 $A(m,4)$ 代入抛物线方程，解得 $m=\pm2$.

(2)由题意知，过点 $P(t,t^2)$ 的直线 PQ 斜率存在且不为 0，设其为 k.

则 $l_{PQ}:y-t^2=k(x-t)$，

当 $y=0$，$x=\frac{-t^2+kt}{k}$，则 $M\left(\frac{-t^2+kt}{k},0\right)$.

联立方程 $\begin{cases}y-t^2=k(x-t),\\x^2=y,\end{cases}$

整理得 $x^2-kx+t(k-t)=0$.

即 $(x-t)[x-(k-t)]=0$，

解得 $x=t$，或 $x=k-t$，

∴$Q(k-t,(k-t)^2)$，而 $QN\perp QP$，

∴直线 NQ 斜率为 $-\frac{1}{k}$.

∴$l_{NQ}:y-(k-t)^2=-\frac{1}{k}[x-(k-t)]$，

联立方程$\begin{cases} y-(k-t)^2=-\dfrac{1}{k}[x-(k-t)], \\ x^2=y. \end{cases}$

整理得 $x^2+\dfrac{1}{k}x-\dfrac{1}{k}(k-t)-(k-t)^2=0$,

即 $kx^2+x-(k-t)[k(k-t)+1]=0$,

$[kx+k(k-t)+1][x-(k-t)]=0$,

解得 $x=-\dfrac{k(k-t)+1}{k}$,或 $x=k-t$,

$\therefore N\left(-\dfrac{k(k-t)+1}{k},\dfrac{[k(k-t)+1]^2}{k^2}\right)$,

而抛物线在点 N 处切线斜率

$k_{切}=y'\Big|_{x=-\frac{k(k-t)+1}{k}}=-2\cdot\dfrac{k(k-t)+1}{k}$.

于是抛物线在点 N 处的切线方程为

$y-\dfrac{[k(k-t)+1]^2}{k^2}=$

$2\left[-\dfrac{k(k-t)+1}{k}\right]\left[x+\dfrac{k(k-t)+1}{k}\right]$,

将 M 点的坐标代入得 $-\dfrac{[k(k-t)+1]^2}{k^2}$

$=-2\left[\dfrac{k(k-t)+1}{k}\right]^2-2\cdot\dfrac{k(k-t)+1}{k}\cdot\dfrac{t(k-t)}{k}$,

整理得 $(k^2-kt+1)(k^2-kt-2t^2+1)=0$,

当 $k^2-kt+1=0$.

即当 $k-t+\dfrac{1}{k}=0$ 时,$t=k+\dfrac{1}{k}>0$,

$\therefore k>0$,$\therefore t=k+\dfrac{1}{k}\geqslant 2$;

当 $k^2+kt-2t^2+1=0$ 时 $\Delta=9-t^2-4\geqslant 0$,

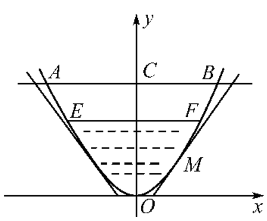
因为 $t>0$,所以 $t\geqslant\dfrac{2}{3}$,

当 $t=\dfrac{2}{3}$ 时,$k=-\dfrac{1}{3}$,

$P\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{9}\right)$,$Q(-1,1)$,$N(4,16)$ 符合题意,

综上,t 的最小值为 $\dfrac{2}{3}$.

例 4 【解答】(1)建立如图所示的直角坐标系,则 $A(-1,1.5)$,$B(1,1.5)$,$C(0,1.5)$.



设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$,由点 $A(-1,1.5)$ 代入方程,得到 $1=2p\times 1.5$,即 $p=\dfrac{1}{3}$,所以抛物线方程为 $x^2=\dfrac{2}{3}y$,由点 E 的纵坐标为 1,得到点 E 横坐标为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,所以截面图中水面宽度为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$m.

(2)如图所示,设抛物线上一点 $M\left(t,\dfrac{3}{2}t^2\right)(t>0)$,

因为改造后水渠只准挖土,而且要求挖出的土最少,所以只能沿过点 M 与抛物线相切的切线挖土.

由 $x^2=\dfrac{2}{3}y$,即 $y=\dfrac{3}{2}x^2$ 求导得 $y'=3x$,所以过点 M 的切线斜率为 $3t$,切线方程为 $y-\dfrac{3}{2}t^2=3t(x-t)$,令 $y=0$,则 $x_1=\dfrac{t}{2}$,令 $y=\dfrac{3}{2}$,则 $x_2=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}$,

所以截面面积为

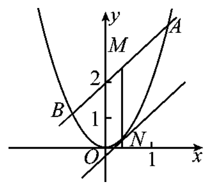
$S=\dfrac{1}{2}(2x_1+2x_2)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\left(t+\dfrac{1}{2t}\right)\geqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

所以截面梯形的下底边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m 时,才能使所挖的土最少.

第 50 讲 直线与圆锥曲线

例 1 【解答】解法一:(1)证明:如图所示,设 $A(x_1,2x_1^2)$,$B(x_2,2x_2^2)$,



把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得

$2x^2-kx-2=0$,

由韦达定理得

$x_1+x_2=\dfrac{k}{2}$,$x_1x_2=-1$,

$\therefore x_N=x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{4}$,

$\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\dfrac{k}{4},\dfrac{k^2}{8}\right)$.

设抛物线在点 N 处的切线 l 的方程为

$y-\dfrac{k^2}{8}=m\left(x-\dfrac{k}{4}\right)$,

将 $y=2x^2$ 代入上式得 $2x^2-mx+\dfrac{mk}{4}-\dfrac{k^2}{8}=0$,

$\because$ 直线 l 与抛物线 C 相切,

$\therefore\Delta=m^2-8\left(\dfrac{mk}{4}-\dfrac{k^2}{8}\right)=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2=0$,

$\therefore m=k$. 即 $l/\!/AB$.

(2)假设存在实数 k,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$,则 $NA\perp NB$,

又 $\because M$ 是 AB 的中点,

由(1)知 $y_M=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)=\dfrac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\dfrac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k^2}{2}+4\right)=\dfrac{k^2}{4}+2$.

$\because MN\perp x$ 轴,

$\therefore|MN|=|y_M-y_N|=\dfrac{k^2}{4}+2-\dfrac{k^2}{8}=\dfrac{k^2+16}{8}$.

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_1}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{k}{2}\right)^2-4\times(-1)}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$.

$\therefore\dfrac{k^2+16}{8}=\dfrac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$,解得 $k=\pm 2$.

即存在 $k=\pm 2$,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

解法二:(1)如图所示,设 $A(x_1,2x_1^2)$,$B(x_2,2x_2^2)$,

把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2-kx-2=0$. 由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$,$x_1x_2=-1$.

$\therefore x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$,$\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$,

$\because y=2x^2$,$\therefore y'=4x$,

$\therefore$抛物线在点 N 处的切线 l 的斜率为 $4\times\frac{k}{4}=k$,

$\therefore l\parallel AB$.

(2)假设存在实数 k,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

由(1)知 $\overrightarrow{NA}=\left(x_1-\frac{k}{4},2x_1^2-\frac{k^2}{8}\right)$,

$\overrightarrow{NB}=\left(x_2-\frac{k}{4},2x_2^2-\frac{k^2}{8}\right)$,则

$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$

$=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)+\left(2x_1^2-\frac{k^2}{8}\right)\left(2x_2^2-\frac{k^2}{8}\right)$

$=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)+4\left(x_1^2-\frac{k^2}{16}\right)\left(x_2^2-\frac{k^2}{16}\right)$

$=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)\cdot\left[1+4\left(x_1+\frac{k}{4}\right)\left(x_2+\frac{k}{4}\right)\right]$

$=\left[x_1x_2-\frac{k}{4}(x_1+x_2)+\frac{k^2}{16}\right]\cdot\left[1+4x_1x_2+k(x_1+x_2)+\frac{k^2}{4}\right]$

$=\left(-1-\frac{k}{4}\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{16}\right)\cdot\left[1+4\times(-1)+k\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{4}\right]$

$=\left(-1-\frac{k^2}{16}\right)\left(-3+\frac{3}{4}k^2\right)=0$,

$\because -1-\frac{k^2}{16}<0$,$\therefore -3+\frac{3}{4}k^2=0$,解得 $k=\pm 2$.

即存在 $k=\pm 2$,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

例 2 【解答】(1)设 $P(x,y)$,由椭圆定义可知,点 P 的轨迹 C 是以$(0,-\sqrt{3})$,$(0,\sqrt{3})$为焦点,长半轴长为 2 的椭圆. 它的短半轴长 $b=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$,

故曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,其坐标满足

$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+1.\end{cases}$ 消去 y 并整理得$(k^2+4)x^2+2kx-3=0$,

故 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+4}$,$x_1x_2=-\frac{3}{k^2+4}$.

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,即 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

而 $y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$,

于是 $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{k^2+4}-\frac{3k^2}{k^2+4}-\frac{2k^2}{k^2+4}+1=\frac{-4k^2+1}{k^2+4}$.

所以 $k=\pm\frac{1}{2}$时,$x_1x_2+y_1y_2=0$,故$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

当 $k=\pm\frac{1}{2}$时,$x_1+x_2=\mp\frac{4}{17}$,$x_1x_2=-\frac{12}{17}$.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}$,

而$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=\frac{4^2}{17^2}+4\times\frac{12}{17}=\frac{4^3\times 13}{17^2}$,

所以 $|\overrightarrow{AB}|=\frac{4\sqrt{65}}{17}$.

例 2 变式题 【解答】(1)设 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其半焦距为 $c(c>0)$. 则 $C_2:y^2=4cx$.

由条件知$(2b)^2=2a\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$,得 $a=2c$.

又$\because x=\frac{a^2}{c}$,$\therefore x=4c$.

C_2的准线方程为 $x=-c$.

由条件知 $5c=15$,所以 $c=3$,故 $a=6$,$b=3\sqrt{3}$.

从而 $C_1:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$,$C_2:y^2=12x$.

(2)由题设知 $l:y=x-c$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$P(x_3,y_3)$,$Q(x_4,y_4)$.

由(1)知 $C_1:\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$,即 $3x^2+4y^2=12c^2$.

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12c^2,\\ y=x-c\end{cases}$知 x_3,x_4 满足 $7x^2-8cx-8c^2=0$,

从而 $|PQ|=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}$

$=\sqrt{2}|x_3-x_4|=\frac{24}{7}c$.

由条件 $|PQ|=\frac{36}{7}$,得 $c=\frac{3}{2}$,故 $C_2:y^2=6x$.

由$\begin{cases}y^2=6x,\\ y=x-\frac{3}{2},\end{cases}$得 $x^2-9x+\frac{9}{4}=0$,所以 $x_1+x_2=9$.

于是 $|MN|=|MF|+|FN|=x_1+x_2+2c=12$.

例 3 【解答】(1)联立 $y=x^2$ 与 $y=x+2$ 得 $x_A=-1$,$x_B=2$,则 AB 中点 $Q\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$,

设线段 PQ 的中点 M 坐标为(x,y),

则 $x=\frac{\frac{1}{2}+s}{2}$,$y=\frac{\frac{5}{2}+t}{2}$,即 $s=2x-\frac{1}{2}$,$t=2y-\frac{5}{2}$,

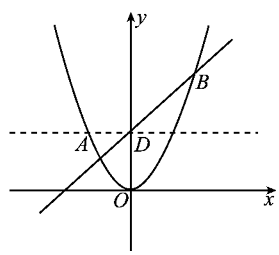
又点 P 在曲线 C 上,

$\therefore 2y-\frac{5}{2}=\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$,化简可得 $y=2x^2-x+\frac{11}{8}$,又点 P 是 L 上的任一点,

且不与点 A 和点 B 重合,

则$-1<2x-\frac{1}{2}<2$,即$-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}$,

$\therefore$中点 M 的轨迹方程为$y=2x^2-x+\frac{11}{8}\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}\right)$.



(2)曲线 G 化为$(x-a)^2+(y-2)^2=\frac{49}{25}$,其轨迹为以$(a,2)$为圆心,$\frac{7}{5}$为半径的圆,要使其与 D 有公共点且 a 最小,只需圆心$(a,2)$在直线 AB 的左上侧且与直线 AB 相切即可,所以有 $\frac{7}{5}=\frac{|a-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$,又 $a<$

0,所以 $a=-\frac{7}{5}\sqrt{2}$.

例3变式题 【解答】(1)由题意得$\begin{cases}b=1,\\2\cdot\frac{b^2}{a}=1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$

所求的椭圆方程为$\frac{y^2}{4}+x^2=1$,

(2)不妨设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$P(t,t^2+h)$则抛物线 C_2 在点 P 处的切线斜率为 $y'|_{x=t}=2t$,直线 MN 的方程为$y=2tx-t^2+h$,将上式代入椭圆 C_1 的方程中,得

$4x^2+(2tx-t^2+h)^2-4=0$,

即 $4(1+t^2)x^2-4t(t^2-h)x+(t^2-h)^2-4=0$,

因为直线 MN 与椭圆 C_1 有两个不同的交点,所以有

$\Delta_1=16[-t^4+2(h+2)t^2-h^2+4]>0$,

设线段 MN 的中点的横坐标是 x_3,

则 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{t(t^2-h)}{2(1+t^2)}$,

设线段 PA 的中点的横坐标是 x_4,

则 $x_4=\frac{t+1}{2}$,由题意得 $x_3=x_4$,即有 $t^2+(1+h)t+1=0$,

其中 $\Delta_2=(1+h)^2-4\geqslant 0$,

∴$h\geqslant 1$ 或 $h\leqslant -3$;

当 $h\leqslant -3$ 时有 $h+2<0$,$4-h^2<0$,因此不等式 $\Delta_1=16[-t^4+2(h+2)t^2-h^2+4]>0$ 不成立;因此 $h\geqslant 1$,当 $h=1$ 时代入方程 $t^2+(1+h)t+1=0$ 得 $t=-1$,将 $h=1$,$t=-1$ 代入不等式

$\Delta_1=16[-t^4+2(h+2)t^2-h^2+4]>0$ 成立,因此 h 的最小值为 1.

例4 【解答】(1)由题意,$c=1$,可设椭圆方程为

$\frac{x^2}{1+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

因为 A 在椭圆上,所以$\frac{1}{1+b^2}+\frac{9}{4b^2}=1$,

解得 $b^2=3$,$b^2=-\frac{3}{4}$(舍去).

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)证明:设直线 AE 方程为 $y=k(x-1)+\frac{3}{2}$,代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得

$(3+4k^2)x^2+4k(3-2k)x+4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12=0$.

设 $E(x_E,y_E)$,$F(x_F,y_F)$.因为点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$在椭圆上,

所以 $x_E=\frac{4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12}{3+4k^2}$,$y_E=kx_E+\frac{3}{2}-k$.

又直线 AF 的斜率与 AE 的斜率互为相反数,在上式中以 $-k$代 k,可得

$x_F=\frac{4\left(\frac{3}{2}+k\right)^2-12}{3+4k^2}$,$y_F=-kx_F+\frac{3}{2}+k$.

所以直线 EF 的斜率

$k_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{-k(x_F+x_E)+2k}{x_F-x_E}=\frac{1}{2}$.

即直线 EF 的斜率为定值,其值为$\frac{1}{2}$.

例5 【解答】(1)证明:设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$,$E(x_E,y_E)$、$F(x_F,y_F)$,

则直线 AB 的方程:$y=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}(x-x_1)+x_1^2$.

即 $y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$,

因 $M(x_0,y_0)$在 AB 上,所以 $y_0=(x_1+x_2)x_0-x_1x_2$,①

又直线 AP 的方程:$y=\frac{x_1^2-y_0}{x_1}x+y_0$,

由$\begin{cases}y=\frac{x_1^2-y_0}{x_1}x+y_0,\\x^2=y.\end{cases}$ 得 $x^2-\frac{x_1^2-y_0}{x_1}x-y_0=0$.

所以 $x_1+x_E=\frac{x_1^2-y_0}{x_1}$

$\Rightarrow x_E=-\frac{y_0}{x_1}$,$y_E=\frac{y_0^2}{x_1^2}$.

同理,$x_F=-\frac{y_0}{x_2}$,$y_F=\frac{y_0^2}{x_2^2}$.

所以直线 EF 的方程:$y=-\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)y_0x-\frac{y_0^2}{x_1x_2}$.

把 N 点坐标 $x=-x_0$,代入得 $y=\frac{y_0}{x_1x_2}[(x_1+x_2)x_0-y_0]$.

将①代入上式得 $y=y_0$,即 N 点在直线 EF 上,所以 E,F,N 三点共线.

(2)解:由已知 A、B、M、N 共线,所以 $A(-\sqrt{y_0},y_0)$,$B(\sqrt{y_0},y_0)$.

以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+(y-y_0)^2=y_0$,

由$\begin{cases}x^2+(y-y_0)^2=y_0,\\x^2=y,\end{cases}$ 得

$y^2-(2y_0-1)y+y_0^2-y_0=0$.

所以 $y=y_0$(舍去)或 $y=y_0-1$.

要使圆与抛物线有异于 A,B 的交点,则 $y_0-1\geqslant 0$.

所以存在 $y_0\geqslant 1$,使以 AB 为直径的圆与抛物线有异于 A,B 的交点 $T(x_T,y_T)$.

则 $y_T=y_0-1$,所以交点 T 到 AB 的距离为

$y_0-y_T=y_0-(y_0-1)=1$.

第51讲　曲线与方程

例1 【解答】设点 P 的坐标为(x,y),

则 $d=4\sqrt{(x-3)^2+y^2}+3|x-2|=x+18$,①

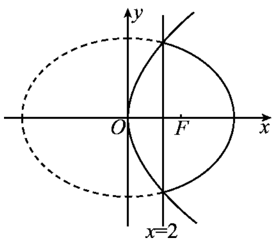
当 $x>2$ 时,由①得 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=6-\frac{1}{2}x$,

化简得$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

当 $x\leqslant 2$ 时,由①得 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=3+x$,

化简得 $y^2=12x$,

故点 P 的轨迹C 是椭圆C_1:$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 在直线 $x=2$ 的右侧部分与抛物线 C_1:$y^2=12x$ 在直线 $x=2$ 的左侧部分(包括它与直线 $x=2$ 的交点)所组成的曲线(参见图所示).



例 2 【解答】(1)根据题意,知三角形的周长:$|PA|+|PB|+|AB|=10$,所以$|PA|+|PB|=6>4=|AB|$,故 P 点的轨迹是椭圆,且 $2a=6,2c=4$,即 $a=3,c=2,b=\sqrt{5}$,因此其方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1(y\neq 0)$.

(2)设圆 P 的半径为 r,则$|PA|=r+1$,

$|PB|=r$,因此$|PA|-|PB|=1$.

由双曲线的定义知,P 点的轨迹为双曲线的右支,

且 $2a=1,2c=4$,即 $a=\frac{1}{2},c=2,b=\frac{\sqrt{15}}{2}$,

因此其方程为 $4x^2-\frac{4}{15}y^2=1\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$.

例 2 变式题 【解答】设动圆的圆心为 $M(x,y)$,半径为 R,设已知圆的圆心分别为 O_1、O_2,将圆的方程分别配方得:$(x+3)^2+y^2=4$,$(x-3)^2+y^2=100$,当动圆与圆 O_1 相外切时,

有$|O_1M|=R+2$,①

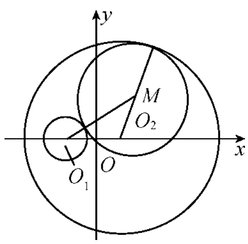
当动圆与圆 O_2 相内切时,

有$|O_2M|=10-R$,②

将①②两式相加,得

$|O_1M|+|O_2M|=12>|O_1O_2|$,

∴动圆圆心 $M(x,y)$到点 $O_1(-3,0)$和 $O_2(3,0)$的距离和是常数 12.



所以点 M 的轨迹是焦点为 $O_1(-3,0)$、$O_2(3,0)$,长轴长等于 12 的椭圆.

∴$2c=6,2a=12$. ∴$c=3,a=6$,

∴$b^2=36-9=27$,

∴圆心轨迹方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$,轨迹为椭圆.

例 3 【解答】设 $Q(x,y)$,$P(x',y')$,由 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=4$

得$(-1-x,0-y)\cdot(1-x,4-y)=4$,

即 $x^2+y^2-4y-5=0$.

又 P,Q两点关于 $y=2x-8$ 对称,

所以得到$\begin{cases}\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{1}{2},\\ \frac{y+y'}{2}=2\cdot\frac{x+x'}{2}-8,\end{cases}$

即$\begin{cases}x=\frac{4}{5}y'-\frac{3}{5}x'+\frac{32}{5},\\ y=\frac{3}{5}y'+\frac{4}{5}x'-\frac{16}{5},\end{cases}$代入 $x^2+y^2-4y-5=0$ 得

$(x'-8)^2+(y'+2)^2=9$,所以点 Q 的轨迹方程为

$(x-8)^2+(y+2)^2=9$.

例 3 变式题 【解答】设动点 P 的坐标为(x,y),点 Q 的坐标为(x_1,y_1),则 N 点的坐标为$(2x-x_1,2y-y_1)$.

∵N 在直线 $x+y=2$ 上,

∴$2x-x_1+2y-y_1=2$. ①

又∵PQ 垂直于直线 $x+y=2$,

∴$\frac{y-y_1}{x-x_1}=1$,

即 $x-y+y_1-x_1=0$. ②

①、②联立,解得$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-1,\\ y_1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-1.\end{cases}$ ③

又点 Q 在双曲线 $x^2-y^2=1$ 上.

∴$x_1^2-y_1^2=1$. ④

③代入④,得动点 P 的轨迹方程为

$2x^2-2y^2-2x+2y-1=0$.

例 4 【解答】设所求双曲线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$,将 $y^2=4x$ 代入此方程整理得

$a^2x^2-4b^2x+a^2b^2=0$,

∵抛物线和双曲线仅有两个公共点,根据它们的对称性,这两个点的横坐标应相等,因此方程

$a^2x^2-4b^2x+a^2b^2=0$ 应有等根.

∴$\Delta=16b^4-4a^4b^2=0$,即 $a^2=2b$.

由$\begin{cases}y=2x,\\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\end{cases}$得$(4b^2-a^2)x^2-a^2b^2=0$.

由弦长公式得

$2\sqrt{5}=\sqrt{1+2^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{5}\sqrt{(-4)\left(\frac{-a^2b^2}{4b^2-a^2}\right)}$.

即 $a^2b^2=4b^2-a^2$.

由$\begin{cases}a^2=2b,\\ a^2b^2=4b^2-a^2,\end{cases}$得$\begin{cases}a^2=2,\\ b^2=1,\end{cases}$

∴双曲线方程为$\frac{y^2}{2}-x^2=1$.

第九单元 统计与统计案例

第 52 讲 随机抽样

例 1 B 【解析】抽取第一次中奖号码时运用了系统抽样的方法来确定中奖号码,中奖号码依次为:088,188,288,388,488,588,688,788,888,988;抽取第二次中奖号码时总数只有 10 个号码,总体个数较少,采用简单随机抽样.

例 1 变式题 【解答】S1 在随机数表中任选一个数作为开始,任选一方向作为读数方向,比如选第 7 行第 3 个数"4",向右读;

S2 从数"4"开始,向右读,每次取三位,凡不在 600~999 中的数跳过去不读. 前面已经读过的也跳过去不读. 依次可得 753,724,688,770,721,763,676,630,785,916;

S3 以上号码对应的 10 个零件就是要抽取的对象.

例 2 37 20 【解析】由分组可知,抽号的间隔为 5,又因为第 5 组抽出的号码为 22,所以第 6 组抽出的号码为 27,第 7 组抽出的号码为 32,第 8 组抽出的号码为 37. 40 岁以下年

龄段的职工数为 $200\times0.5=100$,则应抽取的人数为 $\frac{40}{200}\times100=20$ 人.

例 2 变式题 24,157,290,323,456,589,622,755,888,921 {21,22,23,54,55,56,87,88,89,90} 【解析】当 $x=24$ 时,按规则可知所抽取的样本的 10 个号码依次为:24,157,290,323,456,589,622,755,888,921;当 $k=0,1,2,\cdots,9$ 时,$33k$ 的值依次为 0,33,66,99,132,165,198,231,264,297;又抽取样本的 10 个号码中有一个的后两位数是 87,从而 x 可以为 87,54,21,88,55,22,89,56,23,90,所以 x 的取值集合是{21,22,23,54,55,56,87,88,89,90}.

例 3 40 【解析】由条件易知 B 层中抽取的样本数是 2,设 B 层总体数是 n,则又由 B 层中甲、乙都被抽到的概率是 $\frac{C_2^2}{C_n^2}=\frac{1}{28}$,可得 $n=8$,所以总体中的个数是 $4\times8+8=40$.

例 3 变式题 B 【解析】中年职工和老年职工共有 $430-160=270$ 人,中年职工人数是老年职工人数的 2 倍,所以老年职工是 $\frac{1}{3}\times270=90$ 人;抽取的样本中有青年职工 32 人,可以知道是 5 个人中抽取一个,故老年职工要抽取 18 人. 正确选项是 B.

例 4 D 【解析】参加学校管理的综合座谈采用系统抽样较好,具有代表性;研究数学教与学的问题采用分层抽样较为合适,这样可以使研究更能反映不同层次的学生;"幸运之星"就不能再用系统抽样,那样就不具有"幸运"之意了,合适的抽样方法就是用简单随机抽样,以体现"幸运"之意. 正确选项 D.

例 4 变式题 A 【解析】三种抽样方法的特点就是保证了每个个体从总体中抽到的可能性都相同,保证了公平性. 正确选项 A.

第 53 讲 用样本估计总体

例 1 A 【解析】净重小于 100 克的频率是 $(0.05+0.10)\times2=0.30$,故这批产品的个数 x 满足 $\frac{36}{x}=0.30$,即 $x=120$,净重大于或等于 98 克而小于 104 克的频率是 $(0.100+0.125+0.150)\times2=0.75$,故这批产品数量是 $120\times0.75=90$. 正确选项是 A.

例 1 变式题 1200 【解析】设鱼池中鱼的条数为 n,则 $\frac{120}{n}=\frac{10}{100}$,故 $n=1200$.

例 2 【解答】(1)茎叶图如图所示:

A		B
9 7	35	
8 7	36	3
5	37	1 4
8	38	3 5 6
9 2	39	1 2 4 4 5 7 7
5 0	40	0 1 1 3 6 7
5 4 2	41	0 2 5 6
7 3 3 1	42	2
4 0 0	43	0
5 5 3	44	
4 1	45	

(2)用茎叶图处理现有的数据不仅可以看出数据的分布状况,而且可以看出每组中的具体数据.

(3)通过观察茎叶图,可以发现品种 A 的平均每亩产量为 411.08 千克,品种 B 的平均亩产量为 397.8 千克. 由此可知,品种 A 的平均亩产量比品种 B 的平均亩产量高. 但品种 A 的亩产量不够稳定,而品种 B 的亩产量比较集中在平均产量附近.

例 2 变式题 【解答】甲、乙两人考核成绩的茎叶图如图所示:

甲		乙
5	6	
6 5 1	7	9
9 8 6 1	8	3 6 8
5 4 1	9	3 8 8 9
7	10	1 3
0	11	4

从这个茎叶图上可看出,乙的得分情况是大致对称的,中位数是 99;甲的得分情况除一个特殊得分外,也大致对称,中位数是 89. 因此乙成绩比较稳定,总体得分情况比甲好.

例 3 1013 【解析】由于是按照分层抽样,故抽取的 100 件产品的比例和产量的比例是相同的,即在第一、二、三分厂抽取的产品数量之比是 1∶2∶1,也即在第一、二、三分厂抽取的产品数量分别为 25,50,25 件,故这 100 件产品的使用寿命的平均值

$$\bar{x}=\frac{980\times25+1020\times50+1032\times25}{100}$$

$$=\frac{980\times1+1020\times2+1032\times1}{4}=1013(\mathrm{h}).$$

例 3 变式题 7.75 【解析】$6\times0.15+7\times0.25+8\times0.40+9\times0.1+10\times0.1=7.75$.

例 4 $\frac{2}{5}$ 【解析】两个班的平均数都是 7,

甲班的方差为:

$$s^2=\frac{(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2}{5}$$

$$=\frac{2}{5},$$

乙班的方差为:

$$s^2=\frac{(6-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2}{5}$$

$$=\frac{6}{5}.$$

故方差较小的一个为 $\frac{2}{5}$.

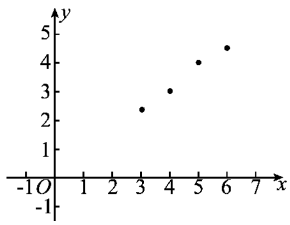
例 4 变式题 2 【解析】因为样本平均数 $\bar{x}=\frac{1}{5}(125+124+121+123+127)=124$,则样本方差 $s^2=\frac{1}{5}(1^2+0^2+3^2+1^2+3^2)=4$,所以 $s=2$.

第 54 讲 变量的相关性与统计案例

例 1 C 【解析】由这两个散点图可以判断,变量 x 与 y 负相关,u 与 v 正相关,选 C.

例 1 变式题 D 【解析】应当为闭区间.

例 2 【解答】(1)散点图如图所示:



(2)由系数公式可知,$\overline{x}=4.5$,$\overline{y}=3.5$,

$\hat{b}=\dfrac{66.5-4\times4.5\times3.5}{86-4\times4.5^2}$

$=\dfrac{66.5-63}{5}$

$=0.7$.

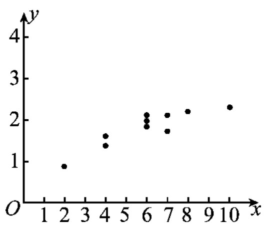
$\hat{a}=3.5-0.7\times\dfrac{9}{2}=0.35$,

所以线性回归方程为

$\hat{y}=0.7x+0.35$.

(3)$x=100$ 时,$\hat{y}=0.7x+0.35=70.35$,所以预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技术改造前降低 $90-70.35=19.65$ 吨标准煤.

例 2 变式题 【解答】(1)由题意知,年收入 x 为解释变量,年饮食支出 y 为预报变量,作散点图如图所示.



从图可以看出,样本点呈条状分布,年收入和年饮食支出有比较好的线性相关关系,因此可以用线性回归方程刻画它们之间的关系.

$\because\overline{x}=6$,$\overline{y}=1.83$,$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=406$,$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=35.13$,$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=117.7$,

$\therefore\hat{b}\approx0.172$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=1.83-0.172\times6=0.798$,

从而得到回归直线方程为 $\hat{y}=0.172x+0.798$.

(2)$\hat{y}=0.172\times9+0.798=2.346$ 万元.

例 3 【解答】由所给数据可求得:

$\overline{x}=\dfrac{1}{10}(120+108+117+\cdots+99+108)=107.8$,

$\overline{y}=\dfrac{1}{10}(84+64+\cdots+57+71)=68$,

$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=120^2+108^2+\cdots+99^2+108^2=116584$,

$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=84^2+64^2+\cdots+57^2+71^2=47384$,

$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=120\times84+108\times64+\cdots+99\times57+108\times71$
$=73796$.

所以,相关系数为

$r=\dfrac{73796-10\times107.8\times68}{\sqrt{(116584-10\times107.8^2)(47384-10\times68^2)}}\approx0.7506$.

由 $0.7506>0.75$ 知,两次数学考试成绩有显著的线性相关性.

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\,\overline{x}^2}=\dfrac{73796-10\times107.8\times68}{116584-10\times107.8^2}\approx1.3099$,

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=68-1.3099\times107.8\approx-73.2072$.

$\therefore\hat{y}=1.3077x-73.2072$,

$\therefore$当 $x=118$ 时,$\hat{y}=1.3077\times118-73.2072=81.1014\approx81$.

例 3 变式题 【解答】(1)$\overline{x}=\dfrac{1}{6}\times(26+18+13+10+4-1)\approx11.7$,

$\overline{y}=\dfrac{1}{6}\times(20+24+34+38+50+64)\approx38.3$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=26^2+18^2+13^2+10^2+4^2+(-1)^2=1286$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=26\times20+18\times24+13\times34+10\times38+4\times50-1\times64=1910$,

$\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2=20^2+24^2+34^2+50^2+64^2+38^2=10172$.

所以 $r\approx-0.98$,由于 $|r|\approx0.98$,所以热茶销售量与气温之间具有很强的线性相关关系.

(2)用 x 表示气温,y 表示杯数,根据斜率和截距的最小二乘计算公式得

$\hat{b}\approx-1.6758$,$\hat{a}\approx57.9069$,

所以所求的回归直线方程是 $\hat{y}=-1.6758x+57.9069$.

例 4 【解答】(1)甲厂抽查的产品中有 360 件优质品,从而甲厂生产的零件的优质品率估计为$\dfrac{360}{500}=72\%$;乙厂抽查的产品中有 320 件优质品,从而乙厂生产的零件的优质品率估计为$\dfrac{320}{500}=64\%$.

(2)

	甲厂	乙厂	合计
优质品	360	320	680
非优质品	140	180	320
合计	500	500	1000

$\chi^2=\dfrac{1000\times(360\times180-320\times140)^2}{500\times500\times680\times320}\approx7.35>6.635$,

所以有 99% 的把握认为“两个分厂生产的零件的质量有差异”.

例 4 变式题 【解答】通过计算 K^2 的观测值知,

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{103(5\times18-10\times70)^2}{15\times88\times28\times75}$

$\approx13.826>10.828$,

$P(\chi^2\geqslant10.828)\approx0.001$,

所以我们有 99.9% 的把握认为穿新防护服比旧防护服对预防这种皮炎有效果.

第十单元　计数原理

第 55 讲　基本计数原理

例 1　45　【解析】可以分四类选派方案,即从甲、乙、丙、丁四个部门进行选派.从甲部门选派有 8 种不同的选派方法,

从乙部门选派有 10 种不同的选派方法,从丙部门选派有 12 种不同的选派方法,从丁部门选派有 15 种不同的选派方法. 根据分类加法计数原理,共有不同的选派方法 $8+10+12+15=45$ 种.

例 1 变式题　18　【解析】要完成"取一本书"这件事,有三类不同取法:

第一类:从上层 5 本不同的数学书中取一本,有 5 种不同的取法;

第二类:从中层 6 本不同的语文书中取一本,有 6 种不同的取法;

第三类:从下层 7 本不同的英语书中取一本,有 7 种不同的取法.

上述的其中任何一种取法都能独立完成"取一本书"这件事,所以共有 $5+6+7=18$ 种不同取法.

例 2　336 种　【解析】甲有 7 种站法,乙也有 7 种站法,丙也有 7 种站法,故不考虑限制共有 $7\times7\times7=343$ 种站法,其中三个人站在同一台阶上有 7 种站法,故符合本题要求的不同站法有 $343-7=336$ 种.

例 2 变式题　179　【解析】分为三种币值的不同组合:

元:0 元,1 元,2 元,3 元,4 元,5 元;

角:0 角,1 角,2 角,3 角,4 角;

分:0 分,2 分,4 分,5 分,7 分,9 分.

然后分三步进行:

第一步:从元中选取有 6 种取法;

第二步:从角中选取有 5 种取法;

第三步:从分中选取有 6 种取法.

由分步计数原理可得 $6\times5\times6=180$,但应除去 0 元 0 角 0 分这种情况,故有不同币值 $180-1=179$(种).

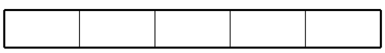
例 3　D　【解析】分两类:

(1)甲组中选出一名女生有 $C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_6^2=225$ 种选法;

(2)乙组中选出一名女生有 $C_5^2\cdot C_6^1\cdot C_2^1=120$ 种选法. 故共有 345 种选法,选 D.

例 3 变式题　C　【解析】用直接法:$C_3^1C_5^1+C_3^1C_5^2+C_3^2C_5^1=15+30+15=60$,或用间接法:$C_4^2C_6^2-C_3^2C_5^2=90-30=60$,故选 C.

例 4　【解答】如图所示,并排的 5 个矩形分别表示 5 块试验田.



分别用 a、b、c 表示三种作物,先安排第 1 块田,有 3 种方法,不妨先放入 a,再安排第 2 块田,有 b 或 c 两种作物,不妨放入 b,下面对第 3 块田种 a 或 c 进行讨论.

(1)若第 3 块田种 c,则第 4,5 块田分别有 2 种种法,共 $2\times2=4$ 种方法;

(2)若第 3 块田种 a,第 4 块仍有 b 或 c 两种作物可种:①若第 4 块田种 c,则第 5 块田有 2 种方法;②若第 4 块田种 b,则第 5 块田只能种 c,有 1 种方法.

综上,共有 $3\times2\times[2\times2+(2+1)]=42$(种).

例 4 变式题　72 种　【解析】方法 1:按选用颜色种数进行分类. 依题意至少要选用 3 种颜色. 当选用 3 种颜色时,区域 B 与 D 必须同色,区域 C 与 E 也必须同色,此时着色方法有 A_4^3 种;当选用 4 种颜色时,区域 B 与 D 和区域 C 与 E 中有且仅有一个同色,此时着色方法有 $2A_4^4$ 种. 由分类计数原理可知,满足题意的着色方法共有 $A_4^3+2A_4^4=24+2\times24=72$ 种.

方法 2:按区域分步着色. 第一步:给区域 A 着色有 C_4^1 种方法;第二步:给区域 B 着色有 C_3^1 种方法;第三步:给区域 C 着色有 C_2^1 种方法;第四步:给区域 D 与 E 着色,因区域 D 区域 B 可着同色,也可着异色:当着同色时区域 E 有 2 种着色方法;当着异色时区域 E 有 1 种着色方法,所以给区域 D 与 E 着色共有 $2+1=3$ 种方法. 由分步计数原理,满足题意的着色方法共有 $C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1\cdot(2+1)=72$ 种.

第 56 讲　排列、组合

例 1　B　【解析】m 的取值范围为 $\{m\mid 0\leqslant m\leqslant5,m\in\mathbf{Z}\}$,

由已知,$\dfrac{m!\ (5-m)!}{5!}-\dfrac{m!\ (6-m)!}{6!}$

$=\dfrac{7\times(7-m)!\ m!}{10\times7!}$,

即 $60-10(6-m)=(7-m)(6-m)$,

$m^2-23m+42=0$,解得 $m=21$(舍)或 $m=2$,

$\therefore C_8^m=C_8^2=28$.

例 1 变式题　B　【解析】因为

$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-6)-n(n-1)(n-2)\cdots(n-4)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-4)}$

$=(n-5)(n-6)-1$

$=n^2-11n+29$,

所以 $n^2-11n+29=89$,化简得 $n^2-11n-60=0$,

解得 $n=15$,或 $n=-4$(舍),故方程的解是 $n=15$.

例 2　【解答】(1)方法一:要使甲不站在两端,可先让甲在中间 4 个位置上任选 1 个,有 A_4^1 种站法,然后其余 5 人在另外 5 个位置上作全排列有 A_5^5 种站法,根据分步计数原理,共有站法 $A_4^1\cdot A_5^5=480$(种).

方法二:由于甲不站两端,这两个位置只能从其余 5 个人中选 2 个人站,有 A_5^2 种站法,然后中间 4 人有 A_4^4 种站法,根据分步计数原理,共有站法 $A_5^2\cdot A_4^4=480$(种).

方法三:若对甲没有限制条件共有 A_6^6 种站法,甲在两端共有 $2A_5^5$ 种站法,从总数中减去这两种情况的排列数,即得所求的站法数,共有 $A_6^6-2A_5^5=480$(种).

(2)先把甲、乙作为一个"整体",看做一个人,有 A_5^5 种站法,再把甲、乙进行全排列,有 A_2^2 种站法,根据分步计数原理,共有 $A_5^5\cdot A_2^2=240$(种)站法.

(3)因为甲、乙不相邻,中间有隔挡,可用"插空法",第一步先让甲、乙以外的 4 个人站队,有 A_4^4 种;第二步再将甲、乙排在 4 人形成的 5 个空档(含两端)中,有 A_5^2 种,故共有站法为 $A_4^4\cdot A_5^2=480$(种).

也可以用"间接法",6 个人全排列有 A_6^6 种站法,由(2)知甲、乙相邻有 $A_5^5\cdot A_2^2=240$ 种站法,所以不相邻的站法有 $A_6^6-A_5^5\cdot A_2^2=720-240=480$(种).

(4)先将甲、乙以外的 4 人从 6 个位置中挑选 4 个位置进行排列共有 A_6^4 种,剩下的两个位置,左边的就是甲,右边的就是乙,全部排完,故共有 $A_6^4=360$(种).

(5)首先考虑特殊元素，甲、乙先站两端，有 A_2^2 种，再让其他 4 人在中间位置作全排列，有 A_4^4 种，根据分步计数原理，共有 $A_2^2 \cdot A_4^4=48$(种).

(6)方法一：甲在左端的站法有 A_5^5 种，乙在右端的站法有 A_5^5 种，且甲在左端而乙在右端的站法有 A_4^4 种，共有 $A_6^6-2A_5^5+A_4^4=504$(种)站法.

方法二：以元素甲分类可分为两类：①甲站右端 A_5^5 种，②甲在中间 4 个位置之一，而乙不在右端有 $A_4^1 \cdot A_4^4 \cdot A_4^1=384$ 种，故共有 $A_5^5+384=504$ 种站法.

例 2 变式题 【解答】(1) 百位不能为“0”，因此共有 $A_9^1 \cdot A_9^2=648$ 个；

(2)末位为 4，百位不能为“0”，因此共有 $A_8^1 \cdot A_8^1=64$ 个.

(3)考虑各数位上的数字之和，可得所有三位数的和为：

$A_8^1A_8^1(1+2+\cdots+9)+A_8^1A_8^1(1+2+\cdots+9)\times 10+A_9^2(1+2+\cdots 9)\times 100=355680$.

(4)分末位数字是否为 0 两种情况考虑.

$A_9^3+A_4^1A_8^1A_8^2=2296$ 种；

(5)①千位上为 9，8，7，6 的四位数各有 A_9^3 个；②千位上是 5，百位上为 3，4，6，7，8，9 的四位数各有 A_8^2 个；③千位上是 5，百位上为 2，十位上为 4，6，7，8，9 的四位数各有 A_7^1 个；④千位上是 5，百位上为 2，十位上为 3 且满足要求的共有 5 个，因此共有 $N=4A_9^3+6A_8^2+5A_7^1+5=2392$ 种.

例 3 【解答】(1)一名女生，四名男生，故共有

$C_5^1 \cdot C_8^4=350$(种)；

(2)将两队长作为一类，其他 11 人作为一类，故共有

$C_2^2 \cdot C_{11}^3=165$(种)；

(3)至少有一名队长含有两类：只有一名队长和两名队长，故共有

$C_2^1 \cdot C_{11}^4+C_2^2 \cdot C_{11}^3=825$(种)，

或采用间接法：$C_{13}^5-C_{11}^5=825$(种)；

(4)至多有两名女生含有三类：有两名女生、只有一名女生、没有女生.

故选法有 $C_5^2 \cdot C_8^3+C_5^1 \cdot C_8^4+C_8^5=966$(种)；

(5)分两类：第一类是女队长当选，共 C_{12}^4(种).

第二类是女队长不当选，有

$C_4^1 \cdot C_7^3+C_4^2 \cdot C_7^2+C_4^3 \cdot C_7^1+C_4^4$.

故选法共有：

$C_{12}^4+C_4^1 \cdot C_7^3+C_4^2 \cdot C_7^2+C_4^3 \cdot C_7^1+C_4^4=790$(种).

例 3 变式题 140 【解析】方法 1：从 7 人中先选 3 人安排在周六、再从余下的 4 人中选出 3 人安排在周日，共有 $C_7^3C_4^3=140$ 种方法.

方法 2：先从 7 人中选出 6 人，再从 6 人中选出 3 人安排在周六，余下 3 人在周日，根据乘法原理总数为 $C_7^6C_6^3C_3^3=140$.

方法 3：先从 7 人中选出 6 人，把 6 人先均分为两组、再分配到周六和周日，根据乘法原理总数为 $C_7^6\dfrac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}A_2^2=140$.

例 4 B 【解析】3 位男生的全排列数是 $A_3^3=6$，隔开四个空隙，把 3 位女生中的 2 位“捆绑”有方法数 $C_3^2A_2^2=6$，将 3 位女生当两个看，安插在四个空隙中的两个有方法数 $A_4^2=12$，故“6 位同学站成一排，3 位女生中有且只有两位女生相邻的排法”有 $A_3^3C_3^2A_2^2A_4^2=432$ 种；其中男生甲站两端的男生排法种数是 $A_2^1A_2^2=4$，此时只能在甲的一侧的三个空隙中安插经过“捆绑”处理后的三个女生，有方法数 $C_3^2A_2^2A_3^2=36$，故“3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排，若男生甲站两端，3 位女生中有且只有两位女生相邻的”的排法有 $(A_2^1A_2^2)(C_3^2A_2^2A_3^2)=144$ 种，综上，故符合条件的排法共有 $432-144=288$ 种.

例 4 变式题 【解答】(1)分三步：先选 1 本有 C_6^1 种选法；再从余下的 5 本中选 2 本有 C_5^2 种选法；最后余下的 3 本全选有 C_3^3 种选法，由分步计数原理知，分配方式共有：$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3=60$(种).

(2)由于甲、乙、丙是不同的三个人，在(1)题的基础上，还在考虑再分配问题. 因此分配方式共有：$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot A_3^3=360$(种).

(3)先分三步，则应是 $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ 种方法，但是这里面出现了重复. 不妨记六本书为 A、B、C、D、E、F. 若第一步取了 AB，第二步取了 CD，第三步取了 EF，记该种分法为(AB,CD,EF)，则 $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ 种分法中还有(AB,EF,CD)、(CD,AB,EF)、(CD,EF,AB)、(EF,CD,AB)、(EF,AB,CD)，共 A_3^3 种情况. 而且这 A_3^3 种情况仅是 AB，CD，EF 的顺序不同. 因此只能作为一种方法. 故分配方式有：

$\dfrac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3}=15$(种).

(4)在问题(3)的基础上再分配即可，共有分配方式：

$\dfrac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3=C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2=90$(种).

第 57 讲 二项式定理

例 1 -20 【解析】$T_{r+1}=(-1)^rC_6^r(2x)^{6-r}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^r=(-1)^rC_6^r2^{6-2r} \cdot x^{6-2r}$，令 $6-2r=0$，得 $r=3$，故展开式的常数项为$(-1)^3C_6^3=-20$.

例 1 变式题 B 【解析】对于 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_5^rx^{10-3r}$，对于 $10-3r=4$，$\therefore r=2$，则 x^4 的项的系数是$C_5^2(-1)^2=10$.

例 2 【解答】(1)由 $2C_n^5=C_n^4+C_n^6$ 得 $n=7$ 或 $n=14$，$n=7$ 时，二项式系数最大的项是第四项和第五项，第四项的系数为

$C_7^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 2^3=\dfrac{35}{2}$，

第五项的系数为 $C_7^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 2^4=70$；

$n=14$ 时，二项式系数最大的项是第八项，第八项的系数为

$C_{14}^7\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 2^7=3432$.

(2)由 $C_n^0+C_n^1+C_n^2=79$ 得 $n=12$($n=-13$ 舍去)，

由$\begin{cases}C_{12}^r\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12-r}2^r \geqslant C_{12}^{r-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{13-r}2^{r-1}, \\ C_{12}^r\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12-r}2^r \geqslant C_{12}^{r+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11-r}2^{r+1}\end{cases}$

及 $r \in \mathbf{Z}$ 得 $r=10$.

所以展开式中系数最大的项是

$T_{11}=C_{12}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}(2x)^{10}=16896x^{10}$.

例2变式题 -240 【解析】根据二项展开式的通项公式 $T_4=C_{10}^{3}x^7(-y)^3=-C_{10}^{3}x^7y^3$，故 x^7y^3 的系数为 $-C_{10}^{3}$，同理 x^3y^7 的系数为 $-C_{10}^{7}$，故 x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和为 $-C_{10}^{3}+(-C_{10}^{7})=-2C_{10}^{3}=-240$.

例3 【解答】令 $x=1$ 则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$，①

令 $x=-1$ 则 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7=3^7$，②

(1)令 $x=0$，则 $a_0=(1-0)^7=1$，$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7=-2$，

(2)(①－②)÷2 得 $a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{-1-3^7}{2}=-1094$.

(3)(①＋②)÷2 得 $a_0+a_2+a_4+a_6=\frac{-1+3^7}{2}=1093$.

(4)方法一：$\because(1-2x)^7$ 的展开式中，a_0,a_2,a_4,a_6 大于零，而 a_1,a_3,a_5,a_7 小于零，

$\therefore|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|=(a_0+a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5+a_7)$

$=1093-(-1094)=2187$.

方法二：$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|$ 可看作 $(1+2x)^7$ 展开式中各项的系数和，

$\therefore|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|=3^7=2187$.

例3变式题 C 【解析】令 $x=0$，可得 $a_0=1$；令 $x=\frac{1}{2}$，可得

$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}=0$，故 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}=-1$.

例4 C 【解析】$C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n-1$，这个结果要是被 7 整除，最简单的可能就是 $x=5$，此时 $(1+x)^n=6^n=(7-1)^n$，只要 n 再是偶数即可，结合选项可知正确选项为 C.

例4变式题 13 【解析】$77^{77}-7=(76+1)^{77}-7=76M+1-7$，余数为 13.

第十一单元　概率

第58讲　随机事件的概率

例1 【解答】(1)由于口袋内只装有黑、白两种颜色的球，故"取出的球是红球"是不可能事件，其概率是 0；

(2)由已知，从口袋内取出一个球，可能是白球也可能是黑球，故"取出的球是黑球"是随机事件，它的概率是 $\frac{3}{8}$；

(3)由于口袋内装的是黑、白两种颜色的球，故取出一个球不是黑球就是白球，因此，"取出的球是白球或是黑球"是必然事件，它的概率是 1.

例1变式题 B 【解析】①②⑥⑧为随机事件.

例2 C 【解析】恰有 1 个白球，便不再可能恰有 2 个白球，且恰有 1 个白球与恰有 2 个白球的事件不可能必有一个发生，故选 C.

例2变式题 C 【解析】事件"甲分得红牌"与"乙分得蓝牌"有可能同时发生，故它们不是互斥事件. 正确选项为 C.

例3 $\frac{5}{7}$ 【解析】方法 1. 因为只有 2 名女生，所以选出 3 人中至少有一名男生，当选出的学生全是男生时，方法数为 C_5^3，概率为 $\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，所以，均不少于 1 名的概率为 $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.

方法 2. 选出的是男生 1 名、女生 2 名时，方法数为 $C_5^1C_2^2=5$，选出的是男生 2 名、女生 1 名时，方法数是 $C_5^2C_2^1=20$，故随机事件"男女生均不少于 1 名"所包含的基本事件的个数是 25，基本事件的总数是 $C_7^3=35$，故所求的概率为 $\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$.

例3变式题 B 【解析】基本事件的个数共有 8 个，三次都是蓝球所含有的基本事件只有 1 个，这个概率是 $\frac{1}{8}$，根据对立事件的概率之间的关系，所求的概率为 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$，选 B.

例4 【解答】将两颗骰子投掷一次，共有 36 种情况，向上的点数之和的不同值共 11 种.

(1)设事件 A＝{两骰子向上的点数之和为 8}，事件 A_1＝{两骰子向上的点数分别为 4 和 4}，事件 A_2＝{两骰子向上的点数分别为 3 和 5}，事件 A_3＝{两骰子向上的点数分别为 2 和 6}，则 A_1 与 A_2,A_3 互为互斥事件，且

$A=A_1+A_2+A_3$，故

$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{36}$.

(2)设事件 S＝{两骰子向上的点数之和不小于 8}，事件 A＝{两骰子向上的点数之和为 8}，事件 B＝{两骰子向上的点数之和为 9}，事件 C＝{两骰子向上的点数之和为 10}，事件 D＝{两骰子向上的点数之和为 11}，事件 E＝{两骰子向上的点数之和为 12}，则 A,B,C,D,E 互为互斥事件，且 $S=A+B+C+D+E$，$P(A)=\frac{5}{36}$，$P(B)=\frac{1}{9}$，

$P(C)=\frac{1}{12}$，$P(D)=\frac{1}{18}$，$P(E)=\frac{1}{36}$，

故 $P(S)=P(A+B+C+D+E)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+P(E)=\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{5}{12}$.

例4变式题 【解答】(1)因为取到红心(事件 A)与取到方块(事件 B)不能同时发生，所以 A 与 B 是互斥事件，且有 $C=A+B$ 故由互斥事件的概率加法公式，得 $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)因为当取一张牌时，取到红色牌(事件 C)与取到黑色牌(事件 D)不可能同时发生，所以 C 与 D 也是互斥事件. 又由于事件 C 与事件 D 必有一个发生，即 $C+D$ 为必然事件，所以 C 与 D 互为对立事件，所以 $P(D)=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

第59讲　古典概型

例1 【解答】以上命题均不正确. (1)应为 4 种等可能的结

果,还有一种是“一反一正”;(2)摸到红球的概率为$\frac{1}{2}$,摸到黑球的概率为$\frac{1}{3}$,摸到白球的概率为$\frac{1}{6}$;(3)取到小于0的数的概率为$\frac{4}{7}$,取到不小于0的数的概率为$\frac{3}{7}$;(4)一个男同学当选的概率为$\frac{1}{3}$,一个女同学当选的概率为$\frac{1}{4}$;(5)抽签有先有后,但每人抽到某号的概率是相同的.理由:假设5号签为中奖签,甲先抽到中奖签的概率为$\frac{1}{5}$;乙接着抽,其抽中5号签的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.

例2 C 【解析】因为$(m+ni)(n-mi)=2mn+(n^2-m^2)i$为实数,所以$n^2=m^2$,故$m=n$,则可以取1,2,3,4,5,6,共6种可能,基本事件的总数为36,所以$P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.正确选项为C.

例2变式题 $\frac{1}{4}$ 【解析】对于两个数的各位数字之和不小于14的点数的情况通过列举可得有5种情况,即7,8;8,9;16,17;17,18;18,19,而基本事件有20种,因此$P(A)=\frac{1}{4}$.

例3 【解答】(1)工厂总数为$18+27+18=63$,样本容量与总体中的个体数之比为$\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$,即抽取比例是$\frac{1}{9}$,所以从A,B,C三个区中应分别抽取的工厂个数为2,3,2;

(2)设A_1,A_2为在A区中抽得的2个工厂,B_1,B_2,B_3为在B区中抽得的3个工厂,C_1,C_2为在C区中抽得的2个工厂,在这7个工厂中随机抽取2个,其结果是:(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2);(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2);(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,C_1),(B_1,C_2);(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2);$(B_3,C_1)(B_3,C_2)$;(C_1,C_2),全部的可能结果有21种,随机抽取的2个工厂至少有一个来自A区的结果有

(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_1,C_2);(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(A_2,C_2);共有11种.所以所求的概率$P=\frac{11}{21}$.

例3变式题 【解答】(1)一共有8种不同的结果,列举如下:(红、红、红、)、(红、红、黑)、(红、黑、红)、(红、黑、黑)、(黑、红、红)、(黑、红、黑)、(黑、黑、红)、(黑、黑、黑).

(2)记“3次摸球所得总分为5”为事件A,则事件A包含的基本事件为:(红、红、黑)、(红、黑、红)、(黑、红、红),事件A包含的基本事件数为3,由(1)可知,基本事件总数为8,所以事件A的概率$P(A)=\frac{3}{8}$.

例4 【解答】(1)由题意得,省外游客有27人,其中9人持金卡;省内游客有9人,其中6人持银卡.

设事件A为“采访该团2人,恰有1人持银卡”,则$P(A)=\frac{C_6^1C_{30}^1}{C_{36}^2}=\frac{2}{7}$,所以采访该团2人,恰有1人持银卡的概率是$\frac{2}{7}$.

(2)设事件B为“采访该团2人,持金卡人数与持银卡人数相等”,可以分为:

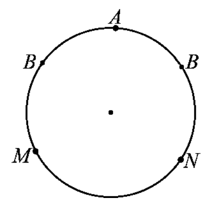
事件B_1为“采访该团2人,持金卡0人,持银卡0人”,或事件B_2为“采访该团2人,持金卡1人,持银卡1人”两种情况,则$P(B)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{C_{21}^2}{C_{36}^2}+\frac{C_9^1C_6^1}{C_{36}^2}=\frac{44}{105}$,所以采访该团2人,持金卡与持银卡人数相等的概率是$\frac{44}{105}$.

例4变式题 【解答】(1)从袋中依次摸出2个球共有A_9^2种结果,第一次摸出黑球,第二次摸出白球的结果数为$A_3^1A_4^1$,则所求概率为$P_1=\frac{A_3^1A_4^1}{A_9^2}=\frac{1}{6}$;

(2)第一次摸出红球的概率$\frac{A_2^1}{A_9^1}$,第二次摸出红球的概率$\frac{A_7^1A_2^1}{A_9^2}$,第三次摸出红球的概率$\frac{A_7^2A_2^1}{A_9^3}$,则摸球次数不超过3次的概率为$\frac{A_2^1}{A_9^1}+\frac{A_7^1A_2^1}{A_9^2}+\frac{A_7^2A_2^1}{A_9^3}=\frac{7}{12}$.

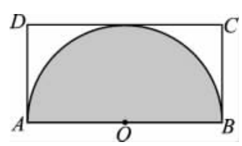
第60讲 几何概型

例1 $\frac{2}{3}$ 【解析】如图所示,可设$\overset{\frown}{AM}=1$,$\overset{\frown}{AN}=1$,根据题意只要点B在优弧$\overset{\frown}{MAN}$上,劣弧$\overset{\frown}{AB}$的长度就小于1,由于点B在圆周上的任意性,故这个概率是优弧$\overset{\frown}{MAN}$的长度与圆的周长之比,即这个概率是$\frac{2}{3}$.



例1变式题 A 【解析】$0<\cos\frac{\pi x}{2}<\frac{1}{2}$时,在区间$[-1,1]$上,只有$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi x}{2}<-\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi x}{2}<\frac{\pi}{2}$,即$x\in\left(-1,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$,根据几何概型的计算方法,这个概率值是$\frac{1}{3}$.

例2 B 【解析】如图所示,当所取点位于长方形内半圆以外时,该点到O的距离大于1,该部分的面积是$2-\frac{\pi}{2}$,故所求的概率为$\frac{2-\frac{\pi}{2}}{2}=1-\frac{\pi}{4}$,正确选项为B.



例2变式题 A 【解析】根据几何概型的计算公式,这个概率值是$\frac{\pi}{4}$.

例 3 【解答】设构成三角形的事件为 A,长度为 10 的线段被分成三段的长度分别为 $x,y,10-(x+y)$,

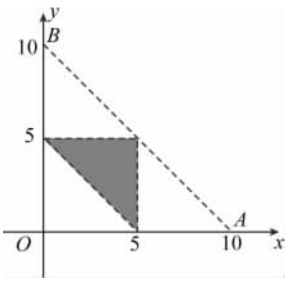
则 $\begin{cases}0<x<10,\\0<y<10,\\0<10-(x+y)<10,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<x<10,\\0<y<10,\\0<x+y<10.\end{cases}$

由一个三角形两边之和大于第三边,有

$\begin{cases}x+y>10-(x+y),\\x+10-(x+y)>y,\\y+10-(x+y)>x,\end{cases}\therefore\begin{cases}0<x<5,\\0<y<5,\\5<x+y<10,\end{cases}$

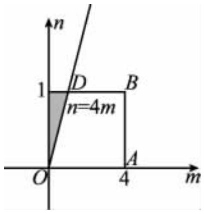
∴满足条件的点 $P(x,y)$ 组成的图形是如图所示中的阴影区域(不包括区域的边界).



$S_{阴影}=\frac{1}{2}\times5^2=\frac{25}{2}$,$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times10^2=50$.

$\therefore P(A)=\frac{S_{阴影}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{1}{4}$. ∴可以构成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$.

例 3 变式题 【解答】在平面直角坐标系中,以横轴和纵轴分别表示 m,n 的值,因为 m,n 与图中正方形内的点一一对应,即正方形内的所有点构成全部试验结果的区域. 设事件 A 表示方程 $x^2-\sqrt{n}x+m=0$ 有实根,则事件 $A=\left\{(m,n)\middle|\begin{cases}n-4m\geq0\\0<m<1\\0<n<1\end{cases}\right\}$,所对应的区域为图中的阴影部分,且阴影部分的面积为 $\frac{1}{8}$,故由几何概型公式得 $P(A)=\frac{S_{阴影}}{S_{正方形}}=\frac{1}{8}$,即关于 x 的一元二次方程 $x^2-\sqrt{n}x+m=0$ 有实根的概率为 $\frac{1}{8}$.



例 4 D 【解析】满足条件的点在半径为 a 的 $\frac{1}{8}$ 球内,所以所求概率为 $p=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi a^3}{a^3}=\frac{\pi}{6}$,选 D.

例 4 变式题 【解答】因 1 升=1000 毫升. 记事件 A:"取出的 10 毫升种子含有麦锈病种子",则 $P(A)=\frac{10}{1000}=0.01$,即取出的 10 毫升种子含有这粒麦锈病种子的概率是 0.01;

记事件 B:"取出 30 毫升种子含有这粒麦锈病种子",则 $P(B)=\frac{30}{1000}=0.03$,即取出 30 毫升种子含有麦锈病种子的概率是 0.03.

第 61 讲 离散型随机变量及其分布列

例 1 【解答】(1)X 的可能取值为 $0,1,2,3,4$,$X=k$ 表示取出 k 个红球,$(4-k)$ 个白球,其中 $k=0,1,2,3,4$.

(2)ξ 的可能取值为 $2,3,4,\cdots,12$. 若以 $\{i,j\}$ 表示抛掷甲、乙两颗骰子后甲为 i 点,乙为 j 点. 则 $\xi=2$ 表示(1,1);$\xi=3$ 表示(1,2)、(2,1);$\xi=4$ 表示(1,3)、(2,2)、(3,1);…;$\xi=12$ 表示(6,6).

同理 η 的可能取值为 $2,4,6,\cdots,12$. 其对应的随机试验结果略.

例 1 变式题 ①②④ 【解析】根据离散型随机变量的定义,可知①②④中的 ξ 可能取的值,可以按一定的次序列出,而③中的 ξ 可以取某一区间内的一切值,属连续型随机变量.

例 2 【解答】依题意易知,掷两颗骰子出现的点数有 36 种等可能的情况:(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),…,(6,5),(6,6),因而 X 的可能取值为 1,2,3,4,5,6,详见下表

X 的值	出现的点	情况数
1	(1,1)	1
2	(2,2),(2,1),(1,2)	3
3	(3,3),(3,2),(3,1),(2,3),(1,3)	5
4	(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),(3,4),(2,4),(1,4)	7
5	(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5)	9
6	(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)	11

由古典概型可知 X 的概率分布如下表所示

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

从而 $P(2<X<5)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{5}{36}+\frac{7}{36}=\frac{1}{3}$.

例 2 变式题 【解答】从箱中取出两个球的情形有以下六种:{2 白},{1 白 1 黄},{1 白 1 黑},{2 黄},{1 黑 1 黄},{2 黑},当取到 2 白时,结果输 2 元,随机变量 $X=-2$;当取到 1 白 1 黄时,输 1 元,随机变量 $X=-1$;当取到 1 白 1 黑时,随机变量 $X=1$;当取到 2 黄时,$X=0$;当取到 1 黑 1 黄时,$X=2$;当取到 2 黑时,$X=4$,则 X 的可能取值为 $-2,-1,0,1,2,4$.

$\because P(X=-2)=\frac{C_6^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{22}$;$P(X=-1)=\frac{C_6^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{2}{11}$;

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{66}$；$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{11}$；

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{33}$；

$P(X=4)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}$.

从而得到 X 的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2	4
P	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$

例 3 【解答】(1)由题意可知

$P\left(X=\frac{1}{5}\right)+P\left(X=\frac{2}{5}\right)+P\left(X=\frac{3}{5}\right)+P\left(X=\frac{4}{5}\right)+P(X=1)=1$,

即 $a+2a+3a+4a+5a=1$,

$\therefore a=\frac{1}{15}$.

(2)$P\left(X\geqslant\frac{3}{5}\right)=P\left(X=\frac{3}{5}\right)+P\left(X=\frac{4}{5}\right)+P(X=1)=3\times\frac{1}{15}+4\times\frac{1}{15}+5\times\frac{1}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

(3)$P\left(\frac{1}{10}<X\leqslant\frac{7}{10}\right)=P\left(X=\frac{1}{5}\right)+P\left(X=\frac{2}{5}\right)+P\left(X=\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{15}\times1+\frac{1}{15}\times2+\frac{1}{15}\times3=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

例 3 变式题 是 **【解析】**一方面,显然 $p_k\geqslant0$,

另一方面 $p_0+p_1+p_2+p_3=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0+C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^3=1$,

$\therefore p_k=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k(k=0,1,2,3)$可为一随机变量的分布列.

例 4 【解答】X 的可能取值为 1,2,3.

$X=1$ 表示取出的 3 个球中有 1 个白球 2 个黑球,此时的概率 $P(X=1)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$;

$X=2$ 表示取出的 3 个球中有 2 个白球 1 个黑球,此时的概率 $P(X=2)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$;

$X=3$ 表示取出的 3 个球中有 3 个白球 0 个黑球,此时的概率 $P(X=3)=\frac{C_6^3C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$,

其分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

这个分布列也可以表示为 $P(X=k)=\frac{C_6^kC_2^{3-k}}{C_8^3}$,$k=1,2,3$.

例 4 变式题 【解答】(1)从袋中随机摸 4 个球的情况为：1 红3 黑,2 红2 黑,3 红 1 黑,4 红四种情况,分别得分为 5 分,6 分,7 分,8 分,故 X 的可能取值为 5,6,7,8.

$P(X=5)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$;$P(X=6)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$;

$P(X=7)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$;$P(X=8)=\frac{C_4^4C_3^0}{C_7^4}=\frac{1}{35}$,

故所求分布列为：

X	5	6	7	8
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(2)根据随机变量 X 的分布列,可以得到得分大于 6 分的概率为：

$P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$.

第 62 讲　条件概率与事件的独立性

例 1 【解答】记“甲市下雨”为事件 A,“乙市下雨”为事件 B.

按题意有,$P(A)=20\%$,$P(B)=18\%$,$P(AB)=12\%$.

(1)乙市下雨时甲市也下雨的概率为 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{3}$;

(2)甲市下雨时乙市也下雨的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{5}$.

例 1 变式题 【解答】(1)此人患色盲的概率为

$P=\frac{100}{200}\times\frac{5}{100}+\frac{100}{200}\times\frac{0.25}{100}=\frac{5.25}{200}=\frac{21}{800}$.

(2)设事件 A 表示“从 100 个男人和 100 个女人中任选一人,此人患色盲”;事件 B 表示:“从 100 个男人和 100 个女人中任选一人,此人是男人”.

则 $P(A)=\frac{21}{800}$,$P(AB)=\frac{5}{200}$,

故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{20}{21}$.

例 2 【解答】记“第 i 局甲获胜”为事件 $A_i(i=3,4,5)$,“第 j 局乙获胜”为事件 $B_j(j=3,4,5)$.

(1)设“再赛 2 局结束这次比赛”为事件 A,则

$A=A_3\cdot A_4+B_3\cdot B_4$,由于各局比赛结果相互独立,故

$P(A)=P(A_3\cdot A_4+B_3\cdot B_4)=P(A_3\cdot A_4)+P(B_3\cdot B_4)=P(A_3)P(A_4)+P(B_3)P(B_4)=0.6\times0.6+0.4\times0.4=0.52$.

(2)记“甲获得这次比赛胜利”为事件 B,因前两局中,甲、乙各胜 1 局,故甲获得这次比赛胜利当且仅当在后面的比赛中,甲先胜 2 局,从而

$B=A_3\cdot A_4+B_3\cdot A_4\cdot A_5+A_3\cdot B_4\cdot A_5$,由于各局比赛结果相互独立,故

$P(B)=P(A_3\cdot A_4+B_3\cdot A_4\cdot A_5+A_3\cdot B_4\cdot A_5)$

$=P(A_3\cdot A_4)+P(B_3\cdot A_4\cdot A_5)+P(A_3\cdot B_4\cdot A_5)$

$=P(A_3)P(A_4)+P(B_3)P(A_4)P(A_5)+P(A_3)P(B_4)P(A_5)$

$=0.6\times0.6+0.4\times0.6\times0.6+0.6\times0.4\times0.6=0.648$.

例 2 变式题 【解答】(1)记“该选手能正确回答第 i 轮的问

题"的事件为 $A_i(i=1,2,3,4)$,则 $P(A_1)=\frac{4}{5}$,$P(A_2)=\frac{3}{5}$,

$P(A_3)=\frac{2}{5}$,$P(A_4)=\frac{1}{5}$,∴该选手进入第四轮才被淘汰的概率

$P_4=P(A_1A_2A_3\overline{A_4})=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A_4})$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{96}{625}$.

(2)该选手至多进入第三轮考核的概率

$P_3=P(\overline{A_1}+A_1\overline{A_2}+A_1A_2\overline{A_3})$

$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{101}{125}$.

例3 【解答】(1)设 A 表示资助总额为零这个事件,则表明两位专家同时打出了六个"不支持",

则 $P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$;

(2)设 B 表示资助总额超过 15 万元这个事件,

$P(B)=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{11}{32}$.

例3变式题 【解答】设 A_k 表示第 k 株甲种大树成活,$k=1,2$;设 B_l 表示第 l 株乙种大树成活,$l=1,2$,

则 A_1,A_2,B_1,B_2 独立,且 $P(A_1)=P(A_2)=\frac{5}{6}$,

$P(B_1)=P(B_2)=\frac{4}{5}$.

(1)至少有 1 株成活的概率为

$1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{B_1}\cdot\overline{B_2})$

$=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{B_1})\cdot P(\overline{B_2})$

$=1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{899}{900}$.

(2)由独立重复试验中事件发生的概率公式知,两种大树各成活 1 株的概率为

$P=\left(C_2^1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right)\cdot\left(C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{10}{36}\times\frac{8}{25}=\frac{4}{45}$.

第63讲 离散型随机变量的数字特征与正态分布

例1 【解答】(1)记"所取出的非空子集满足性质 r"为事件 A.

基本事件总数 $n=C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=31$,事件 A 包含的基本事件是 $\{1,4,5\}$、$\{2,3,5\}$、$\{1,2,3,4\}$,

事件 A 包含的基本事件数 $m=3$,

所以 $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{31}$.

(2)依题意,ξ 的所有可能取值为 1,2,3,4,5,

又 $P(\xi=1)=\frac{C_5^1}{31}=\frac{5}{31}$,$P(\xi=2)=\frac{C_5^2}{31}=\frac{10}{31}$,

$P(\xi=3)=\frac{C_5^3}{31}=\frac{10}{31}$,$P(\xi=4)=\frac{C_5^4}{31}=\frac{5}{31}$,

$P(\xi=5)=\frac{C_5^5}{31}=\frac{1}{31}$.

故 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{5}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{1}{31}$

从而 $E\xi=1\times\frac{5}{31}+2\times\frac{10}{31}+3\times\frac{10}{31}+4\times\frac{5}{31}+5\times\frac{1}{31}=\frac{80}{31}$.

例1变式题 【解答】(1)由于甲组有 10 名工人,乙组有 5 名工人,根据分层抽样的等比例性,若从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核,则从甲组中抽取 2 名工人,乙组中抽取 1 名工人.

(2)记 A 表示事件"从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人",由于从甲组抽取 2 人,故基本事件的总数是 C_{10}^2,事件 A 所包含的基本事件数是 $C_4^1C_6^1$,所以 $P(A)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$.

(3)ξ 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(\xi=0)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{6}{75}$,

$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{28}{75}$,

$P(\xi=3)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{10}{75}$,

$P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\frac{31}{75}$.

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{75}$	$\frac{28}{75}$	$\frac{31}{75}$	$\frac{10}{75}$

数学期望 $E\xi=0\times\frac{6}{75}+1\times\frac{28}{75}+2\times\frac{31}{75}+3\times\frac{10}{75}=\frac{8}{5}$.

例2 【解答】(1)由题设可知 Y_1 和 Y_2 的分布列分别为

Y_1	5	10
P	0.8	0.2

Y_2	2	8	12
P	0.2	0.5	0.3

$E(Y_1)=5\times0.8+10\times0.2=6$,

$D(Y_1)=(5-6)^2\times0.8+(10-6)^2\times0.2=4$;

$E(Y_2)=2\times0.2+8\times0.5+12\times0.3=8$,

$D(Y_2)=(2-8)^2\times0.2+(8-8)^2\times0.5+(12-8)^2\times0.3=12$;

(2)$f(x)=D\left(\frac{x}{100}Y_1\right)+D\left(\frac{100-x}{100}Y_2\right)$

$=\left(\frac{x}{100}\right)^2D(Y_1)+\left(\frac{100-x}{100}\right)^2D(Y_2)$

$=\frac{4}{100^2}[x^2+3(100-x)^2]$

$=\frac{4}{100^2}(4x^2-600x+3\times100^2)$,

当 $x=\frac{600}{2\times4}=75$ 时,$f(x)=3$ 为最小值.

例2变式题 【解答】各投保人是否出险互相独立,且出险的概率都是 p,记投保的 10000 人中出险的人数为 ξ,

则 $\xi\sim B(10^4,p)$.

(1)记 A 表示事件:保险公司在一年度内为该险种至少支付 10000 元赔偿金,则$\overline{A}$发生当且仅当 $\xi=0$ 时,

$P(A)=1-P(\overline{A})$

$=1-P(\xi=0)$

$=1-(1-p)^{10^4}$，

又 $P(A)=1-0.999^{10^4}$，故 $p=0.001$.

(2)该险种总收入为 $10000a$ 元，支出是赔偿金总额与成本的和.

支出 $10000\xi+50000$，

盈利 $\eta=10000a-(10000\xi+50000)$，

盈利的期望为 $E\eta=10000a-10000E\xi-50000$，

由 $\xi\sim B(10^4,10^{-3})$知，$E\xi=10000\times10^{-3}$，

$E\eta=10^4a-10^4E\xi-5\times10^4$

$=10^4a-10^4\times10^4\times10^{-3}-5\times10^4$.

$E\eta\geqslant0\Leftrightarrow10^4a-10^4\times10-5\times10^4\geqslant0$

$\Leftrightarrow a-10-5\geqslant0\Leftrightarrow a\geqslant15$(元).

故每位投保人应交纳的最低保费为 15 元.

例 3 $\frac{1}{2}$ 【解析】根据正态密度函数图象的对称性，

$P(X\leqslant\mu)=P(X>\mu)$且 $P(X\leqslant\mu)+P(X>\mu)=1$，

故 $P(X\leqslant\mu)=\frac{1}{2}$.

例 3 变式题 A 【解析】由于正态密度函数的图象关于 $x=\mu$ 对称，我们就可以利用它在 $x=\mu$ 两边的概率相等来解决关于正态分布的问题. 本题中 $P(\xi\leqslant0)=P(\xi\geqslant4)=1-P(\xi\leqslant4)=1-0.84=0.16$. 关键就是用好正态曲线的对称性.

第十二单元 算法初步与复数

第 64 讲 算法与程序框图

例 1 【解答】第一步：②－①得 $4y=4$；③

第二步：解③得 $y=1$；

第三步：将 $y=1$ 代入②得 $x=0$.

例 1 变式题 【解答】算法 1：

第一步：任取两个小球分别放到天平的两个托盘中，如果天平不平衡，则较高的托盘中的小球就是要找的小球；如果天平是平衡的，则执行下一步；

第二步：取出左边托盘的一个球，然后把剩下的 7 个小球依次放到左边托盘中，直到天平不平衡，找出较轻的小球；

第三步：结束.

算法 2：

第一步：把 9 个小球平均分成三组，每组 3 个；

第二步：把其中的两组放到天平的两个托盘中，如果天平平衡，则较轻的小球在剩下的一组里；如果天平不平衡，则较轻的小球在托盘较高的一组里；

第三步：在含有较轻小球的一组里取两个小球，放到天平的两个托盘里，如果天平平衡，则剩下的小球就是要找的；如果天平不平衡，则较高的托盘里面的小球就是要找的；

第四步：结束.

例 2 【解答】算法设计如下：

第一步，$r_1=1,r_2=4,h=4$；

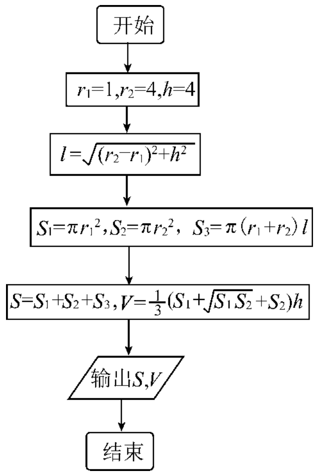
第二步，$l=\sqrt{(r_2-r_1)^2+h^2}$；

第三步，$S_1=\pi r_1^2,S_2=\pi r_2^2,S_3=\pi(r_1+r_2)l$；

第四步，$S=S_1+S_2+S_3,V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$；

第五步，输出 S 和 V.

程序框图如下：



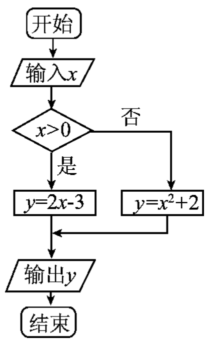
例 3 【解答】算法分析如下：

第一步：输入 x；

第二步：如果 $x>0$，那么使 $y=2x-3$，否则 $y=x^2+2$；

第三步：输出 y.

程序框图如下：



例 3 变式题 127 【解析】由程序框图知，循环体被执行后 a 的值依次为 3、7、15、31、63、127，故输出的结果是 127.

例 4 【解答】算法设计如下：

第一步，$n=0,a=200,r=0.05$；

第二步，$T=ar$(计算年增量)；

第三步，$a=a+T$(计算年产量)；

第四步，如果 $a\leqslant300$，那么 $n=n+1$，重复执行第二步，

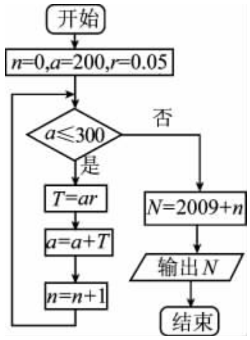
如果 $a>300$，则执行第五步；

第五步，$N=2009+n$.

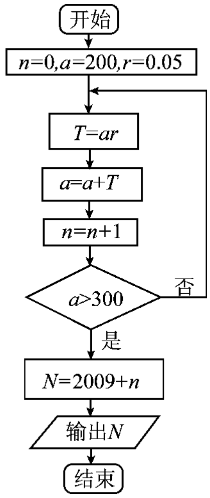
第六步，输出 N.

程序框图如下：

方法一:



方法二:



例4变式题　A 【解析】对于 $k=0,S=0<100$,$\therefore S=1,k=1$;

对于 $k=1,S=1<100$,

$\therefore S=3,k=2$;

对于 $k=2,S=3<100$,

$\therefore S=11,k=3$;

对于 $k=3,S=11<100$,$\therefore S=11+2^{11},k=4$;

对于 $k=4,S=11+2^{11}>100$,$\therefore$ 输出 $k=4$.

第65讲　基本算法语句

例1　【解答】第一步,输入点的坐标(x_0,y_0),输入直线方程的系数和常数 A,B,C;

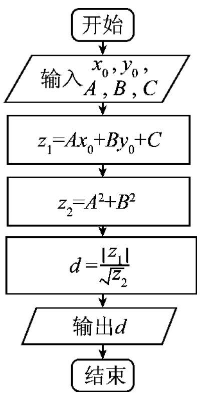
第二步,计算 $z_1=Ax_0+By_0+C$;

第三步,计算 $z_2=A^2+B^2$;

第四步,计算 $d=\dfrac{|z_1|}{\sqrt{z_2}}$;

第五步,输出 d.

程序框图如图所示:



程序如下:

```
input x0,y0,A,B,C
  z1=A*x0+B1*y0+C
  z2=A^2+B^2
  d=abc(z1)/sqr(z2)
print d
end
```

例2　【解答】过点 A,D 分别作 $AG\perp BC,DH\perp BC$,垂足分别是 G、H.

$\because ABCD$ 是等腰梯形,底角是 $45°$,$AB=2\sqrt{2}$ cm.

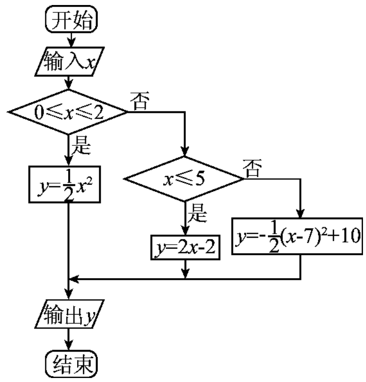
$\therefore BG=AG=DH=HC=2$ cm,

又 $BC=7$ cm,

$\therefore AD=GH=3$ cm,

所以 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2(0\leqslant x\leqslant 2),\\ 2x-2(2<x\leqslant 5),\\ -\frac{1}{2}(x-7)^2+10(5<x\leqslant 7).\end{cases}$

程序框图如图所示.



程序:

```
input "x=";x
if x>=0 and x<=2
  y=0.5*x^2
else
    if x>2 and x<=5
      y=2*x-2
    end
      y=-0.5*(x-7)^2+10
    end
end
print y
end
```

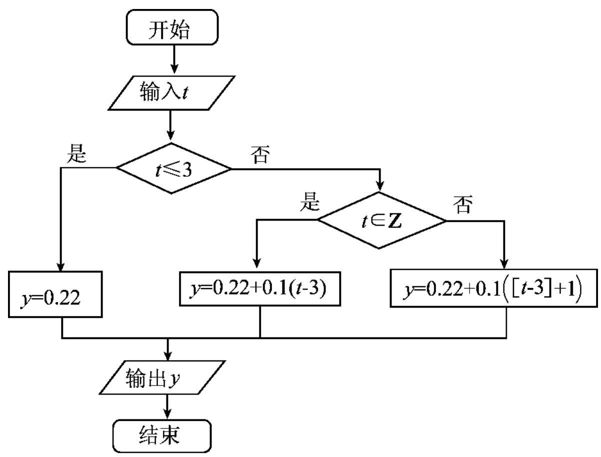
例2变式题　【解答】算法步骤如下:

第一步,输入通话时间 t;

第二步,如果 $t\leqslant 3$,那么 $y=0.22$;否则判断 $t\in \mathbf{Z}$ 是否成立,若成立,执行 $y=0.22+0.1\times(t-3)$;否则,执行 $y=0.22+0.1\times([t-3]+1)$.

第三步,输出通话费用 y.

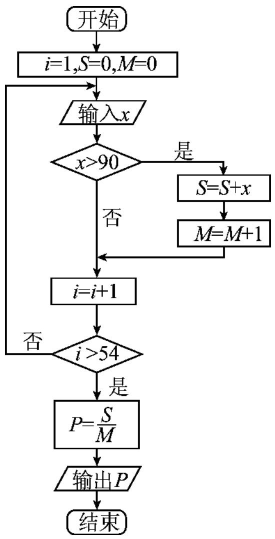
程序框图如图所示:



程序如下:

```
input "请输入通话时间:";t
if t<=3
y=0.22
else
if int(t)=t
y=0.22+0.1*(t-3)
else
y=0.22+0.1*[int(t-3)+1]
end
end
print "通话费用为:";y
end
```

例 3 【解答】程序框图如下：



程序：

```
S=0
M=0
i=1
while i<=54
    input x
    if x>90
      S=S+x
      M=M+1
    end
    i=i+1
end
P=S/M
print P
end
```

例 3 变式题 A 【解析】当 i=7<9 时，i=10，s=17，i=9 跳出循环，输出 17.

第 66 讲 算法案例

例 1 【解答】用辗转相除法：

第一步，264=1×168+96

第二步，168=1×96+72

第三步，96=1×72+24

第四步，72=3×24+0

或**第一步**，264÷8=33　168÷8=21

第二步，33−21=12

第三步，21−12=9　**第五步**，9−3=6

第四步，12−9=3　**第六步**，6−3=3

故 24 是 264 与 168 的最大公约数.

用更相减损术检验：

第一步，264−168=96

第二步，168−96=72

第三步，96−72=24

第四步，72−24=48

第五步，48−24=24

故 24 是 264 与 168 的最大公约数.

例 1 变式题 【解答】辗转相除法求最大公约数的过程如下：(建立带余除式)

8251=6105×1+2146

6105=2146×2+1813

2146=1813×1+333

1813=333×5+148

333=148×2+37

148=37×4

则 37 为 8251 与 6105 的最大公约数，

最小公倍数是 8251×6105÷37=1361415.

例 2 【解答】根据秦九韶算法，把多项式改写成如下形式：

$f(x)=8x^7+5x^6+0\cdot x^5+3\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+2x+1$

$=((((((8x+5)x+0)x+3)x+0)x+0)x+2)x+1$.

$v_0=8$;

$v_1=8\times 2+5=21$;

$v_2=21\times 2+0=42$;

$v_3=42\times 2+3=87$;

$v_4=87\times 2+0=174$;

$v_5=174\times 2+0=348$;

$v_6=348\times 2+2=698$;

$v_7=698\times 2+1=1397$.

∴当 $x=2$ 时，多项式的值为 1397.

第 67 讲 复数的基本概念与运算

例 1 【解析】根据复数 z 为实数、虚数及纯虚数的概念，利用它们的充要条件可分别求出相应的 a 的值.

【解答】(1)当 z 为实数时，则 $\begin{cases} a^2-5a-6=0, \\ a^2-1\neq 0, \end{cases}$

∴ $\begin{cases} a=-1 \text{ 或 } a=6, \\ a\neq \pm 1. \end{cases}$

故当 $a=6$ 时，z 为实数.

(2)当 z 为虚数时，则有 $\begin{cases} a^2-5a-6\neq 0, \\ a^2-1\neq 0, \end{cases}$

∴ $\begin{cases} a\neq -1 \text{ 且 } a\neq 6, \\ a\neq \pm 1, \end{cases}$ ∴$a\neq \pm 1$ 且 $a\neq 6$.

∴当 $a\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,6)\cup(6,+\infty)$时，$z$ 为虚数.

(3)当 z 为纯虚数时,则有$\begin{cases}a^2-5a-6\neq 0,\\ \dfrac{a^2-7a+6}{a^2-1}=0.\end{cases}$

∴$\begin{cases}a\neq -1\text{ 且 }a\neq 6,\\ a=6\text{ 且 }a\neq \pm 1.\end{cases}$

∴不存在实数 a 使 z 为纯虚数.

例 1 变式题 A 【解析】由$\begin{cases}x^2-1=0,\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x=-1.$

例 2 【解答】(1)$\dfrac{\sqrt{2}-i^3}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{(\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}i)}{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}$

$=\dfrac{2i+i}{1+2}=i.$

(2)$\dfrac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2011}$

$=\dfrac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right]^{1005}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$

$=i+\left(\dfrac{2}{-2i}\right)^{1005}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$

$=i+i^{1005}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$

$=i+i\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)i.$

例 2 变式题 B 【解析】$\dfrac{1+7i}{2-i}=\dfrac{(1+7i)(2+i)}{5}=-1+3i,$

∴$a=-1,b=3,ab=-3.$

例 3 $3+4i$ 【解析】设 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$,则 $\sqrt{a^2+b^2}-a+bi=2+4i$,∴$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=2,\\ b=4,\end{cases}$∴$\begin{cases}a=3,\\ b=4.\end{cases}$∴$z=3+4i.$

例 3 变式题 i 【解析】设 $z=a+bi$,则$(a+bi)(1+i)=1-i$,

即 $a-b+(a+b)i=1-i$,由$\begin{cases}a-b=1,\\ a+b=-1,\end{cases}$解得 $a=0,b=-1$,

所以 $z=-i,\bar{z}=i.$

例 4 【解答】(1)$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$,

∴$\overrightarrow{AO}$表示的复数为$-(3+2i)$,即$-3-2i.$

(2)$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$,

∴$\overrightarrow{CA}$表示的复数为$(3+2i)-(-2+4i)=5-2i.$

(3)$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$,

∴$\overrightarrow{OB}$表示的复数为$(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$,

即 B 点对应的复数为 $1+6i.$

例 4 变式题 【解答】由复数的几何意义知,复数 z 对应的点在单位圆上,$|z-i|$的几何意义是复数 z 对应的点到点$(0,1)$间的距离,

所以当单位圆上取点$(0,-1)$时,距离最大为 2.

即$|z-i|$的最大值为 2.

第十三单元 推理与证明

第 68 讲 合情推理与演绎推理

例 1 【解答】$f(0)+f(1)=\dfrac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

同理,$f(-1)+f(2)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-2)+f(3)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

注意到在这三个特殊的式子中,自变量之和均等于 1,由此归纳猜想:

当 $x_1+x_2=1$ 时,均有 $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

证明:设 $x_1+x_2=1$,则

$f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{1}{3^{x_1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3^{x_2}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(3^{x_2}+\sqrt{3})+(3^{x_1}+\sqrt{3})}{(3^{x_2}+\sqrt{3})\cdot(3^{x_1}+\sqrt{3})}$

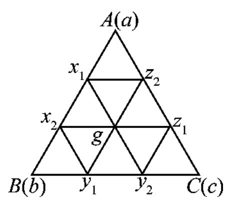
$=\dfrac{3^{x_1}+3^{x_2}+2\sqrt{3}}{3^{x_1+x_2}+\sqrt{3}(3^{x_1}+3^{x_2})+3}$

$=\dfrac{3^{x_1}+3^{x_2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(3^{x_1}+3^{x_2})+2\times 3}$

$=\dfrac{3^{x_1}+3^{x_2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(3^{x_1}+3^{x_2}+2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

例 1 变式题 $\dfrac{10}{3}$ $\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)$ 【解析】当 $n=3$ 时,如图所示,分别将各顶点的数用小写字母表示,即由条件知 $a+b+c=1,x_1+x_2=a+b,y_1+y_2=b+c,z_1+z_2=c+a$,



$x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2=2(a+b+c)=2$,

$2g=x_1+y_2=x_2+z_1=y_1+z_2$,

$6g=x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2=2(a+b+c)=2.$

即 $g=\dfrac{1}{3}$,从而 $f(3)=a+b+c+x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2+g=1+2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}.$

进一步可求得 $f(4)=5$,由上知 $f(1)$中有三个数相加,$f(2)$中有 6 个数相加,$f(3)$中有 10 个数相加,$f(4)$中有 15 个数相加…,若 $f(n-1)$中有 $a_{n-1}(n>1)$个数相加,可得$f(n)$中有$(a_{n-1}+n+1)$个数相加,且由

$f(1)=1=\frac{3}{3}$，$f(2)=\frac{6}{3}=\frac{3+3}{3}=f(1)+\frac{3}{3}$，

$f(3)=\frac{10}{3}=f(2)+\frac{4}{3}$，$f(4)=5=f(3)+\frac{5}{3}$，…

可得 $f(n)=f(n-1)+\frac{n+1}{3}$，所以

$f(n)=f(n-1)+\frac{n+1}{3}=f(n-2)+\frac{n+1}{3}+\frac{n}{3}=\cdots$

$=\frac{n+1}{3}+\frac{n}{3}+\frac{n-1}{3}+\cdots+\frac{3}{3}+f(1)$

$=\frac{n+1}{3}+\frac{n}{3}+\frac{n-1}{3}+\cdots+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$.

例 2 【解答】对平面凸四边形有

$S=\frac{1}{2}a_1h_1+\frac{1}{2}a_2h_2+\frac{1}{2}a_3h_3+\frac{1}{2}a_4h_4$

$=\frac{1}{2}(kh_1+2kh_2+3kh_3+4kh_4)$

$=\frac{k}{2}(h_1+2h_2+3h_3+4h_4)$，

$\therefore h_1+2h_2+3h_3+4h_4=\frac{2S}{k}$，即$\sum\limits_{i=1}^{4}(ih_i)=\frac{2S}{k}$.

类比以上可知，在三棱锥中

$V=\frac{1}{3}S_1H_1+\frac{1}{3}S_2H_2+\frac{1}{3}S_3H_3+\frac{1}{3}S_4H_4$

$=\frac{1}{3}(KH_1+2KH_2+3KH_3+4KH_4)$

$=\frac{K}{3}(H_1+2H_2+3H_3+4H_4)$

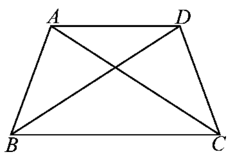
$\therefore H_1+2H_2+3H_3+4H_4=\frac{3V}{K}$，即$\sum\limits_{i=1}^{4}(iH_i)=\frac{3V}{K}$.

例 2 变式题 $2^{4n-1}+(-1)^n2^{2n-1}$ **【解析】**这是一种需类比推理方法破解的问题，结论由两项构成，第二项前有 $(-1)^n$，

两项分别为 2^{4n-1}，2^{2n-1}，因此对于 $n\in\mathbf{N}^*$，

$C_{4n+1}^1+C_{4n+1}^5+C_{4n+1}^9+\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=2^{4n-1}+(-1)^n2^{2n-1}$.

例 3 证明：(1)两平行线与第三条直线相交，内错角相等(大前提)，



$\angle BCA$ 与 $\angle CAD$ 是平行线 AD，BC 被 AC 所截内错角(小前提)，

所以，$\angle BCA=\angle CAD$(结论).

(2)等腰三角形两底角相等(大前提)，

$\triangle CAD$ 是等腰三角形，$DA=DC$(小前提)，

所以，$\angle DCA=\angle CAD$(结论).

(3)等于同一个量的两个量相等(大前提)，

$\angle BCA$ 与 $\angle DCA$ 都等于 $\angle CAD$(小前提)，

所以，$\angle BCA=\angle DCA$，所以 CA 平分 $\angle BCD$(结论).

(4)同理，BD 平分 $\angle CBA$.

例 3 变式题 c **【解析】**因 a,b,c,d,e 都为正数，故分子越大或分母越小时，S 的值越大，而在分子都增加 1 的前提下，分母越小时，S 的值增长越多，$\because 0<c<d<e<b<a$，所以 c 增大 1 个单位会使得 S 的值增加最多.

例 4 【解答】(1)椭圆 C 的焦点在 x 轴上，

由椭圆上的点 A 到 F_1、F_2 两点的距离之和是 4，得 $2a=4$，

即 $a=2$. 又点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$在椭圆上，因此

$\frac{1}{2^2}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1$ 得 $b^2=3$，于是 $c^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

焦点 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

(2)设 $P(x,y)$，则$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$\therefore x^2=4-\frac{4}{3}y^2$，

$\therefore |PQ|^2=x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4-\frac{4}{3}y^2+y^2-y+\frac{1}{4}$

$=-\frac{1}{3}\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+5$，又$\because -\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$.

$\therefore$当 $y=-\frac{3}{2}$时，$|PQ|_{\max}=\sqrt{5}$.

(3)类似的性质为：若 M、N 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上关于原点对称的两个点，点 P 是双曲线上任意一点，当直线 PM、PN 的斜率都存在，并记为 k_{PM}，k_{PN} 时，那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值.

证明：设点 M 的坐标为 (m,n)，则点 N 的坐标为 $(-m,-n)$，其中$\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=1$.

又设点 P 的坐标为 (x,y)，由 $k_{PM}=\frac{y-n}{x-m}$，$k_{PN}=\frac{y+n}{x+m}$，

得 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{y-n}{x-m}\cdot\frac{y+n}{x+m}=\frac{y^2-n^2}{x^2-m^2}$，将

$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$，$n^2=\frac{b^2}{a^2}m^2-b^2$ 代入得 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{b^2}{a^2}$.

第 69 讲　直接证明与间接证明

例 1 【解答】证明：$\because x,y,z$ 为正实数，

$\therefore \frac{x^2}{y}+y\geqslant 2\sqrt{\frac{x^2}{y}\cdot y}=2x$.

$\frac{y^2}{z}+z\geqslant 2\sqrt{\frac{y^2}{z}\cdot z}=2y$.

$\frac{z^2}{x}+x\geqslant 2\sqrt{\frac{z^2}{x}\cdot x}=2z$.

又$\because x,y,z$ 不全相等，

$\therefore$以上三式等号不能同时成立.

$\therefore$以上三式左、右两边分别相加得

$\frac{x^2}{y}+y+\frac{y^2}{z}+z+\frac{z^2}{x}+x>2x+2y+2z$.

即$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}>x+y+z$.

例 1 变式题 【解答】证明：$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，

由 a,b,c 为互不相等的非负实数知，以上三式等号不能成立.

$\therefore$三式两边分别相加得，$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$.

又$\because ab+bc\geqslant 2\sqrt{ab^2c}$，

$bc+ac\geqslant 2\sqrt{abc^2}$, $ab+ac\geqslant 2\sqrt{a^2bc}$,

且由 a,b,c 为互不相等的非负实数知以上三式等号不能成立,

∴三个不等式两边分别相加得,

$ab+bc+ac>\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$,

$\therefore a^2+b^2+c^2>\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

例 2 【解答】 令 $x=y=1$,得 $\frac{2}{3}\leqslant C\leqslant\frac{2}{3}$,$\therefore C=\frac{2}{3}$.

下面给出证明:

证明:先证明 $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}\leqslant\frac{2}{3}$.

因为 $x>0,y>0$,要证 $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}\leqslant\frac{2}{3}$,

只需证 $3x(x+2y)+3y(2x+y)\leqslant 2(2x+y)(x+2y)$,

即 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,这显然成立.

$\therefore\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}\leqslant\frac{2}{3}$.

再证 $\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}\geqslant\frac{2}{3}$,

只需证 $3x(2x+y)+3y(x+2y)\geqslant 2(x+2y)(2x+y)$,

即 $2xy\leqslant x^2+y^2$,这显然成立.

$\therefore\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}\geqslant\frac{2}{3}$.

综上所述,存在常数 $C=\frac{2}{3}$,使对任意正数 x,y 都有 $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}\leqslant\frac{2}{3}\leqslant\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}$ 成立.

例 2 变式题 【解答】 证明:法一:要证 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$ 成立,

即证 $\lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)>\lg(abc)$ 成立,

只需证 $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$ 成立,

$\because\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$, $\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$, $\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}>0$,

$\therefore\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geqslant abc>0$ 成立(*).

又∵a、b、c 是不全相等的正数,

∴(*)式等号不成立,

∴原不等式成立.

法二:∵a、b、$c\in\mathbf{R}_+$,

$\therefore\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$, $\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$, $\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}>0$.

又∵a、b、c 是不全相等的正数,

$\therefore\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$,

$\therefore\lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)>\lg(abc)$.

即 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

例 3 【解答】 证明:(1)方法一:任取 $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$,不妨设 $x_1<x_2$,

则 $x_2-x_1>0$,$a^{x_2-x_1}>1$ 且 $a^{x_1}>0$,

$\therefore a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$.

又∵$x_1+1>0$,$x_2+1>0$,

$\therefore\frac{x_2-2}{x_2+1}-\frac{x_1-2}{x_1+1}=\frac{(x_2-2)(x_1+1)-(x_1-2)(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{3(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$,

于是 $f(x_2)-f(x_1)=a^{x_2}-a^{x_1}+\frac{x_2-2}{x_2+1}-\frac{x_1-2}{x_1+1}>0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数.

方法二:$f(x)=a^x+1-\frac{3}{x+1}(a>1)$,

求导数得 $f'(x)=a^x\ln a+\frac{3}{(x+1)^2}$,

∵$a>1$,∴当 $x>-1$ 时,$a^x\ln a>0$,$\frac{3}{(x+1)^2}>0$,

$f'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立,

则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数.

(2)方法一:设存在 $x_0<0(x_0\neq-1)$ 满足 $f(x_0)=0$,

则 $a^{x_0}=-\frac{x_0-2}{x_0+1}$,且 $0<a^{x_0}<1$,

$\therefore 0<-\frac{x_0-2}{x_0+1}<1$,即 $\frac{1}{2}<x_0<2$,

与假设 $x_0<0$ 矛盾,故方程 $f(x)=0$ 没有负根.

方法二:设存在 $x_0<0(x_0\neq-1)$ 满足 $f(x_0)=0$,

①若 $-1<x_0<0$,则 $\frac{x_0-2}{x_0+1}<-2$,$a^{x_0}<1$,

$\therefore f(x_0)<-1$ 与 $f(x_0)=0$ 矛盾.

②若 $x_0<-1$,则 $\frac{x_0-2}{x_0+1}>1$,$a^{x_0}>0$,

$\therefore f(x_0)>1$ 与 $f(x_0)=0$ 矛盾,

故方程 $f(x)=0$ 没有负根.

例 4 【解答】 证明:(1)∵$f(1)=a+b+c=-\frac{a}{2}$,

$\therefore 3a+2b+2c=0$,

又 $3a>2c>2b$,$\therefore 3a>0$,$2b<0$,

$\therefore a>0$,$b<0$.又 $2c=-3a-2b$,由 $3a>2c>2b$,

$\therefore 3a>-3a-2b>2b$.

∵$a>0$,$\therefore -3<\frac{b}{a}<-\frac{3}{4}$.

(2)∵$f(0)=c$,$f(2)=4a+2b+c=a-c$.

①当 $c>0$ 时,∵$a>0$,∴$f(0)=c>0$ 且 $f(1)=-\frac{a}{2}<0$,

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

②当 $c\leqslant 0$ 时,∵$a>0$,∴$f(1)=-\frac{a}{2}<0$ 且 $f(2)=a-c>0$,

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个零点.

综合①②得 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个零点.

(3)∵x_2、x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点,则 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{b}{a}$,

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{b}{a}\right)}=\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}+2\right)^2+2}$.

$\because -3<\dfrac{b}{a}<-\dfrac{3}{4}$,

$\therefore \sqrt{2}\leqslant|x_1-x_2|<\dfrac{\sqrt{57}}{4}$.

第 70 讲　数学归纳法

例 1　【解答】$2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$,

$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$,

$4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$,

……

$(n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$.

将以上各式左右分别相加，得$(n+1)^3-1^3=3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3\times(1+2+3+\cdots+n)+n$.

所以得 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$=\dfrac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-n-3\cdot\dfrac{1+n}{2}\cdot n\right]$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证明：(1)$n=1$ 时，左边$=1$，

右边$=\dfrac{1}{6}\times1\times(1+1)(2+1)=1$，

∴等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*)$时，等式成立，即

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

则当 $n=k+1$ 时，

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k+3)(k+2)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$.

$\therefore n=k+1$ 时，等式成立.

由(1)(2)知，结论对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

例 2　【解答】证明：(1)当 $n=1$ 时，$f(1)=3^4-8-9=64$ 能被 64 整除，命题成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立，

$f(k)=3^{2k+2}-8k-9$ 能被 64 整除，则由于

$f(k+1)=3^{2(k+1)+2}-8(k+1)-9$

$=9\times3^{2k+2}-8k-17$

$=(9\times3^{2k+2}-9\times8k-9\times9)+9\times8k+9\times9-8k-17$

$=9(3^{2k+2}-8k-9)+64(k+1)$

即 $f(k+1)=9f(k)+64(k+1)$.

∵根据归纳假设 $f(k)$能被 64 整除，

$\therefore n=k+1$ 时，$f(k+1)$也能被 64 整除，即 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据(1)(2)可知，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 命题都成立.

例 3　【解答】(1)当 $n=2$ 时，左边$-$右边$=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\geqslant0$，不等式成立.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k>1)$时，不等式成立，

即$\dfrac{a^k+b^k}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k$.

$\because a>0,b>0,n>1,n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore (a^{k+1}+b^{k+1})-(a^kb+ab^k)$

$=(a-b)(a^k-b^k)\geqslant0$. 即 $a^{k+1}+b^{k+1}\geqslant a^kb+ab^k$.

∴当 $n=k+1$ 时，

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{a^k+b^k}{2}\cdot\dfrac{a+b}{2}$

$=\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k}{4}\leqslant\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}+a^{k+1}+b^{k+1}}{4}$

$=\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$.

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

∴综合(1)(2)知，对于 $a>0,b>0,n>1,n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ 总成立.

例 3 变式题　【解答】(1)已知 a_1 是奇数，假设 $a_k=2m-1$ 是奇数，其中 m 为正整数，

则由递推关系得 $a_{k+1}=\dfrac{a_k^2+3}{4}=m(m-1)+1$ 是奇数.

根据数学归纳法，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，a_n 都是奇数.

(2)方法一：$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{4}(a_n-1)(a_n-3)$，

∴要使 $a_{n+1}>a_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，则 $a_n<1$ 或 $a_n>3$.

下面用数学归纳法探究 a_1 的取值范围：

(1)当 $n=1$ 时，由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n^2+3)$，$n\in\mathbf{N}^*$. 得

$a_2=\dfrac{1}{4}(a_1^2+3)$，$\because a_2>a_1$，

$\therefore \dfrac{1}{4}(a_1^2+3)>a_1$，解得 $0<a_1<1$ 或 $a_1>3$.

另一方面，若 $0<a_k<1$，则 $0<a_{k+1}<\dfrac{1+3}{4}=1$；

若 $a_k>3$，则 $a_{k+1}>\dfrac{3^2+3}{4}=3$.

根据数学归纳法，$0<a_1<1\Leftrightarrow0<a_n<1,\forall n\in\mathbf{N}^*$；

$a_1>3\Leftrightarrow a_n>3,\forall n\in\mathbf{N}^*$.

综上所述，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1}>a_n$ 的充要条件是 $0<a_1<1$或 $a_1>3$.

方法二：由 $a_2=\dfrac{a_1^2+3}{4}>a_1$，得 $a_1^2-4a_1+3>0$，

于是$0<a_1<1$ 或 $a_1>3$.

$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2+3}{4}-\frac{a_{n-1}^2+3}{4}=\frac{(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})}{4}$,

因为 $a_1>0$,$a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{4}$,所以所有的 a_n 均大于 0,因此 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 同号.

根据数学归纳法,$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$a_{n+1}-a_n$ 与 a_2-a_1 同号.

因此,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1}>a_n$ 的充要条件是 $0<a_1<1$ 或 $a_1>3$.

例 4 【解答】(1)由 $a_1=\frac{1}{3}$,$b_1=\frac{2}{3}$,得 $b_1=b_2(1-a_1^2)$,

解得 $b_2=\frac{3}{4}$,又 $a_2=a_1b_2$,所以 $a_2=\frac{1}{4}$,

∴ $P_2\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$,故经过点 P_1、P_2 的直线 l 的方程为 $x+y-1=0$.

猜想点列 $P_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 在直线 l 上.

下面用数学归纳法证明:

①当 $n=2$ 时,点 $P_2\in l$ 已证.

②假设当 $n=k(n\geqslant 2)$ 时,点 $P_k\in l$,即 $a_k+b_k=1$,

则当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}+b_{k+1}=a_kb_{k+1}+b_{k+1}$

$=(1+a_k)b_{k+1}=(1+a_k)\frac{b_k}{1-a_k^2}=\frac{b_k}{1-a_k}=1$.

即 $a_{k+1}+b_{k+1}=1$,故 (a_{k+1},b_{k+1}) 满足 $x+y-1=0$,

所以点 $P_{k+1}\in l$.

由①②可知,对任意 $n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$ 都有点 $P_n\in l$.

(2)由 $a_{n+1}=a_n\cdot b_{n+1}$,$b_n=b_{n+1}(1-a_n^2)$,$a_n+b_n=1$,得

$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{b_n}{1-a_n^2}=a_n\cdot\frac{1-a_n}{1-a_n^2}=\frac{a_n}{1+a_n}$.

于是,$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$,所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 3 为首项,公差为 1 的等差数列.

所以 $\frac{1}{a_n}=2+n$,$a_n=\frac{1}{2+n}$.

$b_n=1-a_n=1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}$.

O 点到直线 $x+y-1=0$ 的距离为 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$|P_{n-1}P_n|=\sqrt{(a_n-a_{n-1})^2+(b_n-b_{n-1})^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$,

$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{1}{4}$.

例 4 变式题 【解答】(1)设 $P_1(x_1,y_1)$,$A_1(a_1,0)$,

则 $x_1=\frac{a_1}{2}$,即 $a_1=2x_1$.

由 $y^2=3x$ 得 $y_1=\sqrt{3x_1}$.

由 $|A_0P_1|=|OA_1|$ 得

$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=a_1$.

即 $\frac{a_1^2}{4}+\frac{3}{2}a_1=a_1^2$.

即 $a_1>0$,∴ $a_1=2$.

同理可得 $a_2=6$,$a_3=12$.

(2)依题意,得 $x_n=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$,

$y_n=\sqrt{3}\cdot\frac{a_n-a_{n-1}}{2}$,

由此及 $y_n^2=3x_n$ 得 $\left(\sqrt{3}\cdot\frac{a_n-a_{n-1}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}(a_{n-1}+a_n)$,

即 $(a_n-a_{n-1})^2=2(a_{n-1}+a_n)$.

由(1)可猜想:$a_n=n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

下面用数学归纳法予以证明:

①当 $n=1$ 时,命题显然成立;

②假设当 $n=k$ 时命题成立,即有 $a_k=k(k+1)$,

则当 $n=k+1$ 时,

由归纳假设及 $(a_{k+1}-a_k)^2=2(a_k+a_{k+1})$

得 $[a_{k+1}-k(k+1)]^2=2[k(k+1)+a_{k+1}]$,

即 $a_{k+1}^2-2(k^2+k+1)a_{k+1}+[k(k-1)]\cdot[(k+1)(k+2)]=0$,

解之得 $a_{k+1}=(k+1)(k+2)$ 或 $a_{k+1}=k(k-1)<a_k$(此式不合题意,舍去),

即当 $n=k+1$ 时,命题成立.

由①②知原命题成立.