摘要

非可加集函数是现代测度论的重要研究课题之一，也是当前国内外同行专家关注的前沿和热点问题。它的发展是科学发展和实际应用的需要，因此，对它的研究具有重要的理论意义和实用价值。论文在分析、吸收国内外该领域研究成果的基础上，重点研究取值为广义实值的非可加集函数，并将其应用于交通运输系统综合评价的探讨。

论文主要作了以下四方面的工作：

1.广义实值集函数的变差的研究

本文将单调函数和可加测度中的有界变差概念引入到非可加集函数的研究之中，提出了内含变差，不交变差和链变差等概念，并对其进行了较系统的研究。特别是讨论了这些变差的零(零)可加性、穷竭性和序连续性等非可加集函数的特殊性质，建立了非可加集函数的分解定理等一系列不同于经典测度的深刻结论，为深入研究广义模糊测度的分解奠定了基础。本文还证明了上述三种变差对可加集函数是一致的，其证明方法为可加集函数的分解提供了一种新方法。在研究过程中，本文顺便回答了 Pap 提出的一个公开问题。

2.广义模糊测度的研究

本文在前人工作的基础上，对广义模糊测度进行了系统的研究。提出了非零可加集函数的一致性概念，并在此条件下证明了广义模糊测度的 Hahn 分解定理。又在零零可加和零可加条件下建立了广义模糊测度 Jordan 分解的存在和唯一性定理。在零零可加条件下得到了广义模糊测度的 Lebesgue 分解定理。同时还为研究一般集函数的 Lebesgue 分解提供了新的方法。这些研究结果与研究方法扩充和改进了经典测度论中的相应结果，具有一定的理论意义。

3.交通运输系统综合评价的泛积分法的研究

本文在充分研究系统综合评价的加权平均法基础上，指出了加

权平均法的局限性，提出了根据不同的实际问题采用不同的加乘算子的泛积分法，并为其建立了相应的理论基础。为此，本文详细地研究了当前常用的几种积分，从中提炼出泛积分的新定义，使上述几种积分在形式上得到了统一。同时，本文还指出了 K 积分是泛积分的一个特例，从理论上解决了 K 积分的归属问题。在应用上，泛积分法克服了加权平均法的缺陷，是加权平均法的拓广，从而扩大了积分法在系统综合评价中的使用范围。此外，本文还提出了用系统的群体综合评价逼近系统的客观综合评价的思想及理论依据，以此来克服综合评价中的主观偏见性，使系统的综合评价更加接近客观实际。

4.本文对非可加集函数研究问题的分类进行了初步的探讨，提出了需要进一步完善和深入研究的问题。

【关键词】 非可加集函数，变差，广义模糊测度，泛积分，综合评价，交通运输

ABSTRACT

The principal purpose of this dissertation is to present a result of about two years work by the author on non-additive set functions and their applications in the transportation. Although non-additive set functions appeared very early as a part of classical measure theory, they played an auxiliary role in mathematics. Very recently it turned out that non-additive set functions are important in applications in different fields, such as, knowledge engineering, artificial intelligence, game theory, statistics, economy, sociology, industry, and generally in problems with uncertainties and vague data which connect them with the theory of fuzzy sets and systems. These applications stimulated the need for developing some theories for special kinds of non-additive set functions, mainly by non-mathematicians such as engineers, economists, system engineers, computer scientists, et al.

The following four parts are contained mainly in this paper:

1. The study of the variations of set functions

This paper introduces the concept of inclusion variation, disjoint variation and chain variation for signed non-additive set functions, which they appeared in real analysis and classical measure theory concerning additive set functions, and they are studied in detail and system. We discuss some properties of the variations, such as, the (null-) null-additivity, exhaustivity, order continuity and so on. A version of the Jordan decomposition theorem is established for non-additive set functions. These studies provide a basis for the following decompositions of signed fuzzy measures. Moreover, we prove that these three kinds of variations are coincide for additive set functions, and thus, provide a new method for the decomposition of additive set functions. In this paper, we obtain that the answer for the open problem by Pap is affirmative.

2. The study of signed fuzzy measures

In this paper, the concept of uniformity for non-null-additive set functions is introduced on the basis of advanced achievements and experience by the pioneer in this field and Hahn decomposition theorem for signed fuzzy measures is proved under the uniformity condition. The existence of Jordan decomposition for signed fuzzy measures is proved under the null-null-additive condition; and the uniqueness of the decomposition is proved under the null-additive condition. The Lebesgue decomposition theorem is also proved under the null-null-additive condition. In addition, we provide a new method for further study of Lebesgue decomposition of more general set functions. The previous results and the research method used generalize and improve corresponding results in classical measure theory, and so, they are of significance in the respects of theory.

3. The study of pan-integral

This paper gives a new definition of pan-integral on the basis of a detailed investigation for current integrals, such that these integrals are unified in the form. And we discuss the convergence theorems of pan-integral sequence for the sequence of measurable functions and provide a theoretical basis for applications of pan-integral. Moreover, we point out that K-integral is a special case of pan-integral

4. Pan-integration method of synthetic evaluation for transportation systems

This paper points out that the method of weighted mean is confined to the additivity of measures, and so, provides a pan-integration method for synthetic evaluation of systems, which overcomes shortcomings in the method of weighted mean and expands the usable area of the integration method in synthetic evaluation. In addition, we raise an idea of the approximate objective synthetic evaluation in terms of group synthetic evaluation in systems, so that we can reduce the influence of subjective biases in synthetic evaluation and make synthetic evaluation of systems closer to the objective reality.

【Keywords】 Non-additive set function, variation, signed fuzzy measure, pan-integral, synthetic evaluation, transportation

第一章 绪论

本文所指的测度论，或称现代测度论由两部分组成。其一是以可加集函数作为研究对象的经典测度论；其二是以非可加集函数作为研究对象的非可加测度论。

非可加集函数的研究是科学发展和实际应用的需要，是可加集函数研究(经典测度论)的必然发展趋势，是现代测度论的一个重要课题。目前，它的理论已经被广泛地应用于知识工程、人工智能、对策论、统计学、经济学、管理科学、工业生产以及不确定信息处理之中。有趣的是，某些特殊类型的非可加集函数最初是由一些工程师、经济师、系统分析员、计算机科学家提出并研究的。后来经过数学家的不断补充、改进，完善成现有的研究成果。另一方面，非可加集函数的理论对现代数学的反馈是在概率论、泛函分析、调和分析与(非线性)微分方程中得到直接的应用，而它的理论方法则被泛函分析和经典测度论所借鉴。由此可见，对非可加集函数理论的深入研究，具有重要的理论意义和实际意义。

§1.1 经典测度论的产生与发展

经典测度论是现代数学的一个比较成熟的基础性学科，它以集函数的可加性为基础，系统地研究测度、可测函数和积分理论。其根源之一是测量客观世界中物体的长度，面积或体积的度量几何学。早在古希腊时期，埃及尼罗河两岸每年有定期的洪水泛滥，洪水淹没了农田，冲毁了地界。洪水退后，为了解决土地争执问题，产生了“测地学”。现在所用的“几何学”这个名词，便是由“测地学”一词音译而来。当时使用的测量方法是将要测量的对象与一标准单位简单地加以比较。这种测量方法只能计算简单几何图形的长度，面积或体积，本质上不过是算术的应用。因此，它对复杂几何图形的测量，如求曲线的长度，曲线围成的面积、曲面围成的体积等就显得无能为力。实际上，此类测量问题与无限集和无限过程或极限过程密切相关，而非算术工具所能解决的。在微积分出现和充分发展以前，由于没有合适的测量方法，上述问题一直困惑着人们。17 世纪，随着科学技术的发展，许多科学问题

亟待人们去解决，从而促使了微积分的产生。17 世纪下半叶，Newton (1642—1727，英国)和 Leibniz (1646—1716，德国)在前人工作的基础上，几乎同时地创建了微积分。Newton 在 1704 年正式发表的论文“求曲边形的面积”中，用他所定义的积分计算一些曲线围成的面积。但是，由于当时微积分的发展还不成熟，因此许多应用是不严密的。

19 世纪，微积分开始进入严密化的阶段。Cauchy (1789—1857，法国)第一个提出用分割区间、作和式的极限来严格地定义积分。他考察的积分对象是在[a，b]上的连续函数，他还提出用极限来定义函数在无界区域上的积分以及函数具有瑕点的积分。然而，Cauchy 关于积分存在性的证明只适用于函数至多有有限个不连续点的情形。1854 年，Riemann (1826—1866，德国)引入了以他的名字命名的积分，并给出了函数可积的充要条件，这一条件，后来由 Darboux (1842—1917，法国)以更加明确的形式给出。在应用中，Riemann 积分成为处理不可测量问题的首要工具，人们通过使用恰当的积分技巧来达到测量的目的。但是，Riemann 积分理论的应用范围主要是连续函数。随着 Weierstrass (1815—1897，德国)和 Cantor (1845—1918，德国)工作的问世，在数学中出现了许多“奇怪”的函数与现象，致使 Riemann 积分理论暴露出较大的局限性。

几乎与 Riemann 积分理论发展的同时(1870—1880 年)，人们就已经广泛地开展了对积分理论的改造工作。当时，关于积分论的工作主要集中于无穷集合的性质的探讨，而无处稠密的集合具有正的外“容度”性质的发现，使集合的测度概念在积分论的研究中占有重要地位。积分的几何意义是曲线围成的面积等，Riemann 积分的定义是建立在对区间长度的分割基础上的。因此，人们自然会考虑到如何把长度、面积等概念扩充到更广泛的集合类上，从而把积分概念置于集合测度理论的框架之中。这一思想的重要性在于使人们认识到：集合的测度与可测性的推广将意味着函数的积分与可积性的推广。

在这方面作出重要贡献的首先是 Jordan (1838—1922，法国)，他在《分析教程》一书中阐述了后人称谓的 Jordan 测度论(Jordan 容度)，并讨论了定义在有界 Jordan 可测集上的函数，采用把区域分割为有限个 Jordan 可测集的办法来定义积分。虽然 Jordan 的测度论只具备有限可加性，同时存在着严重的缺陷(例如存在着不可测的开集，有理数集不可测等)，而且对积分理论并没有作出实质性的推广，但这一工作极大地影响着 Lebesgue 研究的视野。

在这一方向上迈出第二步的是 Borel (1871—1956，法国)。1898 年，他向人们展示了“Borel 集”的理论[1]。他从 R^1 中开集是构成区间的长度总和出发，允许对可列个开集作并与补运算，构成了所谓以 Borel 可测集为元素的 σ-代数类，并在其上定义了测度。这一成果的要点是使测度具备完全可加性。此外，他还指出，集合的测度和可测性是两个不同的概念。但在 Borel 的测度思想中，却存在着不是 Borel 集的 Jordan 可测集(这一点很可能是他没有进一步开创积分理论的原因之一)。特别是其中存在着零测度的稠密集，引起了一些数学家的反感。

然而，Borel 的学生 Lebesgue (1875—1941，法国)却领会了老师这一思想的深刻意义。他突破了 Jordan 对集合测度定义中所作的有限覆盖的限制，以更加一般的形式发展和完善了 Borel 的测度观念。他在 1902 年的论文“积分、长度与面积”[2]中，首次把 R^2 中的长度和面积概念推广为一般 Borel 集的 Lebesgue 测度，并定义了可测函数关于 Lebesgue 测度的积分，即 Lebesgue 积分。Lebesgue 积分理论不仅蕴涵了 Riemann 积分所达到的成果，而且还在较大程度上克服了后者的局限性。时至今日，Lebesgue 测度与积分已经成为实变函数论和经典测度论的重要基础[3]。

1907 年，Fubini (1879—1943，意大利或美国)将 Lebesgue 用累次积分计算重积分的结果完善为一般的定理。1913 年，Radon (1887—1956，奥地利)建立了包含 Stieltjes (1856—1894，荷兰)积分和 Lebesgue 积分的“Lebesgue-Stieltjes 积分”，扩大了 Lebesgue 积分所包括的范围，统一了 n 维欧氏空间上不同的积分概念。Radon 还进一步研究了 R^d 中在紧集上为有穷的一般 Borel 测度，即 Radon 测度[4~6]。随后，Harr (1885—1933，匈牙利)研究了拓扑群上的 Harr 测度和积分[5~7]。抽象可测空间上的测度和符号测度的概念是由 Fréchet (1878—)于 1915 年最先提出的。1930 年，Radon 和 Nikodym (1887—1974，美国)给出了符号测度为一不定积分的充要条件(Radon-Nikodym 定理)。Riesz (1880—1956，匈牙利)[8]和 Denjoy (1884—1974)等人都对积分理论的进一步发展作出了重要贡献。

在早期的经典测度论发展史中，积分概念的两个推广值得一提。其一是 Daniell 于 1918 年从一类函数上的正线性泛函出发研究了测度和积分[9]；其二是 Bachner 于 1933 年和 Pettis 于 1938 年分别定义了 Banach 空间值函数关于测度的积分[5]。

到本世纪 30 年代，测度与积分理论已趋于成熟，并在概率论、泛函分析和调和分析中得到广泛应用。例如，1933 年，前苏联数学家 Kolmogorov

(1903—1987)从测度观点出发创立了概率公理化体系[10]，为现代概率论奠定了数学基础。其中非常重要的条件数学期望概念就源于测度论中的 Radon-Nikodym 定理。随着时间的推移，测度论在数学中的基础性地位愈来愈显示出来[11~15]。此外，50 年代以后发展起来的无穷维空间中的测度和泛函积分成了研究量子物理的重要手段和工具。

§1.2 非可加集函数与积分理论的产生和研究状况

非可加集函数理论是经典测度论的延续，是可加集函数理论发展到一定时期的必然产物。

非可加集函数在早期的经典测度论中曾经自然地出现过，如外测度和向量测度的半变差，不过那时没有引起人们的注意。随着时间的推移、科学技术的发展，人们逐渐认识到，可加性这个条件在实际应用中太强，从而限制了它的使用范围。当然，在理想化的无误差假设下，它可以很好地表示一些类型的测量问题。但是，在现实的物质世界里，当测量误差不可避免时，它就不能充分表示这类测量问题了。此外，实际生活中许多度量问题本质上是非可加的，例如，人类的主观评价问题，不可重复性实验问题。这时，如果还要强行使用可加的方法表示这些度量，当然得不到符合实际的满意结果。

法国数学家 Choquet 是研究非可加集函数的先驱者，他在 1954 年提出了容度理论[16]。Choquet 的容度是论域上的一个具有连续性和单调性的集函数，它没有要求集函数的非负性和可加性。Choquet 的容度理论不仅对许多数学分支产生了影响，而且也对其他科学技术领域产生了积极的作用。非可加集函数理论一产生就被应用于对策论、数理经济和社会选择等问题之中，早期的应用出现在 Aumann 和 Shapley1974 年合著的专著中[17]。

1967 年，Dempster 对概率做另一种解释时，提出了两类非可加集函数，并将它们分别称为上概率和下概率[18]。1968 年，他又用它们讨论了统计推断的一般化问题。并且针对统计问题给出了两批证据(即两个独立的信息源)合成的原则[19]。1976 年，Shafer 将 Dempster 的工作推广到更加一般的情形，并将上述两类非可加集函数分别称之为信任测度和似然测度，前者是超可加上半连续的，后者是次可加下半连续的。从而形成了 Dempster-Shafer 理论或证据理论[20]。目前证据理论已经被应用于人工智能和证据决策之中。

从 1968 年开始 Aleksjuk[21, 22]、Dobrakov[23, 24]和 Drewnowski[25]等人分别

在他们的论文中使用了一类具有新的连续性概念的集函数，这一概念后来被王震源正式命名为集函数的“自连续”性。王震源使用这一概念深刻地描述了非可加集函数的结构特征，并将它成功地应用于模糊测度和模糊积分的研究之中[26]。

1965 年，美国控制论专家 Zadeh 发表了“模糊集合”一文[27]，大胆地对现代数学的基石——集合论进行修改和扩充，提出用模糊集合作为表现模糊事物的数学模型。他引入“隶属度”这个概念来描述处于中介过渡的事物所引起的概念外延的不分明性及识别判断的不确定性的倾向性程度。这是精确性对模糊性的一种逼近，也是运用数学方法刻划模糊性现象的首次尝试，这无疑是一项意义重大的开创性工作。从此模糊数学作为一门新的数学分支而逐步发展起来。1978 年，Zadeh 提出了可能性理论[28]，它的基础是由模糊集合导出的一类非可加集函数——可能性测度，与其密切相连的还有必然性测度。后来，Dubois 和 Prade 等人发现了可能性测度(必然性测度)与信任测度(似然测度)的联系[29~32]。目前可能性理论已被人们应用于计算机推理、专家系统以及人工智能等领域。

另一类重要的非可加集函数——模糊测度是日本学者 Sugeno 于 1974 年首先提出的。他受 Zadeh 将经典集合推广为模糊集合的影响，试图将经典测度进行推广。他在认真研究 Zadeh 提出的隶属函数的基础上，设想了另一种定量描述模糊性的方法，从而导致了用比较弱的单调性和连续性来代替可加性的模糊测度的产生。同时，他还建立了可测函数关于模糊测度的积分——模糊积分，并将其应用于复杂工程问题的综合评价之中[33, 34]。1984 年，王震源细详地讨论了自连续性模糊测度，并在此基础上研究了模糊测度空间上可测函数序列的各种收敛之间的关系。他发现经典测度论中的几个著名的函数收敛定理对测度可加性的依赖并非是本质性的，进而使这些定理，如 Lebesgue 定理、Riesz 定理以及 Egoroff 定理等，得到了改进和推广。同时，也为他进一步讨论模糊积分的收敛定理奠定了基础[26, 35~39]。1989 年以来，Murofushi 和 Sugeno 对模糊测度做了进一步的解释，定义了关于单调和非单调模糊测度的 Choquet 积分[40~44]。后来，王震源等人也参入了讨论[45]。这些工作深化了模糊测度和积分的理论研究。

自模糊测度诞生以来，国内外许多学者对模糊测度定义的条件做了扩充和修改，得到了一系列有意义的结果。1980 年，Relescu 和 Adams 将模糊测度的定义域和值域分别扩大到 σ-代数和 $\overline{R}_+$ 上，并给出了模糊积分的等价定义[46]。1992 年，王震源和 Klir 在他们的专著[38]中把模糊测度的连续性减弱

成(上、下)半连续性。提出了(上、下)半连续模糊测度的概念。实际上，信任测度、似然测度、可能性测度和必然性测度都是半连续的。1993 年，Liu 将模糊测度的值域再次扩大到 $\overline{R}$，同时将单调性用更弱的条件——修正单调性代替，进而定义了广义(符号)模糊测度。文献[48]对广义模糊测度的 Hahn 分解问题做了地讨论，发现不加任何条件进行这种分解是非常困难的，进而提出了非可加集函数“一致性”(或“顺从性”)的概念。此外，1986 年，Suarez 与 Gilavarez 利用三角模定义了广义模糊积分[49]。1990 年，吴从炘等人在广义三角模基础上定义了(G)模糊积分[50～52]。1988 年，Suzuki 给出了用模糊积分定义模糊测度的方法[53]，随后，讨论了模糊测度的原子[54]。1995 年，姜青山等人给出了 σ-有限模糊测度的 Lebesgue 和 Saks 分解[55]，接着，讨论了度量空间上的模糊测度[56]。1983 年，张文修、赵汝怀对模糊测度与模糊积分进行了推广，接着，讨论了 Sugeno 模糊积分转化定理[57～59]。此外，我国学者何家儒等人在此方面也做了大量的工作，并取得了一些有意义的结果[60～64]。

非可加集函数中重要的一类——零可加集函数是王震源于 1984 年首先提出的[26]，它刻划了一类集函数的特征。后来，王震源[65]，吴从炘等人[66]在可数空间上讨论了集函数的零可加性与自连续性的等价性，得到了较好的结果。在王震源工作的影响下，1995 年，Pap 出版了以它命名的专著《零可加集函数》[67]。1994 年，吴从炘等人率先提出了集函数的零零可加性的概念[52]。1998 年，文献[68～70]讨论了这一概念，并将它应用于广义模糊测度的 Lebesgue 和 Jordan 分解之中，改进了经典测度论中的相应结果。

由于模糊测度的结构比较松散，不便于使用。因此，在使用时通常根据不同问题的需要对它本身附加某些条件。λ-律就是这些附加条件之一。它是 Sugeno 在 1974 年引入模糊测度概念的同时提出的，满足λ-律的模糊测度称为 g_λ-测度[33]或称为λ-可加模糊测度[71]，它是一类应用广泛的非可加集函数。因此，许多学者纷纷对它进行研究。1980 年，Dubois 和 Prade 指出对于λ-可加模糊测度，当$\lambda>0$ 时，它是信任测度；当$\lambda<0$ 时，它是似然测度[72]。1981 和 1982 年，王震源[73]和 Kruse[71]分别讨论了λ-可加模糊测度的扩张问题。接着，Kruse 又讨论了关于λ-可加模糊测度的模糊积分以及条件λ-可加模糊测度等问题[74～76]。1988 年，Berres 证明了λ-可加模糊测度可以象概率那样用密度函数来表示[77]。1990 年，文献[78]给出了关于λ-可加模糊测度的 Radon-Nikodym 定理和 Borel-Cantelli 引理，花文秀等人也证明了后一引理[79, 80]。文献[81～85]讨论了乘积λ-可加模糊测度、广义λ-可加模糊测度

及其分解以及λ-可加模糊测度的概率性质等问题。罗承忠[86]、何家儒[60]等人也对此做了有意义的工作。1996 年，Klir 和王震源等人提出了用变换构造λ-可加模糊测度的方法[87, 88]。1995 年，Lee 等人[89]及王纬[90]、王佳[91]分别用遗传算法和神经网络等方法来确定和识别λ-可加模糊测度，为实际应用创造了条件，这无疑是一些富有启发意义的工作。

可分测度是另一类重要的集函数，它具有许多与可加集函数类似的性质，其中包括 S-可分测度、伪加测度、泛可加测度等。1982 年，Dubois 和 Prade 提出了基于三角模的一类模糊测度[92]。1984 年，Weber 在 Archimedean t-余模基础上定义了$\perp$-可分测度及其积分[93~96]。1987 年，Sugeno 和 Murofushi 定义了伪加测度及其积分[97]。1988 年，Ichihashi 等人定义了另一种基于伪加和伪乘的模糊积分[98]。1990 年，Pap 讨论了$\perp$-可分测度的 Lebesgue 和 Saks 分解[99]。我国学者在这方面的研究起步较早。1981 年，赵汝怀在取大算子和普通乘法算子基础上定义了(N)模糊积分[100, 101]。1985 年，杨庆季提出了泛积分的概念[102]。随后，他和宋仁明讨论了关于泛可加测度的泛积分[103]。1992 年，王震源在文献[38]中对泛积分做了小结和应用。此外，文献[104]讨论了泛可加测度的扩张问题，同时，指出了λ-可加模糊测度是泛可加测度。必须指出，上述集函数与积分都是建立在不同的泛加和泛乘算子基础上的，因此，研究这些算子的结构是完全必要的[105~111]。

前面提到的集函数都是定义在由经典集合构成的集合类上的。一种自然的想法是，建立由模糊集合构成的集合类上的集函数，它们当然更有理由叫作模糊测度；相应地，建立定义在模糊集合上的某类函数关于这种模糊测度的积分，也叫做模糊积分。这项研究由 Zadeh 于 1968 年首先开展了，他将经典事件的概率拓广到模糊事件(模糊集合)的概率，而且对经典事件的独立性，条件概率、均值、方差、熵等概念也进行了拓广[112]。这种拓广扩大了概率论的应用范围，具有重要的实际意义且富有启发意义。1979 年，Knalili 深入研究了独立模糊事件列的有关极限定理[113]。1980 年，Klement 讨论了模糊 σ-代数，并使用马尔柯夫核构造模糊测度[114~116]，1981 年，他又同 Lowen 等人进一步讨论了模糊概率测度[117, 118]。我国学者张文修、王戈平、汪培庄、陈绍仲和刘作述等人在此方面也做了许多有意的工作[59, 119~125]。1983 年，Butnariu 在模糊集合类上定义了一种称为可加模糊测度的集函数，并将其应用于对策论中[126~133]。1990 年以来，何家儒、乔忠、张德利、刘学成和张广全等人，分别讨论了几种模糊集合类上的模糊测度，并建立了相应的模糊

积分[60, 134~140]。文献[141]在定义模糊事件的$\widetilde{G}_\lambda$-测度基础上，讨论了模糊事件列关于$\widetilde{G}_\lambda$-测度的极限定理，从而拓广了λ-可加模糊测度的应用范围。

必须指出，模糊拓扑学是模糊数学的重要组成部分，也是模糊数学理论中发展最迅速、成果较丰富的分支之一。模糊拓扑从起初主要的推广型研究逐渐走上创新的道路，尤其是引入了具有深刻层次结构特点的重域系(远域系)，给出模糊拓扑空间的邻近构造以及与完全分配格等代数结构联系起来，使得模糊拓扑的研究更具特色，且与现代数学的一些重要分支更加紧密关联[142~148]。受经典测度论发展过程的启迪，开展模糊拓扑空间上的测度(集函数)和积分理论的研究无疑是一项非常重要的工作。十分遗憾的是，到目前为止这方面的研究还很薄弱，尚未得到有影响的结果，这些都有待于人们进行深入地研究。

§1.3 本文的主要工作

从上述介绍可以看出，由于非可加集函数不具有可加性，因而结构比较松散，人们难以建立类似于经典测度论那样的理论体系。目前，虽然有几类非可加集函数已经成为数学家们研究的热点问题，但是它的发展还远不如经典测度论那样成熟，许多问题有待于人们进一步深入研究，一些问题尚无人涉足。随着科学技术的迅速发展，特别是人工智能和计算机科学的发展，迫切地需要人们去解决大量的非可加度量问题，而解决这些问题的关键在于非可加集函数理论的发展与完善。为此，我们选择这一问题作为研究对象。

本文主要讨论广义(符号)非可加集函数的基本性质以及它的一些分解定理。为了实际应用还讨论了非负可测函数的泛积分等问题。本文的工作主要由四部分构成：

(1)非可加集函数的三种变差函数的研究；

(2)广义(符号)模糊测度的研究；

(3)泛积分的进一步研究；

(4)非可加集函数在交通运输中的应用研究。

第二章　基本概念与性质

本章，我们简要地叙述测度论中的一些基本概念及与之相关的基本性质，它们是本文的基础。第四节中，除了给出集函数的一些常用概念外，还讨论了修正单调集函数的基本性质，进一步的结论将在第四章中给出。此外，集函数的序连续性与穷竭性的等价条件也在本节中得到了讨论。

§2.1　常用符号与集合的特征函数

本文中，下面符号表示一些特殊的实数区间，

$$R=(-\infty,+\infty),\quad \overline{R}=[-\infty,+\infty],\quad R_+=[0,+\infty),\quad \overline{R}_+=[0,+\infty]。$$

在本文中，X 始终表示一个非空集合，它是我们讨论问题的论域。X 的全体子集组成的集合称为 X 的幂集，用 $\mathcal{P}(X)$表示。

设 A 是 X 的子集，A 的补集用 $\overline{A}$ 表示。集合 $A(\subset X)$的特征函数定义为

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A。\end{cases}$$

设 A，B，A_1，…，A_n是 X 的子集，那么

(1) $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\wedge\chi_B$；

(2) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\vee\chi_B$；

(3) $\chi_{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\sum_{i\geq1}\chi_{A_i}-\sum_{i<j}\chi_{A_i\cup A_j}+\cdots+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bigwedge_{i=1}^{n}\chi_{A_i}$；

(4) $\chi_{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\sum_{i\geq1}\chi_{A_i}-\sum_{i<j}\chi_{A_i\cap A_j}+\cdots+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\bigvee_{i=1}^{n}\chi_{A_i}$；

(5) $\chi_{\overline{A}}=1-\chi_A=1+\chi_A\pmod 2$。

可以证明，集合与其特征函数之间存在着 1-1 对应关系[86]。

§2.2 集合序列的极限运算

设 A_1，$A_2,\cdots$是 X 的子集组成的集列，简记作$\{A_n\}$。我们定义

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k。$$

如果$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n$，则称集列$\{A_n\}$的极限存在且以$\lim_n A_n$记之，即

$$\lim_n A_n = \overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n。$$

显然，对任意集列$\{A_n\}$总有$\underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n$。

如果对任意$n \geq 1$, $A_n \subset A_{n+1}$，则称集列$\{A_n\}$是单调增的(或非降的)，记作$A_n\uparrow$；如果对任意$n \geq 1$, $A_n \supset A_{n+1}$，则称$\{A_n\}$是单调降的(或非增的)，记作$A_n\downarrow$。单调增和单调降集列统称为单调集列。

命题 2.2.1

(1)如果$\{A_n\}$是单调增的，则$\lim_n A_n$存在且$\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$；

(2)如果$\{A_n\}$是单调降的，则$\lim_n A_n$存在且$\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$；

(3)如果$A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$，则$\lim_n A_n$存在且$\lim_n A_n = \phi$；

(4)如果$\lim_n A_n$=A，则$\{A_n\}$的任意子集列$\{A_{n_i}\}$的极限也存在且$\lim_i A_{n_i} = A$。

命题 2.2.2 设$\{A_n\}$，$\{B_n\}$是 X 的两个子集列，则

(1) $\overline{\overline{\lim_n} A_n} = \underline{\lim_n}\overline{A_n}$，

(2) $\overline{\underline{\lim_n} A_n} = \overline{\lim_n}\overline{A_n}$，

(3) $\underline{\lim_n}(A_n \cup B_n) \supset \underline{\lim_n} A_n \cup \underline{\lim_n} B_n$，

(4) $\overline{\lim_n}(A_n \cup B_n) = \overline{\lim_n} A_n \cup \overline{\lim_n} B_n$，

(5) $\underline{\lim_n}(A_n \cap B_n) = \underline{\lim_n} A_n \cap \underline{\lim_n} B_n$，

(6) $\overline{\lim_n}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim_n} A_n \cap \overline{\lim_n} B_n$，

(7) $\overline{\lim_n} A_n - \underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n}(A_n \Delta A_{n+1})$。

推论 2.2.1

(1)如果 $\lim_n A_n = A$，则 $\lim_n \overline{A}_n = \overline{A}$。

(2)如果 $\lim_n A_n = A$，$\lim_n B_n = B$，则

$$\lim_n(A_n \cup B_n) = A \cup B, \qquad \lim_n(A_n \cap B_n) = A \cap B,$$
$$\lim_n(A_n - B_n) = A - B, \qquad \lim_n(A_n \Delta B_n) = A \Delta B。$$

命题 2.2.3

(1) $\chi_{\overline{\lim_n} A_n} = \overline{\lim_n} \chi_{A_n}$，$\chi_{\underline{\lim_n} A_n} = \underline{\lim_n} \chi_{A_n}$。

(2) $\lim_n A_n = A$ 当且仅当 $\lim_n \chi_{A_n} = \chi_A$。

有时我们也用 $\limsup_n A_n$ 表示 $\overline{\lim_n} A_n$；用 $\liminf_n A_n$ 表示 $\underline{\lim_n} A_n$。

§ 2.3　集环与集代数

本文中，$\mathfrak{D}$ 始终表示 X 的子集组成的一个集族，且 $\phi \in \mathfrak{D}$。

定义 2.3.1　设 X 是论域，$\mathfrak{D}$ 是 X 的子集族。

(1)称 $\mathfrak{D}$ 是(X 上的)一个环，如果 A，$B \in \mathfrak{D}$，则 $A \cup B \in \mathfrak{D}$，$A - B \in \mathfrak{D}$。

(2)称 $\mathfrak{D}$ 是(X 上的)一个代数，如果 $\mathfrak{D}$ 是环且 $X \in \mathfrak{D}$。

(3)称 $\mathfrak{D}$ 是(X 上的)一个 σ-环，如果

(i) $\{A_n\}\subset\mathcal{D}$ 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}$， (ii) A，$B\in\mathcal{D}$ 则 $A-B\in\mathcal{D}$。

(4)称 $\mathcal{D}$ 是(X 上的)一个 σ-代数(或 σ-域)，如果 $\mathcal{D}$ 是 σ-环且 $X\in\mathcal{D}$。

本文中，$\mathfrak{R}$始终表示环或 σ-环；$\mathcal{A}$和 Σ 分别表示代数和 σ-代数(域)。

§ 2.4 集函数

定义域为 X 的子集族 $\mathcal{D}$ 的泛函数称为($\mathcal{D}$ 上的)集函数。集函数 $m:\mathcal{D}\to R$ 称为($\mathcal{D}$ 上的)有限实值集函数。集函数 $m:\mathcal{D}\to\overline{R}$ 称为($\mathcal{D}$ 上的)广义实值集函数。如果 $m:\mathcal{D}\to R_+$(或 $\overline{R}_+$)，则称 m 是($\mathcal{D}$ 上的)非负集函数。

定义 2.4.1 设 m 是 $\mathcal{D}$(或$\mathfrak{R}$)上的集函数。

(1) $m(\phi)=0$。

(2)如果对任意 $A\subset B$，A，$B\in\mathcal{D}$，有 $m(A)\le m(B)$，则称 m 是单调的。

(3)如果对任意 A，$B\in\mathfrak{R}$，$A\cap B=\phi$，有

a） $m(A)\ge 0,\ \ m(B)\ge 0,\ \ m(A)\vee m(B)>0\Rightarrow m(A\cup B)\ge m(A)\vee m(B)$;

b） $m(A)\le 0,\ \ m(B)\le 0,\ \ m(A)\wedge m(B)<0\Rightarrow m(A\cup B)\le m(A)\wedge m(B)$;

c） $m(A)>0$，$m(B)<0\Rightarrow m(A)\ge m(A\cup B)\ge m(B)$，

则称 m 是修正单调的。

(4)如果对任意 $A,B\in\mathfrak{R}$，有 $m(A\cup B)\le m(A)+m(B)$，则称 m 是次可加的。

(5)如果对任意 A，$B\in\mathfrak{R}$，$A\cap B=\phi$，有 $m(A\cup B)\ge m(A)+m(B)$，则称 m 是超可加的。

(6)如果对任意 A，$B\in\mathfrak{R}$，$A\cap B=\phi$，$m(A)=m(B)=0\Rightarrow m(A\cup B)=0$，则称 m 是零零可加的。

(7)如果对任意 A，$B\in\mathfrak{R}$，$A\cap B=\phi$，$m(B)=0\Rightarrow m(A\cup B)=m(A)$，则称 m 是零可加的。

(8)如果对任意 A，$B\in\mathfrak{R}$，$A\cap B=\phi$，有 $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$，则称 m 是(有限)可加的。

(9)如果对$\mathfrak{R}$中任意两两不交集列$\{A_n\}$(即 $A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$)有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}m(A_n)$$

则称 m 是 σ-可加的。

(10)如果对$\Re$中任意单调增集列$\{A_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$，则称 m 是从下连续的。

(11)如果对$\Re$中任意单调降集列$\{A_n\}$，存在 n_0 使$\left|m\left(A_{n_0}\right)\right|<\infty \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

则称 m 是从上连续的。

(12)如果 $m(\phi)=0$，且对任意$\{A_n\}\subset\Re$，$A_n\downarrow\phi$ 有$\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$，则称 m 是序连续的。

(13)如果对任意 $A\in\Re$，$\{B_n\}\subset\Re$，$A\cap B_n=\phi$，n=1，2,…，且$\lim\limits_{n\to\infty} m(B_n)=0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} m(A\cup B_n)=m(A)$，则称 m 是上自连续的。

(14)如果对任意 $A\in\Re$，$\{B_n\}\subset\Re$，$B_n\subset A$，n=1，2,…，且$\lim\limits_{n\to\infty} m(B_n)=0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} m(A-B_n)=m(A)$，则称 m 是下自连续的。

(15)如果对$\Re$中任意两两不交集列$\{A_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$，则称 m 是穷竭的。

(16)如果存在集列$\{X_n\}\subset\Sigma$，使 $X_n\uparrow X$ 且$\left|m(X_n)\right|<+\infty$ $(n\geq 1)$ 那么称 m 是σ-有限的。

若集函数$m:\Re\to\overline{R}_+$是σ-可加的，则称 m 是测度。若测度 m 还满足 $m(X)$=1，则称 m 为概率(测度)。

若集函数$m:\Re\to\overline{R}$是σ-可加的，则称 m 是符号(广义)测度。

若集函数$m:\Re\to R_+$是单调的，且 $m(X)$=1 则称 m 为正规的。

若集函数$m:\Re\to\overline{R}$既是上自连续的，又是下自连续的，则称 m 是自连续的。

若集函数$m:\Re\to\overline{R}_+$满足上述条件(1)，(2)，(10)则称 m 为下半连续模糊测度；若 m 满足条件(1)，(2)，(11)则称 m 为上半连续模糊测度；若 m 满足条件(1)，(2)，(10)，(11)则称 m 为($\Re$上的)模糊测度。

若集函数$m:\Re\to\overline{R}$满足上述条件(1)和(10)则称 m 为广义下半连续模糊测度；若 m 满足条件(1)和(11)，则称 m 为广义上半连续模糊测度；若 m 满足条件(1)，(10)，(11)，则称 m 为($\Re$上的)广义模糊测度。

注 2.4.1 (1)非负集函数的修正单调性蕴涵其单调性。这说明修正单调性是单调性的拓广。

(2)非负超可加集函数是单调的。

(3)取值不恒为$-\infty$的可加集函数是单调的，当且仅当它是非负的。

(4)集函数的零可加性蕴涵其零零可加性。

例 2.4.1 符号(广义)测度和模糊测度都是修正单调的。

命题 2.4.1 设集函数$m:\Re\to\overline{R}$是修正单调的，$A\in\Re$，$B\in\Re$，$B\subset A$，那么

(1)如果 $m(A)\le 0$, $m(B)>0$,则 $m(A-B)<0$;

(2)如果 $m(A)\ge 0$, $m(B)<0$,则 $m(A-B)>0$。

证明 (1)假定 $m(A-B)\ge 0$ 则由定义 2.4.1 中的 a)

$$m(A)=m((A-B)\cup B)\ge m(A-B)\vee m(B)>0$$

这与 $m(A)\le 0$ 矛盾，故 $m(A-B)<0$。(2)的证明与(1)类似。

命题 2.4.2 设 m 是$\Re$上的修正单调集函数，$A\in\Re$，$B\in\Re$，$B\subset A$，那么

(1)如果 $m(B)<m(A)$,则 $m(A-B)\ge 0$;

(2)如果 $m(B)>m(A)$,则 $m(A-B)\le 0$。

证明 (1)当 $m(B)>0$ 时，假定 $m(A-B)<0$，则由定义 2.4.1 中的 c)

$$m(B)\ge m(B\cup(A-B))=m(A),$$

这与条件 $m(B)<m(A)$矛盾，所以 $m(A-B)\ge 0$。当 $m(B)\le 0$ 时，假定 $m(A-B)<0$，则由定义 2.4.1 中的 b)

$$m(A)=m(B\cup(A-B))\le m(B),$$

这仍然与条件 $m(B)<m(A)$矛盾，故 $m(A-B)\ge 0$。类似可证(2)。

命题 2.4.3 设 m 是$\Re$上的修正单调广义下半连续模糊测度，$\{A_n\}$是$\Re$中任意不交集列，那么

(1)如果 $m(A_n)\ge 0$，$n=1$，2，…，且存在 n_0 使$m(A_{n_0})>0$，则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\ge\bigvee_{n=1}^{\infty}m(A_n)>0\text{。}$$

(2)如果 $m(A_n)\le 0$，$n=1$，2，…，且存在 n_0 使$m(A_{n_0})<0$，则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\bigwedge_{n=1}^{\infty}m(A_n)<0。$$

证明 (1)令 $B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，n=1，2，…，则 $B_n\uparrow$，由定义 2.4.1 中的 a)得

$$m(B_n)=m\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\bigvee_{i=1}^{n}m(A_i),\quad n\ge n_0。$$

因此，及 m 的下连续性得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}m(B_n)\ge\bigvee_{i=1}^{\infty}m(A_i)。$$

类似可证(2)。

命题 2.4.4 设 m 是$\Re$上的广义下半连续模糊测度。如果 m 是穷竭的，则 m 是序连续的。

证明 设 m 是穷竭的。如果命题的结论不真，则存在某个 $\varepsilon_0>0$ 和$\Re$中的集列 $A_n\downarrow\phi$，使 $|m(A_n)|>\varepsilon_0$ （n=1，2，…）。因为，对每个固定的整数 $k\ge1$，$(A_k-A_n)\uparrow A_k$ $(n\to\infty)$，所以，由 m 的下连续性，得

$$\left|\lim_{n\to\infty}m(A_1-A_n)\right|=|m(A_1)|>\varepsilon_0。$$

于是存在 n_1，使 $|m(A_1-A_{n_1})|>\varepsilon_0$。同理，由等式 $\left|\lim_{n\to\infty}m(A_{n_1}-A_n)\right|=|m(A_{n_1})|>\varepsilon_0$ 知，存在 $n_2>n_1$，使 $|m(A_{n_1}-A_{n_2})|>\varepsilon_0$。用这样的方法可以得到一个实数列 $n_1<n_2<\cdots$ 和一个 $\{A_n\}$ 的子集列 $\{A_{n_k}\}$ 使

$$|m(A_{n_k}-A_{n_{k+1}})|>\varepsilon_0\quad k\ge1。\tag{2.4.1}$$

令 $B_k=A_{n_k}-A_{n_{k+1}},k\ge1$。显然 $\{B_k\}$ 是$\Re$中的两两不交集列，且由 m 的穷竭性应该有 $\lim_{k\to\infty}m(B_k)=m(A_{n_k}-A_{n_{k+1}})=0$。但是，这与式(2.4.1)。故 m 是序连续的。

命题 2.4.5 设 m 是$\Re$上的修正单调广义下半连续模糊测度。如果 m 是

序连续的，则 m 是穷竭的。

证明　设$\{A_n\}$是$\mathfrak{R}$中的任意不交集列。记

$$\left\{A_{n_i}^{+}\right\}=\left\{A_i : A_i\in\left\{A_n\right\},\ m\left(A_i\right)>0\right\},$$

$$\left\{A_{n_i}^{-}\right\}=\left\{A_i : A_i\in\left\{A_n\right\},\ m\left(A_i\right)<0\right\}。$$

由命题 2.4.3

$$0<m\left(A_{n_i}^{+}\right)\le\bigvee_{k=i}^{\infty}m\left(A_{n_k}^{+}\right)\le m\left(\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}^{+}\right) \tag{2.4.2}$$

$$m\left(\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}^{-}\right)\le\bigwedge_{k=i}^{\infty}m\left(A_{n_k}^{-}\right)\le m\left(A_{n_i}^{-}\right)<0 \tag{2.4.3}$$

因为$\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}^{+}\downarrow\phi$，$\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}^{-}\downarrow\phi$，$(i\to\infty)$，则使用 m 的序连续性，得

$$\lim_{i\to\infty}m\left(\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}^{+}\right)=0,\qquad \lim_{i\to\infty}m\left(\bigcup_{k=i}^{\infty}A_{n_k}^{-}\right)=0。$$

注意不等式(2.4.2)和(2.4.3)，有$\lim\limits_{i\to\infty}m\left(A_{n_k}^{+}\right)=0$，$\lim\limits_{i\to\infty}m\left(A_{n_k}^{-}\right)=0$。由此得

$$\lim_{n\to\infty}m\left(A_n\right)=0，$$

故 m 是穷竭的。

由上述命题和命题 2.4.4 可以直接得到：

命题 2.4.6　设 m 是修正单调的广义下半连续模糊测度。则 m 是穷竭的当且仅当 m 是序连续的。

命题 2.4.7　如果修正单调的广义模糊测度 m 是有限的，则 m 是序连续的，也是穷竭的。

证明　由 m 的连续性和有限性立即可得 m 是序连续的，从而由命题 2.4.5，m 还是穷竭的。

命题 2.4.8　设 m 是$\mathfrak{R}$上的广义实值集函数，且是穷竭的。如果$\left\{A_r : r\in\Gamma\right\}$是$\mathfrak{R}$中的两两不交集合族，则指标集$\Gamma'=\left\{r : r\in\Gamma,\ m\left(A_r\right)\ne 0\right\}$是一至多可数集。

证明　用 Card(A)表示集合 A 的势，特别地，用$\aleph_0$表示正整数集合 N 的

势，即 $\mathrm{Card}(N)=\aleph_0$。假定 $\mathrm{Card}(\Gamma')>\aleph_0$，令

$$\Gamma_n=\left\{r: r\in\Gamma,\quad |m(A_r)|\geq\frac{1}{n}\right\},\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

则 $\Gamma'=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$。从而存在正整数 n_0，使 $\mathrm{Card}(\Gamma_{n_0})\geq\aleph_0$。于是可以从 Γ_{n_0} 中选出可数个互不相同的指标 $r(i)$，i=1，2，…，使

$$\left|m(A_{r(i)})\right|\geq\frac{1}{n_0},\ i=1,\ 2,\ \cdots。$$

但是，这与 m 的穷竭性矛盾，故 Γ' 是一至多可数集合。

命题 2.4.9 设 m 是 $\mathfrak{R}$ 上的有限单调集函数，则 m 是从上和下连续的充要条件为 m 是连续的，即对 $\mathfrak{R}$ 中任意极限存在的集列 $\{A_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，有

$$\lim_{n\to\infty}m(A_n)=m(A)。$$

证明 充分性显然。

必要性：设 $\{A_n\}\subset\mathfrak{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$。由 §2.2 中的定义，有

$$\begin{aligned}m(A)&=m\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\\&=\overline{\lim_{n\to\infty}}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}m(A_n)\geq\underline{\lim_{n\to\infty}}m(A_n)\\&\geq\underline{\lim_{n\to\infty}}m\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right)=m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)=m(A)。\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=m(A)$。

§2.5 二元运算

定义 2.5.1 设 S 是一个非空集合。S 上的一个二元运算是指映射 T：$S\times S\to S$，并且记作 $(S,\ \mathrm{T})$。对 $a,\ b\in S$，我们也常将 $\mathrm{T}(a,\ b)$ 记作 $a\mathrm{T}b$。S 的元素 a 称为二元运算 T 的一个左(右)零元，如果对任意 $x\in S$，有 $\mathrm{T}(a,x)=a$ ($\mathrm{T}(x,a)=a$)；如果 a 既是 T 的左零元又是 T 的右零元，则称 a 是 T 的一个零元。

$a \in S$，称为 T 的一个左(右)单位元，如果对所有 $x \in S$，有 $T(a, x)=x$（$T(x, a)=x$）；如果 a 既是 T 的左单位元又是 T 的右单位元，则称 a 是 T 的一个单位元。$a \in S$ 称为 T(下)的幂等元，如果 $T(a, a)=a$。

命题 2.5.1

(1)如果 a 是一个左零元，b 是一个右零元，则 $a=b$。

(2)如果 a 是一个左单位元，b 是一个右单位元，则 $a=b$。

由此可见，二元运算最多可以有一个零元和(或)一个单位元。

定义 2.5.2　设 T_1 是 S_1 上的一个二元运算，T_2 是 S_2 上的一个二元运算。如果映射 h：$S_1 \to S_2$，使

$$h(T_1(x, y)) = T_2(h(x), h(y)) \quad (x, y \in S_1),$$

则称 h 是(S_1，T_1)到(S_2，T_2)的一个同态。如果同态 h 有逆 h^{-1}，则称 h 是(S_1，T_1)到(S_2，T_2)的一个同构。

显然，如果 h 是(S_1，T_1)到(S_2，T_2)的一个同构，则其逆 h^{-1} 是(S_2，T_2)到(S_1，T_1)的一个同构。

第三章　集函数的变差

本章讨论与(广义)实值集函数相对应的三种非负集函数，它们是集函数的内含变差、不交变差以及链变差。有些概念曾在经典测度论中以别的术语出现并被使用[11~15, 17]，不过在那里它们仅局限于对可加集函数的讨论，所得到的结论大都与集函数的可加性密切相关。本章前三节讨论非可加集函数的上述三种变差，所得到的结论完全不同于经典测度论中的已有结论，它们可以被看作是非可加集函数的一些特殊性质，是可加性的进一步发展。第四节指出这三种变差概念在集函数为可加的条件下是一致的。

§ 3.1　集函数的内含变差

首先，我们讨论集函数的第一种变差——内含变差，它是本章要讨论的三种变差中最简单的一种，在第四章中它将被应用于广义模糊测度的 Jordan 分解和 Lebesgue 分解之中。在本节的末尾，我们讨论 Pap 在文献[67]中提出的一个公开问题。

定义 3.1.1　设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的广义实值集函数(即 $m:\mathcal{D}\to[-\infty,+\infty]$)，且 $m(\phi)=0$。对每个 $A\subset X$ 定义

$$|m|_i(A)=\sup\{|m(B)|: B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\},$$
$$m_i^+(A)=\sup\{\ m(B): B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\},$$
$$m_i^-(A)=\sup\{-m(B): B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\}。$$

我们分别称$|m|_i$，m_i^+，m_i^-为 m (在 A 上关于 $\mathcal{D}$)的内含变差，上内含变差和下内含变差。如果$|m|_i(X)<\infty$，则称 m 具有有界内含变差，或称 m 是有界内含变差集函数。

注 3.1.1　上内含变差在经典测度论中被称为内测度，它在讨论测度的扩张时起重要作用。

命题 3.1.1　设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的广义实值集函数，且 $m(\phi)=0$，则 m 的内

含变差$|m|_i$具有以下性质($A\subset X$):

(1) $0\le|m|_i(A)\le+\infty$;

(2) $|m|_i(\phi)=0$;

(3) $|m(A)|\le|m|_i(A)\quad(A\in\mathcal{D})$;

(4) $|m|_i$是$\mathcal{P}(X)$上的单调集函数，即若$B\subset A\subset X$，则$|m|_i(B)\le|m|_i(A)$;

(5) $|m|_i(A)=0$当且仅当$m(B)=0$，$B\subset A$，$B\in\mathcal{D}$。

证明　由定义3.1.1直接可证。

命题 3.1.2　设m是$(X,\mathcal{D})$上的广义实值函数，$m(\phi)=0$，则m的上下内含变差m_i^+，m_i^-具有以下性质($A\subset X$):

(1) $0\le m_i^+(A)\le+\infty$，$0\le m_i^-(A)\le+\infty$;

(2) $m_i^+(\phi)=m_i^-(\phi)=0$;

(3) m_i^+和m_i^-都是$\mathcal{P}(X)$上的单调集函数;

(4) $m_i^+=(-m)_i^-$，$m_i^-=(-m)_i^+$;

(5) $|m|_i(A)=m_i^+(A)\vee m_i^-(A)$;

(6) $|m|_i(A)=0$，当且仅当$m_i^+(A)=m_i^-(A)=0$;

(7) $m_i^+(A)\ge m(A)\ge -m_i^-(A)\quad(A\in\mathcal{D})$。

证明　(1)~(6)由定义3.1.1直接可证。下面证明(7)。对任意$A\in\mathcal{D}$，有

$$-m(A)\le\sup\{-m(B):B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\}=m_i^-(A),$$

从而，$m(A)\ge -m_i^-(A)$。不等式$m_i^+(A)\ge m(A)$由定义显然成立。

命题 3.1.3　m的内含变差$|m|_i$是$\mathcal{P}(X)$上一切非负单调集函数ν，且满足条件$|m(A)|\le\nu(A)\ (A\in\mathcal{D})$中最小的。

证明　设$A\subset X$，任取$B\subset A$, $B\in\mathcal{D}$，则由ν的单调性有

$$|m(B)|\le\nu(B)\le\nu(A)。$$

因此

$$|m|_i(A)=\sup\{|m(B)|: B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\}\le\nu(A)。$$

命题 3.1.4 设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的实值集函数，$m(\phi)=0$，则$|m(A)|\le M$ $(A\in\mathcal{D})$当且仅当 m 是有界内含变差的，并且$|m|_i(A)\le M$ $(A\subset X)$。

证明 如果$|m(A)|\le M$ $(A\in\mathcal{D})$，则由定义 3.1.1 得$|m|_i(A)\le M$ $(A\in X)$。特别地，$|m|_i(X)\le M$，即 m 是有界内含变差的。反之，如果 m 是有界内含变差的，且$|m|_i(X)\le M$，则由命题 3.1.1 中的(3)和(4)知，对任意 $A\in\mathcal{D}$

$$|m(A)|\le|m|_i(A)\le|m|_i(X)\le M。$$

由于对任意非负单调集函数 m, $m(\phi)=0$，有$|m|_i(A)=m(A)$ $(A\in\mathcal{D})$，因此，我们可以直接得到下面的命题。

命题 3.1.5 设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，则对任意 $A\subset X$，$\big||m|_i\big|_i(A)=|m|_i(A)$。

命题 3.1.6 设 m 是$(X,\mathfrak{R})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。如果 m 是从下连续的，则$|m|_i$，m_i^+，m_i^- 也都在 $\mathfrak{R}$ 上从下连续。

证明 设$\{A_n\}$是 $\mathfrak{R}$ 中的非降集列。对任意 $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, $B\in\mathfrak{R}$，$(B\cap A_n)\uparrow B$ $(n\to\infty)$于是，由 m 的从下连续性以及定义 3.1.1，得

$$|m(B)|=\left|\lim_{n\to\infty}m(B\cap A_n)\right|=\lim_{n\to\infty}|m(B\cap A_n)|\le\lim_{n\to\infty}|m|_i(A_n)。$$

由于$B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, B\in\mathfrak{R}$是任意的，则再由定义 3.1.1 得$|m|_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\lim_{n\to\infty}|m|_i(A_n)$。另一方面，由于 $A_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$k=1,2\cdots$，故由$|m|_i$的单调性，相反的不等号亦

成立。从而，$\lim\limits_{n\to\infty}|m|_i(A_n)=|m|_i\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$。即 $|m|_i$ 是从下连续的。m_i^+ 和 m_i^- 的从下连续性可类似证明。

命题 3.1.7　设 m 是 $(X,\Re)$ 上的广义实值集函数，且 $m(\phi)=0$。

(1)如果 m 是零零可加的，则 $|m|_i$ 在 $\Re$ 上也是零零可加的；

(2)如果 m 是零可加的，则 $|m|_i$ 在 $\Re$ 上也是零可加的。

证明　(1)设 $A\in\Re$, $B\in\Re$, $A\cap B=\phi$, 且 $|m|_i(A)=|m|_i(B)=0$。则由命题 3.1.1 中的(5)，对任意 $E\in\Re$，$m(E\cap A)=m(E\cap B)=0$。从而，由 m 的零零可加性，对任意 $E\subset A\cup B$, $E\in\Re$，$m(E)=m((E\cap A)\cup(E\cap B))=0$。然后，再由命题 3.1.1 中的(5)，得 $|m|_i(A\cup B)=0$。

(2)设 $A\in\Re$, $B\in\Re$, $A\cap B=\phi$, 且 $|m|_i(B)=0$。则由 m 的零可加性，对任意的 $E\in\Re$, $E\subset A\cup B$ 有 $|m(E)|=|m((E\cap A)\cup(E\cap B))|=|m(E\cap A)|\le|m|_i(A)$，进一步，$|m|_i(A\cup B)\le|m|_i(A)$。因为 $|m|_i$ 是单调集函数，故相反的不等号也成立，从而 $|m|_i(A\cup B)=|m|_i(A)$。

命题 3.1.8　设 m 是 $(X,\Re)$ 上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，且 m 是修正单调的。

(1)如果 m 是零零可加的，则 m_i^+ 和 m_i^- 在 $\Re$ 上也是零零可加的。

(2)如果 m 是零可加的，则 m_i^+ 和 m_i^- 在 $\Re$ 上也是零可加的。

证明　(1)设 $A\in\Re$, $B\in\Re$, $A\cap B=\phi$, 且 $m_i^-(A)=m_i^-(B)=0$。对任意 $E\subset A\cup B$, $E\in\Re$，由 m_i^- 的单调性，$m_i^-(E\cap A)=m_i^-(E\cap B)=0$。从而 $m(E\cap A)\ge 0$, $m(E\cap B)\ge 0$。若 $m(E\cap A)=0$, $m(E\cap B)=0$，则由 m 的零零可

加性，$m(E)=m(E\cap A)\cup(E\cap B)=0$；若$m(E\cap A)>0$或$m(E\cap B)>0$，则由 m 的修正单调性 a)，得$m(E)=m((E\cap A)\cup(E\cap B))\geq m(E\cap A)\vee(E\cap B)>0$。综上所述$m(E)\geq 0$, $E\subset A\cup B$, $E\in\Re$。因此$m_i^-(A\cup B)=0$。m_i^+的零零可加性可类似证明。

(2)设$A\in\Re$, $B\in\Re$, $A\cap B=\phi$,且$m_i^+(B)=0$。对任意$E\subset A\cup B$, $E\in\Re$，由m_i^+的单调性，$m_i^+(E\cap B)=0$，从而$m(E\cap B)\leq 0$。如果$m(E\cap B)=0$，则由 m 的零可加性得$m(E)=m(E\cap(A\cup B))=m((E\cap A)\cup(E\cap B))=m(E\cap A)\leq m_i^+(A)$；如果$m(E\cap B)<0$，则由 m 的修正单调性 b)或 c)得

$$m(E)=m(E\cap(A\cup B))=m((E\cap A)\cup(E\cap B))\leq m(E\cap A)\leq m_i^+(A)。$$

综上所述，$m(E)\leq m_i^+(A)$, $E\subset A\cup B$, $E\in\Re$。因此

$$m_i^+(A\cup B)=\sup\{m(E): E\subset A\cup B,\ E\in\Re\}\leq m_i^+(A)。$$

另一方面，由m_i^+的单调性及$A\subset A\cup B$，相反的不等号显然成立。从而$m_i^+(A\cup B)=m_i^+(A)$，即m_i^+在$\Re$上是零可加的。m_i^-的零可加性可类似证明。

命题 3.1.9 设 m 是$(X,\Re)$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。如果 m 是下自连续的，则$|m|_i$也是下自连续的。

证明 设$A\in\Re$，$\{B_n\}\subset\Re$，$B_n\subset A$，$n=1, 2, \cdots$，且$\lim_{n\to\infty}|m|_i(B_n)=0$。由$|m|_i$的单调性知，对任意$C_n\subset B_n$，$n=1, 2, \cdots$，亦有$\lim_{n\to\infty}|m|_i(C_n)=0$。进一步，由命题 3.1.1 中的(3)，还有$\lim_{n\to\infty}|m(C_n)|=0$，即$\lim_{n\to\infty}m(C_n)=0$。这样对任意$E\subset A$，$E\in\Re$，由 m 的下自连续性有

$$|m|_i(A-B_n)\geq|m(E\cap(A-B_n))|=|m((E\cap A)-(E\cap B_n))|$$

$$\to|m(E\cap A)|=|m(E)|\qquad(n\to\infty),$$

即 $\lim_{n\to\infty}|m|_i(A-B_n)\geq|m(E)|$。因此，由 $E\subset A$ 的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}|m|_i(A-B_n)\geq|m|_i(A)。$$

因为相反的不等号显然成立，所以 $\lim_{n\to\infty}|m|_i(A-B_n)=|m|_i(A)$，即 $|m|_i$ 是下自连续的。

定理 3.1.1　设 m 是 $(X,\mathcal{D})$ 上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。如果存在 $(X,\mathcal{D})$ 上的非负单调集函数 v_1, v_2，使得 $m=v_1-v_2$，对则任意 $A\in\mathcal{D}$

$$v_1(A)\geq m_i^+(A),\quad v_2(A)\geq m_i^-(A)。$$

证明　由于 $m\leq v_1$，以及 v_1 的单调性，对每个 $A\in\mathcal{D}$ 有 $m(B)\leq v_1(B)\leq v_1(A)$ $B\subset A$，$B\in\mathcal{D}$，从而 $m_i^+(A)=\sup\{m(B):B\subset A, B\in\mathcal{D}\}\leqslant v_1(A)$。又由于 $-m\leq v_2$ 以及 v_2 的单调性，对每个 $A\in\mathcal{D}$ 有 $-m(B)\leq v_2(B)\leq v_2(A)$，$B\subset A$，$B\in\mathcal{D}$，从而 $m_i^-(A)=\sup\{-m(B):B\subset A, B\in\mathcal{D}\}\leqslant v_2(A)$。

定理 3.1.2　设 m 是 $(X,\mathcal{D})$ 上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，则 m 是穷竭的当且仅当它的内含变差 $|m|_i$ 是穷竭的。

证明　设 m 是穷竭的。如果 $|m|_i$ 不是穷竭的，则存在某个 $\varepsilon_0>0$ 和 X 的不交子集列 $\{A_n\}$，使

$$|m|_i(A_n)\geq\varepsilon_0\qquad(n=1，2，\cdots)。\tag{3.1.1}$$

另一方面，对每个正整数 n，存在 $B_n\subset A_n$，$B_n\in\mathcal{D}$，使 $|m(B_n)|+\frac{\varepsilon_0}{2}\geq|m|_i(A_n)$。由式（3.1.1）得

$$|m(B_n)|>\frac{\varepsilon_0}{2}\qquad(n=1，2，\cdots)。\tag{3.1.2}$$

因为$\{A_n\}$是不交集列，所以$\{B_n\}$是$\mathfrak{D}$中的不交集列。由 m 的穷竭性

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n)=0 。$$

但是，这与式(3.1.2)矛盾。这说明$|m|_i$应该是穷竭的。

反之，如果$|m|_i$是穷竭的，则对$\mathfrak{D}$中的任意不交集列$\{A_n\}$，由命题 3.1.1 中的(3)，有 $|m(A_n)|\le|m|_i(A_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$，即 m 也是穷竭的。

定理 3.1.3 设 m 是$(X,\mathfrak{D})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。如果 m 是穷竭的和从下连续的，则$|m|_i$在$\mathfrak{R}$上是序连续的。

证明 由定理 3.1.2 知$|m|_i$也是穷竭的；由命题 3.1.6 知$|m|_i$在$\mathfrak{R}$上从下连续。最后根据命题 2.4.4，$|m|_i$在$\mathfrak{R}$上是序连续的。

用符号 IV 表示$(X,\mathfrak{D})$上的所有有界内含变差集函数全体，在 IV 上定义以下运算

加法运算：$m,\ v\mapsto m+v \qquad (m,\ v\in IV)$，

数乘运算：$a,\ m\mapsto am \qquad (m\in IV,\ a\in R)$。

容易验证，IV 按上述运算构成实数域 R 上的线性空间。又在 IV 上定义一个泛函数$\|\cdot\|$如下：

$$\|m\|=|m|_i(X), \qquad m\in IV。$$

根据命题 3.1.1 中的(1)、(5)和定义 3.1.1 知，$\|\cdot\|$满足下列条件：

(1)$\|m\|\ge 0$，$\|m\|=0$，当且仅当 $m=0$ （$m\in IV$）；

(2)$\|am\|=|a|\|m\| \qquad (a\in R,\ m\in IV)$；

(3)$\|m+v\|\le\|m\|+\|v\| \qquad (m,\ v\in IV)$，

即$(IV, \|\cdot\|)$为实赋范线性空间。进一步，我们有

定理 3.1.4 $(IV, \|\cdot\|)$为巴拿赫空间。

证明 设$\{m_n\}$是 IV 中的一个基本列(或称柯西列)，即对任给$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 n，$n_0>N$ 时有$\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon$。因为对任意 $A\in\mathscr{D}$，由$|m|_i$的单调性有

$$|m_n(A)-m_{n_0}(A)|=|(m_n-m_{n_0})(A)|\le|m_n-m_{n_0}|_i(A)\le|m_n-m_{n_0}|_i(X)=\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon,$$

所以$\{m_n(A)\}$是由实数构成的基本列，因而是收敛的。因此，我们可以定义$(X,\mathscr{D})$上的实值集函数 m 如下：

$$m(A)=\lim_{n\to\infty}m_n(A)\quad(A\in\mathscr{D})$$

下面首先证明 $m\in IV$。事实上，取$\varepsilon=1$。则存在正整数 n_0，使当 $n>n_0$ 时$\|m_n-m_{n_0}\|\le1$。因此，对任意$B\subset X, B\in\mathscr{D}$，当 $n>n_0$ 时，有

$$|m_n(B)|-\|m_{n_0}\|\le|m_n(B)|-|m_{n_0}(B)|\le|m_n(B)-m_{n_0}(B)|=|(m_n-m_{n_0})(B)|\le\|m_n-m_{n_0}\|\le1$$

令$n\to\infty$，得$|m(B)|\le1+\|m_{n_0}\|$。再由 $B\in\mathscr{D}$的任意性，得 $|m|_i(X)=\|m\|\le1+\|m_{n_0}\|$，即 $m\in IV$。

然后证明$\|m_n-m\|\to0\,(n\to0)$。实际上，对任给$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 n，$n_0>N$ 时有$\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon$。因此，对任意 $B\subset X$，$B\in\mathscr{D}$，以及 n，$n_0>N$，有$|(m_n-m_{n_0})(B)|\le|m_n-m_{n_0}|_i(X)=\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon$。令$n_0\to\infty$,得$|(m_n-m)(B)|\le\varepsilon$.由 $B\in\mathscr{D}$的任意性，得$\|(m_n-m)\|=|m_n-m|_i(X)\le\varepsilon$，即$\|m_n-m\|\to0\quad(n\to0)$。

在 IV 上意义乘法运算如下：

$$m，v\mapsto m\cdot v\qquad(m，v\in IV)。$$

容易验证，IV 按这样定义的乘法以及前面定义的加法和数乘运算构成交换

代数。进一步，有

定理 3.1.5 $(IV, \|\cdot\|)$为一交换 Banach 代数(赋范环)。

证明 只需证明，对任意 m，$v \in IV$，有 $\|m\cdot v\| \le \|m\|\cdot\|v\|$。为此，任取 $B \subset X$，$B \in \mathcal{D}$，有 $|m(B)v(B)| = |m(B)||v(B)| \le |m|_i(X)\cdot|v|_i(X)$，由 $B \in \mathcal{D}$ 的任意性，得

$$\|m\cdot v\| = |m\cdot v|_i(X) \le |m|_i(X)\cdot|v|_i(X) = \|m\|\cdot\|v\|。$$

作为本节的结尾我们简略地讨论一种与内含变差相对应的集函数——外集函数(外测度)。

定义 3.1.2 设 m 是$(X, \mathcal{D})$上的广义实值集函数。对每个 $A \subset X$ 定义

$$m^*(A) = \inf\{|m(B)|:\ A \subset B \in \mathcal{D}\},$$

并称 m^* 为 m (在 A 上关于 $\mathcal{D}$)的外集函数。

显然，m^* 是 $P(X)$上的单调集函数。

下面的定理回答了 Pap 在文献[67]中提出的一个公开问题。

定理 3.1.5 设 m 是$(X, \mathfrak{R})$上的非负单调集函数。如果 m 是零可加的，则 m^* 也是零可加的。

证明 设 $A \subset X$，$B \subset X$，$A \cap B = \phi$，且 $m^*(B) = 0$。则存在集列 $\{E_n\} \subset \mathfrak{R}$ 和 $\{F_n\} \subset \mathfrak{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m^*(A), \tag{3.1.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} m(F_n) = m^*(B) = 0。 \tag{3.1.4}$$

不妨假设 $E_n \downarrow E$，$F_n \downarrow F$，则 $A \subset E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，$B \subset F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$。因此，由 m 的单调性有 $m(E_n) \ge m(E)$，从而，由式(3.1.3)得 $m^*(A) \ge m(E)$。进一步，得

$m^*(A)=m(E)$。另一方面，由 m 的非负单调性及式(3.1.4)，得 $m(F)=0$。从而，由 m 的零可加性，$m(E\cup F)=m(E)=m^*(A)$。又由于 $A\cup B\subset E\cup F$，故有 $m^*(A\cup B)\le m(E\cup F)=m^*(A)$。因为由 m^* 的单调性相反的不等号显然成立，故 $m^*(A\cup B)=m^*(A)$。

注意：当 $\mathfrak{R}=\mathscr{L}$ 是一个有补完备格时上述定理仍然成立。

§3.2　集函数的不交变差

其次，我们讨论集函数的第二种变差——不交变差。

定义 3.2.1　设 m 是$(X,\mathscr{D})$上的广义实值集函数（即$m:\mathscr{D}\to[-\infty,+\infty]$），且 $m(\phi)=0$。对每个 $A\subset X$，定义

$$|m|_d(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|,$$

$$m_d^+(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}\max\{m(D_i),\ 0\},$$

$$m_d^-(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}\max\{-m(D_i),\ 0\},$$

上面三式中的上确界都是对所有 $\mathscr{D}$ 中的有限不交集列$\{D_i\}$，$D_i\subset A$ 所取的。我们分别称 $|m|_d$，m_d^+，m_d^- 为 m(在 A 上关于 $\mathscr{D}$)的不交变差，上不交变差和下不交变差。如果 $|m|_d(X)<\infty$，则称 m 具有有界不交变差，或称 m 是有界不交变差集函数。

显然，如果 m 具有有界不交变差，则 m 是有限的。此外，$|m|_d(X)<\infty$，当且仅当 $m_d^+(X)<\infty$，和 $m_d^-(X)<\infty$。

命题 3.2.1　设 m 是$(X,\mathfrak{R})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。则 m 在 A 上的三类不交变差 $|m|_d$，m_d^+，m_d^- 中的上确界均可对所有 $\mathfrak{R}$ 中的有限不交集列 $\{D_i\}$，$A=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$ 所取。

证明　这里仅对不交变差$|m|_d$进行证明，m_d^+和m_d^-的证明与其类似。

设$\{D_i\}_{1\le i\le n}\subset\Re$是不交集列，且$D_i\subset A$，$i$=1，2，…$n$，令$D_{n+1}=A-\bigcup_{i=1}^{n}D_i$

显然,D_1，D_2,…，D_n，D_{n+1}是$\Re$中的有限不交集列，并且$A=\bigcup_{i=1}^{n+1}D_i$，进一步，有

$$\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|\le\sum_{i=1}^{n+1}|m(D_i)|。$$

因此

$$|m|_d(A)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|:\{D_i\}_{1\le i\le n}\subset\Re,\ D_i\cap D_j=\phi,\ i\ne j,\ D_i\subset A,\ n\ge1\right\}$$

$$\le\sup\left\{\sum_{i=1}^{n+1}|m(D_i)|:\{D_i\}_{1\le i\le n+1}\subset\Re,\ D_i\cap D_j=\phi\ ,\ i\ne j,\ A=\bigcup_{i=1}^{n+1}D_i,\ n\ge1\right\}。$$

因为相反的不等号显然成立，故命题成立。

命题 3.2.2　设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的广义实值集函数，$m(\phi)$=0，则 m 的不交变差$|m|_d$具有以下性质($A\subset X$):

(1)$0\le|m|_d(A)\le+\infty$;

(2)$|m|_d(\phi)=0$;

(3)$|m(A)|\le|m|_d(A)\quad(A\in\mathcal{D})$;

(4)$|m|_d$是 $P(X)$上的单调集函数，即若 $B\subset A$，则$|m|_d(B)\leqslant|m|_d(A)$;

(5)$|m|_i(A)=\sup\{|m(B)|:B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\}\le|m|_d(A)$;

(6)$|m|_d(A)=0$当且仅当 $m(B)$=0，$B\subset A$，$B\in\mathcal{D}$。

证明 (1)~(4)由定义 3.2.1 直接可证，(5)是(3)和(4)的推论。(6)是显然的。

命题 3.2.3　设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的广义实值集函数，$m(\phi)$=0。则 m 的上下不交变差m_d^+和m_d^-具有以下性质($A\subset X$):

(1) $0\le m_d^+(A)+\infty,\ 0\le m_d^-(A)\le+\infty$;

(2) $m_d^+(\phi)=m_d^-(\phi)=0$;

(3) m_d^+ 和 m_d^- 都是 $\mathcal{P}(X)$ 上的单调集函数;

(4) $m_d^+=(-m)_d^-$， $m_d^-=(-m)_d^+$;

(5) $|m|_d(A)\le m_d^+(A)+m_d^-(A),\quad |m|_d(A)\ge m_d^+(A)\vee m_d^-(A)$;

(6) $|m|_d(A)=0\Leftrightarrow m_d^+(A)=m_d^-(A)=0$;

(7) $m_d^+(A)\ge m(A)\ge -m_d^-(A)\quad (A\in\mathcal{D})$.

证明 (1)~(6)由定义 3.2.1 直接可以证明，下面证明(7)。为此，设 $A\in\mathcal{D}$。考查仅由一个集合 A 构成的有限集列，有

$$-m(A)\le\max\{-m(A),0\},\quad m(A)\le\max\{m(A),0\}。$$

由 m_d^+ 和 m_d^- 的定义立即得 $-m(A)\le m_d^-(A)$，$m(A)\le m_d^+(A)$，或

$$m_d^+(A)\ge m(A)\ge -m_d^-(A)。$$

命题 3.2.4　设 m 是$(X,\Re)$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，则

(1) $|m|_d$ 是 $\mathcal{P}(X)$上的超可加集函数，即对 X 的任意不交子集列$\{A_n\}$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|m|_d(A_n)\le|m|_d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right);$$

(2) $|m|_d$ 是 $\mathcal{P}(X)$上一切非负超可加集函数 v，且满足条件$|m(A)|\le v(A)$ $(A\in\Re)$中最小的。

证明 (1)设$\{A_n\}$是 X 中的任意不交子集列。从$\Re$中任取两个有限不交集列$\{E_i\}_{1\le i\le s}$，$\{F_j\}_{1\le j\le t}$，使 $E_i\subset A_1$，$i=1$，2，…，s；$F_j\subset A_2$，$j=1$，2，…，t。则 $\{F_1, E_2, \cdots, E_s, F_1, F_2, \cdots, F_t\}$ 也是$\Re$中的有限不交集列，且它们都被包含在 $A_1\cup A_2$之中,于是由$|m|_d(A_1\cup A_2)$的定义得

$$\sum_{i=1}^{s}|m(E_i)|+\sum_{j=1}^{t}|m(E_j)|\le|m|_d(A_1\cup A_2)。$$

再由$|m|_d(A_1)$和$|m|_d(A_2)$的定义，得 $|m|_d(A_1)+|m|_d(A_2)\le|m|_d(A_1\cup A_2)$。进一步，由数学归纳法，对每个正整数 n，有

$$\sum_{i=1}^{n}|m|_d(A_i)\le|m|_d\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)。$$

最后使用$|m|_d$的单调性，得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|m|_d(A_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|m|_d(A_i)\le|m|_d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)。$$

(2)设 v 是 $\mathcal{P}(X)$上的一个非负超可加集函数，且满足条件$|m(A)|\le v(A)$ ($A\in\mathfrak{R}$)。若 $A\in\mathfrak{R}$且$\{D_i\}_{1\le i\le n}$是$\mathfrak{R}$中的任意有限不交集列，且 $D_i\subset A$，i=1，2，…，n。令 $B=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$ 则 $B\in\mathfrak{R}$，$B\subset A$。注意集函数的非负超可加性蕴涵其单调性得

$$\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|\le\sum_{i=1}^{n}v(D_i)\le v\left(\bigcup_{i=1}^{n}D_i\right)=v(B)\le v(A)。$$

最后由 $D_i\subset A$ 的任意性，得 $v(A)\ge|m|_d(A)$。

命题 3.2.5 设 m 是$(X,\mathfrak{R})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，则

(1)m_d^+和m_d^-都是 $\mathcal{P}(X)$上的超可加集函数。

(2)如果存在$(X,\mathfrak{R})$上的非负超可加集函数 v_1，v_2使 $m=v_1-v_2$则

$$v_1(A)\ge m_d^+(A),\qquad v_2(A)\ge m_d^-(A),\quad (A\in\mathfrak{R})。$$

证明 (1)与命题 3.2.4 中的(1)类似。

(2)设 $A\in\mathfrak{R}$且$\{D_i\}_{1\le i\le n}$是$\mathfrak{R}$中的任意有限不交集列，$D_i\subset A$，i=1，2，…，n。记 $B=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$。则 $B\in\mathfrak{R}$，且 $B\subset A$。由 v_1，v_2的非负超可加性和单调性，以及不等式 $m\le v_1$，$-m\le v_2$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\max\{m(D_i),0\}=\sum{}^{+}m(D_i)\le\sum{}^{+}v_1(D_i)\le\sum_{i=1}^{n}v_1(D_i)\le v_1(B)\le v_1(A),$$
$$\sum_{i=1}^{n}\max\{-m(D_i),0\}=\sum{}^{-}-m(D_i)\le\sum{}^{-}v_2(D_i)\le\sum_{i=1}^{n}v_2(D_i)\le v_2(B)\le v_2(A),$$

式中$\sum^{+}\left(\sum^{-}\right)$表示对所有 $m(D_i)\ge 0$ ($m(D_i)<0$) 的 i 求和。最后，由 $m_d^+(A)$和 $m_d^-(A)$的定义得 $m_d^+(A)\le v_1(A)$， $m_d^-(A)\le v_2(A)$。

命题 3.2.6　设 m 是$(X,\Re)$上的非负有限(可数)次可加集函数，且 $m(\phi)=0$，则 m 的不交变差$|m|_d$是$\Re$上的有限(可数)可加集函数。

证明　设$\{E_i\}_{i\subset I}$是$\Re$中的一个不交集列，当 m 是有限次可加集函数时，I 是有限的；当 m 是可数次可加集函数时，I 是可数的。在$\Re$中任取一有限不交集列$\{D_j\}_{1\le j\le n}$，且 $D_j\subset\bigcup_{i\in I}E_i$ (j=1, 2, …, n)。则对每个固定的 $i\in I$, $\{E_i\cap D_j\}_{1\le j\le n}$是 E_i 中的有限不交子集列，且有 $\bigcup_{i\in I}(E_i\cap D_j)=D_j$，$j$=1，2，…，$n$。于是由 m 的次可加性

$$\sum_{j=1}^{n}|m(D_j)|=\sum_{j=1}^{n}m(D_j)=\sum_{j=1}^{n}m\left(\bigcup_{i\in I}(E_i\cap D_j)\right)\le\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in I}m(E_i\cap D_j)$$
$$=\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}m(E_i\cap D_j)\le\sum_{i\in I}|m|_d(E_i)。$$

由不交的 $D_j\subset\bigcup_{i\in I}E_i$ (j=1，2，…，n)的任意性，得

$$|m|_d\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)\le\sum_{i\in I}|m|_d(E_i),$$

即$|m|_d$是次可加的。但是，命题 3.2.4 已经告诉我们$|m|_d$是超可加的，即相反的不等号也成立。因此，$|m|_d$是可加的。

定理 3.2.1　如果 m 是$(X,\Re)$上的有界不交变差集函数，则$|m|_d$在$\Re$上是

穷竭的，并且 m 本身也是穷竭的。

证明　假定 m 是有界不交变差的，但是定理不真。则存在某个 $\varepsilon_0>0$ 和 $\Re$中的不交集列$\{A_n\}$，使

$$|m|_d(A_n)\geq\varepsilon_0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ )。\tag{3.2.1}$$

另一方面，对每个正整数 n，在$\Re$中存在与之对应的有限不交集列 $\{D_i^n\}_{1\leq i\leq k_n}$，$D_i^n\subset A_n$，($i=1,\ 2,\ \cdots,\ k_n$)，使

$$\sum_{i=1}^{k_n}\left|m\left(D_i^n\right)\right|+\frac{\varepsilon_0}{2}>|m|_d(A_n)。$$

注意式(3.2.1)，我们得到

$$\sum_{i=1}^{k_n}\left|m\left(D_i^n\right)\right|>\frac{\varepsilon_0}{2} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ )。$$

因为$\left\{D_1^1,\cdots,D_{k_1}^1,\ D_1^2,\cdots,D_{k_2}^2,\cdots\right\}$组成$\Re$中的不交集列，则对任意正整数 N,

$$|m|_d(X)\geq\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k_n}\left|m\left(D_i^n\right)\right|>N\cdot\frac{\varepsilon_0}{2}\to\infty \quad (N\to\infty)。$$

但是，这与 m 具有有界不交变差的条件矛盾。因此，$|m|_d$是穷竭的。又由命题 3.2.2 中的(3)和$|m|_d$的穷竭性立即可得$|m(A_n)|\leq|m|_d(A_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$，式中$\{A_n\}$是$\Re$中的不交集列，故 m 也是穷竭的。

下面的例子说明定理 3.2.1 的结论只是必要的，但不是充分的。即存在集函数 m 是穷竭的，但它不是有界不交变差的。

例 3.2.1　设 $X=\{a_1,\ a_2\cdots,\ a_n,\ \cdots\}$，$\Sigma$ 是 X 的幂集。定义集函数 $m:\Sigma\to[0,\ 1]$如下：

$$m(A)=\begin{cases}\dfrac{1}{\max\{i:a_i\in A\}} & A\text{是非空有限集}\\ 0 & \text{否则。}\end{cases}$$

我们来验证 m 是穷竭的。为此，从Σ中任取一不交集列$\{A_n\}$。如果$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是

有限集，则由$\{A_n\}$的不交性存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，$A_n=\phi$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$；

如果 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是一个无限集，对则任意$\varepsilon>0$，存在n'，使$a_{n'}\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $\dfrac{1}{n'}<\varepsilon$，

进一步，存在 $n_0>n'$，当 $n>n_0$ 时 $a_i\notin A_n$，$i=1$，2，…，n'。因此，当 $n>n_0$ 时

$$m(A_n)<\frac{1}{n'}<\varepsilon,$$

即 $\lim_{n\to\infty} m(A_n)=0$，故 m 是穷竭的。但是，m 不具有有界不交变差。事实上，

对Σ中的不交集列$\{\{a_i\}\}$和任意正整数 N，

$$|m|_d(X)\ge\sum_{i=1}^{N}|\,m(\{a_i\})|=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\to\infty\quad(N\to\infty)。$$

这说明 m 不是有界不交变差的。

下面的定理给出了不交变差在其特殊子集族上即可被完全确定的两个充分条件。

定理 3.2.2　设 m 是$(X,\mathfrak{R})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。若将 m 在$\mathfrak{R}$的子集族$\mathfrak{D}$上的限制记作$m_{\mathfrak{D}}$，即 $m_{\mathfrak{D}}(A)=m(A)$，$A\in\mathfrak{D}$。则当下面两个条件之一被满足时 $|m_{\mathfrak{D}}|_d(A)=|m|_d(A)\quad(A\subset X)$。

(ⅰ) 对每个 $A\in\mathfrak{R}$，$|m(A)|\le\sup\{|m(B)|：B\subset A，B\in\mathfrak{D}\}$；

(ⅱ) m 是有限(可数)可加的，并且$\mathfrak{R}$中的每个集合都是$\mathfrak{D}$中的有限(可数)个不交集的并集。

证明　对每个 $A\subset X$，显然有

$$|\,m_{\mathfrak{D}}|_d(A)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|:D_i\subset A,\ D_i\in\mathfrak{D},\ i=1,\ 2,\cdots,n,\ D_i\cap D_j=\phi\ ,i\ne j,\ n\ge1\right\}$$

$$\le\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|:D_i\subset A,D_i\in\mathfrak{R},\ i=1,\ 2,\cdots,n,D_i\cap D_j=\phi,\ i\ne j,\ n\ge1\right\}=|\,m|_d(A)$$

剩下只需证明$|m_{\mathfrak{D}}|_d\ge|m|_d$。

当条件(ⅰ)被满足时，固定 $A\subset X$ 以及$\mathfrak{R}$中的有限不交集列$\{D_i\}_{1\le i\le n}$，$D_i\subset A$，

i=1，2，…，n。对任意$\varepsilon>0$，存在$D_i'\subset D_i$，$D_i'\in\mathfrak{D}$使

$$|m(D_i)|\le|m(D_i')|+\frac{\varepsilon}{2^i}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|\le\sum_{i=1}^{n}|m(D_i')|+\varepsilon\le|m_{\mathfrak{D}}|_d(A)+\varepsilon,$$

从而$|m|_d(A)\le|m_{\mathfrak{D}}|_d(A)+\varepsilon$。由$\varepsilon>0$的任意性，$|m|_d\le|m_{\mathfrak{D}}|_d$。

当条件(ii)被满足时，若 $E\in\mathfrak{R}$，则存在$\mathfrak{D}$中的不交集列$\{E_i\}_{i\in I}$使$\bigcup_{i\in I}E_i=E$，其中如果 m 是有限可加的，则 I 是有限集；如果 m 是可数可加的，则 I 可以是可数集。由 m 的可加性，得

$$|m(E)|=\left|\sum_{i\in I}m(E_i)\right|\le\sum_{i\in I}|m(E_i)|=\sum_{i\in I}|m_{\mathfrak{D}}(E_i)|\le|m_{\mathfrak{D}}|_d(E)。$$

由命题 3.2.4 中的(2)，也得到$|m|_d\le|m_{\mathfrak{D}}|_d$。

集函数 m 的不交变差$|m|_d$的不交变差又是一个怎样的集函数呢？为了回答这个问题，我们先证明下面的引理。

引理 3.2.1 如果 m 是$(X,\ \mathfrak{R})$上的一个非负超可加集函数，$m(\phi)=0$，则对每个$A\subset X$，

$$|m|_d(A)=\sup\{m(B):\ B\subset A,\ B\in\mathfrak{R}\}=|m|_i(A)。$$

如果$A\in\mathfrak{R}$，则$|m|_d(A)=|m|_i(A)=m(A)$。

证明 设$A\subset X$，且$\{D_i\}_{1\le i\le n}$是$\mathfrak{R}$中的一个有限不交集列，$D_i\subset A$，i=1，2，…，n，记$B=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$，则$B\subset A$，$B\in\mathfrak{R}$。由 m 的非负性和超可加性有

$$\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|=\sum_{i=1}^{n}m(D_i)\le m(B)\le\sup\{m(B):B\subset A,\ B\in\mathfrak{R}\}.$$

因此$|m|_d(A)\le \sup\{m(B)$：$B\subset A$，$B\in\Re\}=|m|_i(A)$。另一方面，由命题 3.2.2 中的(5)，立即可得

$$|m|_d(A)=\sup\{m(B):\ B\subset A,\ B\in\Re\}=|m|_i(A)\quad (A\subset X)。\qquad (3.2.2)$$

注意到非负集函数的超可加性蕴涵其单调性，如果 $A\in\Re$，则由式(3.2.2)得$|m|_d(A)=|m|_i(A)=m(A)$。

定理 3.2.3 设 m 是$(X,\mathfrak{D})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，则对任意 $A\subset X$，$||m|_d|_d(A)=|m|_d(A)$。

证明 由命题 3.2.4 中的(1)知，$|m|_d$是 $P(X)$上的非负超可加集函数，且由命题 3.2.2 中的(2)知$|m|_d(\phi)=0$。最后由引理 3.2.1 得$||m|_d|_d(A)=|m|_d(A)$，$A\subset X$。

命题 3.2.7 设 m 是$(X,\Re)$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。

(1) 如果 m 是零零可加的，则 m 的不交变差$|m|_d$在$\Re$上也是零零可加的。

(2) 如果 m 是零可加的，则 m 的不交变差$|m|_d$在$\Re$上也是零可加的。

证明 (1)设 $A\in\Re$，$B\in\Re$，$A\cap B=\phi$，且$|m|_d(A)=|m|_d(B)=0$，由命题 3.2.2 中的(6)得 $m(E)=0$，$E\subset A$，$E\in\Re$， $m(F)=0$，$F\subset B$，$F\in\Re$。于是，对任意 $C\in\Re$，$C\subset A\cup B$，则由 m 的零零可加性得

$$m(C)=m(C\cap(A\cup B))=m((C\cap A)\cup(C\cap B))=0。$$

再由命题 3.2.2 中的(6)，得$|m|_d(A\cup B)=0$。

(2)设 $A\in\Re$，$B\in\Re$，$A\cap B=\phi$，且$|m|_d(B)=0$，由命题 3.2.2 中的(6)得 $m(E)=0$，$E\subset B$，$E\in\Re$。于是，由 m 的零可加性，对$\Re$中的任意有限不交集列$\{D_i\}_{1\le i\le n}$，$D_i\subset A\cup B$，$i=1，2，\cdots，n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m(D_i)\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|m[(D_i\cap A)\cup(D_i\cap B)]\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|m(D_i\cap A)\right|\le\left|m\right|_d(A)。$$

因此，$|m|_d(A\cup B)\le|m|_d(A)$；由$|m|_d$的单调性又有$|m|_d(A\cup B)\ge|m|_d(A)$，故

$$|m|_d(A\cup B)=|m|_d(A)。$$

命题 3.2.8 设 m 是$(X,\ \Re)$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，且 m 是修正单调的。

(1)如果 m 是零零可加的，则m_d^+和m_d^-在$\Re$上也是零零可加的。

(2)如果 m 是零可加的，则m_d^+和m_d^-在$\Re$上也是零可加的。

证明 (1)设$A\in\Re$，$B\in\Re$，$A\cap B=\phi$，且$m_d^+(A)=m_d^+(B)=0$。对任意$D_i\subset A\cup B$，$D_i\in\Re$，由m_d^+的单调性$m_d^+(D_i\cap A)=0$，$m_d^+(D_i\cap B)=0$。从而$m(D_i\cap A)\le0$，$m(D_i\cap B)\le0$。若$m(D_i\cap A)=m(D_i\cap B)=0$，则由 m 的零零可加性得

$$m(D_i)=m((D_i\cap A)\cup(D_i\cap B))=0;$$

若$m(D_i\cap A)<0$或$m(D_i\cap B)<0$，则由 m 的修正单调性 b）得

$$m(D_i)=m((D_i\cap A)\cup(D_i\cap B))\le m(D_i\cap A)\wedge m(D_i\cap B)<0。$$

综上所述 $m(D_i)\le0$，$D_i\subset A\cup B$，$D_i\in\Re$。于是，对$\Re$中的任意有限不交集列$\{D_i\}_{1\le i\le n}$，$D_i\subset A\cup B$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，有$\sum_{i=1}^{n}\max\{m(D_i),\ 0\}=0$。因此，$m_d^+(A\cup B)=0$。即$m_d^+$在$\Re$上是零零可加的。$m_d^-$的零零可加性可类似证明。

(2)设 $A\in\Re$，$B\in\Re$，$A\cap B=\phi$，且$m_d^-(B)=0$。对任意 $D_i\subset A\cup B$，$D_i\in\Re$，由m_d^-的单调性$m_d^-(D_i\cap B)=0$，从而 $m(D_i\cap B)\ge0$。如果 $m(D_i\cap B)=0$，则由 m 的零可加性 $m(D_i)=m((D_i\cap A)\cup(D_i\cap B))=m(D_i\cap A)$；如果 $m(D_i\cap B)>0$，则由 m 的修正单调性 a)或 c)，得 $m(D_i)=m((D_i\cap A)\cup(D_i\cap B))\ge m(D_i\cap A)$。综上所述，$m(D_i)\ge m(D_i\cap A)$，$D_i\subset A\cup B$，$D_i\in\Re$。于是对$\Re$中的任意有限不交集列，

$\{D_i\}_{1\le i\le n}$，$D_i\subset A\cup B$，i=1，2，…，n，有

$$\sum_{i=1}^{n}\max\{-m(D_i),\ 0\}\le\sum_{i=1}^{n}\max\{-m(D_i\cap A),\ 0\}\le m_d^-(A)。$$

进一步，$m_d^-(A\cup B)\le m_d^-(A)$。另一方面，由$m_d^-$的单调性，相反的不等号显然成立，故$m_d^-(A\cup B)=m_d^-(A)$，即$m_d^-$在$\mathfrak{R}$上是零可加的。$m_d^+$的零可加性可类似证明。

命题 3.2.9　如果$(X, \mathfrak{R})$上的广义实值集函数 m ($m(\phi)=0$)是从下连续的，则 m 的不交变差$|m|_d$也是$\mathfrak{R}$上的从下连续集函数。

证明　设$\{A_n\}$是$\mathfrak{R}$中的非降集列，$\{D_i\}_{1\le i\le k}$是$\mathfrak{R}$中任意有限不交集列，$D_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_n$，$i$=1，2，…，$k$。对任意固定的$i$ $(1\le i\le k)$，$(D_i\cap A_n)\uparrow D_i\quad(n\to\infty)$，于是，由 m 的从下连续性，得

$$\sum_{i=1}^{k}|m(D_i)|=\sum_{i=1}^{k}\left|\lim_{n\to\infty}(D_i\cap A_n)\right|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|\ m(D_i\cap A_n)|\le\lim_{n\to\infty}|m|_d(A_n)。$$

由不交集列$D_i\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$的任意性

$$|m|_d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\lim_{n\to\infty}|m|_d(A_n)。$$

最后由$|m|_d$的单调性，相反的不等号显然成立，故

$$|m|_d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}|m|_d(A_n)。$$

定理 3.2.4　设 m 是$(X, \mathfrak{R})$上的有界不交变差和从下连续集函数，则 m 和$|m|_d$都是序连续的。

证明　由定理 3.2.1 知，$|m|_d$和 m 都是穷竭的，又由命题 3.2.9 知，$|m|_d$

和 m 还都是从下连续的，最后根据命题 2.4.4，$|m|_d$ 和 m 都是序连续的。

命题 3.2.10 设 m 是$(X,\Re)$上的有界不交变差集函数，$A\in\Re$，$B\in\Re$，$B\subset A$ 则 $|m(A-B)|\le|m|_d(A)-|m|_d(B)$。

证明 对任意 $\varepsilon>0$，存在$\Re$中的有限不交集列 $\{D_i\}_{1\le i\le n}$，$D_i\subset B$，$i=1$，2，…，n，使

$$|m|_d(B)-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|。$$

记 $D_{n+1}=A-B$，则 $\{D_i\}_{1\le i\le n+1}$ 是 A 中的不交集列，且

$$\sum_{i=1}^{n+1}|m(D_i)|-(|m|_d(B)-\varepsilon)>\sum_{i=1}^{n+1}|m(D_i)|-\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|=|m(A-B)|。$$

进一步，$|m|_d(A)-|m|_d(B)+\varepsilon>|m(A-B)|$。由 $\varepsilon>0$ 的任意性，得

$$|m|_d(A)-|m|_d(B)\ge|m(A-B)|。$$

用符号 DV 表示$(X,\mathfrak{D})$上的所有有界不交变差集函数全体。并在 DV 上定义运算如下：

加法运算：$m,\ v\mapsto m+v\quad(m,\ v\in DV)$，

数乘运算：$a,\ m\mapsto am\quad(m\in DV,\ a\in R)$。

容易验证，DV 按上述运算构成实数域 R 上的线性空间。又在 DV 上定义一个泛函数$\|\cdot\|$如下：

$$\|m\|=|m|_d(X),\quad m\in DV。$$

由命题 3.2.2 中的(1)、(6)以及定义 3.2.1 知，$\|\cdot\|$满足下列条件：

(1) $\|m\|\ge0$，$\|m\|=0$ 当且仅当 $m=0\quad(m\in DV)$；

(2) $\|am\|=|a|\|m\|\quad(a\in R,\ m\in DV)$；

(3) $\|m+v\| \le \|m\| + \|v\| \quad (m,\ v \in DV)$,

即$(DV,\ \|\cdot\|)$为实赋范线性空间。进一步，我们可以得到

定理 3.2.5　$(DV,\ \|\cdot\|)$为巴拿赫空间。

证明　设$\{m_n\}$是 DV 中的一个基本列，即对任意$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 n，$n_0>N$ 时有 $\|m_n - m_{n_0}\| < \varepsilon$。因为对任意 $A \in \mathcal{D}$，由$|m|_d$的单调性有

$$\left|m_n(A) - m_{n_0}(A)\right| = \left|\left(m_n - m_{n_0}\right)(A)\right| \le \left|\left(m_n - m_{n_0}\right)\right|_d(A)$$

$$\le \left|\left(m_n - m_{n_0}\right)\right|_d(X) = \left\|\left(m_n - m_{n_0}\right)\right\| < \varepsilon,$$

所以，$\{m_n(A)\}$是一个由实数构成的基本列，因而是收敛的。因此，我们可以定义$(X, \mathcal{D})$上的实值集函数 m 如下：

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m_n(A) \qquad (A \in \mathcal{D})。$$

下面先证明 $m \in DV$。事实上，取$\varepsilon=1$，则存在正整数 n_0，使当 $n>n_0$时$\|m_n - m_{n_0}\| \le 1$。因此，对任意$\mathcal{D}$中的有限不交集列$\{D_i\}_{1\le i\le k}$，当 $n, n_0>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{k}\left|m_n(D_i)\right| - \left\|m_{n_0}\right\| \le \sum_{i=1}^{k}\left|m_n(D_i)\right| - \sum_{i=1}^{k}\left|m_{n_0}(D_i)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{k}\left|\left(m_n - m_{n_0}\right)(D_i)\right| \le \left\|m_n - m_{n_0}\right\| \le 1。$$

令 $n \to \infty$，得 $\sum_{i=1}^{k}\left|m(D_i)\right| \le 1 + \left\|m_{n_0}\right\|$。由$\{D_i\} \subset \mathcal{D}$的任意性，得

$$|m|_d(X) = \|m\| \le 1 + \left\|m_{n_0}\right\|,$$

即 $m \in DV$。

后证明$\|m_n - m\| \to 0\ (n \to \infty)$。实际上，对任给$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 n，$n_0>N$ 时，有$\|m_n - m_{n_0}\| < \varepsilon$。因此，对任意$\mathcal{D}$中的有限不交集列

$\{D_i\}_{1\le i\le k}$，当 n，$n_0>N$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{k}\left|\left(m_n-m_{n_0}\right)(D_i)\right|\le\left|m_n-m_{n_0}\right|_d(X)=\left\|m_n-m_{n_0}\right\|<\varepsilon。$$

令 $n_0\to\infty$，得 $\sum_{i=1}^{k}\left|\left(m_n-m\right)(D_i)\right|\le\varepsilon$。由 $\{D_i\}\subset\mathcal{D}$ 的任意性，得

$$\left\|m_n-m\right\|=\left\|m_n-m\right\|_d(X)\le\varepsilon,$$

即 $\left\|m_n-m\right\|\to 0\quad(n\to 0)$。

§3.3 集函数的链变差

本节讨论集函数的第三种变差——链变差。为此，在本节中，除非特别说明外，我们总假定 m 为$(X,\mathcal{D})$上的实值集函数，即 $m:\mathcal{D}\to(-\infty,+\infty)$，且 $m(\phi)=0$。

定义 3.3.1 设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的实值集函数，$m(\phi)=0$，对每个 $A\in\mathcal{D}$，定义

$$|m|_c(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}\left|m(A_i)-m(A_{i-1})\right|,$$

$$m_c^+(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}\max\{m(A_i)-m(A_{i-1}),\quad 0\},$$

$$m_c^-(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}\max\{-(m(A_i)-m(A_{i-1})),\quad 0\},$$

上面三式中的上确界都是对所有联结 ϕ 到 A 之间的有限链所取的，即 $\phi=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_n=A$，$A_i\in\mathcal{D}$，$i=1,2,\cdots,n$。我们分别称 $|m|_c$，m_c^+，m_c^- 为 m(在 A 上关于 $\mathcal{D}$)的链变差，上链变差和下链变差。如果 $X\in\mathcal{D}$，$|m|_c(X)<\infty$，则称 m 具有有界链变差，或称 m 是有界链变差集函数。

显然 $|m|_c(X)<\infty$，当且仅当 $m_c^+(X)<\infty$ 且 $m_c^-(X)<\infty$。

与前面两种变差类似，链变差有下面一些基本性质。

命题 3.3.1　设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的实值集函数，$m(\phi)=0$。则 m 的链变差$|m|_c$具有以下性质($A\in\mathcal{D}$)：

(1) $0\leq|m|_c(A)\leq+\infty$;

(2) $|m|_c(\phi)=0$;

(3) $|m(A)|\leq|m|_c(A)$;

(4) $|m|_c$是$(X,\mathcal{D})$上的单调集函数，即 $A\in\mathcal{D}$，$B\in\mathcal{D}$，$B\subset A$，$|m|_c(B)\leq|m|_c(A)$；

(5) $|m|_l(A)=\sup\{|m(B)|:B\subset A,\ B\in\mathcal{D}\}\leq|m|_c(A)$；

(6) $|m|_c(A)=0$，当且仅当 $m(B)=0$，$B\subset A$，$B\in\mathcal{D}$。

证明　(1)～(4)由定义 3.3.1 直接可证。由(3)和(4)可以证明(5)。由(5)可证明(6)。

命题 3.3.2　设 m 是$(X,\mathcal{D})$上的实值集函数，$m(\phi)=0$。则 m 的上、下链变差 m_c^+和 m_c^-有下面性质($A\in\mathcal{D}$)：

(1) $0\leq m_c^+(A)\leq+\infty$，$0\leq m_c^-(A)\leq+\infty$；

(2) $m_c^+(\phi)=m_c^-(\phi)=0$；

(3) m_c^+和 m_c^-是$(X,\mathcal{D})$上的单调集函数；

(4) $m_c^+=(-m)_c^-$，$m_c^-=(-m)_c^+$；

(5) $|m|_c(A)=0$，当且仅当 $m_c^+(A)=m_c^-(A)=0$；

(6) $m_c^+(A)\geq m(A)\geq-m_c^-(A)$。

证明　由定义 3.3.1 直接可证(1)～(5)。

(6)对任意 $A\in \mathcal{D}$，我们考查仅由集合 ϕ 和 A 组成的链，得到

$$-m(A)\le \max\{-m(A),0\},\quad m(A)\le \max\{m(A),0\}。$$

因此 $-m(A)\le m_c^-(A)$，$m(A)\le m_c^+(A)$，即，$m_c^+\ge m\ge m_c^-$。

定理 3.3.1 设 m 是 (X,Σ) 上的有界链变差集函数，$m(\phi)=0$，那么

(1) $m_c^+=\dfrac{1}{2}(|m|_c+m)$，$\quad m_c^-=\dfrac{1}{2}(|m|_c-m)$；

(2) $m=m_c^+-m_c^-$；

(3) $|m|_c=m_c^++m_c^-$。

证明 设 $A\in\Sigma$，$\{A_i\}_{1\le i\le n}$ 是 ϕ 和 A 之间的任意有限链，即 $A_i\in\Sigma$，$i=1$，2，…，n，$\phi=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_n=A$。于是

$$2\sum_{i=1}^{n}\max\{m(A_i)-m(A_{i-1}),\ 0\}=2\sum{}^{+}(m(A_i)-m(A_{i-1}))$$

$$=\sum{}^{+}(m(A_i)-m(A_{i-1}))+\sum{}^{-}(m(A_i)-m(A_{i-1}))+\sum{}^{+}(m(A_i)-m(A_{i-1}))-\sum{}^{-}(m(A_i)-m(A_{i-1}))$$

$$=m(A)+\sum_{i=1}^{n}|m(A_i)-m(A_{i-1})|\le m(A)+|m|_c(A),\tag{3.3.1}$$

式中 $\sum^+(\sum^-)$ 表示对所有满足 $m(A_i)-m(A_{i-1})\ge 0$ $(m(A_i)-m(A_{i-1})<0)$ 的 i 求和。由链 $\{A_i\}$ 的任意性得

$$m_c^+(A)\le\frac{1}{2}(|m|_c(A)+m(A))。\tag{3.3.2}$$

另一方面，对任意 $\varepsilon>0$，存在 ϕ 和 A 之间的有限链 $\{A_i\}_{1\le i\le n}\subset\Sigma$，使

$$\sum_{i=1}^{n}|m(A_i)-m(A_{i-1})|>|m|_c(A)-\varepsilon。$$

于是，由式(3.3.1)中的等式部分得

$$|m|_c(A)+m(A)-\varepsilon<m(A)+\sum_{i=1}^{n}|m(A_i)-m(A_{i-1})|$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\max\{m(A_i)-m(A_{i-1}),\ 0\}\le 2m_c^+(A)。$$

又由 $\varepsilon>0$ 的任意性得

$$\frac{1}{2}(|m|_c(A)+m(A))\le m_c^+(A)。$$

结合式(3.3.2)最后得到

$$m_c^+(A)=\frac{1}{2}(|m|_c(A)+m(A))。$$

用 $-m$ 替换上式中的 m，并且使用命题 3.3.2 中的(4)，得

$$m_c^-=(-m)_c^+=\frac{1}{2}(|-m|_c-m)=\frac{1}{2}(|m|_c-m)。$$

(2)和(3)可由(1)直接得到。

定理 3.3.2　设 m 是 (X,Σ) 上的有界链变差集函数，$m(\phi)=0$，如果存在单调集函数 v_1 和 v_2，$v_1(\phi)=v_2(\phi)=0$，使 $m=v_1-v_2$，则 $v_1\ge m_c^+$，$v_2\ge m_c^-$。进一步，存在 (X,Σ) 上的非负集函数 v，$v(\phi)=0$，使

$$v_1=m_c^++v,\qquad v_2=m_c^-+v。$$

证明　由定理 3.3.1 中的(2)知，$m=m_c^+-m_c^-=v_1-v_2$，于是 $v_1-m_c^+=v_2-m_c^-$。要证定理的第一个结论，只需证明 $v_1-m_c^+\ge 0$，或者 $v_1\ge m_c^+$。

设 $A\in\Sigma$。对任意 $\varepsilon>0$，存在链 $\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=A$，$E_i\in\Sigma$，$i=1$，2，…，$n$，使

$$m_c^+(A)-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}\max\{m(E_i)-m(E_{i-1}),\ 0\}。$$

用符号 $\sum_{i'}$ 表示对所有满足 $m(E_i)-m(E_{i-1})\ge 0$ 的 i 求和，并使用等式 $m=v_1-v_2$ 以及 v_1 和 v_2 的单调性，得

$$m_c^+(A)-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}\max\{m(E_i)-m(E_{i-1}),\ 0\}=\sum_{i'}[m(E_{i'})-m(E_{i'-1})]$$

$$=\sum_{i'}\left[v_1(E_{i'})-v_1(E_{i'-1})\right]-\sum_{i'}\left[v_2(E_{i'})-v_2(E_{i'-1})\right]$$

$$\leq\sum_{i'}\left[v_1(E_{i'})-v_1(E_{i'-1})\right]\leq\sum_{i=1}^{n}\left[v_2(E_i)-v_2(E_{i-1})\right]=v_1(A),$$

即 $m_c^+(A)-\varepsilon<v_1(A)$。由 $\varepsilon>0$ 的任意性，得 $m_c^+(A)\leq v_1(A)$，或者 $v_1-m_c^+\geq 0$。

同时还有 $v_2-m_c^-\geq 0$，或 $v_2\geq m_c^-$。

令 $v_1-m_c^+=v_2-m_c^-=v$，则定理的第二个结论成立。

引理 3.3.1 设 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$B\subset A$。如果 $|m|_c(B)<\infty$，则

$$|m(A)-m(B)|\leq|m|_c(A)-|m|_c(B)。$$

证明 对 $\varepsilon>0$，存在联结 ϕ 和 B 的链：$\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=B$，$E_i\in\Sigma$，$i=1$，$2$，…，$n$，使

$$|m|_c B-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}|m(E_i)-m(E_{i-1})|。$$

令 $E_{n+1}=A$，我们得到联结 ϕ 和 A 的链：$\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=B\subset E_{n+1}=A$，对这个特殊的链，由前面的不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n+1}|m(E_i)-m(E_{i-1})|-\left(|m|_c(B)-\varepsilon\right)$$

$$>\sum_{i=1}^{n+1}|m(E_i)-m(E_{i-1})|-\sum_{i=1}^{n}|m(E_i)-m(E_{i-1})|=|m(A)-m(B)|。$$

于是，由 $|m|_c(A)$ 的定义，得 $|m|_c(A)-|m|_c(B)+\varepsilon>|m(A)-m(B)|$。因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，故得 $|m|_c(A)-|m|_c(B)>|m(A)-m(B)|$。

定理 3.3.3 $(X,\mathcal{D})$ 上的实值集函数 m（$m(\phi)=0$）是有界链变差的充要条件是存在 $(X,\mathcal{D})$ 上的实值单调集函数 v，使对任意 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$B\subset A$，有 $|m(A)-m(B)|\leq v(A)-v(B)$。

证明　如果 m 是有界链变差的，取 $v=|m|_c$，则由命题 3.3.1 中的(4)，v 是(X,Σ)上的实值单调集函数，并且由引理 3.3.1，对任意 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$B\subset A$ 有 $|m(A)-m(B)|\le v(A)-v(B)$。

反之，如果存在(X,Σ)上的实值单调集函数 v 使上式成立，则对任意联结ϕ到 X 的链：$\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=X$，$E_i\in\Sigma$，$i=1$，2，…，$n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|m(E_i)-m(E_{i-1})|\le\sum_{i=1}^{n}(v(E_i)-v(E_{i-1}))\le v(X)-v(\phi)。$$

因为所考虑的链是ϕ到 X 的任意链，所以 $|m|_c(X)\le v(X)-v(\phi)$，即 $|m|_c(X)<\infty$。故 m 是有界链变差的。

命题 3.3.3　设 m 是(X,Σ)上的有界链变差集函数，如果 m 的链变差$|m|_c$是从上连续(从下连续、序连续、穷竭)的，则 m 本身也是从上连续(从下连续、序连续、穷竭)的。

证明　设$|m|_c$是从上连续的，$\{A_n\}$是Σ中的非增集列。则由引理 3.3.1 及$|m|_c$的从上连续性，得

$$\left|m(A_n)-m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right|\le|m|_c(A_n)-|m|_c\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\to0\quad(n\to\infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)$。故 m 是从上连续的。用类似的方法可证，如果$|m|_c$是从下连续的，则 m 本身也是从下连续的。

如果$|m|_c$是序连续的，则对Σ中的任意集列 $A_n\downarrow\phi\quad(n\to\infty)$，由命题 3.3.1 中的(3)，得 $|m(A_n)|\le|m|_c(A_n)\to0\quad(n\to\infty)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=0$。故 m 是序连续的。

类似可证，如果$|m|_c$是穷竭的，则 m 本身也是穷竭的。

命题 3.3.3 说明了，从极限的观点来看，如果 m 的链变差$|m|_c$具有某种性质，那么 m 本身必须也具有这种性质。

对每个(X,Σ)上的单调集函数 m 以及Σ中的任意单调集列$\{A_n\}$，极限 $\lim m(A_n)$一定存在。下面的定理说明了这一性质对有界链变差集函数仍然成立，尽管 m 可能不是从上或从下连续的。

定理 3.3.4 设 m 是(X,Σ)上的有界链变差集函数，则对Σ中的每个单调集列，极限 $\lim m(A_n)$一定存在。

证明 设$\{A_n\}$是Σ中的非降集列。如果极限 $\lim m(A_n)$存在，则存在$\{A_n\}$的两个子集列$\{E_k\}$和$\{F_k\}$使

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k)=a \qquad \lim_{k\to\infty} m(F_k)=b, \tag{3.3.3}$$

式中 a 和 b 是两个不相等的实数。不失一般性，假定$\{E_k\}\cap\{F_k\}=\phi$，且 $E_1\subset F_1\subset E_2\subset F_2\subset\cdots\subset E_k\subset F_k\subset\cdots$。

另一方面，由式(3.3.3)存在 k_0，使 $k>k_0$ 时

$$|m(E_k)-a|<\frac{|a-b|}{4}, \quad |m(F_k)-b|<\frac{|a-b|}{4}。$$

于是，对任意 $k>k_0$，有

$$|m(F_k)-m(E_k)|\geq|b-a|-|m(F_k)-b|-|m(E_k)-a|\geq\frac{|b-a|}{2},$$

进一步，对 $i\geq1$，由$|m|_c(X)$的定义，有

$$|m|_c(X)\geq\sum_{k=k_0+1}^{k_0+i}|m(F_k)-m(E_k)|\geq i\frac{|a-b|}{2}\to\infty \quad (i\to\infty)。$$

这与条件$|m|_c(X)<\infty$矛盾。因此，对Σ中的任意非降集列$\{A_n\}$，极限 $\lim m(A_n)$一定存在。

用类似的方法可以证明，对Σ中的任意非增集列$\{A_n\}$，极限$\lim m(A_n)$也一定存在。

命题 3.3.4 设 m 是(X,Σ)上的有界链变差集函数，则

(1)m 是从下连续的当且仅当它的链变差$|m|_c$是从下连续的。

(2)m 是从下连续的当且仅当它的上、下链变差m_c^+和m_c^-都是从下连续的。

证明 (1)充分性已经在命题 3.3.3 中证明，下面证明必要性。为此，设$\{A_n\}$是Σ中的非降集列。任取联结ϕ到$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$的链：$\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$E_i\in\Sigma$，$i=1$，2，…，$k$。对每个固定的 i $(1\leqslant i\leqslant k)$，$(E_i\cap A_n)\uparrow E_i$, $(n\to\infty)$。于是，由 m 的从下连续性，得

$$\sum_{i=1}^{k}\left|m(E_i)-m(E_{i-1})\right|=\sum_{i=1}^{k}\left|\lim_{n\to\infty}m(E_i\cap A_n)-\lim_{n\to\infty}m(E_{i-1}\cap A_n)\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left|m(E_i\cap A_n)-m(E_{i-1}\cap A_n)\right|\le\lim_{n\to\infty}|m|_c(A_n)。$$

由于被考虑的链是联结ϕ到$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$的任意链，由上面的不等式得

$$|m|_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\lim_{n\to\infty}|m|_c(A_n)。$$

因为$|m|_c$是单调的，并且$A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$n\geq1$，相反的不等号亦成立,于是

$$\lim_{n\to\infty}|m|_c(A_n)=|m|_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right),$$

即$|m|_c$是从下连续的。

(2)由(1)和定理 3.3.1 中的(1)及(2)直接可证。

注意：在上面命题的必要性证明中只用了 m 的从下连续性，没有使用 m 是有界链变差的这一条件。

命题 3.3.5 设 m 是(X,Σ)上的实值集函数，$m(\phi)=0$。

(1)如果 m 是零零可加的，则它的链变差$|m|_c$也是零零可加的；

(2)如果 m 是零可加的，则它的链变差$|m|_c$也是零可加的。

证明 (1)设 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$A\cap B=\phi$，且$|m|_c(A)=|m|_c(B)=0$。则对任意 $E\in\Sigma$，由$|m|_c$的单调性，有$|m(E\cap A)|\le|m|_c(E\cap A)\le|m|_c(A)=0$，即 $m(E\cap A)=0$，同理可得 $m(E\cap B)=0$。

任取联结ϕ到 $A\cup B$ 的链：$\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=A\cup B$，$E_i\in\Sigma$，$i=1$，2，…，$n$，由 m 的零零可加性，有

$$\sum_{i=1}^{n}|m(E_i)-m(E_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|m[(E_i\cap A)\cup(E_i\cap B)]-m[(E_{i-1}\cap A)\cup(E_{i-1}\cap B)]|=0。$$

由于被考虑的链是联结ϕ到 $A\cup B$ 的任意链，因此，$|m|_c(A\cup B)=0$，即$|m|_c$是零零可加的。

(2)设 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$A\cap B=\phi$，且$|m|_c(B)=0$。则对任意 $E\in\Sigma$，由$|m|_c$的单调性，有$|m(E\cap B)|\le|m|_c(E\cap B)\le|m|_c(B)=0$，即 $m(E\cap B)=0$。任取联结ϕ到 $A\cup B$ 的链：$\phi=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=A\cup B$，$E_i\in\Sigma$，$i=1,2,\cdots$，$n$，由 m 的零可加性，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|m(E_i)-m(E_{i-1})|&=\sum_{i=1}^{n}|m[(E_i\cap A)\cup(E_i\cap B)]-m[(E_{i-1}\cap A)\cup(E_{i-1}\cap B)]|\\&=\sum_{i=1}^{n}|m(E_i\cap A)-m(E_{i-1}\cap A)|。\end{aligned}$$

注意，$\{E_i\cap A\}_{1\le i\le n}$是联结$\phi$到 A 的链，于是由上式及$|m|_c(A)$的定义,有

$$\sum_{i=1}^{n}|m(E_i)-m(E_{i-1})|\le|m|_c(A)。$$

由于被考虑的链是联结 ϕ 到 $A\cup B$ 的任意链，因此，$|m|_c(A\cup B)\le|m|_c(A)$。使用 $|m|_c$ 的单调性，$|m|_c(A\cup B)\ge|m|_c(A)$ 显然成立，故 $|m|_c(A\cup B)=|m|_c(A)$，即 $|m|_c$ 是零可加的。

下面的定理是关于下半连续广义模糊测度的 Jordan 分解定理。

定理 3.3.5 设 m 是 (X,Σ) 上的下半连续广义模糊测度。如果 m 是有界链变差的，则 m 可以表示成 (X,Σ) 上的下半连续模糊测度 v_1 和 v_2 之差，即 $m=v_1-v_2$。

证明 因为 m 是有界变差的，则由定理 3.3.1 中的(2)，$m=m_c^+-m_c^-$，令 $v_1=m_c^+$，$v_2=m_c^-$。则由命题 3.3.2 中的(1)～(3)以及命题 3.3.4 中的(2)知，v_1 和 v_2 是 (X,Σ) 上的两个下半连续模糊测度。

我们用符号 BV 表示所有 (X,Σ) 上的有界链变差集函数全体。容易验证，BV 按下面运算：

$$m,\ v\mapsto m+v \quad (m,\ v\in BV)$$
$$a,\ m\mapsto am \quad (m\in BV,\ a\in R)$$

构成实数域 R 上的线性空间。又在 BV 上定义一个泛函 $\|\cdot\|$ 如下：

$$\|m\|=|m|_c(X),\quad m\in BV,$$

由命题 3.3.1 中的(1)、(6)和定义 3.3.1 知，$\|\cdot\|$ 满足下列条件：

(1) $\|m\|\ge 0$；$\|m\|=0$ 当且仅当 $m=0$ $(m\in BV)$；

(2) $\|am\|=|a|\,\|m\|$ $(a\in R,\ m\in BV)$；

(2) $\|m+v\|\le\|m\|+\|v\|$ $(m,\ v\in BV)$，

即 $(BV,\|\cdot\|)$ 为实赋范线性空间。进一步，我们有

定理 3.3.6 $(BV,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间。

证明 设$\{m_n\}$是 BV 中的一个基本列，即对任给$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 n，$n_0>N$ 时有$\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon$。因为对任意 $A\in\Sigma$，有

$$\left|m_n(A)-m_{n_0}(A)\right|=\left|(m_n-m_{n_0})(A)\right|\le\left|m_n-m_{n_0}\right|_c(A)\le\left|m_n-m_{n_0}\right|_c(X)=\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon,$$

所以$\{m_n(A)\}$是一个由实数构成的基本列，因而是收敛的。这样我们可以定义(X,Σ)上的实值集函数 m 如下：

$$m(A)=\lim_{n\to\infty}m_n(A)\qquad(A\in\Sigma)。$$

下面首先证明 $m\in BV$。事实上，取$\varepsilon=1$，则存在正整数 n_0，使当 $n>n_0$ 时，

$$\|m_n-m_{n_0}\|\le1。\tag{3.3.4}$$

另一方面，对任意ϕ到 X 之间的链：$\phi=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_k=X$，$A_i\in\Sigma$，$i=1$，2，…，$k$，以及 $n>n_0$，由式(3.3.4)有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\left|m_n(A_i)-m_n(A_{i-1})\right|-\|m_{n_0}\|\le\sum_{i=1}^{k}\left|m_n(A_i)-m_n(A_{i-1})\right|-\sum_{i=1}^{k}\left|m_{n_0}(A_i)-m_{n_0}(A_{i-1})\right|\\&\le\sum_{i=1}^{k}\left|(m_n-m_{n_0})(A_i)-(m_n-m_{n_0})(A_{i-1})\right|\le\|m_{n_0}-m_{n_0}\|\le1。\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得 $\sum_{i=1}^{k}\left|m_n(A_i)-m_n(A_{i-1})\right|\le1+\|m_{n_0}\|$。因为所考察的链是$\phi$到 X 之间的任意链，故$\|m\|\le1+\|m_{n_0}\|$，即 $m\in BV$。

然后证明$\|m_n-m\|\to0$ $(n\to0)$。实际上，对任意$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 n，$n_0>N$时有$\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon$。则对任意$\phi$到 X之间的链：$\phi=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_k=X$，$A_i\in\Sigma$，$i=1,2$，…，$k$，以及 n，$n_0>N$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}\left|(m_n-m_{n_0})(A_i)-(m_n-m_{n_0})(A_{i-1})\right|\le\left|m_n-m_{n_0}\right|_c(X)=\|m_n-m_{n_0}\|<\varepsilon。$$

令 $n_0\to\infty$，得 $\sum_{i=1}^{k}\left|(m_n-m)(A_i)-(m_n-m)(A_{i-1})\right|<\varepsilon$。因为所考察的链是 ϕ 到 X 之间的任意链，故 $\|m_n-m\|=|m_n-m|_c(X)\le\varepsilon$，即 $\|m_n-m\|\to 0\quad(n\to 0)$。

下面的定理刻划了 BV 中元素的特征。

定理 3.3.7　设 m 是 (X,Σ) 上的实值集函数，$m(\phi)=0$，则 $m\in BV$ 的充要条件为 m 可以表示成 (X,Σ) 上的两个实值单调集函数 v_1，v_2 $(v_1(\phi)=v_2(\phi)=0)$ 之差。进一步，如果 $m\in BV$，则

$$\|m\|=\inf\{v_1(X)+v_2(X)\}\tag{3.3.5}$$

其中下确界对所有 (X,Σ) 上的实值单调集函数 v_1，v_2 $(v_1(\phi)=v_2(\phi)=0)$ 且 $m=v_1-v_2$ 所取。

证明　如果 $m\in BV$，则由定理 3.3.1 中的(2)有 $m=m_c^+-m_c^-$。令 $v_1=m_c^+$，$v_2=m_c^-$，根据命题 3.3.2 中的(2)和(3)，v_1，v_2 是 (X,Σ) 上的实值单调集函数，且满足 $v_1(\phi)=v_2(\phi)=0$。

反之，如果 $m=v_1-v_2$，v_1，v_2 是两个 (X,Σ) 上的实值单调集函数，则对任意 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$B\subset A$，由 v_1 和 v_2 的单调性，得

$$\begin{aligned}|m(A)-m(B)|&=|v_1(A)-v_2(A)-(v_1(B)-v_2(B))|\\&=|v_1(A)-v_1(B)-(v_2(A)-v_2(B))|\le v_1(A)-v_1(B)。\end{aligned}$$

因此，由定理 3.3.3，$m\in BV$。

如果 $m\in BV$，则由定理 3.3.1 中的(3)和定理 3.3.2，有

$$\|m\|\le\inf\{v_1(X)+v_2(X)\}。$$

另一方面，由定理 3.3.1 中的(2)和(3)，有

$$\|m\|\ge\inf\{v_1(X)+v_2(X)\}。$$

因此，式(3.3.5)成立。

引理 3.3.2　如果 $m\in BV$，则 $\|m\|=m_c^+(X)+m_c^-(X)=\|m_c^+\|+\|m_c^-\|$。

证明　由定理 3.3.1 中的(3)立即得 $\|m\| = m_c^+(X) + m_c^-(X)$。因为，对任意非负单调集函数 v，总有 $|v|_c(X) = v(X)$。因此，

$$\|m_c^+\| = |m_c^+|_c(X) = m_c^+(X), \qquad \|m_c^-\| = |m_c^-|_c(X) = m_c^-(X)。$$

从而 $\|m\| = \|m_c^+\| + \|m_c^-\|$。

在 BV 上定义乘法运算如下：

$$m,\ v \mapsto m \cdot v \quad (m,\ v \in BV)。$$

容易验证，BV 按这样定义的乘法以及前面定义的加法和数乘运算构成交换代数。进一步，有

定理 3.3.7　$(BV, \|\cdot\|)$为一交换 Banach 代数(赋范环)。

证明　只需证明对任意 $m, v \in BV$，总有 $\|m \cdot v\| \le \|m\| \cdot \|v\|$。

首先，对任意非负单调实值集函数 m，v 有

$$\|m \cdot v\| = |m \cdot v|_c(X) = m(X) \cdot v(X) = |m|_c(X) \cdot |v|_c(X) = \|m\| \cdot \|v\|。$$

其次，对任意 m，$v \in BV$，由定理 3.3.1 中的(2)得

$$m = m_c^+ - m_c^-, \qquad v = v_c^+ - v_c^-。$$

再由命题 3.3.2 中的(1)～(3)知，m_c^+, m_c^-, v_c^+, v_c^- 都是非负单调实值集函数。从而由引理 3.3.2 得

$$\begin{aligned}\|m \cdot v\| &= \|(m_c^+ - m_c^-)(v_c^+ - v_c^-)\| \le \|m_c^+ \cdot v_c^+\| + \|m_c^+ \cdot v_c^-\| + \|m_c^- \cdot v_c^+\| + \|m_c^- \cdot v_c^-\| \\ &= \left(\|m_c^+\| + \|m_c^-\|\right) + \left(\|v_c^+\| + \|v_c^-\|\right) = \|m\| \cdot \|v\|。\end{aligned}$$

§3.4　各种变差之间的关系与可加集函数的变差

在 §3.2 中，我们曾经指出：如果 m 是$(X, \mathcal{D})$上的广义实值集

函数，$m(\phi)=0$，则 $|m|_i(A)\le|m|_d(A)\quad(A\subset X)$；如果 m 是 $(X,\ \Re)$ 上的非负超可加集函数，$m(\phi)=0$，则 $|m|_i(A)=|m|_d(A)\quad(A\subset X)$，进一步，如果 $A\in\Re$，还有 $|m|_i(A)=|m|_d(A)=m(A)$。

在§3.3中，我们曾经得到：如果 m 是 $(X,\mathfrak{D})$ 上的实值集函数，$m(\phi)=0$，则 $|m|_i(A)\le|m|_c(A)\quad(A\in\mathfrak{D})$，进一步，如果 m 是非负单调的，还有

$$|m|_i(A)=|m|_c(A)=m(A)\qquad(A\in\mathfrak{D})。\tag{3.4.1}$$

综合上面的讨论我们可以得到

定理 3.4.1　设 m 是 $(X,\ \Re)$ 上的实值非负超可加集函数，$m(\phi)=0$，那么对任意 $A\in\Re$ 有

$$|m|_i(A)=|m|_d(A)=|m|_c(A)=m(A)。$$

但是，一般来说，这三种变差是不同的。例如，如果 m 是 $(X,\Re)$ 上的非负单调有限(可数)次可加集函数，并且不是可加的，那么由命题3.2.6可知，$|m|_d$ 在 $\Re$ 上是有限(可数)可加的。若注意式(3.4.1)，立即可以得到 $|m|_i\ne|m|_d$，$|m|_c\ne|m|_d$。此外，我们还有

例 3.4.1　设 $X=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$\Sigma=X$ 的幂集。集函数 m 定义如下 $(A\in\Sigma)$：

$$m(A)=\begin{cases}0 & A=\phi,\\ \dfrac{1}{\max A} & A\ne\phi。\end{cases}$$

分别计算集合 $A=\{1,\ 2\}$ 的内含变差和链变差得

$$|m|_i(A)=1,\quad |m|_c(A)=\frac{3}{2}。$$

这说明 $|m|_i\ne|m|_c$。

命题 3.4.1 设 m 是$(X, \mathfrak{R})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。如果 m 是可加的，则它的内含变差$|m|_i$在$\mathfrak{R}$上也是可加的。

证明 设 $A\in\mathfrak{R}$，$B\in\mathfrak{R}$，$A\cap B=\phi$。则对任意 $E\subset A\cup B$，$E\in\mathfrak{R}$,由 m 的可加性得

$$|m(E)|=|m(E\cap A)+m(E\cap B)|\leq|m(E\cap A)|+|m(E\cap B)|\leq|m|_i(A)+|m|_i(B)。$$

由 $E\subset A\cup B$ 的任意性得

$$|m|_i(A\cup B)\leq|m|_i(A)+|m|_i(B)。\tag{3.4.2}$$

如果 $|m|_i(A\cup B)=\infty$，则显然有 $|m|_i(A\cup B)=|m|_i(A)+|m|_i(B)$；如果 $|m|_i(A\cup B)<\infty$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $E\subset A$，$F\subset B$，$E\in\mathfrak{R}$，$F\in\mathfrak{R}$，使

$$|m|_i(A)<|m(E)|+\varepsilon，\quad |m|_i(B)<|m(F)|+\varepsilon\ 。$$

因为 $E\cup F\subset A\cup B$，所以有

$$|m|_i(A)+|m|_i(B)<|m(E)|+|m(F)|+2\varepsilon\leq|m|_i(A\cup B)+2\varepsilon。$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故$|m|_i(A)+|m|_i(B)\leq|m|_i(A\cup B)$。注意式(3.4.2)，最后得到$|m|_i(A\cup B)=|m|_i(A)+|m|_i(B)$，即$|m|_i$是可加的。

定理 3.4.2 设 m 是$(X, \mathfrak{R})$上的实值集函数，$m(\phi)=0$。如果 m 是可加的，那么对任意 $A\in\mathfrak{R}$

$$|m|_i(A)=|m|_d(A)=|m|_c(A)。$$

证明 设 $A\in\mathfrak{R}$，$\{A_i\}_{1\leq i\leq n}\subset\mathfrak{R}$是$\phi$和 A 之间的任意有限链，即$\phi=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_n=A$。

先证$|m|_i(A)=|m|_c(A)$。为此，用$\sum^+$与$\bigcup^+$（$\sum^-$与$\bigcup^-$）表示对所有

满足 $m(A_i)-m(A_{i-1})\geq 0$　$(m(A_i)-m(A_{i-1})<0)$的 i 求和与并。这样

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m(A_i)-m(A_{i-1})\right|=\sum^{+}(m(A_i)-m(A_{i-1}))-\sum^{-}(m(A_i)-m(A_{i-1}))$$
$$=m\left(\bigcup^{+}(A_i-A_{i-1})\right)-m\left(\bigcup^{-}(A_i-A_{i-1})\right)。$$

记 $E=\bigcup^{+}(A_i-A_{i-1})$，$F=\bigcup^{-}(A_i-A_{i-1})$。显然，$E\cap F=\phi$，$E\cup F=A$。于是，由命题 3.4.1，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m(A_i)-m(A_{i-1})\right|=m(E)-m(F)\leq|m|_i(E)+|m|_i(F)=|m|_i(A)。$$

再由$\{A_i\}$的任意性，得$|m|_c(A)\leq|m|_i(A)$。因为相反的不等号由命题 3.3.1 中的(5)直接可得，所以$|m|_i(A)=|m|_c(A)$。

再证$|m|_d(A)=|m|_c(A)$。为此，令 $D_i=A_i-A_{i-1}$，i=1，2，…，n。显然$\{D_i\}_{1\leq i\leq n}$是$\mathfrak{R}$中包含于 A 的有限不交集列。由 m 的可加性有

$$m(D_i)=m(A_i)-m(A_{i-1})\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m(A_i)-m(A_{i-1})\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|m(D_i)\right|\leq|m|_d(A)。$$

又由$\{A_i\}$的任意性，得

$$|m|_c(A)\leq|m|_d(A)。\tag{3.4.3}$$

另一方面，对$\mathfrak{R}$中的任意有限不交集列$\{D_i\}_{1\leq i\leq n}$，$\bigcup_{i=1}^{n}D_i=A$，令

$$A_0=\phi,\quad A_i=\bigcup_{j=1}^{i}D_j,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则$\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$是ϕ和 A 之间的一个链。对于这个特殊的链，由 m 的可加性有

$$\sum_{i=1}^{n}\left|m(D_i)\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|m(A_i)-m(A_{i-1})\right|\le\left|m\right|_c(A)。$$

又由 $\{D_i\}$ 的任意性，得 $\left|m\right|_d(A)\le\left|m\right|_c(A)$。结合式(3.4.3)，最后得 $\left|m\right|_d(A)=\left|m\right|_c(A)$。

定理 3.4.3 设 m 是$(X,\Re)$上的有界内含变差集函数。如果 m 是可加的，那么对任意 $A\in\Re$

$$m_i^+(A)=\frac{1}{2}\left(\left|m\right|_i(A)+m(A)\right),\quad m_i^-(A)=\frac{1}{2}\left(\left|m\right|_i(A)-m(A)\right),$$

式中$\left|m\right|_i$，m_i^+和m_i^-分别是 m 的内含变差，上和下内含变差，并且它们也都是可加的。进一步

$$m(A)=m_i^+(A)-m_i^-(A),\qquad \left|m\right|_i(A)=m_i^+(A)+m_i^-(A)。$$

证明　设 $A\in\Re$。对任意 $B\subset A$，$B\in\Re$，由 m 和$\left|m\right|_i$的可加性，

$$\begin{aligned}2m(B)&=m(B)+m(A)-m(A-B)\le m(A)+\left|m(B)\right|+\left|m(A-B)\right|\\&\le m(A)+\left|m\right|_i(B)+\left|m\right|_i(A-B)=m(A)+\left|m\right|_i(A)。\end{aligned}$$

又由 $B\subset A$ 的任意性，

$$m_i^+(A)\le\frac{1}{2}\left(\left|m\right|_i(A)+m(A)\right)。\tag{3.4.4}$$

另一方面，对任意$\varepsilon>0$，存在 $B\subset A$，$B\in\Re$，使$\left|m(B)\right|>\left|m\right|_i(A)-\varepsilon$。于是，由 m 的可加性得

$$\begin{aligned}&\left|m\right|_i(A)+m(A)-\varepsilon<m(A)+\left|m(B)\right|=m(B)+m(A-B)+\left|m(B)\right|\\&=2\max\{m(B),0\}+m(A-B)\le2\left(\max\{m(B),\ 0\}+\max\{m(A-B),\ 0\}\right)\\&\le2\max\{m(B),\ m(A-B),\ m(A),\ 0\}\le2m_i^+(A)。\end{aligned}$$

又由$\varepsilon>0$的任意性得

$$\frac{1}{2}\left(\left|m\right|_i(A)+m(A)\right)\le m_i^+(A)。$$

结合式(3.4.4)，得到

$$m_i^+(A)=\frac{1}{2}\left(|m|_i(A)+m(A)\right)。$$

用 $-m$ 替换上式中的 m，并使用命题 3.1.2 中的(4)，得

$$m_i^-=(-m)_i^+=\frac{1}{2}\left(|-m|_i-m\right)=\frac{1}{2}\left(|m|_i-m\right)。$$

由命题 3.4.1，以及刚证明的等式，我们立即得到 $|m|_i$，m_c^+ 和 m_c^- 的可加性。定理的最后两个等式由前面两个等式直接可得。

命题 3.4.2 设 m 是 $(X,\mathfrak{R})$ 上的可加集函数，$m(\phi)=0$。如果 $|m(A)|\le M$ $(A\in\mathfrak{R})$，那么 m 是有界不交变差的，并且 $|m|_d(A)\le 2M$ $(A\subset X)$。

证明 设 $A\subset X$，$\{D_i\}_{1\le i\le n}$ 是 $\mathfrak{R}$ 中的任意有限不交集列，$D_i\subset A$，$i=1$，2，…，n。由 m 的可加性

$$\sum_{i=1}^{n}|m(D_i)|=\sum{}^{+}m(D_i)-\sum{}^{-}m(D_i)=m\left(\bigcup{}^{+}D_i\right)-m\left(\bigcup{}^{-}D_i\right),$$

式中 $\sum^+$ 和 $\bigcup^+$ $\left(\sum^-\text{ 和 }\bigcup^-\right)$ 表示对所有 $m(D_i)\ge 0$ $\left(m(D_i)<0\right)$ 的 i 求和与并，于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}|m(D_i)|\le 2M$。最后，由 $\{D_i\}$ 的任意性得 $|m|_d(A)\le 2M$。

定理 3.4.4 设 m 是 $(X,\mathfrak{R})$ 上的有界不交变差集函数。如果 m 是可加的，那么对任意 $A\in\mathfrak{R}$

$$m_d^+(A)=\frac{1}{2}\left(|m|_d(A)+m(A)\right),\qquad m_d^-(A)=\frac{1}{2}\left(|m|_d(A)-m(A)\right),$$

式中 $|m|_d$，m_d^+ 和 m_d^- 分别是 m 的不交变差，上和下不交变差，并且它们也都是可加的。进一步

$$m(A)=m_d^+(A)-m_d^-(A),\qquad |m|_d(A)=m_d^+(A)+m_d^-(A)。$$

证明 设 $A\in\mathfrak{R}$。对任意 $\varepsilon>0$，存在有限不交集列 $\{D_i\}_{1\le i\le n}\subset\mathfrak{R}$，

$\bigcup_{i=1}^{n} D_i = A$，使 $\sum_{i=1}^{n} |m(D_i)| > |m|_d(A) - \varepsilon$。于是，由 m 的可加性得

$$|m|_d(A) + m(A) - \varepsilon < m(A) + \sum_{i=1}^{n} |m(D_i)| = \sum^{+} m(D_i) + \sum^{-} m(D_i) + \sum^{+} m(D_i) - \sum^{-} m(D_i)$$

$$= 2\sum^{+} m(D_i) = 2\sum_{i=1}^{n} \max\{m(D_i),\ 0\} \le 2 m_d^{+}(A), \tag{3.4.5}$$

式中 $\sum^{+}$ $(\sum^{-})$表示对所有 $m(D_i) \ge 0$ $(m(D_i) < 0)$的 i 求和。由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得

$$\frac{1}{2}\left(|m|_d(A) + m(A)\right) \le m_d^{+}(A)。 \tag{3.4.6}$$

另一方面，设 $\{D_i\}_{1\le i\le n}$ 是 $\Re$ 中的任意有限不交集列，使 $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = A$。由式(3.4.5)中的等式部分得

$$2\sum_{i=1}^{n} \max\{m(D_i),\ 0\} = \sum_{i=1}^{n} |m(D_i)| + m(A) \le |m|_d(A) + m(A)。$$

又由 $\{D_i\}$的任意性，得

$$m_d^{+}(A) \le \frac{1}{2}\left(|m|_d(A) + m(A)\right)。$$

结合式(3.4.6)，得到

$$m_d^{+}(A) = \frac{1}{2}\left(|m|_d(A) + m(A)\right)。$$

用 $-m$ 替换上式中的 m，并使用命题 3.2.3 中的(4)得

$$m_d^{-} = (-m)_d^{+} = \frac{1}{2}\left(|-m|_d - m\right) = \frac{1}{2}\left(|m|_d - m\right)。$$

由定理 3.4.2 和命题 3.4.1 以及刚证明的等式，立即得到 $|m|_d$，m_d^{+} 和 m_d^{-}的可加性。定理的最后两个等式由前面两个等式直接可得。

推论 3.4.1 设 m 是 (X, Σ)上的有界变差集函数，$m(\phi)=0$。如果 m 是可加的，那么 $|m|_c$，m_c^{+}，m_c^{-} 也都是可加的，并且

$$m_i^+ = m_d^+ = m_c^+, \qquad m_i^- = m_d^- = m_c^-。$$

证明　由定理 3.4.2 和命题 3.4.1 可知$|m|_c$是(X, Σ)上的可加集函数。进一步，由定理 3.3.1(1)又知m_c^+和m_c^-的可加性。由定理 3.4.2，3.4.3，3.4.4 以及定理 3.3.1 立即可得后面两个等式。

第四章 广义模糊测度

模糊测度(Fuzzy 测度)的概念是 Sugeno 在 1974 年首先提出的[33]。在他的定义中，模糊测度(即非可加单调集函数)的定义域是一个单调类，值域是单位区间[0，1]。随后，Relescu 等人将模糊测度的定义域拓广到σ-代数上，并将值域扩大到广义半直线[0，+∞]，而且为了与σ-代数相适应，对集函数增加了上下连续性的要求[46]。但是，它们的主要特征都是用集函数的“单调性”替代它的“可加性”，从而将可加集函数的研究拓广到非可加集函数的研究。1993 年，Liu 将模糊测度的取值范围再次扩大到广义实直线[-∞，+∞]，并将集函数的单调性用更弱的条件——修正单调性代替，进而定义了广义(符号)模糊测度。但是，他在对广义模糊测度进行 Hahn 分解时，误将经典测度的已有结论未加证明地使用到非可加集函数中来，从而导致了证明的失败[47]。本章中定义的广义模糊测度索性不要求集函数的单调性。为了不发生混淆，我们将 Liu 定义的广义模糊测度称为修正单调广义模糊测度。它们都是 Sugeno 模糊测度的推广，也是经典测度的推广。

在这一章中，我们首先讨论广义模糊测度的基本性质，第三节提出非零可加集函数“一致性”(或“顺从性”)的概念，它在广义模糊测度的 Hahn 分解中起重要作用。第四节至第六节分别在不同的条件下讨论广义模糊测度的 Hahn 分解，Jordan 分解和 Lebesgue 分解定理。这些分解定理是对经典测度论中相应结果的修改和扩充。第七节讨论广义实值集函数的 Lebesgue 分解定理。

§ 4.1 广义模糊测度

定义 4.1.1 设$\Re$ 是一个σ-环。集函数 m: $\Re\to[-\infty, +\infty]$称为$\Re$上的广义模糊测度，如果它满足以下性质：

(1) $m(\phi)=0$；

(2) $\{A_n\}\subset\Re$， $A_1\subset A_2\subset\cdots\Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}m(A_n)$；

(3) $\{A_n\}\subset\Re, A_1\supset A_2\supset\cdots$且存在 n_0 使 $\left|m\left(A_{n_0}\right)\right|<\infty\Rightarrow m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(A_n\right)$。

显然，集函数 m: $\Re\to\overline{R}$是广义模糊测度，当且仅当 m 既是广义下半连续模糊测度又是广义上半连续模糊测度(参看第二章第四节)。

例 4.1.1　模糊测度和经典广义测度都是广义模糊测度。

§4.2　广义实值集函数的正集与负集

定义 4.2.1　设 m 是$(X, \Re)$上的广义实值集函数，即 m: $\Re\to[-\infty，+\infty]$，满足 $m(\phi)=0$。$P\subset X$，$N\subset X$。

(1)如果对任意 $E\in\Re$，$P\cap E\in\Re$，有 $m(P\cap E)\geq 0$，则称 P 是(关于 m 的)一个正集。

(2)如果对任意 $E\in\Re$，$N\cap E\in\Re$，有 $m(N\cap E)\leq 0$，则称 N 是(关于 m 的)一个负集。

显然，空集ϕ 既是正集也是负集。此外，正集的每个可测子集还是正集，负集的每个可测子集还是负集。

必须指出，虽然定义 4.2.1 从形式上看与经典测度论中正集和负集的定义是一样的，但是由于对集函数 m 的要求不一样，它们实质上还是有区别的。例如，对一般的非可加集函数，两个正(负)集的并不一定还是正(负)集。这点就与经典广义测度不同。

例 4.2.1　设 $X=\{a, b, c, d\}$，Σ是 X 的幂集。定义集函数 m: $\Sigma\to[-1, 1]$如下：

$m(\phi)=m(\{b\})=m(\{d\})=0$，$m(\{b, d\})=1$。对其他 $A\in\Sigma$，$m(A)=-1$。

可以验证 m 是Σ上的修正单调集函数，集合$\{a, b\}$和$\{c, d\}$都是关于 m 的负集，但是，它们的并集 X 不是一个负集。

如果令 $m'=-m$，则 m' 也是Σ上的修正单调集函数，而集合$\{a, b\}$和$\{c, d\}$都是关于 m' 的正集。但是，它们的并集 X 不是一个正集。

注意：在上例中对 m 来说，集合$\{a, b\}$和$\{c, d\}$是负集，它们的并集 X 不是负集，但是，$X-(\{b\}\cup\{d\})$却是一个负集(这里 $m(\{b\})=m(\{d\})=0$)。一般地，我们有下面的命题：

命题 4.2.1　设 m 是可测空间(X, Σ)上的修正单调广义下半连续模糊测度，$\{A_n\}\subset\Sigma$。令

$\Sigma_n = \{H : H \in \Sigma,\ H \subset A_n,\ m(H) = 0\}$　　n=1，2，…，

$K_n = \bigcup\{H : H \in \Sigma_n\}$　　n=1，2，…。

(1)如果$\{A_n\}$是一个负集列，则$N = \bigcup_n A_n - \bigcup_n K_n$是一个负集；若还有对任意集列$\{H_n\}$, $H_n \in \Sigma_n$，n=1，2，…，$m(\bigcup_n H_n) \le 0$，则$N_1 = \bigcup_n A_n$也是一个负集。

(2)如果$\{A_n\}$是一个正集列，则$P = \bigcup_n A_n - \bigcup_n K_n$是一个正集；若还有对任意集列$\{H_n\}$, $H_n \in \Sigma_n$，n=1，2，…，$m(\bigcup_n H_n) \ge 0$，则$P_1 = \bigcup_n A_n$也是一个正集。

证明 (1)设 $E\in\Sigma$，$EN\in\Sigma$（这里将 $E \cap N$ 简记成 EN），则由$\bigcup_n K_n = \bigcup_n A_n - N$，得$E(\bigcup_n K_n) = E(\bigcup_n A_n) - EN \in \Sigma$，并且

$$EN = E\left(\bigcup_n A_n\right) - E\left(\bigcup_n K_n\right) = \bigcup_n EA_n\overline{\left(E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)}。$$

记$F_n = EA_n\overline{\left(E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)}$，$n$=1，2，…。显然，$F_n \in \Sigma$, $F_n \subset A_n$，n=1，2，…。因为A_n是负集，所以$m(F_n)\le 0$，n=1，2,…。如果存在正整数n_0使$m(F_{n_0}) < 0$，则由命题2.4.3(这里不妨假定$\{F_n\}$是不交集列)，$m(EN) = m(\bigcup_n F_n) < 0$；如果对所有的正整数$n$，$m(F_n)$=0，则$F_n \subset K_n$，从而$F_n = \phi$，$n$=1，2，…。因此$m(EN) = m(\bigcup_n F_n) = m(\phi) = 0$，故$N$是一个负集。

如果对任意集列$\{H_n\}$, $H_n \in \Sigma_n$，n=1，2，…，$m(\bigcup_n H_n) \le 0$。对每个 $E \in \Sigma$，EN_1=$\bigcup_n EA_n$，因为A_n是负集。所以$m(EA_n)\le 0$，n=1，2，…。若$m(EA_n)$=0，

n=1，2，…，则 $EA_n \in \Sigma_n$，n=1，2，…，从而 $m(EN_1)=m(\bigcup_n EA_n)\le 0$；若存在正整数 n_0，使 $m(EA_{n_0})<0$，则由命题 2.4.3 (不妨假定$\{A_n\}$是不交集列)，

$$m(EN_1)=m(\bigcup_n EA_n)<0,$$

故 N_1 是一个负集。

(2)的证与(1)类似。

注 4.2.1 从命题 4.2.1 的证明中可以看出，如果$\{A_n\}$是一个有限集列，则只要求集函数 m 是修正单调的并且 $m(\phi)=0$，命题 4.2.1 即成立。

命题 4.2.2 设 m 是$\mathfrak{R}$上的修正单调函数，满足 $m(\phi)=0$，$A\in\mathfrak{R}$，$m(A)=0$。如果 A 是正集(负集)，则对每个 $E\subset A$，$E\in\mathfrak{R}$，$m(E)=0$。

证明 设 A 是正集，且 $m(A)=0$。假定存在 $E\subset A$，$E\in\mathfrak{R}$ 使 $m(E)>0$，则 $m(A-E)\ge 0$。由 m 的修正单调性 a)。

$$m(A)=m((A-E)\cup E)\ge m(A-E)\vee m(E)>0.$$

这与条件 $m(A)=0$ 矛盾，故 $m(E)=0$。A 是负集时的证明与上类似。

推论 4.2.1 设 m 是$\mathfrak{R}$上的修正单调、零零可加、广义下半连续模糊测度，$\{A_n\}\subset\mathfrak{R}$。

(1)如果$\{A_n\}$是一个负集列，则 $N=\bigcup_n A_n$ 也是一个负集。

(2)如果$\{A_n\}$是一个正集列，则 $P=\bigcup_n A_n$ 也是一个正集。

证明 因为这时在命题 4.2.1 中，对任意集列$\{H_n\}$，$H_n\in\Sigma_n$，n=1，2，…，由 m 的零零可加性有 $m(\bigcup_n H_n)=0$，所以 $N(P)$ 是一个负(正)集。

推论 4.2.2 设 m 是$\mathfrak{R}$上的修正单调、零零可加集函数，$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}\subset\mathfrak{R}$。

(1)如果 A_i 是负集，i=1，2，…，n，则 $N=\bigcup_{i=1}^n A_i$ 还是一个负集。

(2)如果 A_i 是正集，i=1，2，…，n，则 $P=\bigcup_{i=1}^n A_i$ 还是一个正集。

§ 4.3 集函数的非零可加性

命题 4.3.1 设 m 是$\Re$上的修正单调广义下半连续模糊测度。如果存在至多可数集列$\{H_n\}\subset\Re$满足下列条件：

(1)对每个集 H_n，若 $E\subset H_n$，$E\in\Re$，则 $m(E)=0$；

(2) $m\left(\bigcup_n H_n\right)>0\quad(<0)$，

则对任意满足条件(1)的至多可数集列$\{A_n\}\subset\Re$，$m\left(\bigcup_n A_n\right)\geq 0\quad(\leq 0)$。

证明 这里仅证明命题的"≥"结论，对于括号中的结论，可以类似证明。

设存在至多可数集列$\{H_n\}\subset\Re$满足上述条件(1)和(2)，又假定存在另一仅满足条件(1)的至多可数集列$\{A_n\}\subset\Re$，但是，$m\left(\bigcup_n A_n\right)<0$。

令 $H_0=\bigcup_n A_n$，$E_n=H_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}H_i$，$n$=1，2，…，显然，$H_0$，$E_1$，$E_2$，…是一两两不交集列，且由条件(1)，$m(E_n)$=0，$n$=1，2，…。因此，使用命题 2.4.3 和假定 $m(H_0)$<0，得

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}H_n\right)=m\left(H_0\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)<0。\tag{4.3.1}$$

另一方面，令 $A_0=\bigcup_n H_n$，$F_n=A_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}A_i$，$n$=1，2，…。显然，$A_0$，$F_1$，$F_2$，…是一两两不交集列，且由条件(1)，$m(F_n)$=0，$n$=1，2，…。因此，使用命题 2.4.3 和条件(2)：$m(A_0)>0$，得

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\right)=m\left(A_0\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)>0。$$

这与式(4.3.1)矛盾。因此，对任意满足条件(1)的至多可数集列$\{A_n\}\subset\Re$，必有$m\left(\bigcup_n A_n\right)\geq 0$。

命题 4.3.1 说明，对于修正单调的非零可加集函数 m，如果在$\Re$中存在至多可数集列$\{H_n\}$，使 H_n 中的每个可测子集都是零测集，且零测集列$\{H_n\}$的并集是非零测集，即$m\left(\bigcup_n H_n\right)\neq 0$，则对$\Re$中每个至多可数的、其内部的

可测子集都是零测集的集列$\{A_n\}$，它的并集$\bigcup_n A_n$的测度值$m(\bigcup_n A_n)$的符号基本上同$m(\bigcup_n H_n)$的符号。

我们将非零可加集函数的零测集的这种性质称为零测集并的一致性或顺从性。一般地，我们有

定义 4.3.1　称集函数 m: $\Re\to[-\infty, +\infty]$是一致的，如果存在至多可数集列$\{H_n\}\subset\Re$满足下列条件：

(1)对每个集 H_n，若 $E\subset H_n$，$E\in\Re$，则 $m(E)=0$；

(2) $m(\bigcup_n H_n)>0$（<0），

则对任意满足条件(1)的集族$\{A_t: t\in T\}$，T 是任意指标集，$A_t\in\Re$, $t\in T$，且$\bigcup_{t\in T} A_t\in\Re$，有$m(\bigcup_{t\in T} A_t)\geq 0$　(≤ 0)。

例 4.3.1　任意模糊测度是非负的，因而是一致的。

例 4.3.2　任意经典广义测度和零零可加下半连续集函数(因为不同时存在满足条件(1)和(2)的至多可数集列$\{H_n\}$，故) 是一致的。

§4.4　广义模糊测度的 Hahn 分解

定义 4.4.1　设 m 是$(X, \Re)$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$。如果存在关于 m 的正集 A 和负集 B，使得

$$A\cap B=\phi,\quad A\cup B=X$$

则称集对(A, B)是 X (关于 m)的一个 Hahn 分解。

定理 4.4.1　设集合 X 是可数的，Σ是 X 的幂集，m 是(X, Σ)上的修正单调广义下半连续模糊测度，则存在 X (关于 m)的 Hahn 分解。

证明　设 $X=\{x_1, x_2, \cdots\}$。令　$A=\{x_i: x_i\in X,\ m(\{x_n\})>0\}$，

$B=\{x_i: x_i\in X,\ m(\{x_i\})<0\}$，　$C=\{x_i: x_i\in X,\ m(\{x_i\})=0\}$。

当 $C=\phi$ 时，由 m 的修正单调性或命题 2.4.3 可证，A 是一个正集，B 是

一个负集，并且(A, B)是 X 的一个 Hahn 分解。

当 $C\neq\phi$ 时，

(1)如果对任意至多可数集列$\{x_n\}\subset C$，都有$m\left(\bigcup_n\{x_n\}\right)\leq 0$，则由 m 的修正单调性或命题 2.4.3 可证，$B\cup C$ 是一个负集，A 是一个正集，从而$(A, B\cup C)$是 X 的一个 Hahn 分解。

(2)如果存在至多可数集列$\{x_n\}\subset C$，使$m\left(\bigcup_n\{x_n\}\right)>0$，则由命题 2.4.3 和命题 4.3.1，$A\cup C$ 是一个正集，B 是一个负集，从而$(A\cup C, B)$是 X 的一个 Hahn 分解。

定理 4.4.1 仅证明了特殊可测空间(X 是可数的，Σ是 X 的幂集)的 Hahn 分解定理。对于一般可测空间的 Hahn 分解，需要对集函数附加一些较弱的条件，在这节下面的讨论中，我们假定集函数满足条件：

(i) $-\infty<m(A)\leq+\infty$，$A\in\Re$，

(ii) $A\in\Re$，$|m(A)|<\infty\Rightarrow|m(B)|<\infty$，$B\subset A$，$B\in\Re$。

显然，模糊测度满足上述条件(i)和(ii)。在经典广义测度的讨论中，通常假定条件(i)成立而条件(ii)是其本身固有的性质。

引理 4.4.1 设 m 是$\Re$上的修正单调广义下半连续模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)。如果 $A\in\Re$，$m(A)<0$，则存在负集 $B\in\Re$，使得 $B\subset A$ 且 $m(B)\leq m(A)$。

证明 如果 A 是一个负集，取 $B=A$，引理即得证。如果 A 不是一个负集，则存在 A 的可测子集 E，满足 $m(E)>0$。令 $\delta_1=\sup\{m(E): E\in\Re, E\subset A\}$，并选 $E_1\in\Re$，$E_1\subset A$使满足$m(E_1)\geq\min\left(\frac{1}{2}\delta_1, 1\right)$。显然，$\delta_1>0$，$m(E_1)>0$。

如果 $A-E_1$ 是一个负集，取 $B=A-E_1$。因为 $E_1\subset A$，$m(A)<0$，$m(E_1)>0$，所以由命题 2.4.1 中的(1)，得 $m(B)=m(A-E_1)<0$。又由 m 的修正单调性 c),得 $m(A)=m(E_1\cup B)\geq m(B)$，即引理得证。

如果 $A-E_1$ 不是一个负集，则存在 $A-E_1$ 的可测子集 E，满足 $m(E)>0$。令 $\delta_2=\sup\{m(E): E\in\Re, E\subset A-E_1\}$ 并选 $E_2\in\Re$，$E_2\subset A-E_1$，使满足 $m(E_2)\geq\min\left(\frac{1}{2}\delta_2, 1\right)$。显然，$\delta_2>0$，$m(E_2)>0$。

重复上面过程，必定出现下面两种情形之一：

(1)存在非负整数 n_0 和 $\Re$ 中的有限个不交集 $\phi=E_0, E_1,\cdots,E_{n_0}$，使 $A-\bigcup_{i=0}^{n_0}E_i$ 是一个负集。

(2)对任意正整数 n，$A-\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 不是一个负集。但这时可以证明 $A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 是一个负集。事实上，这时我们可以得到一个实数列 $\{\delta_n\}$ 和一个不交的集列 $\{E_n\}\subset\Re$，它们满足

$$\delta_n=\sup\left\{m(E): E\in\Re,\ E\subset A-\bigcup_{i=0}^{n-1}E_i\right\}>0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots, \tag{4.4.1}$$

$$E_n\subset A-\bigcup_{i=0}^{n-1}E_i,\ m(E_n)\geq\min\left(\tfrac{1}{2}\delta_n,\ 1\right)>0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots。 \tag{4.4.2}$$

由于命题 2.4.3，$m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)\geq\bigvee_{i=n}^{\infty}E_i\geq m(E_n)>0$，$n=1$，$2$，$\cdots$。注意到 $\left|m(A)\right|<\infty$, $\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\subset A$ 以及 m 满足条件(ii)，所以 $\left|m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)\right|<\infty$，$n=1$，$2$，$\cdots$。因为 $\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\downarrow\phi\ (n\to\infty)$，则由 m 的从上连续性 $\lim_{n\to\infty}m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\right)=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}m(E_n)=0$，进一步，由式(4.4.2)得 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$。

最后，设 $E\in\Re$, $E\subset A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则 $E\subset A-\bigcup_{i=0}^{n-1}E_i$，$n=1$，$2$，$\cdots$。由式(4.4.1)得 $m(E)\leq\delta_n$，$n=1$，2，$\cdots$，从而 $m(E)\leq 0$。即 $A-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 是一个负集。

因此，无论情形(1)还是(2)，都有 $B=A-\bigcup_n E_n$ 是一个负集。因为 $\bigcup_n E_n\subset A$, $m(A)<0$, $m\left(\bigcup_n E_n\right)>0$，所以，由命题 2.4.1 的(1)得

$$m\left(A-\bigcup_n E_n\right)=m(B)<0,$$

又由 m 的修正单调性 c)，$m(A)=m\left(\bigcup_n E_n\cup B\right)\geq m(B)$。引理证毕。

引理 4.4.2 设 m 是$(X, \mathfrak{R})$上的修正单调广义模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)。则存在$\mathfrak{R}$中的至多可数不交负集列$\{N_n\}$，使得 $X-\bigcup_n N_n$ 是一个正集。

证明 如果 X 本身就是一个正集，则令 $N_0=\phi$。显然，N_0 是一个负集，并且 $X-N_0$ 是一个正集，即引理成立。如果 X 不是一个正集，则存在 $E\in\mathfrak{R}$，使 $m(E)<0$。令 $\delta_1=\inf\{m(E):\ E\in\mathfrak{R}\}$，并选 $E_1\in\mathfrak{R}$，使满足 $m(E_1)\le\max\left(\frac{1}{2}\delta_1,\ -1\right)$，则 $\delta_1<0,\ m(E_1)<0$。由于引理 4.4.1，存在负集 $N_1\in\mathfrak{R},\ N_1\subset E_1$，使 $m(N_1)\le m(E_1)<0$。

如果 $X-N_1$ 是一个正集，则引理成立。如果 $X-N_1$ 不是一个正集，则存在 $E\in\mathfrak{R},\ E\subset X-N_1$，使 $m(E)<0$。令 $\delta_2=\inf\{m(E):\ E\in\mathfrak{R},\ E\subset X-N_1\}$，并选 $E_2\in\mathfrak{R},\ E_2\subset X-N_1$，使满足 $m(E_2)\le\max\left(\frac{1}{2}\delta_2,\ -1\right)$。则 $\delta_2<0,\ m(E_2)<0$。由于引理 4.4.1，存在负集 $N_2\in\mathfrak{R},\ N_2\subset E_2$，使 $m(N_2)\le m(E_2)<0$。

重复上面过程，必定出现下面两种情形之一：

(1)存在非负整数 n_0 和$\mathfrak{R}$中的有限个不交集 $\phi=N_0,\ N_1,\ \cdots,N_{n_0}$，使 $X-\bigcup_{i=0}^{n_0}N_i$ 是一个正集。

(2)对任意正整数 n，$X-\bigcup_{i=1}^{n}N_i$ 不是一个正集。

如果出现情形(1)，引理已得证。如果出现情形(2)，我们可以证明 $X-\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i$ 是一个正集。事实上，这时我们可以得到一个实数列$\{\delta_n\}$和一个不交的负集列$\{N_n\}\subset\mathfrak{R}$，它们满足

$$\delta_n=\inf\left\{m(E):\ E\in\mathfrak{R},\ E\subset X-\bigcup_{i=0}^{n-1}N_i\right\}<0,\ n=1,\ 2,\ \cdots, \tag{4.4.3}$$

$$N_n\subset X-\bigcup_{i=0}^{n-1}N_i,\quad m(N_n)\le\max\left(\tfrac{1}{2}\delta_n,\ -1\right)<0,\ n=1,\ 2,\ \cdots。 \tag{4.4.4}$$

由于命题 2.4.3，$-\infty<m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}N_i\right)\le\bigwedge_{i=n}^{\infty}m(N_i)\le m(N_n)<0$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。

因为$\bigcup_{i=n}^{\infty} N_i \downarrow \phi \quad (n \to \infty)$，则由 m 的从上连续性$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} N_i\right)=0$，从而

$\lim_{n\to\infty} m(N_n)=0$。进一步，由式(4.4.4)得$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$。

最后，设$E \in \Re$，$E \subset X - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，则$E \subset X - \bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$，$n$=1，2，…。由式(4.4.3)

得 $m(E) \geq \delta_n$，n=1, 2, …，从而 $m(E) \geq 0$，即 $X - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ 是一个正集。引理证毕。

定理 4.4.2　设 m 是(X, Σ)上的修正单调广义模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)。则当下面两个条件之一被满足时，X 关于 m 的 Hahn 分解存在。

(1) X 是可数的；

(2) m 是一致的。

证明　由引理 4.4.2 知，存在Σ中的至多可数不交负集列$\{N_n\}$,使得$X - \bigcup_n N_n$是一个正集。令

$$\Sigma_n = \{H:\ H \in \Sigma,\ H \subset N_n,\ m(H)=0\}, \qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

$$K_n = \bigcup \{H:\ H \in \Sigma_n\}, \qquad n=1,\ 2,\ \cdots。$$

如果对任意集列$\{H_n\}$，$H_n \in \Sigma_n$，n=1，2，…，都有$m\left(\bigcup_n H_n\right) \leq 0$，则由命题 4.2.1 中的(1)，$B = \bigcup_n N_n$是一个负集。令$A = X - \bigcup_n N_n$，则 A 是一个正集，从而(A, B)是 X 的一个 Hahn 分解。

如果存在集列$\{H_n\}$，$H_n \in \Sigma_n$，n=1，2，…，使$m\left(\bigcup_n H_n\right) > 0$，则由命题 4.2.1 中的(1)，$B = \bigcup_n N_n - \bigcup_n K_n$是一个负集。下面在条件(1)、(2)下分别证明

$$A = X - B = \left(X - \bigcup_n N_n\right) \cup \bigcup_n K_n$$

是一个正集。为此，设 $E \in \Sigma$ 且 $EA \in \Sigma$。则 $EA = E\left(X - \bigcup_n N_n\right) \cup E\left(\bigcup_n K_n\right)$。

记 $F=E\left(X-\bigcup_n N_n\right)$。因为 $X-\bigcup_n N_n$ 是一个正集，所以 $m(F)\geq 0$。又因为 $EA\in\Sigma$，$F\in\Sigma$，所以 $EA-F=E\left(X-\bigcup_n N_n\right)=\bigcup_n EK_n\in\Sigma$，进一步，

$$EK_n=\left(\bigcup_n EK_n\right)\bigcap N_n\in\Sigma,\qquad n=1,\ 2,\ \cdots。$$

(1)当 X 是可数集合时，对每个固定的正整数 n，EK_n 也是可数集合。因此，存在至多可数集列 $\{H_{n_i}\}\subset\Sigma_n$，使 $EK_n\subset\bigcup_i H_{n_i}$，从而 $EK_n=\bigcup_i EK_n H_{n_i}$，$n$=1，2，…。使用命题 4.2.2，$m\left(EK_n H_{n_i}\right)=0$，$i$=1，2，…，$n$=1，2，…。

如果 $m(F)>0$，则由命题 2.4.3 得

$$m(EA)=m\left(F\bigcup E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)=m\left(F\bigcup\bigcup_n EK_n\right)=m\left(F\bigcup\bigcup_n\bigcup_i EK_n H_{n_i}\right)>0;$$

如果 $m(F)=0$，注意 $m\left(\bigcup_n H_n\right)>0$，由命题 4.3.1 得

$$m(EA)=m\left(F\bigcup E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)=m\left(F\bigcup\bigcup_n EK_n\right)=m\left(F\bigcup\bigcup_n\bigcup_i EK_n H_{n_i}\right)\geq 0,$$

故 A 是一个正集。

(2)当 m 是一致集函数时，对每个固定的 n，EK_n 是 Σ_n 中若干个集合的并。因为 $m\left(\bigcup_n H_n\right)>0$，则由 m 的一致性得 $m\left(E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)=m\left(\bigcup_n EK_n\right)\geq 0$。

如果 $m(F)>0$，由 m 的修正单调性得 $m(EA)=m\left(F\bigcup E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)>0$；如果 $m(F)=0$，直接由 m 的一致性得

$$m(EA)=m\left(F\bigcup E\left(\bigcup_n K_n\right)\right)=m\left(F\bigcup\bigcup_n EK_n\right)\geq 0。$$

所以 A 是一个正集。定理证毕。

推论 4.4.1 设 m 是(X,Σ)上的零零可加修正单调广义模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)，则存在关于 m 的正集 A 和负集 B，使得

$$A\in\Sigma,\ B\in\Sigma,\ A\cap B=\phi,\ A\cup B=X。$$

证明 因为零零可加下半连续集函数是一致的，故由定理 4.4.2 中的(2)，

推论成立。

由于经典广义测度既是一致的又是零零可加的，所以上面的证明也适用于经典广义测度。但是。这里所用的条件要比经典广义测度的σ-可加性弱。因此，可以认为定理 4.4.2 是对经典测度论中 Hahn 分解定理的改进。

同经典广义测度的 Hahn 分解一样，广义模糊测度的 Hahn 分解一般也是不唯一的。这方面的例子可以从经典测度论[1]中找到，这里不再重复。

§4.5　广义模糊测度的 Jordan 分解

定义 4.5.1　设 m 是(X,Σ)上的广义实值集函数$\left(\text{即}m:\Sigma\to[-\infty,+\infty]\right)$，$m(\phi)=0$，且$(A, B)$是 X 关于 m 的一个 Hahn 分解，即 $A\in\Sigma$是正集，$B\in\Sigma$是负集，$A\cap B=\phi$，$A\cup B=X$。对这个固定的 Hahn 分解定义

$$m^+(E)=m(E\cap A),\quad m^-(E)=-m(E\cap B),\quad (E\in\Sigma) \tag{4.5.1}$$

并称 m^+和 m^- 为 m 关于(A, B)的 Jordan 分解。

命题 4.5.1　设(X,Σ)上的集函数 m^+和 m^-是式(4.5.1)定义的 Jordan 分解，则 m^+和 m^- 都是非负的，并且 $m^+(\phi)=m^-(\phi)=0$，此外

(1)如果 m 是修正单调的，则 m^+和 m^-是单调的；

(2)如果 m 是从上(下)连续的，则 m^+和 m^-是也是从上(下)连续的；

(3)如果 m 是零零可加的，则 m^+和 m^- 也是零零可加的；

(4)如果 m 是零可加的，则 m^+和 m^- 也是零可加的；

(5)如果 m 是上(下)自连续的，则 m^+和 m^- 也是上(下)自连续的。

证明　(2)是显然的，(4)与(3)的证明类似。下面证明(1)，(3)和(5)。为此，设(A, B)是 X 的一个 Hahn 分解。

(1)设 $E\in\Sigma$，$F\in\Sigma$，$E\subset F$。如果 $m^+(E)=0$，则由 m^+的非负性，$m^+(E)\le m^+(F)$，显然成立。如果 $m^+(E)>0$，即 $m(E\cap A)>0$，由 m 的修正单调性 a)

$$\begin{aligned}m^+(F)&=m(F\cap A)=m[(E\cap A)\cup((F-E)\cap A)]\\&\ge m(E\cap A)\vee m((F-E)\cap A)\ge m(E\cap A)=m^+(E),\end{aligned}$$

即 m^+是单调的。m^-的单调性可类似证明。

(3)设 $E\in\Sigma$，$F\in\Sigma$，$E\cap F=\phi$且 $m^+(E)=m^+(F)=0$，即 $m(E\cap A)=m(F\cap A)=0$，由 m 的零零可加性得 $m^+(E\cup F)=m[(E\cup F)\cap A]=m[(E\cap A)\cup(F\cap A)]=0$，即 m^+是零零可加的。类似可证 m^-的零零可加性。

(5)首先设 $E\in\Sigma$，$F_n\in\Sigma$，$E\cap F_n=\phi$，$n=1$，2，…，且 $\lim_{n\to\infty} m^+(F_n)=0$，

即 $\lim_{n\to\infty} m(F_n\cap A)=0$。如果 m 是上自连续的，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} m^+(E\cup F_n) &= \lim_{n\to\infty} m[(E\cup F_n)\cap A]\\ &= \lim_{n\to\infty} m[(E\cap A)\cup(F_n\cap A)] = m(E\cap A) = m^+(E),\end{aligned}$$

即 m^+也是上自连续性的。

然后设 $E\in\Sigma$，$F_n\in\Sigma$，$F_n\subset E$，$n=1$，2，…，且 $\lim_{n\to\infty} m^+(F_n)=0$，即

$\lim_{n\to\infty} m(F_n\cap A)=0$。如果 m 是下自连续的，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} m^+(E-F_n) &= \lim_{n\to\infty} m[(E-F_n)\cap A]\\ &= \lim_{n\to\infty} m[(E\cap A)-(F_n\cap A)] = m(E\cap A) = m^+(E),\end{aligned}$$

即 m^+也是下自连续性的。关于 m^-的证明与 m^+的证明类似。

命题 4.5.2 设 m 是(X, Σ)上的零零可加修正单调广义实值集函数，m_1^+和 m_1^-是 m 关于(A_1, B_1)的 Jordan 分解，m_2^+和 m_2^-是 m 关于(A_2, B_2)的 Jordan 分解。则 $E\in\Sigma$，$m_1^+(E)=0$ 当且仅当 $m_2^+(E)=0$；$m_1^-(E)=0$ 当且仅当 $m_2^-(E)=0$。即 m_1^+和 m_2^+，m_1^-和 m_2^-有相同的零测集。

证明　设 $E\in\Sigma$，$m_1^+(E)=0$，因为 $E\cap A_2\subset E$，则由 m_1^+的非负单调性，得 $m_1^+(E\cap A_2)=0$，即 $m(E\cap A_2\cap A_1)=0$。另一方面，由 $E\cap(A_2-A_1)\subset A_2$ 和 A_2 是正集有 $m(E\cap(A_2-A_1))\geq 0$，又由 $E\cap(A_2-A_1)\subset B_1$ 和 B_1 是负集有 $m(E\cap(A_2-A_1))\leq 0$，从上面两个不等式得 $m(E\cap(A_2-A_1))=0$。使用等式

$$E\cap A_2=[E\cap(A_2-A_1)]\cup(E\cap A_2\cap A_1),$$

和 m 的零零可加性，得 $m_2^+(E)=m(E\cap A_2)=0$。

类似可证，$m_2^+(E)=0\Rightarrow m_1^+(E)=0$；$m_1^-(E)=0\Leftrightarrow m_2^-(E)=0$。

命题 4.5.3 设 m 是(X, Σ)上的零可加广义实值集函数，(A_1, B_1)和(A_2, B_2)是 X 关于 m 的两个 Hahn 分解，则对任意 $E\in\Sigma$，

$$m(E\cap A_1)=m(E\cap A_2),\qquad m(E\cap B_1)=m(E\cap B_2),$$

即如果 m_1^+和 m_1^-是 m 关于(A_1, B_1)的 Jordan 分解，m_2^+和 m_2^-是 m 关于(A_2, B_2)的 Jordan 分解，则对任意 $E\in\Sigma$，

$$m_1^+(E)=m_2^+(E),\qquad m_1^-(E)=m_2^-(E)。$$

证明 由 $E\cap(A_1-A_2)\subset A_1$ 和 A_1 是正集有 $m(E\cap(A_1-A_2))\geq 0$；又由 $E\cap(A_1-A_2)\subset B_2$ 和 B_2 是负集有 $m(E\cap(A_1-A_2))\leq 0$。因此，$m(E\cap(A_1-A_2))=0$。同理可得，$m(E\cap(A_2-A_1))=0$。于是，使用等式

$$E\cap A_1=[E\cap(A_1-A_2)]\cup(E\cap A_1\cap A_2),$$
$$E\cap A_2=[E\cap(A_2-A_1)]\cup(E\cap A_1\cap A_2),$$

和 m 的零可加性，得 $m(E\cap A_1)=m(E\cap A_1\cap A_2)=m(E\cap A_2)$。

类似可证 $m(E\cap B_1)=m(E\cap B_2)$。

命题 4.5.4 设 m 是(X,Σ)上的零零可加修正单调广义实值集函数，m_1^+ 和 m_1^- 是 m 关于(A,B)的 Jordan 分解，则对任意 $E\in\Sigma$，

$$m^+(E)=\sup\{m(F):F\in\Sigma,\ F\subset E\} \tag{4.5.2}$$
$$m^-(E)=\sup\{-m(F):F\in\Sigma,\ F\subset E\}。 \tag{4.5.3}$$

证明 设 $E\in\Sigma$, 则对任意 $F\subset E, F\in\Sigma$, 因为(A,B)是一个 Hahn 分解，故有

$$m(F\cap A)\geq 0,\quad m(F\cap B)\leq 0。$$

当 $m(F\cap A)>0$，$m(F\cap B)<0$ 时，由 m 的修正单调性 c)和 m^+的单调性有

$$m(F\cap B)\leq m(F)=m[(F\cap A)\cup(F\cap B)]\leq m(F\cap A)=m^+(F)\leq m^+(E); \tag{4.5.4}$$

当 $m(F\cap A)\geq 0$，$m(F\cap B)=0$ 时，由 m 的零可加性和 m^+的单调性有

$$m(F\cap B)\leq m(F)=m[(F\cap A)\cup(F\cap B)]=m(F\cap A)=m^+(F)\leq m^+(E); \tag{4.5.5}$$

当 $m(F\cap A)=0$，$m(F\cap B)<0$ 时，由 m 的零可加性和 m^+的单调性有

$$m(F\cap B)=m(F)=m[(F\cap A)\cup(F\cap B)]\leq m(F\cap A)=m^+(F)\leq m^+(E)。 \tag{4.5.6}$$

先注意 (4.5.4)~(4.5.6) 式的右端可得 $m(F)\leq m^+(E)$, $F\in\Sigma$, $F\subset E$, 于是,

$$m^+(E)\geq\sup\{m(F):\quad F\in\Sigma,\quad F\subset E\}。$$

因为 $E\cap A\in\Sigma$ 且 $E\cap A\subset E$，所以相反的不等号显然成立。因此

$$m^+(E)=\sup\{m(F):\quad F\in\Sigma,\quad F\subset E\}。$$

再注意 (4.5.4)~(4.5.6) 式的左端可得 $m(F\cap B)\leq m(F)$ 或 $-m(F\cap B)\geq -m(F)$。

由 m^- 的单调性得 $m^-(E)\geq m^-(F)\geq -m(F)$, $F\in\Sigma$, $F\subset E$。于是，

$$m^-(E)\geq\sup\{-m(F):F\in\Sigma,\ F\subset E\}。$$

因为 $E\cap B\in\Sigma$ 且 $E\cap B\subset E$，所以相反的不等号显然成立。因此

$$m^-(E)=\sup\{-m(F):F\in\Sigma,\ F\subset E\}。$$

下面我们给出广义模糊测度的 Jordan 分解存在的两个充分条件。

定理 4.5.1 设 m 是(X,Σ)上的修正单调广义模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)，则当下面两个条件之一被满足时，m 的 Jordan 分解 m^+ 和 m^- 存在。

(1) X 是可数的；

(2) m 是零零可加的。

并且当条件(1)被满足时，m^+ 和 m^- 是(X, Σ)上的两个模糊测度；当条件(2)被满足时，m^+ 和 m^- 是(X, Σ)上的两个零零可加模糊测度。

证明　由定理 4.4.2 中的(1)知，当 X 是可数时，存在 X 关于 m 的 Hahn 分解(A, B)，并且 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$。于是，由定义 4.5.1，m 的 Jordan 分解 m^+和 m^-存在。当 m 是零零可加时，由推论 4.4.1 可得同样的结论。至于 m^+和 m^-是(X, Σ)上的(零零可加)模糊测度的结论，是命题 4.5.1 的直接结果。

下面的定理是广义模糊测度 Jordan 分解的存在唯一性定理。

定理 4.5.2　设 m 是(X, Σ)上的零可加修正单调广义模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)。则 m 的 Jordan 分解 m^+和 m^-存在，并且对任意 $E\in\Sigma$，

$$m^+(E)=\sup\{m(F):\ F\subset E,\ F\in\Sigma\}=m_i^+(E),$$
$$m^-(E)=\sup\{-m(F): F\subset E,\ F\in\Sigma\}=m_i^-(E),$$

式中 m_i^+ 和 m_i^- 是 m 的上内含变差和下内含变差，即 m^+和 m^- 是两个唯一确定的零可加模糊测度。

证明　因为 m 的零可加性蕴涵 m 的零零可加性，则由定理 4.5.1 中的(2)知，m 的 Jordan 分解 m^+和 m^- 存在，并且由命题 4.5.1 知，它们都是(X, Σ)上的零可加模糊测度。再由命题 4.5.3 或命题 4.5.4 知，m^+和 m^- 不随 X 的 Hahn 分解不同而改变，是由 m_i^+ 和 m_i^- 唯一确定的。

推论 4.5.1　在定理 4.5.2 的条件下，m 的 Jordan 分解 m^+和 m^- 满足

(1) $m^+\geq m\geq m^-$；

(2) 如果存在(X, Σ)上的非负单调集函数 v_1，v_2 使得 $m=v_1-v_2$，则 $v_1\geq m^+$，$v_2\geq m^-$。

证明　(1) 由定理 4.5.2 和命题 3.1.2 中的(7)立即可证。(2)由定理 4.5.2 和定理 3.1.1 立即可证。

推论 4.5.2　在定理 4.5.2 的条件下，m 的上内含变差 m_i^+和下内含变差 m_i^- 还是从上连续的。进一步，如果 m 是上自连续的，则 m_i^+ 和 m_i^- 也是上自连续的。

证明　由定理 4.5.2 及命题 4.5.1 中的(2)和(5)立即可证。

最后，我们对广义下半连续模糊测度来证明经典形式的 Jordan 分解定理。

定理 4.5.3　设 m 是(X, Σ)上的(零零可加或零可加)广义下半连续模糊测度。则 m 是有界链变差的充要条件是 m 可以表示成(X, Σ)上的两个(零零可加或零可加)有限下半连续模糊测度 v_1 和 v_2 之差，即 $m=v_1-v_2$。

证明　如果 m 是有界链变差的，则由定理 3.3.1 中的(2)得 $m=m_c^+-m_c^-$。

令 $v_1=m_c^+$，$v_2=m_c^-$，则由命题 3.3.2 中的(1)和(3)，命题 3.3.4 中的(2)及命题 3.3.5 知，v_1 和 v_2 是(X,Σ)上的两个(零零可加或零可加)有限下半连续模糊测度。

反之，如果存在(X, Σ)上的两个有限下半连续模糊测度 v_1，v_2，使得 $m=v_1-v_2$，则 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，$B\subset A$，由 v_1，v_2 的单调性，有

$$\begin{aligned}|m(A)-m(B)|&=|v_1(A)-v_2(A)-(v_1(B)-v_2(B))|\\&=|v_1(A)-v_1(B)-(v_2(A)-v_2(B))|\le v_1(A)-v_1(B)。\end{aligned}$$

于是，由定理 3.3.3 即得 m 是有界链变差的。

§4.6　广义模糊测度的 Lebesgue 分解

定义 4.6.1　设 m 和 v 是$(X, \mathfrak{R})$上的两个广义实值集函数，满足 $m(\phi)=v(\phi)=0$，$|m|_i$ 和 $|v|_i$ 分别是 m 和 v 的内含变差。

(1)如果 $E\in\mathfrak{R}$，$|v|_i(E)=0$，蕴涵 $m(E)=0$，则称 m 关于 v 是绝对连续的，记作 $m<<v$。

(2)如果存在 $N\in\mathfrak{R}$，使 $|v|_i(N)=0$，且对任意 $E\in\mathfrak{R}$，有 $|m|_i(E-N)=0$，则称 m 关于 v 是奇异的，记作 $m\perp v$。

注意：当 $\mathfrak{R}=\Sigma$ 是 σ-代数时，定义 4.6.1 中的(2)等价于：存在 $N\in\mathfrak{R}$，使 $|v|_i(N)=|m|_i(N^c)=0$。这时可称 m 和 v 是互相奇异的。

命题 4.6.1　设 m 和 v 是$(X, \mathfrak{R})$上的两个广义实值集函数，满足 $m(\phi)=$

$v(\phi)=0$。$|m|_i$，m_i^+和m_i^-分别是 m 的内含变差，上内含变差和下内含变差，$|v|_i$是 v 的内含变差，则下述三个命题等价。

(1) $m<<v$，

(2) $m_i^+<<v$ 且 $m_i^-<<v$，

(3) $|m|_i<<|v|_i$。

证明 (1)⇒(2)。设 $E\in\Re$，$|v|_i(E)=0$。由命题 3.1.1 中的(5)知，对 E 的所有可测子集 F 均有$|v|_i(F)=0$。于是，由假设 $m<<v$ 得，$m(F)=0$ $(E\in\Re, F\subset E)$，从而

$$m_i^+(E)=\sup\{m(F):\ F\in\Re,\ F\subset E\}=0,$$
$$m_i^-(E)=\sup\{-m(F):F\in\Re,\ F\subset E\}=0。$$

即 $m_i^+<<v$ 且 $m_i^-<<v$。

(2)⇒(3)。设 $E\in\Re$，$|v|_i(E)=0$。由假设 $m_i^+<<v$，$m_i^-<<v$，有 $m_i^+(E)=m_i^-(E)=0$，从而，$|m|_i(E)=m_i^+(E)\vee m_i^-(E)=0$，即$|m|_i<<|v|_i$。

(3)⇒(1)。设 $E\in\Re$，$|v|_i(E)=0$。由假设$|m|_i<<|v|_i$有$|m|_i(E)=0$。于是，由命题 3.1.1 中的(5)得，$m(E)=0$，即 $m<<v$。

命题 4.6.2 设 m 和 v 是$(X,\Re)$上的两个广义实值集函数，满足 $m(\phi)=v(\phi)=0$，且 m 是零零可加的。则 $m<<v$ 且 $m\perp v$ 的充要条件是：$m(E)=0$，$\forall E\in\Re$。

证明 充分性显然，下证必要性。

因为 m 关于 v 是奇异的，故存在 $N\in\Re$ 使$|v|_i(N)=0$，且对任意 $E\in\Re$，有$|m|_i(E-N)=0$。则由命题 3.1.1 中的(5)，得 $m(E-N)=0$，而由命题 3.1.1 中的(4)

得$|v|_i(E\cap N)=0$。进一步，因为 m 关于 v 还是绝对连续的，则有 $m(E\cap N)=0$。最后由 m 的零零可加性，得 $m(E)=m[(E\cap N)\cup(E-N)]=0\quad(E\in\Re)$。

引理 4.6.1　如果 $m:\Re\to[-\infty,+\infty]$ 是上自连续的(下自连续的)，则 m 是零可加的，亦是零零可加的。

证明　设 $E\in\Re$，$F\in\Re$，$E\cap F=\phi$ 且 $m(F)=0$。取 $F_n=F$，$n=1$，2，…，则有 $\lim_{n\to\infty}m(F_n)=m(F)=0$。如果 m 是上自连续的，则

$$m(E\cup F)=\lim_{n\to\infty}m(E\cup F_n)=m(E),$$

即 m 是零可加的；如果 m 是下自连续的，则

$$m(E\cup F)=\lim_{n\to\infty}m((E\cup F)-F_n)=m(E),$$

即 m 亦是零可加的。引理的后半部分结论是显然的。

命题 4.6.3　设 m 和 v 是(X,Σ)上的两个修正单调广义模糊测度，并且满足条件(i)和(ii)。如果 m 还是有限和零可加的，v 还是上自连续的，则 $m\ll v$ 的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $E\in\Re$，$|v|_i(E)<\delta$，就有 $|m|_i(E)<\varepsilon$.

证明　充分性是显然的，下证必要性。

由引理 4.6.1 知，v 也是零可加的。于是由定理 4.5.2 和推论 4.5.2 知，$|m|_i$ 和 $|v|_i$ 均是(X,Σ)上的(零可加)模糊测度，并且 $|v|_i$ 是上自连续的。

假定 $m\ll v$ 时结论不成立，则存在某个实数 $\varepsilon_0>0$ 和集列 $\{E_n\}\subset\Sigma$，使

$$|v|_i(E_n)<\frac{1}{n}\ \text{且}\ |m|_i(E_n)>\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots)\tag{4.6.1}$$

由于 $|v|_i$ 是上自连续的，则由文献[55]中的引理 1 知，存在 $\{E_n\}$ 的子集列 $\{E_{n_j}\}$ 使对每个正整数 k 有

$$|v|_i\left(\bigcup_{j=r}^{k}E_{n_j}\right)<\frac{1}{r}\quad(r=1,2,\cdots k)。$$

使用$|v|_i$的从下连续性，得

$$|v|_i\left(\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)=\lim_{k\to\infty}|v|_i\left(\bigcup_{j=r}^{k} E_{n_j}\right)\le\frac{1}{r},$$

使用$|v|_i$的从上连续性，得

$$|v|_i\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)=\lim_{r\to\infty}|v|_i\left(\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)=0。$$

于是由命题 4.6.1 中的(3)得

$$|m|_i\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)=0。\tag{4.6.2}$$

另一方面，由$|m|_i$的从上连续性、单调性以及式(4.6.1)，得

$$|m|_i\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)=\lim_{r\to\infty}|m|_i\left(\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)\ge\overline{\lim_{r\to\infty}}|m|_i\left(E_{n_r}\right)\ge\varepsilon_0$$

但是，这与式(4.6.2)矛盾。故结论成立。

命题 4.6.4 设$m:\Sigma\to[-\infty,+\infty]$是从下连续的，满足$m(\phi)=0$，$v$是$(X,\Sigma)$上的修正单调广义模糊测度，满足条件(i)和(ii)，且是上自连续的，则m关于v是奇异的充要条件是:对任意$\varepsilon>0$, 存在$E\in\Sigma$，使$|v|_i(E)<\varepsilon$，且$|m|_i\left(\overline{E}\right)<\varepsilon$.

证明　必要性显然，下证充分性。

由引理 4.6.1 知，v还是零可加的。进一步，由定理 4.5.1 和推论 4.5.2 知，$|v|_i$是(X,Σ)上的模糊测度，且是上自连续的。又由命题 3.1.1 中的(2)和(4)以及命题 3.1.6 知，$|m|_i$是(X,Σ)上的下半连续模糊测度。

对每个正整数n，存在集合$E_n\in\Sigma$，使

$$|v|_i(E_n)<\frac{1}{n}\quad 且\quad |m|_i\left(\overline{E}_n\right)<\frac{1}{n}。\tag{4.6.3}$$

由命题 4.6.3 的证明过程知，存在集列$\{E_n\}$的子集列$\{E_{n_j}\}$使

$$|v|_i\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{j=r}^{\infty} E_{n_j}\right)=0。$$

令 $N=|m|_t\left(\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{j=r}^{\infty}E_{n_j}\right)=0$，则 $N\in\Sigma$且$|v|_t(N)=0$。由$|m|_t$的从下连续性、单调性以及式(4.6.3)得

$$|m|_t(\overline{N})=|m|_t\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{j=r}^{\infty}\overline{E}_{n_j}\right)=\lim_{r\to\infty}|m|_t\left(\bigcap_{j=r}^{\infty}\overline{E}_{n_j}\right)\le\lim_{r\to\infty}|m|_t\left(\overline{E}_{n_r}\right)\le\lim_{r\to\infty}\frac{1}{n_r}=0。$$

最后由定义 4.6.1 后面的注立即得 $m\perp v$。

对$\Re$上的任意非负单调集函数 m，它的值域的上确界可以被达到，即存在 $E\in\Re$，使 $m(E)=\sup\{m(A):A\in\Re\}$。下面我们来证明这一结论对修正单调广义模糊测度也成立。

引理 4.6.2 设$m:\Re\to(-\infty,+\infty]$是修正单调广义模糊测度，则存在$\Re$中的可测集 E，F，使

$$m(E)=\sup\{m(A):A\in\Re\},\qquad m(F)=\inf\{m(A):A\in\Re\}。$$

证明 我们仅证明 E 的存在性，F 的存在性可类似证明。

若存在 $A\in\Re$ 使 $m(A)=+\infty$，则取 $E=A$，引理得证。以下假定 $m(A)<+\infty$，$\forall A\in\Re$。这时注意到 m 的值域，有$|m(A)|<\infty$，$\forall A\in\Re$。

记 $\beta=\sup\{m(A):A\in\Re\}$。如果 $\beta=0$，则取 $E=\phi$，引理亦得证。如果 $\beta>0$，则对每个正整数 n，存在 $A_n\in\Re$，使

$$m(A_n)>\beta\wedge n-\tfrac{1}{n},$$

其中 $\beta\wedge n=\min\{\beta,n\}$。不失一般性，假定 $\beta\wedge n-\frac{1}{n}>0$。于是我们得到$\Re$中的一个集列$\{A_n\}$，满足 $m(A_n)>0$，$n=1$，2，…。

令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，并对每个正整数 n，构造一个集合族 $\Sigma_n\subset\Re$，如下

$$\Sigma_n=\left\{\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{*}:\ A_i^{*}=A_i\text{ 或 }A_i^{*}=A-A_i,\ 1\le i\le n\right\}。$$

容易看出，每个Σ_n都是集合 A 的一个有限划分，并且 n 越大，划分越细，即当$n'>n$时，Σ_n中的每个集合都是$\Sigma_{n'}$中的若干个集合的并集。

对每个正整数 n，令

$$B_n=\bigcup\{C_i:\ C_i\in\Sigma_n,\ m(C_i)\ge 0\}。$$

容易看出，$B_n \cup B_{n+1}$ 是 B_n 与 Σ_{n+1} 中的一些集合 C_i 的并集，且这些 C_i 满足：$C_i \cap B_n = \phi$，$m(C_i) \geq 0$；类似地，$B_n \cup B_{n+1} \cup B_{n+2}$ 是 $B_n \cup B_{n+1}$ 与 Σ_{n+2} 中的一些集合 C_i 的并集，且这些 C_i 满足：$C_i \cap (B_n \cup B_{n+1}) = \phi$，$m(C_i) \geq 0$。

此外，每个集合 A_n 是 Σ_n 中若干个集合 $\{D_i\}$ 的并集。如果存在 $D_{i0} \in \{D_i\}$，使 $m\{D_{i0}\}<0$，则因为 $m(A_n)>0$，故还存在 $D_{j0} \in \{D_i\}$，使 $m\{D_{j0}\}>0$，于是由 m 的修正单调性得 $m(A_n) \leq m(B_n)$；如果对每个 D_i，都有 $m(D_i) \geq 0$，则 $A_n \subset B_n$，于是由 $m(A_n) > 0$ 和 m 的修正单调性亦得 $m(A_n) \leq m(B_n)$。即对每个正整数 n，总有 $m(A_n) \leq m(B_n)$。

综上所述，对任意正整数 $n' > n$，

$$\beta \wedge n - \tfrac{1}{n} < m(A_n) \leq m(B_n) \leq m(B_n \cup B_{n+1}) \leq \cdots \leq m(B_n \cup B_{n+1} \cup \cdots \cup B_{n'})。$$

令 $n' \to \infty$，由 m 的从下连续性，得

$$\beta \wedge n - \tfrac{1}{n} < m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) \leq \beta。$$

取 $E = \overline{\lim}_{n\to\infty} B_n$，则 $E \in \Re$，且由 m 的从上连续性及上面的不等式，得

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) = \beta。$$

引理证毕。

下面给出有限广义模糊测度的 Lebesgue 分解定理。

定理 4.6.1 设 m 是(X, Σ)上的修正单调有限广义模糊测度，v 是(X, Σ)上的零零可加广义下半连续模糊测度，则存在集合 $N \in \Sigma$，$|v|_i(N)=0$，使如下方式定义的集函数

$$m_c(A) = m(A - N), \quad m_s(A) = m(A \cap N) \quad (A \in \Sigma)$$

是(X, Σ)上的修正单调有限广义模糊测度，并且满足 $m_c \ll v$ 和 $m_s \perp v$。

证明　记$\Re=\{A: A\in\Sigma, |\nu|_i(N)=0\}$。由命题 3.1.1 中的(2)和(4)以及命题 3.1.6 和 3.1.7 知，$|\nu|_i$ 是(X, Σ)上的零零可加下半连续模糊测度。由此易证，$\Re$是Σ的一个σ-子环。由引理 4.6.2 知，存在 $E_1\in\Re$，使

$$m(E_1)=\sup\{m(A): A\in\Re, A\subset X\}。$$

同理，因为集族$\{A: A\in\Re, A\subset X-E_1\}$是$\Re$上的一个$\sigma$-子环，故存在$E_2\in\Re$，使

$$m(E_2)=\sup\{m(A): A\in\Re, A\subset X-E_1\}。$$

归纳地，我们可以得到$\Re$中的一个集列$\{E_n\}$，使

$$m(E_n)=\sup\left\{m(A): A\in\Re, A\subset X-\bigcup_{i=0}^{n-1}E_i\right\},\quad (n=1, 2, \cdots) \tag{4.6.4}$$

其中 $E_0=\phi$。显然，$\{E_n\}$是一个不交集列，并且 $m(E_n)\geq 0$，$n=1, 2, \cdots$。如果仅有有限个 E_n，满足 $m(E_n)>0$，则$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=0$；如果有无限个 E_n，满足 $m(E_n)>0$，则由命题 2.4.3，对任意正整数 n，

$$0\leq m(E_n)\leq\bigvee_{k=n}^{\infty}m(E_k)\leq m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right),$$

因此，及$\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\downarrow\phi\ (n\to\infty)$和 m 的从上连续性仍可得

$$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=0。\tag{4.6.5}$$

类似地，由引理 4.6.2 知，在$\Re$中存在一个不交集列$\{F_n\}$，使

$$m(F_n)=\inf\left\{m(A): A\in\Re, A\subset X-\bigcup_{i=0}^{n-1}F_i\right\},\quad (n=1, 2, \cdots) \tag{4.6.6}$$

其中 $F_0=\phi$，且

$$\lim_{n\to\infty}m(F_n)=0。\tag{4.6.7}$$

令$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，$N=E\cup F$。下面验证这样定义的集合 N 满足定理的要求。为此，首先定义集函数 m_c和 m_s如下：

$$m_c(A)=m(A-N),\quad m_s(A)=m(A\cap N)\quad (A\in\Sigma)。$$

容易验证，m_c和 m_s都是(X, Σ)上的修正单调有限广义模糊测度。其次，因为$N\in\Re$，故$|\nu|_i(N)=0$。另一方面，对任意 $A\in\Sigma$

$$(m_s)_i^+(A-N)=\sup\{m_s(B): B\in\Sigma, B\subset A-N\}$$

$$=\sup\{m(B\cap N): B\in\Sigma,\ B\subset A-N\}=m(\phi)=0\text{。}$$

同理可证 $(m_s)_i^-(A-N)=0$，从而 $|m_s|_i(A-N)=0$，故 $m_s\perp v$。最后，设 $A\in\Sigma$，

$|v|_i(A)=0$，则 $A\in\Re$，于是由 m 的从上连续性以及式(4.6.4)和(4.6.5)，得

$$m_c(A)=m(A-N)=\lim_{n\to\infty}m\left[A-\left(F\cup\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]\le\lim_{n\to\infty}m(E_{n+1})=0\text{。}$$

由式(4.6.6)和(4.6.7)得

$$m_c(A)=m(A-N)=\lim_{n\to\infty}m\left[A-\left(E\cup\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\right]\ge\lim_{n\to\infty}m(F_{n+1})=0\text{。}$$

结合最后两式得 $m_c(A)=0$。故 $m_c<<v$。

下面给出 σ-有限广义模糊测度的 Lebesgue 分解定理。

定理 4.6.2 设 m 是(X,Σ)上的修正单调 σ-有限广义模糊测度，且满足条件(i)和(ii)；v 是(X,Σ)上的零零可加广义下半连续模糊测度，则存在集合 $N\in\Re$，$|v|_i(N)=0$，使如下方式定义的集函数

$$m_c(A)=m(A-N),\quad m_s(A)=m(A\cap N)\quad(A\in\Sigma)$$

是(X,Σ)上的修正单调 σ-有限广义模糊测度，并且满足 $m_c<<v$，$m_s\perp v$。

证明　因为 m 是 σ-有限的，则由定义 2.4.1 中的(16)知，在 Σ 中存在一个集列 $\{X_n\}$，使

$$X_1\subset X_2\subset\cdots,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=X\quad\text{且}\quad|m(X_n)|<\infty,\quad(n=1,\ 2,\cdots)\text{。}$$

对每个正整数 n，令 $\Sigma_n=\{A\cap X_n: A\in\Sigma\}$。则 Σ_n 是关于 X_n 的 σ-代数。这样我们可以对 m 和 v 在(X_n,Σ_n)上的限制使用定理 4.6.1 或其证明过程。

令 $\Re_n=\{A: A\in\Sigma_n,\ |v|_i(A)=0\}$，$n$=1，2，…。对每个正整数 n，在 $\Re_n$ 中存在两个集列 $\{E_{nt}\}$、$\{F_{nt}\}$，以及一个集合 N_n，使

$$m(E_{nt})=\sup\left\{m(A): A\in\Re_n,\ A\subset X_n-\bigcup_{i=0}^{t-1}E_{ni}\right\},\ (t=1,\ 2,\ \cdots),\qquad(4.6.8)$$

$$m(F_{nt})=\inf\left\{m(A): A\in\Re_n,\ A\subset X_n-\bigcup_{i=0}^{t-1}F_{ni}\right\},\quad (t=1,\ 2,\ \cdots), \tag{4.6.9}$$

$$\lim_{t\to\infty}m(E_{nt})=0, \tag{4.6.10}$$

$$\lim_{t\to\infty}m(E_{nt})=0, \tag{4.6.11}$$

$$N_n=\bigcup_{t=1}^{\infty}E_{nt}\cup\bigcup_{t=1}^{\infty}F_{nt},\quad |v|(N_n)=0。$$

令 $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$。我们来验证 N 满足定理结论的要求。为此，首先定义集函数 m_c 和 m_s 如下：

$$m_c(A)=m(A-N),\quad m_s(A)=m(A\cap N)\quad (A\in\Sigma)。$$

容易看出，m_c 和 m_s 都是(X,Σ)上的修正单调σ-有限广义模糊测度。其次，因为 $N_n\in\Re_n$，n=1，2，…，以及$|v|_i$是零零可加的，所以$|v|_i(N)$=0。同定理 4.6.1 的证明，对任意 $A\in\Sigma$，$|m_s|_i(A-N)=0$，即 $m_s\perp v$。最后，设 $A\in\Sigma$，$|v|_i(A)$=0。则由$|v|_i$的非负单调性，对每个正整数 n 有

$$|v|_i\left(A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\right)=0 \tag{4.6.12}$$

又由于 $A-N_1\in\Sigma_1$，$A-(N_1\cup N_2)\in\Sigma_2,\cdots$，$A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\in\Sigma_n$，因此及式(4.6.12)有，$A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\in\Re_n$。从而由 m 的从上连续性以及式(4.6.8)和式(4.6.10)得

$$\begin{aligned}m_c(A)=m(A-N)&=\lim_{k\to\infty}m\left(A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty}m\left(A-\bigcup_{i=1}^{n-1}N_i\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{nk}\cup\bigcup_{j=1}^{t}E_{nj}\right)\le\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty}m(E_{nt+1})=0。\end{aligned}$$

又由式(4.6.9)和式(4.6.11)得

$$m_c(A)=m(A-N)=\lim_{n\to\infty}m\left(A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} m\left(A-\bigcup_{i=1}^{n-1} N_i \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{nj} \cup \bigcup_{k=1}^{t} F_{nk}\right) \ge \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} m\left(F_{nt+1}\right)=0。$$

结合最后两式得 $m_c(A)=0$。故 $m_c<<v$。

下面的定理，从某种意义上说是 Lebesgue 分解的唯一性定理。

定理 4.6.3 设 m 和 v 都是(X,Σ)上的广义实值集函数，m 是零可加的。如果有 N，$N'\in\Sigma$，$|v|_i(N)=|v|_i(N')=0$，

(1)使如下方式定义的零可加集函数

$$m_c(A)=m(A-N) \qquad m'_c(A)=m(A-N') \qquad (A\in\Sigma)$$

均关于 v 是绝对连续的，则 $m_c=m'_c$。

(2)进一步，如下方式定义的集函数

$$m_s(A)=m(A\cap N), \quad m'_s(A)=m(A\cap N') \qquad (A\in\Sigma)$$

均是零可加的和关于 v 是奇异的，并且 $m_s=m'_s$。

证明　m_c，m'_c，m_s 和 m'_s 的零可加性是显然的。

(1)设 $A\in\Sigma$。由 $|v|_i$ 的单调性，$|v|_i(A\cap N')=0$；又由 $m_c<<v$，得 $m_c(A\cap N')=0$。于是使用 m_c 的零可加性得

$$\begin{aligned} m_c(A)&=m_c[(A-N')\cup(A\cap N')]=m_c(A-N') \\ &=m(A-N'-N)=m[A-(N\cup N')]。\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

另一方面，由 $|v|_i$ 的单调性，得 $|v|_i(A\cap N)=0$；又由 $m'_c<<v$，得 $m'_c(A\cap N)=0$。

于是使用 m'_c 的零可加性，得

$$\begin{aligned} m'_c(A)&=m'_c[(A-N)\cup(A\cap N)]=m'_c(A-N) \\ &=m(A-N-N')=m[A-(N\cup N')]。\end{aligned} \tag{4.6.14}$$

结合式(4.6.13)和式(4.6.13)得 $m_c(A)=m'_c(A)$　$(A\in\Sigma)$。

(2)设 $A\in\Sigma$。由于

$$\begin{aligned} & m_s[A\cap(N-N')]=m[A\cap(N-N')\cap N] \\ &=m[A\cap(N-N')]=m[(A\cap N)-N']=m'_c(A\cap N)=0, \end{aligned}$$

则由 m_s 的零可加性，得

$$m_s(A)=m_s(A\cap N)=m_s[(A\cap N\cap N')\cup(A\cap(N-N'))]$$
$$=m_s(A\cap N\cap N')=m(A\cap N\cap N')。\tag{4.6.15}$$

另一方面，由于

$$m_s'[A\cap(N'-N)]=m[A\cap(N'-N)\cap N']$$
$$=m[A\cap(N'-N)]=m[(A\cap N')-N]=m_c(A\cap N')=0,$$

则由 m_s' 的零可加性，得

$$m_s'(A)=m_s'(A\cap N')=m_s'[(A\cap N'\cap N)\cup(A\cap(N'-N))]$$
$$=m_s'(A\cap N'\cap N)=m(A\cap N\cap N')。\tag{4.6.16}$$

结合式(4.6.15)和式(4.6.17)，得 $m_s(A)=m_s'(A)\quad(A\in\Sigma)$。

m_s 和 m_s' 关于 v 是奇异的证明同定理 4.6.1 的证明。

作为定理 4.6.2 的直接推论，我们可以得到 σ-有限模糊测度的 Lebesgue 分解定理。

定理 4.6.4　设 m 是(X,Σ)上的 σ-有限模糊测度，v 是(X,Σ)上的零零可加下半连续模糊测度，则存在集合 $N\in\Sigma$，使得如下方式定义的两个集函数 m_c 和 m_s：

$$m_c(A)=m(A-N)\qquad m_s(A)=m(A\cap N)\qquad(A\in\Sigma)$$

是(X,Σ)上的 σ-有限模糊测度，并且满足 $m_c\ll v$，$m_s\perp v$。

§4.7　广义实值集函数的 Lebesgue 分解

本节提供广义实值集函数的 Lebesgue 分解定理，同时使用另一方法再次得到定理 4.6.1～定理 4.6.3

设 $\Re$ 是 X 的子集构成的一个环，$m:\Re\to[-\infty,+\infty]$ 是一个广义实值集函数，满足 $m(\phi)=0$。记 $N(m)=\{E:E\in\Re,\ 使 m(E\cap A)=0,\ \forall A\in\Re\}$。显然，$E\in N(m)$ 当且仅当对任意 $A\in\Re$，$A\subset E$ 有 $m(A)=0$，即 $E\in N(m)$。

命题 4.7.1

(1)如果$\Re$是一个环，m 是$(X, \Re)$上的零零可加广义实值集函数，满足 $m(\phi)=0$，则 $N(m)$是$\Re$ 的一个子环。

(2)如果$\Re$是一个σ-环，m 是$(X, \Re)$上的零零可加广义下半连续模糊测度，则 $N(m)$是$\Re$ 的一个σ-子环。

证明　$\phi \in N(m)$是显然。

(1)设 E_1，$E_2 \in N(m)$。由于 $E_1-E_2 \subset E_1$，则 $E_1-E_2 \in N(m)$。即 $N(m)$关于差运算封闭。又设 $A \in \Re$。由$m(E_1 \cap A)=m((E_2-E_1)\cap A)=0$，以及 m 的零零可加性得$m[(E_1 \cup E_2)\cap A]=m[(E_1 \cap A)\cup(E_2-E_1)\cap A]=0$，即 $N(m)$关于并运算封闭，故 $N(m)$是$\Re$ 的一个子环。

(2)设集列$\{E_n\} \subset N(m)$，$A \in \Re$。则由(1)及 m 的从下连续性，得

$$m\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\cap A\right]=\lim_{n\to\infty} m\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\cap A\right]=0,$$

即 $N(m)$关于可数并封闭，故由(1)，$N(m)$是$\Re$的一个σ-子环。

定义 4.7.1　设$\Re$是一个环，$\mathrm{M} \subset \Re$。如果 $\mathrm{M}-\{\phi\}$中的任意不交集合族都是至多可数的，则称 M 满足可数链条件，简称 M 满足(CCC)。集函数 $m:\Re \to [-\infty, +\infty]$称为满足$(CCC)$，如果$\Re-N(m)$ 满足(CCC)。

引理 4.7.1　设$\Re$是一个σ-环，m 是$(X, \Re)$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，且是穷竭的，则 m 满足(CCC)。

证明　设$\{E_i\}_{i\in I}$是$\Re-N(m)$中的任意不交集合族，对每个正整数 n，记

$$I_n=\left\{i:\ i \in I \text{ 且存在} A \in \Re \text{ 使} \left|(E_i \cap A)\right| > \tfrac{1}{n}\right\}。$$

由 m 的穷竭性知，I_n是有限集，且 $I=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$，故 I 至多可数。因此 m 满足(CCC).

定义 4.7.2　设 m 和 v 是$(X, \Re)$上的两个广义实值集函数，$m(\phi)=v(\phi)=0$。如果$N(v) \subset N(m)$，则称 m 是 v 连续的；如果存在$N \in N(v)$使对$\Re$中任意 A 有$(A-N) \in N(m)$，则称 m 是 v 奇异的。

引理 4.7.2　设$\mathcal{I} \subset \Re$关于可数并封闭，并且对$E \in \mathcal{I}$, $A \subset E$, $A \in \Re$，亦有$A \in \mathcal{I}$，即 $\mathcal{I}$ 是完备的。如果$\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$，使$\mathcal{I}-\mathcal{L}$满足$(CCC)$，则存在$N \in \mathcal{I}$使$\mathcal{I}=\{E: E \in \Re,\ \ E-N \in \mathcal{L}\}$。

证明　设 $\mathcal{H}$是$\mathcal{I}-\mathcal{L}$中的最大不交集合族。令$N=\bigcup_{E\in\mathcal{H}} E$，则由 $\mathcal{I}$关于

可数并封闭，有$N\in\mathcal{J}$。又对每个$E\in\mathcal{J}$，由$\mathcal{J}$的完备性有$E-N\in\mathcal{J}$，即

$$\mathcal{J}\subset\{E:E\in\mathfrak{R},\quad E-N\in\mathcal{J}\}。$$

因为$E-N=E-E\cap N$，所以相反的包含式显然成立。故

$$\mathcal{J}=\{E:E\in\mathfrak{R},\quad E-N\in\mathcal{J}\}。$$

另一方面，显然有$\{E:E\in\mathfrak{R},\quad E-N\in\mathcal{L}\}\subset\{E:E\in\mathfrak{R},\quad E-N\in\mathcal{J}\}$。下面证明相反的包含关系成立。假定相反的包含不成立，则存在$E_0\in\mathfrak{R}$，使$\phi\neq E_0-N\in\mathcal{J}-\mathcal{L}$，则$\mathcal{H}\cup\{E_0-N\}$是$\mathcal{J}-\mathcal{L}$中的又一不交集合族。但是，这与$\mathcal{H}$最大性矛盾，故$\mathcal{J}=\{E:E\in\mathfrak{R},\quad E-N\in\mathcal{J}\}=\{E:E\in\mathfrak{R},\quad E-N\in\mathcal{L}\}$。

定理 4.7.1 设$\mathfrak{R}$是σ-环，m是$(X,\mathfrak{R})$上的广义实值集函数，$m(\phi)=0$，v是$(X,\mathfrak{R})$上的零零可加广义下半连续模糊测度。如果$N(v)-N(m)$满足(CCC)，则存在集合$N\in N(v)$使如下方式定义的集函数

$$m_1(A)=m(A-N),\quad m_2(A)=m(A\cap N)\quad(A\in\mathfrak{R})\tag{4.7.1}$$

m_1是v连续的，m_2是v奇异的。

证明 由命题 4.7.1 的(2)知，$N(v)$是$\mathfrak{R}$的一个σ-子环，并且它还是完备的。又由于

$$N(v)-(N(v)\cap N(m))=N(v)-N(m)$$

满足(CCC)，则由引理 4.7.2 知，存在$N\in N(v)$使

$$N(v)=\{E:E\in\mathfrak{R},\ E-N\in N(v)\cap N(m)\}。\tag{4.7.2}$$

下面证明这样的N满足定理的要求。首先，按式(4.7.1)定义集函数m_1和m_2。其次，验证m_1是v连续的。事实上

$$\begin{aligned}N(m_1)&=\{E:E\in\mathfrak{R},\ m_1(E\cap A)=0,\ \forall A\in\mathfrak{R}\}\\&=\{E:E\in\mathfrak{R},\ m[(E\cap A)-N]=0,\ \forall A\in\mathfrak{R}\}\\&=\{E:E\in\mathfrak{R},\ m[(E-N)\cap A]=0,\ \forall A\in\mathfrak{R}\}\\&=\{E:E\in\mathfrak{R},\ E-N\in N(m)\}。\end{aligned}$$

注意式(4.7.2)和上式立即得到$N(v)\subset N(m_1)$，即m_1是v连续的。

最后，验证m_2是v奇异的。事实上，对$\mathfrak{R}$中的每个E都有

$$m_2[(E-N)\cap A]=m[(E-N)\cap A\cap N]=m(\phi)=0\qquad\forall A\in\mathfrak{R},$$

即$E-N\in N(m_2)$，于是由定义 4.7.2，m_2是v奇异的。

定理 4.7.2 设m是$(X,\mathfrak{R})$上的修正单调有限广义模糊测度，v是$(X,\mathfrak{R})$

上的零零可加广义下半连续模糊测度，则存在集合$N\in N(v)$，使如下方式定义的两个集函数

$$m_1(A)=m(A-N),\quad m_2(A)=m(A\cap N)\qquad (A\in\Re)$$

是$(X,\Re)$上的修正单调有限广义模糊测度，并且m_1是v连续的，m_2是v奇异的。

证明 由命题 2.4.7 知，m是穷竭的，再由引理 4.7.1 知，m或$\Re-N(m)$满足(CCC)，从而$N(v)-N(m)$亦满足(CCC)。最后由定理 4.7.1，定理成立。

注意：实际上，我们有$N(v)=\{E:\ E\in\Re,\ |v|_i(E)=0\}$，式中$|v|_i$是$v$的内含变差

定理 4.7.3 设m是(X,Σ)上的修正单调σ-有限广义模糊测度，v是(X,Σ)上的零零可加广义下半连续模糊测度，则存在集合$N\in N(v)$使如下方式定义的集函数

$$m_1(A)=m(A-N),\quad m_2(A)=m(A\cap N)\qquad (A\in\Sigma)$$

是(X,Σ)上的修正单调σ-有限广义模糊测度，并且m_1是v连续的，m_2是v奇异的。

证明 由于m是σ-有限的，则由定义 2.4.1 中的(16)知，在Σ中存在集列$\{X_n\}$，使

$$X_1\subset X_2\subset\cdots,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=X,\quad 且\left|m(X_n)\right|<\infty,\ (n=1,\ 2,\ \cdots)。$$

对每个$n\ge 1$，令$\Sigma_n=\{A\cap X_n:\ A\in\Sigma\}$，则$\Sigma_n$是关于$X_n$的$\sigma$-代数，也是$\Sigma$的子$\sigma$-代数。这样我们可以对$m$和$v$在$(X_n,\Sigma_n)$上的限制使用定理 4.7.2，且对$n\geq1$可以得到$N_n\in N_n(v)$，以及如下方式定义的集函数

$$m_{1n}(A)=m(A-N_n),\quad m_{2n}(A)=m(A\cap N_n)\qquad (A\in\Sigma_n)$$

m_{1n}是v连续的，m_{2n}是v奇异的。

现令$N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$，则$N$满足定理的要求。事实上，

首先，由于$N_n\in N_n(v)$，n=1，2，…以及v是零零可加广义下半连续模糊测度，对任意$A\in\Sigma$ (令$N_0=\phi$)有

$$v(N\cap A)=v\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n\right)\cap A\right)=v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(N_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}N_i\right)\cap A\right)\right)=0,$$

即 $N\in N(v)$。令 $m_1(A)=m(A-N)$，$m_2(A)=m(A\cap N)$　$(A\in\Sigma)$，则易证 m_1 和 m_2 是(X,Σ)上的修正单调 σ-有限广义模糊测度。

其次，设 $A\in N(v)$。由于 $A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\in\Sigma_n$，以及 $v\left(A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\right)=0$，$n=1,2,\cdots$，则有 $A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\in N_n(v)$。进一步，由 m_{1n} 是 v 连续的，有 $A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\in N_n(m_{1n})$。于是，对任意 $E\in\Sigma$，由 m 的从上连续性，得

$$\begin{aligned}m_1(A\cap E)&=m(A\cap E-N)=\lim_{n\to\infty}m\left(A\cap E-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}m\left(\left(A-\bigcup_{i=1}^{n}N_i\right)\cap(E\cap X_n)\right)=0,\end{aligned}$$

即 $N(v)\subset N(m_1)$。

最后，m_2 是 v 奇异的证明同定理 4.7.1 的证明。

定理 4.7.4　设 m 和 v 是$(X,\Re)$上的广义实值集函数，m 是零可加的，如果 A，$B\in N(v)$

(1)使如下方式定义的零可加集函数

$$m_1(E)=m(E-A),\quad m_1'(E)=m(E-B)\qquad(E\in\Re)$$

均是 v 连续的，则 $m_1=m_1'$。

(2)进一步，如下方式定义的集函数

$$m_2(E)=m(E\cap A),\quad m_2'(E)=m(E\cap B)\qquad(E\in\Re)$$

均是零可加的和 v 奇异的，并且 $m_2=m_2'$。

证明　m_1，m_1'，m_2 和 m_2' 的零可加性是显然的。此外，由于 m_1 和 m_1' 都是 v 连续的，则有 $N(v)\subset N(m_1)$ 和 $N(v)\subset N(m_1')$。

(1)设 $E\in\Re$。由于 $B\in N(v)\subset N(m_1)$，则有 $m_1(E\cap B)=0$，于是由 m_1 的零可加性得

$$m_1(E)=m_1[(E-B)\cup(E\cap B)]=m_1(E-B)=m(E-B-A)=m[E-(A\cup B)]。\tag{4.7.3}$$

另一方面，由于 $A\in N(v)\subset N(m_1')$，则有 $m_1'(E\cap A)=0$。于是，由 m_1' 的零可加性得

$$m_1'(E)=m_1'[(E-A)\cup(E\cap A)]=m_1'(E-A)=m(E-A-B)=m[E-(A\cup B)]。\tag{4.7.4}$$

结合式(4.7.3)和式(4.7.4)，得 $m_1(E)=m_1'(E)$　$(E\in\Re)$。

(2)设 $E\in\Re$。由于

$$m_2[E\cap(A-B)]=m[E\cap(A-B)\cap A]=m[E\cap(A-B)]$$
$$=m[(E\cap A)-B]=m_1'(E\cap A)=0,$$

则由 m_2 的零可加性得

$$m_2(E)=m_2(E\cap A)=m_2[(E\cap A\cap B)\cup(E\cap(A-B))]$$
$$=m_2(E\cap A\cap B)=m(E\cap A\cap B)。\qquad(4.7.5)$$

另一方面，由于

$$m_2'[E\cap(B-A)]=m[E\cap(B-A)\cap B]=m[E\cap(B-A)]$$
$$=m[(E\cap B)-A]=m_1(E\cap B)=0,$$

则由 m_2' 的零可加性，得

$$m_2'(E)=m_2'(E\cap B)=m_2'[(E\cap B\cap A)\cup(E\cap(B-A))]$$
$$=m_2'(E\cap A\cap B)=m(E\cap A\cap B)。\qquad(4.7.5)$$

结合式(4.7.5)和式(4.7.6)得 $m_2(E)=m_2'(E)\quad(E\in\Re)$。

m_2 和 m_2' 是 v 奇异的证明同定理 4.7.1 的证明。

第五章　泛积分

众所周知，测度与积分理论是随着生产实践和数学理论的实际需要逐步发展起来的，目前它已被广泛地应用于决策论、模式识别、聚类分析、图象和语言处理、专家系统、概率统计、现代控制和通讯等领域。Riemann 积分[168]与 Lebesgue 积分[3]建立比较早，它们都是基于普通加法和乘法$(+,\ \cdot)$的某种组合。1974 年，日本学者 Sugeno 为了对复杂工程问题进行主观评价引进了模糊积分的概念，这种积分是基于逻辑加和逻辑乘$(\vee,\ \wedge)$的某种组合[33]。1981 年，我国学者赵汝怀给出了基于逻辑加和普通乘法$(\vee,\ \cdot)$的(N)模糊积分[100]。1984 年，Weber 使用 t-余模算子$\perp$，定义了$\perp$可分测度，并借助$\perp$的可加生成元 g 定义了 Archimedean t-余模在两种情形下的积分[93]。1985 年，杨庆季首先提出了泛积分的概念，它是建立在可换保序半环$(\bar{R}_+,\ \oplus,\ \odot)$的某种组合基础上的[102,103]。1987 年和随后的 1988 年，Murofushi[97]和 Ichihashi[98]等日本学者几乎同时地定义了称为伪加和伪乘的算子，并在各自算子的基础上建立了相应的积分。从算子定义的条件来看，杨庆季，Murofushi 和 Ichihashi 定义加算子的条件基本相同，乘算子唯 Murofushi 的条件弱。

从上述几种积分的定义中不难看出，我们只需根据不同的要求适当选择加算子和乘算子，按照某种规则(法则)进行组合，就可以得到有关的积分。于是，受泛函分析的启发，把各种积分的定义统一起来考虑，研究各种积分的共性就成为一种很自然的想法了。

本章的主要目的是：抽象出上述几种算子的共同性质，在统一规则(法则)下定义积分，从而将上述几种积分定义统一在一种形式下。

为此，我们在第一节中讨论泛加与泛乘算子，它们是构成泛积分的基本代数结构；在第二节中给出了泛积分的定义与基本性质；第三节研究泛可加集函数的泛积分；第四节讨论非负下连续泛线性泛函的表示；第五节介绍泛积分的几种特殊情形；第六节讨论λ-可加模糊测度与 K 积分。

必须指出，我们这里只讨论了几种积分的共同性质，对于各种积分的特殊性质未加讨论。有关内容可从后面的参考文献[11，38，75，93，97，98，100～103，168]中得到。此外，随着理论与实践的不断发展，新的要求需要新的积分。因此我们不能保证新积分使用的新算子仍然具有我们这里提供的泛加与泛乘算子的性质以及定义积分使用的规则一样。总之，我们这里定义

的泛积分不可能包含所有类型的积分。它只包括了目前几种常用的积分类型。这些类型的积分对于我们第六章的应用已经是足够了。

§5.1 泛加与泛乘

本节首先讨论泛积分中所使用的两种基本运算泛加与泛乘，然后介绍几种常用的泛加与泛乘算子，它们是构成相应积分的基础。

本节始终假设 a，b，c，d，a_i，b_i 和 $a_t \in \overline{R}_+$，i=1，2，…，$t\in T$，T 是任意给定的指标集。

定义 5.1.1 设 $\oplus$ 是 $\overline{R}_+$ 上的一个二元运算。称 $\oplus$ 是 $\overline{R}_+$ 上的一个泛加，如果它满足下列要求：

(PA1) $a\oplus b=b\oplus a$；

(PA2) $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$；

(PA3) $a\le b$ 且 $c\le d \Rightarrow a\oplus c\le b\oplus d$；

(PA4) $a+0=a$；

(PA5)如果 $\lim_n a_n=a$，$\lim_n b_n=b$，则 $\lim_n(a_n\oplus b_n)=a\oplus b$。

因为结合律(PA2)成立，所以我们可以用符号 $\oplus_{i=1}^n a_i$ 表示 $a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$；进一步，我们还可以定义 $\oplus_{t\in T} a_t=\sup_{T'\subset T}\oplus_{t\in T'} a_t$，其中 T' 是 T 的有限子集，特别地，$\oplus_{i=1}^\infty a_i=\lim_{n\to\infty}\oplus_{i=1}^n a_i$。

定义 5.1.2 设 $\otimes$ 是 $\overline{R}_+$ 上的一个二元运算。称 $\otimes$ 是 $\overline{R}_+$ 上(关于泛加 $\oplus$)的一个泛乘，如果 $\otimes$ 满足：

(PM1) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$；

(PM2) $a\le b \Rightarrow a\otimes c\le b\otimes c$；

(PM3) $a\otimes b=0 \Leftrightarrow a=0$ 或 $b=0$；

(PM4)存在左单位元，即有 $e\in[0,\infty]$，使得 $e\otimes a=a$，$\forall a\in\overline{R}_+$；

(PM5)如果 $\lim_n a_n=a$ $(0<a<+\infty)$，且 $\lim_n b_n=b$，则 $\lim_n(a_n\otimes b_n)=a\otimes b$，此外，$\lim_{a\to+\infty} a\otimes b=(+\infty)\otimes b$。

由(PM3)立即可得：$a\otimes 0=0$ 和 $0\otimes a=0$ $\left(\forall a\in \overline{R}_+\right)$，或者 $a\neq 0$，$b\neq 0 \Leftrightarrow a\otimes b \neq 0$。

我们将 $\overline{R}_+$ 上的泛加 $\oplus$ 连同关于它的泛乘 $\otimes$ 一起记作($\overline{R}_+$, $\oplus$, $\otimes$)，并简称为($\overline{R}_+$ 的一个)泛结构。

下面我们介绍几种常用的泛结构。

例 5.1.1 $\overline{R}_+$ 上的普通加法 $+$ 和普通乘法 $\cdot$ 组成一个泛结构，记作($\overline{R}_+$，$+$，$\cdot$)，其左单位元(也是右单位元，从而是单位元)是 1。

例 5.1.2 $\overline{R}_+$ 上的逻辑加 $\vee$ 和逻辑乘 $\wedge$ 组成一个泛结构，记作($\overline{R}_+$，$\vee$，$\wedge$)，其左单位元(也是单位元)是 ∞。

例 5.1.3 $\overline{R}_+$ 上的逻辑加 $\vee$ 和普通乘法 $\cdot$ 组成一个泛结构，记作($\overline{R}_+$，$\vee$，$\cdot$)，其左单位元(也是单位元)是 1。

例 5.1.4 文献[97]中定义的伪加 $\hat{+}$ 和伪乘 $\hat{\cdot}$ 组成一个泛结构，记作($\overline{R}_+$，$\hat{+}$，$\hat{\cdot}$)。

例 5.1.5 给定 $\lambda>0$，在 $\overline{R}_+$ 上定义二元运算 $\overset{\lambda}{+}$ 和 $\overset{\lambda}{\cdot}$ 如下：

$$a\overset{\lambda}{+}b=\begin{cases} a+b+\lambda ab & a,\ b\in[0,\ \infty) \\ \infty & \text{否则}, \end{cases}$$

$$a\overset{\lambda}{\cdot}b=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda a)^{\log_{1+\lambda}(1+\lambda b)}-1\right], & a,\ b\in[0,\ \infty) \\ 0 & a=0,\ \ b=\infty \ \text{或}\ a=\infty,\ \ b=0 \\ \infty & a=\infty,\ \ b\in(0,\ \infty] \ \text{或}\ a\in(0,\ \infty],\ \ b=\infty。 \end{cases}$$

容易验证，$\overset{\lambda}{+}$ 有下列性质：

(1) $a\overset{\lambda}{+}0=0\overset{\lambda}{+}a=a$；

(2) $a\overset{\lambda}{+}b=b\overset{\lambda}{+}a$；

(3) $(a\overset{\lambda}{+}b)\overset{\lambda}{+}c=a\overset{\lambda}{+}(b\overset{\lambda}{+}c)$；

(4) $a\leq b,\ c\leq d \Rightarrow a\overset{\lambda}{+}c\leq b\overset{\lambda}{+}d$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \overset{\lambda}{+} b_n\right) = a \overset{\lambda}{+} b$；

(6)记 $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\lambda} a_i = a_1 \overset{\lambda}{+} a_2 \overset{\lambda}{+} \cdots \overset{\lambda}{+} a_n$， $\sum\limits_{i=1}^{\infty}{}^{\lambda} a_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\lambda} a_i$， 则

$$\sum_{i=1}^{\infty}{}^{\lambda} a_i = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i}^{\infty}(1 + \lambda a_i) - 1\right]。$$

由此可见，$\overset{\lambda}{+}$是 $\overline{R}_+$ 上的泛加，实际上，它还是伪加[97，98]。

对于二元运算 $\overset{\lambda}{\cdot}$ 我们可以验证它具有以下性质：

(1) $a \overset{\lambda}{\cdot} b = b \overset{\lambda}{\cdot} a$;

(2) $(a \overset{\lambda}{\cdot} b) \overset{\lambda}{\cdot} c = a \overset{\lambda}{\cdot} (b \overset{\lambda}{\cdot} c)$;

(3) $a \overset{\lambda}{\cdot} (b \overset{\lambda}{+} c) = (a \overset{\lambda}{\cdot} b) \overset{\lambda}{+} (a \overset{\lambda}{\cdot} c)$;

(4) $a \le b,\ c \le d \Rightarrow a \overset{\lambda}{\cdot} c \le b \overset{\lambda}{\cdot} d$;

(5) $a \overset{\lambda}{\cdot} b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $b = 0$;

(6) $0 \overset{\lambda}{\cdot} a = a \overset{\lambda}{\cdot} 0 = 0$， $1 \overset{\lambda}{\cdot} b = b \overset{\lambda}{\cdot} 1 = b$;

(7) $a_n \to a$ 且 $b_n \to b \Rightarrow a_n \overset{\lambda}{\cdot} b_n \to a \overset{\lambda}{\cdot} b$。此外， $\lim\limits_{a\to\infty} a \overset{\lambda}{\cdot} b = \infty \overset{\lambda}{\cdot} b$；

(8) $0 \le a_n$， $b_n < \infty$， $n = 1, 2, \cdots$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}^{\lambda}\left(a_n \overset{\lambda}{\cdot} b_n\right) = \dfrac{1}{\lambda}\left[\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \lambda a_n)^{\log_{1+\lambda}(1+\lambda b_n)} - 1\right]$。

由此可见，$\overset{\lambda}{\cdot}$是 $\overline{R}_+$ 上的泛乘。实际上，它还是一种伪乘[98]。因此，($\overline{R}_+$，$\overset{\lambda}{+}$，$\overset{\lambda}{\cdot}$)是 $\overline{R}_+$ 上的一个泛结构，其单位元是 1。

在本章以后的讨论中，($\overline{R}_+$, ⊕, ⊗)总表示 $\overline{R}_+$ 的某一泛结构，(X, Σ)总表示一个可测空间，m 是Σ上的一个非负集函数，即 $m\colon \Sigma \to \overline{R}_+$。为了叙述方便我们称六元总体($X$, Σ, m, $\overline{R}_+$, ⊕, ⊗)为泛空间。

§5.2 泛积分的定义与基本性质

广义实值函数 $f: x \to \overline{R}$ 称为Σ可测函数(简称可测函数)，如果对任意 $a \in R$，有 $\{x: x \in X, f(x) \geq a\} \in \Sigma$。记可测函数全体为 F，又记非负可测函数全体为 F_+。此外，我们用 $f=0$ 表示 $f(x)=0$，$\forall x \in X$；用 $f \leq g$ 表示 $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$；用 $f_n \uparrow$ 表示 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$，$\forall x \in X$；用 $f_n \downarrow$ 表示 $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots$，$\forall x \in X$。用 $f_n \uparrow f$ 表示 $\{f_n\}$ 递增收敛于 f，记号 $f_n \downarrow f$，$f_n \to f$ 可作类似理解。

X 的一个划分 $T=\{E_i\}$ (即 $E_i \cap E_j = \phi$，$i \neq j$ 且 $\bigcup_i E_i = X$) 称为Σ可测的，如果对每个 i，$E_i \in \Sigma$。我们将所有 X 的有限可测划分组成的集合记作 $\hat{P}$。

定义 5.2.1 设$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, \oplus, \otimes)$为一泛空间，$f \in F_+$，$A \in \Sigma$，则 f 在 A 上(关于 m)的泛积分定义为

$$(p)\int_A f dm = \sup_{T \in \hat{P}} \left\{ \bigoplus_{E \in T} \left[\left(\inf_{x \in E} f(x) \right) \otimes m(A \cap E) \right] \right\}。$$

当 $A=X$ 时，我们将 $(p)\int_X f dm$ 简记为 $(p)\int f dm$。

定义 5.2.2 设$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, \oplus, \otimes)$为一泛空间，$A \subset X$。在 X 上定义一个(广义)实值函数 χ_A 如下：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} e, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

其中 e 是泛结构$(\overline{R}_+, \oplus, \otimes)$的左单位元，并称 χ_A 为 A 的泛特征函数。本章中，除特别说明外，χ_A 均指泛特征函数。

命题 5.2.1 设 $f \in F_+$，$A \in \Sigma$，则

$$(p)\int_A f dm = (p)\int \chi_A \otimes f dm。$$

证明 对任意 $E \in \Sigma$，当 $E \subset A$ 时，$\inf_{x \in E} \chi_A(x) \otimes f(x) = \inf_{x \in E} f(x)$；当 $E \not\subset A$ 时，

$\inf_{x \in E} \chi_A(x) \otimes f(x) = 0 \leq \inf_{x \in E} f(x)$。于是，对任意划分 $T \in \hat{P}$，有

$$\oplus_{E\in T}\left[\left(\inf_{x\in E}\chi_A(x)\otimes f(x)\right)\otimes m(A\cap E)\right]\le\oplus_{E\in T}\left[\left(\inf_{x\in E}f(x)\right)\otimes m(A\cap E)\right],$$

因此，

$$(p)\int\chi_A\otimes fdm\le(p)\int_A fdm。\tag{5.2.1}$$

另一方面，对任意 X 的有限可测划分 $T=\{E_i\}$，可以得到一个有限可测划分 $T'=\{E_i\cap A,\ E_i\cap\overline{A}\}$，对每个 $E\in T$，有

$$\left(\inf_{x\in E}f(x)\right)\otimes m(A\cap E)\le\left(\inf_{x\in E\cap A}f(x)\right)\otimes m(A\cap E)=\left(\inf_{x\in E\cap A}\chi_A(x)\otimes f(x)\right)\otimes m(A\cap E).$$

又因为 $E\cap A\subset T'$，所以，有

$$\oplus_{E\in T}\left[\left(\inf_{x\in E}f(x)\right)\otimes m(A\cap E)\right]\le\oplus_{E'\in T'}\left(\inf_{x\in E'}\chi_A(x)\otimes f(x)\right)\otimes m(A\cap E')\le(p)\int\chi_A\otimes fdm。$$

进一步，由 T 的任意性，得 $(p)\int_A fdm\le(p)\int\chi_A\otimes fdm$。结合式(5.2.1)，最后得到 $(p)\int_A fdm=(p)\int\chi_A\otimes fdm$。

作为定义 5.2.1 和命题 5.2.1 的直接推论，我们可以得到泛积分的一些基本性质。

命题 5.2.2 设 f，$g\in F_+$，A、$B\in\Sigma$，$a\in R_+$，则有

(1)若在 A 上 $f\le g$，则 $(p)\int_A fdm\le(p)\int_A gdm$。

(2)若 $A\subset B$，则 $(p)\int_A fdm\le(p)\int_B fdm$。

(3) $(p)\int_A adm\ge a\otimes m(A)$，　$(p)\int\chi_A dm\ge m(A)$。

(4)若 m 是单调的，且在 A 上 f=0，$a.e.$，则 $(p)\int_A fdm=0$。

(5)若 m 是单调的，且 $m(A)$=0，则 $(p)\int_A fdm=0$。

命题 5.2.3 若 m 是从下连续的，且 $(p)\int_A fdm=0$，则在 A 上 f=0，$a.e.$。

证明 记 $B=A\cap\{x:f(x)\ne0\}$，$B_n=A\cap\{x:f(x)>\frac{1}{n}\}$。显然，$B_n\uparrow B$。

于是，由 m 的从下连续性有 $\lim_{n\to\infty} m(B_n)=m(B)$。另一方面，由命题 5.2.2 中的(2)、(1)和(3)，对任意正整数 n 有

$$0=(p)\int_A f dm \ge (p)\int_{B_n} f dm \ge (p)\int_{B_n} \tfrac{1}{n} dm \ge \tfrac{1}{n}\otimes m(B_n)\ge 0,$$

即 $\frac{1}{n}\otimes m(B_n)=0$。又由(PM3)，得 $m(B_n)=0$，从而 $m(B)=0$，即在 A 上 $f=0$，*a.e.*。

结合命题 5.2.2 中的(4)和命题 5.2.3 立即得到：如果 m 是单调的和从下连续的，则 $(p)\int_A f dm=0 \Leftrightarrow f=0$，*a.e.*。

定理 5.2.1　设 m 是从下连续的，f，$f_n\in F_+$，n=1，2，…。如果 $f_n\uparrow f$，则 $(p)\int f dm=\lim\limits_{n\to\infty}(p)\int f_n dm$。

证明　设 $T=\{E_i\}$是 X 的任意有限可测划分。对任意实数 c (0< c <1)，令 $B_n=\{x: f_n(x)>cf(x)\}$，n=1，2，…，则显然有 $B_n\uparrow X$，并且对每个 n≥1，

$$\bigoplus_{E\in T}\left\{\left[\inf_{x\in E}\left(\chi_{B_n}(x)\otimes cf(x)\right)\right]\otimes m(B_n\cap E)\right\}$$

$$\le \bigoplus_{E\in T}\left\{\left[\inf_{x\in E}\left(\chi_{B_n}(x)\otimes cf_n(x)\right)\right]\otimes m(B_n\cap E)\right\}$$

$$\le (p)\int_{B_n}\left(\chi_{B_n}\otimes f_n\right)dm \le (p)\int\left(\chi_{B_n}\otimes f_n\right)dm \le (p)\int f_n dm \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)。$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{E\in T}\left\{\left[\inf_{x\in E}\left(\chi_{B_n}(x)\otimes cf(x)\right)\right]\otimes m(B_n\cap E)\right\}\le \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{B_n}(x)=\chi_X(x)=e$ 和 m 的从下连续性以及(PA5)和(PM5)，有

$$\bigoplus_{E\in T}\left\{\left[\inf_{x\in E}\left(e\otimes cf(x)\right)\right]\otimes m(X\cap E)\right\}\le \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm,$$

$$\bigoplus_{E\in T}\left[\left(\inf_{x\in E} cf(x)\right)\otimes m(E)\right]\le \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。$$

又由 0< c <1 的任意性，令 $c\to 1$，得

$$\underset{E\in T}{\oplus}\left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\otimes m(E)\right]\le \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。$$

再由 T 的任意性，得

$$(p)\int fdm \le \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。\tag{5.2.2}$$

另一方面，由于 $f_n\le f$，n=1，2，则由命题 5.2.2 中的(1)得

$$(p)\int f_n dm \le (p)\int fdm，n=1，2，\cdots。$$

进一步，$\lim\limits_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \le (p)\int fdm$。结合式(5.2.2)，得 $(p)\int fdm = \lim\limits_{n\to\infty}(p)\int f_n dm$。

下面的推论是关于泛积分的 Fatou 定理。

推论 5.2.1 设 $f_n \in F_+$，n=1，2，…，则

$$(p)\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dm \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。$$

证明 由于 $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\ge n} f_k(x)$，则由定理 5.2.1，得

$$\begin{aligned}(p)\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dm &= \lim_{n\to\infty}(p)\int \inf_{k\ge n} f_k dm\\ &\le \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}(p)\int f_k dm = \underline{\lim}_{n\to\infty}(p)\int f_k dm。\end{aligned}$$

定理 5.2.2 设 f，$f_n \in F_+$，n=1，2，…，且 $f_n \downarrow f$。如果对任意实数 c>1，都存在 $N(c)$，使当 n> $N(c)$时 $f_n(x)\le cf(x)\quad (x\in X)$，则

$$(p)\int fdm = \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。$$

证明 因为 $f_n \downarrow f$，故由命题 5.2.2 中的(1)得

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \ge (p)\int fdm。\tag{5.2.3}$$

下面证明相反的不等式也成立，为此，任取 c>1，由定理条件知，必存在 $N(c)$，使当 n>$N(c)$时，$f_n(x)\le cf(x)\quad (x\in X)$。再次使用命题 5.2.2 中的(1)

得

$$(p)\int f_n dm \le (p)\int cf\, dm \quad (n>N)。$$

进一步，得

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n\, dm \le (p)\int cf\, dm。$$

由于上式对任意 $c>1$ 成立，故当 $c\to 1$ 时得

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \le (p)\int f dm。$$

于是，由式(5.2.3)等式成立。

定理 5.2.3 设 f，$f_n \in F_+$，$n=1$，2，…，且 $f_n \to f$。如果对任意实数 $c>1$，都存在 $N(c)$，使当 $n> N(c)$时，$f_n(x)\le cf(x) \quad (x\in X)$，则

$$(p)\int fdm = \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm。$$

证明 令 $g_n(x)=\sup_{k\ge n} f_k(x) \quad (x\in X)$，$n=1$，2，…。则 $f_n\le g_n$，$n=1$，2，…，并且 $g_n \downarrow f$。使用推论 5.2.1 和定理 5.2.2，得

$$(p)\int fdm = (p)\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dm \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(p)\int f_n dm$$

$$\le \overline{\lim}_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \le \lim_{n\to\infty}(p)\int g_n dm = (p)\int fdm。$$

因此，$(p)\int fdm = \lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm$。

§ 5.3 泛可加集函数的泛积分

定义 5.3.1 设$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, \oplus, \otimes)$是一泛空间，$\Sigma$上的集函数 m 称为泛可加的，如果对任意 A，$B\in\Sigma$，$A\cap B=\phi$，有

$$m(A\cup B)=m(A)\oplus m(B);$$

m 称为σ-泛可加的，如果对Σ中任意两两不交集列$\{A_n\}$都有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} m(A_n)。$$

非负σ-泛可加集函数 m，若满足 $m(\phi)=0$，则称 m 是泛可加测度。

显然，经典可加集函数关于普通加法(+)是泛可加的；而经典测度则关于普通加法是泛可加测度。

命题 5.3.1 设 m 是泛可加的，则

(1) m 是单调的；

(2) m 是零零可加的；

(3) m 是零可加的；

(4) m 是上自连续的；

(5) m 是σ-泛可加的当且仅当 m 是从下连续的。

证明 (1)～(4)由泛可加集函数的定义直接可证。(5)的证明与经典测度的证明类似。

命题 5.3.2 设Σ上的集函数 m 是泛可加的，$f \in F_+$，记

$$v(A) = (p)\int_A f dm, \quad A \in \Sigma,$$

则 v 是Σ上的泛可加集函数。进一步，如果 m 是σ-泛可加的，则 v 也是σ-泛可加的。

证明 由泛积分的定义及 m 的泛可加性，容易证明，对任意 A，$B \in \Sigma$，$A \cap B = \phi$ 有

$$(p)\int_{A \cup B} f dm = (p)\int_A f dm \oplus (p)\int_B f dm,$$

即 $v(A \cup B) = v(A) \oplus v(B)$，故 v 是泛可加的。

当 m 是σ-泛可加时，对Σ中的任意两两不交集列$\{A_i\}$有

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \otimes f \uparrow \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \otimes f \quad (n \to \infty)。$$

使用定理 5.2.1，得

$$v\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = (p)\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f dm = (p)\int \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \otimes f dm = \lim_{n\to\infty}(p)\int \chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \otimes f dm$$

$$= \lim_{n\to\infty}(p)\int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f dm = \lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n} v(A_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} v(A_i)。$$

由命题 5.2.2 中的(5)，我们还可以得到，如果 m 是泛可加测度，则 v 也

是泛可加测度。

命题 5.3.3　设 m 是泛可加的，f，$g \in F_+$，$A \in \Sigma$。如果在 A 上 $f = g$ $a.e.$，则 $(p)\int_A f dm = (p)\int_A g dm$。

证明　记 $A_1 = \{x : f(x) = g(x)\} \cap A$，$A_2 = \{x : f(x) \neq g(x)\} \cap A$，则由假设 $m(A_2)$=0，使用命题 5.3.2 和命题 5.2.7 中的(5)，有

$$(p)\int_A f dm = (p)\int_{A_1} f dm(p) \oplus (p)\int_{A_2} f dm = (p)\int_{A_1} f dm$$
$$= (p)\int_{A_1} g dm = (p)\int_{A_1} g dm(p) \oplus (p)\int_{A_2} g dm = (p)\int_A g dm。$$

命题 5.3.4　设非负可测简单函数 s 表示为

$$s(x) = \begin{cases} a_1 & x \in A_1 \\ a_2 & x \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & x \in A_n \end{cases}$$

或简记为

$$s(x) = a_i,\quad x \in A_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $A_i \in \Sigma$，$0 \le a_i < +\infty$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$A_i \cap A_j = \phi$，$i \neq j$，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$。如果 m 是泛可加的，则

(1) $(p)\int s dm = \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i \otimes m(A_i)]$，

特别地，对 $B \in \Sigma$，$a \ge 0$ 有

(2) $(p)\int_B s dm = \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i \otimes m(B \cap A_i)]$，

(3) $(p)\int_B a dm = a \otimes m(B)$，

(4) $(p)\int \chi_B dm = m(B)$。

证明　(1)对 X 的任意有限可测划分 $T = \{E_j\}_{1 \le j \le k}$，由 m 的泛可加性有

$$\mathop{\oplus}_{j=1}^{k}\left[\left(\inf_{x\in E_j} s(x)\right)\otimes m\left(E_j\right)\right]=\mathop{\oplus}_{j=1}^{k}\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\left[\left(\inf_{x\in E_j} s(x)\right)\otimes m\left(E_j\cap A_i\right)\right]$$

$$\le\mathop{\oplus}_{j=1}^{k}\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\left[\left(\inf_{x\in E_j\cap A_i} s(x)\right)\otimes m\left(E_j\cap A_i\right)\right]=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\mathop{\oplus}_{j=1}^{k}\left[\left(\inf_{x\in E_j\cap A_i} s(x)\right)\otimes m\left(E_j\cap A_i\right)\right]$$

$$=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\mathop{\oplus}_{j=1}^{k}\left[a_i\otimes m\left(E_j\cap A_i\right)\right]=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\left[a_i\otimes m\left(A_i\right)\right]。$$

由于当取划分 $T=\{A_i\}$ 时，上边的不等式成为等式，故

$$(p)\int sdm=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\left[a_i\otimes m\left(A_i\right)\right]。$$

(2)注意到 $\chi_B\otimes s$ 仍是非负可测简单函数，且其表示为

$$\chi_B(x)\otimes s(x)=\begin{cases}a_i, & x\in B\cap A_i,\ i=1,2,\cdots,n,\\ 0 & x\in\overline{B}。\end{cases}$$

于是，由命题 5.2.1 和前面的(1)立即得

$$(p)\int_B sdm=(p)\int\chi_B\otimes sdm=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\left[a_i\otimes m\left(B\cap A_i\right)\right]。$$

(3)是(1)中 $s(x)=\begin{cases}a & x\in B\\ 0 & x\in\overline{B}\end{cases}$ 时的特殊情况。

(4)是(3)当 $a=e$ 时的特殊情形。

设 m 是泛可加的，对每一非负可测简单函数

$$s(x)=a_i,\ x\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

及 $B\in\Sigma$，记 $P(s\mid B)=\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}\left[a_i\otimes m\left(B\cap A_i\right)\right]$。当 $B=X$ 时，我们将 $P(s\mid X)$ 简记为 $P(s)$。因为 m 是泛可加的，所以 $P(s\mid B)$ 是唯一确定的，即 $P(s\mid B)$ 与简单函数 s 的表示无关。

下面给出泛积分的另一等价定义。

定理 5.3.1 设 m 是 σ-泛可加的，$f\in F_+$，$\{s_n\}$ 是一非负可测简单函数列，$s_n\uparrow f$，$A\in\Sigma$，则

$$(p)\int_A fdm=\lim_{n\to\infty}P\left(s_n\mid A\right)。$$

证明　由定理 5.2.1 和命题 5.3.4，立即得

$$(p)\int_A f dm = \lim_{n\to\infty}(p)\int_A s_n dm = \lim_{n\to\infty} P(s_n \mid A)。$$

定理 5.3.2　设 m 是σ-泛可加的，f，$f_n \in F_+$，n=1，2，…，a≥0，那么

(1) $(p)\int(f_1 \oplus f_2)dm = (p)\int f_1 dm \oplus (p)\int f_2 dm$。

(2) $(p)\int\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} f_n\right)dm = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}(p)\int f_n dm$。

(3)如果泛乘满足条件 $a \le b \Rightarrow c\otimes a \le c\otimes b$，$(a,\ b,\ c\in \overline{R}_+)$，则

$$(p)\int a\otimes f\, dm = a\otimes(p)\int f dm。$$

证明　(1)取非负可测简单函数列$\{s_n^1\}$和$\{s_n^2\}$，使得$\{s_n^1\}\uparrow f_1$，$\{s_n^2\}\uparrow f_2$。

于是，$s_n^1 \oplus s_n^2 \uparrow f_1 \oplus f_2$。对 n≥1，设 s_n^1 和 s_n^2 可表示为

$$s_n^1(x) = a_i^n,\ x\in A_i^n,\ i=1,\ 2,\cdots,\ k_n,$$
$$s_n^2(x) = b_j^n,\ x\in B_j^n,\ j=1,\ 2,\cdots,\ l_n。$$

为了表示 $s_n^1 \oplus s_n^2$，我们将 s_n^1 和 s_n^2 改写为

$$s_n^1(x) = a_i^n,\ x\in A_i^n\cap B_j^n,\ i=1,\ 2,\cdots,\ k_n, j=1,\ 2,\cdots,\ l_n,$$
$$s_n^2(x) = b_j^n,\ x\in A_i^n\cap B_j^n,\ i=1,\ 2,\cdots,\ k_n, j=1,\ 2,\cdots,\ l_n。$$

于是 $s_n^1 \oplus s_n^2$ 可表示为

$$s_n^1(x)\oplus s_n^2(x) = a_i^n \oplus b_j^n,\ x\in A_i^n\cap B_j^n,\ i=1,\ 2,\cdots,\ k_n,\ j=1,\ 2,\cdots,\ l_n。$$

因此，

$$P(s_n^1 \oplus s_n^2) = \overset{k_n}{\underset{i=1}{\oplus}}\overset{l_n}{\underset{j=1}{\oplus}}\left[(a_i^n \oplus b_j^n)\otimes m(A_i^n\cap B_j^n)\right]$$

$$= \overset{k_n}{\underset{i=1}{\oplus}}\overset{l_n}{\underset{j=1}{\oplus}}\left[a_i^n \otimes m(A_i^n\cap B_j^n)\right] \oplus \overset{k_n}{\underset{i=1}{\oplus}}\overset{l_n}{\underset{j=1}{\oplus}}\left[b_j^n \otimes m(A_i^n\cap B_j^n)\right]$$

$$=\bigoplus_{i=1}^{k_n}\left[a_i^n \otimes m\left(A_i^n\right)\right] \oplus \bigoplus_{j=1}^{l_n}\left[b_j^n \otimes m\left(B_j^n\right)\right]=P\left(s_n^1\right) \oplus P\left(s_n^2\right)。$$

再由定理 5.3.1 得

$$(p)\int\left(f_1 \oplus f_2\right) dm=\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(s_n^1 \oplus s_n^2\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(s_n^1\right) \oplus \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(s_n^2\right)=(p)\int f_1 dm \oplus(p)\int f_2 dm 。$$

(2)因为 $\bigoplus_{i=1}^{n} f_i \uparrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} f_i \quad(n \rightarrow \infty)$，所以由定理 5.2.1 和刚证明的(1)，得

$$(p)\int\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} f_2\right) dm=\lim_{n \rightarrow \infty}(p)\int\left(\bigoplus_{i=1}^{n} f_i\right) dm=\lim_{n \rightarrow \infty} \bigoplus_{i=1}^{n}(p)\int f_i dm=\bigoplus_{i=1}^{\infty}(p)\int f_i dm 。$$

(3)取非负可测简单函数列$\{s_n\}$，使得 $s_n \uparrow f$ 。于是 $a \otimes s_n \uparrow a \otimes f$ 。对 $n\geq 1$，设 s_n 可表示为：$s_n(x)=a_i^n$，$i \in A_i^n$，$i=1$，$2, \cdots$，k_n。于是，$a \otimes s_n$ 可表示为：$a \otimes s_n=a \otimes a_i^n$，$i \in A_i^n$，$i=1$，$2, \cdots$，$k_n$。因此，由定理 5.3.1 得

$$(p)\int a \otimes f dm=\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \otimes s_n\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} \bigoplus_{i=1}^{k_n}\left[\left(a \otimes a_i^n\right) \otimes m\left(A_i^n\right)\right]=a \otimes \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(s_n\right)=a \otimes(p)\int f dm 。$$

定理 5.3.3 设 m 是Σ上的有限泛可加测度且是从上连续的，f, $f_n \in F_+$，n=1，2，…，且$\{f_n\}$一致有界。如果 $f_n \downarrow f$，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty}(p)\int f_n dm=(p)\int f dm 。$$

证明 设 $M>0$ 使 $f_n(x) \leq M$, $x \in X$, n=1，2，…。对任意 $c>1$，令 $E_n=\{x: f_n(x)<c f(x)\}$, n=1，2，…。显然，$E_n \uparrow X$，且 $X-E_n=\overline{E}_n \downarrow \phi$。由命题 5.3.2，命题 5.2.2 中的(1)及命题 5.3.4 中的(3)得

$$(p)\int f_n dm=(p)\int_{E_n} f_n dm \oplus(p)\int_{\overline{E}_n} f_n dm \leq(p)\int_{E_n} c f dm \oplus(p)\int_{\overline{E}_n} M dm$$

$$\leq(p)\int c f\, dm \oplus\left(M \otimes m\left(\overline{E}_n\right)\right)。$$

再由 m 的(零)上连续性得

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \leq (p)\int cfdm。$$

因为上式对任意 $c>1$ 成立，所以当 $c\to 1$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \leq (p)\int fdm$。另一方面，由命题 5.2.2 中的(1)直接可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(p)\int f_n dm \geq (p)\int fdm$。综合最后两个不等式立即得到我们需要的结论 $\lim\limits_{n\to\infty}(p)\int f_n dm = (p)\int fdm$。

定理 5.3.4 设 m 是Σ上的有限泛可加测度且是从上连续的，f, $f_n \in F_+$，n=1，2，…，且$\{f_n\}$一致有界。如果 $f_n \to f$，则

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm = (p)\int fdm。$$

证明 与定理 5.2.3 证明类似。

定义 5.3.2 设 $A\in\Sigma$，f, $f_n \in F$，n=1，2，…。如果对任意$\varepsilon>0$，均有

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0$$

则称$\{f_n\}$在 A 上依 m 收敛于 f，记作 $f_n \xrightarrow[A]{m} f$。当 A=X 时，也将 $f_n \xrightarrow[A]{m} f$ 简记作 $f_n \xrightarrow{m} f$。

定理 5.3.5 设 m 是Σ上的有限泛可加测度且是从上连续的，f, $f_n \in F_+$，n=1，2，…，且$\{f_n\}$一致有界。如果 $f_n \xrightarrow{m} f$，则

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm = (p)\int fdm。$$

证明 由命题 5.3.1 知，在定理条件下 m 是上自连续的，再由文献[38]中的 Riesz 定理(定理 6.10)知，$\{f_n\}$的任意子列$\{f_{n_i}\}$都含有子列$\{f_{n_{i_j}}\}$使得

$f_{n_{i_j}} \to f$，$(j\to\infty)$。进一步，使用定理 5.3.4 得 $\lim_{j\to\infty}(p)\int f_{n_{i_j}}dm=(p)\int fdm$。换句话说，数列$\{(p)\int f_n dm\}$的任意子列都含有收敛子列，从而必有

$$\lim_{n\to\infty}(p)\int f_n dm=(p)\int fdm\text{。}$$

§5.4 非负下连续泛线性泛函的表示

本节讨论非负下连续泛线性泛函与泛可加测度之间的对应关系。

定义 5.4.1 设$(\overline{R}_+, \oplus, \otimes)$是一泛结构，$\Gamma$是定义在 F_+上的广义实值函数。如果Γ满足下列条件：

(1)非负性：$\Gamma(f)\geq 0$，$f\in F_+$；

(2)泛线性：$\Gamma[(a\otimes f)\oplus(b\otimes g)]=(a\otimes\Gamma(f))\oplus(b\otimes\Gamma(g))$，其中 f，$g\in F_+$，a，$b\geq 0$；

(3)从下连续性：$\Gamma(f_n)\uparrow\Gamma(f)$，$f$，$f_n\in F_+$，$n=1, 2,\cdots$，$f_n\uparrow f$，则称$\Gamma$为 F_+上的非负下连续泛线性泛函。

由定义容易看出，$\Gamma(0)=0$。

下面我们给出非负下连续泛线性泛函的表示定理。

定理 5.4.1 设(X, Σ)是一可测空间，$(\overline{R}_+, \oplus, \otimes)$是一泛结构。如果 e 是单位元，Γ是 F_+上的非负下连续泛线性泛函，则必存在Σ上的泛可加测度 m，使得

$$\Gamma(f)=(p)\int fdm \quad \forall f\in F_+\text{。}$$

反之，如果 m 是Σ上的泛可加测度，则在 F_+上定义的变换

$$M: f\to(p)\int fdm \quad (f\in F_+),$$

当泛乘满足条件$a\leq b\Rightarrow c\otimes a\leq c\otimes b \ \left(a,b,c\in\overline{R}_+\right)$时，是 F_+上的非负下连续泛线性泛函。

证明 设Γ是 F_+上的非负下连续泛线性泛函。令$m(A)=\Gamma(\chi_A)$，$A\in\Sigma$，则容易证明 m 是Σ上的泛可加测度。下面证明，对任意$f\in F_+$，有

$$\Gamma(f)=(p)\int fdm 。$$

我们分两种情形讨论：

(i) $f(x)=\chi_A(x)$，$A\in\Sigma$。这时 $\Gamma(f)=\Gamma(\chi_A)=m(A)=(p)\int\chi_A dm=(p)\int fdm$。

(ii) f 为一般非负可测函数。这时取非负可测简单函数列 $\{s_n\}$，它们可表示为

$$s_n(x)=a_i^n,\quad x\in A_i^n,\quad i=1,\ 2,\cdots,\ k_n\quad (n\geq 1),\quad 或\quad s_n(x)=\bigoplus_{i=1}^{k_n}\left[a_i^n\otimes\chi_{A_i^n}(x)\right],$$

使 $s_n\uparrow f$。于是由Γ的从下连续性

$$\Gamma(f)=\lim_{n\to\infty}\Gamma(s_n)=\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{k_n}\left[a_i^n\otimes\Gamma(\chi_{A_i^n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{k_n}\left[a_i^n\otimes m(A_i^n)\right]=\lim_{n\to\infty}P(s_n)=(p)\int fdm 。$$

这样我们证明了定理的前一个结论。定理的第二个结论是定理 5.3.2 中的(1)和(3)以及定理 5.2.1 的直接推论。

§5.5　泛积分的几种特殊情形

本节证明 Riemann 积分[168]，Lebesgue 积分[11]，Sugeno 模糊积分[33]，赵汝怀定义的(N)模糊积分[100]，Sugeno 和 Murofushi 定义的(关于伪加测度的)(MS)积分[97]，以及 Kruse 定义的(关于 λ－可加模糊测度的)模糊积分[75]等都可作为泛积分的特例。只不过是所使用的算子$\oplus$和$\otimes$不同罢了。当然，有些情形还需要所使用的集函数与算子$\oplus$相匹配，即满足所谓的泛可加性。

首先，我们讨论泛积分与最常用的 Riemann 积分(简称 R 积分)的关系。R 积分的定义参见文献[168]。

定理 5.5.1　取泛空间为$\left(R_+^n,\ \mathcal{B}_+,\ m,\ \overline{R}_+,\ +,\cdot\right)$，即

$$R_+^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n):a_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\},\quad \mathcal{B}_+=\{R_+^n\text{上的全体 Borel 集}\},$$

m 是 R_+^n的 Lebesgue 测度或 n 维 Lebesgue 测度，+和 · 是普通加法和普通乘法。设 $A\in\mathcal{B}_+$，f是 A 上的 R－可积函数，则

$$(p)\int_A f dm = (R)\int_A f dm,$$

即这时的泛积分与 Riemann 积分一致。

证明　设 $m(A)>0$。对任意 $\varepsilon>0$ 及 R_+^n 的任意有限可测划分 $T=\{E_i\}_{1\le i\le n}$，

存在 $\xi_i \in E_i$，i=1，2，…，n，使得

$$f(\xi_i)-\inf_{x\in E_i} f(x) \le \frac{\varepsilon}{m(A)}, \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot m(A\cap E_i)-\varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in E_i} f(x)\cdot m(A\cap E_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot m(A\cap E_i)。$$

由 R 积分和泛积分的定义立即可得

$$(R)\int_A f dm-\varepsilon \le (p)\int_A f dm \le (R)\int_A f dm。$$

令 $\varepsilon\to 0^+$，得 $(p)\int_A f dm = (R)\int_A f dm$。

对于 $m(A)$=0 的情形，由于 m 是单调的，上述等式显然成立。

其次，我们讨论泛积分与 Lebesgue 积分(简称 L 积分)的关系。关于经典测度空间上可测函数的 L 积分的定义，在一般的测度论教科书中都可以找到，如文献[5，6，11~15]，这里不再赘述。

定理 5.5.2　取泛空间为$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, +, \cdot)$，即+和·是普通的加法和乘法，$m$ 是Σ上的经典测度，则对任意 $f\in F_+$ 和 $A\in\Sigma$，有

$$(p)\int_A f dm = (L)\int_A f dm,$$

即这时的泛积分与 Lebesgue 积分一致。

证明　由文献[15]知，当 $\oplus=+$, $\otimes=\cdot$ 时，A 上的非负可测简单函数的 L 积分恰好就是定理 5.3.1 中的 $P(s|A)$。因此泛积分与 L 积分一致。

接下来我们讨论泛积分与 Sugeno 模糊积分(简称 S 积分)的关系。在有关文献中 S 积分的定义形式不尽相同，我们采用如下形式的定义。

定义 5.5.1[38]设(X, Σ, m)是模糊测度空间(即 m 是Σ上的模糊测度)，$f\in F_+$，$A\in\Sigma$，则 f 在 A 上关于模糊测度 m 的 Sugeno 模糊积分定义为

$$(S)\int_A f dm = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \left[\alpha \wedge m(A\cap F_\alpha)\right] \tag{5.5.1}$$

其中 $F_\alpha = \{x : f(x) \geq x\}$。

定理 5.5.3　取泛空间为$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, \vee, \wedge)$，即$\vee$和$\wedge$是逻辑加和逻辑乘，$m$ 是Σ上的模糊测度，则对任意$f \in F_+$和 $A \in \Sigma$，有

$$(p)\int_A f dm = (S)\int_A f dm,$$

即这时的泛积分与 Sugeno 模糊积分一致。

证明　见文献[38]中的定理 8.2 和定理 7.1。

第四，我们讨论泛积分与赵汝怀定义的(N)模糊积分的关系。

定义 5.5.2[100]设(X, Σ, m)是模糊测度空间，$f \in F_+$，$A \in \Sigma$，则f在 A 上关于模糊测度 m 的(N)模糊积分定义为

$$(N)\int_A f dm = \sup_{\alpha \geq 0}\left[\alpha \cdot m\left(A \cap F_\alpha\right)\right],$$

其中 $F_\alpha = \{x : f(x) \geq \alpha\}$。

定理 5.5.4　取泛空间为$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, \vee, \cdot)$，即$\vee$和$\cdot$为逻辑加法和普通乘法，$m$ 是Σ上的模糊测度，则对任意$f \in F_+$和 $A \in \Sigma$，有

$$(p)\int_A f dm = (N)\int_A f dm,$$

即这时的泛积分与(N)模糊积分一致。

证明　让我们先证明下式

$$(N)\int_A f dm = \sup_{E \in \Sigma}\left[\inf_{x \in E} f(x) \cdot m\left(A \cap E\right)\right]。\tag{5.5.2}$$

事实上，一方面，由于f是可测函数，故对任意$\alpha > 0$，$F_\alpha = \{x : f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$；

再注意到$\inf\limits_{x \in F_\alpha} f(x) \geq \alpha$，则有

$$\alpha \cdot m\left(A \cap F_\alpha\right) \leq \inf_{x \in F_\alpha} f(x) \cdot m\left(A \cap F_\alpha\right) \leq \sup_{E \in \Sigma}\left[\inf_{x \in E} f(x) \cdot m\left(A \cap E\right)\right]。$$

因此

$$(N)\int_A f dm = \sup_{\alpha \geq 0}\left[\alpha \cdot m\left(A \cap F_\alpha\right)\right] \leq \sup_{E \in \Sigma}\left[\inf_{x \in E} f(x) \cdot m\left(A \cap E\right)\right]。$$

另一方面，对任意 $E\in\Sigma$，记 $\alpha'=\inf\limits_{x\in E} f(x)$，则 $E\subset F_{\alpha'}$。于是，由 m 的单调性，得

$$\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\le\alpha'\cdot m(A\cap F_{\alpha'})\le\sup_{\alpha\ge0}[\alpha\cdot m(A\cap F_\alpha)]=(N)\int_A f dm。$$

再由 $E\in\Sigma$的任意性，得

$$\sup_{E\in\Sigma}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]\le(N)\int_A f dm。$$

故我们需要的等式得证。

其次，我们证明，当 $\oplus=\vee$，$\otimes=\cdot$ 时

$$(p)\int_A f dm=\sup_{E\in\Sigma}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]。\tag{5.5.3}$$

事实上，对任意 X 的有限可测划分 $T=\{E_i\}\subset\Sigma$，有

$$\bigvee_{E\in T}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]\le\sup_{E\in\Sigma}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right],$$

因此，

$$(p)\int_A fdm=\sup_{T\in\hat{P}}\left\{\bigvee_{E\in T}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]\right\}\le\sup_{E\in\Sigma}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]。$$

而对任意 $E\in\Sigma$，显然，$\{E,\ \overline{E}\}$是 X 的一个有限可测划分，即 $\{E,\overline{E}\}\subset\hat{P}$，从而

$$\begin{aligned}\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)&\le\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]\vee\left[\inf_{x\in\overline{E}} f(x)\cdot m(A\cap\overline{E})\right]\\&\le\sup_{T\in\hat{P}}\left\{\bigvee_{E\in T}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]\right\}=(p)\int_A fdm。\end{aligned}$$

由 $E\in\Sigma$的任意性，得

$$\sup_{E\in\Sigma}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]\le(p)\int_A fdm。$$

故

$$(p)\int_A fdm=\sup_{E\in\Sigma}\left[\inf_{x\in E} f(x)\cdot m(A\cap E)\right]。$$

结合式(5.5.2)和式(5.5.3)，我们立即得到 $(p)\int_A f dm=(N)\int_A f dm$。

最后，我们讨论泛积分与 Sugeno 和 Murofushi 定义的(关于伪可加测度的) MS 积分的关系。

定义 5.5.3　取泛空间为$(X,\Sigma,m,\ \overline{R}_+,\ \hat{+},\ \hat{\cdot})$，其中$\hat{+}$和$\hat{\cdot}$是伪加和伪乘[97]，$m$ 是关于$\hat{+}$的伪可加测度，简称$\hat{+}$测度，即 m 满足：

(1) $m(\phi)=0$。

(2) $A,\ B\in\Sigma,\ A\cap B=\phi\Rightarrow m(A\cup B)=m(A)\hat{+}m(B)$。

(3) $\{A_n\}\subset\Sigma,\ A_n\uparrow A\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)=m(A)$。

设 s 是一个非负可测简单函数，它可表示为

$$s(x)=a_i,\ x\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

其中 $A_i\in\Sigma$，$0\le a_i\le+\infty$，$i=1,\ 2,\cdots,n$，$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=X$，则 s 在 $A\in\Sigma$上(关于$\hat{+}$测度)的 MS 积分定义为

$$(MS)\int_A s\,dm=\sum_{i=1}^{n}{}^{\wedge}\left[a_i\hat{\cdot}m(A_i\cap A)\right]。$$

又设 $f\in F_+$，s_n 是一个非负可测简单函数列，$s_n\uparrow f$，则 f 在 A 上(关于$\hat{+}$测度)的 MS 积分定义为

$$(MS)\int_A f\,dm=\lim_{n\to\infty}(MS)\int_A s_n\,dm\ 。$$

定理 5.5.5　设 $f\in F_+$，$A\in\Sigma$，则

$$(p)\int_A f\,dm=(MS)\int_A f\,dm,\tag{5.5.4}$$

即泛积分与 MS 积分一致。

证明　由于这时的集函数 m 是泛可加测度，并且 $P(s|A)=(MS)\int_A s\,dm$，故由定理 5.3.1，式(5.5.4)成立。

§ 5.6　λ－可加模糊测度与 K 积分

本节讨论泛积分(也是 Ichihashi 等人定义的积分)的一个特殊情形——Kruse 定义的(关于 λ－可加模糊测度的)模糊积分(简称 K 积分)。为此，我们先介绍一种常用的模糊测度即 λ－可加模糊测度，它是由 Sugeno 在文献[33]

中首先提出并应用于复杂工程问题综合评判之中的。后来它的数学理论问题在文献[71~85]中得到了进一步的讨论和发展。

我们采用下面形式的定义。

定义 5.6.1 设(X,Σ)是一可测空间，集函数$m:\Sigma\to\overline{R}_+$，

$$\lambda\in\left(-\frac{1}{\sup m},\ \infty\right)\cup\{0\}\qquad\left(\sup m=\sup_{E\in\Sigma}m(E)\right)。$$

m 称为λ可加的，如果对任意 A，$B\in\Sigma$，$A\cap B=\phi$，有

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)+\lambda m(A)m(B)。\tag{5.6.1}$$

m 称为$\sigma-\lambda$可加的，如果对Σ中的任意不交集列$\{A_n\}$有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left\{\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+\lambda m(A_n)]-1\right\} & \lambda\neq0\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}m(A_n) & \lambda=0。\end{cases}$$

命题 5.6.1 设$\lambda\neq0$。

(1)如果 m 是λ可加的，则 m 是泛可加的；

(2)如果 m 是$\sigma-\lambda$可加的，则 m 是σ-泛可加的，也是泛可加测度。

因此我们也称$\sigma-\lambda$可加集函数 m 为λ-可加测度。

证明 (1)由例 5.1.5 知，对任意 A，$B\in\Sigma$，$A\cap B=\phi$时有

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)+\lambda m(A)m(B)=m(A)\overset{\lambda}{+}m(B),$$

即 m(关于算子$\oplus=\overset{\lambda}{+}$)是泛可加的。

(2)由例 5.1.5 中算子$\overset{\lambda}{+}$的性质(6)得，对Σ中的任意不交集列$\{A_n\}$有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\lambda}m(A_n),$$

即 m(关于算子$\overset{\lambda}{+}$)是σ-泛可加的。此外，由式(5.6.1)易知 $m(\phi)=0$，故 m 是泛可加测度。

显然，$\lambda=0$ 时，m 是经典可加集函数或测度。本节中，除特别说明外均假定$\lambda\neq0$。

命题 5.6.2 λ-可加测度 m 是模糊测度，即 m 具有下列性质：

(1) $m(\phi)=0$；

(2) A，$B\in\Sigma$，$A\subset B\Rightarrow m(A)\le m(B)$；

(3) $\{A_n\}\subset\Sigma$，$A_n\uparrow\Rightarrow m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)$；

(4) $\{A_n\}\subset\Sigma$，$A_n\downarrow$，$m(A_1)<+\infty\Rightarrow m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n)$。

这就是我们称λ-可加测度为λ-可加模糊测度的原因。

证明　(1)已知。(2)和(3)是命题 5.3.1 中(1)和(5)的直接结果。

(4)设$\{A_n\}\subset\Sigma$，$A_n\downarrow$，且$m(A_1)<+\infty$。由于

$$A_1=A_n\cup\left[\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i-A_{i+1})\right],\quad n=2,\ 3,\ \cdots,$$

$$A_1=\lim_{n\to\infty}A_n\cup\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i-A_{i+1})\right],$$

且 $A_1-A_2, A_2-A_3,\cdots$，$A_{n-1}-A_n$，A_n是两两不交的，以及$A_1-A_2, A_2-A_3,\cdots$，$A_{n-1}-A_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$也是两两不交的，我们得

$$m(A_1)=\frac{1}{\lambda}\left\{[1+\lambda m(A_n)]\prod_{i=1}^{n-1}[1+\lambda m(A_i-A_{i+1})]-1\right\}\quad n=2,\ 3,\ \cdots \tag{5.6.2}$$

和

$$m(A_1)=\frac{1}{\lambda}\left\{\left[1+\lambda m\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)\right]\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda m(A_i-A_{i+1})]-1\right\}$$

在式(5.6.2)中令$n\to\infty$，得

$$m(A_1)=\frac{1}{\lambda}\left\{\left[1+\lambda\lim_{n\to\infty}m(A_n)\right]\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda m(A_i-A_{i+1})]-1\right\}。$$

因为$\prod\limits_{i=1}^{\infty}[1+\lambda m(A_i-A_{i+1})]\ne 0$，$\lambda\ne 0$，故由最后两个等式得

$$m\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}m(A_n)。$$

定理 5.6.1　如果 m 是Σ上的λ-可加(模糊)测度$(\lambda\ne 0)$，令

$$m^*(A)=\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(A)],\quad \forall A\in\Sigma, \tag{5.6.3}$$

则 m^*是Σ上的经典测度。反之，如果 m^*是Σ上的经典测度，令$(\lambda\ne 0)$

$$m(A)=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{m^*(A)}-1\right],\quad \forall A\in\Sigma, \tag{5.6.4}$$

则 m^*是Σ上的λ - 可加(模糊)测度。

证明 设$\{A_n\}\subset\Sigma$，$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$。

$$m^*(\phi)=\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(\phi)]=0,$$

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\log_{1+\lambda}\left[1+\lambda m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right]=\log_{1+\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda m(A_n)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(A_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n),$$

即 m^*是Σ上的测度。

反之，

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)}-1\right]=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n)}-1\right]$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda)^{m^*(A_n)}-1\right]=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda m(A_n)]-1\right],$$

即 m 是Σ上的$\sigma-\lambda$可加集函数，从而是λ - 可加(模糊)测度。

下面我们介绍 Kruse 定义的关于λ - 可加模糊测度的模糊积分[75]。

定义 5.6.2 设(X,Σ)是一可测空间，m 是Σ上的λ - 可加模糊测度$(\lambda\neq 0)$，$f\in F_+$，$A\in\Sigma$，则f在 A 上(关于 m)的 K 积分定义为

$$(K)\int_A f dm=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f)dm^*}-1\right], \tag{5.6.5}$$

其中 $m^*=\log_{1+\lambda}(1+\lambda m)$是$\Sigma$上的经典测度，积分 $\int_A\log_{1+\lambda}(1+\lambda f)dm^*$ 是函数 $\log_{1+\lambda}(1+\lambda f)$在 A 上关于测度 m^*的 Lebesgue 积分。

引理 5.6.1 设$(\overline{R}_+,\overset{\lambda}{+},\overset{\lambda}{\cdot})$为例 5.1.5 中定义的泛结构($\lambda>0$)。定义$\overline{R}_+$上的广义实值函数

$$h(x)=\begin{cases}\log_{1+\lambda}(1+\lambda x) & x\in R_+\\ \infty & x=+\infty,\end{cases}$$

则其逆为

$$h^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda x)^{x}-1\right] & x\in R_{+}\\ \infty & x=+\infty\text{。}\end{cases}$$

且对 a_i，$b_i\in R_+$，i=1，2，…，n 有

(1) $h\left[\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\lambda}\left(a_i\overset{\lambda}{\cdot}b_i\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}h(a_i)\cdot h(b_i)$。

(2) $h^{-1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\lambda}\left[h^{-1}(a_i)\overset{\lambda}{\cdot}h^{-1}(b_i)\right]$。

(3) h 是$(\overline{R}_+,\vee)$和$(\overline{R}_+,\wedge)$上的自身同构，即对 $\{a_t\}_{t\in T}\subset\overline{R}_+$，$T$ 是任意指标集，有

$$h(\bigvee_{t\in T}a_t)=\bigvee_{t\in T}h(a_t),\quad h(\bigwedge_{t\in T}a_t)=\bigwedge_{t\in T}h(a_t)\text{。}$$

从而，h^{-1} 也是$(\overline{R}_+,\vee)$和$(\overline{R}_+,\wedge)$上的自身同构，即

$$h^{-1}(\bigvee_{t\in T}a_t)=\bigvee_{t\in T}h^{-1}(a_t),\quad h^{-1}(\bigwedge_{t\in T}a_t)=\bigwedge_{t\in T}h^{-1}(a_t)\text{。}$$

证明　(1)由例 5.1.5 中算子 $\overset{\lambda}{\cdot}$ 的性质(8)直接可证。

(2)由(1)可得

$$h\left\{\sum_{i=1}^{n}{}^{\lambda}\left[h^{-1}(a_i)\overset{\lambda}{\cdot}h^{-1}(b_i)\right]\right\}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\text{，}$$

两端取逆立即得

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{\lambda}\left[h^{-1}(a_i)\overset{\lambda}{\cdot}h^{-1}(b_i)\right]=h^{-1}(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)\text{。}$$

(3)我们只证明第一个等式，其余三个等式可以类似证明。设$\{a_n\}$为$\{a_t\}_{t\in T}$的子数列，使得 $a_n\uparrow\bigvee_{t\in T}a_t$。由 h 的连续性得 $h(\bigvee_{t\in T}a_t)=\lim\limits_{n\to\infty}h(a_n)\le\bigvee_{t\in T}h(a_t)$。

另一方面，因为 $\bigvee_{t\in T}a_t\ge a_t$，$t\in T$，则由 h 的单调递增性得

$$h(\bigvee_{t\in T}a_t)\ge h(a_t),\quad t\in T\text{，}$$

从而

$$h(\vee_{t\in T} a_t) \geq \vee_{t\in T} h(a_t)。$$

故 $h(\vee_{t\in T} a_t) = \vee_{t\in T} h(a_t)$。

定理 5.6.2 取泛空间为$(X, \Sigma, m, \overline{R}_+, \overset{\lambda}{+}, \overset{\lambda}{\cdot})$，即$(\overline{R}_+, \overset{\lambda}{+}, \overset{\lambda}{\cdot})$为例 5.1.5 中的泛结构($\lambda>0$)，$m$ 为Σ上的 λ - 可加模糊测度，$f\in F_+$，$A\in\Sigma$，则

$$(p)\int_A f dm = (K)\int_A f dm。$$

证明 由定义 5.2.1 和引理 5.6.1 中的(1)和(3)

$$\begin{aligned}
(p)\int_A f dm &= \sup_{T\in \hat{P}} \sum_{E\in T}{}^{\lambda}\left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\overset{\lambda}{\cdot} m(A\cap E)\right] \\
&= h^{-1}\left(\sup_{T\in \hat{P}} h\left\{\sum_{E\in T}{}^{\lambda}\left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\overset{\lambda}{\cdot} m(A\cap E)\right]\right\}\right) \\
&= h^{-1}\left(\sup_{T\in \hat{P}} \sum_{E\in T}\left(\inf_{x\in E} h[f(x)]\right)\cdot h[m(A\cap E)]\right) \\
&= h^{-1}\left(\sup_{T\in \hat{P}} \sum_{E\in T}\left(\inf_{x\in E} \log_{1+\lambda}[1+\lambda f(x)]\right)\cdot m^{*}(A\cap E)\right) \\
&= h^{-1}\left((L)\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f)dm^{*}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{(L)\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f)dm^{*}} - 1\right] = (K)\int_A f dm,
\end{aligned}$$

其中 $m^{*} = \log_{1+\lambda}(1+\lambda m)$是$\Sigma$上的经典测度。

顺便指出，在文献[98]中，Ichihashi 等人在区间$[a, b]$上定义了被叫作伪加和伪乘的算子，并在此基础上定义了一种模糊积分。当区间$[a, b]$取成$[0,+\infty]=\overline{R}_+$，并且像例 5.1.5 中那样定义其上的泛加和泛乘算子时，我们就得到一对(Ichihashi 等人的)伪加和伪乘算子。这时关于它们(Ichihashi 等人意义下)的模糊积分与这里介绍的 K 积分一致。

在文献[97]中，Sugeno 和 Murofushi 也定义了一种伪加和伪乘算子以及 *MS* 积分(定义 5.5.3)。但是他们定义的伪乘与伪加密切相关。在他们的定义下，与例 5.1.5 中的泛加算子 $\overset{\lambda}{+}$ 对应的伪乘应该为($\lambda>0$)

$$a \overset{\lambda}{\cdot} b = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda b)^a - 1\right] & a,\ b \in [0,\ \infty) \\ 0 & a = 0,\ \ b = \infty \text{ 或 } a = \infty,\ \ b = 0 \\ \infty & a = \infty,\ \ b \in (0,\ \infty] \text{ 或 } a \in (0,\ \infty],\ \ b = \infty \text{。} \end{cases}$$

进一步，对于非负可测函数 f 在 A 上关于 $\overset{\lambda}{+}$ 测度 m 的 MS 积分为

$$(MS)\int_A f dm = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\int_A f dm^*} - 1\right),$$

其中 m^* 由式(5.6.3)定义，积分 $\int_A f dm^*$ 是 L 积分。当然，它也是一类泛积分，并且在文献[60]中被详细地讨论了。

对于 a，$b \in R_+$，关于泛加 $\overset{\lambda}{+}$ 的逆运算(即泛减运算) $\overset{\lambda}{-}$ 存在，且为(λ>0)

$$a \overset{\lambda}{-} b = \frac{a-b}{1+\lambda b}\text{。}$$

因此，我们可以效仿一般可测函数关于测度的 Lebesgue 积分的定义，将 Kruse 模糊积分的定义推广到一般可测函数。

定义 5.6.3 设(X, Σ, m)为 λ - 可加模糊测度空间(λ>0)，f 为(X, Σ)上的可测函数，f^+ 与 f^- 是 f 的正部与负部，即 $f^+ = f \cdot \chi_{\{f \geq 0\}}$，$f^- = (-f) \cdot \chi_{\{f<0\}}$。对任给 $A \in \Sigma$，如果 $(K)\int_A f^- dm < \infty$，则可测函数 f 在 A 上(关于 λ - 可加模糊测度 m)的 K 积分定义为

$$(K)\int_A f dm = \frac{(K)\int_A f^+ dm - (K)\int_A f^- dm}{1 + \lambda (K)\int_A f^- dm}\text{。}$$

如果对任意 $A \in \Sigma$，有 $\left|(K)\int_A f dm\right| < \infty$，那么称 f 为 λ - 可积函数。

定理 5.6.3 f λ - 可积当且仅当 f^+ 与 f^- λ - 可积，并且

$$(K)\int_A f dm = \frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{(L)\int_A \log_{1+\lambda}\frac{1+\lambda f^+}{1+\lambda f^-} dm^*} - 1\right]\text{。}$$

证明 定理中前面的结论由定义 5.6.3 直接可证。下证后面的等式。由定义 5.6.2 有

$$(K)\int_A f^{+}dm=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{+})dm^{*}}-1\right],$$

$$(K)\int_A f^{-}dm=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{-})dm^{*}}-1\right]。$$

于是

$$(K)\int_A f dm=\frac{\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{+})dm^{*}}-(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{-})dm^{*}}\right]}{(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{-})dm^{*}}}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{+})dm^{*}-\int_A \log_{1+\lambda}(1+\lambda f^{-})dm^{*}}-1\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\int_A \log_{1+\lambda}\frac{1+\lambda f^{+}}{1+\lambda f^{-}}dm^{*}}-1\right]。$$

第六章 交通运输系统综合评价的泛积分法

系统的评价对系统的发展起着承上启下的作用，它对交通运输系统的各个子系统来说都是一项必不可少的重要工作。它为交通运输系统的设计、优化及决策提供科学的判别依据。

系统的评价通常是从系统众多的输出特性中选出若干个具有代表性的单项指标进行评价开始的。但是，仅有各单项指标的评价，还难以对整个系统作出令人满意的综合评价。有时，某些单项指标的评价甚至相互矛盾，彼此抵销。为了能对整个系统作出客观的优劣评价，我们有必要建立系统综合评价的结构模型。为此，本章介绍系统综合评价的一种方法——泛积分法。它去掉了加权平均法中测度的可加性限制，从而拓广了加权平均法，扩大了积分法在系统综合评价中的使用范围。第三节提出用系统的群体综合评价逼近系统的客观综合评价的方法，以此克服综合评价中的主观偏见性，使系统的综合评价更加接近客观实际。

§6.1 问题的提出

系统综合评价的方法有多种。最常用的方法是价值分析法，亦称加权平均法。它是根据系统中单项指标的权重，以及在单项指标作用下系统的价值，然后通过加权平均得出综合评价值。详细地说，如果系统的评价指标集合是$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，已知它们对应的权重系数为 w_1，w_2，$\cdots, w_n$，$0 \le w_i \le 1$，$i=1$，2，$\cdots$，n 且 $w_1+w_2+, \cdots+w_n=1$，以及专家(评委)对每个指标 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$的评价(打分)为 $f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_n)$，则由加平均法得到的该系统的综合评价值(得分)为

$$E_w = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)。\tag{6.1.1}$$

但是，通过我们最近的研究发现，加权平均法不一定总是可行的，即使用该方法有时会得到不合情理的评价，这可以通过下面简单的日常生活实例来说明。

例 6.1.1 假设我们要评价的三个系统是三台电视机。为了简单起见我们仅考虑两个系统指标，即 x_1：电视机图象的清晰程度；x_2：电视机音质的清晰程度。我们暂时假定 x_1，x_2 对应的权重系数为 $w_1=0.7$，$w_2=0.3$。已知第一台电视机图象清晰，但没有声音；第二台电视机没有图象，但声音清晰；第三台电视机图象和声音均可勉强使用。这时对它们各单项指标的评价值如下表所示：

系统指标 / 电视机编号	x_1(图象)	x_2(声音)
1	1	0
2	0	1
3	0.45	0.45

应该是合理的。于是，使用加权平均法公式(6.1.1)得到对三台电视机的综合评价分别为：

$$E_1=w_1\times 1+w_2\times 0=0.7,$$
$$E_2=w_1\times 0+w_2\times 1=0.3,$$
$$E_3=w_1\times 0.45+w_2\times 0.45=0.45。$$

这些结果表明，第一台电视机被评为最好。如果我们将权重系数调整为 $w_1=0.4$，$w_2=0.6$，这时对它们的综合评价为：

$$E_1=0.4,\quad E_2=0.6,\quad E_3=0.45。$$

这又表明第二台电视机被评为最好。但是，这两种评价结果都与我们日常生活准则不相符合(第一台电视机为哑吧电视机，第二台实为收音机)，因而难以为人们所接受。依照常规应该是第三台电视机相对最好(它至少可以凑合看)。也许有人认为得不到正确的评价不是加权平均法本身的缺陷，而是由于权重系数选择不当的原故，只要适当调整权重系数，就一定可以得到“第三台电视机最好”——这一符合日常规则的正确评价。然而，不幸的是由于这里的权重系数必须满足限制 $w_1+w_2=1$，$w_1\geq 0$，$w_2\geq 0$，所以这样的评价结果用加权平均法是永远得不到的。

问题的关键在于，加权平均法是建立在系统各项指标相互独立的假设基础上的，即它们的效果应该是可加的。确切地说，权重系数 w_i 是指标 x_i

的概率密度，即 $P(X)$上的概率测度 w，而公式(6.1.1)实际上是评价函数 $f(x)$ 关于概率测度 w 的 Lebesgue 积分 $E_w=(L)\int f(x)dw$。因此加权平均法又可被称为综合评价的 Lebesgue 积分法。但是，在实际问题中系统指标的相互独立性不一定被满足或者有时就连判别独立性本身就是一件不容易的事情，在这些情形下使加权平均法就有可能得不到正确的评价结果。那么这时使用什么方法才能对系统有效地进行综合评价呢？人们自然会想到用其他种类的测度和积分代替概率测度和 Lebesgue 积分。这就是本文将要介绍的另外一种系统综合评价的方法——模糊测度和泛积分法。

§6.2 系统个体综合评价的泛积分法

在以下的讨论中，为了叙述简便，我们将参与系统指标的评价者或打分者(专家、评委、甚至群众)均称为评判员；评价值、评判值、得分、打分统称为评价。

设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是一个系统的指标集合。集合中的每个元素 x_i 都是我们要评价的系统指标。用加权平均法进行系统综合评价首先要确定权重系数，即定义一个概率测度。类似地，用泛积分法进行系统个体综合评价的

第一步，定义重要性测度。即对于 X 的每个子集 A，都赋予一个介于 0 与 1 之间的实数 $m(A)$，用以描述指标集合 A 的重要性。显然，X 本身的重要性应为 1，通常是合理的；而空集ϕ(不含任何指标的集合)的重要性当然应为 0。此外，若指标集合 A 中的指标都包含在指标集合 B 中，则 A 的重要性显然不如 B，即应有$m(A)\le m(B)$。因此，集函数 m 满足下列条件：

(1) $m(\phi)=0$，$m(X)=1$，

(2)若 A，$B\in X$，$A\subset B$ 则 $m(A)\le m(B)$。

再注意到我们所考虑的指标集合 X 一般是有限的，从而重要性测度 m 是可测空间$(X, P(X))$上的模糊测度。

应该注意的是模糊测度往往不满足经典测度的可加性，因此定义重要性测度通常比定义概率测度(权重系数)要困难。但是当要定义的重要性测度

满足λ－律，即重要性测度是λ－可加模糊测度($\lambda \neq 0$)时，它的确定可像确定权重系数一样，只需确定单点集合$\{x_i\}$的值即可，因为这时的λ－可加模糊测度满足$\prod_{i=1}^{n}\left[1+\lambda m(\{x_i\})\right]=1+\lambda$。

第二步，请评判员对系统的每个指标 x_i 给出评价 $f(x_i)\in[0,\ 1]$，$i=1$，2，…，n，它是可测空间$(X,\ P(X))$上的一个可测函数。

第三步，1.当重要性测度 m 是模糊测度时，用式(5.5.1)计算系统的个体综合评价，即 $E=(S)\int f dm$；

2.当重要性测度 m 是λ－可加模糊测度($\lambda \neq 0$)时，可用式(5.6.5)计算系统的个体综合评价，即 $E=(K)\int f dm$；

3.当重要性测度 m 是一般的非负单调集函数时，可用定义 5.2.1 中的泛积分计算系统的个体综合评价，即 $E=(p)\int f dm$。

特别地，当重要性测度是概率测度(权重系数)时，如果采用 Lebesgue 积分计算评价值，则所得到的系统综合评价就是加权平均值。由此可见，系统个体综合评价的泛积分法是加权平均法的拓广。

必须指出：具体使用哪种积分计算系统的个体综合评价为好，这既要根据被考虑问题的实际情况，又要根据集函数 m 和泛加算子$\oplus$，泛乘算子$\otimes$的选则而定。

为了计算式(5.5.1)中的模糊积分，设

$$\Gamma=\{\alpha:\ \alpha\in[0,+\infty],\quad m(F_\alpha)>m(F_\beta),\ \forall\beta>\alpha\},$$

则非负可测实函数$f(x)$的模糊积分可简化为

$$(S)\int f dm=\sup_{\alpha\in\Gamma}[\alpha\wedge m(F_\alpha)]。\tag{6.2.1}$$

例 6.2.1 设 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$，$\Sigma=P(X)$ (X 的所有子集组成的集合)，定义$(X,\ \Sigma)$上的集函数 m 如下

$$m(A)=\begin{cases}|A|, & \text{如果 } A\neq\{x_1,\ x_2\}\\ 3, & \text{如果 } A=\{x_1,\ x_2\},\end{cases}$$

其中$|A|$表示集合A中所含元素的个数，函数$f(x)$定义为

$$f(x)=\begin{cases}3, & x=x_1\\ 2.5, & x=x_2\\ 2, & x=x_3\text{。}\end{cases}$$

容易看出，m 是(X, Σ)上的模糊测度。由于 $m(\{x_1\})+m(\{x_2\})=2$，$m(\{x_1, x_2\})=3$，故 $m(\{x_1, x_2\})\neq m(\{x_1\})+m(\{x_2\})$，即 m 是非可加的。

下面我们计算函数$f(x)$关于模糊测度 m 的模糊积分。

当$\alpha=3$时，$F_\alpha=\left\{x\,\middle|\, f(x)\geq 3\right\}=\{x_1\}$。对于$\beta>3$，$F_\beta=\left\{x\,\middle|\, f(x)\geq\beta\right\}=\phi$.

从而$m(F_\alpha)>m(F_\beta)$，所以$3\in\Gamma$。同理可证$2.5\in\Gamma$，$2\in\Gamma$，且$\Gamma=\{2, 2.5, 3\}$，使用式(6.2.1)得

$$\begin{aligned}(S)=\int f dm&=[3\wedge m(\{x_1\})]\vee[2.5\wedge m(\{x_1, x_2\})]\vee[2\wedge m(X)]\\&=[3\wedge 1]\vee[2.5\wedge 3]\vee[2\wedge 3]=1\vee 2.5\vee 2=2.5,\end{aligned}$$

其中$\wedge$和$\vee$是取大和取小算子。

例 6.2.2 现在让我们回到例 6.1.1，用综合评价的泛积分法来评价例 6.1.1 中的三台电视机。这时 $X=\{x_1, x_2\}$，$\Sigma=P(X)=\{\phi, \{x_1\}, \{x_2\}, X\}$。我们定义重要性测度 m 如下：

$$m(\phi)=0,\quad m(\{x_1\})=m(\{x_2\})=0.4,\quad m(X)=1\text{。}$$

由例 6.1.1 中的表得

评价指标 / 评价函数	x_1	x_2
$f_1(x)$	1	0
$f_2(x)$	0	1
$f_3(x)$	0.45	0.45

则按照式(6.2.1)计算的三台电视机的个体综合评价分别为

$$E_1=(S)\int f_1dm=[1\wedge 0.4]\vee[0\wedge 1]=0.4$$
$$E_2=(S)\int f_2dm=[1\wedge 0.4]\vee[0\wedge 1]=0.4$$
$$E_3=(S)\int f_3dm=0.45\wedge 1=0.45。$$

这次我们得到了按常规可以接受的评价——第三台电视机相对最好。

如果我们上面定义的重要性测度 m 是 λ－可加模糊测度($\lambda=1.25$)，则依照式(5.6.5)计算三台电视机的个体综合评价为

$$(K)=\int f_idm=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda)^{\log_{1+\lambda}[1+\lambda f_i(x_1)]\cdot\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(x_1)]+\log_{1+\lambda}[1+\lambda f_i(x_2)]\cdot\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(x_2)]}$$

$i=1$，2，3。将具体数值代入上式计算得

$$\begin{aligned}(K)=\int f_1dm&=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda)^{\log_{1+\lambda}(1+\lambda)\cdot\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(x_1)]}\\&=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda m(x_1))=m(x_1)=0.4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K)=\int f_2dm&=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda)^{\log_{1+\lambda}(1+\lambda)\cdot\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(x_2)]}\\&=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda m(x_2))=m(x_2)=0.4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K)=\int f_3dm&=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda)^{\log_{1+\lambda}[1+\lambda\times 0.45]\cdot\{\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(x_1)]+\log_{1+\lambda}[1+\lambda m(x_2)]\}}\\&=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda)^{\log_{1+\lambda}[1+\lambda\times 0.45]}=-\lambda^{-1}+\lambda^{-1}(1+\lambda\times 0.45)=0.45。\end{aligned}$$

这些结果与按照式(6.2.1)计算所得结果一样。

为了使工程技术人员计算模糊积分简便，我们将评价步骤中的第三步 1. 简写成与之等价的形式如下：

将 $f(x_i)$，$i=1$，2，…，n 按由大到小的顺序排列成 $f^{(1)}$，$f^{(2)}$，…，$f^{(n)}$；将指标集$\{x_1，x_2，…，x_n\}$相对应地排列成 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，…，$x^{(n)}$。记

$$A^{(i)}=\{x^{(1)},\ x^{(2)},\cdots,\ x^{(i)}\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

则系统的个体综合评价为

$$E=\bigvee_{1\le i\le n}[f^{(i)}\wedge m(A^i)]。\tag{6.2.2}$$

其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 为取大和取小算子。

例 6.2.3 交通运输系统评价指标体系所含指标较多，为了简化问题，我们只选择其中的四个指标进行综合评价。设某运输系统的评价指标体系为 $X=\{x_1，x_2，x_3，x_4\}$，其中 x_1 表示运输系统的价廉性；x_2 表示运输过程的快速性；x_3 表示系统的安全性；x_4 表示系统服务的舒适性。$\Sigma=P(X)$。重要性

测度为 $m(\phi)=0$，$m(\{x_2\})=0.4$，$m(\{x_1, x_3\})=0.8$，$m(\{x_2, x_4\})=0.5$，$m(\{x_1, x_2, x_3\})=0.9$，$m(\{x_1, x_3, x_4\})=0.9$，$m(\{x_2, x_3, x_4\})=0.8$，$m(X)=1$。现有三个交通运输系统关于指标体系 X 的评价 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$如下表

评价指标 / 评价函数	x_1	x_2	x_3	x_4
$f_1(x)$	0.7	0.6	0.7	0.7
$f_2(x)$	0.9	0.8	0.9	0.7
$f_3(x)$	0.4	1	0.6	0.7

则它们的综合评价用式(6.2.2)分别计算为

$$E_1=(S)\int f_1dm=[0.7\wedge m(\{x_1, x_3, x_4\})]\vee[0.6\wedge m(X)]$$
$$=[0.7\wedge 0.9]\vee[0.6\wedge 1]=0.7\vee 0.6=0.7$$
$$E_2=(S)\int f_2dm=[0.9\wedge m(\{x_1, x_3\})]\vee[0.8\wedge m(\{x_1, x_2, x_3\})]\vee[0.7\wedge m(X)]$$
$$=[0.9\wedge 0.8]\vee[0.8\wedge 0.9]\vee[0.7\vee 1]=0.8\vee 0.8\vee 0.7=0.8$$
$$E_3=(S)\int f_3dm=[1\wedge m(\{x_2\})]\vee[0.7\wedge m(\{x_2, x_4\})]$$
$$\vee[0.6\wedge m(\{x_2, x_3, x_4\})]\vee[0.4\wedge m(X)]$$
$$=[1\wedge 0.4]\vee[0.7\wedge 0.5]\vee[0.6\vee 0.8]\vee[0.4\wedge 1]$$
$$=0.4\vee 0.5\vee 0.6\vee 0.4=0.6。$$

由此可见，第二个交通运输系统为最好，如果它表示铁路交通运输系统，那么它比其他两个交通运输系统为好。

§6.3 系统的群体综合评价对客观综合评价的逼近

一般来说，单个评判员的评价或多或少地受到他(她)的主观意识的影响。但是，实际上对每个系统指标 x_i 都存在一个不以人们意识决定的客观评价 $g(x_i)\in[0, 1]$，$i=1, 2, \cdots, n$，也就是说，我们可以想象存在一个客观评价函数 $g: X\to[0, 1]$，使得最理想的系统综合评价应该是泛积分 $E_\infty=(p)\int gdm$，我们称其为系统的客观综合评价。相对应地，由单个评判员提

供的评价函数 $f(x)$所产生的评价 E 可以被称为系统的个体(或主观)综合评价。

出于每个评判员对系统的个体(主观)评价不是完全一致的，并且带有一定的随机性(甚至同一个评判员在不同的时间对同一系统的个体(主观)评价也不一定一样)。因此，个体(主观)评价 $f(x_i)$通常不等于客观评价 $g(x_i)$，$i=1，2，\cdots，n$，从而导致系统的个体(主观)综合评价 E 偏离系统的客观综合评价 E_∞。为了减少个体评判受主观偏见的影响，使评价趋于合理我们可以进行群体评价。即随机(无倾向性)地邀请 t 个评判员，分别对系统指标集 X 中的 n 个指标 x_i 独立地进行评价，然后对 t 个评判员关于指标 x_i 的评价 $f_1(x_i)$，$f_2(x_i)$，$\cdots$，$f_t(x_i)$求算术平均值 $\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f_j(x_i)$，并以此来代替指标 x_i 的评价，$i=1，2，\cdots，n$。

从数理统计的观点来看，对每个固定的指标 x_i 的评价 $(f_1(x_i)$，$f_2(x_i)$，$\cdots$，$f_t(x_i))$可以被看作出自母体 G_i 的容量为 t 的样体值，而 G_i 的数学期望是 $g(x_i)$。于是由 kolmogorov 强大数定律[10]

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f_j(x_i)=g(x_i)\right\}=1,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

因为系统的指标个数 n 是有限的，所以

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f_j(x_i)=g(x_i),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\}=1。$$

注意到重要性测度 m 一般是有限模糊测度，所以，如果所用泛积分的单调收敛定理成立，则我们得到

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}(p)\int\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f_j dm=(p)\int g dm=E_\infty\right\}=1;$$

这表明

$$(p)\int\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f_j dm\to E_\infty,$$

依概率 P 收敛。

在实际应用中，我们不可能邀请无数个评判员参加评价，而只能邀请若干(t)个。但是只要 t 适当大，我们就可以得到系统客观综合评价的近似值

$$E_t=(p)\int\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} f_j dm\approx E_\infty。\tag{6.3.1}$$

我们称 E_t 为容量是 t 的一个群体评价，它作为 E_∞ 的近似，要比任何个体评价更“公证”些。

例 6.3.1 设某交通运输系统的评价指标集合为 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$，$\Sigma=P(X)$，系统的重要性测度为 $m(\phi)=0$, $m(\{x_2\})=0.1$, $m(\{x_1, x_2\})=0.9$，$m(X)=1$。现邀请四位评判员为其评价，其结果如下表

指标 x_i / 评价函数	x_1	x_2	x_3
$f_1(x)$	0.9	0.6	0.8
$f_2(x)$	0.7	0.8	0.8
$f_3(x)$	0.8	0.9	0.6
$f_4(x)$	0.6	0.9	0.6
$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} f_j(x_i)$	0.75	0.8	0.7

则由式(6.3.1)得到系统群体综合评价

$$E_4=(S)\int \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} f_j dm=0.75\text{。}$$

注 6.3.1 本章介绍的系统综合评价的泛积分法是 Lebesgue 积分法，即加权平均法的拓广，它去掉了加权平均法中测度的可加性限制，从而扩大了积分法在系统综合评价中的使用范围。但是，本章对泛积分中所用模糊测度，即重要性测度的确定问题未加讨论。实际上，它是一个较难解决的问题，也是模糊测度能否有效地应用于实际问题的一个关键所在。目前，已有一些学者对此问题进行了讨论，如文[33]讨论了当 m 是可能性测度时通过 X 上的模糊集确定重要性测度的方法。文[87，88]讨论了通过变换确定 $\lambda-$可加模糊测度的方法。但是，这些方法和结果与实际应用的要求还相距甚远，这个问题还有待于我们进一步研究。我们相信，模糊测度的确定问题一定会像确定概率测度那样，在应用中逐步得到解决。

第七章 结论与展望

本章对论文的主要研究工作进行总结，同时提出需要进一步研究的问题

§7.1 论文的主要研究工作和结论

非可加集函数的研究是科学发展和实际应用的需要，是可加集函数研究的必然发展趋势，是现代测度论的一个重要课题，也是当前国内外同行专家关注的前沿和热点问题。目前，它的理论已经被广泛地应用于知识工程、人工智能、决策论、对策论、模式识别、聚类分析、图象和语言处理、专家系统、概率统计、经济管理、现代控制和通讯等领域。因此，对非可加集函数理论的深入研究，具有重要的理论意义和实际意义。

论文在充分研究、分析和借鉴国内外该领域研究成果的基础上，对非可加集函数的几个重要问题进行了较系统的、具有新意的研究，取得了可喜的成果。其主要研究成果和结论如下：

1.广义实值集函数的变差的研究

论文将实变函数论中单调函数的有界变差性以及经典测度论中有界变差集函数的概念，引入到非可加集函数的讨论之中，提出了内含变差、不交变差和链变差三种概念，并且分别对它们进行了系统的研究。内含变差的性质相对简单，但它是研究广义模糊测度的Jordan 分解和 Lebesgue 分解的基础。此外，它与 Pap 提出的一个公开问题类似，从而使本文能够回答这一问题。在不交变差的研究过程中，本文得到了一系列不同于经典测度论中的深刻结论，这些结论拓广了经典测度论的现有结果，具有一定的启发意义。对链变差的研究使得本文得到了有界链变差集函数的分解定理，从而削弱了经典 Jordan 分解定理成立的条件，为 Jordan 分解定理的证明提供了一种新方法。上述三种变差对可加集函数来说是一致的，这一

结论是我们始料未及的。由此可见，集函数的可加性条件之强。同时，也从另一侧面说明了可加性对实际应用的局限性。

2.广义模糊测度的研究

广义模糊测度是文献[47]为推广 Sugeno 模糊测度而提出的。但是，它在对广义模糊测度进行 Hahn 分解时，误将经典测度的已有结论未加证明地使用到非可加集函数中来，从而导致了证明的失败。本文中定义的广义模糊测度较文献[47]的条件弱，并且对广义模糊测度的 Hahn 分解问题做了进一步地讨论，发现不加任何条件进行这种分解是非常困难的。进而提出了非零可加集函数“一致性”的概念，它是保证 Hahn 分解定理成立的较弱条件。本文在零零可加条件下证明了广义模糊测度 Jordan 分解的存在性；在零可加条件下证明了其分解的唯一性。又在零零可加条件下证明了广义模糊测度的 Lebesgue 分解定理。这三大定理是经典广义测度的基石。因此，本文的研究结果和研究方法是对经典测度论中相应结果的扩充和改进，具有一定的理论意义。

3.泛积分理论的研究

本文在充分研究和分析国内外近期有关积分理论文献的基础上，提出了泛积分的新定义，使目前常用的几种积分在形式上得到了统一。同时，本文还讨论了泛积分的有关收敛定理，为实际应用提供了理论依据。此外，本文证明了 K 积分是泛积分的一种特殊情形，从理论上解决了 K 积分的归属问题。

4.交通运输系统综合评价的泛积分法的研究

交通运输系统的综合评价对其发展是一项必不可少的工作，它为交通运输系统的设计、优化及决策提供科学的判别依据。因此，有必要建立系统综合评价的结构模型。为此，本文在充分研究系统综合评价的加权平均法基础上，指出了加权平均法过多的依赖于可加性的不足之处，提出了根据不同的实际问题，采用不同的加乘算子的泛积分法，从而克服了加权平均法的局限性，扩大了积分法在系统综合评价中的使用范围。此外，本文还提出了用系统的群体综合评价逼近系统的客观综合评价的思想和理论依据，以此来克服综合评价中的主观偏见性，使系统的综合评价更加接近客观实际。

§7.2 今后研究工作的展望

由于非可加集函数不具有可加性，因而结构比较松散，人们难以建立类似于经典测度论那样的理论体系。目前，虽然有几类非可加集函数已经成为数学家们研究的热点问题，但是它的发展还远不如经典测度论那样成熟，许多问题有待于人们进一步深入研究，一些问题尚无人涉足。随着科学技术的迅速发展，特别是人工智能和计算机科学的发展，迫切地需要人们去解决大量的非可加度量问题，而解决这些问题的关键在于非可加集函数理论的发展与完善。

本文只是对一些特殊类型的集函数进行了讨论，许多工作尚未完善或尚待进行。同时，由于作者的水平和能力所限，本文尚存在诸多不足，敬请各位专家前辈及同行们批评指正。作者以为，如下问题有待进一步研究：

1.对非可加集函数分类综述的研究。它对非可加集函数理论的研究工作起至关重要的指导作用，本文的第一章就是朝着这一方向努力的。但是，由于作者的时间、知识面及能力有限，最终未能达到此目的。

2.本文在§3.3 节中部分地回答了 Pap 提出的另一公开问题，但是没有完全回答它，即：

对任意零可加修正单调广义模糊测度 m，是否可以表示成 $m=v_1-v_2$ 的形式，其中 v_1和 v_2是零可加模糊测度？

3.建立与广义模糊测度相应的积分理论。

4.对泛加泛乘算子代数结构的研究。

5.非可加集函数的进一步应用。

6.模糊拓扑空间上的测度(集函数)和积分理论的研究。

7.本文对系统综合评价的泛积分法中使用的重要性测度，即模糊测度的确定问题未加讨论。实际上，它是一个较难解决的问题，也是模糊测度能否有效地应用于实际问题的一个关键所在。目前，已有一些学者对此问题进行了讨论，但这些方法和结果与实际应用的要求还相距甚远，这个问题还有待于我们进一步研究。我们相信，模糊测度的确定问题一定会像确定概率测度那样，在应用中逐步得到解决。

参考文献

[1] Borel, E., *Lessons on a Theory of Functions*, Gauthier-Villars, Paris (in French), 1989.
[2] Lebesgue, H., Intégrale, longuer, aire, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 1902, 7(3): 231-359.
[3] Lebesgue, H., *Measure and the Integral*, Holden-Day, San Francisco, 1966.
[4] Schwartz, L., *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford University Press, London, 1973.
[5] 严加安，测度论讲义，科学出版社，1998。
[6] 陆善镇，王昆杨，实分析，北京师范大学出版社，1997。
[7] Nachbin, L., *The Haar Integral*, Van Nostrand, New York, 1965.
[8] Riesz, F., and Sz.-Nagy, B., *Functional analysis*, Ungar, New York, 1955.
[9] Daniell, P. J., A general form of integral, *Ann. Math.*, 1918, 19: 279-294; 1922, 22: 203-220.
[10] Kolmogorov, A. N., *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, New York, 1950 (first published in German in 1933).
[11] Halmos, P. R., *Measure Theory*, Van Nostrand, New York, 1950.
[12] Cohn, D. L., *Measure Theory*, Birhäuse Boston, 1980.
[13] Dunford, N., and Schwartz, J. T., *Liner Operators, Part I*, Interscience, New York, 1958.
[14] 严士键，刘秀芳，测度与概率，北京师范大学出版社，1994。
[15] 中山大学"测度与概率基础"编写组，测度与概率基础，广东科技出版社，1984。
[16] Choguet, G., Theory of capacities, *Annales de l'Institut Fourier*, 1953-1954, 5: 131-295.
[17] Aumann, R. J., and Shapley, L. S., *Values of Non-Atomic Games*, Princeton University, Press, Princeton, New Jersey, 1974.
[18] Dempster, A. P., Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, *Ann. Math. Statistics*, 1967, 38: 325-339.
[19] Dempster, A. P., A Generalization of Bayesian Inference, *J. of the Royal Statist. Soc.*, 1968, Series B 30: 205-247.
[20] Shafer, G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
[21] Aleksjuk, V. N., Two theorems on the existence of quasibase for a family of quasimeasures, *Izv. Vish. Ucseb.zav.*, 1968, 6(73): 11-18 (in Russian).
[22] Aleksjuk, V. N., On the weak compactness of a family of quasimeasures, *Sibirian Mat. J.*, 1970, 11: 723-738 (in Russian).
[23] Dobrakov, I., On submeasures I, *Dissertations Math.*, 1974, 112: 4-35.
[24] Dobrakov, I., and Farkova, J., On Submeasures II, *Math. Slovaca*, 1980, 30: 65-81.
[25] Drewnowski, L., On the continuity of certain non-additive set functions, *Colloq. Math.*, 1978, 38: 243-253.
[26] Wang, Z., The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, 99: 195-218.
[27] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, *Information and Control*, 1965, 8: 338-353.
[28] Zadeh, L. A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, 1: 3-28.
[29] Dubois, D., and Prade, H., *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988 (translated from the French original published in 1985).
[30] Dubois, D., and Prade, H., When upper probabilities are possibility measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 49: 65-74.
[31] Shafer, G., Belief function and possibility measures, in: Bezdek, 1987, 51-83.

[32] Klir, G. J., and Folger, T. A., *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[33] Sugeno, M., Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[34] Sugeno, M., Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey, in: Ed. Gupta, M., Saridis, G. N., and Gaines, B. R., *Fuzzy Automata and Decision Processes*, North-Holland, New York, 1977, 89-102.

[35] Wang, Z., Asymptotic structural characteristics of fuzzy measure and their applications, *Fuzzy Sets and systems*, 1985, 16: 277-290.

[36] Wang, Z., Absolute continuity and extension of fuzzy measures, *Fuzzy Sets and systems*, 1990, 36: 395-399.

[37] Wang, Z., structural characteristics of fuzzy measures on S-compact spaces, *Internet, J. Gen. Systems*, 1990 17: 309-316.

[38] Wang, Z., and Klir, G. J., *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, 1992.

[39] Wang, Z., Klir, G. J., and Wang, W., Fuzzy measures defined by fuzzy integral and their absolute Continuity, *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, 203: 150-165.

[40] Murofushi, T., and Sugeno, M., An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 29: 201-227.

[41] Murofushi, T., and Sugeno, M., A theory of fuzzy measures. Representation, the Choquet integral and null sets, *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, 159: 532-549.

[42] Murofushi, T., and Sugeno, M., Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: Generalization of Sugeno integral and Choquet integral, *Fuzzy sets and Systems*, 1991, 42: 57-71.

[43] Murofushi, T., and Sugeno, M., Some quantities represented by the Choquet integral, *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 56: 229-235.

[44] Murofushi, T. and Sugeno, M., Non-monotonic fuzzy measures and the Choquet integral, *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 64: 73-86.

[45] Wang, Z., Klir, G. J., and Wang, W., Monotone set functions defined by Choquet integral, *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 81: 241-250.

[46] Relescu, D., and Adams, G., The fuzzy integral, *J. Math. Anal. Appl.*, 1980, 75: 563-570.

[47] Liu, X., Hahn decomposition theorem for infinite signed fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 57: 377-380.

[48] Zhang, Q., Further discussion on the Hahn decomposition theorem for signed fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 70: 89-95.

[49] Suarez, G. F., amd Gilavarez, P., Two families of fuzzy integrals, *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 18: 67-82.

[50] Wu, C., Wang, S., and Song, S., Generalized triangle norms and generalized fuzzy integrals, in: *Proc. of Sino-Japan Sympo. On Fuzzy Sets and Systems*, International Academic Press, BeiJing, 1990.

[51] 吴从炘，马明，模糊分析学基础，国防工业出版社，1991。

[52] 吴从炘，马明，方锦暄，模糊分析学的结构理论，贵州科技出版社，1994。

[53] Suzuki, H., On Fuzzy measures defined by fuzzy integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, 132: 87-101.

[54] Suzuki, H., Atoms of fuzzy measures and fuzzy integrals, *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 41: 329-342.

[55] Jiang, Q., and Suzuki, H., Lebesgue and Saks decompositions of σ-finite fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 75: 373-385.

[56] Jiang, Q., and Suzuki, H., Fuzzy measures on metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 83: 99-106.

[57] 张文修，赵汝怀，Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分的推广，模糊数学，1983，3(4)：1-8。
[58] 赵汝怀，Sugeno 模糊积分转化定理，科学通报，1984，1：5-7。
[59] 张文修，王国俊，刘旺金，方锦暄，模糊数学引论，西安交通大学出版社，1991。
[60] 刘旺金，何家儒，模糊数学导论，四川教育出版社，1992。
[61] 程里春，模糊测度空间，上海铁道学院学院，1980，2：105-113。
[62] 刘作述，Fuzzy 测度与积分理论，四川大学学报(自然科学)1980，16(2)：1-14；16(4)：9-16；1981，17(2)：7-19。
[63] 郑道明，黄金丽，Fuzzy 积分的一系列收敛定理和准不动点的邻域性质，模糊数学，1981，1。
[64] Wang, Z. X., Fuzzy measures and measures of fuzziness, *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, 104: 589-601.
[65] Wang, Z., On the null-additivity and the autocontinuity of a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45: 223-226.
[66] Wu, C., and Ha, M., On the null-additivity and the uniform autocontinuity of a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 58: 243-245.
[67] Pap, E., *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, London, 1995.
[68] Zhang, Q., Xu, Y., and Du, W., Lebesgue decomposition theorem for σ-finite signed fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 101: 131-137.
[69] Du, W., and Zhang, Q., Decompositions of revised monotone signed fuzzy measures, in: *Proceedings of 1998 IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems*, Queensland, Australia, 1998.
[70] 张强，蒲云，杜文，广义 Fuzzy 测度的穷竭性、序连续性和 Jordan 分解，西南交通大学学报，1998，3：240-246。
[71] Kruse, R., A note on λ-additive fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1982, 8(2): 219-222.
[72] Dubois, D., and Prade, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
[73] Wang, Z., Une classes de mesures floues-les quasi-mesures, *BUSEFA*, 1988, 132: 87-101.
[74] Kruse, R., On the construction of fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1982, 8(3): 323-327.
[75] Kruse, R., Fuzzy integrals and conditional fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1983, 10(3): 309-313.
[76] Kruse, R., and Meyer, K. D., *Statistics with Vague date*, Reidel, Dordrecht, 1987.
[77] Berres, M., λ-additive measures on measure spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1988, 27: 159-169.
[78] 张强，关于拟概率测度的 R-N 和 B-C 引理，西南交通大学出版社，1990，280-283。
[79] Hua, W., The properties of some non-additive measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1988, 27: 373-377.
[80] Hua, W., and Li, L., The g_λ-measures and conditional g_λ-measures on measurable spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 46: 211-219.
[81] Zhang, Q., Product measures and decomposition of λ-additive fuzzy measures, in: *Proceedings of Fourth IFSA World Congress*, Brussels, Belgium, 1991, 226-229.
[82] Zhang, Q., A note on g_λ-independent events, in *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE/IFES'95)*, Yokohama, Japan 1995, 157-164.
[83] 张强，花文秀，乘积λ-可加 Fuzzy 测度和 Fuzzy 核，模糊系统与数学，1995, 9(1): 80-87。
[84] 李泽慧，张强，可测空间上的 g_λ测度的一些结果，兰州大学学报，1995，31(4)：31-38。
[85] Zhang, Q., and Du, W., Signed λ-measure and its decompositions, in: *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Barcelona, Spain, 1997, 1095-1180.

[86] 罗承忠，模糊集引论，北京师范大学出版社，(上册)1989；(下册)1993。
[87] Klir, G. J., Wang, Z., and Wang, W., Constructing fuzzy measures by transformations, *J. Fuzzy Math.*, 1996, 4(1): 207-215.
[88] Wang, W., Klir, G. J., and Wang, Z., Constructing fuzzy measures by rational transformations, *J. Fuzzy Math.*, 1996, 4(3): 665-675.
[89] Lee, K. M., and Leekwang, H., Identification of λ-fuzzy measure by genetic algorithms, *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 75: 301-309.
[90] Wang, W., Using genetic algorithms to determine fuzzy measures by statistics, M. S. Terminations, Binghamton University, 1995.
[91] Wang. J., Determining fuzzy measures by using statistics and neural networks, in: *Proc. IFSA'95*, Sao Paulo, Brazil, 1995, 519-521.
[92] Dubois, D., and Prade, H., A class of fuzzy measures on triangular norms, *Internet. J. General Systems*, 1982, 8: 43-61.
[93] Weber, S., $\perp$-decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorm, *J. Math. Anal. Appl.*; 1984, 101: 114-138.
[94] Weber, S., Two integrals and some modified version critical remarks, *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20: 97-105.
[95] Weber, S., Conditional measures and their applications to fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 42: 73-85.
[96] Klement, E. P., and Weber, S., Generalized measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 40: 375-394.
[97] Sugeno, M., and Murofushi, T., Pseudo-additive measures and integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, 1987, 122: 197-222.
[98] Ichihashi, H., Tanaka, M., and Asai, K., Fuzzy integrals based on pseudo-additions and multiplications, *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, 130: 354-364.
[99] Pap, E., Lebesgue and Saks decompositions of $\perp$ decomposable measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 38: 345-353.
[100] 赵汝怀，(*N*)模糊积分，数学研究与评论，1981，2：55-72。
[101] 赵汝怀，极限与(*N*)Fuzzy 积分次序交换问题，模糊数学，1985，3：41-44。
[102] 杨庆季，Fuzzy 测度空间上的泛积分，模糊数学，1985，3：107-114。
[103] 杨庆季，宋仁明，Fuzzy 测度空间上泛积分的进一步讨论，模糊数学，1985，4：27-36。
[104] 张强，徐扬，泛可加测度及其扩张，兰州大学学报，1996，专辑：239-242。
[105] Ling, C. H., Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen*, 1965, 12: 189-212.
[106] Mostert, P. S., and shields, A. L., On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Ann. Math.*, 1957, 65: 117-143.
[107] Aczel, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 1969.
[108] Schweizer, B., and Sklar, A., *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier Science Publishing, New York, 1983.
[109] 吴望名，模糊推理的原理和方法，贵州科技出版社，1994。
[110] Mesiar, R., and Rybárik, J., Pseudo-arithmetical operations, *Tatramountains Math. Publ.*, 1992, 2: 1-80.
[111] Mesiar, R., and Rybárik, J., Pan-operations structure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 74: 365-369.
[112] Zadeh, L. A., Probability measures of fuzzy events, *J. Math Anal. Appl.*, 1968, 23: 421-427.
[113] Knalili, S., Independent fuzzy events, *J. Math. Anal. Appl.*, 1979, 67: 412-420.
[114] Klement, E. P., Fuzzy σ-algebras and fuzzy measurables functions, *Fuzzy Sets and Systems*,

1980, 4: 83-93.
[115] Klement, E. P., Construction of fuzzy σ-algebras using triangular norms, *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, 85: 543-563.
[116] Klement, E. P., Characterization of finite fuzzy measures using Markoff-kernekls, *J. Math. Anal. Appl.*, 1980, 75: 330-339.
[117] Klement, E. P., Lowen, R., and Schwyhla, W., Fuzzy probability measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1981, 5: 21-30.
[118] Klement, E. P., Characterization of fuzzy measures constructed by means of triangular norms, *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, 85: 543-563.
[119] Wang, G., Fuzzy σ-algebra and fuzzy measurable spaces, *Kexue Tongbao*, 1982, 27: 818-821.
[120] Wang P., Fuzzy Contactability and fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 1982, 1: 81-92.
[121] 汪培庄，超σ-域与集值映射的可测性，科学通报，1983, 28: 1583-1585。
[122] Cheng, S., and Liu, Z., Using Markoff kernels to express fuzzy probability, *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, 113: 490-503.
[123] Cheng, S., and Liu, Z., Fuzzy orthogonal random measure, *J. Math. Anal. Appl.*, 1986: 476-481.
[124] Liu, Z., and Cheng, S., Fuzzy random measure and its extension theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 1983, 11: 135-149.
[125] 张文修，Fuzzy 数测度，科学通报，1986，23。
[126] Butnariu, D., Additive fuzzy measures and integrals I., *J. Math. Anal. Appl.*, 1983, 93: 436-452.
[127] Butnariu, D., Decompositions and ranges of additive fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1983, 10: 135-155.
[128] Butnariu, D., Non-atomic fuzzy measures and games, *Fuzzy Sets and Systems*, 1985, 17: 39-52.
[129] Butnariu, D., Fuzzy measurability and integrability, *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, 117: 385-410.
[130] Butnariu, D., Additive fuzzy measures and integrals III, *J. Math. Anal. Appl.*, 1987, 125: 288-303.
[131] Butnariu, D., Values and cores for fuzzy games with infinitely many players, *Int. J. Game Theory*, 1987, 16: 43-68.
[132] Butnariu, D., and Klement, E. P., Triangular norm-based measures and their Markov kernel representation, *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, 162: 111-143.
[133] Butanariu, D., and Klement, E. P., *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy coalitions*, Kluuer Academic Publishers, London, 1993.
[134] Qiao, Z., On fuzzy measure and fuzzy integral on fuzzy set, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 37: 77-92.
[135] Qizo, Z., Fuzzy integrals on L-fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 38: 61-79.
[136] Wang, Z., and Qizo, Z., Transformation theorems for fuzzy integrals on fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 34: 355-364.
[137] Liu, X., and Zhang, G., Lattice-valued fuzzy measure and lattice-valued fuzzy integral, *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 62: 319-332.
[138] Zheng, D., and Wang, Z., Fuzzy of integrals of fuzzy valued funtions, *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 54: 63-67.
[139] Zhang, D., and Wang, Z., On set-valued fuzzy integrals, *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 56, 237-241.
[140] Zhang, D., and Guo, C., Integrals of set valued functions for $\perp$-decomposable measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78: 341-346.
[141] Zhang, Q., and Xu, Y., $\widetilde{G}_\lambda$-independent fuzzy events in fuzzy systems, in: *Proceeding of*

1997 IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems, Beijing, China, 1997, Vol. 1: 355-358.

[142] Pu, B., and Liu, Y., Fuzzy topology I: Neighborhood structure of fuzzy point and Moore-Smith convergence, *J. Math. Anal. Appl.*, 1980, 76: 571-599.

[143] Liu, Y., Intersection operation on union-preserving mappings in completely distributive lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 1981, 84: 249-255.

[144] 刘应明，Fuzzy 集论中邻属关系的分析，数学年刊，1984，5：461-466。

[145] 刘应明，罗懋康，不分明单位区间的良紧性，科学通报，1986，31：1765-1767。

[146] Luo, M., Paracompactness in fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 1988, 130: 55-57.

[147] 王国俊，L-fuzzy 拓扑空间论，陕西师范大学出版社，西安，1988。

[148] 郑崇友，樊磊，崔宏斌，Frame 与连续格，首都师范大学出版社，北京，1994。

[149] 罗承忠，王德谋，区间值函数积分的推广与 Fuzzy 值函数的积分，模糊数学，1983，3(3)：45-52。

[150] 王德谋，罗承忠，Fuzzy 微分运算的推广，模糊数学，1985，5(1)：75-80。

[151] 郭述忠，区间值函数与模糊值函数的无穷积分，模糊系统与数学，1989，3(2)：49-58。

[152] Campos, L. M., and Jorge, M., Characterization and comparison of Sugeno and Choquet integrals, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 52: 61-67.

[153] Delgado, M., and Moral, S., Upper and lower fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 33: 191-200.

[154] Denneberg, D., *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[155] Höhle, U., A general theory of fuzzy plausibility measures, *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, 127: 346-364.

[156] Sun, Q., On the pseudo-autocontinuity of fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45, 59-68.

[157] Sun, Q., Property (S) of fuzzy measure and Riesz's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 62: 117-119.

[158] Wang, Z., Structural Characteristics of fuzzy measures on S-compact spaces, *Internet. J. Gen. Systems*, 1990, 17: 309-316.

[159] Wang, Z., Wang, W., and Klir, G. J., Pan-integrals with respect to imprecise probabilities, *Internet. J. Gen. Systems*, 1996, 25: 229-243.

[160] Wang, Z., Convergence theorems for sequences of Choquet integrals, *International Journal of General systems*, 1997, 26: 133-143.

[161] Wang, Z., and Klir, G. J., Choquet integrals and natural extensions of lower probabilities, *International Journal of Approximate Reasoning*, 1997, 16: 137-147.

[162] Wakker, P., A behavioral foundation for fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 37: 327-350。

[163] Walley, P., *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, London, 1991.

[164] Wu, C., and Ha, M., On the null-additivity of the fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78: 337-339

[165] 王震源，李法朝，Fuzzy 积分在评判过程中的应用，模糊数学，1985，5(1)：109-114。

[166] 李洪兴，汪培庄，模糊数学，国防工业出版社，1996。

[167] 贺仲雄，模糊数学及其应用，天津科技出版社，1983。

[168] 郑维行，王声望，实变函数与泛函分析概要，高等教育出版社，1980。

[169] Iseki, K., and Sugeno, M., A model of human evaluation process using fuzzy measure, *Internet. J. Man-Machine studies*, 1985, 22: 19-38.

致谢

本文是在导师杜文教授的悉心指导下完成的。在整个培养过程中，导师不辞辛苦，严格要求，事无大小都亲自过问，为学生的成长花费了大量精力，学生的每一点滴成绩都倾注了导师的辛勤汗水。导师渊博的知识、严谨治学的作风，诲人不倦的高贵品德、忘我的工作态度和崇高的敬业精神，使我受益匪浅，终生难忘。在此，学生谨向导师表示崇高的敬意和诚挚的感谢。

此外，在笔者的研究生学业期间，还得到了西南交通大学计算工程科学研究所陈大鹏教授、应用数学系徐扬教授的鼎力支持和热情帮助。他们的意见和建议使本文添色不少，他们渊博的知识，认真求实、严谨治学的态度，深深地影响着我。现借论文完成之际，谨表对他们的衷心感谢和崇高敬意。

感谢西南交通大学交通运输学院的各位领导、老师、办公室工作人员以及朱松年、高士廉和叶怀珍教授，马国忠、蒲云和张谨副教授在我学习期间所给予的大力支持和帮助。

感谢西南交通大学科研处赵清(原)处长、郑凯峰副处长对作者(被检索)论文的资助。

感谢西南交通大学交通运输规划与管理博士工作站的博士研究生们以及刘军博士给予作者的多方关照。

感谢河北大学的各级领导在我攻读博士学位期间给予我及家人的支持与关心。

另外，我的妻子熊孟英的理解和支持保证了本文的尽快完成，我的父母、姐姐、姐夫多年来一直关心着我的生活与学习，给予我鼓励与帮助，在此向他们表示感谢。

最后，对所有曾经关心、鼓励、支持我进步的师长、同事、同学、朋友们表示谢意，向论文参考文献的作者们一并致谢。

作者简历

一、简介

张强，男，汉族，1955 年 4 月生于辽宁省沈阳市，成长于北京。1972 年 9 月在青海省贵德县河阴公社插队，任民办教师。1975 年 9 月在兰州大学数学力学系计算数学专业学习，1978 年 7 月毕业留校，在数学专业任教。1985 年 9 月考入北京大学数学系应用数学研究生班，后在北京大学概率统计系获理学硕士。1987 年 9 月毕业分配至河北大学经济学院任教，副教授。1996 年 3 月考入西南交通大学运输工程系攻读博士学位，师从杜文教授，研究方向：非可加集函数及其在交通运输中的应用。

1990 年以来，先后发表学术论文 30 余篇，其中已经被国际三大检索系统检索 6 篇，另有 4 篇待检索。参加河北省教委立项课题两项。1991 年赴比利时布鲁塞尔参加国际模糊系统协会第四届世界大会，并在会议上宣读了论文。

二、攻读博士学位期间发表及被录用的论文

1.张强、徐扬，泛可加测度及其扩张，兰州大学学报，1996，专辑：239-242。

2.张强、徐扬，广义 Fuzzy 测度的 Lebesgue 分解，模糊系统与数学，1996，4：31-34。

3.Zhang Qiang, Du Wen, Signed λ-measure and its decompositions, in: *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Barcelona, Spain, July 1-5, 1997, 1095-1180. (已被 EI 和 ISTP 检索)

4.Zhang Qiang, Xu Yang, $\tilde{G}_\lambda$-independent fuzzy events in fuzzy systems, in: *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems*, Beijing, China, Oct. 28-31, 1997, Vol.1: 355-358. (已被 EI 检索)

5.Ye Huaizhen, Zhang Qiang, On the applied basis of λ-additive fuzzy measures, in: *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on*

Intelligent Processing Systems, Beijing, China, Oct. 28-31, 1997, Vol.1: 325-328. (已被 EI 检索)

6.张强、蒲云、杜文，广义 Fuzzy 测度的穷竭性、序连续性和 Jordan 分解，西南交通大学学报，1998，3：240-246。

7.张强、高隆昌、杜文，拟概率与条件拟概率，西南交通大学学报，1998，4：436-441。

8.Du Wen, Zhang Qiang, Decompositions of revised monotone signed fuzzy measures, in: *Proceedings of 1998 IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems*, Queensland, Australia, Aug. 4-7, 1998. (将被 EI 检索)

9. Jiang Dali, Zhang Qiang et al., Using GA to solve the combined vehicle routing and inventory allocation problem of decaying products, *Beijing Mathematics*, 1998, 4(2): 26-33.

10.Zhang Qiang, Jiang Dali et al., Some properties of signed set functions in expert systems, in *Proceedings of 1998 International Conference on Neural Networks and Brain*, Beijing, China, Oct. 27-30, 1998, 227-230.

11.Zhang Qiang, Xu Yang and Du Wen, Lebesgue decomposition theorem for σ-finite signed fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 101 (3): 131-137. 445-451
(《Fuzzy Sets and Systems》是 SCI 逐篇检索杂志)

12.Zhang Qiang, Some properties of the variations of non-additive set functions I, *Fuzzy Sets and Systems*. (有校样)